

# **INTEGRAL LEBESGUE di $\mathbb{R}^1$**

## **SKRIPSI**

Oleh:

**INDAH RESTI AYUNI SURI**

**NIM. 05510015**



**JURUSAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**

**MALANG**

**2009**

# INTEGRAL LEBESGUE di $\mathbb{R}^1$

## SKRIPSI

Diajukan Kepada :  
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang  
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

**Indah Resti Ayuni Suri**

**NIM. 05510015**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG**

**2009**

## **SURAT PERNYATAAN**

Dengan ini, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Indah Resti Ayuni Suri.

Nim : 05510015.

Jurusan : Matematika.

Fakultas : Sains dan Teknologi.

Judul Skripsi : Integral Lebesgue di  $R^1$

Dengan ini saya menyatakan, bahwa dalam skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan pada suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya, juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain., kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka, serta skripsi ini merupakan hasil karya cipta saya, bukan jiplakan dan tiruan dari skripsi orang lain.

Malang, 10 Oktober 2009

**INDAH RESTI AYUNI SURI**

**NIM. 05510015**

# INTEGRAL LEBESGUE di $\mathbb{R}^1$

## SKRIPSI

Oleh:

**INDAH RESTI AYUNI SURI**

**NIM. 05510015**

Telah Disetujui oleh:

Pembimbing I

Pembimbing II

**Drs. H. Turmudi, M.Si**

**NIP. 19571005 198203 1006**

**Abdussakir, M.Pd**

**NIP. 19751006 200312 1001**

Tanggal: 05 Oktober 2009

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

**Abdussakir, M.Pd**

**NIP. 19751006 200312 1001**

# INTEGRAL LEBESGUE di $\mathbb{R}^1$

## SKRIPSI

Oleh:

**INDAH RESTI AYUNI SURI**

**NIM. 05510015**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan  
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

**Tanggal, 10 Oktober 2009**

### Susunan Dewan Penguji:

### Tanda Tangan

- |                  |                                                      |     |
|------------------|------------------------------------------------------|-----|
| 1. Penguji Utama | : Evawati Alisah, M.Pd<br>NIP. 19720604 199903 2001  | ( ) |
| 2. Ketua         | : Usman Pagalay, M.Si<br>NIP. 19650414 200312 1001   | ( ) |
| 3. Sekretaris    | : Drs. H. Turmudi, M.Si<br>NIP. 19571005 198203 1006 | ( ) |
| 4. Anggota       | : Abdussakir, M.Pd<br>NIP. 19751006 200312 1001      | ( ) |

**Mengetahui dan Mengesahkan**

**Kajur Matematika**

**Fakultas Sains dan Teknologi**

**Abdussakir, M.Pd**

**NIP: 19751006 200312 1001**

## PERSEMBAHAN

Kita dapat merasakan kebahagiaan dalam hidup ini jika kita dapat mensyukuri semua yang telah diberikan Allah pada kita (baik suka atau duka) dan dapat membuat orang sekitar kita tersenyum....

Dengan Lantunan do'a dan untaian kata dari Hati yang tidak akan pernah putus hingga karya kecil ini ananda persembahkan

*kepada:*

*"Kedua orang tua Ashari Sholeh dan Ibunda Siti Nur Janah. Dengan ikhlas ananda dibesarkan dengan tanpa mengharap imbalan, ananda dididik hingga sampai saat ini ananda dapat mengerti arti hidup. Untuk Ayah Ibunda tercinta sungguh cinta, pengorbanan, kasih-sayang, perhatian dan Doa-doa nya agar selalu baca Basmallah tidak akan pernah ananda lupakan dan akan selalu terukir indah dalam kalbu".*

## MOTTO

“Sebaik-baik Manusia adalah  
Yang Paling Bermanfaat Bagi  
Orang Lain”

(HR. Bukhari dan Muslim)

“Hidup Penuh Perjuangan,  
yakin lah Allah yang paling  
sempurna”<sup>9\*</sup>

(Penulis)

## KATA PENGANTAR



*Assalamualaikum Wr.Wb.*

*Alhamdulillahirrobbil'alamin*, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “**INTEGRAL LEBESGUE di  $R^1$** ” ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulan Malik Ibrahim Malang .
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulan Malik Ibrahim Malang.
3. Bapak Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulan Malik Ibrahim Malang.
4. Bapak Drs. H. Turmudi, M.Si, selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.

5. Bapak Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing keagamaan, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.
6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf UIN Malang.
7. Bapak dan Ibu tercinta, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik dan perjuangannya yang tak pernah kenal lelah dalam mendidik dan sukses dalam meraih cita-cita serta ketulusan do'anya
8. Mbak Happy Haya Oktaria SH, Dek Jali, Dek Luluk, yang selalu memberikan semangat dan do'a selama kuliah serta dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Susi, makasih udah jadi teman curhat, temen tidur (akhirnya kita lulus bareng)
10. Teman-teman LDK Mb'midah, Ridho, Mb'Nora, & FSLDK Nasional, Teman-teman Matematika angkatan 2005,
11. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keiklasan bantuan moril dan spritual penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya Matematika Dengan segala kerendahan hati, penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, untuk itu kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan. Kepada semua pihak yang membaca skripsi ini, semoga dapat mengambil manfaatnya. Amien.

***Wassalamualaikum Wr.Wb.***

Malang, 14 september 2009

Penulis

## DAFTAR ISI

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>HALAMAN JUDUL</b>                                              |     |
| <b>HALAMAN PENGAJUAN</b>                                          |     |
| <b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>                                        |     |
| <b>HALAMAN PENGESAHAN</b>                                         |     |
| <b>PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>                                |     |
| <b>MOTTO</b>                                                      |     |
| <b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>                                        |     |
| <b>KATA PENGANTAR</b> .....                                       | i   |
| <b>DAFTAR ISI</b> .....                                           | iii |
| <b>ABSTRAK</b> .....                                              | vi  |
| <br><b>BAB I : PENDAHULUAN</b>                                    |     |
| 1.1. Latar Belakang .....                                         | 1   |
| 1.2. Rumusan masalah .....                                        | 5   |
| 1.3. Tujuan Penelitian .....                                      | 5   |
| 1.4. Manfaat Penelitian .....                                     | 5   |
| 1.5. Batasan Masalah.....                                         | 6   |
| 1.6. Metode Penelitian .....                                      | 6   |
| 1.7. Sistematika Pembahasan .....                                 | 8   |
| <br><b>BAB II : KAJIAN PUSTAKA</b>                                |     |
| 2.1. Sifat Kelengkapan dari R.....                                | 10  |
| 2.2. Interval .....                                               | 12  |
| 2.3. Himpunan Tutup .....                                         | 14  |
| 2.4. Fungsi Tangga .....                                          | 15  |
| 2.5. Ukuran .....                                                 | 16  |
| 2.6. Integral Riemann .....                                       | 17  |
| 2.6.1 Integral Atas dan Integral Bawah .....                      | 22  |
| 2.6.2 Sifat terintegral Riemann.....                              | 23  |
| 2.6.3 Sifat Integral Riemann.....                                 | 24  |
| 2.7. Fungsi Karakteristik dan Fungsi Sederhana.....               | 30  |
| 2.8. Integral Lebesgue .....                                      | 35  |
| 2.9. Himpunan Terukur .....                                       | 41  |
| 2.10. Fungsi Terukur .....                                        | 46  |
| 2.11. Kajian ilmu dalam al-Qur'an.....                            | 48  |
| <br><b>BAB III : PEMBAHASAN</b>                                   |     |
| 3.1 Fungsi Terukur Yang Terbatas Pada Integral Lebesgue .....     | 53  |
| 3.2. Fungsi Terukur Taknegatif Pada Integral Lebesgue .....       | 58  |
| 3.3. Fungsi Terukur Secara Umum Pada Integral Lebesgue.....       | 65  |
| 3.4. Hubungan Antara Integral Lebesgue dengan Integral Riemann .. | 70  |
| 3.5. Kajian antara Al-qur'an dengan Integral Lebesgue .....       | 73  |

