MENYELESAIKAN RELASI REKURSIF

SKRIPSI

Oleh :
KHOERON
NIM : 04510050

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009

MENYELESAIKAN RELASI REKURSIF

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :
KHOERON
NIM : 04510050

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009

MENYELESAIKAN RELASI REKURSIF

SKRIPSI

Oleh:
KHOERON
NIM : 04510050

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 12 Januari 2009

Pembimbing I,	**Pembimbing II,**
Drs. Usman Pagalay, M.Si	**Achmad Nashichuddin, MA**
NIP: 150 327 240	**NIP. 150 302 531**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

MENYELESAIKAN RELASI REKURSIF

SKRIPSI

Oleh :
KHOERON
NIM : 04510050

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 19 Januari 2009

Susunan Dewan Penguji:			Tanda Tangan
1. Penguji Utama	:	Wahyu H. Irawan, M.Pd NIP. 150 300 415	( )
2. Ketua	:	Sri Harini, M.Si NIP. 150 318 321	( )
3. Sekretaris	:	Drs. Usman Pagalay, M.Si NIP. 150 327 240	( )
4. Anggota	:	Achmad Nashichuddin, MA NIP. 150 302 531	( )

Mengetahui dan Mengesahkan

Kajur Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi

Sri Harini, M.Si.
NIP. 150 318 321

MOTTO

!Ž!!ƒ!!!Ê!ƒ!!!! !!¾!!!۩!!!! Ê!ÊœÊ Œ ! Š!! !Ž!ŒÊÊ

“ Memang, seorang pemuda itu tergantung tinggi rendah tingkat I’tikadnya, manakala tekadnya tinggi lagi mantap, tentu akan berhasil apa yang dicita-citakannya. Sebaliknya, orang yang tidak punya ketekadan dan kemantapan, tentu tidak akan memperoleh sesuatu yang dituju ”

Persembahan

Ku persembahkan kepada

Bapak, Ibu, dan Saudara-Saudari tercinta

Yang telah menyayangi dan mengasihiku setulus hati

Sebening cinta dan sesuci do'a.

Kupersembahkan kepada

Adik-adikku tersayang (Khusnul Khotimah)

terima kasih atas dukungan dan motivasinya

dan keluarga besarku yang terus mendorongku untuk terus maju

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufik dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si). Sholawat dan salam senantiasa terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membawa umat manusia dari dunia kegelapan dan kebodohan menuju dunia yang penuh cahaya dan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, utamanya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B.S., SU, DSc. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.
3. Sri Harini, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.
4. Drs. Usaman Pagalay, M.Si. selaku dosen pembimbing, karena atas bimbingan, bantuan dan kesabarannya penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.

5. Achmad Nashichuddin, MA. selaku selaku Dosen Pembimbing Integrasi Sains dan Islam yang juga telah banyak memberi arahan kepada penulis.
6. Abdussakir, M.Pd yang banyak memberi masukan dan motivasi dalam penulisan skripsi ini dan segenap Bapak/Ibu Dosen Fakultas Sains dan Teknologi, khususnya dosen jurusan Matematika yang pernah mendidik dan memberikan ilmunya yang tak ternilai harganya.
7. Ayah dan ibunda tercinta yang dengan sepenuh hati memberikan dukungungan moril maupun spiritual serta ketulusan doanya sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
8. Teman teman matematika, terutama angkatan 2004 yang telah memberikan dukungan dan bantuan dalam penyelesaian skripsi ini.
9. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah ilmu pengetahuan bagi penulis khususnya dan pembaca umumnya serta dapat menjadi inspirasi bagi pembaca yang ingin mengembangkan ilmu pengetahuan.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

08 Januari 2009

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Khoeron. 2009. **Menyelesaikan Relasi Rekursif.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang. Pembimbing:(I) Drs.Usman Pagalay, M.Si (II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Relasi Rekursif, Barisan

Masalah yang dibahas dalam skripsi ini dirumuskan sebagai berikut yaitu; bagaimana menyelesaikan relasi rekursif dengan menggunakan cara iterasi, dengan persamaan karakteristik, dan dengan fungsi pembangkit. Sedangakan tujuan penulisan skripsi ini adalah mengetahui tahapan-tahapan menyelesaikan Relasi Rekursif dengan cara Iterasi, melalui Persamaan Karakteristik, dan dengan Fungsi Pembangkit. kemudian permasalahan yang dikaji dibatasi dalam barisan bilangan real dan relasi rekursif.

Dalam menyelesaikan relasi rekursif perlu diketahui definisi-definisi sebagai berikut: Barisan bilangan real (barisan di R) adalah suatu fungsi dengan domain himpunan bilangan asli N ke himpunan bilangan real R dan dapat dinotasikan dengan $f : N \to R$. Relasi rekursif adalah persamaan yang menyatakan hubungan antara beberapa suku.

Dalam kajian ini, penulis mengkaji barisan bilangan real yang terdiri dari limit barisan, barisan terbatas, barisan monoton, dan barisan divergen yang mana dalam pembahasan dapat memenuhi pada contoh-contoh dari relasi rekursif yang dilakukan dengan beberapa tahap. Dan telah dikaji pula tentang materi relasi rekursif sehingga pada pembahasan dapat mempermudah menyelesaikan relasi rekursif dengan beberapa tahap.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh bahwa menyelesaikan relasi rekursif dengan cara iterasi, persamaan, dan dengan fungsi pembangkit dapat menghasilkan solusi homogen atau solusi umum. Dari solusi umum tersebut sebenarnya bisa menentukan nilai-nilai yang diperoleh dengan cara memasukkan nilai variabel dan koefisiennya.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai permasalahan yang berkaitan dengan matematika. Hal ini dapat dilihat dari banyaknya permasalahan yang dapat dianalisis menggunakan matematika. Oleh karena itu diperlukan pemahaman khusus pada matematika.

Alam semesta memuat teori-teori dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007:79).

Dalam Al-Qur’an surat Maryam ayat 94 telah disebutkan bahwa :

لَّقَدۡ أَحۡصَىٰهُمۡ وَعَدَّهُمۡ عَدّٗا ٩٤

Artinya : “ Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti ”.

Matematika merupakan pengetahuan yang berkenaan dengan struktur dan hubungannya yang memerlukan symbol-simbol atau lambang. Simbol-simbol ini digunakan untuk membantu mengkonstruksi aturan-aturan dengan operasi yang ditetapkan. Simbolisasi menjamin adanya komunikasi dan mampu memberikan keterangan untuk membentuk suatu konsep baru. Konsep baru terbentuk karena adanya pemahaman terhadap konsep sebelumnya sehingga konsep-konsep matematika itu tersusun hirarkis atau terurut. (Henky, 2004 : 1)

Aplikasi matematika dapat diamati dalam proses penyelesaian suatu permasalahan yang dimodelkan dalam konsep matematika. Dengan memperhatikan semesta pembicaranya, konsep tersebut akan lebih mudah diselesaikan dan dapat diambil suatu perkiraan yang mendekati suatu kesimpulan. Jika suatu permasalahan itu kompleks, maka dapat dibentuk sistem matematika. Sehingga aplikasi–aplikasi matematika seperti perkembangan pesat di bidang teknologi informasi dan komunikasi dewasa ini dilandasi oleh perkembangan matematika yang menitikberatkan pada perbedaan aspek–aspek teori. Dari sudut pandang adanya macam–macam aspek teori tersebut, ilmu matematika memperlebar cakupan pemahamannya pada beberapa cabang, seperti matematika analisis, statistik, dan pemrograman (Parzynski, 1982:149).

Suatu barisan adalah suatu yang domain (daerah asal) nya adalah himpunan bilangan asli, sedangkan fungsi–fungsi yang didefinisikan pada N (bilangan–bilangan asli) adalah suatu subset dari $\Re$ (bilangan–bilangan real) yang dapat menunjukkan nilai dari suatu barisan. Selain itu, konsep barisan digunakan sebagai alat dan ide limit dari suatu barisan yang mempersiapkan simbol lebih umum yaitu limit fungsi. Sehingga barisan adalah ide dasar untuk semua limit dan fungsi, sedangkan untuk fungsi–fungsi terbatas pada limit merupakan dasar dari kalkulus (Paul, 1978:216).

Adapun penerapan Al-Qur'an mengenai barisan dapat disebutkan dalam surat Al-Kahfi ayat 48 yang berbunyi :

وَعُرِضُوا عَلَىٰ رَبِّكَ صَفًّا لَّقَدْ جِئْتُمُونَا كَمَا خَلَقْنَاكُمْ أَوَّلَ مَرَّةٍ ۚ بَلْ زَعَمْتُمْ أَلَّن نَّجْعَلَ لَكُم مَّوْعِدًا ﴿٤٨﴾

Artinya : " *Dan mereka akan dibawa ke hadapan TuhanMu dengan berbaris, sesungguhnya kamu datang kepada kami sebagaimana kami menciptakan kamu pada kali yang pertama. Bahkan kamu mengatakan bahwa kami sekali-kali tidak akan menetapkan bagi kamu waktu* ".

Abdusysyakir (2006: 58) mengemukakan bahwa setelah mengetahui bahwa Al Qur'an berbicara mengenai barisan bilangan, maka makna yang dapat ditangkap adalah bahwa orang muslim harus mengenal barisan bilangan, karena tanpa mengenal barisan bilangan, seorang muslim tidak akan memahami Al Qur'an dengan baik ketika membaca ayat-ayat yang berkaitan tentang barisan bilangan tersebut.

Dari segi wilayah kajian, Matematika berawal dari ruang lingkup yang sederhana, yang hanya menelaah tentang barisan bilangan dan ruang, namun sekarang Matematika sudah berkembang dengan menelaah hal-hal yang membutuhkan daya pikir dan imajinasi tingkat tinggi (Abdusysyakir, 2007:6).

