

**PERBANDINGAN SOLUSI NUMERIK DAN SOLUSI ANALITIK PADA  
PERSAMAAN PANAS**

**SKRIPSI**

**OLEH  
MUHAMMAD HASAN  
NIM. 10610023**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**PERBANDINGAN SOLUSI NUMERIK DAN SOLUSI ANALITIK PADA  
PERSAMAAN PANAS**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh  
Muhammad Hasan  
NIM. 10610023**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**PERBANDINGAN SOLUSI NUMERIK DAN SOLUSI ANALITIK PADA  
PERSAMAAN PANAS**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Muhammad Hasan**  
**NIM. 10610023**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 08 Juni 2015

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

H. Wahyu Hengky Irawan, M. Pd  
NIP. 19710420 00003 1 003

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**PERBANDINGAN SOLUSI NUMERIK DAN SOLUSI ANALITIK PADA  
PERSAMAAN PANAS**

**SKRIPSI**

**Oleh  
Muhammad Hasan  
NIM. 10610023**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
Dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Tanggal 29 Juni 2015

Penguji Utama : Mohammad Jamhuri, M.Si .....

Ketua Penguji : Drs. H. Turmudi, M.Si .....

Sekretaris Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si .....

Anggota Penguji : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd .....

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muhammad Hasan  
NIM : 10610023  
Jurusan : Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi  
Judul Skripsi : Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Numerik pada  
Persamaan Panas.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 04 Juni 2015  
Yang membuat pernyataan

Muhammad Hasan  
NIM. 10610023

## MOTO

*“Semangat adalah sebetulnya kepingan-kepingan bara kemauan yang kita sisipkan pada setiap celah dalam kerja keras kita”*



## PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda H. Rosyidin dan Ibunda H. Dede Fatimah (*almarhumah*) yang telah membesarkan, mendidik, membimbing, dan memberikan segenap cinta kasih kepada penulis. Semoga Allah Swt. memberikan kebahagiaan di dunia dan akhirat.

Kakak dan adik tercinta yang senantiasa memberikan inspirasi, motivasi dan dukungan materiil maupun moril.

Keluarga Besar K.H. Abdullah Rosyid (*almarhum*) yang senantiasa membimbing, memotivasi, dan menginspirasi penulis.

## KATA PENGANTAR



*Alhamdulillahirabbil 'Alamin*

Syukur alhamdulillah ke hadirat Allah Swt. yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Numerik pada Persamaan Panas”. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw. yang telah menunjukkan manusia dari jalan yang gelap menuju jalan yang terang benderang yaitu agama Islam.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menyadari bahwa tidak akan mendapatkan hasil yang baik tanpa adanya bimbingan, bantuan, dorongan, saran serta doa dari berbagai pihak, maka dalam kesempatan ini, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen pembimbing matematika yang selalu sabar memberikan bimbingannya kepada penulis.
5. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing keagamaan yang juga selalu sabar memberikan bimbingannya kepada penulis.

6. Ayah dan Ibu tercinta serta kakak dan adik penulis, yang senantiasa memberikan semangat dan motivasi baik moril, spiritual dan materiil kepada penulis agar mencapai kesuksesan.
7. Dr. Loet Afandi, Sp. OG dan Hj. Herna Affandi, selaku Badan Pendiri Yayasan Pondok Pesantren al-Ma'shum Mardiyah yang senantiasa memberikan semangat dan motivasi baik moril, spiritual, dan materiil kepada penulis agar mencapai kesuksesan.
8. Sahabat Integral Matematika Muhammad Gozali, Ahmad Syihabudin Zahid, Sigit Fembrianto, Fahmi Khairul Anam, Nur Aini, Rowaihul Jannah, Naila Nafilah, Harum Kurniasari, Nurul Jannah, dan Nur Afifah, yang selalu memberikan dorongan dan semangat kepada penulis dalam mengerjakan skripsi.
9. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika 2010 khususnya kepada Andri Eka Prasetya, Khairul Umam, Wahyudi, Muhammad Yunus, Mukhlis, Lukman Hakim, Wildan Hakim, dan Fahmi Muhammad yang selalu memberikan dorongan dan semangat kepada penulis dalam mengerjakan skripsi.
10. Keluarga IKAMA Malang khususnya Dirga Septia Nugraha, S.Hi, Anwarul Musyadad, dan Asep Muhammad yang selalu menghibur penulis dan memberikan dorongan dan semangat kepada penulis dalam mengerjakan skripsi.
11. Sahabat-sahabati Rayon PMII *Pencerahan Galileo* yang selalu memberikan dorongan dan semangat kepada penulis dalam mengerjakan skripsi.

12. Semua pihak yang telah membantu namun tidak dapat disebutkan satu persatu.

Semoga Allah Swt. membalas kebaikan mereka semua. Penulis berharap, semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak pada umumnya dan bagi penulis sendiri pada khususnya.

Malang, Juni 2015

Penulis



## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xi
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xiii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiv
<b>ABSTRAK</b> .....	xv
<b>ABSTRACT</b> .....	xvi
<b>ملخص</b> .....	xvii
 <b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	4
1.3 Batasan Masalah .....	4
1.4 Tujuan Penelitian .....	5
1.5 Metode Penelitian .....	5
1.6 Manfaat Penelitian .....	6
1.7 Sistematika Penulisan .....	6
 <b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Analisis Persamaan Diferensial Parsial pada Persamaan Panas .....	7
2.2 Metode Penyelesaian Analitik pada Persamaan Panas .....	9
2.2.1 Masalah Nilai Batas .....	9
2.2.2 Deret Fourier .....	10
2.2.3 Pemisahan Variabel .....	11
2.3 Metode Beda Hingga sebagai Selesaian Numerik pada Persamaan Panas .....	17
2.3.1 Deret Taylor .....	17
2.3.2 Skema Implisit pada Persamaan Panas .....	20
2.4 Galat .....	21

2.5 Solusi Analitik dan Numerik dalam Perspektif Agama.....	23
---	----

### **BAB III PEMBAHASAN**

3.1 Penyelesaian Solusi Analitik pada Persamaan Panas .....	27
3.2 Penyelesaian Solusi Numerik pada Persamaan Panas .....	36
3.3 Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Numerik pada Persamaan Panas .....	41
3.4 Metode Beda Hingga Implisit dalam Perspektif Agama .....	42

### **BAB IV PENUTUP**

4.1 Kesimpulan .....	46
4.2 Saran .....	47

<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	48
-----------------------------	----

### **LAMPIRAN-LAMPIRAN**

<b>RIWAYAT HIDUP</b> .....	49
----------------------------	----

**DAFTAR TABEL**

Tabel 3.1 Persentase Galat  $U(x,t)$ ..... 44  
Tabel 3.2 Persentase Galat  $U(x,t)$ ..... 44



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Solusi Analitik $U(x,t)$ pada Persamaan Difusi Konveksi .....	16
Gambar 2.2 Gambar Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode Beda Hingga .....	18
Gambar 2.3 Skema Implisit .....	21
Gambar 3.1 Solusi Analitik $U(x,t)$ pada Persamaan Panas .....	37
Gambar 3.2 Solusi Analitik $U(x,t)$ pada Persamaan Panas .....	38
Gambar 3.3 Solusi Analitik $U(x,t)$ pada Persamaan Panas .....	39
Gambar 3.4 Jaringan Titik Hitung Metode Beda Hingga Implisit.....	40
Gambar 3.5 Solusi Numerik $U(x,t)$ pada Persamaan Panas .....	42
Gambar 3.6 Solusi Numerik $U(x,t)$ pada Persamaan Panas .....	43



## ABSTRAK

Hasan, Muhammad. 2015. **Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Numerik pada Persamaan Panas**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) H. Wahyu. H. Irawan, M.Pd.

**Kata kunci:** Solusi Analitik, Solusi Numerik, Persamaan Panas

Persamaan panas atau persamaan parabola adalah bentuk dari persamaan diferensial parsial yang menggambarkan distribusi panas (atau variasi suhu) di suatu wilayah dari waktu ke waktu (william, 2000:145). Untuk menghitung solusi analitik dan numerik pada persamaan panas ini banyak sekali cara atau metode dalam penyelesaiannya. Pada penelitian sebelumnya, selesaian solusi analitik menggunakan metode pemisahan variabel, sedangkan solusi numerik menggunakan metode Crank Nicholson. Dalam penelitian ini, metode beda hingga implisit yang digunakan sebagai salah satu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan panas.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana perbandingan solusi analitik dan solusi numerik pada persamaan panas dengan metode beda hingga skema implisit, kemudian membandingkan dengan penelitian sebelumnya. Hasil penelitian ini, menunjukkan pada saat  $x = 0.1$  dan  $h = 0.01$  dengan metode beda hingga skema implisit diperoleh solusi numerik  $U_1 = 0.82236$ ,  $U_2 = 0,71792$ . Sedangkan hasil dari solusi analitiknya  $U_1 = 0.77458$ ,  $U_2 = 0.68120$ . Hasil analisis galat dalam penelitian ini dibandingkan dengan penelitian sebelumnya, diperoleh bahwa metode Crank Nicholson lebih kecil dari metode beda hingga skema implisit.

Berdasarkan hasil penelitian ini dapat diambil kesimpulan bahwa metode Crank Nicholson dan metode beda hingga skema implisit merupakan metode numerik dengan ketelitian yang tinggi dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Hasil analisis galat dalam penelitian ini diperoleh bahwa galat metode Crank Nicholson lebih kecil dari pada metode beda hingga skema implisit. Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan penelitian terhadap perbandingan metode beda hingga skema Crank Nicholson dan metode beda hingga skema implisit dengan orde yang lebih tinggi atau dengan metode numerik lainnya.

## ABSTRACT

Hasan, Muhammad. 2015. **Comparison of Analytical and Numerical Solutions to The Heat Equation**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) H.Wahyu. H. Irawan, M.Pd.

**Keywords:** Analytical Solution, Numerical Solutions, Heat Equation

The heat equation or parabolic equation is a form of partial differential equations that describe the distribution of heat (or temperature variations) in a region from time to time. To calculate an analytic and numerical solution of heat equation there are many methods, that we can use previous research on solving of analytic solutions using a method of the separation variables, while the numerical solution a Crank Nicholson method was used. In this research the implicit finite different method used as one method of numerical method to solve the heat equation.

The aim of this research is to understand how the solution of numerical of heat equation. Using finite different method implementing implicit scheme, then compared with previous studies. The results of this research shows at the  $x = 0.1$  and  $h = 0.01$  different method implementing implicit scheme obtained solution  $U_1 = 0.82236$ ,  $U_2 = 0,71792$ . While obtained analytic solution  $U_1 = 0.77458$ ,  $U_2 = 0.68120$ . In the calculation of error percentage, obtained truncation error of Crank Nicholson method smaller than method implementing implicit scheme.

Based on the results of this research we can conclude that the Crank Nicholson method and different method implementing implicit scheme is a highly reliable numerical method in solving partial differential equations. From analysis of error in research obtained that Crank Nicholson method error is smaller than the finite different method implementing implicit scheme. In the next research can be conducted research on a comparison of a different method to the Crank Nicholson scheme and finite different method implementing implicit scheme with the two dimensions heat equation.

## ملخص

حسن محمد. ٢٠١٥. المقارنة التحليلية والحلول العددية لمعادلة الحرارة. أطروحة. قسم

الرياضيات بكلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة ولاية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج

مشرف: (١) الدكتور عثمان فكالاي الماجستير (٢) وحى حنك ارو المغستر

كلمات البحث: الحلول التحليلية، الحلول العددية، معادلة الانتشار

المعادلة الحرارة أو معادلة القطع المكافئ هو شكل من أشكال المعادلات التفاضلية الجزئية التي تصف توزيع الحرارة (أو تغيرات درجة الحرارة) في المنطقة من وقت لآخر. لحساب الحل التحليلي والعددي للمعادلة الحرارة هناك العديد من الأساليب، التي يمكننا استخدامها الأبحاث السابقة على حل من الحلول التحليلية باستخدام طريقة المتغيرات الانفصال، في حين أن الحل العددي تم استخدام طريقة كرنك نيكلسون. في هذا البحث طريقة مختلفة محدود ضمني تستخدم أسلوب واحد من طريقة عددية لحل معادلة الحرارة.

الهدف من هذا البحث هو أن نفهم كيف حل العددية لمعادلة الحرارة. باستخدام طريقة مختلفة محدود تنفيذ مخطط ضمني، ثم مقارنة مع الدراسات السابقة. نتائج هذا البحث يظهر في  $h = 1.0$  و  $h = 0.1$  أسلوبا مختلفا تنفيذ مخطط ضمني الحصول على حل  $U = 63228.0$  ،  $U = 2063.0$  بينما طريقة الساعد نيكلسون حصلت حل  $U = 7691.0$  ،  $U = 2063.0$  في حساب النسبة المئوية، اقتطاع الحصول عليها من طريقة كرنك نيكلسون أصغر من طريقة تنفيذ مخطط ضمني.