**BAB IV : PENUTUP**

|                      |    |
|----------------------|----|
| 4.1 Kesimpulan ..... | 79 |
| 4.2 Saran.....       | 80 |

**DAFTAR PUSTAKA**

## SIMBOL

|                |                                                                          |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $x \in A$      | x elemen/ anggota dari himpunan A                                        |
| $A \subset B$  | himpunan A subhimpunan B                                                 |
| $A \cap B$     | irisan himpunan A dan B                                                  |
| $A \cup B$     | gabungan himpunan A dan B                                                |
| $[h, d]$       | konvergen hampir dimana-mana                                             |
| $\psi$ Inf     | infimum (batas bawah terbesar)                                           |
| $\varphi$ Sup  | suprimum (batas atas terkecil)                                           |
| $\mu$          | fungsi terukur                                                           |
| $\mu^*$        | ukuran luar                                                              |
| $\mu_*$        | ukuran dalam                                                             |
| $J(I)$         | Panjang interval                                                         |
| $\mathcal{L}$  | Himpunan terukur Lebesgue                                                |
| $E$            | Himpunan terukur                                                         |
| $\mu(E)$       | Fungsi terukur                                                           |
| $\wp(R)$       | keluarga semua himpunan                                                  |
| $[a, b]$       | Interval tertutup/ selang tertutup dengan ujung kiri a dan ujung kanan b |
| $(a, b)$       | Interval terbuka                                                         |
| $\chi_E$       | Fungsi karakteristik                                                     |
| $\mathbb{N}$   | Himpunan Bilangan asli / Himpunan bilangan bulat positif                 |
| $\mathbb{R}$   | Bilangan real                                                            |
| $\mathbb{R}^*$ | himpunan bilangan real diperluas                                         |
| $\forall$      | untuk setiap                                                             |
| $x \in A$      | elemen x anggota himpunan A                                              |
| $x \notin A$   | elemen x bukan anggota himpunan A                                        |

## ABSTRAK

Indah Resti Ayuni Suri. 2009. INTEGRAL LEBESGUE di  $R^1$ .

Pembimbing: Drs. H. Turmudzi, M.Si dan Abdussakir, M.Pd.

Kata kunci: Integral Lebesgue, Bilangan real.

Integral Lebesgue pertama kali ditemukan oleh Henry Leon Lebesgue tahun 1875-1944. Pada integral Lebesgue, integral didefinisikan melalui konsep ukuran. Dalam hal ini. Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk: menyebutkan, mendiskripsikan, menganalisis, dan membuktikan teorema-teorema yang berlaku pada integral Lebesgue dalam garis bilangan real.

Penelitian ini lebih bersifat analisis dan dilakukan dengan cara studi literatur dengan mempelajari buku-buku teks penunjang dan konsultasi dengan dosen pembimbing. Dalam hal ini penulis akan memaparkan dan menjelaskan definisi, menganalisis dan membuktikan kebenaran teorema-teorema integral Lebesgue yang terdiri dari: (1) Fungsi terukur yang terbatas pada integral Lebesgue, (2) Fungsi terukur taknegatif pada integral Lebesgue, (3) Fungsi terukur secara umum pada integral Lebesgue.

Teorema-teorema yang dianalisis dan dibuktikan kebenarannya, antara lain:

- a.  $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$  untuk semua bilangan real.
- b.  $\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$ .
- c. Jika  $f = g \cdot h$  maka  $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$
- d. Jika  $f \leq g \cdot h$  maka  $\int_E f \leq \int_E g$  dengan demikian  $\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$ .
- e. Jika  $E_1$  dan  $E_2$  adalah  $\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Pentingnya menuntut ilmu pengetahuan, baik ilmu agama maupun ilmu matematika secara umum wajib dalam segala hal. Dalam hadits juga dijelaskan bahwa mencari ilmu wajib hukumnya bagi manusia untuk persaingan teknologi modern.

Seperti hadits berikut :

طَلَبُ الْعِلْمِ فَرِيضَةٌ عَلَى كُلِّ مُسْلِمٍ وَ مُسْلِمَةٍ

Artinya: “Menuntut ilmu merupakan kewajiban bagi kaum muslimin laki-laki dan perempuan”.

Dalam hadits tersebut telah dijelaskan bahwa perbedaan jenis kelamin tidak menjadi penghalang dalam menuntut ilmu, bahkan dalam menuntut ilmu tidak dibatasi usia. Kemuliaan seseorang dalam menuntut ilmu telah dijelaskan dalam Al-Quran surat al-mujadillah ayat 11 sebagai berikut :

يَرْفَعُ اللَّهُ الَّذِينَ ءَامَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ ۚ

Artinya : “Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat”  
(QS: Al-Mujadillah:11).

Manusia diberikan pengetahuan untuk mengerjakan atau mengembangkan ilmu yang di dapat sehingga ia mampu menjadi orang yang mempunyai derajat

sesama muslim sehingga tidak hanya agama yang mereka pelajari tetapi ilmu pengetahuan yang mereka kembangkan.

Ditegaskan juga dalam hadits yang diriwayatkan oleh Anas bin Malik bahwa mencari ilmu bisa didapatkan dimana saja, walaupun sampai ke negara lain. Hadits tersebut berbunyi sebagai berikut :

أَطْلُبُ الْعِلْمَ وَلَوْ بِالصِّينِ

Artinya : “Tuntutlah ilmu walau sampai ke negeri Cina”. (Anas bin Malik).

Selama ini mungkin semua manusia mengetahui beberapa bangsa yang terkenal maju dalam hal ilmu pengetahuan diantaranya bangsa Yunani, Mesir, Cina, dan Babilonia. Kata “Cina” dalam hadits di atas hanya sekedar kiasan untuk mengingatkan akan pentingnya mencari ilmu pengetahuan secara luas, bahkan ke negeri-negeri seberang.

Teori integral adalah salah satu ilmu yang termasuk di dalam kelompok analisis yang masih tetap berkembang seperti ilmu-ilmu lainnya baik dari segi teori maupun pemakainya. Di antara cabang-cabang utama matematika, analisis termasuk cabang terbesar, yang meliputi analisis real (termasuk teori ukuran dan integral), analisis kompleks, analisis Fourier, analisis fungsional, persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial, persamaan integral, sistem dinamik, topologi, teori operator, dan aljabar operator.

Persamaan integral merupakan kebalikan dari persamaan diferensial. Teori integral memiliki peranan yang sangat signifikan dalam perkembangan teknologi modern. Munculnya masalah-masalah yang berkaitan dengan pengintegralan sebagai langkah utama dalam penyelesaian persamaan-persamaan diferensial di

bidang matematika, fisika dan teknik sebagai ilmu-ilmu yang menopang perkembangan teknologi.

Konsep integral Riemann dan integral Lebesgue diperkenalkan oleh Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) dan Henri Leon Lebesgue (1875-1944) juga dalam studi analisis. Contoh lainnya, bilangan ordinal dan kardinal tak hingga dikembangkan oleh G. Cantor (1845-1918) dalam upayanya memecahkan suatu masalah analisis real. (Jones, Franks, 1993).

Jones, Franks (1993) menambahkan pula, bahwa pada tahun 1902 Lebesgue, seorang matematikawan Perancis mencermati adanya fungsi yang tidak terintegral Riemann yaitu fungsi yang nilainya 0 dan 1. Selanjutnya Lebesgue menyusun teori ukuran yang terkenal dengan ukuran Lebesgue. Lebesgue menyusun teori integral baru yang merupakan perluasan dari integral Riemann karena jika fungsi  $f$  terintegral Riemann pada  $[a, b]$  maka fungsi  $f$  juga terintegral Lebesgue pada  $[a, b]$ .

Integral yang dibahas pada skripsi ini adalah integral Lebesgue. Integral Lebesgue dioperasikan pada fungsi terbatas yang didefinisikan pada suatu himpunan berukuran berhingga. Fungsi terbatas adalah fungsi yang daerah hasilnya tidak boleh melampaui suatu bilangan bernilai real yang sudah terlebih dahulu ditentukan.

