

**PENERAPAN MODEL MATEMATIKA PADA MARGINASI  
KONSTAN DARI LEUKOSIT**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**UMMI MARYAM**  
NIM. 04510001

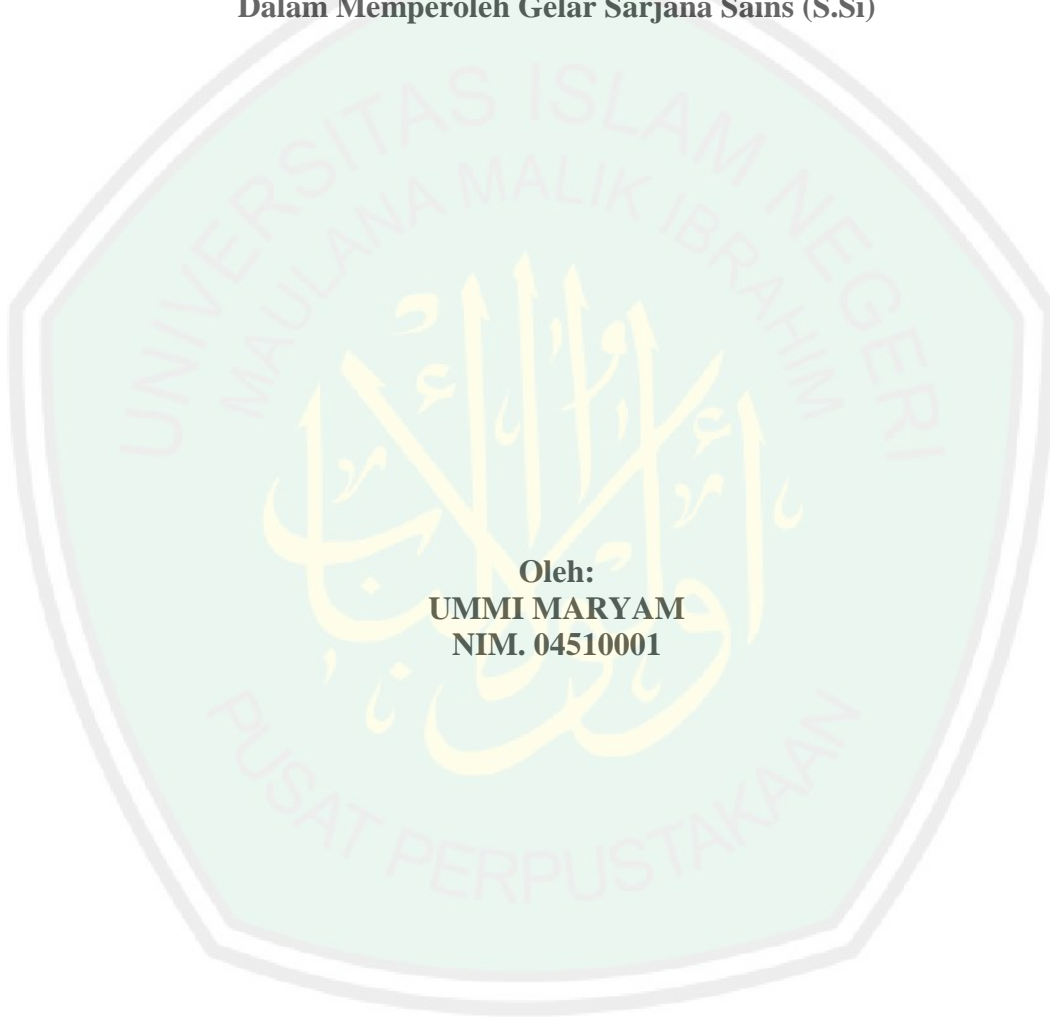


**JURUSAN MATEMATIKA FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2009**

**PENERAPAN MODEL MATEMATIKA PADA MARGINASI  
KONSTAN DARI LEUKOSIT**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada:  
Universitas Islam Negeri  
Maulana Malik Ibrahim Malang  
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan  
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**



**Oleh:  
UMMI MARYAM  
NIM. 04510001**

**JURUSAN MATEMATIKA FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2009**

**PENERAPAN MODEL MATEMATIKA PADA MARGINASI  
KONSTAN DARI LEUKOSIT**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**UMMI MARYAM**  
NIM. 04510001

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 14 Januari 2010

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Usman Pagalay, M.Si  
NIP: 19650414 200312 1 001

Munirul Abidin, M.Ag  
NIP. 19720420 200212 1 003

Mengetahui,  
**Ketua Jurusan Matematika**

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENERAPAN MODEL MATEMATIKA PADA MARGINASI  
KONSTAN DARI LEUKOSIT**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**UMMI MARYAM**  
NIM. 04510001

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan  
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 23 Januari 2010

**Susunan Dewan Penguji**

**Tanda Tangan**

- |                  |   |     |
|------------------|---|-----|
| 1. Penguji Utama | : <u>Drs. H. Turmudi, M.Si</u><br>NIP. 19571005 198203 1 006    | ( ) |
| 2. Ketua         | : <u>Wahyu Henky Irawan, M.Pd</u><br>NIP. 19710420 200003 1 003 | ( ) |
| 3. Sekretaris    | : <u>Usman Pagalay, M.Si</u><br>NIP: 19650414 200312 1 001      | ( ) |
| 4. Anggota       | : <u>Munirul Abidin, M,Ag</u><br>NIP. 19720420 200212 1 003     | ( ) |

**Mengetahui dan Mengesahkan,  
Ketua Jurusan Matematika**

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : UMMI MARYAM

NIM : 04510001

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penerapan Model Matematika pada Marginasi Konstan dari Leukosit

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 14 Januari 2010

Yang membuat pernyataan

Umami Maryam  
NIM. 04510001

## MOTTO

*Semua orang adalah guruku dan  
Semua tempat adalah sekolahku*



## PERSEMBAHAN

*Dengan iringan doa dan rasa syukur yang teramat besar,  
Karya tulis ini penulis persembahkan kepada:*

*Ayah dan Ibu tercinta, yang telah memberikan dan mengorbankan  
segalanya untuk mewujudkan cita-cita penulis*

*Adik-adik tercinta, yang selalu memberikan dukungan materi, moril dan  
spirituil.*

*Seluruh keluarga besar penulis yang telah memberikan Doa dengan tulus  
Teman-tercinta yang telah memberikan dukungan untuk terus bersemangat.*

## KATA PENGANTAR



*Alhamdulillahirrobbil 'alamin*, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “*MODEL MATEMATIKA UNTUK MENGESTIMASI MARGINASI KONSTAN DARI LEUKOSIT*” ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
5. Munirul Abidin, M.Ag, selaku dosen pembimbing keagamaan, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.

6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Bapak dan Ibu tercinta, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spirituil serta pengorbanan dan perjuangannya yang tak pernah kenal lelah dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis sukses dalam meraih cita-cita serta ketulusan do'anya kepada penulis sampai dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Adik-adik tercinta, yang selalu memberikan bantuan moril maupun spirituil, semangat dan do'a selama kuliah serta dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Teman-teman Matematika angkatan 2004, terima kasih atas doa serta kenangan yang kalian berikan.
10. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan sprituil penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya Matematika. Amien.

Malang, 14 Januari 2010

Penulis

## DAFTAR ISI

**HALAMAN JUDUL**

**HALAMAN PENGAJUAN**

**HALAMAN PERSETUJUAN**

**HALAMAN PENGESAHAN**

**PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

**KATA PENGANTAR** ..... i

**DAFTAR ISI** ..... iii

**DAFTAR GAMBAR**..... v

**ABSTRAK** ..... vi

### **BAB I : PENDAHULUAN**

1.1. Latar Belakang ..... 1

1.2. Rumusan masalah ..... 4

1.3. Tujuan Pembahasan ..... 4

1.4. Batasan Masalah ..... 4

1.5. Manfaat Pembahasan ..... 5

1.6. Metode Penelitian ..... 5

1.7. Sistematika Pembahasan ..... 6

### **BAB II : KAJIAN PUSTAKA**

2.1. Persamaan Diferensial ..... 8

2.2. Kestabilan Titik Kritis dari Sistem Otonomous..... 10

2.3. Nilai Eigen, Vektor Eigen dan Diagonalisasi ..... 18

2.4. Titik Tetap dan Teorema Titik Tetap..... 22

2.5. Matrik Jacobian..... 23

2.6. Metode Numerik untuk Persamaan Diferensial ..... 25

2.7. Model Matematika ..... 27

2.8. Sel Darah Putih..... 29

2.9. Leukosit dan Pemodelan Matematika dalam Perspektif

Islam .....	36
<b>BAB III : PEMBAHASAN</b>	
3.1. Pembentukan Model Matematika pada Leukosit.....	41
3.2. Deskripsi Skema Dinamik Leukosit pada Organisma .....	42
3.3. Analisis Model matematika.....	46
3.4. Titik Tetap.....	46
3.5. Nilai Eigen.....	49
3.6. Solusi Numerik Model Matematika.....	50
3.7. Hasil Numerik Sistem Persamaan Diferensial.....	51
3.8. Interpretasi Model Matematika.....	53
3.9. Pemodelan Matematika dalam Prospektif Islam.....	53
<b>BAB IV : PENUTUP</b>	
4.1. Kesimpulan.....	57
4.2. Saran.....	59
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	
<b>LAMPIRAN-LAMPIRAN</b>	

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Skema dinamik leukosit.....	42
Gambar 3.2 Grafik populasi sel pada saat $t = 100$ .....	52
Gambar 3.3 Grafik populasi sel pada saat $t = 1000$ .....	52



## ABSTRAK

Maryam, Ummi. 2009. *Penerapan Model Matematika pada Marginasi Konstan dari Leukosit*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang  
Pembimbing: (I) Usman Pagalay, M.Si (II) Munirul Abidin, M.Ag

**Kata Kunci:** Model Matematika, Leukosit, Sistem Persamaan Diferensial.

Model matematika adalah suatu representasi dari suatu persamaan atau sekumpulan persamaan yang mengungkapkan perilaku suatu sistem. Model matematika merupakan suatu proses yang melalui tiga tahap yaitu perumusan model matematika, penyelesaian dan/atau analisis model matematika serta penginterpretasikan hasil ke situasi nyata. Contohnya dalam sel darah putih atau biasa disebut dengan leukosit.

Di dalam leukosit terdapat dua sub-populasi yang dapat dipertukarkan, yaitu kelompok marginasi ( $\Phi_m$ ) dan kelompok sirkulasi ( $\Phi_c$ ). Dua sub-populasi ini ditemukan pada kondisi normal dan berpotensi dipengaruhi oleh sesuatu yang tidak normal, baik mengenai patologi maupun fisiologi. Berdasarkan latar belakang tersebut pembahasan dilakukan dengan tujuan untuk (1) mengetahui penerapan model matematika pada marginasi konstan dari leukosit (2) mengetahui titik kestabilan dari penerapan model matematika pada marginasi konstan dari leukosit.

Berdasarkan hasil penelitian ini, diperoleh model matematika pada marginasi konstan dari leukosit adalah sebagai berikut:

$$\frac{d\Phi_c}{dt} = P + R\Phi_m - (M + S_B)\Phi_c$$

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = M\Phi_c - (R + S_B)\Phi_m$$

Model ini terdiri dari satu sistem persamaan diferensial yang bergantung pada variabel-variabel yang menyatakan tingkat populasi sel marginasi ( $\Phi_m$ ) dan populasi sel sirkulasi ( $\Phi_c$ ). Kemudian, untuk menentukan titik kestabilannya menggunakan *software* MAPLE 9.5 dan penyelesaian model dinamik dengan metode numerik Heun yang perhitungannya menggunakan *software* MATLAB 6.5. Setelah dilakukan perhitungan, diperoleh titik kestabilan, yaitu: titik kritis yang menunjukkan titik kestabilan saat ketiadaan hambatan atau tidak ada pengaruh fisiologi dan pathologi.

Pada pembahasan diperoleh titik tetap, yaitu titik tetap yang menggambarkan ketiadaan pengaruh faktor infeksi dan inflamasi terhadap perubahan populasi sel marginasi dan populasi sel sirkulasi. Dengan menggunakan *software* maple, diperoleh nilai eigen yang menunjukkan bahwa titik keseimbangannya bersifat stabil.

# B A B I

## P E N D A H U L U A N

### 1.1 Latar Belakang

Dewasa ini semakin banyak disiplin ilmu yang menggunakan model matematika ataupun penalaran matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi. Penggunaan model matematika telah banyak membantu menyelesaikan masalah-masalah di berbagai bidang sains, ekonomi dan teknik.

Secara umum pengertian model adalah suatu usaha menciptakan suatu replika/tiruan dari suatu fenomena alam. Pada model matematika replika/tiruan tersebut dilaksanakan dengan mendeskripsikan fenomena alam dengan satu set persamaan. Kecocokan model terhadap fenomena tersebut tergantung dari ketepatan formulasi persamaan matematis dalam mendeskripsikan fenomena alam yang ditirukan.

Pemodelan matematika adalah suatu proses yang menjalani tiga tahap yaitu perumusan model matematika, penyelesaian dan/atau analisis model matematika dan penginterpretasian hasil ke situasi nyata (Pamuntjak, 1990: 1).

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya atau ada persamaannya (Abdussakir, 2007: 80). Pada dasarnya manusia tidak dapat membuat rumus sedikitpun, mereka hanya menemukan rumus atau persamaan. Dalam pemodelan matematika, ilmuwan hanya mencari persamaan-persamaan atau rumus-rumus yang berlaku pada fenomena, sehingga ditemukannya suatu model matematika. Pemodelan matematika merupakan salah satu cara untuk memprediksi adhesi leukosit pada dinding pembuluh darah pada awal peradangan.

Allah SWT berfirman dalam Al-Qur'an:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٥٩﴾

Artinya: “*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*”.