استنادا إلى نتائج هذا البحث يمكننا أن نستنتج أن طريقة الساعد نيكلسون وطريقة مختلفة تنفيذ مخطط الضمني هو طريقة عددية موثوق بها للغاية في حل المعادلات التفاضلية الجزئية. من تحليل الخطأ في البحوث التي تم الحصول عليها هذا الأسلوب الساعد نيكلسون أصغر من طريقة مختلفة محدود تنفيذ مخطط ضمني. في البحث القادم يمكن أن يكون البحث على مقارنة طريقة مختلفة لمخطط الساعد نيكلسون وطريقة مختلفة محدود تنفيذ مخطط ضمني مع بعدين معادلة الحرارة.



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan cabang ilmu yang penting untuk memecahkan berbagai macam fenomena alam, sehingga matematika penting untuk dipelajari dan dikembangkan. Banyak penemuan dan pengembangannya bergantung pada matematika. Sebagai contoh salah satu ilmu fisika yang kemudian dikembangkan melalui konsep kalkulus, khususnya tentang persamaan diferensial dan integral.

Persamaan diferensial adalah salah satu ilmu matematika yang mempunyai peranan penting dengan ilmu pengetahuan lainnya. Persamaan diferensial menurut peubah bebasnya, dibagi menjadi dua, yaitu Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP). Persamaan diferensial biasa merupakan persamaan yang memuat satu peubah bebas, dan persamaan diferensial parsial merupakan persamaan diferensial yang memuat dua atau lebih peubah bebas. Persamaan diferensial dapat dibagi menurut bentuk, kelinieran, orde, dan koefisien. Berdasarkan bentuknya, terdapat persamaan diferensial homogen dan nonhomogen. Berdasarkan orde (tingkat), terdapat persamaan diferensial orde satu, persamaan diferensial orde dua sampai persamaan diferensial orde ke- $n$  (orde tinggi). Sedangkan berdasarkan koefisiennya, terdapat persamaan diferensial dengan koefisien konstanta dan persamaan diferensial dengan koefisien variabel (peubah). Serta berdasarkan kelinierannya, terdapat persamaan diferensial linier dan persamaan diferensial nonlinier.

Persamaan diferensial parsial membahas tentang solusi analitik dan solusi numerik. Solusi analitik merupakan metode untuk menyelesaikan permasalahan-

permasalahan persamaan diferensial parsial dengan rumus-rumus aljabar yang sudah lazim. Sedangkan solusi numerik merupakan metode untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan (aritmatika) (Triatmojo, 2002:6).

Selesaian analitik pada persamaan diferensial parsial diperoleh dengan menggunakan perhitungan secara sistematis, dan solusi yang diperoleh berupa nilai eksak. Dalam pembahasan solusi analitik, suatu persamaan diferensial parsial umumnya mengkaji masalah nilai awal dengan menggunakan *d'Alembert's solution* dan untuk masalah nilai batas menggunakan metode pemisahan variabel (*Separation of Variable*). Sehingga solusi analitik harus terdefinisi dalam sistem atau batas-batas sistem (Munir, 2006:25). Akan tetapi, solusi analitik bukanlah proses yang mudah karena melibatkan suatu cara yang rumit, oleh karena itu, biasanya menggunakan solusi numerik sebagai suatu cara yang dapat dipahami oleh semua peneliti, terutama bagi mereka yang tidak mengerti matematika secara rinci.

Metode penyelesaian numerik tidak ada batasan mengenai bentuk persamaan diferensial parsial maupun persamaan diferensial biasa. Selesaian yang diperoleh berupa iterasi numerik dari fungsi untuk berbagai variabel bebas. Selesaian suatu persamaan diferensial parsial dilakukan pada titik-titik yang ditentukan secara berurutan. Untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti maka jarak (interval) antara titik-titik yang berurutan tersebut dibuat semakin kecil atau dengan kata lain solusi analitik adalah selesaian yang memenuhi persamaan semula secara eksak, dan numerik adalah selesaian yang berupa hampiran (Munir, 2006:29).

Menurut pandangan Islam setiap masalah ada beberapa penyelesaian yang dapat dicari jalan keluar atau solusi pemecahan dari suatu masalah. Ketika suatu masalah itu sulit untuk diselesaikan dengan salah satu cara, maka hal tersebut pasti ada cara lain untuk mencari solusinya. Sebagaimana firman-Nya dalam Qs. Alam Nasyrah/94:5-6, yang berbunyi

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. (5) Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (6)”(Qs. Alam Nasyrah /94:5-6)

Dalam Tafsir al-Aisar (2009) dijelaskan bahwa suatu kesulitan pasti ada kemudahan. Pada ayat di atas terdapat kata ‘*usri* (kesulitan) yang merupakan isim makrifat artinya satu dan terdapat pula kata *yusron* (kemudahan) sebagai isim nakirah artinya umum atau banyak. Dari penjabaran ayat di atas dapat diketahui bahwa ada berbagai kemudahan yang telah dikaruniakan Allah Swt. pada hamba-Nya sebagai beberapa solusi alternatif dari satu kesulitan (Jabir, 2009:967).

Berdasarkan penjelasan di atas suatu masalah matematika khususnya persamaan diferensial parsial yang sulit untuk dipecahkan baik secara analitik maupun numerik. Namun dengan terus berkembangnya ilmu matematika, metode-metode penyelesaian masalah terus ditemukan baik metode analitik maupun numerik, sehingga mampu memberikan kemudahan dalam menentukan solusi dari suatu masalah.

Persamaan panas atau persamaan *parabolic* adalah dasar dari persamaan diferensial parsial yang menggambarkan distribusi panas (atau variasi suhu) di suatu wilayah dari waktu ke waktu (William, 2000:145). Dalam buku Smith G. D. menerangkan tentang persamaan panas yang mengkaji bagaimana menentukan

solusi numerik dan solusi analitik, serta membandingkan di antara kedua solusi itu yang kemudian akan diperoleh nilai galat.

Menentukan solusi numerik pada persamaan panas menggunakan metode beda hingga Crank Nicholson, sedangkan untuk menentukan solusi analitik menggunakan metode Pemisahan Variabel. Oleh karena itu, penulis akan mengkaji bagaimana menentukan solusi numerik dengan metode yang lainnya sehingga diperoleh nilai galat baru. Berdasarkan uraian di atas penulis memilih permasalahan tentang “*Perbandingan Solusi Numerik dan Solusi Analitik pada Persamaan Panas*”

### 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah penelitian ini adalah:

1. Bagaimana menentukan solusi analitik persamaan panas?
2. Bagaimana menentukan solusi numerik persamaan panas?
3. Bagaimana perbandingan hasil penyelesaian dari solusi analitik dan solusi numerik pada persamaan panas?

### 1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Persamaan diferensial parsial homogen orde-1.
2. Solusi analitik dengan menggunakan metode pemisahan variabel (*Separation of Variable*).
3. Solusi numerik dengan menggunakan metode beda hingga implisit.

#### 1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian skripsi ini adalah:

1. Untuk mengetahui solusi analitik persamaan panas.
2. Untuk mengetahui solusi numerik persamaan panas.
3. Untuk mengetahui perbandingan hasil penyelesaian dari solusi analitik dan solusi numerik persamaan panas.

#### 1.5 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam skripsi ini adalah studi literatur. Studi literatur merupakan suatu penelitian yang dilakukan dengan bantuan bermacam-macam materi yang terdapat di ruangan perpustakaan seperti buku, majalah, dokumen, catatan kisah-kisah, sejarah dan lain sebagainya (Mardalis, 2002:15).

Adapun langkah-langkah umum dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Menganalisis persamaan panas sebagai persamaan diferensial parsial serta kondisi batas dan kondisi awalnya.
2. Menentukan solusi analitik dengan metode pemisahan variabel.
3. Menentukan solusi numerik dengan metode beda hingga implisit.
4. Menghitung solusi numerik dan solusi analitik dengan menggunakan matlab.
5. Membandingkan hasil solusi analitik dan solusi numerik.
6. Membandingkan hasil persentase galat dengan penelitian sebelumnya.

## 1.6 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memperdalam pengetahuan tentang solusi analitik dengan metode pemisahan variabel dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial.
2. Memperdalam pengetahuan tentang solusi numerik dengan metode beda hingga implisit dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial.
3. Mengetahui hasil perbandingan galat antara metode beda hingga implisit dan metode Crank Nicholson dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial secara numerik.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam penelitian ini terdiri dari empat bab, masing-masing dibagi ke dalam subbab yaitu sebagai berikut:

### Bab I Pendahuluan

Pada bab satu ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

### Bab II Kajian Pustaka

Pada bab dua ini membahas tentang analisis persamaan diferensial parsial sebagai persamaan panas, metode penyelesaian analitik pada persamaan panas, masalah nilai batas, deret Fourier, pemisahan variabel, metode beda hingga sebagai penyelesaian numerik pada persamaan panas, deret Taylor, skema implisit pada persamaan panas, galat, solusi analitik dan solusi numerik dalam perspektif agama.

### Bab III Pembahasan

Pada bab tiga ini akan menguraikan keseluruhan langkah yang disebutkan dalam metode penelitian.

### Bab IV Penutup

Pada bab empat ini akan memaparkan kesimpulan hasil penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.



## BAB II KAJIAN PUSTAKA

### 2.1 Analisis Persamaan Diferensial Parsial pada Persamaan Panas

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap lebih dari satu peubah bebas (Pamuntjak, 1990:5).

Contoh: 
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Berdasarkan contoh di atas dapat dijelaskan ketika ada sebuah fungsi  $U(x,t)$  yang bergantung pada dua variabel bebas  $x$  dan  $t$ , dan jika diturunkan terhadap  $x$  maka  $t$  bernilai konstan, dan jika diturunkan terhadap  $t$  maka  $x$  bernilai konstan.

Bentuk umum persamaan diferensial parsial orde-2 adalah

$$A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + C \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + D \frac{\partial^2 f}{\partial x} + E \frac{\partial^2 f}{\partial y} + Ff + G = 0 \quad (2.1)$$

Dengan A, B, C, D, E, F, dan G bisa berupa fungsi dari variabel  $x$ ,  $y$  dan variabel tidak bebas  $f$  (Djojodihardjo, 2000:304).

Ada beberapa bentuk persamaan diferensial parsial, yaitu:

1. Persamaan Ellips (*elliptik*) jika:  $b^2 - 4ac < 0$

Persamaan Ellips ini biasanya berhubungan dengan masalah keseimbangan atau kondisi permanen (tidak bergantung waktu), dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas di daerah tinjauan. Seperti aliran air tanah di bawah

bendungan karena adanya pemompaan, defleksi plat akibat pembebanan, dan lain sebagainya. Persamaan yang termasuk dalam tipe ini adalah persamaan Poisson.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + g = 0 \quad (2.2)$$

Dan persamaan Laplace adalah

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.3)$$

Keterangan  $T$  : suhu  
 $x$  : absis  
 $y$  : ordinat

2. Persamaan Parabola (*parabolic*) jika:  $b^2 - 4ac = 0$

Persamaan parabola ini biasanya merupakan persamaan yang bergantung pada waktu (tidak permanen), dan penyelesaiannya memerlukan kondisi awal dan batas. Persamaan parabola paling sederhana adalah perambatan panas.

Persamaan Parabola mempunyai bentuk:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

Keterangan:  $T$  : suhu  
 $t$  : waktu  
 $x$  : jarak  
 $K$  : koefisien konduktivitas

3. Persamaan Hiperbola (*hiperbolic*) jika:  $b^2 - 4ac > 0$

Persamaan hiperbola ini biasanya berhubungan dengan getaran atau permasalahan dimana terjadi diskontinu dalam waktu, seperti gelombang kejut

yang terjadi diskontinu dalam kecepatan, tekanan, dan rapat massa (Triatmojo, 2002:201).

Persamaan Hiperbola memiliki bentuk:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

Keterangan:  $T$  : suhu  
 $t$  : waktu  
 $x$  : jarak  
 $C$  : laju gelombang

## 2.2 Metode Penyelesaian Analitik pada Persamaan Panas

### 2.2.1 Masalah Nilai Batas

Masalah nilai batas adalah syarat-syarat tertentu atau kondisi-kondisi tertentu yang terlibat dalam persamaan diferensial parsial untuk membantu mencari solusi persamaan diferensial parsial tersebut. Ada tiga kemungkinan, yaitu interval terbatas, interval setengah terbatas, dan interval tak terbatas. Untuk interval terbatas, besarnya interval  $l$  adalah  $0 < x < L$ , sehingga mempunyai dua syarat batas yaitu pada  $x = 0$  dan  $x = L$ . Untuk interval setengah tak terbatas, besarnya  $l$  adalah  $0 < x < \infty$  biasa ditulis  $x > 0$ , syarat batasnya hanya pada  $x = 0$ . Dan untuk interval tak terbatas, besarnya interval  $l$  adalah  $-\infty < x < \infty$ , sehingga tidak punya syarat batas.