Suatu himpunan pada garis real mempunyai ukuran nol terhitung dari selang yang total panjang kurang dari sebarang  $\varepsilon > 0$  yang diberikan. Setiap himpunan terhingga mempunyai ukuran 0, demikian juga himpunan bilangan rasional dan banyak himpunan tak terhingga lain. Lebesgue memperlihatkan

bahwa suatu fungsi terbatas akan terintegralkan secara Riemann jika dan hanya jika himpunan kekontinuannya berukuran nol atau hampir kontinu.

Suatu fungsi terbatas disebut terintegral Lebesgue jika integral Lebesgue atas dan integral Lebesgue bawah mempunyai nilai sama. Integral Lebesgue sama dengan infimum dari integral suatu fungsi sederhana yang nilainya lebih besar dari fungsi terbatas yang akan diperiksa, apakah fungsi terbatas tersebut terintegralkan Lebesgue atau tidak. Integral Lebesgue nilainya sama dengan supremum dari integral suatu fungsi yang sederhana yang nilainya kurang dari fungsi terbatas nilainya lebih kecil dari fungsi terbatas yang akan diperiksa, apakah fungsi terbatas tersebut terintegralkan Lebesgue atau tidak.

Integral Lebesgue merupakan kejadian yang lebih umum dari pada integral Riemann. Integral Lebesgue perluasan dari integral Riemann karena jika fungsi terintegral Riemann onto maka fungsi juga terintegral Lebesgue onto. Fungsi terintegral Lebesgue memuat fungsi terintegral Riemann, dan integral Lebesgue suatu fungsi adalah sama dengan integral Riemann fungsi, jika fungsi tersebut terintegral Riemann. (Hutahean, Effendi, 1989).

Fungsi terukur didefinisikan melalui konsep himpunan terukur. Fungsi terukur yang dibahas pada skripsi ini berkaitan dengan konsep ukuran suatu fungsi maupun himpunan titik. Definisi fungsi terukur menyatakan: misalkan  $f(x)$  adalah fungsi bernilai real yang didefinisikan pada himpunan  $E$ .

Fungsi  $f(x)$  disebut terukur Lebesgue atau terukur pada  $E$  jika  $E$   
 $(f(x) > \alpha) = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$  terukur untuk semua bilangan real  $\alpha$ . (Murray, R, Spengel. 1992).

Fungsi terukur digunakan untuk menyatakan suatu integral Lebesgue, yang dapat diselesaikan oleh suatu fungsi sederhana. Fungsi sederhana adalah terbatas dan terukur. Fungsi terukur dapat dikatakan fungsi yang hampir kontinu. Dengan menyatakan integral Lebesgue sebagai suatu ukuran, maka akan memudahkan penulis dalam perhitungan-perhitungan menyelesaikan integral Lebesgue.

Berdasarkan kenyataan tersebut maka penulis tertarik untuk membuat skripsi yang berjudul “INTEGRAL LEBESGUE di  $R^1$ ”.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan yang dapat penulis temukan adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana sifat-sifat terintegral Lebesgue dan pembuktiannya pada  $R^1$  ?
2. Bagaimana hubungan integral Lebesgue dengan integral Riemann ?

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Tujuan dari penelitian ini adalah

1. Memahami sifat-sifat terintegral Lebesgue dan membuktikan pada  $R^1$
2. Memahami hubungan integral Lebesgue dengan integral Riemann.

## **1.4 Manfaat Penulisan**

Dari penulisan laporan penelitian ini penulis berharap agar penelitian ini bermanfaat bagi berbagai kalangan, antara lain :

- 1. Bagi Penulis**

- a. Menambah pengetahuan dan keilmuan tentang hal-hal yang berkaitan dengan integral Lebesgue.
- b. Mengembangkan wawasan keilmuan tentang pendeskripsian bagaimana keterkaitan integral Lebesgue dengan integral Riemann.

## **2. Bagi Lembaga**

- a. Sebagai bahan kajian untuk mata kuliah analisis real.
- b. Sebagai tambahan bahan kepustakaan.

## **3. Bagi Mahasiswa**

Sebagai bahan informasi untuk kajian lebih lanjut mengenai fungsi terukur sehingga menambah pemahaman dan penguasaan tentang materi dalam analisis real khususnya.

### **1.5 Batasan Masalah**

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah serta agar pembahasan tidak meluas maka penulis memberikan batasan masalah bahwa skripsi ini membahas tentang integral Lebesgue fungsi satu variable dan fungsi bernilai real yang fungsinya dibatasi pada fungsi terukur terbatas, fungsi terukur taknegatif dan fungsi terukur secara umum.

## 1.6 Metode Penelitian

Jenis penelitian ini adalah deskripsi kualitatif. Pendekatan yang digunakan adalah pendekatan kualitatif dengan memakai bentuk studi literatur. Dengan penelitian deskripsi kualitatif ini, maka penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan (library research), yaitu penelitian yang dilakukan di dalam perpustakaan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat di ruang perpustakaan seperti: buku-buku, internet, dan jurnal. (Mardaris, 1999: 28).

Metode yang digunakan oleh penulis dalam menyusun skripsi ini adalah metode kajian pustaka, yaitu deskripsi teoritis tentang objek yang diteliti dengan cara mendalami, mencermati, menelaah dalam mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan (sumber bacaan, buku-buku referensi atau hasil penelitian lain) untuk menunjang penelitian. (Iqbal, Hasan. 2002: 45).

Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan yang memaparkan hasil oleh pikir mengenai suatu permasalahan atau topik. Kajian kepustakaan dengan mengumpulkan berbagai literatur yang berhubungan dengan topik yang dibahas,

Sedangkan langkah-langkah umum dalam penulisan skripsi ini adalah dengan mempelajari topik dengan membaca dan memahami literatur-literatur yang berkaitan dengan fungsi terukur pada integral Lebesgue.

Adapun langkah-langkah dalam penulisan skripsi ini adalah

1. Merumuskan masalah, sebelum penulis memulai kegiatannya, penulis membuat rancangan terlebih dahulu mengenai suatu permasalahan yang akan dibahas.
2. Mengumpulkan bahan dan informasi dengan cara membaca dan memahami beberapa literature yang berkaitan dengan integral baik itu integral Lebesgue.
3. Menyelesaikan Integral Lebesgue. Diantara buku yang digunakan penulis adalah Measure and Integral an introduction to real analysis serta buku-buku lain yang menunjang penulisan skripsi ini.
4. Membuat kesimpulan, kesimpulan merupakan gambaran langkah dari pembahasan atas apa yang sedang ditulis. Kesimpulan didasarkan pada data yang telah dikumpulkan dan merupakan permasalahan yang dikemukakan.

### 1.7 Sistematika Pembahasan

Laporan penelitian ini ditulis dengan 4 bab yang saling mendukung, yaitu bab I pendahuluan, bab II kajian teori, bab III pembahasan, dan bab IV penutup.

**BAB I**, Pendahuluan, membahas latar belakang yang menceritakan dasar pemikiran dan alasan penulis mengangkat permasalahan, rumusan masalah yang menyatakan secara singkat dan sederhana permasalahan yang akan dibahas, tujuan dan manfaat penulisan, serta sistematika pembahasan yang menjabarkan struktur penulisan dari awal hingga akhir.

**BAB II,** Kajian teori yang berisi tentang konsep dasar dan teorema-teorema yang mendukung pembahasan integral Lebesgue, Serta beberapa teorema dan beberapa pembahasan contoh yang digunakan sebagai acuan maupun pembandingan dalam pembahasan.

**BAB III,** Pembahasan yang membahas mengenai integral Lebesgue di  $R^1$  melalui pembuktian dari teorema-teorema yang ada.