Limit merupakan konsep matematika yang membahas masalah pendekatan nilai, konsep konvergen dan divergen sebagai suatu analisis diperkenalkan melalui limit dan barisan. Barisan bilangan real adalah suatu fungsi dari himpunan bilangan asli *N* ke himpunan bilngan real. (Bartle dan Sherbert, 1994: 67).

Agar suatu barisan menjadi konvergen, maka nilai-nilai yang diperoleh harus mendekati nilai puncaknya, tetapi tidak harus mendekati, nilai-nilai tersebut harus tetap berdekatan. Berdekatan artinya semakin lama semakin dekat. Jika semakin lama semakin menjauh dari nilai puncaknya maka barisan tersebut dikatakan divergen. (Purcell, 2003: 3)

Di dalam Teori Bilangan dikenal macam-macam barisan salah satu di antaranya adalah barisan aritmatik yang berbentuk :

$$f(n) = af(n-1) + bf(n-2), \forall n \geq 2$$

dengan a dan b adalah bilangan real yang ditentukan untuk $f(n)$. Barisan ini didefinisikan secara rekursif sehingga nilai-nilai dari suku berikutnya dapat diketahui. (Ivan Niven, 1991: 199).

Berangkat dari latar belakang masalah di atas penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul ”Menyelesaikan Relasi Rekursif”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas ada beberapa macam konsep dan metode untuk menyelesaikan permasalahan tentang barisan rekursif. Maka yang pokok dalam pembahasan ini adalah “bagaimana menyelesaikan Relasi Rekursif dengan cara Iterasi, melalui Persamaan Karakteristik, dan dengan Fungsi Pembangkit”?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah mengetahui tahapan-tahapan menyelesaikan Relasi Rekursif dengan cara Iterasi, melalui Persamaan Karakteristik, dan dengan Fungsi Pembangkit.

1.4 Manfaat Penulisan

Adapun manfaat dari penulisan ini adalah:

1. **Bagi Penulis**
   a. Memperluas pengetahuan tentang kajian matematika khususnya pada Relasi Rekursif.
2. **Bagi Pembaca**
   a. Menambah wawasan serta meningkatkan pengetahuan tentang matematika khususnya mengenai materi Relasi Rekursif.
   b. Memperluas cakrawala berfikir
3. **Lembaga**
   a. Hasil penulisan skripsi ini diharapkan dapat menambah bahan kepustakaan di lembaga khususnya di Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang sehingga dijadikan sebagai sarana pengembangan wawasan keilmuan terutama bidang matematika

1.5 Batasan masalah

Untuk mempermudah dalam pembahasan ini, penulis membatasi pada:

1. Barisan bilangan real
2. Relasi rekursif .

1.6 Metode Penulisan

Dalam hal ini penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan atau penelitian literatur, yaitu penelitian yang dilakukan dengan cara mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat di dalam ruang perpustakaan, seperti buku-buku, artikel, dokomen-dokumen, catatan, dan kisah-kisah sejarah (Mardalis, 1995: 28). Dari masing-masing literatur dipilah menurut kategori tertentu dan dipilih yang sesuai dengan permasalahan yang diangkat.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan penulis di dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan materi dan informasi dengan cara membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan permasalahan yang diangkat yaitu bagaimana menyelesaikan Relasi Rekursif dengan cara Iterasi, melalui Persamaan Karakteristik, dan dengan Fungsi Pembangkit.
2. Dengan adanya jaringan informasi berupa internet, maka penulis juga mengambil dan mempelajari materi yang berkaitan dengan barisan.
3. Memilah atau memilih materi yang diperoleh sehingga dapat digunakan untuk menganalisis dan menjawab rumusan masalah.

1.7 Sistematika Penulisan

Skripsi ini ditulis dengan 4 bab yang saling mendukung, yaitu bab I pendahuluan, bab II kajian teori, bab III pembahasan, dan bab IV penutup.

Bab I	:	Pendahuluan. difokuskan pada latar belakang, rumusan masalah yang terdiri dari pokok permasalahan, tujuan penulisan, manfaat penelitian bagi penulis, bagi pembaca, dan bagi lembaga, batasan masalah, metode penulisan serta sistematika penulisan guna mempermudah dalam penulisan ini.
Bab II	:	Kajian Teori. berisi tentang seputar barisan bilangan real, Limit barisan, barisan terbatas, barisan monoton, barisan divergen, dan relasi rekursif.
Bab III	:	Pembahasan. berisikan uraian tentang contoh-contoh yang merupakan relasi rekursif dan menentukan solusi umunya dengan cara Iterasi, melalui Persamaan Karakteristik, dan dengan Fungsi Pembangkit.
Bab IV	:	Penutup. Berisi tentang kesimpulan dari keseluruhan hasil pembahasan yang telah dilakukan sesuai dengan rumusan masalah dan juga berisi tentang saran terkait dengan topik pembahasan yang ada.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Barisan

2.1.1 Barisan Bilangan Real

Definisi 1

Barisan bilangan real (barisan di R) adalah suatu fungsi dengan domain himpunan bilangan asli N ke himpunan bilangan real R dan dapat dinotasikan dengan $f : N \to R$ (Bartle dan Sherbert, 1994 : 67)

Contoh 1

Diberikan fungsi $X : N \to R$ yang didefinisikan dengan

$$X_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \forall n \in N$$

maka X adalah barisan di R.

Demikian juga, fungsi $Y : N \to R$ yang didefinisikan dengan

$$Y_n = 2n + 3, \forall n \in N$$

Maka Y juga merupakan barisan di R.

Dengan kata lain dari definisi di atas bahwa barisan di R adalah barisan yang diperoleh dengan memetakan atau memasangkan tepat satu bilangan asli $n \in N$ ke bilangan real $n \in R$. Bilangan real yang diperoleh disebut anggota atau elemen barisan atau nilai barisan, atau suku barisan. Biasanya untuk menunjukkan elemen R yang dipasangkan pada $n \in N$ digunakan simbol sebagai berikut x_n, a_n, atau z_n

Jika $X : N \to R$ adalah barisan, maka unsur dari X pada n dinotasikan dengan x_n, tidak dinotasikan dengan *X(n)*. Sedangkan barisan itu sendiri dinotasikan denganX, (x_n), atau $(x_n \mid n \in N)$. Dengan demikian barisan X dan Y pada contoh (1), masing-masing dapat dinotasikan X= $(x_n \mid n \in N)$ dan $Y = (2n+3 \mid n \in N)$. Penggunaan tanda kurung ini membedakan antara notasi barisan $X = (n \mid n \in N)$ dengan himpunan $\{x_n \mid n \in N\}$. Sebagai contoh jika $X = \{(-1)^n \mid n \in N\}$ adalah barisan yang unsurnya selang-seling antara -1 dan 1, yaitu X = (-1, 1, -1, 1,...), sedangkan jika $X = \{(-1)^n \mid n \in N\}$ adalah himpunan yang unsur-unsurnya -1 dan 1, yaitu X = {-1, 1}.

Untuk mendefinisikan barisan, kadang unsur-unsur dalam barisan ditulis secara berurutan, sampai rumus untuk barisan tersebut tampak. Perhatikan contoh berikut :

Contoh 2

Jika diketahui barisan $X = \left(2, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \ldots\right)$ yang menyatakan barisan bilangan real, di mana salah satu rumus umumnya adalah :

$$X_n = \left((1+n)^{\frac{1}{n}} : n \in N \right)$$

Demikian juga dengan barisan $X = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \ldots\right)$ yang menyatakan barisan bilangan rasional dengan salah satu rumus umumnya adalah

$$X = \left(\frac{n}{2n-1} : n \in N\right).$$

Kadang kala, rumus umum dari suatu barisan dapat dinyatakan secara rekursif artinya unsur atau suku pertama misalnya x_1 ditetapkan terlebih dahulu kemudian diberikan suatu rumus untuk $x_{n+1} (n \geq 1)$ dengan x_n telah diketahui.

Contoh 3

Barisan bilangan asli genap dapat dinyatakan dengan rumus :

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = x_1 + x_n \qquad (n \geq 1);$$

Berikut ini akan dipekenalkan suatu cara yang penting dalam membuat barisan baru dari barisan yang telah diketahui.

Definisi 2

Misalkan $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ adalah barisan bilangan real. Jumlah dari barisan X dan Y, yang dinotasikan dengan $X + Y$, adalah barisan yang didefinisikan dengan:

$$X + Y = (x_n + y_n : n \in N)$$

(Bartle dan Sherbert, 1994: 69)

Contoh 4

Misalkan $X_n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \forall n \in N \right) = (2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \ldots)$

dan $Y_n = (1+n)^{\frac{1}{n}} = \left(2, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \ldots\right)$

maka

$$X_n + Y_n = \left(4, \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \sqrt{3}, \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \sqrt[3]{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^4 + \sqrt[4]{5}, \ldots\right) = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + (1+n)^{\frac{1}{n}} : n \in N \right).$$

Definisi 3

Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real dan $c \in R$. Kelipatan dari barisan X dan c, yang dinotasikan dengan cX, adalah barisan yang didefinisikan dengan:

$$cX = (cx_n : n \in N)$$

(Bartle dan Sherbert, 1994: 69)

Contoh 5

Misalkan $X_n = \left((1+n)^{\frac{1}{n}} : n \in N \right) = \left(2, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \ldots\right)$ dan $c = 3$

maka $cX_n = \left(3(1+n)^{\frac{1}{n}} : n \in N \right) = \left(6, 3\sqrt{3}, 3\sqrt[3]{4}, 3\sqrt[4]{5}, \ldots\right)$

Definisi 4

Misalkan $X=(x_n)$ dan $Y=(y_n)$ adalah barisan bilangan real, dengan $Y_n \neq 0$. Pembagian dari barisan X dan Y, yang dinotasikan dengan $\frac{X}{Y}$, adalah barisan yang didefinisikan dengan:

$$\frac{X}{Y}=\left(\frac{X_n}{Y_n}:n\in N\right)$$

(Bartle dan Sherbert, 1994: 69)

Contoh 6

Misalkan $X_n=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\forall n\in N\right)=(2,\left(\frac{3}{2}\right)^2,\left(\frac{4}{3}\right)^3,\left(\frac{5}{4}\right)^4,...)$

dan $Y_n=(1+n)^{\frac{1}{n}}=\left(2,\sqrt{3},\sqrt[3]{4},\sqrt[4]{5},...\right)$

maka $\frac{X_n}{Y_n}=\left(1,\frac{2,25}{\sqrt{3}},\frac{2,197}{\sqrt[3]{4}},...\right)=\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{(1+n)^{\frac{1}{n}}}:n\in N\right)$

2.1.2 Limit Barisan

Definisi 5

Barisan $\{a_n\}$ dinamakan konvergen menuju L atau berlimit L dan ditulis sebagai $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ apabila untuk tiap bilangan positif ε, ada bilangan positif N sehingga untuk

$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

Suatu barisan yang tidak konvergen ke suatu bilangan L yang terhingga dinamakan divergen. (purcell, 2003: 3)

Contoh 7

Buktikan, bahwa untuk setiap *p* positif bulat (asli), maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

Jawab :

Misalkan diketahui $\varepsilon > 0$. Pilihlah $\sqrt[p]{1/\varepsilon}$.