Bentuk persamaan syarat batas diberikan dengan

$$\left[ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right] = f(x),$$

dimana  $\alpha, \beta$  adalah suatu konstanta dan  $\frac{\partial u}{\partial n}$  didefinisikan sebagai grad  $un = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \cdot n$ . Terdapat tiga jenis syarat batas yaitu:

- Persamaan di atas disebut dengan kondisi Dirichlet jika  $\alpha \neq 0$  dan  $\beta = 0$ ,
- Persamaan di atas disebut dengan kondisi Neumann jika  $\alpha = 0$  dan  $\beta \neq 0$ ,
- Persamaan di atas disebut dengan kondisi campuran jika  $\alpha \neq 0$  dan  $\beta \neq 0$

(Pinsky, 1998:85-86).

### 2.2.2 Deret Fourier

Deret Fourier adalah fungsi ganjil dapat dianggap sebagai perluasan fungsi ganjil yang dapat berubah-ubah, dan memiliki  $2L$  periode tertentu pada sebuah baris  $-\infty < x < \infty$ . Untuk menentukan koefisien Fourier dengan deret Fourier adalah sebagai berikut.

Persamaan difusi konveksi

$$U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (2.6)$$

Selanjutnya untuk persamaan (2.6) dikalikan dengan  $\sin \frac{m\pi x}{l}$  dan selanjutnya diintegrasikan terhadap  $x$ , dengan interval  $0 < x < l$  maka diperoleh

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0 \quad (2.7)$$

Karena pada saat  $m$  dan  $n$  menjadi bilangan positif, dapat dibuktikan secara langsung dengan pengintegrasian.

Bukti dari persamaan (2.7). Dengan menggunakan identitas trigonometri adalah

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b) \quad (2.8)$$

Oleh karena itu, substitusikan persamaan (2.7) ke persamaan (2.8), maka

$$\frac{l}{2(m-n)\pi} \sin \frac{(m-n)\pi x}{l} \Big|_0^l - \frac{l}{2(m+n)\pi} \sin \frac{(m+n)\pi x}{l} \Big|_0^l \quad (2.9)$$

Ini adalah sebuah kombinasi linier dari  $\sin(m \pm n)\pi$  dan  $\sin(0)$ . Untuk persamaan (2.9) kedua ruas dikalikan dengan  $\sin(m\pi x)$  dan diintegrasikan untuk memperoleh

$$\int_0^l f(x) \sin(m\pi x) dx = \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx$$

$$\int_0^l f(x) \sin(m\pi x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l c_n \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx$$

Dengan  $n = m$ , maka

$$f(x) = c_n \int_0^l \sin^2(n\pi x) dx \quad (2.10)$$

Dengan  $c_n$  sama dengan integral eksplisit. Maka dari itu, pola untuk mencari koefisien Fourier adalah

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{(n\pi x)}{l} dx \quad (2.11)$$

(Strauss, 2007:104-105).

### 2.2.3 Pemisahan Variabel

Metode pemisahan variabel adalah teknik klasik yang efektif untuk menyelesaikan beberapa tipe dari persamaan diferensial parsial. Misalnya  $U(x,t)$  untuk persamaan diferensial parsial. Untuk menentukan solusi  $U(x,t)$  bisa ditulis dengan variabel terpisah  $U(x,t) = X(x)T(t)$ . Selanjutnya dilakukan substitusi dari bentuk  $U(x,t) = X(x)T(t)$  ke persamaan diferensial. Dengan cara ini akan

dihasilkan solusi persamaan untuk persamaan diferensial parsial (Nagle, & Saff, 1996:154).

Metode pemisahan variabel diterapkan untuk solusi nilai awal atau masalah nilai batas dan kondisi batas pada persamaan homogen (Zeuderer, 2006:75). Contoh Untuk menentukan solusi persamaan difusi konveksi yaitu:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (2.12)$$

Dengan kondisi batas

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

dan kondisi awal

$$u(x, 0) = 20 \quad u_t(x,0) = 0$$

Untuk menyelesaikan persamaan (2.12), akan dimisalkan  $u(x,t)$  ke dalam bentuk terpisah berikut ini.

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = X(t).T'(t) \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= X'(x)T(t) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= X''(x)T(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (2.14) dan (2.15) ke dalam persamaan (2.12) maka

$$\begin{aligned} X(x)T'(t) &= \alpha^2 X''(x)T(t) \\ \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Pada persamaan ruas kiri hanya bergantung pada  $t$  dan ruas kanan bergantung pada  $x$ . Sehingga dapat dimisalkan menjadi sebuah konstanta yang tidak bergantung pada keduanya (Strauss, 2007:145). Misalnya konstanta adalah  $\lambda$  maka persamaan (2.16) dapat ditulis menjadi

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (2.17)$$

Karena pada akhir pembahasan akan ditunjukkan bahwa  $\lambda < 0$ , maka dapat dimisalkan menjadi  $-\lambda = -\mu^2$ , sehingga persamaan di atas dapat dipisah menjadi

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} &= -\lambda \\ X''(x) &= -\lambda X(x) \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \\ r^2 e^{rx} + \mu^2 r e^{rx} &= 0 \\ r^2 + \mu^2 &= 0 \\ r &= \pm i\mu \end{aligned} \quad (2.18)$$

Purcell (1994:435) jika memiliki akar-akar yang imajiner atau konjugat umumnya  $\alpha \pm \beta i$ . Untuk persamaan (2.18) adalah  $\pm i\mu$ , maka persamaan umumnya adalah

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 e^{\alpha x} \cos(\mu x) + C_2 e^{-\alpha x} \sin(\mu x) \\ X(x) &= C_1 e^{(0)x} \cos(\mu x) + C_2 e^{-(0)x} \sin(\mu x) \\ X(x) &= C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x) \end{aligned}$$

Substitusikan kondisi batasnya  $X(0,t) = 0$  dan  $X(50,t) = 0$ .

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\Rightarrow X(0) = C_1 \cos(\mu(0)) + C_2 \sin(\mu(0)) = 0 \\ &\Rightarrow C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0 \\ &\Rightarrow C_1 (1) + C_2 (0) = 0 \\ &\Rightarrow C_1 + 0 = 0 \\ &\Rightarrow C_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X(50) = 0 &\Rightarrow X(50) = (0) \cos(\mu(50)) + C_2 * \sin(\mu(50)) = 0 \\
 &\Rightarrow 0 \cos(\mu) + C_2 * \sin(50\mu) = 0 \\
 &\Rightarrow C_2 \sin(50\mu) = 0
 \end{aligned}$$

Hasil Kondisi batas yang kedua menjelaskan bahwa  $\mu = n\pi$ , oleh karena itu untuk  $n = 1, 2, 3, \dots$ , jadi hasil fungsi eigen dan nilai eigen dari  $\lambda < 0$  adalah:

$$\begin{aligned}
 X_n(x) &= C_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\
 \lambda_n &= \frac{n^2 \pi^2}{L^2}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

untuk  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,

Untuk menentukan fungsi  $T(t)$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{T'(t)}{T(t)} &= -\mu^2 \alpha^2 \\
 T'(t) &= -\mu^2 \alpha^2 T(t) \\
 T'(t) &= -\lambda \alpha^2 T(t) \\
 T(t) &= C_1 e^{-\lambda \alpha^2 t}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Misal  $c_n = C_1 C_2$  maka

$$u_n(x, t) = c_n e^{\frac{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n = 1, 2, 3, \dots, \tag{2.21}$$

Diketahui  $U(x, t)$  persamaan difusi konveksi dengan  $L = 50$  dan  $f(x) = 20$  pada interval  $0 < x < 50$ , substitusikan ke persamaan (2.21).

$$U_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t}{L^2}} \sin \frac{(n\pi x)}{50} \tag{2.22}$$

Dengan kondisi awalnya  $U(x, 0) = f(x)$  maka

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{-n^2 \pi^2 \alpha^2 (0)}{2500}} \sin \frac{(n\pi x)}{50} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^0 \sin \frac{(n\pi x)}{50} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n (1) \sin \frac{(n\pi x)}{50}. \\
 f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{(n\pi x)}{50}.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Untuk mencari konstanta pada persamaan difusi konveksi adalah sebagai berikut.

Dengan nilai  $L = 50$  dan  $f(x) = 20$ , substitusikan ke persamaan (2.19)

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{2}{50} \int_0^{50} 20 \sin \frac{(n\pi x)}{50} dx \\
 c_n &= \frac{40}{50} \int_0^{50} \sin \frac{(n\pi x)}{50} dx \\
 c_n &= -\frac{40}{n\pi} \cos \frac{(n\pi x)}{50} \Big|_0^{50} \\
 c_n &= \frac{40}{n\pi} \cdot (1 - \cos(n\pi))
 \end{aligned}$$

Untuk menghitung nilai konstanta  $c_n$  dengan menggunakan matlab yang terlampir pada lampiran, masing-masing nilai  $c_1$  sampai  $c_5$  adalah  $c_1 = 0.000807390226314$ ,  $c_2 = 0.001612221827641$ ,  $c_3 = 0.002411946990061$ ,  $c_4 = 0.003204039470393$ ,  $c_5 = 0.003986005253357$

Kemudian nilai  $c_n$  substitusikan ke persamaan (2.22) maka

$$\begin{aligned}
 U(x,t) &= 0,000807390226314 e^{\frac{-1^2 \pi^2 1.71^2 t}{2500}} \sin \frac{(\pi x)}{50} + \\
 &0,001612221827641 e^{\frac{-2^2 \pi^2 1.71^2 t}{2500}} \sin \frac{(2\pi x)}{50} + 0,002411946990061 e^{\frac{-3^2 \pi^2 1.71^2 t}{2500}}
 \end{aligned}$$

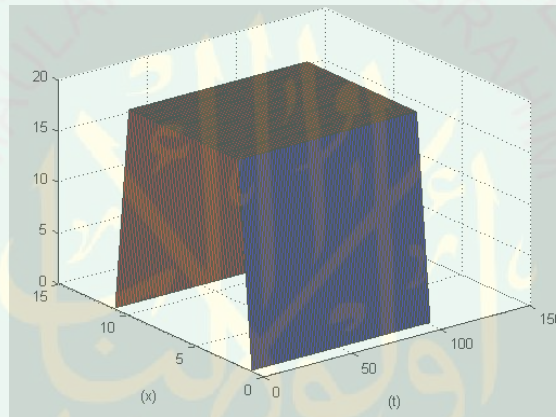
$$\sin \frac{(3\pi x)}{50} + 0,003204039470393e^{-\frac{4^2 \pi^2 1,71^2 t}{2500}} \sin \frac{(4\pi x)}{50} +$$

$$0,003986005253357e^{-\frac{5^2 \pi^2 1,71^2 t}{2500}} \sin \frac{(5\pi x)}{50} + \dots$$

Menghitung nilai  $U(x,t)$  dengan menggunakan matlab yang sudah terlampir pada lampiran, maka masing-masing nilai  $U_1$  sampai  $U_5$  adalah

$$U_1 = 0,646213417716771, U_2 = 0,584411898616796, U_3 = 0,529098742104660.$$

$$U_4 = 0,479254069466160, U_5 = 0,434197719667853.$$



Gambar 2.1 Solusi Analitik  $U(x,t)$

Gambar 2.1 adalah grafik persamaan difusi konveksi pada interval  $0 < x < 50$  dengan  $f(x) = 20$  pada saat  $\Delta x = 0,1$  dan  $\Delta t = 0,01$ . Interpretasi pada Gambar 2.1 bahwa grafik naik menuju titik maksimum yang kemudian pada saat maksimum itu grafik turun menuju titik minimum hal ini membuktikan grafiknya naik turun dan tidak konstan (Willian, 2000:123-124).