(QS. Al-Qomar, 54:49)

Islam menetapkan tujuan pokok kehadirannya untuk memelihara agama, jiwa, akal, jasmani, harta dan keturunan. Setidaknya tiga dari yang disebut itu berkaitan dengan kesehatan, karena itu ditemukan bahwa Islam amat kaya dengan tuntunan kesehatan.

Islam mengajarkan bagaimana cara menjaga diri dan kesehatan tubuh serta memeliharanya. Majelis Ulama Indonesia (MUI), misalnya, dalam Musyawarah Nasional Ulama tahun 1983 merumuskan kesehatan sebagai “ketahanan jasmaniah, ruhaniah, dan sosial yang dimiliki manusia, sebagai karunia Allah yang wajib disyukuri dengan mengamalkan (tuntunan-Nya), dan memelihara serta mengembangkannya.”

sebagaimana firmanNya dalam surat Al-Maidah [5]: 3:

حُرِّمَتْ عَلَيْكُمْ أَلْمَيْتَةُ وَالدَّمُ وَلَحْمُ الْخِنْزِيرِ وَمَا أُهْلَ لِغَيْرِ اللَّهِ بِهِ وَالْمُنْخَنِقَةُ  
وَالْمَوْقُوذَةُ وَالْمُتَرَدِّيَةُ وَالنَّطِيحَةُ وَمَا أَكَلَ السَّبُعُ إِلَّا مَا آذَكْتُمْ ﴿٣﴾

Artinya: “*Diharamkan bagimu (memakan) bangkai, darah], daging babi, (daging hewan) yang disembelih atas nama selain Allah, yang tercekik, yang terpukul, yang jatuh, yang ditanduk, dan diterkam binatang buas, kecuali yang sempat kamu menyembelinya...*”. (QS. Al-Maidah [5]: 3)

Ayat di atas menerangkan bahwa bangkai, darah, daging babi, atau daging hewan yang mati tanpa disembelih dengan menyebut nama Allah diharamkan karena memakan sesuatu yang kotor akan memberikan kemudharatan atau mendatangkan penyakit bagi tubuh. Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan bahwa kesehatan merupakan nikmat Allah yang terbesar bagi hambaNya setelah nikmat Iman dan Islam serta pentingnya menjaga kesehatan dari hal-hal yang dapat membahayakan tubuh.

Allah menciptakan manusia dengan bentuk yang sangat sempurna yang dilengkapi dengan system pelindung yang biasa disebut dengan sistem imun pada tubuh agar dapat terhindar dari berbagai penyakit, sebagaimana firman-Nya dalam surat At-Tin [95] ayat 4

لَقَدْ خَلَقْنَا الْإِنْسَانَ فِي أَحْسَنِ تَقْوِيمٍ ﴿٤﴾

Artinya: “*Sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia dalam bentuk yang sebaik-baiknya*”. (QS. At-Tin [95]: 4)

Di dalam leukosit terdapat dua sub-populasi yang dapat dipertukarkan, yaitu kelompok marginal dan kelompok sirkulasi. Dua sub-populasi ini ditemukan pada kondisi normal dan berpotensi dipengaruhi oleh sesuatu yang tidak normal, baik mengenai patologi maupun fisiologi.

Berdasarkan paparan di atas, penulis ingin mengangkat tema tulisan ini dengan judul **“PENERAPAN MODEL MATEMATIKA PADA MARGINASI KONSTAN DARI LEUKOSIT.”**

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalahnya adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana penerapan model matematika pada marginasi konstan dari leukosit?
2. Bagaimana titik kestabilan dari penerapan model matematika pada marginasi konstan dari leukosit?

## 1.3 Tujuan Pembahasan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari pembahasan ini adalah:

1. Mengetahui penerapan model matematika pada marginasi konstan dari leukosit
2. Mengetahui titik kestabilan dari penerapan model matematika pada marginasi konstan dari leukosit

## 1.4 Batasan Masalah

Dalam penulisan ini, model ini menguraikan perhitungan nilai konstan untuk sirkulasi dan marginasi dengan sel darah putih. Penulis memberikan batasan pembahasan pada penggunaan sistem persamaan diferensial orde dua dan hanya pada dua sub populasi sel darah putih yang dapat ditukarkan, yaitu sub populasi yang bermarginasi dan sub populasi yang bersirkulasi. Kemudian untuk memudahkan proses perhitungan penulis menggunakan *software* MAPLE untuk mencari titik kestabilan dan MATLAB untuk mencari penyelesaian model dinamik menggunakan metode Heun.

### 1.5 Manfaat Pembahasan

Penelitian ini diharapkan penulis mampu mengetahui, menelaah, memahami dan menganalisa pemodelan matematika serta mengetahui dan memperdalam pengetahuan tentang model matematika untuk memprediksi marginasi konstan dari leukosit.

### 1.6 Metode Penelitian

Dalam hal ini penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan atau studi kepustakaan. Penelitian kepustakaan yaitu penelitian yang dalam menunjukkan penelitiannya dilakukan dengan cara mendalami, mencermati, menelaah, dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan. Sumber kajian pustaka dapat berupa jurnal penelitian, disertasi, tesis, skripsi, laporan penelitian, atau diskusi-diskusi ilmiah.

Pengumpulan data mengenai sistem persamaan diferensial dan pemodelan matematika dalam penelitian ini dilakukan dengan metode:

- a. Dokumentasi, yaitu mencari data mengenai model matematika dengan menggunakan sistem persamaan diferensial atau variabel-variabel yang berupa catatan, buku, jurnal, makalah, dan lain-lain (Arikunto, 2002: 206)
- b. Kajian teoritis, yaitu dengan membaca, menggali dari buku-buku yang berkaitan dengan masalah persamaan diferensial, model matematika dan marginasi konstan.

Setelah didapatkan data mengenai sistem persamaan diferensial dan pemodelan matematika, langkah selanjutnya dilakukan analisis terhadap data tersebut. Analisis dari data ini digunakan untuk mendapatkan model matematika pada marginasi konstan dari

leukosit dan didasarkan pada mekanisme terjadinya perubahan populasi sel leukosit. Adapun langkah-langkah umum dalam pembentukan model matematika ini adalah:

- 1 Mengumpulkan data mengenai sistem persamaan diferensial dan pemodelan matematika dan informasi dengan cara membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan sistem persamaan diferensial dan pemodelan matematika.
- 2 Menentukan variabel yang digunakan dengan mengasumsikan bahwa ada empat variabel-variabel yang menggambarkan populasi sel dalam kelompok sirkulasi, populasi sel dalam kelompok marginal, populasi sel dalam jaringan padat, dan kuantitas dari faktor regulasi diri.
- 3 Selanjutnya mengestimasi parameter-parameter yang relevan dalam sistem persamaan diferensial yang kemudian dilanjutkan dengan melakukan interpretasi.

Penyelesaian analitik sistem persamaan diferensial sulit ditentukan sehingga penyelesaian dilakukan dengan menggunakan metode numerik Heun dan untuk memudahkan perhitungan digunakan *software* MATLAB 6.5. Kemudian untuk mencari titik kestabilan dari model tersebut digunakan *software* MAPLE 9.5.

## **1.7 Sistematika Pembahasan**

### **BAB I: Pendahuluan**

Pada bab ini penulis paparkan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan pembahasan, batasan masalah, manfaat pembahasan, metode penelitian serta sistematika pembahasan.

**BAB II: Kajian Pustaka**

Penulis membahas tentang landasan teori yang dijadikan ukuran standarisasi dalam pembahasan pada bab yang merupakan tinjauan teoritis yang terdiri atas persamaan diferensial, persamaan diferensial linier dan persamaan diferensial tak linier, sistem persamaan diferensial linier dan sistem persamaan diferensial tak linier, nilai eigen, vektor eigen, diagnolisasi, titik tetap, matrik jacobian, metode numerik untuk persamaan diferensial, model matematika leukosit, pemodelan matematika dalam perspektif Islam.

**BAB III: Pembahasan**

Pembahasan pada bab ini yaitu tentang pembentukan model matematika pada leukosit, analisis model matematika, solusi numerik model matematika, hasil numerik sistem persamaan diferensial dan interpretasi model matematika pada leukosit.

**BAB IV:Penutup**

Penulis pada bab ini membahas tentang kesimpulan dari hasil penelitian serta saran.

**DAFTAR PUSTAKA****LAMPIRAN**

## B A B II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Persamaan Diferensial

##### Definisi 1.

Persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas disebut persamaan diferensial (Pamuntjak dkk, 1990: 11).

##### Definisi 2.

Sebuah persamaan yang mengandung derivatif/diferensial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial (PD). Jika hanya satu variabel bebasnya, maka persamaannya disebut persamaan diferensial biasa. Sedangkan jika variabel bebasnya lebih dari satu maka persamaannya disebut persamaan diferensial parsial (Baiduri, 2002: 2).

##### Definisi 3.

Persamaan diferensial adalah memuat turunan satu (atau beberapa) fungsi yang tak diketahui (Finizio dkk, 1982: 1).

Meskipun persamaan seperti itu seharusnya disebut “persamaan turunan”, namun istilah “persamaan diferensial” (*aeoquatio differentialis*) yang diperkenalkan oleh Leibniz dalam tahun 1676 sudah umum digunakan. Sebagai contoh,

$$1) y' + xy = 3$$

$$2) y'' + 5y' + 6y = \cos x$$

$$3) y'' = (1 + y'^2)(x^2 + y^2)$$

$$4) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

adalah persamaan-persamaan diferensial. Dalam persamaan (1) – (3) fungsi yang tidak diketahui dinyatakan  $y$  dan  $x$  dianggap sebagai satu peubah bebas, yaitu  $y = y(x)$ . Argumen  $x$  dalam  $y(x)$  (dan turunan-turunannya) biasanya dihilangkan untuk penyederhanaan notasi. Lambang  $y'$  dan  $y''$  dalam persamaan (1) – (3) berturut-turut menyatakan turunan pertama dan kedua dari fungsi  $y(x)$  terhadap  $x$ . Dalam persamaan (4) fungsi yang tak diketahui  $u$  dianggap sebagai fungsi dua peubah bebas  $t$  dan  $x$ , yaitu  $u = u(t, x)$ ,  $\partial^2 u / \partial t^2$  dan  $\partial^2 u / \partial x^2$  berturut-turut adalah turunan parsial kedua dari fungsi  $u(t, x)$  terhadap  $t$  dan  $x$ . Persamaan (4) memuat turunan-turunan parsial dan disebut *persamaan diferensial parsial*. Persamaan-persamaan (1) – (3) memuat turunan biasa dan disebut *persamaan diferensial biasa* (Finizio dkk, 1982 : 1).

Derajat (order) dari persamaan diferensial ditentukan oleh derajat tertinggi dari turunannya. Sebagai contoh persamaan diferensial biasa di bawah adalah order satu, karena turunan tertingginya adalah turunan pertama.

$$x \frac{dy}{dx} + y = 3 \quad (2.1)$$

Sedang persamaan diferensial biasa orde dua mengandung turunan kedua sebagai turunan tertingginya, seperti:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad (2.2)$$

(Triatmodjo, 2002: 165).

## 2.2 Kestabilan Titik Kritis dari Sistem Otonomous

Suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk:

$$x = f(x, y), \quad y = g(x, y) \quad (2.3)$$

di mana fungsi-fungsi  $f$  dan  $g$  bebas dari waktu disebut *Sistem Otonomous*.

Sebuah titik  $(x_0, y_0)$  merupakan titik kritis (atau titik keseimbangan) dari sistem (2.3) jika  $f(x_0, y_0) = 0$  dan  $g(x_0, y_0) = 0$ . Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, akibatnya jika titik  $(x_0, y_0)$  merupakan titik kritis dari (2.3), maka sepanjang fungsi konstan

$$x(t) = x_0, \quad y(t) = y_0 \quad (2.4)$$

merupakan penyelesaian dari (2.3) untuk semua  $t$ .

Jika setiap penyelesaian dari (2.3) yang memulai cukup dekat dengan penyelesaian (2.4) pada  $t=0$  akan tetap dekat dengan (2.4) untuk seluruh waktu  $t>0$  berikutnya, maka penyelesaian (2.4) atau titik kritis  $(x_0, y_0)$  disebut stabil.

### Definisi 6:

Titik kritis  $(x_0, y_0)$  atau penyelesaian konstan (2.4) dari sistem (2.3) disebut stabil jika untuk setiap bilangan  $\varepsilon$  positif ada suatu  $\delta$  positif demikian sehingga setiap penyelesaian  $(x(t), y(t))$  dari (2.3) yang pada  $t=0$  memenuhi

$$[x(0) - x_0]^2 + [y(0) - y_0]^2 < \delta \quad (2.5)$$

terwujud dan memenuhi

$$[x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2 < \varepsilon \quad (2.6)$$

untuk semua  $t \geq 0$ . (Finizio/Ladas, 1982:291)

**Definisi 7:**

Sebuah titik kritis  $(x_0, y_0)$  atau penyelesaian konstan (2.4) disebut stabil asimtot jika titik itu stabil dan jika sebagai tambahan ada  $\delta_0$  demikian sehingga setiap penyelesaian  $(x(t), y(t))$  dari (2.3) yang pada  $t=0$  memenuhi

$$[x(0) - x_0]^2 + [y(0) - y_0]^2 < \delta_0 \quad (2.7)$$

terwujud untuk semua  $t \geq 0$  dan memenuhi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0 \quad (2.8)$$

(Finizio/Ladas, 1982:291)

**Definisi 8:**

Sebuah titik yang tidak stabil disebut takstabil.

(Finizio/Ladas, 1982:291)

**Contoh 1:**

Buktikan bahwa titik kritis  $(0,0)$  dari system

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x \quad (2.9)$$

adalah stabil. Stabil asimtotikkah titik ini?