Maka untuk $n \geq N$ berlakulah

$$|a_n - L| = \left|\frac{1}{n^p} - 0\right| = \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{N^p} < \frac{1}{\left(\sqrt[p]{1/\varepsilon}\right)^p} = \varepsilon$$

Contoh 8

Buktikan, bahwa untuk setiap 0< p <1 , maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

Jawab :

Misalkan diketahui $\varepsilon > 0$. Pilihlah $\sqrt[p]{1/\varepsilon}$ dan $p = \frac{1}{2}$

Maka untuk $n \geq N$ berlakulah

$$|a_n - L| = \left|\frac{1}{n^p} - 0\right| = \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{N^p} < \frac{1}{\left(\sqrt[p]{1/\varepsilon}\right)^p} = \varepsilon$$

Definisi 6

Misal $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real. Suatu bilangan real x dikatakan limit dari *X,* jika untuk masing-masing lingkungan dari V dari x terdapat suatu bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka x_n adalah anggota *V*. (Bartle dan Sherbert, 1994: 70)

Jika *x* adalah limit dari barisan *X*, maka dikatakan bahwa $X = (x_n)$ konvergen ke *x* (mempunyai limit *x*). Jika barisan mempunyai limit maka barisan tersebut dikatakan konvergen, begitu juga sebaliknya jika barisan tidak mempunyai limit maka barisan tersebut dikatakan divergen. Ketika barisan $X = (x_n)$ mempunyai limit *x* di *R* maka dinotasikan sebagai berikut :

$\lim X = x$ atau $\lim(x_n) = x$ yang kadang-kadang disimbolkan dengan $x_n \to x$, dimana x_n mendekati bilangan x untuk $n \to \infty$.

Teorema 1

Limit suatu barisan bilangan real adalah tunggal.

Bukti :

Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan real.

Andaikan X mempunyai lebih dari satu limit.

Misalkan x_1 dan x_2 adalah limit dari X, dengan $x_1 \neq x_2$.

Misalkan $V^{'}$ adalah lingkungan dari x_1 dan $V^{''}$ adalah lingkungan dari x_2.

Pilih $\varepsilon = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$, maka $V^{'} \cap V^{''} = \phi$

Karena x_1 limit dari X maka ada bilangan asli $K^{'}$ sehingga jika $n \geq K^{'}$ maka: $x_n \in V^{'}$

Karena x_2 limit dari X maka ada bilangan asli $K^{''}$ sehingga jika $n \geq K^{''}$ maka: $x_n \in V^{''}$

Ambil $K = maks\{K^{'}, K^{''}\}$

Maka $K \geq K^{'}$ sehingga $x_K \in V^{'}$ dan $K \geq K^{''}$ sehingga $x_K \in V^{''}$

Berarti $x_k \in V^{'} \cap V^{''}$

Jadi $V^{'} \cap V^{''} \neq \phi$

Hal ini kontradiksi dengan $V^{'} \cap V^{''} = \phi$

Berarti pengandaian salah

Terbukti bahwa X mempunyai limit tidak lebih dari satu.

Pada pendefinisian limit suatu barisan bilangan real, masih digunakan istilah lingkungan. Dengan demikian, masih dirasa sulit untuk menunjukkan bahwa suatu barisan bilangan real adalah konvergen. Berikut akan diberikan suatu teorema yang ekuivalen dengan definisi limit barisan. Teorema ini akan mempermudah untuk menunjukkan bahwa suatu barisan bilangan real adalah konvergen atau divergen.

Teorema 2

Misal $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real dan $x \in R$. Pernyataan berikut ekuivalen .

a. X konvergen ke x.

b. Untuk setiap V lingkungan dari x terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka x_n adalah anggota V.

c. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$,maka $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

d. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka $|x_n - x| < \varepsilon$.

(Bartle dan Sherbert, 1994: 71)

Bukti :

1. $(a \Rightarrow b)$

   Diketahui X konvergen ke x

   Ambil sebarang V lingkungan dari x

   Karena V lingkungan dari x, sesuai dengan definisi 3, maka terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka x_n anggota V .

Karena V diambil sebarang, maka untuk setiap V lingkungan dari x terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$ maka x_n adalah anggota V.

2. $(b \Rightarrow c)$

   Ambil sebarang $\varepsilon > 0$

   Misalkan V adalah lingkungan dari x

   Berarti ada bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka $x_n \in V$

   berarti $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$

   Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

3. $(c \Rightarrow d)$

   Ambil sebarang $\varepsilon > 0$

   Berarti ada bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka $x_n \in V$

   Karena $x_n \in V$ berarti $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

   Karena $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ maka $|x_n - x| < \varepsilon$

   Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka $|x_n - x| < \varepsilon$.

4. $(d \Rightarrow a)$

   Misalkan V sebarang Lingkungan dari x

Karena $\varepsilon > 0$, berarti ada bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka $|x_n - x| < \varepsilon$

$|x_n - x| < \varepsilon$ berarti $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$

Berarti bahwa untuk semua $n \geq K$, maka $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$

Jadi $x_n \in V$. Sesuai dari definisi berarti X konvergen ke *x*.

Contoh 9

Tunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{1}{2n}\right) = 3$

Jawab :

Untuk menunjukkan $\lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{1}{2n}\right) = 3$,

Misal untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $\frac{1}{2\varepsilon} > 0$

Karena $\frac{1}{2\varepsilon} > 0$, maka terdapat bilangan asli K dengan $K > \frac{1}{2\varepsilon}$.

$\forall\ n \geq K$ maka diperoleh $n > \frac{1}{2\varepsilon}$

Jika $n \geq K$, maka

$$n > \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{2n}+3-3\right|<\varepsilon$$

$$\left|3-\frac{1}{2n}-3\right|<\varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$, maka terdapat bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$ maka

$$\left|\left(3+\frac{1}{2n}\right)-3\right|=\frac{1}{2n}<\varepsilon$$

Sesuai dengan teorema 2 (d), terbukti bahwa $\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{2n}\right)=3$

2.1.3 Barisan Terbatas

Definisi 7

Misal $X=(x_n)$ adalah barisan bilangan real, X dikatakan terbatas jika ada bilangan real $M>0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in N$.

(Bartle dan Sherbert, 1994: 78)

Berdasarkan definisi, maka barisan $X=(x_n)$ terbatas jika dan hanya jika himpunan $\{x_n : n \in N\}$ dari barisan X terbatas di R.

Contoh 10

Misalkan $X=\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots\right)$.

X terbatas karena ada bilangan real 1 sehingga $\left|\frac{n}{n+1}\right| \leq 1$, untuk semua $n \in N$.

2.1.4 Barisan Monoton

Definisi 8

Misal (x_n) adalah barisan bilangan real.

Barisan (x_n) dikatakan barisan monoton naik, jika

$$x_n \leq x_{n+1},\ \forall n \in N$$

(Bartle dan Sherbert, 1994: 87)

Contoh 11

Misalkan $(x_n) = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n, \forall n \in N$

Sehingga $(x_n) = 3, 4, \left(\frac{5}{3}\right)^3, \left(\frac{6}{4}\right)^4, \ldots, \left(1+\frac{2}{n}\right)^n, \ldots \forall n \in N$

Karena $x_1 = 3 < x_2 = 4 < x_3 = \left(\frac{5}{3}\right)^3 < \ldots < x_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n < \ldots$ maka (x_n) merupakan barisan monoton naik.

Definisi 9

Misal (x_n) adalah barisan bilangan real.

Barisan (x_n) dikatakan barisan monoton turun, jika

$$x_n \geq x_{n+1}, \ \forall n \in N$$

(Bartle dan Sherbert, 1994: 87)

Contoh 12

Misalkan $X_n = (1+2n)^{\frac{1}{n}}, \forall n \in N$

Sehingga $X_n = 3, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[4]{9}, ...(1+2n)^{\frac{1}{n}}, ...\forall n \in N$

Karena $x_1 = 3 > x_2 = \sqrt{5} > x_3 = \sqrt[3]{7} > x_4 = \sqrt[4]{9}, ... > X_n = (1+2n)^{\frac{1}{n}} >, ...$ maka X_n merupakan barisan monoton turun.

2.1.5 Barisan Divergen

Definisi 10

Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real.

$X = (x_n)$ disebut divergen ke ∞, ditulis $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \infty$, jika untuk setiap $M \in R$, $M > 0$, ada $K \in N$ sehingga

$x_n > M$, $n \geq K$ (Abdussakir, 2006 : 72)

Contoh 13

a. Misalkan. $X_n = (1,01)^n$ Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \infty$.