## 2.3 Metode Beda Hingga sebagai Penyelesaian Numerik pada Persamaan Panas

### 2.3.1 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar yang digunakan untuk menyelesaikan masalah metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Jika suatu fungsi  $T(x)$  diketahui di titik  $x$ , dan semua turunan dari  $T$  terhadap  $x$  diketahui pada titik tersebut, maka dengan deret Taylor dapat dinyatakan nilai  $T$  pada titik  $x_{i+1}$  yang terletak pada jarak  $\Delta x$  dari titik  $x_i$ .

$$T(x_{i+1}) = T(x_i) + T'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + T''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + T'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + T^{(n)}(x_i) \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \quad (2.24)$$

Keterangan:

$T(x_i)$  : fungsi di titik  $x_i$

$T(x_{i+1})$  : fungsi di titik  $x_{i+1}$

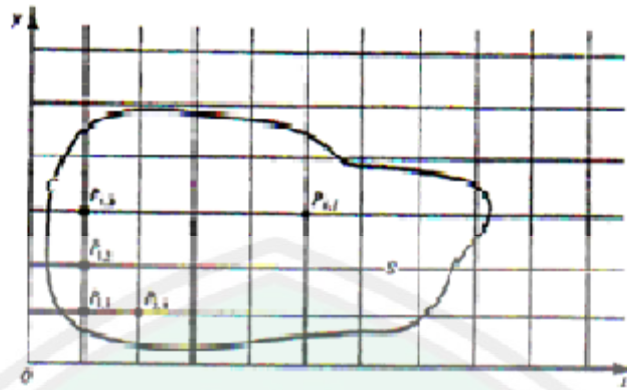
$T', T'', T''', \dots, T^{(n)}$  : turunan pertama, kedua, ketiga, ..., ke- $n$  dari fungsi

$\Delta x$  : langkah ruang, yaitu jarak antara  $x_i$  dan  $x_{i+1}$

$R_n$  : kesalahan pemotongan

! : operator faktorial

Metode beda hingga adalah suatu wilayah variabel bebas dalam persamaan diferensial parsial dengan suatu grid terbatas untuk mendekati variabel terikat. Sebagai contoh, penyelesaian persamaan Ellips pada daerah  $S$  yang dibatasi oleh kurva  $C$  seperti tampak pada Gambar 2.2 tinjauan daerah  $S$  dibagi menjadi sejumlah pias (titik hitungan  $P$ ) dengan jarak pias adalah  $\Delta x$  dan  $\Delta y$ . Kondisi dimana variabel terikat  $U$  harus memenuhi di sekeliling kurva  $C$  disebut dengan kondisi batas. Penyelesaian persamaan diferensial merupakan perkiraan nilai  $U$  pada titik-titik hitungan  $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{ij}$  (Triatmodjo, 2002:196).



Gambar 2.2 Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode Beda Hingga.

Metode beda hingga adalah salah satu cara untuk memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskrit. Metode beda hingga banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Bentuk persamaan diferensial tersebut dapat diturunkan berdasarkan deret Taylor.

#### 1. Diferensial turunan pertama

Deret Taylor pada persamaan (2.24) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = f'(x_1) = \frac{r(x_{i+1}) - r(x_i)}{\Delta x} - o(\Delta x^2) \quad (2.25)$$

Bentuk diferensial dari persamaan (2.25) disebut diferensial maju orde-1. Disebut diferensial maju karena menggunakan data pada  $a_i$  dan  $a_{i+1}$ , untuk menghitung diferensial. Jika data yang digunakan adalah di titik  $a_i$  dan  $x_{i+1}$ , maka disebut diferensial mundur, dan deret Taylor menjadi.

$$T(x_{i+1}) = T(x_i) - T'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + T''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} - T'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (2.26)$$

atau

$$T(x_{i-1}) = T(x_i) - T'(x_i) \Delta x + o(\Delta x^2) \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = T'(x_i) = \frac{T(x_i) - T(x_{i-1})}{\Delta x} + o(\Delta x^2) \quad (2.28)$$

Apabila data yang digunakan untuk memperkirakan diferensial dari fungsi adalah pada titik  $x_{i-1}$  dan  $x_{i+1}$ , maka perkiraannya disebut diferensial terpusat.

$$T(x_{i+1}) - T(x_{i-1}) = 2T'(x_i)\Delta x + 2T'''(x_i)\frac{\Delta x^3}{3!} + \dots$$

atau

$$\frac{\partial T}{\partial x} = T'(x_i) = \frac{T(x_{i+1}) - T(x_{i-1})}{2\Delta x} + o(\Delta x^2) - \dots \quad (2.29)$$

## 2. Diferensial Turunan Kedua

Turunan kedua dari suatu fungsi dapat diperoleh dengan menjumlahkan (2.23) dengan persamaan (2.28) menjadi

$$T(x_{i+1}) - T(x_{i-1}) = 2T'(x_i) + 2T'''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + 2T''''(x_i)\frac{\Delta x^4}{4!} + \dots$$

atau

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = T''(x_i) = \frac{T(x_{i+1}) - 2T(x_i) + T(x_{i-1}))}{\Delta x^2} - o(\Delta x^2) \quad (2.30)$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa bentuk diferensial (biasa atau parsial) dapat diubah dalam bentuk diferensial numerik (beda hingga).

## 3. Turunan Terhadap Variabel Lain

Apabila fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas, seperti  $(x, y)$ , maka bentuk deret Taylor menjadi

$$T(x_{i+1}, y_{i+1}) = T(x_i, y_i) + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\Delta y}{1!} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2!} + \dots \quad (2.31)$$

Dengan cara yang sama seperti telah dijelaskan di depan, turunan pertama terhadap variabel  $a$  dan  $t$  berturut-turut dapat ditulis dalam bentuk (diferensial maju) sebagai berikut.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T(x_{i+1}, y_j) - T(x_i, y_j)}{\Delta x} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T(x_i, y_{j+1}) - T(x_i, y_j)}{\Delta y} \quad (2.33)$$

Untuk menyederhanakan penulisan, selanjutnya bentuk  $T(x_i, y_j)$  ditulis menjadi  $T_{ij}$  dengan subskrip  $i$  dan  $j$  menunjukkan komponen dalam arah sumbu  $x$  dan sumbu  $y$ . Dengan cara seperti itu maka persamaan (2.30) dan (2.31) dapat ditulis menjadi

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1j} - T_{ij}}{\Delta x} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{i,j+1} - T_{ij}}{\Delta y} \quad (2.35)$$

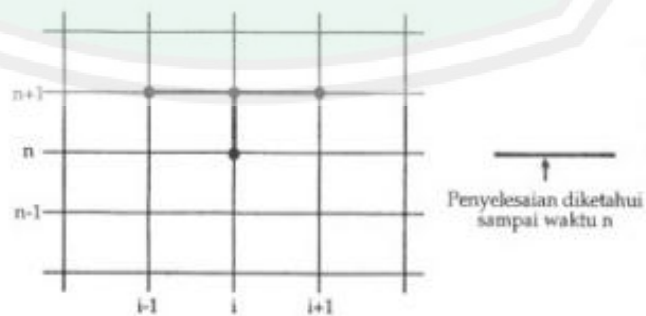
Untuk diferensial terpusat bentuk di atas menjadi

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1j} - T_{ij}}{2\Delta x} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{i,j+1} - T_{ij}}{2\Delta y} \quad (2.37)$$

(Triatmojo, 2002:9-13).

### 2.3.2 Skema Implisit pada Persamaan Panas



Gambar 2.3 Skema Implisit

Pada Gambar (2.3) menunjukkan jaringan titik hitungan dari skema implisit. Dalam gambar tersebut, variabel (temperatur) di titik  $i$  pada waktu ke  $n+1(T_i^{n+1})$  dipengaruhi oleh  $T_i^n$  yang sudah diketahui nilainya serta  $(T_{i-1}^{n+1})$  dan  $(T_{i+1}^{n+1})$  yang belum diketahui nilainya. Dengan demikian, persamaan parabola di titik  $(i,n+1)$  menghasilkan variabel  $(T_i^{n+1})$  yang mengandung variabel  $(T_{i-1}^{n+1})$ ,  $(T_i^{n+1})$ , dan  $(T_{i+1}^{n+1})$ , sehingga nilai  $(T_i^{n+1})$  tidak bisa langsung dihitung yang kemudian akan terbentuk suatu sistem persamaan yang harus diselesaikan untuk memperoleh nilai  $(T_i^{n+1})$  ( $i = 1 \dots M$ ). Dengan menggunakan skema pada gambar dibawah ini, fungsi  $T(x,t)$  dan turunannya dari persamaan parabola didekati oleh bentuk berikut ini (Triatmojo, 2002:201).

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{T_{i+1j} - T_{ij}}{\Delta x} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{T_{i,j-1} - T_{ij} + T_{i,j+1}}{2\Delta x} \quad (2.39)$$

Dengan menggunakan skema di atas maka diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\frac{T_{j-1}^i}{\Delta x^2} + \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{2}{\Delta x^2} \right) T_j^i - \frac{T_{j+1}^i}{\Delta x^2} = \frac{T_j^{i+1}}{\Delta t}$$

## 2.4 Galat

Penyelesaian secara numerik suatu persamaan matematika hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak (nilai sejati) yang sesuai dengan kenyataan, sehingga dalam penyelesaian numerik terdapat beberapa kesalahan (galat) terhadap nilai eksak. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya maka semakin teliti solusi numerik yang didapatkan. Terdapat tiga macam galat perhitungan

numerik, yaitu galat pemotongan, galat pembulatan, dan galat total (Munir, 2006:25).

Galat pemotongan terjadi karena tidak dilakukannya perhitungan sesuai dengan prosedur matematika yang benar. Galat pemotongan mengacu pada galat yang ditimbulkan akibat penggunaan hampiran sebagai pengganti formula eksak. Sebagai contoh, suatu proses tak berhingga diganti dengan proses berhingga. Dalam matematika, suatu fungsi dapat dipresentasikan dalam bentuk deret tak berhingga, misalkan

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Nilai eksak dari  $e^x$  diperoleh apabila semua suku deret tersebut diperhitungkan. Dalam praktik, sulit memperhitungkan semua suku pertama sampai tak berhingga. Apabila hanya diperhitungkan beberapa suku pertama saja, maka hasilnya tidak sama dengan nilai eksak (Munir, 2006:26).

Galat pembulatan terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan. Galat ini terjadi apabila bilangan perkiraan digunakan untuk menggantikan bilangan eksak. Suatu bilangan dibulatkan pada posisi ke- $n$  dengan membuat semua angka di sebelah kanan dari posisi tersebut nol. Sedangkan angka pada posisi ke- $n$  tersebut tidak berubah atau dinaikkan satu digit yang tergantung apakah nilai tersebut lebih kecil atau lebih besar 0,5 dari angka posisi ke- $n$ . Sebagai contoh, nilai


7832574 dapat dibulatkan menjadi 7833000

2,5415926 dapat dibulatkan menjadi 2,54

Galat total atau galat akhir pada solusi numerik merupakan jumlah galat pemotongan dan galat pembulatan. Misalkan diberikan contoh perhitungan



hidup secara nonlinier. Manusia yang hidup secara linier cenderung akan menjalani hidup sesuai aturan, tujuan hidupnya terfokus pada satu tujuan dan tidak banyak keinginan yang ingin dicapai dalam hidupnya. Sedangkan mereka yang hidup secara nonlinier akan mengalami berbagai rintangan demi mencapai tujuan hidupnya. Ketaklinieran dalam hidup manusia juga terjadi pada masalah-masalah yang mereka hadapi, sehingga mereka tidak selamanya mampu memecahkan masalah kehidupan dengan mudah. Dalam ajaran Islam manusia diajarkan untuk terus berusaha menemukan solusi dari setiap masalah yang mereka hadapi. Hal ini karena solusi dari satu masalah dapat diselesaikan tidak hanya dengan satu cara namun dapat diselesaikan dengan beberapa cara sebagaimana telah dijelaskan dalam QS. Yusuf/12:67, yaitu:


 وَقَالَ يَبْنَى لَا تَدْخُلُوا مِنْ بَابٍ وَاحِدٍ وَاَدْخُلُوا مِنْ اَبْوَابٍ مُتَفَرِّقَةٍ . . .

”Hai anak-anakku janganlah kamu (bersama-sama) masuk dari satu pintu gerbang, dan masuklah dari pintu-pintu gerbang yang berlain-lain . . . ” (QS. Yusuf/12:67).

Dalam *Tafsir al-Misbah* dijelaskan bahwa ayat tersebut turun pada saat Nabi Ya’kub a.s. telah memberikan izin kepada putra-putranya untuk pergi ke Kota Mesir, hati Ya’kub a.s. merasakan firasat sesuatu yang sulit. Namun demi keselamatannya beliau memerintahkan putra-putranya agar tidak memasuki satu pintu secara bersama-sama melainkan melalui pintu gerbang yang lainnya agar terhindar dari bahaya yang tidak diinginkan (Jabir, 2009:838-839).

Berdasarkan ayat di atas dapat dijelaskan bahwa Allah Swt. telah menyediakan berbagai metode dalam menyelesaikan suatu masalah agar menemukan solusi terbaiknya. Manusia diajarkan untuk terus berusaha menemukan solusi yang tepat dari satu cara ke cara yang lain. Hal ini juga terjadi

dalam penyelesaian masalah matematika, terdapat banyak metode baik metode analitik maupun metode numerik dalam menentukan suatu solusi dari masalah-masalah linier maupun nonlinier.