**Penyelesaian.** Akan diterapkan definisi 1, misalkan diberikan  $\varepsilon = 0$ . Pilih  $\delta = \varepsilon$ . Setiap penyelesaian dari (2.9) yang berbentuk

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

$$y(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t$$

Dengan  $c_1$  dan  $c_2$  konstanta sebarang. Di sini  $x_0 = y_0 = 0$ ,  $x(0) = c_1$ , dan  $y(0) = -c_2$ , harus dibuktikan bahwa (2.5) menyatakan (2.6). Benarlah,  $c_1^2 + c_2^2 < \delta$  menyatakan bahwa

$$(c_1 \cos t + c_2 \sin t)^2 + (c_1 \sin t - c_2 \cos t)^2 = c_1^2 + c_2^2 < \delta = \varepsilon \quad (2.10)$$

dan lengkaplah bukti bahwa titik kritis (0,0) dari sistem (2.9) adalah stabil. Dari persamaan (2.10) diketahui bahwa trayektori dari system (2.9) merupakan lingkaran-lingkaran yang berpusat di titik kritis (0,0). Jadi, lingkaran-lingkaran itu tidak menghampiri titik kritis bila  $t \rightarrow \infty$ . Ini berarti persamaan (2.8) tidak berlaku. Karena itu, (0,0) bukan titik kritis dari (2.9) yang stabil asimtotis.

### Contoh 2:

Buktikan titik kritis (0,0) dari sistem

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dy}{dt} = -y \quad (2.11)$$

Adalah stabil asimtotis.

**Penyelesaian** Pertama harus dibuktikan bahwa (0,0) adalah stabil. Misalkan diberikan  $\varepsilon < 0$ . Pilih  $\delta = \varepsilon$ . Penyelesaian umum dari (2.11) berbentuk

$$x(t) = c_1 e^{-t}, \quad y(t) = c_2 e^{-t},$$

dengan  $c_1$  dan  $c_2$  konstanta sebarang. Di sini  $x_0 = y_0 = 0$ ,  $x(0) = c_1$ , dan  $y(0) = c_2$ . Kembali harus dibuktikan bahwa (2.5) menyatakan (2.6). Benarlah  $c_1^2 + c_2^2 < \delta$  menyatakan bahwa

$$(c_1 e^{-t})^2 + (c_2 e^{-t})^2 = (c_1^2 + c_2^2) e^{-2t} \leq c_1^2 + c_2^2 < \delta = \varepsilon$$

Jadi, titik (0,0) adalah stabil. Karena untuk sebarang  $c_1$  dan  $c_2$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_1 e^{-t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_2 e^{-t} = 0,$$

Maka titik kritis (0,0) adalah stabil asimtotis.

### Contoh 3:

Buktikan bahwa titik kritis (0,0) dari system

$$\frac{dx}{dt} = -3x + 4y, \quad \frac{dy}{dt} = -2x + 3y \quad (2.12)$$

adalah takstabil.

**Penyelesaian.** Andaikan titik (0,0) stabil, maka untuk  $\varepsilon < 0$  akan ada suatu  $\delta < 0$  demikian sehingga (2.5) menyatakan (2.6). Perhatikan bentuk penyelesaian dari (2.12) berikut

$$x(t) = \frac{\sqrt{\delta}}{2} e^t, \quad y(t) = \frac{\sqrt{\delta}}{2} e^t$$

Di sini  $x_0 = y_0 = 0, x(0) = y(0) = \sqrt{\delta/2}$ , dan karena itu persamaan (2.5) dipenuhi. Tetapi, persamaan (2.6) menjadi

$$\frac{\delta}{2} e^{2t} < \varepsilon$$

yang tidak benar untuk semua  $t \geq 0$ . Jadi,  $(0,0)$  adalah titik kritis takstabil dari sistem (2.12).

Stabilitas berarti bahwa perubahan kecil dalam syarat awal hanya menyebabkan pengaruh kecil pada penyelesaian, kestabilan asimtotis berarti bahwa pengaruh dari suatu perubahan kecil cenderung menghilang sama sekali, sedang ketakstabilan berarti bahwa suatu perubahan kecil dalam syarat awal mempunyai pengaruh besar pada penyelesaian.

Sistem otonomous (2.3) linier dengan koefisien konstan, bila:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy \quad (2.13)$$

dengan  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , dan  $d$  konstanta-konstanta, kita dapat memperoleh penyelesaian secara eksplisit. Dimisalkan bahwa  $ad - bc \neq 0$ . Maka titik  $(0,0)$  adalah satu-satunya titik kritis dari (2.13). Penyelesaian dari system (2.13) berbentuk:

$$x = Ae^{kt}, \quad y = Be^{kt},$$

di mana merupakan akar dari persamaan karakteristiknya:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \quad (2.14)$$

Sifat stabilitas titik kritis  $(0,0)$  dari system (2.14) hamper seluruhnya tergantung pada akar-akar dari persamaan (2.14).

**Teorema 1:**

- a) Titik kritis (0,0) dari system (2.13) stabil, jika dan hanya jika, kedua akar dari persamaan (2.14) adalah riil dan negatif atau mempunyai bagian riil tak positif
- b) Titik kritis (0,0) dari system (2.13) stabil asimtotis, jika dan hanya jika, kedua akar dari persamaan (2.14) adalah riil dan negatif atau mempunyai bagian riil yang negatif.
- c) Titik kritis (0,0) dari system (2.13) takstabil, jika salah satu (atau kedua) akar dari persamaan (2.14) riil dan positif atau jika paling sedikit satu akar mempunyai bagian riil yang positif

Jika sistem (2.3) berbentuk:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by + F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + G(x, y)\end{aligned}\tag{2.15}$$

dengan  $ad - bc \neq 0$  dan  $F(0,0) = G(0,0) = 0$ . [Jadi, (0,0) merupakan titik kritis dari (2.15)]. Selanjutnya, andaikan bahwa fungsi-fungsi  $F$  dan  $G$  kontinu dan mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu di dekat titik asal (0,0), dan bahwa:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{F(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{G(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0\tag{2.16}$$

syarat (2.16) berarti bahwa system linier (2.13) merupakan hampiran yang baik dari system (2.15). Maka berlaku:

**Teorema 2:**

- a) Titik kritis (0,0) dari system tak linier (2.15) adalah stabil asimtotis jika titik kritis (0,0) dari system yang “diliniarkan” (2.13) adalah stabil asimtotis
- b) Titik kritis (0,0) dari system tak linier (2.15) adalah takstabil jika titik kritis (0,0) dari system (2.13) adalah tak stabil.

**Contoh 4:**

Buktikan bahwa titik kritis (0,0) dari system tak linier

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x + y + (x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= -2y - (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}\quad (2.17)$$

adalah stabil asimtotis

**Penyelesaian.** Di sini  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$ ,  $d = -2$  dan  $ad - bc = 2 \neq 0$ .

$F(x, y) = (x^2 + y^2)$ ,  $G(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ , dan  $F(0,0) = G(0,0) = 0$ . Jelaslah, syarat (2.16) dipenuhi. Sistem yang menjadi linier adalah

$$x' = -x + y, \quad y' = -2y \quad (2.18)$$

persamaan karakteristik dari system (2.18) adalah  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ . Akar-akarnya adalah

$\lambda_1 = -1$  dan  $\lambda_2 = -2$ . Karena akar-akar itu keduanya negatif, titik (0,0) merupakan titik

kritis stabil asimtotis dari (2.18). Jadi, menurut Teorema 2(a), titik (0,0) juga merupakan titik kritis stabil asimtotis dari system tak linier (2.17).

**Contoh 5:**

Buktikan bahwa titik kritis (0,0) dari system tak linier

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -3x + 4y + x^2 - y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + 3y - xy\end{aligned}\quad (2.19)$$

adalah takstabil.

**Penyelesaian.** Di sini  $a = -3$ ,  $b = 4$ ,  $c = -2$ ,  $d = 3$ , dan  $ad - bc = -1 \neq 0$ .

$F(x, y) = (x^2 - y^2)$ ,  $G(x, y) = -xy$ , dan  $F(0,0) = G(0,0) = 0$ .  $x$  dan  $y$  dinyatakan dalam koordinat polar  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , ( $x$  mendekati 0 dan  $y$  mendekati 0 sepadan dengan  $r$  mendekati 0). Maka

$$\frac{F(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{r} = r \cos 2\theta \rightarrow 0 \quad \text{bila } r \text{ mendekati } 0$$

dan

$$\frac{G(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r} = r \cos \theta \sin \theta \rightarrow 0 \quad \text{bila } r \text{ mendekati } 0$$

Jadi, syarat (2.19) dipenuhi. Sistem yang menjadi linier adalah

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + 3y\end{aligned}\tag{2.20}$$

Persamaan karakteristik dari system (2.20) adalah  $\lambda^2 - 1 = 0$ . Akar-akarnya adalah  $\lambda_1 = 1$  dan  $\lambda_2 = -1$ . Karena salah satu akarnya positif, titik (0,0) adalah titik kritis takstabil dari (2.20). Menurut Teorema 2(b), titik (0,0) juga merupakan titik kritis takstabil dari system tak linier (2.19). (Finizio/Ladas, 1982: 294)

### 2.3 Nilai Eigen, Vektor Eigen dan Diagonalisasi

#### Definisi 9.

Jika  $A$  adalah matriks  $n \times n$ , maka vector tak nol di dalam  $R^n$  dinamakan vektor Eigen (*Eigen Vector*) dari  $A$  jika  $Ax$  adalah kelipatan scalar dari  $x$ , yakni

$$Ax = \lambda x\tag{2.21}$$

untuk suatu skalar  $\lambda$ . Skalar  $\lambda$  dinamakan nilai Eigen (*Eigen Value*) dari  $A$  dan  $x$  dikatakan vektor Eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda$  (Anton, 1997: 277).

Untuk mencari nilai Eigen matrik  $A$  yang berukuran  $n \times n$  maka kita menuliskan kembali  $Ax = \lambda x$  sebagai

$$Ax = \lambda x\tag{2.22}$$

atau secara ekuivalen

$$(\lambda I - A)x = 0\tag{2.23}$$

supaya  $\lambda$  menjadi nilai Eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan ini.

Akan tetapi persamaan (2.22) akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (2.24)$$

ini dinamakan persamaan karakteristik dari  $A$ ; skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari  $A$ . Bila diperluas, maka determinan  $\det(\lambda I - A)$  adalah polinom  $\lambda$  yang kita namakan *polinom karakteristik* dari  $A$ .

Jika  $A$  adalah matrik  $n \times n$ , maka polinom karakteristik  $A$  harus memenuhi  $n$  dan koefisien  $\lambda^n$  adalah 1. Jadi, polinom karakteristik dari matrik  $n \times n$  mempunyai bentuk

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n \quad (2.25)$$

Contoh:

Vektor  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  adalah vektor Eigen dari  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

yang bersesuaian dengan nilai Eigen  $\lambda = 3$  karena

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x$$

#### Definisi 10.

Matriks kuadrat  $A$  dinamakan dapat didiagnolisasi (*diagonalizable*) jika terdapat matriks  $P$  yang dapat dibalik sehingga  $P^{-1}AP$  diagonal; matriks  $P$  dikatakan mendiagnolisasi  $A$  (Anton, 1997: 277).

Contoh:

Carilah matrik  $P$  yang mendiagonalkan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Pemecahan: persamaan karakteristik dari  $A$  adalah  $(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2 = 0$ , sehingga nilai-nilai Eigen dari  $A$  adalah  $\lambda = 1$  dan  $\lambda = 5$ . Jadi, kita peroleh dua ruang eigen dari  $A$ .

Menurut definisi,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

adalah vector Eigen  $A$  yang bersesuaian dengan  $\lambda$  jika dan hanya jika  $x$  adalah pemecahan tak trivial dari  $(\lambda I - A)x = 0$ , yakni dari

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Jika  $\lambda = 5$ , maka (2.26) menjadi

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan memecahkan sistem ini maka akan menghasilkan

$$x_1 = -s \quad x_2 = s \quad x_3 = t$$

Jadi, vektor-vektor eigen  $A$  yang bersesuaian dengan  $\lambda = 5$  adalah vektor-vektor tak nol yang berbentuk

$$x = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

karena

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

adalah vektor-vektor bebas linier, maka vektor-vektor tersebut akan membentuk basis untuk ruan eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda = 5$ .

Jika  $\lambda = 1$ , maka (2.26) menjadi

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan memecahkan sistem ini maka akan menghasilkan

$$x_1 = t \quad x_2 = t \quad x_3 = 0$$

Jadi, vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda = 1$  adalah vektor-vektor tak nol yang berbentuk

$$t = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

adalah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda = 1$

Dari perhitungan di atas didapatkan nilai-nilai eigen  $A$  adalah  $\lambda = 1$  dan  $\lambda = 5$ , maka vektor-vektornya

$$P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

membentuk sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda = 5$ , dan

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda = 1$ .

Dengan  $\{P_1, P_2, P_3\}$  bebas linier, sehingga

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

akan mendiagonalkan  $A$ , maka

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.4 Titik Tetap dan Teorema Titik Tetap

### Definisi 11:

Titik tetap dari suatu pemetaan  $T: M \rightarrow M$ , dengan  $M$  merupakan suatu himpunan sebarang, dan  $m \in M$  yang dipetakan pada dirinya sendiri oleh pemetaan tersebut. Dengan kata lain dibuat titik tetap oleh pemetaan tersebut  $T$  dan dinotasikan sebagai berikut :  $Tm = m$  (Musta'adah, 2004: 7).

Secara singkat dapat dikatakan bahwa titik tetap adalah titik yang dipetakan pada dirinya sendiri oleh suatu pemetaan tertentu. Misalkan operasi pemetaan itu  $T$ , maka dapat dituliskan  $Tx = x$ .

Contoh:

$$f(x) = \sqrt{x+2} \text{ mempunyai titik tetap } x = 2$$

$$f(2) = \sqrt{2+2}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$= 2$$

Jadi, dapat disimpulkan  $Tx = x$ .

**Definisi 12:**

Misalkan  $(M, \rho)$  suatu ruang matrik. Fungsi  $T: M \rightarrow M$  dinamakan pemetaan kontraksi, jika ada suatu bilangan riil  $\alpha$  dengan  $0 \leq \alpha \leq 1$  sehingga  $\rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y)$  untuk  $x, y \in M$  (Musta'adah, 2004: 8).