**BAB IV,** Penutup berisi tentang kesimpulan dan saran-saran sebagai tidak lanjut bagi pembaca yang ingin mengembangkan pembahasan tentang integral Lebesgue di  $R^1$

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Sifat Kelengkapan dari $\mathbb{R}$

Sifat kelengkapan himpunan bilangan  $\mathbb{R}$  akan menjamin keberadaan unsur-unsur pada  $\mathbb{R}$  terhadap hipotesis tertentu. Sistem bilangan-bilangan rasional  $\mathbb{Q}$  memenuhi sifat-sifat aljabar dan sifat urutan bilangan, tetapi diketahui bahwa tidak dapat dinyatakan sebagai suatu bilangan rasional, maka tidak termuat pada  $\mathbb{Q}$  jika bilangan irrasional yang termuat pada  $\mathbb{Q}$ . Untuk menunjukkan hal tersebut diperlukan sifat tambahan, sifat kelengkapan (atau sifat supremum), adalah sifat-sifat istimewa dari  $\mathbb{R}$ .

Definisi 2.1.1 Batas atas (Bounded above) dan Batas bawah (Bounded below)

Misalkan  $S$  adalah sebuah himpunan bagian dari  $\mathbb{R}$

- i. Sebuah unsur  $u$  di  $\mathbb{R}$  disebut batas atas dari  $S$  jika  $s \leq u, \forall s \in S$ .
- ii. Sebuah unsur  $w$  di  $\mathbb{R}$  disebut batas bawah dari  $S$  jika  $w \leq s, \forall s \in S$ . (Bartle, 1982: 47).

Definisi 2.1.2 (Supremum)

Misalkan  $S$  adalah sebuah himpunan bagian dari  $\mathbb{R}$  jika  $S$  terbatas di atas, maka batas atas  $u$  disebut supremum (atau batas atas terkecil) dari  $S$  jika tidak terdapat bilangan lebih kecil dari  $u$  sebagai batas atas dari  $S$  jika  $s \leq u, \forall s \in S$ . (Bartle, 1982: 47).

### Definisi 2.1.3 (Infimum)

Misalkan  $S$  adalah sebuah himpunan bagian dari  $\mathbb{R}$  jika  $S$  terbatas di bawah, maka Batas bawah  $w$  disebut infimum (batas bawah terbesar) pada  $S$  jika tidak terdapat bilangan lebih besar dari  $w$  sebagai Batas bawah dari  $S$  jika  $w \leq s, \forall s \in S$ . (Bartle, 1982: 47).

#### Contoh 2.1.1:

- a) Misalkan  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Himpunan  $A$  terbatas di atas karena  $a \leq 6$ , untuk semua  $a \in A$ . himpunan  $A$  juga terbatas di bawah karena  $0 \leq a$ , untuk semua  $a \in A$ . semua bilangan real  $v \geq 6$  merupakan bata atas untuk  $A$ , dan semua bilangan real  $u \leq 1$  merupakan batas bawah untuk  $A$ . jadi himpunan  $A$  adalah terbatas.
- b) Himpunan bilangan asli  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  terbatas di bawah dan 1 merupakan batas bawah tetapi tidak terbatas di atas. Jika diberikan  $v \in \mathbb{R}$ , maka terdapat  $n \in \mathbb{N}$  sehingga  $n > v$ .
- c) Himpunan  $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  terbatas di atas oleh sebarang bilangan real  $v \geq 1$  dan terbatas di bawah oleh sebarang bilangan real  $u \leq 0$ . Batas atas terkecil adalah 1 dan batas bawah terbesar adalah 0.
- d) Himpunan kosong, yaitu  $\emptyset$  dan terbatas di atas dan terbatas di bawah oleh semua bilangan  $x \in \mathbb{R}$ . Dengan demikian,  $\emptyset$  tidak mempunyai batas atas terkecil dan batas bawah terbesar.

## 2.2. Interval.

Definisi :

Himpunan bilangan real  $\mathbb{R}$  dapat digambarkan dalam garis lurus yang disebut sebagai garis bilangan real.

Misalkan  $a, b \in \mathbb{R}$ , dengan  $a < b$ , suatu himpunan bilangan real sebagai berikut:

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

$$A_4 = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

Himpunan bilangan real tersebut menyatakan suatu interval atau selang, secara berurutan dinyatakan sebagai berikut :

$A_1 = (a, b)$  disebut sebagai *interval terbuka*, tidak termasuk kedua titik ujung.

$A_2 = [a, b]$  disebut sebagai *interval tertutup*, termasuk kedua titik ujung.

$A_3 = (a, b]$  disebut sebagai *interval buka–tutup*, tidak termasuk titik ujung  $a$ , tetapi termasuk ujung  $b$ .

$A_4 = [a, b)$  disebut sebagai *interval tutup–buka*, termasuk titik ujung  $a$ , tetapi tidak termasuk ujung  $b$ .

Suatu interval yang memuat sebarang titik  $x$  biasanya dilambangkan dengan  $I_x$ .

Sedangkan himpunan bilangan real berikut :

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R} | x > a\} = (a, \infty)$$

$$B_2 = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\} = [a, \infty)$$

$$B_3 = \{x \in \mathbb{R} | x < a\} = (-\infty, a)$$

$$B_4 = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\} = (-\infty, a]$$

$$B_5 = \{x | x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, \infty)$$

Disebut sebagai interval tak berhingga atau interval tak terbatas (*unbounded*)

Sifat-sifat interval :

Misalkan  $M$  adalah kelas dari semua interval pada garis real, termasuk di dalamnya  $\emptyset$  dan interval tunggal  $a = [a, a]$ . Maka interval memiliki sifat-sifat sebagai berikut :

1. Irisan dua interval adalah interval, yaitu :

Jika  $I_1 \in M$  dan  $I_2 \in M$ , maka  $I_1 \cap I_2 \in M$ .

2. Gabungan dua interval yang tidak saling asing adalah interval, yaitu :

Jika  $I_1 \in M$  dan  $I_2 \in M$ , dan  $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ , maka  $I_1 \cup I_2 \in M$ .

3. Selisih dua interval yang tidak dapat dibandingkan adalah interval, yaitu :

Jika  $I_1 \in M$  dan  $I_2 \in M$ , dan  $I_1 \not\subset I_2, I_2 \not\subset I_1$ , maka  $I_1 - I_2 \in M$

(Manfred, 2001:13).

Contoh :

Misalkan  $I_1 = [2, 4)$  dan  $I_2 = (6, 8)$ , maka

$$I_1 \cap I_2 = \emptyset \text{ dan } I_1 \cup I_2 = [2, 8)$$

$$I_1 - I_2 = [2, 4) \text{ dan } I_2 - I_1 = (6, 8)$$

### 2.3. Himpunan Tertutup.

#### 2.3.1. Definisi:

$A \subset \mathbb{R}$  disebut himpunan tertutup atau himpunan tutup (*closed set*) jika dan hanya jika komplement  $A$  yaitu  $A^c$  himpunan buka.

#### 2.3.2. Teorema :

$A$  tertutup jika dan hanya jika titik limit dari  $A$  termuat di  $A$ .

Bukti :

1.  $A$  tertutup maka titik limit dari  $a$  termuat di  $A$ .

$A$  tertutup berarti  $A^c$  terbuka, oleh karena itu  $(\forall b \in A^c)$   $b$  Berarti  $(\exists I_b), b \in I_b \subset A^c$ , sehingga diperoleh  $I_b \cap A = \emptyset$ , yang juga berarti tidak semua  $I_b$  memuat elemen  $A$ . Jadi  $b$  bukan titik limit  $A^c$  atau titik limit  $A$  tidak di  $A^c$ , tetapi harus di  $A$ .

2. Titik limit  $A$  termuat di  $A$  maka  $A$  tertutup.

Ambil  $b \in A^c$

$b$  bukan titik limit  $a$ , jadi  $(\exists I_b), b \in I_b$  dan  $I_b \cap A = \emptyset$

jadi  $b \in I_b \subset A^c$ , yang berarti  $A^c$  terbuka, maka  $A$  tertutup.

Contoh :

1. Interval tertutup  $[a, b]$  adalah himpunan tertutup, sebab :

Lihat komplementnya  $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$  merupakan interval terbuka, berarti merupakan himpunan buka.