Ambil sebarang $M \in R$ dan $M > 0$. Sesuai sifat Archimedes maka ada $K \in N$ sehingga $K > M$, maka akan diperoleh $x_n > M$.

Sesuai dengan definisi 10 maka $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \infty$

b. Misalkan (x_n) = (3n + 2). Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \infty$.

Ambil sebarang $M \in R$ dan M > 0. Sesuai sifat Archimedes, maka ada $K \in N$ sehingga $K > \frac{M-2}{3}$. Jika $n \geq K$. maka akan diperoleh $x_n > M$.

Sesuai dengan definisi 10 maka $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \infty$

Definisi 11

Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real.

$X = (x_n)$ disebut divergen ke -∞, ditulis $\lim_{n\to\infty}(x_n) = -\infty$, jika untuk setiap

$M \in R$, M > 0, ada $K \in N$ sehingga

$x_n < -M$, $n \geq K$ (Abdussakir, 2006 : 73)

Contoh 14

a. Misalkan $(x_n) = \left(-\frac{1}{2}n - 1\right)$. Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty}(x_n) = -\infty$.

Ambil sebarang $M \in R$ dan M > 0. Sesuai sifat Archimedes, maka ada $K \in N$ sehingga K > M. Jika $n \geq K$, maka akan diperoleh $x_n < -M$. Sesuai dengan definisi 11 maka $\lim_{n\to\infty}(x_n) = -\infty$

b. Misalkan $(x_n) = (-5n + 3)$. Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty}(x_n) = -\infty$.

Ambil sebarang $M \in R$ dan $M > 0$. Sesuai sifat Archimedes, maka akan ada $K \in N$ sehingga $K > \frac{M-3}{5}$. Jika $n \geq K$, maka akan diperoleh $x_n < -M$. Sesuai dengan definisi 11 maka $\lim_{n \to \infty}(x_n) = -\infty$.

Teorema 3

Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real.

Jika $X = (x_n)$ monoton naik dan tidak terbatas di atas, maka $\lim_{n \to \infty}(x_n) = \infty$.

(Abdussakir, 2006 : 73)

Bukti

Ambil sebarang $M \in R$ dan $M > 0$. Karena (x_n) tidak terbatas di atas, maka M bukan batas atas (x_n). Jadi, ada $K \in N$ sehingga

$M < x_k$

Karena (x_n) monoton naik, diperoleh

$M < x_k \leq x_{k+1} \leq x_{k+2} \leq x_{k+3} \leq \ldots$

Jadi, jika $n \geq K$, diperoleh bahwa $x_n > M$.

Terbukti bahwa $\lim_{n \to \infty}(x_n) = \infty$

Teorema 4

Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real.

Jika $X = (x_n)$ monoton turun dan tidak terbatas di bawah, maka $\lim_{n\to\infty}(x_n) = -\infty$. (Abdussakir, 2006 : 74)

Bukti

Ambil sebarang $M \in R$ dan M <0. Karena (x_n) tidak terbatas di bawah , maka M bukan batas bawah (x_n). jadi. ada $K \in N$ sehingga

$M > x_k$

Karena (x_n) monoton turun, maka diperoleh

$M > x_k \geq x_{k+1} \geq x_{k+2} \geq x_{k+3} \geq ...$

Jadi, jika $n \geq K$, diperoleh bahwa $x_n < M$

Terbukti bahwa $\lim_{n\to\infty}(x_n) = -\infty$

2.2 Relasi Rekursif

Relasi rekursif adalah suatu topik penting dan menarik dalam kombinatorik. Banyak permasalahan dalam matematika, khususnya kombinatorik dapat dimodelkan ke dalam bentuk relasi rekursif. Suatu barisan didefinisikan secara rekursif jika kondisi awal barisan ditentukan, dan suku-suku barisan selanjutnya dinyatakan dalam hubungannya dengan sejumlah suku-suku yang sudah dinyatakan sebelumnya.

Definisi 12

Misal $k \in N$, relasi rekursif linear dengan koefisien konstanta order k dapat ditulis dalam bentuk

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + ... + c_kx_{n-k} = f(n)$$

dimana $c_0, c_1, c_2, ..., c_k$ konstanta dan $f(n)$ suatu fungsi dalam n, $c_k \neq 0$. Jika persamaan $f(n) = 0$, maka disebut relasi rekursif linear homogen order k dan jika $f(n) \neq 0$ disebut relasi rekursif tak homogen order k.

(Sutarno, 2005: 50)

Contoh 15

$2x_n + 3x_{n-1} = 2^n$ adalah sebuah relasi rekursif linier order 1 dengan koefisien konstanta.

$3x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = n^2 + 5$ adalah sebuah relasi rekursif linier tak homogen order 2 dengan koefisien kontanta.

Solusi dari relasi rekursif adalah sebuah barisan $p_n, p_n \in R$. Sebuah (P_n) disebut solusi eksplisit persamaan

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + ... + c_kx_{n-k} = 0,$$

pada interval I, jika (P_n) terdefinisi pada I dan bila disubtitusikan untuk x_n ke dalam $c_0x_n + c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + ... + c_kx_{n-k} = 0$ memenuhi persamaan tersebut untuk setiap n dalam interval I..

Teorema 5

Misal $c_1, c_2 \in R$ dan jika diberikan (p_n)dan (q_n)dua solusi dari persamaan $c_0x_n + c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + ... + c_kx_{n-k} = 0$ $\forall A, B \in R$ maka S_n, dimana

$$s_n = A(p_n + p_{n-1} + p_{n-2} + ... + p_{n-k}) + B(q_n + q_{n-1} + q_{n-2} + ... + q_{n-k}), \forall n \in N$$

juga solusi $c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + ... + c_k x_{n-k} = 0$

(Sutarno, 2005: 52)

Bukti :

Misal jika (p_n) dan (q_n) barisan bilangan real, dua solusi dari persamaan $c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + ... + c_k x_{n-k} = 0$ maka

$$c_0 P_n + c_1 P_{n-1} + c_2 P_{n-2} + ... + c_k P_{n-k} = 0$$

$$c_0 q_n + c_1 q_{n-1} + c_2 q_{n-2} + ... + c_k q_{n-k} = 0$$

persamaan $c_0 P_n + c_1 P_{n-1} + c_2 P_{n-2} + ... + c_k P_{n-k} = 0$ dikali dengan A dan persamaan $c_0 q_n + c_1 q_{n-1} + c_2 q_{n-2} + ... + c_k q_{n-k} = 0$ dikali dengan B sehingga di dapat

$$Ac_0 p_n + Ac_1 p_{n-1} + Ac_2 p_{n-2} + ... + Ac_k p_{n-k} = 0$$

$$Bc_0 q_n + Bc_1 q_{n-1} + Bc_2 q_{n-2} + ... + Bc_k q_{n-k} = 0$$

maka

$$\begin{aligned} S_n &= A(p_n + p_{n-1} + p_{n-2} + ... + p_{n-k}) + B(q_n + q_{n-1} + q_{n-2} + ... + q_{n-k}) \\ &= (Ac_0 p_n + Ac_1 p_{n-1} + ... + Ac_k p_{n-k}) + (Bc_0 q_n + Bc_1 q_{n-1} + ... + Bc_k q_{n-k}) \\ &= c_0(Ap_n + Bq_n) + c_1(Ap_{n-1} + Bq_{n-1}) + ... + c_k(Ap_{n-k} + Bq_{n-k}) \\ &= c_0 S_n + c_1 S_{n-1} + c_2 S_{n-2} + ... + c_k S_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k S_{n-k} \end{aligned}$$

Jadi $\{s_n\}$ adalah solusi dari relasi rekursif.

Selanjutnya akan dibahas permasalahan mencari (p_n) dengan persamaan karakteristik.

misal $x_i, c_i \in R$ untuk $i = 1,2,3,...,k$ dan r adalah sebarang bilangan, $\forall n \in N$, $x_n = r^n, r \neq 0$, maka persamaan

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + ... + c_k x_{n-k} = 0$$

menjadi

$$c_o r^n + c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + ... + c_k r^{n-k} = 0$$

apabila dibagi dengan r^{n-k} diperoleh

$$c_0 r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + ... + c_k = 0$$

disebut persamaan karakteristik dari $c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + ... + c_k x_{n-k} = 0$ dan dari persamaan $c_0 r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + ... + c_k = 0$ diperileh nilai $r_1, r_2, r_{3,} ..., r_k$ yang disebut akar-akar persamaan karakteristik.