Metode analitik maupun metode numerik memberikan tingkat kebenaran yang berbeda, metode analitik akan selalu berusaha memberikan solusi eksak sedangkan metode numerik akan memberikan solusi hampiran yang mendekati solusi eksak. Namun keduanya sama-sama memiliki tingkat kebenaran yang telah diakui dan disepakati, karena tidak semua masalah matematika dapat diselesaikan secara eksak, sehingga perlu perhitungan numerik untuk mendapatkan solusinya.

Dalam *Tafsir Nurul Qur'an* dari lanjutan ayat di atas menjelaskan bahwa keputusan menetapkan hanyalah milik Allah (*Inil Hukmu Illa Lillahi*), sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa semua metode memiliki tingkat kebenaran yang telah diakui meskipun tidak mencapai tingkat kebenaran sejati (Faqih, 2005: 569-570).

Berkaitan dengan penyelesaian masalah, Allah Swt. memiliki janji kepada manusia, apabila manusia dihadapkan dengan suatu masalah yang sulit dipecahkan, maka hendaknya ia selalu ingat kepada Allah Swt. dan senantiasa mendekatkan diri kepada-Nya dengan memperbanyak amal shaleh. Hal tersebut karena dengan memperbanyak amal shaleh akan mendatangkan pertolongan Allah Swt. dari arah yang tidak kita duga. Allah Swt. berfirman dalam QS.al-Thalâq/65:2, yaitu:

وَمَنْ يَتَّقِ اللَّهَ يَجْعَلْ لَهُ مَخْرَجًا

“...Dan barang siapa yang bertakwal kepada Allah niscaya Dia akan mengadakan baginya jalan keluar“( QS. al-Thalâq/65:2).

Ayat di atas menjelaskan barang siapa bertakwa kepada Allah Swt. dengan melaksanakan tuntunanNya dan meninggalkan laranganNya niscaya Dia akan mengadakan baginya jalan keluar dari kesulitan hidup, termasuk hidup rumah tangga yang dihadapinya dan memberinya rizki di dunia dan di akhirat dari arah yang tak diduga (Jabir, 2009:449).



## BAB III PEMBAHASAN

### 3.1 Penyelesaian Solusi Analitik pada Persamaan Panas

Pembahasan dalam penelitian ini menyajikan upaya menentukan solusi eksak pada persamaan panas dengan metode pemisahan variabel. Smith (1985:21) menulis dalam bukunya bahwa bentuk persamaan panas orde-1 yaitu:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

Kondisi batas:  $U(0,t) = 0 ; U(1,t) = 0$

$$\text{Kondisi awal: } U(x, 0) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \leq 0.5 \\ 2(1-x), & 0.5 \leq x < 1 \end{cases}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.1), dimisalkan  $U(x,t)$  ke dalam bentuk terpisah berikut.

$$U(x,t) = X(x)T(t) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = X(t).T'(t) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X'(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = X''(x)T(t) \quad (3.4)$$

Substitusikan persamaan (3.3) dan (3.4) ke persamaan (3.1), maka diperoleh

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (3.5)$$

Pada persamaan (3.5) ruas kiri itu bergantung pada  $t$ , sedangkan ruas kanan bergantung pada  $x$ , sehingga dapat dimisalkan sebuah konstanta yang tidak bergantung pada keduanya, misalkan konstantanya adalah  $\lambda$  maka persamaan (3.5) dapat ditulis menjadi (Strauss, 2007:85).

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(t)}{X(t)} = \lambda \quad (3.5)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda, \quad (3.6)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Dengan  $\lambda =$  konstanta.

Selanjutnya, saatnya menunjukkan nilai-nilai dari  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 0$ , dan  $\lambda < 0$

dengan tujuannya untuk mengetahui hasil dari  $X(x)$

Pertama, untuk  $\lambda > 0$  asumsikan  $\lambda = \mu^2 > 0$  maka

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

$$X''(x) = \lambda X$$

$$X''(x) = \lambda X(x)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

$$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0, \quad (3.7)$$

Misal  $X(x) = e^{rx}$ , maka  $X'(x) = re^{rx}$  dan  $X''(x) = r^2 e^{rx}$

Substitusikan  $re^{rx}$  dan  $r^2 e^{rx}$  ke persamaaan (3.7), maka

$$r^2 e^{rx} - \mu^2 e^{rx} = 0$$

$$r^2 - \mu^2 = 0$$

$$r = \pm \mu,$$

Karena persamaannya mempunyai akar berlainan  $r_1$  dan  $r_2$  Maka kondisi umum dari  $X(x)$  adalah (Purcell, 1994:250).

$$X(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{-r_2 x}, \text{ atau, } X(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$$

Substitusikan kondisi batas  $X(0,t)=0$  maka

$$X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = C_1 e^{\mu(0)} + C_2 e^{-\mu(0)} \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$$

Substitusikan kondisi batas  $X(1,t)=0$  maka

$$X(1) = 0 \Rightarrow X(1) = C_1 e^{\mu(1)} + C_2 e^{-\mu(1)} = 0$$

$$\Rightarrow C_1 e^{\mu} + C_2 e^{-\mu} = 0$$

$$C_2 = -C_1$$

$$\Rightarrow C_1 e^{\mu} - C_1 e^{-\mu} = 0$$

$$\Rightarrow C_1 (e^{\mu} - e^{-\mu}) = 0$$

$$C_1 = 0 \vee (e^{\mu} - e^{-\mu}) = 0$$

$$(e^{\mu} - e^{-\mu}) = 0$$

$$e^{\mu} = e^{-\mu}$$

$$\frac{e^{\mu}}{e^{-\mu}} = 1$$

$$e^{\mu - (-\mu)} = 1$$

$$e^{2\mu} = 1$$

$$e^{2\mu} = e^0$$

$$2\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

Masing-masing nilai  $C_1 = 0$  dan  $C_2 = 0$  maka dapat disimpulkan solusi nol atau solusi trivial.

Kedua, Untuk  $\lambda = 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

$$X''(x) = \lambda X(x)$$

$$X''(x) = (0)X(x)$$

$$X''(x) = 0$$

Misal  $X(x) = Ax + B$ , maka  $X'(x) = A + B$  dan  $X''(x) = 0$ .

Jelas hanya persamaan linier yang turunan ke-2 adalah 0, maka solusinya adalah

$$X(x) = Ax + B$$

Substitusikan kondisi batasnya

$$U(0,t) = 0 \text{ dan } U(1,t) = 0$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = A(0) + B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$X(1) = 0 \Rightarrow X(1) = A(1) + B = 0 \Rightarrow A + (0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

Nilai  $A$  dan  $B$  untuk  $\lambda = 0$  adalah solusi nol atau solusi trivial.

Ketiga, Untuk  $\lambda < 0$ , asumsikan dari  $\lambda = -\mu^2 < 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

$$X''(x) = \lambda X(x)$$

$$X''(x) = \lambda X(x)$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$$

Misal  $X(x) = e^{rx}$ , maka  $X'(x) = re^{rx}$  dan  $X''(x) = r^2 e^{rx}$

Substitusikan  $re^{rx}$  dan  $r^2 e^{rx}$  ke persamaaan (3.7), maka

$$r^2 e^{rx} + \mu^2 e^{rx} = 0$$

$$r^2 + \mu^2 = 0$$

$$r = \pm i\mu,$$

Jika memiliki akar-akarnya imajiner atau konjugat umumnya  $\alpha \pm \beta i$  (Purcell,

1994:250). Untuk persamaan ini adalah  $\pm i\mu$  maka persamaan umumnya adalah.

$$X(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\mu x) + C_2 e^{-\alpha x} \sin(\mu x)$$

$$X(x) = C_1 e^{(0)x} \cos(\mu x) + C_2 e^{-(0)x} \sin(\mu x)$$

$$X(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)$$

Ketika kondisi batasnya  $U(0,t) = 0$

$$\begin{aligned}
X(0) = 0 &\Rightarrow X(0) = C_1 \cos(\mu(0)) + C_2 \sin(\mu(0)) = 0 \\
&\Rightarrow C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0 \\
&\Rightarrow C_1(1) + C_2(0) = 0 \\
&\Rightarrow C_1 + 0 = 0 \\
&\Rightarrow C_1 = 0
\end{aligned}$$

Ketika kondisi batasnya  $U(1,t) = 0$

$$\begin{aligned}
X(1) = 0 &\Rightarrow X(1) = (0) \cos(\mu) + C_2 * \sin(\mu) = 0 \\
&\Rightarrow 0 \cos(\mu) + C_2 * \sin(\mu) = 0 \\
&\Rightarrow C_2 \sin(\mu) = 0
\end{aligned}$$

$C_2 = 0$  dan  $\sin(\mu) = 0$ . Maka kondisi kedua ini menjelaskan bahwa  $\mu = n\pi$  kemudian memperoleh nilai eigen dan fungsi eigen untuk  $\lambda = 0$ .

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= -(n\pi)^2 \\
X_n(x) &= \sin(n\pi x)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

untuk  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,

Dalam menentukan nilai dari  $T(t)$ , selanjutnya gunakan persamaan (3.5)

maka diperoleh

$$\begin{aligned}
T'(t) &= \lambda T(t) \\
\frac{dT(t)}{dt} &= \lambda T(t) \\
\frac{dT(t)}{T(t)} &= \lambda dt \\
\int \frac{dT}{T} &= \int \lambda dt \\
\ln(T(t)) &= \lambda t + \ln C \\
\ln(T(t)) - \ln C &= \lambda t \\
\ln\left(\frac{T(t)}{C}\right) &= \lambda t \\
e^{\ln\left(\frac{T(t)}{C}\right)} &= e^{\lambda t} \\
\left(\frac{T(t)}{C}\right) &= e^{\lambda t} \Rightarrow T(t) = Ce^{\lambda t}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Kemudian substitusikan fungsi (3.9) dan (3.8) ke persamaan (3.2) maka diperoleh

$$U_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$$

$$U_n(x,t) = C_2 \sin(n\pi x)C_1 e^{-(n^2\pi^2)t}$$

Misal  $a_n = C_2 C_1$  maka

$$U_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = a_n \sin(n\pi x)e^{-(n^2\pi^2)t} \quad (3.10)$$

Maka solusi umum dari  $U(x,t)$  adalah

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)e^{-(n^2\pi^2)t} \quad (3.11)$$

Dengan kondisi awalnya  $U(x,0) = f(x)$  maka diperoleh

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)e^{-(n^2\pi^2)(0)}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x) \quad (3.12)$$

Strauss (2007:104-105) memaparkan dalam bukunya bahwa untuk mencari nilai koefisien  $a_n$  menggunakan aturan deret Fourier, persamaan (3.12) dikalikan dengan  $\sin \frac{m\pi x}{l}$  dan diintegrasikan terhadap  $x$ , dengan interval  $0 < x < 1$  maka diperoleh sebagai berikut.

$$\int_0^1 f(x) \sin m\pi x = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) \quad (3.13)$$

Pada saat  $m \neq n$  nilai dari  $\int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) = 0$ , jika ingin hasilnya tidak sama dengan nol maka  $m = n$  (Ralph, 2010:590). Sehingga persamaan (3.13) dengan asumsi  $m = n$  diperoleh

$$\int_0^1 f(x) \sin m\pi x = \int_0^1 a_n \sin(m\pi x) \sin(m\pi x)$$

$$\int_0^1 f(x) \sin(m\pi x) = \int_0^1 a_m \sin^2(m\pi x) dx \quad (3.14)$$

Pada persamaan (3.14) dapat dimisalkan bahwa

$$p = m\pi x$$

$$dp = m\pi dx \Rightarrow dx = \frac{dp}{m\pi}, \quad (3.15)$$

Substitusikan (3.15) ke persamaan (3.14), Maka diperoleh

$$\int_0^1 f(x) \sin(m\pi x) = \int_0^{m\pi} a_m \sin^2(p) \frac{dp}{m\pi}$$

$$\int_0^1 f(x) \sin(m\pi x) = \frac{1}{m\pi} \cdot a_m \int_0^{m\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos(2p)) dp$$

$$\int_0^1 f(x) \sin(m\pi x) = \frac{1}{2} \frac{1}{m\pi} \cdot a_m \int_0^{m\pi} (1 - \cos(2p)) dp$$

$$\int_0^1 f(x) \sin(m\pi x) = \frac{1}{2} \frac{1}{m\pi} \cdot a_m \left[ \int_0^{m\pi} dp - \int_0^{m\pi} \cos 2p \cdot dp \right] \quad (3.16)$$

Pada persamaan (3.16) dapat dimisalkan

$$2p = v \Rightarrow dp = \frac{1}{2} dv \quad (3.17)$$

Substitusikan (3.17) ke persamaan (3.16) maka diperoleh

$$\int_0^1 f(x) \sin(m\pi x) = \frac{1}{2m\pi} \cdot a_m \left[ [p]_0^{m\pi} - \int_0^{2m\pi} \cos(v) \cdot \frac{1}{2} dv \right]$$

$$\int_0^1 f(x) \sin(m\pi x) = \frac{1}{m\pi} \cdot a_m \left[ m\pi - \frac{1}{2} [\sin(v)]_0^{2m\pi} \right]$$

$$\int_0^1 f(x) \sin(m\pi x) = \frac{dp}{m\pi} \cdot a_m \left[ m\pi - \frac{1}{2} \sin(2m\pi) \right]$$

$$\int_0^1 f(x) \sin(m\pi x) = \frac{1}{2m\pi} \cdot a_m \cdot m\pi$$

$$\int_0^1 f(x) \sin(m\pi x) = \frac{1}{2} \cdot a_m$$

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) \quad (3.18)$$

Substitusikan nilai awal (3.1) ke persamaan (3.18) maka diperoleh

$$a_n = 2 \int_0^{1/2} 2(x) \sin(n\pi x) dx + \int_{1/2}^1 (2(1-x)) \sin(n\pi x) dx \quad (3.19)$$

Substitusikan nilai  $n$  ke persamaan (3.19). Untuk mencari nilai  $a_1$  sampai  $a_5$  dengan menggunakan matlab yang sudah terlampir pada lampiran, maka dari itu, masing-masing nilainya adalah

$a_1 = 0,810745552739333$ ,  $a_2 = 0,000646132462383$ ,  $a_3 = -0,090369779948953$ ,  
 $a_4 = -8,19471 \times 10^{-10}$ ,  $a_5 = 0.032326195185621$ , untuk semua nilai dari  $n$ , maka dapat disubstitusikan masing-masing nilai  $a_n$  ke persamaan (3.11).