**Teorema 3:**

Jika  $(M, \rho)$  suatu ruang matrik lengkap,  $T: M \rightarrow M$  suatu pemetaan kontraksi, maka ada satu dan hanya satu  $x \in M$  sehingga  $Tx = x$ .

Catatan: jika  $Tx = x$  maka  $x$  dinamakan titik tetap.

Dari teorema di atas yang perlu diperhatikan adalah:

$(M, \rho)$  suatu ruang metric

$T: M \rightarrow M$  suatu pemetaan kontraksi

Jika dua hal terpenuhi maka  $x$  titik tetap adalah tunggal.

**2.5 Matrik Jacobian****Definisi 13:**

Metode iterasi jacobi adalah metode penyelesaian persamaan serentak melalui proses iterasi dengan menggunakan persamaan

$$x_i^{(n+1)} = \frac{h_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}, \quad j \neq i \quad (2.27)$$

Keuntungan metode jacobi adalah langkah penyelesaian yang sederhana dibandingkan dengan metode invers dan determinan matriks dan metode dekomposisi L-U, sedangkan keterbatasannya adalah (Aliyah, 2007: 20):

1. Proses iterasi lambat, terutama untuk persamaan linier serentak orde tinggi
2. Metode ini hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan serentak orde tinggi yang memenuhi persamaan

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq i \quad (2.28)$$

Metode Jacobi diterapkan terhadap sistem linier dari  $n$  persamaan  $n$  bilangan tak diketahui. Misalnya sistem persamaan secara umum sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (2.29)$$

Untuk memulai maka tulis kembali sistem di atas menggunakan pemecahan persamaan pertama untuk  $x_1$  dalam suku bilangan tak diketahui selebihnya, kemudian dengan memecahkan persamaan kedua untuk  $x_2$  dalam suku-suku bilangan tak diketahui selebihnya, selanjutnya dengan memecahkan persamaan ketiga untuk  $x_3$  dalam suku-suku bilangan tak diketahui selebihnya dan seterusnya. Kemudian menghasilkan

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Untuk mengetahui aproksimasi terhadap pemecahan (2.29) yang diketahui, nilai aproksimasi kita sulihkan ke dalam ruas kanan (2.30). Jika tidak menemukan nilai aproksimasi yang lebih baik, maka dapat menggunakan  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$  dan seterusnya.

## 2.6 Metode Numerik untuk Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial biasa mendeskripsikan bagaimana tingkat perubahan variabel dalam suatu sistem dipengaruhi oleh variabel-variabel di dalam sistem itu sendiri dan juga pengaruh dari luar, yaitu input. Dalam kasus-kasus di mana persamaan sukar diselesaikan secara analitis, maka lebih mudah untuk menyelesaikannya secara numeric. (Arhami dan Desiani, 2005: 131).

Metode penyelesaian numerik tidak ada batasan mengenai bentuk persamaan diferensial. Penyelesaian berupa tabel nilai-nilai numerik dari fungsi untuk berbagai variabel bebas. Penyelesaian suatu persamaan diferensial dilakukan pada titik-titik yang ditentukan secara berurutan. Untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti maka jarak (interval) antara titik-titik yang berurutan tersebut dibuat semakin kecil.

Ada beberapa metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, akan tetapi penyusun menggunakan metode Heun. Metode Heun merupakan modifikasi dari metode Euler. Modifikasi dilakukan dalam memperkirakan kemiringan  $\Phi$ . Metode ini memperkirakan dua turunan pada interval, yaitu pada ujung awal dan akhir. Kedua turunan tersebut kemudian diratakan untuk mendapatkan perkiraan kemiringan yang lebih baik.

Berdasarkan metode Euler, kemiringan pada ujung awal dirumuskan sebagai berikut:

$$y'_i = f(x_i, y_i) \quad (2.31)$$

Kemiringan tersebut digunakan untuk menghitung nilai  $y_{i+1}$  dengan ekstrapolasi linier sehingga:

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x \quad (2.32)$$

Nilai  $y_{i+1}^0$  dari persamaan (2.32) tersebut kemudian digunakan untuk memperkirakan kemiringan pada ujung akhir interval, yaitu:

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^0) \quad (2.33)$$

Kedua kemiringan yang diberikan oleh persamaan (2.31) dan (2.33) kemudian diratakan untuk memperoleh kemiringan rerata pada interval, yaitu:

$$\bar{y}' = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}$$

Kemiringan rerata tersebut kemudian digunakan untuk ekstrapolasi linier dari  $y_i$  ke  $y_{i+1}$  dengan menggunakan metode Euler:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} \Delta x \quad (2.34)$$

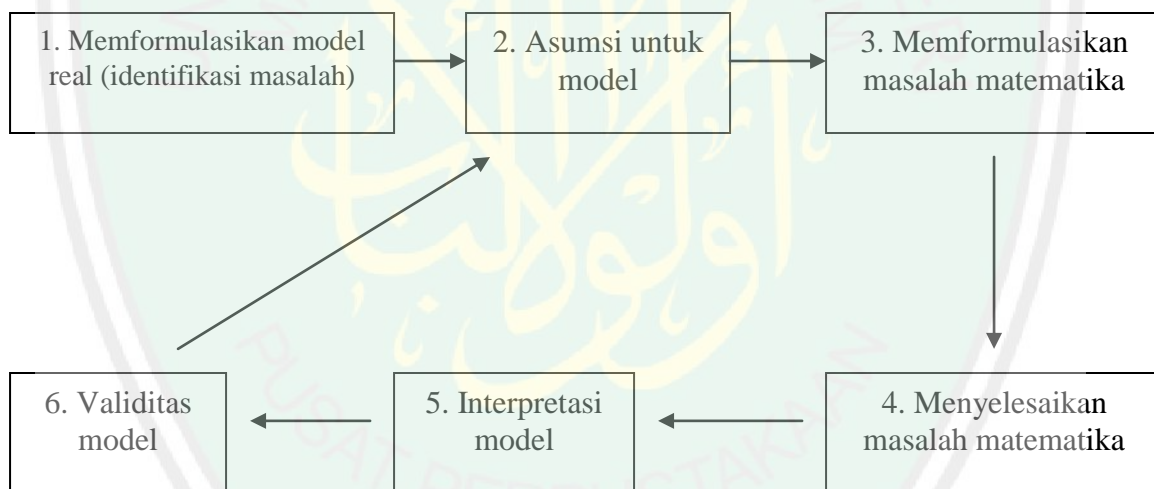
Metode Heun ini disebut juga metode predictor-korektor. Persamaan (2.32) disebut dengan persamaan predictor, sedangkan persamaan (2.34) disebut dengan persamaan korektor.

Untuk memudahkan proses perhitungan, pembahasan dalam skripsi ini menggunakan *software* MATLAB untuk menyelesaikan system persamaan diferensial dengan metode Heun.

## 2.7 Model Matematika

Model matematika adalah suatu representasi dari suatu persamaan atau sekumpulan persamaan yang mengungkapkan perilaku suatu sistem. Model matematika merupakan suatu proses yang melalui tiga tahap yaitu perumusan model matematika, penyelesaian dan/atau analisis model matematika serta penginterpretasikan hasil ke situasi nyata.

Dalam bagian ini disajikan proses formulasi fenomena/kelakuan dunia nyata dalam bentuk matematika. Matematika yang digunakan adalah persamaan diferensial. Langkah dalam pemodelan masalah dunia nyata diilustrasikan dalam diagram berikut:



Gambar 2.3 Langkah dalam pemodelan matematika

(sumber: Baiduri, *Persamaan Diferensial & Matematika Model*, 2002)

Selanjutnya, langkah-langkah pemodelan dapat dijelaskan sebagai berikut

*Langkah 1: Identifikasi masalah*

Pemodel harus mempunyai kemampuan yang cukup dalam formulasi verbal agar masalah bias ditranslasikan ke dalam bahasa Matematika. Translasi ini akan terus diselesaikan pada langkah berikutnya.

*Langkah 2: Membuat asumsi*

Secara umum kita tidak bisa mengharap bahwa semua faktor yang berpengaruh pada peristiwa yang sedang kita amati dapat dimodelkan dengan Matematika. Hal ini disederhanakan dengan mereduksi banyaknya faktor yang berpengaruh terhadap kejadian yang sedang diamati sehingga kompleksitas persoalan bias direduksi dengan mengasumsi hubungan sederhana antara variabel. Asumsi di sini dibagi dalam dua kategori utama:

a) Klasifikasi model

Apa yang mempengaruhi tingkah laku pengamatan pada *Langkah 1*. hal ini diidentifikasi sebagai variabel, baik berupa variabel bebas maupun variabel terikat. Dalam model akan dijelaskan variabel terikat dan sisanya sebagai variabel bebas. Kita juga boleh memilih variabel mana yang harus diabaikan

b) Menentukan interelasi antara variabel yang terseleksi untuk dipelajari

Sebelum kita membuat hipotesa tentang relasi antara variabel, secara umum kita membuat beberapa penyederhanaan tambahan. Persoalan mungkin cukup kompleks bahwa relasi antar semua variabel tidak bisa dilihat secara permulaan. Dalam kasus ini kita biasanya membuat submodel. Di sini satu atau lebih variabel bebas dipelajari secara terpisah. Perlu diperhatikan bahwa submodel ini terintegral terhadap asumsi yang dibuat pada model utama.

### *Langkah 3: Menyelesaikan dan menginterpretasi model*

Sekarang kita perhatikan semua submodel untuk melihat apakah model yang disusun sudah cukup. Selanjutnya model tersebut akan diselesaikan secara Matematika. Dalam hal ini model yang kita gunakan dan penyelesaiannya menggunakan persamaan diferensial. Seringkali di sini kita mengalami kesulitan untuk menyelesaikan dan menginterpretasi model. Dalam kondisi ini kita kembali ke *Langkah 2* dan membuat asumsi sederhana tambahan atau kembali ke *Langkah 1* untuk membuat definisi ulang dari permasalahan. Penyederhanaan atau definisi ulang sebuah model merupakan bagian yang penting dalam model matematika.

### *Langkah 4: Verifikasi model*

Sebelum menggunakan model untuk menyimpulkan kejadian dunia nyata, model tersebut mesti diuji. Ada beberapa pertanyaan yang diperlukan yang diajukan melakukan uji dan mengumpulkan data. *Pertama*, apakah model menjawab masalah yang telah diidentifikasi pada *Langkah 1* atau apakah kita menyimpang dari isu utama seperti yang dikonstruksi dalam model? *Kedua*, bisakah kita mengumpulkan data untuk menguji dan mengoperasikan model dan apakah model memenuhi syarat bila diuji? Dalam mendesain sebuah tes untuk model yang kita buat, kita sebaiknya menggunakan data actual yang diperoleh dari observasi empiric. (Baiduri, 2002: 15-17)

## **2.8 Sel Darah Putih (Leukosit)**

Leukosit adalah sel darah yang mengandung inti, disebut juga sel darah putih. Didalam darah manusia, normal didapati jumlah leukosit rata-rata 5000-9000 sel/mm<sup>3</sup>, bila jumlahnya lebih dari 12000, keadaan ini disebut leukositosis, bila kurang dari 5000

disebut leukopenia. Dilihat dalam mikroskop cahaya maka sel darah putih mempunyai granula spesifik (granulosit), yang dalam keadaan hidup berupa tetesan setengah cair, dalam sitoplasmanya dan mempunyai bentuk inti yang bervariasi, Yang tidak mempunyai granula, sitoplasmanya homogen dengan inti bentuk bulat atau bentuk ginjal. Terdapat dua jenis leukosit agranuler : limfosit sel kecil, sitoplasma sedikit; monosit sel agak besar mengandung sitoplasma lebih banyak. Terdapat tiga jenis leukosit granuler: Neutrofil, Basofil, dan Asidofil (atau eosinofil) yang dapat dibedakan dengan afinitas granula terhadap zat warna netral basa dan asam. Granula dianggap spesifik bila ia secara tetap terdapat dalam jenis leukosit tertentu dan pada sebagian besar precursor (pra zatnya).

Leukosit mempunyai peranan dalam pertahanan seluler dan humoral organisme terhadap zat-zat asing. Leukosit dapat melakukan gerakan amuboid dan melalui proses diapedesis leukosit dapat meninggalkan kapiler dengan menerobos antara sel-sel endotel dan menembus kedalam jaringan penyambung.

Jumlah leukosit per mikroliter darah, pada orang dewasa normal adalah 4000-11000, waktu lahir 15000-25000, dan menjelang hari ke empat turun sampai 12000, pada usia 4 tahun sesuai jumlah normal. Variasi kuantitatif dalam sel-sel darah putih tergantung pada usia. waktu lahir, 4 tahun dan pada usia 14 -15 tahun persentase khas dewasa tercapai. Bila memeriksa variasi Fisiologi dan Patologi sel-sel darah tidak hanya persentase tetapi juga jumlah absolut masing-masing jenis per unit volume darah harus diambil (Mardjono dkk, 2006: 335).

## **NEUTROFIL**

Neutrofil berkembang dalam sum-sum tulang dikeluarkan dalam sirkulasi, sel-sel ini merupakan 60 -70 % dari leukosit yang beredar. Garis tengah sekitar 12  $\mu$  m, Satu inti

dan 2-5 lobus. Sitoplasma yang banyak diisi oleh granula-granula spesifik ( $0,3-0,8 \mu m$ ) mendekati batas resolusi optik, berwarna salmon pink oleh campuran jenis romanovsky.

Granul pada neutrofil ada dua :

- a. Azurofilik yang mengandung enzim lisozom dan peroksidase.
- b. Granul spesifik lebih kecil mengandung fosfatase alkali dan zat-zat bakterisidal (protein Kationik) yang dinamakan fagositin.