Jadi  $[a, b]$  merupakan himpunan tertutup.

2. Himpunan  $a = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$  adalah tidak tertutup karena 0 adalah titik limit dari  $A$  dan  $0 \notin A$ .
3.  $\emptyset$  dan  $\mathbb{R}$  adalah himpunan tertutup karena  $\emptyset^c$  dan  $\mathbb{R}^c$  masing-masing merupakan himpunan buka.
4. Interval buka–tutup  $a = (a, b]$  adalah titik buka karena  $b \in A$  bukan titik interior dari  $A$ , dan  $A$  tidak tutup karena  $a \notin A$  bukan titik limit dari  $A$  (Wahyudin, 1987:42)

## 2.4 Fungsi Tangga

### Definisi 2.4.1

Fungsi  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dinamakan fungsi tangga, jika ada suatu partisi  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  dari  $[a, b]$ , dan konstanta  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sehingga  $f(x) = c_k$  bila  $x \in (x_{k-1}, x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . (Hutahaeen, Effendi, 1989).

### Contoh 2.4.1

Diketahui  $f(x) = 5, -2 \leq x \leq 4$ ,

hitunglah :

$$\int_a^b f(x)dx \text{ atau } \int_a^b f.$$

penyelesaian :

$$\int_a^b f(x)dx = 5[4 - (-2)] = 30.$$

### Definisi 2.4.1

Misalkan  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fungsi tangga pada definisi 2.2.1 integral fungsi  $f$  pada  $[a, b]$  dinyatakan dengan  $\int_a^b f(x)dx$  atau  $\int_a^b f$  atau  $I_p [a, b]$  dan didefinisikan sebagai  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f = I_p [a, b] = \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1})$ . (Hutahaeen, Effendi, 1989).

### Contoh 2.4.2

Diketahui fungsi  $f : [-2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{bila } -2 < x < -1 \\ -6 & \text{bila } -1 < x < 2 \\ 4 & \text{bila } 2 < x < 5 \end{cases}$$

hitunglah :

$$\int_{-2}^5 f(x) dx$$

Adalah fungsi tangga.

Penyelesaian :

$$\int_a^b f(x) dx = 3[-1 - (-2)] + (-6)[2 - (-1)] + 4[5 - 2] = -3.$$

. jadi,  $[-2, 5]$  merupakan fungsi tangga.

## 2.5 Ukuran

### Definisi 2.5.1

Panjang suatu interval  $I$ , ditulis  $J(I)$  didefinisikan sebagai selisih ujung-ujung interval  $I$ . Interval  $I$  bisa merupakan Interval buka, interval tutup merupakan interval buka-tutup. Dalam hal ini interval  $[a, b]$  dengan  $a = b$

maka panjang intervalnya adalah nol. Panjang memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

- a)  $\mathcal{J}(I) \geq 0$ , untuk semua interval  $I$
- b) Jika  $\{I_i\}$  merupakan kumpulan interval maka  $\mathcal{J}$

Namun sifat-sifat diatas sulit ditemui terutama untuk menentukan ukuran.

$M$  merupakan keluarga himpunan terukur, dimana :

- i.  $\mu(E)$  adalah himpunan terukur  $\forall E \in M$
- ii.  $\mu(E_n) = \sum \mu(E_n), \forall \langle E_n \rangle \in M$ .

## 2.6 Integral Riemann

Pengertian atau konsep integral tentu pertama kali dikenalkan oleh Newton dan Leibniz. Namun pengertian secara lebih modern dikenalkan oleh Riemann.

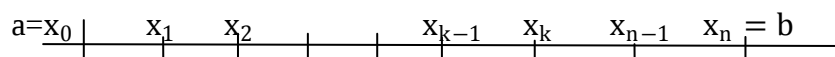
Misalkan  $f$  suatu fungsi bernilai real dan terbatas didefinisikan pada interval tertutup  $[a, b]$ . jika  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  dengan

$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$  adalah sebarang partisi pada  $[a, b]$ , untuk  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ . didefinisikan

$U = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$  dan  $L = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}), k = 1, 2, \dots, n$ .

Dengan  $M_k = \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$  dan

$$m_k = \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$



Integral Riemann atas fungsi  $f$  pada selang  $[a, b]$  didefinisikan sebagai:

$$\Re \int_a^b f dx = \inf U \dots \dots \dots (1)$$

Dan integral Riemann bawah fungsi  $f$  pada selang  $[a, b]$  didefinisikan sebagai

$$\Re \int_a^b f dx = \sup L \dots \dots \dots (2)$$

Dengan  $\sup$  dan  $\inf$  diambil untuk semua partisi  $P$  pada  $[a, b]$ , jika persamaan (1) = (2) maka fungsi  $f$  dikatakan terintegral Riemann (Riemann integrable) pada interval  $[a, b]$ , dan kedua nilai ditulis  $\Re \int_a^b f dx$ . Lambang  $\Re$  dimaksudkan untuk membedakan dengan integral Lebesgue.

Contoh 2.6.1:

Hitunglah jumlah Riemann  $\Re_p$  untuk

$$f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

pada selang  $[0, 5]$  memakai partisi  $P$  dengan titik-titik  $0 < 1,1 < 2 < 3,2 < 4 < 5$  dan titik- titik sampel yang berpadanan  $\bar{x}_1 = 0,5$ ;  $\bar{x}_2 = 1,5$ ;  $\bar{x}_3 = 2,5$ ;  $\bar{x}_4 = 3,6$ , dan  $\bar{x}_5 = 5$

penyelesaian :

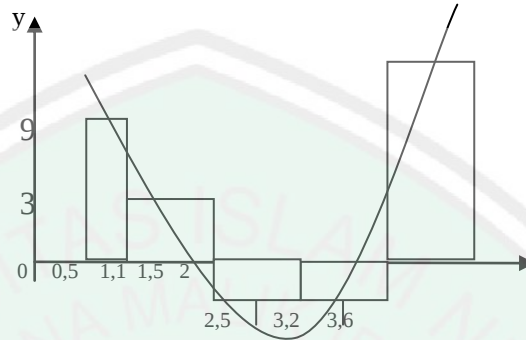
$\Re_p$  adalah jumlah Riemann untuk  $f$  suatu partisi  $P$

$\bar{x}_k$  adalah titik sampel untuk selang bagian ke- $i$ .

$\Delta x_k$  adalah selang bagian

$$\begin{aligned} \Re_p &= \sum_{k=1}^5 f(\bar{x}_k) \Delta x_k \\ &= f(\bar{x}_1) \Delta x_1 + f(\bar{x}_2) \Delta x_2 + f(\bar{x}_3) \Delta x_3 + f(\bar{x}_4) \Delta x_4 + f(\bar{x}_5) \Delta x_5 \\ &= f(0,5)(1,1-0) + f(1,5)(2 - 1,1) + f(2,5)(3,2-2) + f(3,6)(4 -3,2) + \\ &\quad + f(5)(5 - 4) \\ &= (7,875)(1,1) + (3,125)(0,9) + (-2,625)(1,2) + (-2,944)(0,8) + 18(1) \end{aligned}$$

$$= 23,968$$



#### Definisi 2.6.1

Misalkan  $f$  adalah fungsi bernilai real yang didefinisikan pada  $[a, b]$

(a) Integral Riemann atas didefinisikan sebagai

$$\Re \int^+ f(x) dx = \inf \int_a^b \psi(x) dx, \text{ untuk semua fungsi } \psi \geq f$$

(b) Integral Riemann bawah didefinisikan sebagai

$$\Re \int_- \varphi(x) dx = \sup \int_a^b \varphi(x) dx, \text{ untuk semua fungsi } \varphi \leq f$$

Fungsi  $f$  disebut terintegralkan Riemann

Jika  $I := [a, b]$  adalah interval tertutup pada  $\mathbb{R}$  maka pertisi dari  $I$  adalah himpunan terurut  $p := (x_0, x_1, \dots, x_n)$  sehingga  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ .

Contoh 2.6.2:

Fungsi  $f(x) = x$ ,  $0 \leq x \leq 1$  terintegral Riemann pada  $[0, 1]$

Penyelesaian :

Ambilkan  $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$ , maka  $m_i = \frac{k-1}{n}$ ,  $M_k = \frac{k}{n}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

$$L(P_n, f) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$U(P_n, f) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Karena  $\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{P : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$ , maka

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} L(P_n, f) \leq \sup_{P \in \mathcal{P}[a, b]} L(P, f) \leq \inf U(P, f) \leq \inf U(P_n, f) = \frac{1}{2}$$

Sehingga

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} = \int_0^{-1} f(x) dx$$

Berarti fungsi  $f(x) = x$ ,  $0 \leq x \leq 1$  terintegral Riemann pada  $[0, 1]$

$$\text{dan } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

#### Definisi 2.6.2

Diberikan  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi batas pada  $I$  dan didefinisikan

$P := (x_0, x_1, \dots, x_n)$  adalah partisi dari  $I$ . untuk  $k = 1, 2, 3, \dots, n$

$$m_k := \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k := \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Jumlah Riemann bawah fungsi  $f$  yang terkait dengan  $P$  dinyatakan dengan

$L(P, f)$  dan didefinisikan sebagai

$$L(P, f) := \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

Jumlah Riemann atas fungsi  $f$  yang terkait dengan  $P$  dinyatakan dengan

$U(P, f)$  dan didefinisikan sebagai

$$U(P, f) := \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}). \text{ (Bartle, 1999)}$$

### Contoh 2.6.3:

Jika  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  adalah terbatas, jika  $P$  adalah partisi dari  $I$

Diketahui  $f(x) = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ,  $P = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, 2)$

Tentukanlah  $U(P, f)$  dan  $L(P, f)$

Penyelesaian :

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1, x_4 = \frac{5}{4}, x_5 = 2.$$

$$m_1 = \inf_{x \in [0, \frac{1}{3}]} f(x) = 0, m_2 = \inf_{x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]} f(x) = \frac{1}{9}, m_3 = \inf_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} f(x) = \frac{1}{4},$$

$$m_4 = \inf_{x \in [1, \frac{5}{4}]} f(x) = 1, m_5 = \inf_{x \in [\frac{5}{4}, 2]} f(x) = \frac{25}{16}.$$

$$M_1 = \sup_{x \in [0, \frac{1}{3}]} f(x) = \frac{1}{9}, M_2 = \sup_{x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]} f(x) = \frac{1}{4}, M_3 = \sup_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} f(x) = 1,$$

$$M_4 = \sup_{x \in [1, \frac{5}{4}]} f(x) = \frac{25}{16}, M_5 = \sup_{x \in [\frac{5}{4}, 2]} f(x) = 4.$$

Jadi

$$L(P, f) = 0\left(\frac{1}{3} - 0\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{5}{4} - 1\right) + \frac{25}{16}\left(2 - \frac{5}{4}\right) = 1,56$$

$$U(P, f) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3} - 0\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + 1\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{25}{16}\left(\frac{5}{4} - 1\right) + 4\left(2 - \frac{5}{4}\right) = 3,96$$

#### Lemma 2.6.1.1

Jika  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  adalah terbatas, jika  $P$  adalah partisi dari  $I$

maka  $L(P, f) \leq U(P, f)$ . (Bartle, 1999).

Bukti

Diberikan  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ . ketika  $m_k \leq M_k$  untuk  $k=1, 2, 3, \dots, n$  maka

$$L(P, f) := \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) \leq U(P, f) := \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}).$$

a. Integral Atas dan Integral Bawah

Koleksi semua partisi pada interval  $I$  dilambangkan  $P(I)$ . (Bartle, 1999).

#### Definisi 2.6.2.1

Diberikan  $I := [a, b]$  dan diberikan  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi terbatas.

Maka integral Riemann bawah dari  $f$  pada  $I$  adalah

$$\int_a^b f(x) dx := \sup \{ L(P, f) : P \in P(I) \}$$

Maka integral Riemann atas dari  $f$  pada  $I$  adalah

$$\int_a^b f(x) dx := \inf \{ U(P, f) : P \in P(I) \}$$

Dan dinamakan integral Riemann atas fungsi pada selang  $[a, b]$ .

#### b. Sifat terintegral Riemann

#### Definisi 2.6.3,2

Diberikan  $I := [a, b]$  dan diberikan  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dikatakan terintegral Riemann

$$\text{Jika } \int_a^b f(x) = \int_a^{-b}(x)$$

Dilambangkan  $f \in R[a, b]$  dan ditulis

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-a}^b f(x) dx = \int_a^{-b} f(x) dx. \text{ (Bartle, 1999).}$$

#### Contoh 2.6.4:

Fungsi  $f : [3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{bila } x \text{ rasional} \\ 2 & \text{bila } x \text{ irrasional} \end{cases}$$

Tak terintegral Riemann pada  $[3, 5]$ .

Penyelesaian :

Misalkan  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  partisi sebarang dari  $[a, b]$ , maka sehingga

$$L(P, f) := \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) = 1 \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = 1(5 - 3)$$

$$U(P, f) := \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) = 2 \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = 2(5 - 3)$$

Jadi

$$\int_{-3}^5 f(x) dx = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} L(P, f) = 2 ; \int_3^{-5} f(x) dx = \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} U(P, f) = 4$$

Karena

$$\int_{-3}^5 f(x) dx \neq \int_3^{-5} f(x) dx$$

Maka fungsi  $f$  tak terintegral Riemann pada  $[3, 5]$ . Karena untuk sebarang jumlah Riemann dari selang bagian yang mengandung  $x = 0$  dapat dibuat berapa pun besarnya dengan cara pemilihan titik sampel  $\bar{x}_i$  yang cukup dekat dengan nol.

#### Teorema 2.6.3.1

Fungsi  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  terintegral Riemann pada  $[a, b]$ , jika dan hanya jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  ada suatu partisi  $P_\varepsilon$  dari selang  $[a, b]$  sehingga

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon. \quad (\text{Bartle, 1999}).$$

Bukti :

Misalkan  $\varepsilon > 0$  sebarang diberikan

Karena  $\int_{-a}^b f(x) dx = \sup L(P, f)$  maka ada partisi  $P_1$  dari  $[a, b]$  sehingga

$$\int_{-a}^b f(x) d(x) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1, f)$$

Karena  $\int_a^{-b} f(x)dx = \inf U(P, f)$  maka ada partisi  $P_2$  dari  $[a, b]$  sehingga

$$\int_a^{-b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} > U(P_2, f)$$

Ambil  $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$ , maka  $P_\varepsilon \supseteq P_1$  dan  $P_\varepsilon \supseteq P_2$

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1, f) < L(P_\varepsilon, f) \dots\dots(i)$$

$$\int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} > L(P_1, f) > L(P_\varepsilon, f) \dots\dots(ii)$$

Selanjutnya, karena fungsi  $f$  terintegral Riemann pada  $[a, b]$  maka

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-a}^b f(x)dx$$

Sehingga dari (i) dan (ii) diperoleh

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

### c. Sifat Integral Riemann

Definisi 2.5.1:

Jika  $f$  terintegral Riemann pada  $[a, b]$ , didefinisikan

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx ; \int_a^a f(x)dx = 0.$$

### Teorema 2.6.3.1

Jika  $f, g \in R([a, b])$ , dimana  $a, b \in \mathbb{R}$  dan  $a < b$  maka

a)  $f + g \in R([a, b])$  dan

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

b) untuk setiap  $c \in \mathbb{R}$ ,  $cf \in R([a, b])$  dan

$$\int_a^b cf(x) = c \int_a^b f(x)dx.$$

c) jika  $f(x) \geq 0$  untuk setiap  $x \in [a, b]$  maka  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

d) jika  $f(x) \leq g(x)$  untuk setiap  $x \in [a, b]$  maka

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \text{ (Bartle, 1999).}$$

a) Bukti digunakan ketaksamaan :

$$\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) + \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} g(x) \leq \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} [f(x) + g(x)] \dots\dots(i)$$

$$\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) + \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} g(x) \geq \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} [f(x) + g(x)] \dots\dots(ii)$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh

$$L(P, f) + L(P, g) \leq L(P, f + g),$$

$$L(P, f) + L(P, g) \leq L(P, f + g),$$

Untuk setiap partisi  $P$  dari  $[a, b]$

Karena fungsi  $f$  dan  $g$  masing-masing terintegral Riemann pada  $[a, b]$

maka untuk setiap  $\varepsilon > 0$  ada partisi  $P_{1\varepsilon}$  dan  $P_{2\varepsilon}$  dari  $[a, b]$  sehingga

$$U(P_{1\varepsilon}, f) < L(P_{1\varepsilon}, f) + \frac{\varepsilon}{2}, U(P_{2\varepsilon}, g) < L(P_{2\varepsilon}, g) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ambil  $P_\varepsilon = P_{1\varepsilon} \cup P_{2\varepsilon}$  maka  $P_\varepsilon \supseteq P_{1\varepsilon}$ ,  $P_\varepsilon \supseteq P_{2\varepsilon}$ , sehingga

$$U(P_\varepsilon, f + g) \leq U(P_\varepsilon, f) + U(P_\varepsilon, g) \leq U(P_{1\varepsilon}, f) + U(P_{2\varepsilon}, g) < [L(P_{1\varepsilon}, f) + \frac{\varepsilon}{2}] +$$

$$+ [L(P_{2\varepsilon}, g) + \frac{\varepsilon}{2}] \leq [L(P_\varepsilon, f) + \frac{\varepsilon}{2}] + [L(P_\varepsilon, g) + \frac{\varepsilon}{2}] \leq [L(P_\varepsilon, f + g) + \varepsilon]$$

Jadi

$$U(P_\varepsilon, f + g) - L(P_\varepsilon, f + g) \leq \varepsilon.$$

Sehingga  $f + g$  terintegral Riemann pada  $[a, b]$  selanjutnya diperoleh

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

b. Disini digunakan sifat:

jika  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ .  $cA = \{cx : x \in A\}$  maka  $c \sup A = \sup cA$ ,  $c \inf A = \inf cA$ .

berdasarkan hal itu diperoleh:

$$\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} cf(x) = c \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x); \quad \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} cf(x) = c \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x),$$

Yang berakibat

$$L(P, cf) = cL(P, f) \text{ dan } U(P, cf) = cU(P, f).$$

Jadi

$$\int_{-a}^b cf(x) dx = c \int_{-a}^b f(x) dx; \quad \int_a^{-b} cf(x) dx = c \int_a^{-b} f(x) dx,$$

Selanjutnya, karena fungsi  $f$  terintegral Riemann pada  $[a, b]$  maka

$$\int_{-a}^b f(x) dx = \int_{-a}^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx,$$

Sehingga kita peroleh

$$\int_{-a}^b cf(x) dx = c \int_{-a}^b f(x) dx = \int_{-a}^b cf(x) dx,$$

Yang berarti fungsi  $cf$  terintegral Riemann pada  $[a, b]$

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

c. Dari  $f(x) > 0$ ,  $x \in [a, b]$  diperoleh

$$M_k := \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \geq \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = m_k \geq 0 \text{ sehingga}$$

$$U(P, f) \geq L(P, f) \geq 0$$

Karena fungsi  $f \in R([a, b])$ , maka

$$\int_a^b cf(x) dx \leq \inf_{x \in [a,b]} U(P, f) = \sup_{x \in [a,b]} L(P, f) \geq 0$$

d. Misalkan  $h = g - f = g + (-1)f$

karena  $f(x) \leq g(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , maka  $h(x) \geq 0$ ,  $x \in [a, b]$

karena  $f, g \in R([a, b])$  maka  $h = g - f \in R([a, b])$

selanjutnya menurut teorema 2.3.4.1 bagian c

$$0 \leq \int_a^b h(x) dx = \int_a^b (g - f)(x) dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

Sehingga akhirnya diperoleh

$$\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema 2.6.4.

Diberikan  $I := [a, b]$  dan diberikan  $c$  sehingga  $a < c < b$  diberikan  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi terbatas.  $f$  terintegral Riemann  $[a, b]$  jika dan hanya jika  $f$  terintegral pada

$I_1 := [a, c]$  dan  $I_2 := [c, b]$  pada kasus  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ . (Bartle, 1999).

Bukti

$\Rightarrow$  Dimisalkan  $f$  terintegral pada  $[a, c]$  dan  $[c, b]$  dan diberikan  $\varepsilon > 0$

maka ada partisi  $P_{1\varepsilon}$  pada  $[a, c]$  dan  $P_{2\varepsilon}$  pada  $[c, b]$  sehingga

$$U(P_{1\varepsilon}, f) - L(P_{1\varepsilon}, f) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } U(P_{2\varepsilon}, f) - L(P_{2\varepsilon}, f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Diberikan

$$P_\varepsilon := P_{1\varepsilon} \cup P_{2\varepsilon}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) &= [U(P_{1\varepsilon}, f) + U(P_{2\varepsilon}, f)] - [L(P_{1\varepsilon}, f) + L(P_{2\varepsilon}, f)] \\ &= [U(P_{1\varepsilon}, f) - L(P_{1\varepsilon}, f)] + [U(P_{2\varepsilon}, f) - L(P_{2\varepsilon}, f)] < \varepsilon \end{aligned}$$

Diberikan  $\varepsilon > 0$

$\Leftarrow$  dimisalkan  $f$  terintegral pada  $[a, b]$ . jika  $\varepsilon > 0$  diberikan maka ada partisi pada

$[a, b]$  sehingga  $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$

Jika  $P' := P \cup \{c\}$ ,  $P'$  merupakan penghalusan partisi  $P$  sehingga menurut teorema

$$U(P', f) - L(P', f) \leq [U(P, f) - L(P, f)] < \varepsilon$$

Jika diberikan  $P'_1 := P' \cap [a, c]$  dan  $P'_2 := P' \cap [c, b]$  maka diperoleh

$$U(P', f) = U(P'_1, f) + [U(P'_2, f) \text{ dan}]$$

$$L(P', f) = L(P'_1, f) + [L(P'_2, f)]$$

Dengan mengkombinasikan rumus tersebut diperoleh

$$[U(P', f) - L(P'_2, f)] + [U(P'_2, f) - L(P'_2, f)] < \varepsilon$$

Ketika dua pernyataan yang ada di tanda kurung siku dapat ditarik kesimpulan bahwa

$$U(P'_1, f) - L(P'_1, f) < \varepsilon \text{ dan } U(P'_2, f) - L(P'_2, f) < \varepsilon$$

Ketika  $\varepsilon > 0$  maka terbukti  $f$  terintegral pada  $[a, c]$  dan  $[c, b]$ .

Proposisi 3.

$$L(f) \leq U(f).$$

Bukti.

Untuk setiap partisi  $P_0$  dari  $[a, b]$ ,  $U(P_0, f)$  merupakan batas atas dari

$\{L(P, f) :$

$P \text{ partisi dari } [a, b]\}$ , sehingga

$$L(f) = \sup\{L(P, f) : P \text{ partisi dari } [a, b]\} \leq U(P_0, f).$$

Karena ini berlaku untuk sembarang partisi  $P_0$ , maka  $L(f)$  merupakan batas bawah

dari  $\{U(P_0, f) : P_0 \text{ partisi dari } [a, b]\}$ . Akibatnya

$$L(f) = \inf\{U(P_0, f) : P_0 \text{ partisi dari } [a, b]\} = U(f),$$

sebagaimana yang diharapkan.

Secara umum,  $L(f) \neq U(f)$ . Sebagai contoh, jika  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  didefinisikan

Sebagai

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ rasional} \\ 1, & x \text{ irrasional} \end{cases}$$

maka  $L(f) = 0$  sementara  $U(f) = 1$ .