Sehingga solusi eksaknya adalah

$$U(x,t) = 0,810745552739333 \sin(\pi x) e^{-(1^2 \pi^2)t} +$$

$$0,000646132462383 \sin(2\pi x) e^{-(2^2 \pi^2)t} - 0,090369779948953 \sin(3\pi x) e^{-(3^2 \pi^2)t} -$$

$$8,1947 \times 10^{-10} \sin(4\pi x) e^{-(4^2 \pi^2)t} + 0.032326195185621 (5\pi x) e^{-(5^2 \pi^2)t} + \dots$$

Substitusikan masing-masing nilai  $x$  dan  $t$  maka

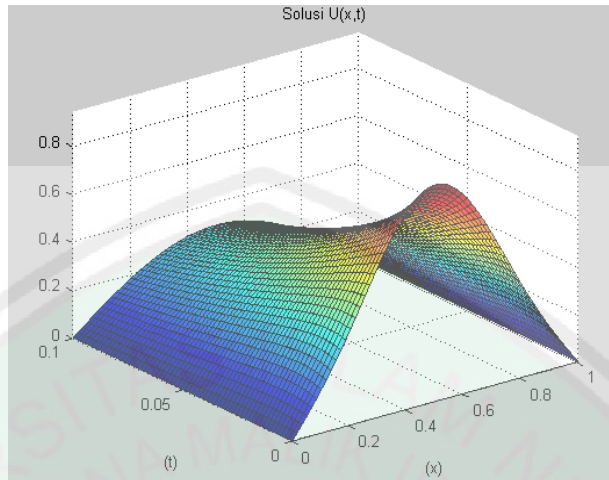
$$U_1(0.5,0.01) = 0.774581043801693, U_2(0.5,0.02) = 0.681203048733474,$$

$$U_3(0.5,0.03) = 0.609478169304901, U_4(0.5,0.04) = 0.549118620711225,$$

$$U_5(0.5,0.05) = 0.496275727452109$$

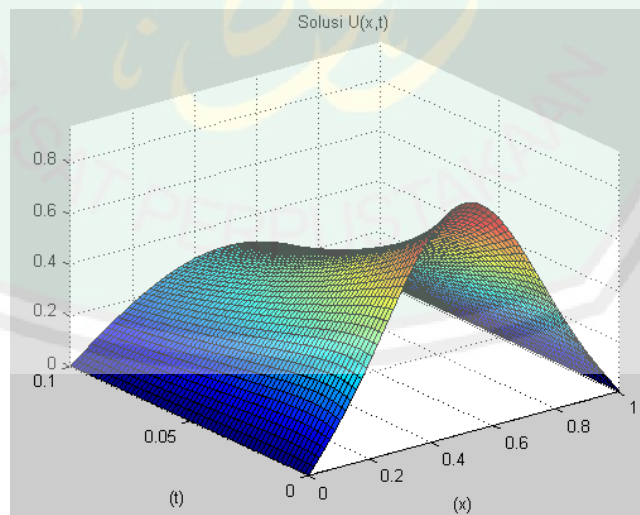
Untuk menghitung nilai  $U(x,t)$  suku dari  $U_6$  sampai ke  $U_n$  dengan menggunakan matlab atau maple yang sudah terlampir pada lampiran.

Adapun bentuk grafik dari solusi analitik adalah sebagai berikut.



**Gambar 3.1** Grafik Solusi Analitik  $U(x,t)$

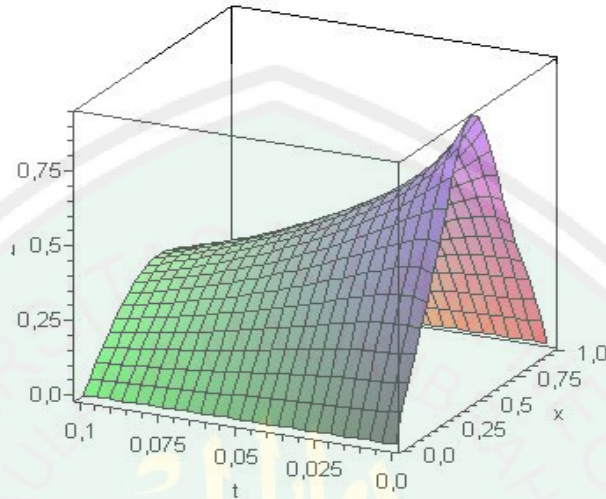
Pada Gambar 3.1 merupakan hasil dari solusi analitik dalam bentuk grafik 3 dimensi  $U(x,t)$  dengan kondisi batas pada interval  $t$  dan  $x$  masing-masing adalah  $0 < t < 0.1$  dan  $0 < x < 1$  pada saat  $\Delta t = 0.01$  dan  $\Delta x = 0.1$ . Gambar 3.1 menginterpretasikan bahwa nilai dari  $U(x,t)$  semakin turun, hal ini menunjukkan semakin besarnya nilai  $x$  maka nilai  $U(x,t)$  mendekati nol.



**Gambar 3.2** Grafik Solusi Analitik  $U(x,t)$

Pada Gambar 3.2 merupakan hasil dari solusi analitik dalam bentuk grafik 3 dimensi  $U(x,t)$  dengan kondisi batas pada interval  $t$  dan  $x$  masing-masing adalah  $0 < t < 0.1$  dan  $0 < x < 1$  pada saat  $\Delta t = 0.01$  dan  $\Delta x = 0.01$ . Gambar 3.2 menginterpretasikan

bahwa nilai dari  $U(x,t)$  semakin turun hal ini menunjukkan semakin besarnya nilai  $x$  maka nilai  $U(x,t)$  mendekati nol.



**Gambar 3.3** Solusi Analitik  $U(x,t)$

Pada Gambar 3.3 merupakan hasil dari solusi analitik dalam bentuk grafik 3 dimensi  $U(x,t)$  dengan kondisi batas pada interval  $t$  dan  $x$  masing-masing adalah  $0 < t < 0.1$  dan  $0 < x < 1$  pada saat  $\Delta t = 0.01$  dan  $\Delta x = 0.1$ . Gambar 3.3 menginterpretasikan bahwa nilai dari  $U(x,t)$  semakin turun hal ini menunjukkan semakin besarnya nilai  $x$  maka nilai  $U(x,t)$  mendekati nol.

Adapun nilai  $U(x,t)$  dengan menggunakan program maple adalah

$$U_1(0.5,0.01) = 0.774181043801693, U_2(0.5,0.02) = 0.680903048733474,$$

$$U_3(0.5,0.03) = 0.609178169304901, U_4(0.5,0.04) = 0.549118620711225,$$

$$U_5(0.5,0.05) = 0.496275727452109$$

### 3.2 Penyelesaian Numerik pada Persamaan Panas

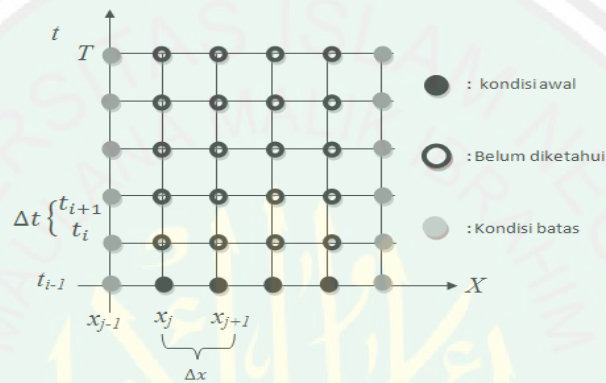
Pada penyelesaian numerik ini, dalam menyajikan upaya mendiskritkan atau diskritisasi untuk mendapatkan model diskrit yang dapat merepresentasikan suatu persamaan model kontinu. Model dari bentuk persamaan panas yaitu.

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0$$

Kondisi batas:  $U(0,t) = 0$ ;  $U(1,t) = 0$

$$\text{Kondisi awal: } U(x, 0) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 2(1-x), & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Dengan mengambil ukuran  $\Delta x = 0.1$  dan  $0.01$  pada saat  $\Delta t = 0.01$ .



Gambar 3.4 Jaringan Titik Hitung Beda Hingga Implisit

Selanjutnya, menentukan  $U_t$  dan  $U_{xx}$  dengan metode implisit *Forward Time Central Space* (FTCS) (Triatmojo, 2002:216-217).

Untuk  $U_t$  menggunakan beda maju, yaitu:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \left( \frac{U_j^{i+1} - U_j^i}{\Delta t} \right) \quad (3.20)$$

Sedangkan  $U_{xx}$  beda pusat. Penulisannya sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \left( \frac{U_{j+1}^{i+1} + U_{j-1}^{i+1} - 2U_j^{i+1}}{\Delta x^2} \right) \quad (3.21)$$

Kemudian substitusikan persamaan (3.19) dan (3.20) ke persamaan (3.1)

$$\left( \frac{U_j^{i+1} - U_j^i}{\Delta t} \right) = \left( \frac{U_{j+1}^{i+1} + U_{j-1}^{i+1} - 2U_j^{i+1}}{\Delta x^2} \right)$$

$$\left( \frac{U_j^{i+1} - U_j^i}{\Delta t} \right) = \left( \frac{U_{j+1}^{i+1} + U_{j-1}^{i+1} - 2U_j^{i+1}}{\Delta x^2} \right)$$

$$U_j^{i+1} - U_j^i = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (U_{j+1}^{i+1} + U_{j-1}^{i+1} - 2U_j^{i+1})$$

$$U_j^{i+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (U_{j+1}^{i+1} + U_{j-1}^{i+1} - 2U_j^{i+1}) + U_j^i$$

$$\Delta x^2 U_j^{i+1} - (U_{j+1}^{i+1} + U_{j-1}^{i+1} - 2U_j^{i+1}) \Delta t = \Delta x^2 U_j^i$$

$$\Delta x^2 U_j^{i+1} - (\Delta t U_{j+1}^{i+1} + \Delta t U_{j-1}^{i+1} - 2\Delta t U_j^{i+1}) = \Delta x^2 U_j^i$$

$$-\Delta t U_{j-1}^{i+1} + (\Delta x^2 + 2\Delta t) U_j^{i+1} - \Delta t U_{j+1}^{i+1} = \Delta x^2 U_j^i$$