Neutrofil jarang mengandung retikulum endoplasma granuler, sedikit mitokondria, apparatus Golgi rudimenter dan sedikit granula glikogen. Neutrofil merupakan garis depan pertahanan seluler terhadap invasi jasad renik, menfagosit partikel kecil dengan aktif. Adanya asam amino D oksidase dalam granula azurofilik penting dalam pencernaan dinding sel bakteri yang mengandung asam amino D. Selama proses fagositosis dibentuk peroksidase. Mieloperoxidase yang terdapat dalam neutrofil berikatan dengan peroksida dan halida bekerja pada molekul tirosin dinding sel bakteri dan menghancurkannya.

Dibawah pengaruh zat toksik tertentu seperti streptolisin toksin streptokokus membran granula-granula neutrofil pecah, mengakibatkan proses pembengkakan diikuti oleh aglutulasi organel- organel dan destruksi neutrofil.

Neutrofil mempunyai metabolisme yang sangat aktif dan mampu melakukan glikolisis baik secara aerob maupun anaerob. Kemampuan neutrofil untuk hidup dalam lingkungan anaerob sangat menguntungkan, karena mereka dapat membunuh bakteri dan membantu membersihkan debris pada jaringan nekrotik. Fagositosis oleh neutrofil merangsang aktivitas heksosa monofosfat shunt, meningkatkan glikogenolisis.

## **EOSINOFIL**

Jumlah eosinofil hanya 1-4 % leukosit darah, mempunyai garis tengah 9 $\mu$ m (sedikit lebih kecil dari neutrofil). Inti biasanya berlobus dua, Retikulum endoplasma mitokondria dan apparatus Golgi kurang berkembang. Mempunyai granula ovoid yang dengan eosin asidofik, granula adalah lisosom yang mengandung fosfatase asam, katepsin, ribonuklease, tapi tidak mengandung lisosim. Eosinofil mempunyai pergerakan amuboid, dan mampu melakukan fagositosis, lebih lambat tapi lebih selektif dibanding neutrofil. Eosinofil memfagositosis kompleks antigen dan anti bodi, ini merupakan fungsi eosinofil untuk melakukan fagositosis selektif terhadap kompleks antigen dan antibody. Eosinofil mengandung profibrinolisin, diduga berperan mempertahankan darah dari pembekuan, khususnya bila keadaan cairnya diubah oleh proses-proses Patologi. Kortikosteroid akan menimbulkan penurunan jumlah eosinofil darah dengan cepat.

## **BASOFIL**

Basofil jumlahnya 0-1% dari leukosit darah, ukuran garis tengah 12 $\mu$ m, inti satu, besar bentuk pilin ireguler, umumnya bentuk huruf S, sitoplasma basofil terisi granula yang lebih besar, dan seringkali granula menutupi inti, granula bentuknya ireguler berwarna metakromatik, dengan campuran jenis Romanovski tampak lembayung. Granula basofil metakromatik dan mensekresi histamin dan heparin, dan keadaan tertentu, basofil merupakan sel utama pada tempat peradangan ini dinamakan hipersensitivitas kulit basofil. Hal ini menunjukkan basofil mempunyai hubungan kekebalan.

## **LIMFOSIT**

Limfosit merupakan sel yang sferis, garis tengah 6-8  $\mu$  m, 20-30% leukosit darah. Normal, inti relative besar, bulat sedikit cekungan pada satu sisi, kromatin inti padat,

anak inti baru terlihat dengan electron mikroskop. Sitoplasma sedikit sekali, sedikit basofilik, mengandung granula-granula azurofilik. Yang berwarna ungu dengan romonovsky mengandung ribosom bebas dan poliribisom. Klasifikasi lainnya dari limfosit terlihat dengan ditemuinya tanda-tanda molekuler khusus pada permukaan membran sel-sel tersebut. Beberapa diantaranya membawa reseptos seperti imunoglobulin yang mengikat antigen spesifik pada membrannya. Limfosit dalam sirkulasi darah normal dapat berukuran 10-12  $\mu$  m ukuran yang lebih besar disebabkan sitoplasmanya yang lebih banyak. Kadang-kadang disebut dengan limfosit sedang. Sel limfosit besar yang berada dalam kelenjar getah bening dan akan tampak dalam darah dalam keadaan patologis, pada sel limfosit besar ini inti vasikuler dengan anak inti yang jelas. Limfosit-limfosit dapat digolongkan berdasarkan asal, struktur halus, surface markers yang berkaitan dengan sifat imunologisnya, siklus hidup dan fungsi.

### **MONOSIT**

Merupakan sel leukosit yang besar 3-8% dari jumlah leukosit normal, diameter 9-10  $\mu$  m tapi pada sediaan darah kering diameter mencapai 20  $\mu$  m, atau lebih. Inti biasanya eksentris, adanya lekukan yang dalam berbentuk tapal kuda. Kromatin kurang padat, susunan lebih fibriler, ini merupakan sifat tetap monosit. Sitoplasma relatif banyak dengan pulasan wright berupa bim abu-abu pada sajian kering. Granula azurofil, merupakan lisosom primer, lebih banyak tapi lebih kecil. Ditemui retikulum endoplasma sedikit. Juga ribosom, pliribosom sedikit, banyak mitokondria. Aparatus Golgi berkembang dengan baik, ditemukan mikrofilamen dan mikrotubulus pada daerah identasi inti.

Monosit ditemui dalam darah, jaringan penyambung, dan rongga-rongga tubuh. Monosit tergolong fagositik mononuclear (sistem retikuloendotel) dan mempunyai tempat-tempat reseptor pada permukaan membrannya. Untuk imunoglobulin dan komplemen.

Monosit beredar melalui aliran darah, menembus dinding kapiler masuk kedalam jaringan penyambung. Dalam darah beberapa hari. Dalam jaringan bereaksi dengan limfosit dan memegang peranan penting dalam pengenalan dan interaksi sel-sel immunocompetent dengan antigen.

### **PERKEMBANGAN LIMFOSIT DALAM PROSES IMMUN**

Seperti kita ketahui bahwa limfosit yang bersirkulasi terutama berasal dari timus dan organ limfoid perifer, limpa, limfonodus, tonsil dan sebagainya. Akan tetapi mungkin semua sel pregenitor limfosit berasal dari sum-sum tulang, beberapa diantara limfositnya yang secara relatif tidak mengalami diferensiasi ini bermigrasi ke timus, lalu memperbanyak diri, disini sel limfosit ini memperoleh sifat limfosit T, kemudian dapat masuk kembali kedalam aliran darah, kembali kedalam sum-sum tulang atau ke organ limfoid perifer dan dapat hidup beberapa bulan atau tahun.

Sel-sel T bertanggung jawab terhadap reaksi immune seluler dan mempunyai reseptor permukaan yang spesifik untuk mengenal antigen asing. Limfosit lain tetap diam di sum-sum tulang berdiferensiasi menjadi limfosit B berdiam dan berkembang didalam kompartemennya sendiri. Sel B bertugas untuk memproduksi antibody humoral antibody response yang beredar dalam peredaran darah dan mengikat secara khusus dengan antigen asing yang menyebabkan antigen asing tersalut antibody, kompleks ini

mempertinggi fagositosis, lisis sel dan sel pembunuh (killer sel atau sel K) dari organisme yang menyerang. Sel T dan sel B secara morfologis hanya dapat dibedakan ketika diaktifkan oleh antigen. Tahap akhir dari diferensiasi sel-sel B yang diaktifkan berwujud sebagai sel plasma. Sel plasma mempunyai retikulum endoplasma kasar yang luas yang penuh dengan molekul-molekul antibody, sel T yang diaktifkan mempunyai sedikit endoplasma yang kasar tapi penuh dengan ribosom bebas.

### **Pengertian Antigen dan Antibodi**

Substansi asing yang bertemu dengan system itu bekerja sebagai antigen, anti-melawan, + genin menghasilkan. Contohnya jika terjadi suatu substansi terjadi suatu respon dari tuan rumah, respon ini dapat selular, humoral atau keduanya. Antigen dapat utuh seperti sel bakteri sel tumor atau berupa makro molekul, seperti protein, polisakarida atau nucleoprotein. Pada keadaan apa saja spesitas respon imun secara relatif dikendalikan oleh pengaruh molekuler kecil dari antigen determinan antigenic untuk protein dan polisakarida, determinan antigenic terdiri atas empat sampai enam asam amino atau satuan monosakarida. Jika kompleks antigen yang memiliki banyak determinan misalnya sel bakteri akan membangkitkan satu spectrum respon humoral dan selular.

Antibodi, disebut juga imunoglobulin adalah glikoprotein plasma yang bersirkulasi dan dapat berinteraksi secara spesifik dengan determinan antigenic yang merangsang pembentukan antibody, antibody disekresikan oleh sel plasma yang terbentuk melalui proliferasi dan diferensiasi limfosit B.

Pada manusia ditemukan lima kelas imunoglobulin, Ig.G, terdiri dari dua rantai ringan yang identik dan dua rantai berat yang identik diikat oleh ikatan disulfida dan

tekanan non kovalen. Ig G merupakan kelas yang paling banyak jumlahnya, 75 % dari imunoglobulin serum IgG bertindak sebagai suatu model bagi kelas-kelas yang lain.

### **Terjadinya respon imun dari tubuh.**

Kepekaan tubuh terhadap benda asing (antigen 0 akan menimbulkan reaksi tubuh yang dikenal sebagai Respon imun). Respon imun ini mempunyai dampak positif terhadap, tubuh yaitu dengan timbulnya suatu proses imunisasi kekebalan tubuh terhadap antigen tersebut, dan dampak negatifnya berupa reaksi hypersensitifitas. Hypersensitifitas merupakan reaksi yang berlebihan dari tubuh terhadap antigen dimana akan mengganggu fungsi sistem imun yang menimbulkan efek protektif yaitu merusak jaringan.

### **2.9 Leukosit dan Pemodelan Matematika dalam Perspektif Islam.**

Matematika adalah ilmu tentang bentuk, matematika merupakan abstraksi dari dunia nyata. Abstraksi secara bahasa berarti proses pengabstrakan. Abstrak berarti tidak nyata, lawan dari kata riil. Abtrak sendiri dapat diartikan sebagai upaya untuk menciptakan definisi dengan jalan memusatkan perhatian pada sifat yang umum dari berbagai objek dan mengabaikan sifat-sifat yang berlainan. Karena matematika merupakan abstraksi dari dunia nyata, maka objek matematika bersifat abstrak, tetapi dapat dipahami maknanya.

Untuk menyatakan hasil dari suatu abstraksi, diperlukan suatu media komunikasi atau bahasa. Bahasa yang digunakan dalam matematika adalah bahasa simbol. Untuk menyatakan bilangan “dua” digunakan symbol “2”. Simbol untuk bilangan disebut angka. Penggunaan bahasa symbol mempunyai dua keuntungan yaitu (a) sederhana dan universal, dan (b) mempunyai makna yang luas (Abdusysyakhir, 2007: 7). Matematika

pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut matematika adalah ilmu hitung atau *ilmu al-hisab* (Abdusysyagir, 2007: 83).

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Sungguh, tidak salah kiranya jika penulis menyatakan bahwa Allah Maha Matematis. Perhatikan firman Allah dalam Al-Qur'an surat Al-Qomar ayat 49 berikut:

إِنَّا كُلُّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: “*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*”.  
(QS. Al- Qomar, 54: 49).

Demikian juga dalam Al-Qur'an surat Al-Rad [13] ayat 8

وَكُلُّ شَيْءٍ عِنْدَهُ بِمِقْدَارٍ ﴿٨﴾

Artinya: “*.....dan segala sesuatu pada sisi-Nya ada ukurannya.*”

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Pada masa-masa mutakhir ini, pemodelan-pemodelan matematika yang dilakukan manusia sebenarnya bukan membuat sesuatu yang baru. Pada hakikatnya, mereka hanya mencari persamaan-persamaan atau rumus-rumus yang berlaku pada fenomena. Bahkan, cara kerja sel darah dalam tubuh manusia, misalnya sel

darah putih atau leukosit ternyata mempunyai aturan-aturan yang sistematis. Sungguh, segala sesuatu telah diciptakan dengan ukuran, perhitungan, rumus, atau persamaan tertentu yang rapi dan teliti.

Lebih menyederhanakan pembahasan mengenai sifat matematisnya Allah, perhatikan Al-Qur'an surat Al-Baqarah ayat 261 berikut.

مَثَلُ الَّذِينَ يُنْفِقُونَ أَمْوَالَهُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنْبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلٍ فِي كُلِّ سُنبُلَةٍ  
مِائَةٌ حَبَّةٌ وَاللَّهُ يُضْعِفُ لِمَنْ يَشَاءُ وَاللَّهُ وَاسِعٌ عَلِيمٌ ﴿٢٦١﴾

Artinya: “Perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang dia kehendaki. dan Allah Maha luas (karunia-Nya) lagi Maha Mengetahui.”

Pada QS. Al-Baqarah ayat 261 tersebut, nampak jelas bahwa Allah menetapkan pahala menafkahkan harta di jalan Allah dengan rumus matematika. Pahala menafkahkan harta adalah tujuh ratus kali. Secara matematika, diperoleh persamaan

$$y = 700x$$

dengan  $x$  menyatakan nilai nafkah dan  $y$  menyatakan nilai pahala yang diperoleh (Abdusysyakir, 2007: 79-81).

Allah SWT menciptakan makhlukNya dengan memberikan cobaan dan ujian, lalu menuntut konsekuensi kesenangan (bersyukur) dan kesusahan (bersabar). Hal ini dapat terjadi dengan cara Allah membalikkan berbagai keadaan manusia sehingga peribadahan

manusia menjadi jelas. Diantara dalil yang menunjukkan bahwa kematian, penyakit, dan penderitaan merupakan hal yang lazim, yang diberikan Allah SWT pada manusia, untuk menentukan siapa yang paling baik amalnya.