Teorema 6

i. Jika persamaan $c_0 r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + ... + c_k = 0$ memiliki akar-akar persamaan karakteristik yang berbeda $r_1, r_2, r_3, ..., r_k$, maka $\{p_n\}$ adalah solusi untuk sembarang konstanta $A_1, A_2, A_3, ..., A_k \in R$ sedemikian sehingga solusi umumnya adalah $p_n = A_1(r_1)^n + A_2(r_2)^n + A_3(r_3)^n + ... + A_k(r_k)^n, \forall n = 1,2,3,...$

ii. Jika persamaan $c_0 r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + ... + c_k = 0$ memiliki akar-akar karakteristik yang sama $r_1 = r_2 = r_3 =,...,= r_k = r$ maka $\{p_n\}$ adalah solusi untuk sembarang konstanta $A_1, A_2, A_3,...., A_k \in R$ sedemikian hingga solusi umumnya

$$p_n = A_1(r_1)^n + A_2 n(r_2)^n + A_3 n^2(r_3)^n + ... + A_k n^{k-1}(r_k)^n, \forall n = 1,2,3,...$$

iii. Jika persamaan $c_0 r^k + c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + ... + c_k = 0$ memiliki akar-akar persamaan yang kompleks, misal $r_1 = \alpha + \beta i$ dan $r_2 = \alpha - \beta$

$$p_n = A(\alpha + \beta i)^n + B(\alpha - \beta i)^n$$

$$= A(r\cos\theta + ri\sin\theta)^n + B(r\cos\theta - ai\sin\theta)^n$$

$$= Ar^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) + Br^n(\cos n\theta - i\sin n\theta)$$

$$= r^n(A\cos n\theta + Ai\sin n\theta) + r^n(B\cos n\theta - Bi\sin n\theta)$$

$$= r^n((A+B)\cos n\theta + i(A-B)\sin n\theta)$$

maka solusi umumnya adalah $p_n = r^n(C_1\cos n\theta + iC_2\sin n\theta)$ dimana $C_1 = A + B$, $C_2 = i(A - B)$. (Sutarno, 2005: 53)

2.3 Bilangan dalam Al Qur'an

Pada bagian ini, akan dibahas keterkaitan antara bilangan dalam matematika dengan Al Qur'an yang merupakan kitab suci umat Islam, diantaranya sebagai berikut:

1. Himpunan dalam Al Qur'an

Dalam Al Qur'an himpunan, relasi himpunan dan operasi himpunan, cukup banyak dibicarakan. Sebagai contoh, perhatikan firman Allah SWT dalam surat Toha ayat 64 :

فَأَجْمِعُوا۟ كَيْدَكُمْ ثُمَّ ٱئْتُوا۟ صَفًّا ۚ وَقَدْ أَفْلَحَ ٱلْيَوْمَ مَنِ ٱسْتَعْلَىٰ ﴿٦٤﴾

Artinya : " *Maka himpunkanlah segala daya kamu sekalian, kemudian datanglah dengan berbaris, dan sesungguhnya beruntunglah orang yang menang pada hari ini* ".

Surat Toha ayat 64 tersebut menjelaskan tentang perintah untuk menghimpun segala daya upaya makhluk hidup. Maksud dari ayat ini lebih ditujukan atas usaha-usaha yang dilakukan oleh makhluk Tuhan dengan niat ibadah kepada Allah dan mencari ridhoNya. Agar lebih teratur dalam melakukan upaya tersebut maka Allah memerintahkan membentuk barisan (salat) yang rapat agar Syaiton tidak bisa mengganggu orang yang makhluk yang beribadah. Selain ayat di atas perhatikan juga firman Allah dalam surat An-Nuur ayat 45:

وَٱللَّهُ خَلَقَ كُلَّ دَآبَّةٍ مِّن مَّآءٍ ۖ فَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ بَطْنِهِۦ وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ
رِجْلَيْنِ وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰٓ أَرْبَعٍ ۚ يَخْلُقُ ٱللَّهُ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ
﴿٤٥﴾

Artinya: *Dan Allah telah menciptakan semua jenis hewan dari air, maka sebagian dari hewan itu ada yang berjalan di atas perutnya dan sebagian berjalan dengan dua kaki sedang sebagian (yang lain) berjalan dengan empat kaki. Allah menciptakan apa yang dikehendaki-Nya, sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala seuatu.*

Surat An-Nuur ayat 45 ini membicarakan tentang sekumpulan makhluk yang disebut hewan. Diantara sekelompok hewan tersebut ada yang berjalan di atas perutnya (tanpa kaki), sebagian berjalan dengan dua kaki atau empat kaki sesuai dengan yang dikehendaki Allah SWT.

Berdasarkan kedua ayat di atas dapat diketahui bahwa di dalam Al Qur'an ternyata juga terdapat konsep matematika terutama yang membahas tentang himpunan, yaitu sekumpulan objek-objek yang terdefinisi dengan jelas. Ketika umat Islam membaca Al Qur'an maka pada surat Al Fatehah juga akan dijumpai bahwa manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang diberi nikmat oleh Allah, (2) kelompok yang dimurkai dan (3) kelompok yang sesat.

Abdusysyakir (2007: 110) mengemukakan bahwa jika pembicaraan dari makna surat Al Fatehah dikaitkan dengan konsep relasi dan operasi himpunan, maka kelompok yang diberi nikmat akan saling lepas (*disjoint*) dengan kelompok yang dimurkai dan sesat.

Berkaitan dengan relasi bilangan bahwa relasi atau membandingkan suatu bilangan biasanya dilakukan pada sepasang bilangan dengan aturan tertentu. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Ash Shaffat ayat 147.

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya: Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih.

2. Operasi Bilangan

Adanya bilangan dan relasi bilangan belum lengkap, jika tidak dapat melakukan suatu aksi pada pasangan bilangan yang diberikan dan melakukan aksi pada pasangan bilangan biasanya disebut operasi. Operasi yang paling sederhana adalah operasi hitung dasar bilangan dan ternyata dalam Al Qur'an juga berbicara tentang operasi hitung dasar bilangan diantaranya:

a. Operasi Penjumlahan
b. Operasi Pengurangan
c. Operasi Pembagian

Sebagai contoh perhatikan firman Allah dalam surat Al Kahfi: 25 yang berbunyi:

وَلَبِثُواْ فِي كَهْفِهِمْ ثَلَٰثَ مِاْئَةٍ سِنِينَ وَٱزْدَادُواْ تِسْعًا ﴿٢٥﴾

Artinya: Dan mereka tinggal dalam gua mereka tiga ratus tahun dan ditambah sembilan tahun (lagi).

Konsep matematika yang disebutkan dalam ayat tersebut adalah operasi penjumlahan, yaitu 300 + 9. Jadi makna yang tersirat di balik ayat tersebut adalah bahwa setiap muslim perlu memahami tentang bilangan dan operasi bilangan. Tanpa mengenal bilangan, seorang muslim tidak akan memahami Al Qur'an dengan baik ketika membaca ayat-ayat yang berkaitan tentang bilangan tersebut (Abdusysyakir, 2006: 59).

Pendekatan terhadap nilai suatu barisan bilangan merupakan suatu hal yang penting untuk dilakukan karena dengan melakukan aproksimasi atau penghampiran akan diperoleh nilai pendekatan terhadap barisan tersebut. Dalam al-Qur'an surat al-Maidah ayat 35, Allah SWT menjelaskan bahwa:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ ٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ وَٱبْتَغُوٓا۟ إِلَيْهِ ٱلْوَسِيلَةَ وَجَٰهِدُوا۟ فِى سَبِيلِهِۦ لَعَلَّكُمْ تُفْلِحُونَ ٣٥

Artinya: *"Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan bersungguh-sungguhlah mencari jalan yang mendekatkan diri kepada-Nya dan berjihadlah pada jalan-Nya supaya kamu mendapat keberuntungan"* (Q.S. Al-Maidah: 35).

Ayat ini mengajak manusia untuk selalu mendekatkan diri kepada Allah meskipun dalam hati mereka baru ada secercah iman. Menurut Shihab (2002: 87), kata *wasilah* mirip maknanya dengan *washilah* yakni sesuatu yang menyambung sesuatu dengan yang lain. *Wasilah* adalah sesuatu yang menyambung dan mendekatkan sesuatu dengan yang lain atas dasar keinginan yang kuat untuk mendekat. Tentu saja terdapat banyak cara yang dapat digunakan untuk mendekatkan diri kepada ridha Allah, namun kesemuanya haruslah yang dibenarkan oleh-Nya. Hal ini bermula dari rasa kebutuhan kepada-Nya.

Lebih lanjut Shihab (2002: 88) mengemukakan bahwa ayat ini dijadikan oleh sementara ulama sebagai dalil yang membenarkan apa yang diistilahkan dengan *tawassul* yaitu mendekatkan diri kepada Allah dengan menyebut nama Nabi saw dan para wali (orang-orang yang dekat kepada-Nya) yaitu berdoa kepada Allah guna meraih harapan demi nabi dan atau para wali yang dicintai Allah swt.

Konsep konvergen dan divergen dalam matematika sangat mirip dengan istilah washilah. Konvergen di sini bisa diartikan dengan terus mendekat, sedangkan divergen bisa diartikan dengan semakin menjauh. Semakin besar nilai n yang diinginkan mungkin akan semakin mendekati pada nilai puncak, begitu juga sebaliknya semakin besar nilai yang ditujukan mungkin akan menjauhi nilai utama sehingga tidak mempunyai batasan yang jelas.

Misalkan dalam limit itu terdapat nilai 1, maka nilai tersebut tidak lepas dari pendekatan-pendekatan suatu nilai yang dilakukan, misal sebelum nilai tersebut muncul nilai 0.5 ,0.8 , dan 0.9 sehingga nilai-nilai tersebut jika diteruskan pada pendekatan suatu nilai tertentu maka akan sampai pada nilai 1 yang kontinyu.Nilai yang seperti ini dinamakan nilai yang konvergen. Misalkan dalam limit itu tidak ditemukan titik atau nilai puncak, walaupun didekati dengan nilai n yang besar. Maka limit tersebut tidak memiliki nilai karena semakin menjauhi dari nilai puncak. Sehingga nilai tersebut dinamakan dengan nilai yang divergen.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Menyelesaikan Relasi Rekursif

1. Penyelesaian Relasi Rekuresif Dengan Iterasi

Penyelesaian relasi rekuresif dengan iterasi merupakan metode yang sangat mendasar. Prinsipnya adalah sebagai berikut :

1. Menghitung suku-suku barisan secara berurutan terus menerus hingga kita memperoleh pola tertentu.
2. Kemudian, berdasarkan pola tersebut rumus eksplisit dibuat.
3. Untuk mendapatkan pola-pola suku tersebut, barisan dapat dihitung secara menaik (dihitung berturut-turut $a_0, a_1, a_2, \ldots$) atau menurun (dihitung berturut-turut $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$).

Contoh 1

Misalkan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ adalah barisan yang didefinisikan secara rekursif sebagai berikut :

$a_k = a_{k-1} + 4$ dengan kondisi awal $a_0 = 1$

Carilah rumus eksplisit barisan tersebut dengan menggunakan metode iterasi.