Misal  $A = -\Delta t$ ,  $B = \Delta x^2 + 2\Delta t$ ,  $C = \Delta x^2$ , Maka

$$-AU_{j-1}^{i+1} + BU_j^{i+1} - AU_{j+1}^{i+1} = CU_j^i$$

$j$  indeks dari  $x$ , dimana  $x = 1, 2, 3, 4, 5$

$i$  indeks dari  $t$ , dimana  $i = 1, 2, 3, 4, 5$

ketika  $i = 1$ , maka

$$j = 1 \rightarrow -AU_0^2 + BU_1^2 - AU_2^2 = CU_1^1$$

$$j = 2 \rightarrow -AU_1^2 + BU_2^2 - AU_3^2 = CU_2^1$$

$$j = 3 \rightarrow -AU_2^2 + BU_3^2 - AU_4^2 = CU_3^1$$

$$j = 4 \rightarrow -AU_3^2 + BU_4^2 - AU_5^2 = CU_4^1$$

$$j = 5 \rightarrow -AU_4^2 + BU_5^2 - AU_6^2 = CU_5^1$$

$$\begin{bmatrix} B & -A & 0 & 0 & 0 \\ -A & B & -A & 0 & 0 \\ 0 & -A & B & -A & 0 \\ 0 & 0 & -A & B & -A \\ 0 & 0 & 0 & -A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \\ U_4^2 \\ U_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CU_1^1 \\ CU_2^1 \\ CU_3^1 \\ CU_4^1 \\ CU_5^1 \end{bmatrix}$$

$$0 + BU_1 - AU_2 = 0,002$$

$$-AU_1 + BU_2 - AU_3 = 0,004$$

$$-AU_2 + BU_3 - AU_4 = 0,006$$

$$-AU_3 + BU_4 - AU_5 = 0,008$$

$$-AU_4 + BU_5 = 0,01$$

Untuk masing-masing nilai  $A = -\Delta t$ ,  $B = \Delta x^2 + 2\Delta t$ ,  $C = \Delta x^2$  adalah

$A = 1$ , pada iterasi pertama atau  $t = 0$

$B = 0.02$ ,  $C = 0.01$

$$0.02U_1 - U_2 = 0,002$$

$$-U_1 + 0.02U_2 - U_3 = 0,0004$$

$$-U_2 + 0.02U_3 - U_4 = 0,006$$

$$-U_3 + 0.02U_4 - U_5 = 0,008$$

$$-U_4 + 0.02U_5 = 0,01$$

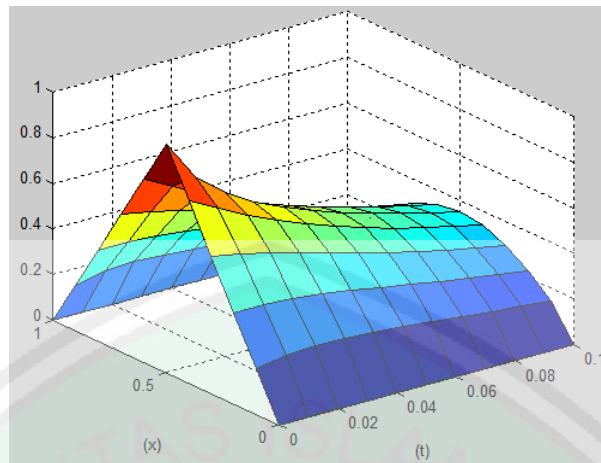
Untuk menghitung  $U_1$  sampai  $U_5$  dengan menggunakan metode eliminasi Gauss dan atau menggunakan program matlab, maka masing-masing nilai  $U_1$  sampai  $U_5$  adalah

$$U_1(0.5,0.01) = 0,822360248, U_2(0.5,0.02) = 0,717915975,$$

$$U_3(0.5,0.03) = 0,64348007, U_4(0.5,0.04) = 0,584331638,$$

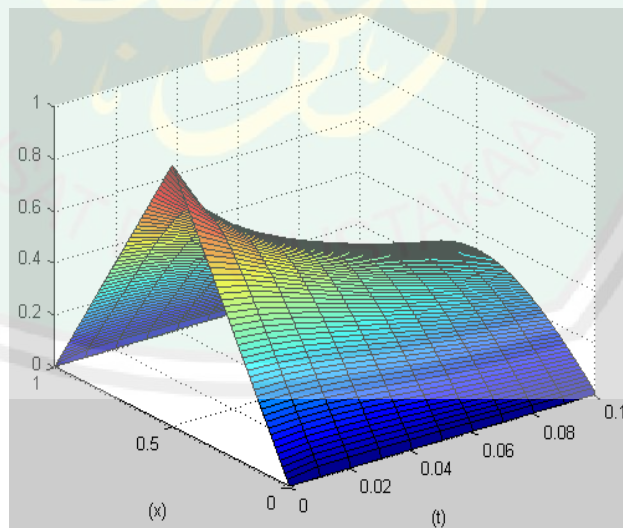
$$U_5(0.5,0.05) = 0,5344237$$

Untuk  $U_6$  sampai ke  $U_n$  dapat dihitung dengan program matlab, adapun gambar grafik solusi numerik  $U(x,t)$  dengan metode beda hingga implisit adalah



**Gambar 3.5** Grafik Solusi Numerik  $U(x,t)$

Pada Gambar 3.5 merupakan hasil dari solusi numerik dalam bentuk grafik 3 dimensi  $U(x,t)$  dengan kondisi batas pada interval  $t$  dan  $x$  masing-masing adalah  $0 < t < 0.1$  dan  $0 < x < 1$  pada saat  $\Delta t = 0.01$  dan  $\Delta x = 0.1$ . Gambar 3.5 menginterpretasikan bahwa nilai dari  $U(x,t)$  semakin turun, hal ini menunjukkan semakin besarnya nilai  $x$  maka nilai  $U(x,t)$  mendekati nol.



**Gambar 3.6** Grafik Solusi Numerik  $U(x,t)$

Pada Gambar 3.6 merupakan hasil dari solusi numerik dalam bentuk grafik 3 dimensi  $U(x,t)$  dengan kondisi batas pada interval  $t$  dan  $x$  masing-masing adalah  $0 < t < 0.1$  dan  $0 < x < 1$  pada saat  $\Delta t = 0.01$  dan  $\Delta t = 0.01$ . Gambar 3.6

menginterpretasikan bahwa nilai dari  $U(x,t)$  semakin turun, hal ini menunjukkan semakin besarnya nilai  $x$  maka nilai  $U(x,t)$  mendekati nol.

### 3.3 Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Numerik pada Persamaan Panas

Pada penelitian ini, penyelesaian perbandingan solusi analitik dan solusi numerik masing-masing menggunakan metode pemisahan variabel dan metode beda hingga implisit pada saat  $\Delta x = 0.1$ . Dari perbandingan kedua itu diperoleh persentase galat sebagai berikut.

$U(x,t)$	Solusi Numerik ( $x = 0.5$ )	Solusi Analitik ( $x = 0.5$ )	Sisa (selisih)	Galat
$t = 0.01$	0,822360248	0,774581044	0,047779205	6%
$t = 0.02$	0,717915975	0,681203049	0,036712927	5%
$t = 0.03$	0,64348007	0,609478169	0,034001901	6%
$t = 0.04$	0,584331638	0,549118621	0,035213018	6%
$t = 0.05$	0,5344237	0,496275727	0,038147973	8%

**Tabel 3.1** Persentase Galat  $U(x,t)$

Pada Tabel 3.1 menunjukkan hasil persentase galat  $U(x,t)$  pada saat  $t = 0.01$  s/d  $0.1$  dengan  $U(x,t) = 0.5$  meningkat dari 6 % sampai 8 %. Adapun selisih/sisa di antara kedua solusi itu menunjukkan jaraknya sedikit, sehingga menghasilkan galat yang kecil.

Selanjutnya, perbandingan solusi analitik dan solusi numerik masing-masing menggunakan metode pemisahan variabel dan metode beda hingga implisit pada saat  $\Delta x = 0.01$ , dari perbandingan kedua itu diperoleh persentase galat sebagai berikut.

$U(x,t)$	Solusi Numerik ( $x = 0.5$ )	Solusi Analitik ( $x = 0.5$ )	Sisa (selisih)	Galat
$t = 0.01$	0,800508823	0,774581044	0,02592778	3%
$t = 0.02$	0,701088114	0,681203049	0,019885065	3%
$t = 0.03$	0,62725555	0,609478169	0,01777738	3%
$t = 0.04$	0,566453255	0,549118621	0,017334634	3%
$t = 0.05$	0,514032465	0,496275727	0,017756738	4%

Tabel 3.2 Persentase Galat  $U(x,t)$

Pada Tabel 3.2 menunjukkan hasil persentase galat  $U(x,t)$  pada saat  $t = 0,01$  s/d  $0,1$  dengan  $U(x,t) = 0.5$  meningkat dari 3 % sampai 4 %. Adapun selisih/sisa di antara kedua solusi itu menunjukkan jaraknya sedikit, sehingga menghasilkan galat yang kecil.

Hasil perbandingan analisis galat antara Tabel 3.1 dan 3.2 membuktikan bahwa metode beda hingga implisit pada saat  $\Delta x = 0.1$  lebih besar dari metode beda hingga implisit pada saat  $\Delta x = 0.01$ .

### 3.4 Metode Beda Hingga Implisit dalam Perspektif Agama

Dalam agama islam manusia dianjurkan untuk selalu berusaha menemukan solusi dari setiap masalah yang mereka hadapi. Karena setiap masalah dapat diselesaikan tidak hanya dengan satu cara dan banyak cara untuk diselesaikan sebagaimana telah dijelaskan dalam QS. Yusuf/12:67, yaitu:

وَقَالَ يَبْنَى لَا تَدْخُلُوا مِن بَابٍ وَاحِدٍ، وَادْخُلُوا مِن أَبْوَابٍ مُّتَفَرِّقَةٍ

”Hai anak-anakku janganlah kamu (bersama-sama) masuk dari satu pintu gerbang, dan masuklah dari pintu-pintu gerbang yang berlain-lain”(Q.S. Yusuf/12:67).

Dalam *Tafsir al-Aisar* dijelaskan bahwa ayat tersebut turun pada saat Nabi Ya’kub a.s. telah memberikan izin kepada putra-putranya untuk pergi ke Kota Mesir bersama adik termudanya, namun demi keselamatannya beliau

memerintahkan putra-putranya agar tidak memasuki Kota Mesir melalui satu jalan, hendaknya dapat memasuki melalui berbagai pintu masuk agar terhindar dari bahaya yang tidak diinginkan. Pertemuan dengan nabi Ya'kub a.s setelah melalui berbagai pintu dapat diartikan sebagai sebuah solusi dengan menggunakan berbagai cara (Jabir, 2009:838-839).

Berdasarkan ayat di atas dapat dijelaskan bahwa setiap masalah yang dihadapi di dunia Allah Swt. telah memberikan berbagai cara untuk mencari jalan keluar dari suatu masalah untuk mencapai solusi terbaiknya. Manusia dianjurkan untuk terus berusaha mencari solusi dari setiap masalah yang dihadapi dari satu cara ke cara yang lain. Hal ini juga terjadi dalam penyelesaian masalah matematika, sebagai contoh, permasalahan persamaan diferensial parsial yang sulit untuk dipecahkan sehingga dikembangkan metode analitik dan metode numerik untuk menentukan solusi dari permasalahan nonlinear tersebut.

Dari ayat di atas dijelaskan bahwa terdapat berbagai metode dalam menentukan sebuah solusi. Dalam metode numerik terdapat berbagai macam metode yang dapat digunakan untuk menentukan solusi persamaan diferensial parsial, salah satu metode numerik yang memiliki tingkat kesalahan kecil adalah metode beda hingga implisit.

Metode beda hingga implisit merupakan metode numerik yang memiliki akurasi perhitungan dan memiliki tingkat ketelitian yang tinggi dalam menyelesaikan solusi numerik pada persamaan diferensial parsial, baik linier maupun nonlinier. Dari beberapa penelitian, metode beda hingga implisit memiliki tingkat kesalahan yang relatif lebih kecil dibandingkan dengan metode numerik yang lainnya.

Metode analitik maupun metode numerik memberikan tingkat kebenaran yang berbeda, namun keduanya sama-sama memiliki tingkat kebenaran yang telah diakui dan disepakati. Kebenaran dan keputusan yang paling tepat hanya milik Allah Swt. sebagaimana firman-Nya dalam QS. Yusuf/12:67, yaitu:

... إِنَّ الْحُكْمَ إِلَّا لِلَّهِ عَلَيْهِ تَوَكَّلْتُ وَعَلَيْهِ فَلْيَتَوَكَّلِ الْمُتَوَكِّلُونَ ﴿٦٧﴾

“...Keputusan menetapkan (sesuatu) hanyalah hak Allah; kepada-Nya-lah aku bertawakkal dan hendaklah kepada-Nya saja orang-orang yang bertawakkal berserah diri”(QS. Yusuf/12:67)

Dalam *Tafsir Nurul Qur'an* ayat di atas menjelaskan bahwa keputusan menetapkan hanyalah milik Allah (*Inil Hukmu Illa Lillahi*), sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa semua metode memiliki tingkat kebenaran yang telah diakui meskipun tidak mencapai tingkat kebenaran sejati (eksak) karena sesungguhnya hanya Allah Swt. yang mengetahui kebenaran hakiki. Begitu pula dengan solusi yang diperoleh dari metode numerik kebenarannya harus dapat diakui setelah melewati prosedur yang telah ditentukan (Faqih, 2005:570).