Berbagai penyakit merupakan bagian dari cobaan Allah SWT yang diberikan pada manusia, yang merupakan Sunnatullah yang ditetapkan berdasarkan rahmat dan hikmah-Nya. Berbagai macam penyakit yang banyak terjadi pada manusia, salah satunya akibat kelebihan atau kekurangan sel darah putih, merupakan salah satu bentuk cobaan dari Allah SWT buat manusia dan merupakan akibat yang telah dilakukan manusia itu sendiri, seperti yang dinyatakan Allah dalam firmanNya:

وَمَا أَصَابَكُمْ مِّنْ مُّصِيبَةٍ فَبِمَا كَسَبَتْ أَيْدِيكُمْ وَيَعْفُوا عَنْ كَثِيرٍ ﴿٤٢﴾

Artinya: “Dan apa saja musibah yang menimpa kamu Maka adalah disebabkan oleh perbuatan tanganmu sendiri, dan Allah memaafkan sebagian besar (dari kesalahan-kesalahanmu).” (QS. Asy-Syuro [42]; 30) (Hendrik, 2007: 26-28).

Kekurangan atau kelebihan sel darah putih dapat mengakibatkan suatu penyakit yang mematikan. Karena sel darah putih atau leukosit adalah yang membentuk komponen darah yang berfungsi untuk membantu tubuh melawan berbagai penyakit infeksi sebagai bagian dari sistem kekebalan tubuh.

Sistem imun (kekebalan tubuh) merupakan hal yang sangat penting bagi tubuh, sehingga sangat perlu kita jaga. Allah menciptakan manusia memang dengan bentuk yang sangat sempurna. Sebagaimana firman Allah dalam surat At-Tin ayat 4:

لَقَدْ خَلَقْنَا الْإِنْسَانَ فِي أَحْسَنِ تَقْوِيمٍ

Artinya: “*Sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia dalam bentuk yang sebaik-baiknya.*” (QS. At-Tin [95]: 4)

Allah bersumpah bahwa Dia telah menciptakan manusia dalam sebaik-baik bentuk. Kalimat yang menjadi sumpah ini ditegaskan dengan tiga bentuk penegasan: Sumpah, huruf *laam* dan *qad*. Allah bersumpah bahwa Dia telah menciptakan manusia ”*dalam bentuk yang paling baik,*” yakni dalam keadaan dan rupa yang paling baik secara fitrah. Karena kenyataannya tidak ada makhluk yang lebih baik bentuknya dari pada bani Adam.



## BAB III

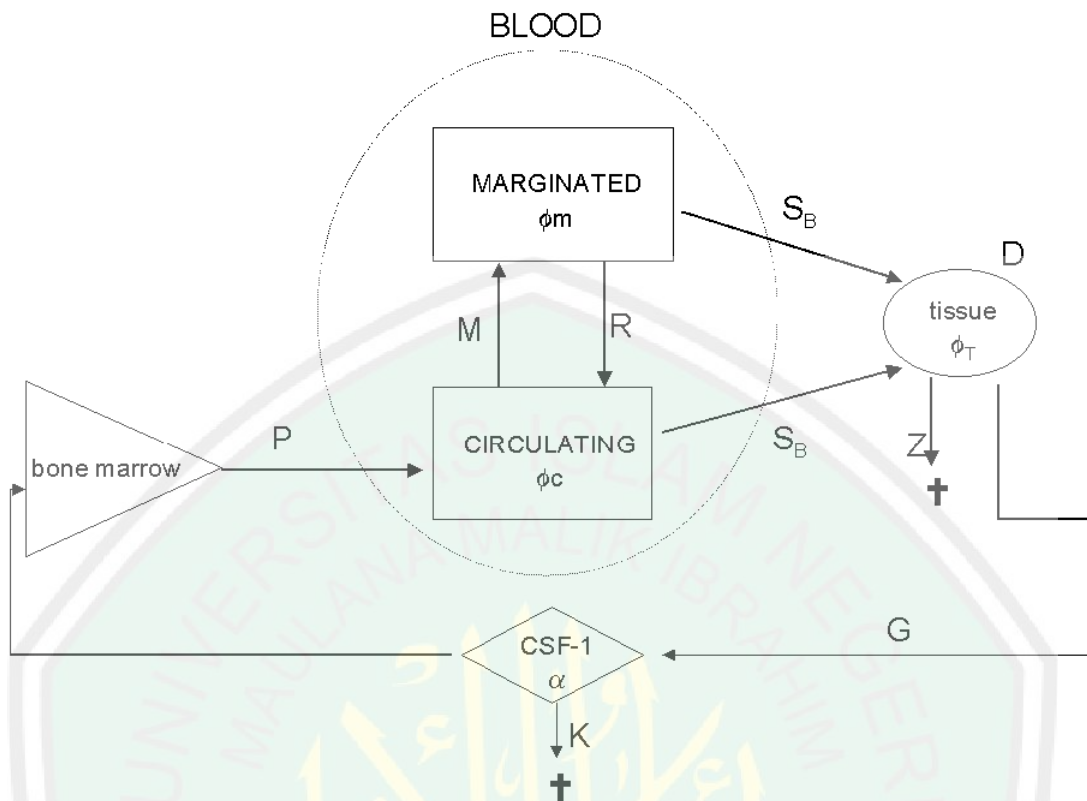
### PEMBAHASAN

#### 3.1 Pembentukan model matematika pada leukosit

Di dalam darah leukosit terdapat dua sub-populasi yang meliputi kelompok sirkulasi dan kelompok marginasi. Unsur-unsur dalam dua sub-populasi ini dapat bertukar tempat, yaitu leukosit marginal kembali ke aliran darah dan sebaliknya. Oleh karena itu, terjadi suatu situasi keseimbangan dinamik, dan jumlah sel darah harus merefleksikan nilai konstan marginal dan kembali ke sirkulasi sel-sel tersebut.

Model matematika adalah suatu representasi dari suatu persamaan atau sekumpulan persamaan yang mengungkapkan perilaku suatu sistem. Model matematika merupakan suatu proses yang melalui tiga tahap yaitu perumusan model matematika, penyelesaian dan/atau analisis model matematika serta penginterpretasikan hasil ke situasi nyata.

Model yang direduksi dari marginasi konstan leukosit terdiri dari sistem persamaan diferensial yang bergantung pada variabel-variabel yang menyatakan tingkat populasi sel marginasi ( $\Phi_m$ ) dan populasi sel sirkulasi ( $\Phi_c$ ), populasi sel dalam jaringan padat ( $\Phi_T$ ), kuantitas dari faktor regulasi diri ( $\alpha$ ).



Gambar 3.1. Skema dinamik sel darah putih pada organisma. (Sumber: Ladocicco, 2002)

### 3.2 Deskripsi Skema Dinamik Leukosit pada Organisma

Berdasarkan gambar 3.1 di atas, keterangan yang dapat diambil adalah bahwa jika  $\alpha$  adalah faktor regulasi diri (misalnya CSF-1) dan  $\Phi_i$  mengacu pada sel yang ambil bagian dalam kelompok sirkulasi (c), kelompok marginal (m) dan kelompok jaringan padat (T). G adalah suatu hubungan tetap dengan produksi faktor regulasi diri, dan K adalah nilai konstan jarak ruangnya. Catatan bahwa jalan keluar ke jaringan kedua-duanya datang dari kelompok sirkulasi,  $\Phi_c$ , dan dari kelompok marginated,  $\Phi_m$ . Jalan keluar seperti itu mempunyai nilai konstan yang sama,  $S_B$ , yang bebas dari kelompok sub tersebut. Sekat dari total nilai konstan jalan keluar ke jaringan di dalam

dua komponen ini adalah pemikiran dasar yang mengarah ke arah kesimpulan tentang keberadaan dua kelompok sub yang berbeda di dalam darah sel putih. Oleh karena itu, suatu sel yang tersentuh, terpotong dan lewat melalui dinding pembuluh tidak bisa kembali ke kelompok sirkulasi, meskipun selama interval waktu tertentu sel ini telah marginated (secara semantis tetapi tidak secara fungsional). Dalam hal ini, sel-sel ini keluar ke jaringan yang ada di sekeliling secara langsung dari kelompok sirkulasi, dan dinamika diartikan oleh produk  $\Phi_c S_B$  dari persamaan diferensial tersebut. Sel-sel marginated yang dapat berpotensi kembali ke sirkulasi mempunyai dinamika yang memuaskan oleh nilai konstan R. Pada sisi lain, bagian dari sel yang marginated ini berpindah tempat pada jaringan yang ada di sekelilingnya dan hasil  $\Phi_m S_B$  mengingatkan nilai ini. Dinamika ini juga konsisten kepada keterangan empiris yang margination dan diapadesis adalah ciri-ciri yang berbeda yang timbul dari rangsangan dan isyarat yang berbeda.

Dalam pembahasan ini, penulis menggunakan model matematika untuk mendekati perhitungan nilai konstan marginal dan kembali ke sirkulasi dari sel darah putih. Kemudian variabel-variabel yang digunakan adalah:

1. Populasi sel dalam kelompok sirkulasi ( $\Phi_c$ )
2. Populasi sel dalam kelompok marginal ( $\Phi_m$ )
3. Populasi sel dalam jaringan padat ( $\Phi_T$ )
4. Kwantitas dari faktor regulasi diri ( $\alpha$ )

Setelah mengetahui variabel-variabel yang digunakan dalam membentuk model matematika, maka selanjutnya adalah menentukan notasi-notasi untuk memenuhi

variabel-variabel tersebut, Parameter-parameter yang digunakan pada pembentukan model matematika pada dinamika sel ini adalah sebagai berikut:

$R$  : nilai konstan untuk hasil sirkulasi;

$M$  : nilai konstan untuk margination;

$S_B$  : nilai konstan untuk jalan keluar jaringan dari kelompok darah;

$P$  : nilai produksi sel sumsum tulang;

$D$  : reproduksi diri dalam jaringan padat

$G$  : nilai konstan produksi faktor regulasi diri

$Z$  : nilai konstan faktor regulasi diri yang mati

$K$  : nilai konstan jarak ruangan

Nilai total produksi sumsum tulang mempunyai tiga komponen: nilai produksi tetap ( $P_1$ ), nilai produksi yang bergantung pada faktor reproduksi diri ( $P_2$ ), dan nilai produksi yang bergantung pada faktor inflamasi atau infeksi ( $P(I)$ ). Oleh karena itu, nilai produksi bukanlah suatu fungsi waktu bebas. Ketika sel yang baru saja diproduksi memperoleh aliran darah, sel produksi tersebut marginal (nilai konstan  $M$ ). Sel marginal tersebut kemudian kembali ke sirkulasi (Nilai konstan  $R$ ). Sel dalam darah membiarkan jaringan padat di sekitarnya berdasarkan nilai konstan waktu bebas  $S_B$ . Jaringan terdekat juga merupakan fungsi nilai konstan yang bergantung pada faktor inflamasi atau infeksi. Dengan demikian, misalkan total keluaran nilai konstan ditandai dengan  $S_B + S(t, I)$ . Jaringan leukosit berkembang biak secara lokal (nilai konstan  $D$ ), menghasilkan faktor regulasi diri, dan secepatnya, mati (nilai konstan  $Z$ ).

Dari uraian di atas, diperoleh permulaan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_c}{dt} &= P_1 + P(I) + P_2\alpha + R\Phi_m - (M + S_B + S(t, I))\Phi_c \\ \frac{d\Phi_m}{dt} &= M\Phi_c - (R + S_B)\Phi_m \\ \frac{d\Phi_T}{dt} &= (S_c + S(t, I))\Phi_c + S_m\Phi_m + (D - Z)\Phi_T \\ \frac{d\alpha}{dt} &= G\Phi_T - K\alpha\end{aligned}\quad (3.1)$$

Suntikan dari beberapa unsur (khususnya epinephrine) merubah tingkat nilai konstan marginasi dan kembali ke sirkulasi (M dan R) untuk periode waktu sangat pendek. Di bawah kondisi seperti itu, nilai variabel berubah ketika perubahan nilai-nilai parameter. Bagaimanapun, sejak unsur dengan cepat bermetabolisme, parameter kembali ke nilai sebelumnya dan kemudian variabel juga akan kembali ke beberapa nilai pertahanan sebelumnya untuk gangguan tersebut (di dalam parameter). Dengan demikian, unsur ini mematuhi sistem yang diuraikan oleh persamaan (3.1) yang dapat disamakan pada suatu fungsi implusif. Pada tahap sebaliknya adalah sistem periode yang tenang, dan sistem periode tersebut bertindak sebagai gangguan yang telah terjadi pada variabel sebagai pengganti dalam parameter tersebut. Sepanjang interval waktu yang pendek dari periode tenang, nilai produksi dapat dipertimbangkan tetap, P. Oleh karena itu, persamaan 3.1 tidak mempertahankan koneksi pengulangan kepada dua persamaan yang lain (3.1), maka diperoleh persamaan seperti berikut ini:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_c}{dt} &= P + R\Phi_m - (M + S_B)\Phi_c \\ \frac{d\Phi_m}{dt} &= M\Phi_c - (R + S_B)\Phi_m\end{aligned}\quad (3.2)$$

### 3.3 Analisis Model Matematika

Berdasarkan persamaan yang terbentuk untuk menaksir nilai konstan dari margination dan kembali ke sirkulasi sel darah putih terdiri dari 2 persamaan, yakni:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_c}{dt} &= P + R\Phi_m - (M + S_B)\Phi_c \\ \frac{d\Phi_m}{dt} &= M\Phi_c - (R + S_B)\Phi_m\end{aligned}\quad (3.3)$$

Persamaan pertama menunjukkan bahwa faktor yang mempengaruhi perubahan jumlah populasi sel (atau konsentrasi) dalam kelompok sirkulasi terhadap waktu adalah nilai produksi sel sumsum tulang dijumlahkan dengan nilai konstan untuk hasil sirkulasi dikurangi nilai konstan untuk margination dan invariant waktu nilai konstan jaringan.

Sedangkan persamaan kedua menunjukkan bahwa faktor yang mempengaruhi perubahan jumlah populasi (atau konsentrasi) dalam kelompok marginal terhadap waktu adalah nilai konstan untuk margination dikurangi nilai konstan untuk hasil sirkulasi dan invariant waktu nilai konstan jaringan.