Penyelesaian :

Metode iterasi akan diselesaikan secara menurun dan secara menaik.

$$a_k = a_{k-1} + 4$$

$$= (a_{k-2} + 4) + 4 = a_{k-2} + 2.4$$

$$= (a_{k-3} + 4) + 2.4 \quad = a_{k-3} + 3.4$$

$$= (a_{k-4} + 4) + 3.4 \quad = a_{k-4} + 4.4$$

$$= (a_{k-5} + 4) + 4.4 \quad = a_{k-5} + 5.4$$

Berdasarkan pola yang ada, terlihat bahwa :

$$a_k = a_{k-k} + k.4 = a_0 + k.4$$

Karena $a_0 = 1$ maka penyelesaian persamaan rekursif adalah

$$a_k = 1 + k.4$$

Jika diselesaikan dengan cara menaik :

$$a_1 = a_0 + 4$$

$$a_2 = a_1 + 4 = (a_0 + 4) + 4 = a_0 + 4 + 4 = a_0 + 2.4$$

$$a_3 = a_2 + 4 = (a_0 + 4 + 4) + 4 = a_0 + 4 + 4 + 4 = a_0 + 3.4$$

$$a_4 = a_3 + 4 = (a_0 + 4 + 4 + 4) + 4 = a_0 + 4 + 4 + 4 + 4 = a_0 + 4.4$$

….

$$a_k = a_0 + k.4 = 1 + 4k$$

2. Penyelesaian Relasi Rekursif Melalui Persamaan Karakteristik

2.1 Relasi Rekursif Linear Dengan Koefisien Konstan

Misalkan n dan k adalah bilangan-bilangan bulat tidak negative dengan $n \geq k$. Relasi rekuresif linear berderajat k adalah relasi yang berbentuk :

$$c_0(n)a_n + c_1(n)a_{n-1} + \ldots + c_k(n)a_{n-k} = f(n)$$

dan $c_k(n) \neq 0$

Jika $c_0(n), c_1(n), \ldots, c_k(n)$ semuanya konstanta, maka relasi rekursif disebut relasi rekursif linear dengan koefisien konstan.

Jadi **relasi rekursif linear dengan koefisien konstanta** adalah :

$$c_0a_n + c_1a_{n-1} + \ldots + c_ka_{n-k} = f(n)$$

Apabila dalam persamaan tersebut, f(n) = 0, maka relasi rekursifnya disebut relasi rekursif homogen linear dengan koefisien konstan. Jika tidak demikian, maka non homogen. Misalnya:

(I). $2a_r + 3a_{r-1} = 2^r$ adalah sebuah relasi rekursif linear berderajat satu dengan koefisien konstanta.

(II). $a_1 = a_2 = 0; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1, n \geq 3$ adalah relasi rekursif linear nonhomogen berderajat dua dengan koefisien konstanta.

(III). $a_1 = a_2 = 1; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1, n \geq 3$ adalah relasi rekursif linier nonhomogen berderajat dua dengan koefisien konstanta.

(IV). $a_0 = a_1 = 1; a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots a_{n-1}a_0, n \geq 1$ adalah relasi rekursif linier

(V). $D_0 = 1; D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, n \geq 1$ adalah relasu rekursif linier nonhomogen dengan koefisien nonkonstanta

Dalam kajian ini, alan dibahas cara menyelesaikan relasi rekursif linear dengan koefisien konstan $c_0a_n + c_1a_{n-1} + \ldots + c_ka_{n-k} = f(n)$

Untuk menyelesaikannya, ada 2 langkah yang harus dilakukan. Pertama, relasi rekursif terlebih dahulu dibuat homogen dengan cara mengambil $f(n)=0$. Langkah kedua adalah mencari penyelesaian khususnya. Penyelesaian relasi rekursif kinear dengan koefisien konstan adalah gabungan dari penyelesaian homogen dan penyelesaian khusus yang disebut dengan penyelesaian total.

Contoh 1

Carilah penyelesaian total relasi rekursif dibawah ini :

$a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 4^n$ untuk $n \geq 2$ dengan kondisi awal $a_0 = 8$ dan $a_1 = 36$

Penyelesaian :

Relasi rekursif homogennya adalah : $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 0$

Persamaan karakteristiknya adalah $x^2 - 7x + 10 = 0$

Sehingga akar-akar karakteristiknya adalah $x_1 = 2,\ x_2 = 5$

Penyelesaian homogennya adalah $a_n = c_1 2^n + c_2 5^n$

Karena $f(n) = 4^n$ dan 4 bukan akar karakteristik, maka untuk mencari penyelesaian khusus diuji dalam bentuk $a_n^k = P(4)^n$.Penyelesaian khusus ini selanjutnya disubstitusikan ke relasi rekursif mula-mula. Sehingga diperoleh :

$$P4^n - 7(P4^{n-1}) + 10(P4^{n-2}) = 4^n$$

$$P4^{n-2}(4^2 - 7.4 + 10) = 4^n$$

$$-2P4^{n-2} = 4^n$$

$$-2P = 16$$

P = -8

Sehingga penyelesaian khususnya adalah $a_n^k = -8(4)^n$

Penyelesaian Total = penyelesaian homogen + penyelesaian khusus

$a_n = c_1 2^n + c_2 5^n - 8(4)^n$

Untuk mencari nilai c_1 dan c_2, digunakan kondisi awal yang diberikan:

$a_0 = 8$

sehingga $8 = c_1 2^0 + c_2 5^0 - 8(4)^0$

$8 = c_1 + c_2 - 8$

$16 = c_1 + c_2$

$a_1 = 36$

sehingga $36 = c_1 2^1 + c_2 5^1 - 8(4)^1$

$36 = 2c_1 + 5c_2 - 32$

$68 = 2c_1 + 5c_2$

Di dapat system persamaan linier

$c_1 + c_2 = 16$

$2c_1 + 5c_2 = 68$

yang bila diselesaikan akan menghasilkan $c_1 = 4$ dan $c_2 = 12$

Jadi penyelesaian relasi rekursif mula-mula adalah $a_n = 4(2)^n + 12(5)^n - 8(4)^n$

2.2 Penyelesaian Relasi Rekursif Homogen Linear Dengan Koefisien Konstan

Misalkan diberikan suatu relasi rekursif homogen limier dengan koefisien konstan :

$a_n + c_1 a_{n-1} + ... + c_k a_{n-k} = 0$

dengan $c_k \neq 0$ dan $n \geq k$ ……..(1)

Persamaan karakteristik yang sesuai dengan relasi rekursif tersebut adalah :

$t^k + c_1 t^{k-1} + ... + c_k = 0$ ……..(2)

Misalkan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...\alpha_k$ adalah akar-akar persamaan karakteristik. Ada dua kemungkinan akar yaitu :

1. Semua akar berbeda

Jika semua akar persamaan karakteristik (2) berbeda, maka relasi rekursif (1) mempunyai penyelsaian :

$$a_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + ... + c_k \alpha_k^n \text{ ………(3)}$$

dengan $c_1, c_2, ..., c_k$ adalah konstanta yang nilainya ditentukan berdasarkan kondisi awal .

2. Ada akar yang kembar.

Misalkan persamaan karakteristik (2) mempunyai p buah akar yang sama. Jadi akar-akarnya adalah :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p, \alpha_{p+1}, ..., \alpha_k$$

Maka penyelesaian relasi rekursif (1) adalah :

$$a_n = \left(c_1 + c_2 n + \ldots + c_p n^{p-1}\right)\alpha_1^n + c_{p+1}\alpha_{P+1}^n + \ldots + c_k \alpha_k^n \ldots\ldots\ldots(4)$$

dengan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ adalah konstanta-konstanta yang nialinya ditentukan berdasarkan kondisi awal.

Contoh 2

$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ untuk $n \geq 2$ dengan kondisi awal $a_0 = 1$ dan $a_1 = 3$

Penyelesaian :

Relasi rekurensi $a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 0$,merupakan relasi rekursif homogen linier dengan koefisien konstan.

Persamaan karakteristik yang sesuai adalah $t^2 - 3t - 4 = (t-4)(t+1) = 0$ yang mempunyai akar-akar karakteristik $\alpha_1 = 4$ dan $\alpha_2 = -1$.

Karena semua akar-akar karakteristiknya berbesa, maka penyelesaiannya adalah :

$a_n = c_1 4^n + c_2(-1)^n$

Untuk menentukan c_1 dan c_2, digunakan kondisi awal :

$a_0 = 1$

sehingga $1 = c_1 4^0 + c_2(-1)^0$

$1 = c_1 + c_2$

$a_1 = 3$

sehingga $3 = c_1(4)^1 + c_2(-1)^1$

$3 = 4c_1 - c_2$

Didapatkan system persamaan linear :

$c_1 + c_2 = 1$

$4c_1 - c_2 = 3$

yang mempunyai penyelesaian $c_1 = \frac{4}{5}$ dan $c_2 = \frac{1}{5}$

Maka mempunyai relasi rekursif $a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 0$ adalah

$a_n = \frac{4}{5}(4)^n + \frac{1}{5}(-1)^n$

Contoh 3

Diketahui barisan Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 yang didefinisikan dengan persamaan $T(n+1) - T(n) - T(n-1) = 0$ dengan kondisi awal $T(0) = 0$ dan $T(1) = 1$

Penyelesaian :

Persamaan karakteristik yang sesuai dengan relasi rekursif barisan Fibonacci $T(n+1) - T(n) - T(n-1) = 0$ adalah $x^{n+1} - x^n - x^{n-1} = 0$ apabila dibagi dengan x^{n-1} maka diperoleh $x^2 - x - 1 = 0$

1. Dari persamaan $x^2 - x - 1 = 0$ diperoleh akar-akar persamaan karakteristiknya yaitu :

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1(-1))}}{2(1)}$$

$$x_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Sehingga diperoleh

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Jadi akar-akar karakteristiknya adalah $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ dan $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

3. Karena $x_1 \neq x_2$ maka bentuk solusi umumnya adalah $P(n) = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ Untuk mencari a dan b adalah dengan memasukkan kondisi awal dari permisalan P(n) yaitu

   $P(0) = 0$

   $P(1) = 1$

   sehingga diperoleh sistem persaaan yang berbentuk

$$a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0$$

$$a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$$

Dari 2 persamaan terakhir ini, diperoleh

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

kemudian disubstitusikan ke solusi umumnya, maka diperoleh

$$P(n) = \frac{\left[\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}\right]^n - \left[\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2}\right]^n}{\sqrt{5}}$$

Contoh 4

$a_n - 7a_{n-1} + 16a_{n-2} - 12a_{n-3} = 0$ untuk $n \geq 3$

dengan kondisi awal $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ dan $a_2 = 8$

Penyelesaian :

Persamaan karakteristik yang sesuai dengan relasi rekursif

$a_n - 7a_{n-1} + 16a_{n-2} - 12a_{n-3} = 0$ adalah $t^3 - 7t^2 + 16t - 12 = (t-2)^2(t-3) = 0$

Persamaan karakteristik mempunyai 2 akar kembar $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ dan $\alpha_3 = 3$, sehingga penyelesaiannya adalah $a_n = \left(c_1 + c_2 n\right)2^n + c_3 3^n$.