Berkaitan dengan metode numerik, dalam ayat lain Allah Swt. juga telah menjelaskan bahwa dalam setiap penciptaan-Nya telah diukur dan ditetapkan berdasarkan ukurannya, seperti dalam firman-Nya QS. al-Qomar/54:49, yaitu:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

”Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran”(QS.al-Qamar/54:49).

Dalam ayat di atas terdapat kata *qadar* yang mana dari segi bahasa bisa berarti kadar tertentu yang tidak bertambah atau berkurang atau juga berarti kuasa. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada

dalam kuasa Allah Swt. maka lebih tepat memahaminya dalam arti ketentuan dan sistem yang ditetapkan terhadap segala sesuatu. Selanjutnya kata *qadar* atau ukuran dapat diartikan sebagai proporsi. Dalam kehidupan ini Allah Swt. telah menetapkan sesuatu sesuai dengan proporsi atau bagiannya masing-masing. Salah satu contohnya Allah Swt. menciptakan lalat yang merupakan binatang penghasil jutaan telur, tetapi ia tidak dapat bertahan hidup lebih dari dua minggu. Seandainya ia dapat hidup beberapa tahun dengan kemampuan bertelurnya, maka pastilah bumi ini dipenuhi lalat dan kehidupan sekian banyak jenis makhluk, khususnya manusia akan menjadi mustahil. Tetapi semua itu berjalan berdasarkan sistem pengaturan dan kadar yang ditentukan Allah Swt. di alam raya ini (Jabir, 2009:199).

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dalam pembahasan, maka dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Solusi analitik dengan metode pemisahan variabel dapat diperoleh dengan beberapa tahap, adapun tahap-tahapannya sebagai berikut.
  - a. Menganalisis persamaan panas, syarat batas, dan kondisi awal yang akan dicari solusi analitiknya.
  - b. Menentukan nilai fungsi  $X(x)$  dan  $T(t)$  dengan metode pemisahan variabel.
  - c. Hasil dari nilai  $X(x)$  dikalikan dengan  $T(t)$  maka menghasilkan solusi umum.
  - d. Substitusikan nilai  $x$  dan  $t$  pada saat  $x = 0.5$  dan  $t = 0.01$ .
  - e. Mencari nilai  $U(x,t)$  dengan menggunakan matlab.
  - f. Interpretasi grafik solusi analitik  $U(x,t)$ .
2. Solusi numerik dengan metode beda hingga implisit diperoleh dengan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut.
  - a. Menganalisis persamaan panas sebagai persamaan diferensial parsial.
  - b. Menentukan besarnya nilai awal dan kondisi batas dari variabel ( $x$ ).
  - c. Menentukan nilai  $X(x)$  yang akan ditentukan penyelesaiannya beserta besarnya  $h$  ( $\Delta t$  dengan  $\Delta x$ ).
  - d. Proses diskritisasi yang kemudian membentuk suatu formula.
  - e. Membentuk suatu matriks.

- f. Menghitung nilai  $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$  sampai dengan  $U_{10}$  dengan menggunakan matlab.
3. Setelah penulis mengkaji dan menganalisis Perbandingan solusi analitik dan solusi numerik dapat ditarik kesimpulan bahwa dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial pada persamaan panas dapat dilakukan dengan beberapa tahap seperti pada uraian pembahasan bab 3. Dalam penelitian ini, dengan  $h = 0.01$  dan  $x = 0.1$ , maka diperoleh solusi analitik  $U_1 = 0.774581043801693$ ,  $U_2 = 0.681203048733474$ . Sedangkan hasil dari solusi numeriknya  $U_1 = 0.822360248$ ,  $U_2 = 0.717915975$ .

Perbandingan galat persentase antara penyelesaian dengan metode Crank Nicholson lebih kecil dari penyelesaian dengan menggunakan metode beda hingga implisit, maka dari itu menentukan solusi numerik dengan metode beda hingga skema Crank Nicholson memiliki akurasi perhitungan yang lebih baik dari pada metode beda hingga implisit.

#### 4.2 Saran

Tugas akhir ini merupakan penelitian dengan kajian literatur tentang perbandingan solusi numerik dan analitik dengan metode beda hingga implisit pada persamaan panas, maka penulis menyarankan penelitian selanjutnya untuk kasus persamaan panas dengan orde yang lebih tinggi atau dengan metode numerik lainnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Djojodihardjo, H.. 1983. *Metode Numerik*. Jakarta: Erlangga.
- Faqih, I.. 2005. *Tafsir Nurul Quran Jilid VII*. Jakarta: Penerbit Al-Huda.
- Jabir, A.B.. 2009. *Tafsir al-Aisar*. Jatinegara: Darussunnah Press.
- Mardalis. 2002. *Metode Penelitian Suatu Pendekatan Proposal*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Munir, R.. 2006. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.
- Nagle, K.R. & Saff, E.B.. 1996. *Fundamentals of Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*. Florida: University of South Florida.
- Pamuntjak. 1990. *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Pinsky, M.A.. 1998. *Partial Differential Equations and Boundary Value Problem with Applications 3rd edition*. Singapura. International Editions.
- Purcell, E.J.. 1994. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jakarta: Erlangga Press.
- Shihab, Q.. 2002. *Tafsir al-Misbah*. Jakarta: Lentera Hati.
- Smith, G.D.. 1985. *Numerical Solution Of Partial Differensial Equations*. Oxford: Oxford University Press.
- Strauss, W.. 2007. *Partial Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons Ltd.
- Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.
- William, E.B. & Richard, C.. 2000. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Wiley & Sons Ltd.
- Zauderer, E.. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. New York: John Wiley.

## LAMPIRAN- LAMPIRAN

### LAMPIRAN 1

#### Program Matlab Solusi Analitik

```
clc,clear;
format long
x=0:0.1:1;
t=0:0.01:0.1;
uu=inline('( 0.810745552739333*sin(1*3.14*x)*exp(-
(1*(3.14^2)*t)))+(0.000646132462383*sin(2*3.14*x)*exp(-
(4*(3.14^2)*t)))+(-0.090369779948953*sin(3*3.14*x)*exp(-
(9*(3.14^2)*t)))+(-0.000000000819471*sin(4*3.14*x)*exp(-
(16*(3.14^2)*t))))...' , 'x', 't')

figure(1)
ezsurf(uu, [0,1], [0,.1])
title(' Solusi U(x,t) ')
ylabel(' (t)')
xlabel(' (x)')
```

### LAMPIRAN 2

#### Program Matlab Metode Beda Hingga Implisit

```
clc,clear all
%parameter
format short
%interval x dan t
da=0.1
dt=0.01
a=0:da:1;
t=0:dt:0.1;
na=length(a);
mt=length(t);

% kondisi awal
for i=1:na
    if a(i)>=0 && a(i)<0.50
        r(i,1)=2*a(i);
    elseif a(i)>=0.5 && a(i)<=1
        r(i,1)=2*(1-a(i));
    end
end

% Kondisi Batas
r(1,1)=0;
r(na,1)=0;

for j=1:mt-1
    % Asumsi
    A(j)=-dt;
    B(j)=(da^2)+2*dt;
```

```

% Matriks Triagonal
for i=1:na
    J(i,i)=B(j);
end
for i=1:na-1
    J(i,i+1)=A(j);
end
for i=2:na
    J(i,i-1)=A(j);
end

% Ruas kanan

for i=1:na
    D(i,j)=(da^2)*r(i,j);
end

% Nilai u
r(:,j+1)=inv(J)*D(:,j);

% Kondisi batas
r(1,j+1)=0;
r(na,j+1)=0;
end
r((na+1)/2,:)

figure(1)
surf(r)
ylabel(' (x) ')
xlabel(' (t) ')

figure(2)
plot(a,r)
ylabel(' (x) ')
xlabel(' (t) ')

```

### LAMPIRAN 3

#### Program Matlab metode Crank Nicholson

```

clc,clear all
%interval x dan t
x=0:0.1:1;
t=0:0.01:0.1;
nx=length(x);
mt=length(t);

% kondisi awal
for i=1:nx
    if x(i)>=0 && x(i)<0.50
        r(i,1)=2*x(i);
    elseif x(i)>=0.5 && x(i)<=1
        r(i,1)=2*(1-x(i));
    end
end

```

```

end

% Kondisi Batas
r(1,1)=0;
r(nx,1)=0;

for j=1:mt-1
    % Asumsi
    A(j)=-1;
    B(j)=4;
    C(j)=-1;

    % Matriks Triagonal
    for i=1:nx
        J(i,i)=B(j);
    end
    for i=1:nx-1
        J(i,i+1)=C(j);
    end
    for i=2:nx
        J(i,i-1)=A(j);
    end

    % Ruas kanan
    D(1,j)=r(2,j);
    for i=2:nx-1
        D(i,j)=r(i-1,j)+r(i+1,j);
    end
    D(nx,j)=r(nx-1,j);

    % Nilai u
    r(:,j+1)=inv(J)*D(:,j);

    % Kondisi batas
    r(1,j+1)=0;
    r(nx,j+1)=0;
end

r=abs(r)
figure(1)
surf(t,x,r)
ylabel(' (x) ')
xlabel(' (t) ')

figure(2)
plot(x,r)
ylabel(' (x) ')
xlabel(' (t) ')

```

## LAMPIRAN 4

### Program Matlab Solusi Analitik Persamaan Difusi Konveksi

```
clc,clear;
format long
x=0:0.1:1;
t=0:0.01:0.1;
uu=inline('( 0.810745552739333*sin(1*3.14*x)*exp(-
(1*(3.14^2)*t)))+(0.000646132462383*sin(2*3.14*x)*exp(-
(4*(3.14^2)*t)))+(-0.090369779948953*sin(3*3.14*x)*exp(-
(9*(3.14^2)*t)))+(-0.000000000819471*sin(4*3.14*x)*exp(-
(16*(3.14^2)*t)))...','x','t')

figure(1)
ezsurf(uu,[0,1],[0,.1])
title(' Solusi U(x,t) ')
ylabel(' (t)')
xlabel(' (x)')
```

## LAMPIRAN 5

### Program Maple Solusi Analitik

```
> restart:
> with(plots):
> eq:=diff(u(x,t),t)=diff(u(x,t),x$2):
> ic1:=u(x,0)=f(x):
>
> bc1:=u(0,t)=0:bc2:=u(1,t)=0:
> Eq:=subs(u(x,t)=X(x)*T(t),eq):
> Eq:=Eq/X(x)/T(t):
> Eq_T:=lhs(Eq)=-lambda^2:
> T(t):=rhs(dsolve({Eq_T,T(0)=T0},T(t))):
> Eq_X:=rhs(Eq)=-lambda^2:
> dsolve({Eq_X},X(x)):
>
X(x):=rhs(dsolve({Eq_X,D(X)(0)=c[1]*lambda,X(0)=c[2]},X
(x))):
> bc1:=X(x)=0:bc2:=X(x)=0:
> Eq_bc1:=eval(subs(x=0,bc1)):
> c[2]:=solve(Eq_bc1,c[2]):
> Eq_bc2:=eval(subs(x=1,bc2)):
> Eq_Eig:=sin(lambda)=0:
> solve(Eq_Eig,lambda):
> _EnvAllSolutions:=true:
> solve(Eq_Eig,lambda):
> U:=eval(X(x)*T(t)):
> Un:=subs(c[1]=A[n]/T0,lambda=lambda[n],U):
> u(x,t):=sum(Un,n=1..infinity):
> u(x,t):=subs(lambda[n]=n*Pi,u(x,t)):
> eq_An:=eval(subs(t=0,u(x,t)))=rhs(ic1):
```

```

>
> I1:=int((sin(n*Pi*x))^2,x=0..1):
> I2:=int(2*x*sin(n*Pi*x),x=0..0.5):
> I3:=int(2*(1-x)*sin(n*Pi*x),x=0.5..1):
> vars:={sin(n*Pi)=0}:
> I1:=subs(vars,I1):
> A1[n]:=I2/I1:
> A2[n]:=I3/I1:
> A[n]:=A1[n]+A2[n]:
> u(x,t):=eval(u(x,t)):
> u(x,t):=subs(infinity=N,u(x,t)):
> ua:=(evalf(subs(N=5,u(x,t)))):
plot(eval(subs(t=0,ua)),x=0..1,axes=boxed,title="Figure
7.1",thickness=3,labels=[x,"u(x,0)"]):
>
plot3d(ua,x=0..1,t=0..0.1,axes=boxed,title="",labels=[x
,t,"u"],orientation=[60,60]):
> for j from 0 by 0.1 to 1 do
for k from 0 by 0.01 to 0.1 do
u[j,k]:=(evalf(subs(x=j,t=k,ua(x,t)))):
od;
od;
> u[0,0]:
> u[0.5,0.01]:
> u[0.5,0.02]:
> u[0.5,0.03]:
> u[0.5,0.04]:
> u[0.5,0.05]:

```