### 3.4 Titik Tetap

Secara analitik, perhitungan titik tetap dari model matematika persamaan 3.3 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_c}{dt} &= P + R\Phi_m - (M + S_B)\Phi_c = 0 \\ \frac{d\Phi_m}{dt} &= M\Phi_c - (R + S_B)\Phi_m = 0\end{aligned}\quad (3.4)$$

Dimisalkan  $\frac{d\Phi_c}{dt} = 0$  maka diperoleh:

$$\frac{d\Phi_c}{dt} = 0 \rightarrow P + R\Phi_m - (M + S_B)\Phi_c = 0$$

$$P + R\Phi_m = (M + S_B)\Phi_c$$

$$(M + S_B)\Phi_c = P + R\Phi_m$$

$$\Phi_c = \frac{P + R\Phi_m}{(M + S_B)} \quad (3.5)$$

Persamaan 3.5 menunjukkan bahwa perubahan populasi sel dalam kelompok sel yang bersirkulasi terhadap waktu dipengaruhi oleh perbandingan nilai produksi sel sumsum tulang tulang dan jumlah sel yang bermarginasi dengan nilai konstan sel yang bermarginasi dan nilai jaringan dalam darah.

Dari persamaan 3.5 telah diperoleh nilai  $\Phi_c$ , selanjutnya dimisalkan  $\frac{d\Phi_m}{dt} = 0$  untuk mendapatkan nilai  $\Phi_m$ , maka:

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = 0 \rightarrow M\Phi_c - (R + S_B)\Phi_m = 0$$

$$(R + S_B)\Phi_m = M\Phi_c$$

$$\Phi_m = \frac{M\Phi_c}{(R + S_B)} \quad (3.6)$$

Sedangkan persamaan 3.6 menunjukkan bahwa perubahan populasi sel yang bermarginasi terhadap waktu dipengaruhi oleh perbandingan nilai konstan sel yang bermarginasi dalam jumlah sel tersebut dengan nilai konstan sel yang bersirkulasi dan nilai jaringan dalam darah.

Dari interpretasi persamaan 3.5 dan 3.6 diketahui bahwa perubahan populasi sel yang bersirkulasi dan perubahan sel yang bermarginasi keduanya masih saling mempengaruhi antara jumlah sel yang bermarginasi dan jumlah sel yang bersirkulasi

sehingga hasil dari kedua persamaan ini belum mendapatkan titik keseimbangan yang stabil.

Untuk mencari titik tetap, persamaan 3.5 disubstitusikan ke persamaan 3.6 untuk mendapatkan nilai  $\Phi_m$ , maka:

$$\Phi_m = \frac{M\Phi_c}{(R + S_B)}$$

$$= \frac{M \left( \frac{P + R\Phi_m}{(M + S_B)} \right)}{(R + S_B)}$$

$$\Phi_m = \frac{MP + MR\Phi_m}{(M + S_B)(R + S_B)}$$

$$S_B(M + R + S_B)\Phi_m = MP$$

$$\Phi_m = \frac{MP}{S_B(M + R + S_B)}$$

selanjutnya persamaan 3.6 disubstitusikan ke persamaan 3.5 untuk mendapatkan nilai  $\Phi_c$ , maka diperoleh:

$$\Phi_c = \frac{P + R\Phi_m}{(M + S_B)}$$

$$= \frac{P + R \left( \frac{M\Phi_c}{(R + S_B)} \right)}{(M + S_B)}$$

$$\Phi_c = \frac{P + RM\Phi_c}{(R + S_B)(M + S_B)}$$

$$S_B(M + R + S_B)\Phi_c = P$$

$$\Phi_c = \frac{P}{S_B(M + R + S_B)}$$

Sehingga titik tetap yang diperoleh adalah:

$$\{\Phi_c, \Phi_m\} = \left\{ \frac{P}{S_B(M + R + S_B)}, \frac{MP}{S_B(M + R + S_B)} \right\}$$

Nilai  $\Phi_c$  menunjukkan bahwa perubahan populasi sel dalam kelompok sel yang bersirkulasi terhadap waktu dipengaruhi oleh perbandingan nilai produksi sel sumsum tulang dengan nilai konstan sel yang bermarginasi dan nilai jaringan dalam darah.

Sedangkan nilai  $\Phi_m$  menunjukkan bahwa perubahan populasi sel yang bermarginasi terhadap waktu dipengaruhi oleh perbandingan nilai konstan sel yang bermarginasi dengan nilai konstan sel yang bersirkulasi dan nilai jaringan dalam darah.

Dari interpretasi persamaan di atas diketahui bahwa perubahan populasi sel yang bersirkulasi dan perubahan sel yang bermarginasi tidak saling mempengaruhi sehingga titik keseimbangan dicapai tanpa ada hambatan dalam variabel.

### 3.5. Nilai Eigen

Nilai eigen dari persamaan (3.3) adalah sebagai berikut:

$$\text{Nilai eigen} = \begin{bmatrix} \frac{d\Phi_c}{d\Phi_c} & \frac{d\Phi_c}{d\Phi_m} \\ \frac{d\Phi_m}{d\Phi_c} & \frac{d\Phi_m}{d\Phi_m} \end{bmatrix}$$

yaitu:

$$\frac{d\Phi_c}{d\Phi_c} = -M - S_B$$

$$\frac{d\Phi_c}{d\Phi_m} = R$$

$$\frac{d\Phi_m}{d\Phi_c} = M$$

$$\frac{d\phi_m}{d\phi_m} = -R - S_B$$

sehingga menghasilkan matriks jacobian sebagai berikut:

$$\text{Matriks Jacobian} = \begin{bmatrix} -M - S_B & R \\ M & -R - S_B \end{bmatrix}$$

### 3.6. Solusi Numerik Model Matematika

Dari persamaan yang terbentuk pada leukosit yang terdiri dari 2 persamaan tersebut membentuk sistem persamaan diferensial orde dua. Misalkan diberi parameter pada persamaan diferensial sebagai berikut.

$$P = 1,3 \text{ monocytes/mm}^3$$

$$R = 0,0052 \text{ /menit}$$

$$M = 0,045 \text{ /menit}$$

$$S_B = 0.0096 \text{ /menit}$$

sehingga sistem persamaan diferensialnya menjadi

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_c}{dt} &= 1,3 + 0,0052\Phi_m - (0,045 + 0,0096)\Phi_c \\ \frac{d\Phi_m}{dt} &= 0,045\Phi_c - (0,0052 + 0,0096)\Phi_m \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dari persamaan di atas, maka diperoleh titik tetap yakni  $\{\Phi_c = 33.51449275, \Phi_m = 101.9021739\}$  yang menunjukkan atau menggambarkan populasi sel.

### 3.7. Hasil Numerik Sistem Persamaan Diferensial.

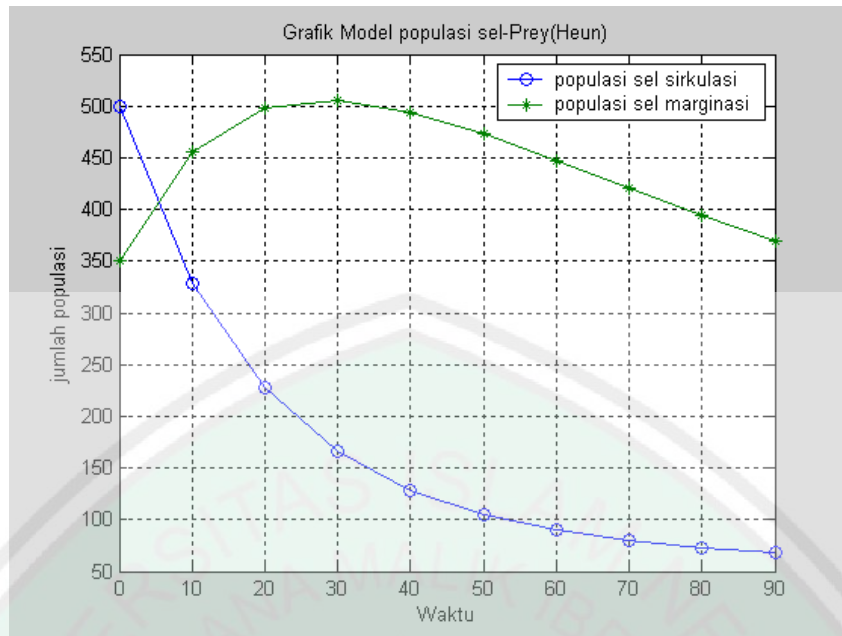
Dengan memasukkan nilai parameter pada persamaan (3.3) maka diperoleh matrik jacobian yakni:

$$\text{Matrik Jacobian} = \begin{bmatrix} -0,0546 & 0,0052 \\ 0,045 & -0,0148 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh nilai eigen  $-0,0096, -0,0598$ .

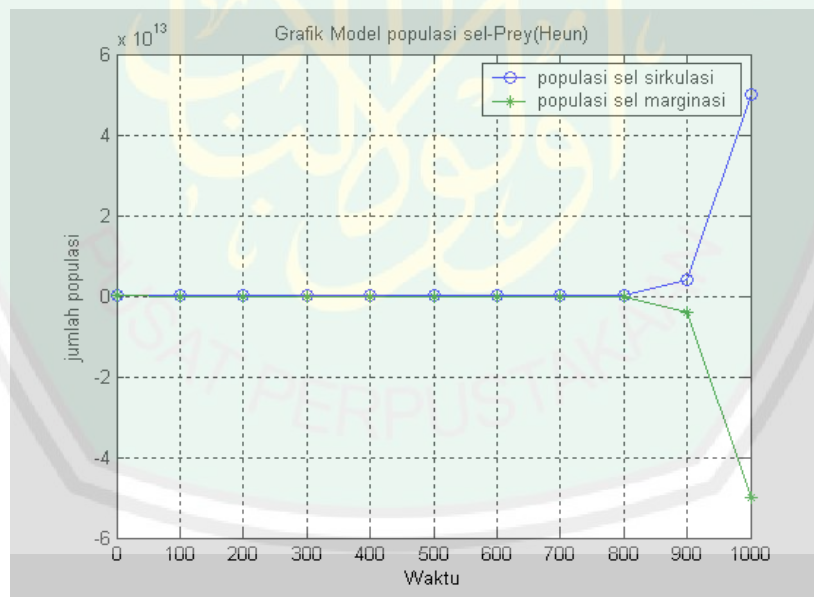
Kedua nilai eigen adalah negatif. Ini menunjukkan bahwa titik keseimbangan adalah stabil secara asimtot.

Sedangkan dengan menggunakan program matlab, diperoleh solusi sistem (3.3) pada grafik  $\Phi_c, \Phi_m$  terhadap waktu tertentu. Dari simulasi ini digunakan nilai awal  $\Phi_c = 500$  ,  $\Phi_m = 350$  dengan menggunakan metode Heun, sehingga menghasilkan sebuah grafik sebagai berikut:



Gambar 3.2. Grafik populasi sel

Gambar 3.2 di atas menggambarkan tentang perubahan jumlah populasi sel sirkulasi dan marginasi pada saat batas atas interval waktu 100.



Gambar 3.3. Grafik populasi sel

Gambar 3.2 di atas menggambarkan tentang perubahan jumlah populasi sel sirkulasi dan marginasi pada saat batas atas interval waktu 1000.

### 3.8 Interpretasi Model Matematika pada Leukosit

Berdasarkan grafik 3.2, diketahui bahwa jumlah populasi sel sirkulasi secara perlahan tapi pasti akan menurun dan jumlah populasi sel marginasi akan meningkat. Pada saat  $t = 5$  populasi sel marginasi dan sel sirkulasi akan sama banyak, hal ini disebabkan oleh adanya proses penguraian terhadap sel yang terinfeksi penyakit. Kemudian seiring bertambahnya waktu sel marginasi akan menurun karena dipengaruhi oleh situasi yang fisiologi dan pathologi.

Sedangkan pada grafik 3.3 diketahui bahwa. Jumlah sel sirkulasi dan sel marginasi akan sama pada saat  $t = 800$  yaitu jumlah populasinya 0 dan pada saat  $t = 900$  sel sirkulasi akan meningkat sedangkan sel marginasi akan menurun akibat adanya gangguan fisiologi dan pathologi.

### 3.9 Pemodelan Matematika dalam Prospektif Islam.

Pemecahan masalah dalam dunia nyata dengan matematika dilakukan dengan mengubah masalah tersebut menjadi bahasa matematika. Masalah nyata dalam kehidupan biasanya timbul dalam bentuk gejala-gejala yang belum jelas hakikatnya. Kita masih harus membuang faktor-faktor yang tidak atau kurang relevan, mencari data-data dan informasi tambahan, lalu kita menemukan hakikat masalah sebenarnya. Langkah ini dinamakan sebagai mengidentifikasi masalah. Langkah selanjutnya setelah mengidentifikasi masalah, maka melalui beberapa pendefinisian diadakan penerjemahan masalah ke bahasa lambang, yaitu matematika. Penerjemahan ini disebut pemodelan matematika. Setelah model matematika jadi, maka dicari alat yang dapat digunakan untuk menyelesaikannya. Pemodelan inilah yang menjadi kunci dalam penerapan matematika.

Memodelkan masalah ke dalam bahasa matematika berarti menirukan atau mewakili obyek yang bermasalah dengan relasi-relasi matematis. Istilah faktor dalam masalah menjadi peubah atau variabel dalam matematika. Pada hakikatnya, kerja pemodelan tidak lain adalah abstraksi dalam masalah nyata menjadi masalah (model) matematika. (Fathoni, 2006)

Matematika pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika matematika disebut ilmu hitung atau *ilmu al-hisab*. Dalam urusan menghitung, Allah adalah rajanya. Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti (Abdusysyagir, 2007: 83). Alam semesta beserta isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang sangat cermat dan teliti, dengan perhitungan yang mapan dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Sesuai dengan ayat Al-Qur'an yang berbunyi

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: “*Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.*” (QS. Al-Qomar[54]: 49)

Dalam perkembangannya, matematika dapat digunakan untuk mengungkapkan suatu kejadian menjadi ungkapan yang sistematis. Salah satu keajaiban Allah adalah telah ditemukan pemodelan-pemodelan matematika. Pada hakikatnya manusia hanya mencari persamaan atau rumus-rumus yang berlaku pada suatu fenomena. Bahkan telah ditemukan aturan-aturan yang sistematis pada wabah seperti demam berdarah, malaria, flu burung, tuberculosis dan lain sebagainya.