Dengan menggunakan kondisi awalnya, maka nilai c_1, c_2 dan c_3 bisa ditentukan

$a_0 = 1$

sehingga $1 = \left(c_1 + c_2(0)\right)2^0 + c_3 3^0$

$1 = c_1 + c_3$

$a_1 = 4$

sehingga $4 = \left(c_1 + c_2(1)\right)2^1 + c_3 3^1$

$4 = \left(c_1 + c_2\right)2 + 3c_3$

$4 = 2c_1 + 2c_2 + 3c_3$

$a_2 = 8$

sehingga $8 = (c_1 + c_2\left(2\right))2^2 + c_3 3^2$

$8 = (c_1 + 2c_2)4 + 9c_3$

$8 = 4c_1 + 8c_2 + 9c_3$

Didapat system persamaan linier :

$c_1 + c_2 = 1$

$2c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 4$

$4c_1 + 8c_2 + 9c_3 = 8$

yang mempunyai penyelesaian $c_1 = 5$, $c_2 = 3$ dan $c_3 = -4$

Penyelesaian relasi rekursif $a_n - 7a_{n-1} + 16a_{n-2} - 12a_{n-3} = 0$ adalah :

$a_n = (5 + 3n)2^n - 4(3^n)$

2.3 Relasi Rekursif Tidak Homogen dengan Koefisien Konstanta

Bentuk umum dari relasi rekursif linear tidak homogen dengan koefisien konstanta adalah sebagai berikut :

$$a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k} = f(n); c_k \neq 0, f(n) \neq 0,$$

dengan *k* kondisi awal (syarat batas), dan untuk $1 \le i \le k, c_i =$ konstanta.

Belum ada prosedur umum untuk menentukan solusi khusus bagi suatu relasi rekursif. Dalam kasus yang sederhana, pertama-tama yaitu dengan membuat bentuk umum dari solusi khusus berdasarkan bentuk *f(n)*, dan kemudian menentukan solusi pastinya berdasarkan relasi rekursif yang diberikan. Perhatikan kasus-kasus berikut ini.

Kasus 1

Bila *f(n)* merupakan suatu polinom berderajat t didalam n yaitu

$$A_1 n^t + A_2 n^{t-1} + \ldots + A_t n + A_{t+1}$$

Maka bentuk umum solusi khususnya

$$B_1 n^t + B_2 n^{t-1} + \ldots + B_t n + B_{t+1}$$

Contoh 1

Misalkan mencari solusi khusus untuk relasi rekursif tidak homogen

$$a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n^2 - 2n + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

Solusi khususnya mempunyai bentuk

$$B_1 n^2 + B_2 n + B_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

dengan mensubstitusikan (2) ke dalam (1), diperoleh

$$(B_1 n^2 + B_2 n + B_3) + 5(B_1(n-1)^2 + B_2(n-1) + B_3) + 6(B_1(n-2)^2 + B_2(n-2) + B_3) = 3n^2 - 2n + 1$$

setelah disederhanakan menjadi

$12B_1n^2-(34B_1-12B_2)n+(29B_1-17B_2+12B_3)=3n^2-2n+1$ ……..(3)

Dengan membandingkan koefisien kedua ruas (3), maka dapat diperoleh persamaan-persamaan

$12B_1=3$

$34B_1-12B_2=2$

$29B_1-17B_2+12B_3=1$

yang menghasilkan

$B_1=\frac{1}{4};\ B_2=\frac{13}{24};\ B_3=\frac{71}{288}$

Jadi, solusi khususnya adalah

$a_n^{(p)}=\frac{1}{4}n^2+\frac{13}{24}n+\frac{71}{288}$

Kasus 2

Bila *f(n)* berbentuk β^n, maka solusi khususnya akan berbentuk umum $B\beta^n$, dengan syarat β bukan akar karakteristik relasi rekursif tersebut.

Contoh 2

Misalkan mencari solusi khusus untuk relasi rekursif tidak homogen

$a_n+5a_{n-1}+6a_{n-2}=42.4^n$ ………………………..(1)

Solusi khususnya mempunyai bentuk umum $B.4^n$ ……..(2)

Dengan mensubstitusikan (2) ke dalam (1), dapat diperoleh

$B.4^n+5B.4^{n-1}+6B.4^{n-2}=42.4^n$

$$\Leftrightarrow B.4^n + 5B.4^n.4^{-1} + 6B.4^n.4^{n-2} = 42.4^n$$

$$\Leftrightarrow B.4^n + {}^5\!/_4.B.4^n + {}^6\!/_{16}.B.4^n = 42.4^n$$

$$\Leftrightarrow {}^{42}\!/_{16}.B.4^n = 42.4^n$$

$$\Leftrightarrow B = 16$$

Jadi, solusi khususnya adalah

$$a_n^{(p)} = 16.4^n$$

kasus 3

Bila *f(n)* berbentuk perkalian antara polinom dengan fungsi eksponen, maka solusi khususnya akan berbentuk perkalian antara kasus 1 dengan kasus 2. Yaitu, bila *f(n)* berbentuk

$$(A_1 n^t + A_2 n^{t-1} + \ldots + A_t n + A_{t+1})\beta^n$$

Maka bentuk umum solusi khususnya

$$(B_1 n^t + B_2 n^{t-1} + \ldots + B_t n + B_{t+1})\beta^n$$

Contoh 3

Misalkan mencari solusi khusus untuk relasi rekursif tidak homogen

$a_n = -a_{n-1} + 3n.2^n$ ……………………………………...(1)

Persamaan karakteristiknya:

$$x + 1 = 3n.2^n$$

Solusi khususnya mempunyai bentuk umum $\left[B_1 n + B_0\right].2^n$ …..(2)

Dengan mensubstitusikan (2) ke dalam (1), maka diperoleh

$$\left[B_1 n + B_0\right].2^n + \left[B_1(n-1) + B_0\right].2^{n-1} = 3n.2^n$$

$$\Leftrightarrow B_1 n.2^n + B_0.2^n + B_1 n.2^{n-1} - B_1.2^{n-1} + B_0.2^{n-1} = 3n.2^n$$

$$\Leftrightarrow B_1 n.2^n + B_0.2^n + {}^{B_1}\!/_2\,.n.2^n - {}^{B_1}\!/_2\,.2^n + {}^{B_0}\!/_2\,.2^n = 3n.2^n$$

$$\Leftrightarrow \left(B_1 + \frac{B_1}{2}\right)n.2^n + \left(\frac{3B_0}{2} - \frac{B_1}{2}\right).2^n = 3n.2^n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Dengan membandingkan koefisien kedua ruas (3), didapat peroleh persamaan-persamaan

$$B_1 + \frac{B_1}{2} = 3 \text{ dan } \frac{3B_0}{2} - \frac{B_1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow B_1 = 2 \text{ dan } B_0 = \frac{2}{3}$$

Jadi, solusi khususnya adalah

$$a_n^{(p)} = \left(2n + \frac{2}{3}\right).2^n$$

3. Menyelesaikan Relasi Rekursif dengan Fungsi Pembangkit

Untuk suatu relasi rekursif ordo ke-k yang menspesifikasikan suatu fungsi numeric, maka harus diketahui untuk nilai-nilai n berapa saja relasi itu berlaku. Perlu dicatat bahwa relasi itu berlaku hanya jika $n \geq k$ sebab, untuk $n < k$, relasi itu akan melibatkan a_{-i}, sesuatu yang tidak didefinisikan.

Prosedur umum untuk menentukan fungsi pembangkit bagi fungsi numerik a dari relasi rekursif

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} = f(n)$$

yang berlaku untuk $n \geq s$, dalam hal ini $s \geq k$. Dengan mengalikan kedua ruas persamaan ini dengan z^n dan kemudian menjumlahkan hasilnya dari n = s ke $n = \infty$, maka diperoleh

$$\sum_{n=s}^{\infty} \left(c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} \right) z^n = \sum_{n=s}^{\infty} f(n) z^n$$

karena

$$\sum_{n=s}^{\infty} c_0 a_n z^n = c_0 \left(A(z) - a_0 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_{s-1} z^{s-1} \right)$$

$$\sum_{n=s}^{\infty} c_1 a_{n-1} z^n = c_1 z \left(A(z) - a_0 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_{s-2} z^{s-2} \right)$$

………………………………………………..

$$\sum_{n=s}^{\infty} c_k a_{n-k} z^n = c_k z^k \left(A(z) - a_0 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_{s-k-1} z^{s-k-1} \right)$$

maka dapat diperoleh

$$A(z) = \frac{1}{c_0 + c_1 z + \ldots + c_k z^k} \left[\begin{array}{l} \sum_{n=s}^{\infty} f(n) z^n + c_0 \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{s-1} z^{s-1} \right) + \\ \qquad c_1 z \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{s-2} z^{s-2} \right) \\ \qquad + \ldots \\ \qquad + c_k z^k \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{s-k-1} z^{s-k-1} \right) \end{array} \right]$$

Contoh 1

Misalkan menyelesaikan relasi rekursif

$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n + n, n \geq 2$, dengan syarat batas $a_0 = 1$ dan $a_1 = 1$, dengan terlebih dahulu mencari fungsi pembangkitnya, $A(z)$.