Ahli matematika tidak dapat membuat rumus sedikitpun, mereka hanya menemukan rumus atau persamaan Albert Einstein tidak membuat rumus  $e = mc^2$  tetapi dia hanya menemukan dan menyimpulkannya. Archimedes menemukan hitungan mengenai volume benda melalui media air. Hukum Archimedes itu sudah ada sebelumnya dan dialah yang menemukan pertama kali melalui hasil menelaah dan membaca katetapan Allah (Abdusyakhir, 2007: 80).

Pada pembahasan sebelumnya sudah ditetapkan model matematika pada leukosit. Dari model tersebut juga bisa digambarkan fenomena pengaruh perubahan sel yang diakibatkan oleh nilai produksi sumsum tulang belakang. Semua leukosit yang berasal dari sumsum tulang kemudian mengalami kematangan pada organ limfoid lainnya. Leukosit dan turunannya merupakan sel dan struktur dalam tubuh manusia yang didistribusikan ke seluruh tubuh dengan fungsi utamanya melindungi organisme dan benda asing lainnya. Sel-sel limfosit ini mempunyai kemampuan untuk membedakan dirinya sendiri (makromokuler organisme sendiri) dari yang bukan diri sendiri (benda asing) dan mengatur penghancuran dan inaktivasi dari benda asing yang mungkin merupakan molekul yang terisolasi atau bagian dari mikro organisme.

Ada makna tersendiri dibalik kenyataan bahwa sistem yang sangat mengagumkan umat manusia bahkan pada titik pemahaman ini ditempatkan pada sebuah sel yang tidak memiliki kemampuan untuk berpikir dan bernalar. Ini merupakan cerminandari keunikan ciptaan Allah Yang Maha Mengetahui, pada sel yang sangat kecil. Dalam Al-Qur'an dinyatakan bahwa kemahabijaksanaan Allah meliputi segalanya. (Yahya: 2004)

.... وَلَا يُحِيطُونَ بِشَيْءٍ مِّنْ عِلْمِهِ إِلَّا بِمَا شَاءَ ۚ وَسِعَ كُرْسِيُّهُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضَ ۖ وَلَا يَئُودُهُ حِفْظُهُمَا ۚ وَهُوَ الْعَلِيُّ الْعَظِيمُ ﴿٢٥٥﴾

Artinya: “....dan mereka tidak mengetahui apa-apa dari ilmu Allah melainkan apa yang dikehendaki-Nya. Kursi[161] Allah meliputi langit dan bumi. dan Allah tidak merasa berat memelihara keduanya, dan Allah Maha Tinggi lagi Maha besar.” (QS. Al-Baqarah [2]: 255)

Pada leukosit dapat ditemukan suatu pemodelan matematika dengan memperhatikan komponen-komponen yang menjadi penyebab jumlah nilai produksi leukosit tersebut. Untuk menemukan suatu model ini diperlukan suatu usaha keras agar dapat menemukan pemodelan yang diinginkan dan sesuai dengan keadaan yang nyata.

Dengan adanya sistem imun ini, manusia akan terjaga dari berbagai macam penyakit yang menyerang tubuh. Pemodelan ini juga menggambarkan jumlah populasi sel darah putih seiring dengan meningkatnya waktu. Dengan adanya persamaan-persamaan tersebut setidaknya kita mengetahui jumlah populasi sel darah putih meningkat atau menurun dalam tubuh kita. Tidak bisa terbayangkan seandainya di dalam tubuh manusia tidak terdapat sistem pertahanan atau kekebalan tubuh.

## B A B IV

### PENUTUP

#### Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan bahwa:

1. Model matematika untuk mengestimasi marginasi konstan dari leukosit membentuk sebuah sistem persamaan diferensial yang terdiri dari 2 persamaan, yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_c}{dt} &= P + R\phi_m - (M + S_B)\phi_c \\ \frac{d\phi_m}{dt} &= M\phi_c - (R + S_B)\phi_m\end{aligned}$$

2. Analisis model matematika dari kedua persamaan di atas adalah:

Persamaan pertama menunjukkan bahwa faktor yang mempengaruhi perubahan jumlah populasi sel (atau konsentrasi) dalam kelompok sirkulasi terhadap waktu adalah nilai produksi sel sumsum tulang dijumlahkan dengan nilai konstan untuk hasil sirkulasi dikurangi nilai konstan untuk margination dan invariant waktu nilai konstan jaringan.

Sedangkan persamaan kedua menunjukkan bahwa faktor yang mempengaruhi perubahan jumlah populasi (atau konsentrasi) dalam kelompok marginal terhadap waktu adalah nilai konstan untuk margination dikurangi nilai konstan untuk hasil sirkulasi dan invariant waktu nilai konstan jaringan.

Secara analitik titik tetap yang dihasilkan dari kedua persamaan di atas adalah

$$\{\Phi_c, \Phi_m\} = \left\{ \frac{P}{S_B(M + R + S_B)}, \frac{MP}{S_B(M + R + S_B)} \right\}$$

sedangkan nilai eigennya adalah:

$$jac := \begin{bmatrix} -M - S_B & R \\ M & -R - S_B \end{bmatrix}$$

Dengan memberikan nilai parameter pada model matematika di atas, maka menghasilkan titik tetap yaitu  $\{\Phi_c = 33.51449275, \Phi_m = 101.9021739\}$  yang menunjukkan atau menggambarkan populasi sel.

Sedangkan nilai matriks jacobian di sekitar titik tetap adalah

$$\text{Matrik Jacobian} = \begin{bmatrix} -0,0546 & 0,0052 \\ 0,045 & -0,0148 \end{bmatrix}$$

yang menghasilkan nilai eigen -0,0096, -0,0598.

Nilai eigen yang dihasilkan bernilai negatif. Ini menunjukkan bahwa titik keseimbangan adalah stabil secara asimtot.

Berdasarkan grafik 3.2, diketahui bahwa jumlah populasi sel sirkulasi secara perlahan akan menurun dan jumlah populasi sel marginasi akan meningkat. Pada saat  $t = 5$  populasi sel marginasi dan sel sirkulasi akan sama banyak, hal ini disebabkan oleh adanya proses penguraian terhadap sel yang terinfeksi penyakit. Kemudian seiring bertambahnya waktu sel marginasi akan menurun karena dipengaruhi oleh situasi yang fisiologi dan pathologi.

Sedangkan pada grafik 3.3 diketahui bahwa jumlah sel sirkulasi dan sel marginasi akan sama pada saat  $t = 800$  yaitu jumlah populasinya 0 dan pada saat  $t = 900$  sel sirkulasi akan meningkat sedangkan sel marginasi akan menurun akibat adanya gangguan fisiologi dan pathologi.

#### 4.2 Saran

Pembahasan mengenai model matematika ini masih terbuka bagi peneliti lain untuk melanjutkan penelitian ini pada aplikasinya dan bisa juga mengadakan penelitian yang sejenis dengan jenis-jenis penyakit yang berbeda.



## DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysykir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang.
- Al Fanjari, Ahmad Syauqi. 2005. *Nilai Kesehatan dalam Syariat Islam*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Aliyah, Ijazatul. 2007. *Analisis Model Matematika pada Pengaruh Sistem Imun Terhadap Infeksi Bakteri Tuberkulosis*. Skripsi. Tidak diterbitkan. Malang: UIN.
- Al-Jauziyah, Ibnul Qayyim. 1994. *Sistem Kedokteran Nabi, Kesehatan dan Pengobatan Menurut Petunjuk Nabi Muhammad SAW*. Semarang: Dina Utama Semarang.
- Anton, Howard. 1997. *Aljabar Linier Elementer*. Jakarta: Erlangga.
- Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensial dan Matematika Model*. Malang: UMM press.
- Finizio dan Ladas. 1988. *Persaman Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.
- Fathoni, Abdul Halim. 2006. *Bahasa Matematika*. <http://www.sigmetris.com/artikel/11.html>. (diakses 11 Oktober 2009).
- Kashiko, Tim. 2004. *Kamus Lengkap Biologi*. Surabaya: Kashiko.
- Ladocicco, dkk. 2002. *A Theoretical Model for Estimating the Margination Constan of Leukocytes*. Article of BMC Physiology 2002, 2:3. <http://www.biomedcentral.com/1472-6793/2/3>. (diakses 06 Juli 2009).
- Muhdor, Ach. 2007. *Model Matematika pada Radang Akut dengan Sistem Persamaan Diferensial*. Skripsi. Tidak diterbitkan. Malang. UIN.
- Pamuntjak dkk. 1990. *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: ITB.
- Shihab, Quraish. 2007. *Wawasan Al Quran; Tafsir Tematik atas Pelpagai Persoalan Umat*. Bandung: Mizan
- Triatmodjo, Bambang. 1996. *Metode Numerik*. Jogjakarta: Beta Offset.
- Waluya, S.B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

## Lampiran

### Program Matlab pada Leukosit

```

clc;clear;format long;
disp('=====')
disp('Program Solusi Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra   ')
disp('                               Dengan Metode Heun                       ')
disp('                               Ummi Maryam                             ')
disp('                               04510001                               ')
disp('=====')
tic;
f=inline('1.3+0.0052*y-(0.045+0.0096)*x','t','x','y')
g=inline('0.045*x-(0.0052+0.0096)*y','t','x','y')
x0=input('jumlah awal populasi sel sirkulasi, x(0)=');
y0=input('jumlah awal populasi sel marginasi, y(0)=');

h=input('masukkan jarak interval, h =');
a=input('masukkan batas bawah interval waktu =');
b=input('masukkan batas atas interval waktu =');
n=(b-a)/h;

x=zeros(n,1);x(1)=x0;
y=zeros(n,1);y(1)=y0;
t=[0:h:n*h];

for i = 1:n
    x1=f(t(i),x(i),y(i));
    y1=g(t(i),x(i),y(i));
    x2=x(i)+x1*h;
    y2=y(i)+y1*h;
    x3=f(t(i+1),x2,y2);
    y3=g(t(i+1),x2,y2);
    x(i+1)=x(i)+(x1+x3)/2*h;
    y(i+1)=y(i)+(y1+y3)/2*h;
end
disp('=====')
disp('hasil komputasi')
disp(' iterasi    t        x            y')
A=[[1:i+1]' t' x y];
for i=1:n+1
    fprintf('%8.0f %8.1f    %8.14f    %8.14f\n',A(i,1),A(i,2),A(i,3),A(i,4))
end
disp(['Waktu Komputasi=',num2str(toc)])
plot(t,x,'-o',t,y,'-*')
grid on

```

```
title('Grafik Model populasi sel-Prey(Heun)')  
legend('populasi sel sirkulasi','populasi sel marginasi')  
xlabel('Waktu')  
ylabel('jumlah populasi')
```



### Program Maple pada Leukosit

Misalkan  $\Phi_c = x$  dan  $\Phi_m = y$

> restart;

> dx:=P+R\*y-(M+Sb)\*x;

$$dx := P + R y - (M + Sb) x$$

> dy:=M\*x-(R+Sb)\*y;

$$dy := M x - (R + Sb) y$$

> fixedpoint:=solve({dx,dy},{x,y});

$$\text{fixedpoint} := \left\{ x = \frac{P}{Sb(M + R + Sb)}, y = \frac{MP}{Sb(M + R + Sb)} \right\}$$

> fix:=fixedpoint;

$$\text{fix1} := x = \frac{P}{Sb(M + R + Sb)}$$

$$\text{fix2} := y = \frac{MP}{Sb(M + R + Sb)}$$

> with(plots):with(linalg):

> jac:=jacobian([dx,dy],[x,y]);

$$\text{jac} := \begin{bmatrix} -M - Sb & R \\ M & -R - Sb \end{bmatrix}$$

> jac:=subs(fix,evalm(jac));eigenvals(jac);

$$\text{jac} := \begin{bmatrix} -M - Sb & R \\ M & -R - Sb \end{bmatrix}$$

-Sb, -M - R - Sb

> restart;

> dx:=1.3+0.0052\*y-(0.045+0.0096)\*x;

$$dx := 1.3 + 0.0052 y - 0.0546 x$$

> dy:=0.045\*x-(0.0052+0.0096)\*y;

$$dy := 0.045 x - 0.0148 y$$

> fixedpoint:=solve({dx,dy},{x,y});

$$\text{fixedpoint} := \{x = 33.51449275, y = 101.9021739\}$$

> fix1:=fixedpoint[1];fix2:=fixedpoint[2];

$$\text{fix1} := x = 33.51449275$$

$$\text{fix2} := y = 101.9021739$$

```

> with(plots),with(linalg);
Error, (in with) invalid input: type expects 2 arguments, but received
3
> jac:=jacobian([dx,dy],[x,y]);
      jac := jacobian([1.3 + 0.0052 y - 0.0546 x, 0.045 x - 0.0148 y], [x, y])

>
jac1:=subs(fix1,evalm(jac));eigenvals(jac1);jac2:=subs(fix2
,evalm(jac));eigenvals(jac2);
      jac1 := [jacobian(-0.529891304 + 0.0052 y, [33.51449275, y]),
              jacobian(1.508152174 - 0.0148 y, [33.51449275, y])]

              eigenvals(jac1)

      jac2 := [jacobian(1.829891304 - 0.0546 x, [x, 101.9021739]),
              jacobian(0.045 x - 1.508152174, [x, 101.9021739])]

              eigenvals(jac2)

> eigenvals(jac1):=solve({dx,dy},{x,y});eigenvals(jac2):=solv
e({dx,dy},{x,y});
      eigenvals(jac1) := {x = 33.51449275, y = 101.9021739}
      eigenvals(jac2) := {x = 33.51449275, y = 101.9021739}

>

```