Karena

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n - 5\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} z^n + 6\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n z^n + \sum_{n=2}^{\infty} r z^n$$

maka diperoleh

$$A(z) - a_0 - a_1 z - 5z\left[A(z) - a_0\right] + 6z^2 A(z) = \frac{4z^2}{1-2z} + \left(\frac{1}{(1-z)^2} - 1\right)$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$A(z) = \frac{1 - 8z + 27z^2 - 35z^3 + 14z^4}{(1-z)^2(1-2z)^2(1-3z)}$$

$$A(z) = \frac{5/4}{1-z} + \frac{1/2}{(1-z)^2} - \frac{3}{1-2z} - \frac{2}{(1-2z)^2} + \frac{17/4}{1-3z}$$

Sehingga diperoleh

$$a_n = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}(n+1) - 3.2^n - 2(n+1)2^n + \frac{17}{4}.3^n$$

$$a_n = \frac{7}{4} + \frac{n}{2} - n.2^{n+1} - 5.2^n + \frac{17}{4}.3^n$$

3.2 Implementasi Relasi Rekursif dalam Agama Islam

Telah diuraikan pada bab terdahulu bahwa barisan Rekursif dengan bentuk umum $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$, diberikan koefisien a dan b berupa bilangan real bukan bilangan kompleks. Barisan ini didefinisikan secara rekursif sehingga nilai-nilai dari suku berikutnya dapat diketahui dengan mudah dan dapat menentukan solusi umumnya.

Pada zaman Rasulullah SAW sebenarnya ilmu matematika terutama yang berhubungan dengan barisan telah berkembang meskipun tidak serumit atau sekomplek barisan yang ada di pelajaran Matematika. Meski demikian, jika dianalogikan dengan Al Qur'an, maka dapat ditemui bahwa seolah-olah ada beberapa kandungan ayat Al Qur'an yang berisi tentang rumus-rumus barisan dalam matematika. Hal inilah yang menunjukkan bahwa Allah SWT Maha Matematis. Perhatikan QS Ash Shaf ayat 4 :

إِنَّ ٱللَّهَ يُحِبُّ ٱلَّذِينَ يُقَٰتِلُونَ فِي سَبِيلِهِۦ صَفّٗا كَأَنَّهُم بُنۡيَٰنٞ مَّرۡصُوصٞ ٤

Artinya : " *Sesungguhnya Allah mengetahui orang-orang yang berperang di jalanNya dalam barisan yang teratur seakan-akan mereka seperti suatu bangunan yang tersusun kukuh* ".

Dengan kondisi awal yang telah ditentukan, maka nilai dari barisan rekursif akan selalu bertambah. Hal ini dapat dinikmati oleh pembaca bahwa nilai dari barisan rekursif itu tidak terbatas di atas dan sampai tak hingga. Sebagaimana konsep

Al_Qur'an tentang pemberian nikmat oleh Allah SWT yang sangat luas tak terbatas. Sebagaimana dalam surat An Nahl ayat 18 yang berbunyi :

وَإِن تَعُدُّواْ نِعۡمَةَ ٱللَّهِ لَا تُحۡصُوهَآۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَغَفُورٞ رَّحِيمٞ ١٨

Artinya : " *Dan jika kamu menghitung-hitung nikmat Allah, niscaya kamu tak dapat menentukan jumlahnya. Sesungguhnya Allah benar-benar Maha Pengampun lagi Maha Penyayang* ".

Konsep konvergen dan divergen dari limit suatu barisan menggambarkan bahwa terdapat pendekatan nilai dari suatu barisan. Ada yang semakin mendekati nilai nol, sehingga barisan tersebut bersifat konvergen, dan ada pula yang nilainya menjauhi sampai tak hingga sehingga barisan tersebut bersifat divergen.

Dalam pandangan Al-Qur'an dapat pula dikaitkan dengan bagaimana Allah SWT memberi nikmat pada makhluk-Nya. Allah SWT itu maha pemurah, di mana ketika manusia berbuat satu kebaikan maka Allah SWT akan memberinya pahala 10, sedangkan jika manusia berbuat satu kejahatan maka Allah SWT akan membrikan catatan dosa 1. Hal ini menunjukkan betapa Allah SWT Maha Pemurah dalam memberikan nikmat-Nya. Tetapi di lain itu Allah SWT juga memberi azab bagi yang tidak mensyukuri nikmat-Nya. Sebagaimana yang tercantum dalam surat Ibrahim ayat 7 yang berbunyi :

وَإِذۡ تَأَذَّنَ رَبُّكُمۡ لَئِن شَكَرۡتُمۡ لَأَزِيدَنَّكُمۡۖ وَلَئِن كَفَرۡتُمۡ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدٞ ٧

Artinya : " *Dan (ingatlah juga), tatkala Tuhan-Mu memaklumkan. Sesungguhnya jika kamu bersyukur, pasti kamu akan menambah (nikmat) kepadamu, dan jika kamu mengingkari (Nikmat-Ku), maka sesungguhnya azabku sangat pedih.*"

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Suatu relasi rekursif dapat diaplikasikan dalam beberapa bentuk formula dikarena menggunakan tahapan-tahapan dalam menyelesaikannya. Tahapan yang dimaksud adalah dengan cara iterasi, dengan persamaan karakteristik, dan dengan fungsi pembangkit. Dengan formula tersebut maka barisan yang didefinisikan secara rekursif tidak perlu menggunakan kondisi awal lagi dalam menentukan nilainya.

Untuk menentukan nilai suatu barisan yang didefinisikan secara rekursif dapat menggunakan relasi rekursif. Dalam menyelesaikan relasi rekursif dapat menggunakan beberapa cara yaitu cara iterasi, persamaan karakteristik, dan fungsi pembangkit.

Cara iterasi dapat menentukan solusi umum dengan beberapa langkah yaitu:

4. Menghitung suku-suku barisan secara berurutan terus menerus hingga kita memperoleh pola tertentu.
5. Kemudian, berdasarkan pola tersebut rumus eksplisit dibuat.
6. Untuk mendapatkan pola-pola suku tersebut, barisan dapat dihitung secara menaik (dihitung berturut-turut $a_0, a_1, a_2, \ldots$) atau menurun (dihitung berturut-turut $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$).

Sedangkan cara menggunakan persamaan karakteristik dapat dispesifikasikan dengan beberapa tahap yaitu :

1. Relasi Rekursif Linear Dengan Koefisien Konstan.
2. Penyelesaian Relasi Rekursif Homogen Linear Dengan Koefisien Konstan.
3. Relasi Rekursif Tidak Homogen dengan Koefisien Konstanta.

Cara yang terakhir untuk menyelesaikan trelasi rtekursif adalah dengan menggunakan fungsi pembangkit. Prosedur umum untuk menentukan fungsi pembangkit bagi fungsi numerik a dari relasi rekursif

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} = f(n)$$

yang berlaku untuk $n \geq s$, dalam hal ini $s \geq k$. Dengan mengalikan kedua ruas persamaan ini dengan z^n dan kemudian menjumlahkan hasilnya dari n = s ke $n = \infty$

4.2 Saran

Penulis sarankan kepada pembaca khususnya bagi mahasiswa jurusan mahasiswa jurusan matematika agar mengembangkan kajian tentang relasi rekursif, khususnya dalam menentukan solusi umum barisan bilangan real menggunakan relasi rekursif. Setelah menentukan solusi umum tersebut mungkin pembaca dapat mengembangkannya dengan menentukan sifat dari solusi umum tersebut apakah konvergen atau divergen, dan untuk menghitung nilainya bisa juga dilakukan dengan menjalankan program Matlab dan agar bisa menampilkan grafiknya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2006. *Analysis Real 1*. Malang: UIN Malang Press.

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Bartle, R.G and Sherbet, D.R. 1982. *Introduction to Real Analysis, 2nd* ed. New York: John Wiley and sons.

Fletcher P. Hoyle H, Wayne, C. P. 1991. *Fundation of Discrete Mathematic.* Boston: Pws Kent Publishing Company.

Halmos, Paul R. 1978. *Measure Theory*. New York: Spinger–Verlag Toppan Company.

Hutahaean, Efendi. 1989. *Analisis Real II.* Jakarta: Penerbit Karunika Universitas Terbuka.

Hutahaean, Efendi. 1994. *Seri Matematika Fungsi Riil.* Bandung: Penerbit ITB

Liu, G. L. *Dasar-dasar matematika diskret,* edisi kedua. Jakarta: Gramedia.

Mardalis. 1995. *Metode Penelitian Suatu Pendekatan Proposal.* Jakarta: PT Aksara.

Niven, Ivan dan Zuckerman. 1980. *An Introduction To The Theory Numbers*. New York: John Willey & Son.

Parzynski and Zipse. 1982. *Introduction to Mathematical Analysis*. New York: Mc Grow–Hill Book Company.

Purcell, Edwin J. 2003. *Kalkulus Jilid 2.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Shihab, Muhammad Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbakh*. Jakarta: Lentara hati

Siang, Jong Jek. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer.* Yogyakarta: Andi.

Soemantri, R. 1993. *Materi Pokok Analisis Real I.* Jakarta: Penerbit Karunika Universitas Terbuka.

Sutarno, Heri, dkk. 2005. *Matematika Diskrit.* Malang: UM Press.