Jika  $L(f) = U(f)$ , maka  $f$  dikatakan terintegralkan Riemann dan nilai yang sama tersebut didefinisikan sebagai integral Riemann dari  $f$  pada  $[a, b]$ , yang dilambangkan dengan  $\int_a^b f(x) dx$ . (Hendra Gunawan).

#### Contoh 2.6.5

Pada bagian ini akan ditemukan fungsi yang tidak terintegralkan Riemann adalah sebagai berikut :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \text{ irrasional} \\ 0 & \text{jika } x \text{ rasional} \end{cases}$$

Penyelesaian :

$$m_k = 0 \quad M_k = 0$$

Oleh karena itu diperoleh

$$L(P, f) = 0 \quad U(P, f) = 1$$

$$\int_{-a}^b f(x) = 0 \quad \int_a^{-b} f(x) = 1$$

Karena

$$\int_{-a}^b f(x) \neq \int_a^{-b} f(x), \text{ maka } f(x) \text{ tidak terintegral Riemann.}$$

## 2.7 Fungsi Karakteristik Dan Fungsi Sederhana

### Definisi 2.7.1

Misalkan  $E \subseteq \mathbb{R}$  suatu himpunan sebarang. Fungsi  $\chi_E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dinamakan fungsi karakteristik dari  $E$ , jika

$$\chi_E = \begin{cases} 1, & \text{jika } x \in E \\ 0, & \text{jika } x \notin E \end{cases}$$

Misalkan  $\mu : \pi \rightarrow \mathbb{R}$  ukuran Lebesgue

Misalkan  $E \subseteq \mathbb{R}$  suatu himpunan terukur,  $\mu(E) < \infty$ .

Fungsi  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  dinamakan fungsi sederhana, jika ada bilangan real  $a_1, a_2, \dots, a_n$  dan himpunan-himpunan terukur

$E_1, \dots, E_n, E_i \cap E_j = \emptyset \ (i \neq j), E = \bigcup_{i=1}^n E_i$  sehingga

$f(x) = a_i, x \in E_i \ (i = 1, 2, \dots, n)$ . adalah fungsi sederhana, dapat dibawa ke fungsi sederhana terbentuk kanonik, terlihat bahwa setiap fungsi sederhana merupakan fungsi terukur.

Fungsi  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  yang didefinisikan oleh  $F = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$  adalah fungsi yang memenuhi

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Jadi  $f = F|E$

Perhatikan bahwa  $F = f \cdot \chi_E + 0 \cdot \chi_{E^c}$

Kaitan dengan integral Lebesgue, kita anggap  $F = f$

Jadi

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}.$$

Jika  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  suatu fungsi sederhana,  $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ , dan  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$  adalah

bilangan-bilangan real tak nol yang tak sama didalam daerah nilai fungsi  $f$ , maka

$f = \sum_{j=1}^k a_{i_j} \chi_{E_{i_j}}$  dinamakan kanonik fungsi  $f$ .

Contoh 2.7.1

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x < 3 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & -4 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

buktikan fungsi diatas adalah suatu fungsi sederhana.

Penyelesaian :

$f$  dapat dituliskan sebagai

$$f = 1 \cdot \chi_{(1,0)} + 0 \cdot \chi_{(0,1]} + 2 \cdot \chi_{[-4,0]}$$

Dalam kanonik fungsi  $f$  adalah

$$f = 1 \cdot \chi_{(1,0)} + 2 \cdot \chi_{[-4,0]}$$

Untuk fungsi  $f$  kita memperoleh :

$$\begin{aligned}\int_E f \, dx &= 1. \mu((1, 3)) + 0. \mu((0, 1]) + 2. \mu([-4, 0]) \\ &= 1 (3 - 1) + 0(1 - 0) + 2\{0 - (-4)\} = 10.\end{aligned}$$

Untuk kanonik fungsi  $f$  kita memperoleh

$$\int_E f \, dx = 1. \mu((1, 3)) + 2. \mu([-4, 0]) = 10$$

Jadi terbukti adalah fungsi sederhana.

#### Definisi 2.7.2

Misalkan  $f$  fungsi sederhana penyajian kanonik.  $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ , dengan

$E_i = \{x : f(x) = a_i\}$  adalah himpunan yang saling asing dan terukur, serta  $a_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) mempunyai nilai yang berbeda dan tidak bernilai nol.

Integral Lebesgue dan  $f$  didefinisikan dengan

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Integral Lebesgue dan  $f$  didefinisikan dengan

$$\int f(x) \, dx = \sum_{i=1}^n a_i (\chi_{E_i}).$$

## Teorema 2.7.2

Jika  $\varphi$  dan  $\psi$  masing-masing fungsi sederhana dan  $\alpha$  adalah bilangan real yang diketahui maka :

$$a. \int_E (\varphi + \psi) d\mu = \int_E \varphi d\mu + \int_E \psi d\mu.$$

$$b. \int_E \alpha \varphi d\mu = \alpha \int_E \varphi d\mu.$$

$$c. \text{ Jika } \varphi \geq \psi \text{ maka } \int_E \varphi d\mu \geq \int_E \psi d\mu.$$

Bukti :

$$a. \text{ Misalkan } \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}, \quad \psi = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{F_j}$$

$$A_{ij} = E_i \cup F_j, \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$$

jadi :

$$\varphi + \psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + a_j) \chi_{A_{ij}}$$

dan

$$\begin{aligned} \int_E (\varphi + \psi) d\mu &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + a_j) \mu(A_{ij}). \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i) \mu(A_{ij}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_j) \mu(A_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i) + \sum_{j=1}^m a_j \mu(E_j) \\ &= \int_E \varphi d\mu + \int_E \psi d\mu. \end{aligned}$$

$$b. \text{ Misalkan } \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}.$$

$$\alpha \varphi = \alpha \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}.$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha a_i \chi_{E_i}.$$

$$\int_E \alpha \varphi d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha a_i \mu(E_i).$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^n a_i \mu \chi_{E_i}.$$

$$= \alpha \int_E \varphi d\mu.$$

c. Misalkan  $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ ,  $\psi = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{F_j}$

$$A_{ij} = E_i \cap F_j, (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$$

jadi

$$\varphi \geq \psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + a_j) \chi_{A_{ij}} \geq$$

dan

$$\begin{aligned} \int_E (\varphi \geq \psi) d\mu &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + a_j) \mu(A_{ij}). \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i) \mu(A_{ij}) \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_j) \mu(A_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i) \geq \sum_{j=1}^m a_j \mu(E_j) \\ &= \int_E \varphi d\mu \geq \int_E \psi d\mu. \end{aligned}$$

Contoh 2.7.2 :

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 3 \leq x \leq 5 \\ 1, & 1 \leq x < 3 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & -1 < x < 0 \\ 0, & -2 < x \leq -1 \\ 1, & -5 \leq x \leq -2 \end{cases}$$

adalah suatu fungsi sederhana  $f$  dapat dituliskan sebagai

$$f = 2 \cdot \chi_{[3,5]} + 1 \cdot \chi_{[1,3)} + 0 \cdot \chi_{[0,1)} + 2 \cdot \chi_{(-1,0)} + 0 \cdot \chi_{(-2,-1)} + 1 \cdot \chi_{[-5,-2]}.$$

Dalam kanonik fungsi  $f$

$$f = 2 \cdot \chi_{[3,5] \cup [-1,0]} + 1 \cdot \chi_{[1,3] \cup [-5,-2]}.$$

Untuk fungsi  $f$  kita memperoleh

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu &= 2 \cdot \mu([3,5]) + 1 \cdot \mu([1,3]) + 0 \cdot \mu([0,1]) + 2 \cdot \mu((-1,0)) + 0 \cdot \mu((-2, -1]) + 1 \cdot \mu([-5,-2]) \\ &= 11 \end{aligned}$$

Untuk kanonik fungsi  $f$  kita memperoleh

$$\int_E f \, d\mu = 2 \cdot \mu([3, 5] \cup (0, 1)) + 1 \cdot \mu([1, 3] \cup [-5, -2]) = 11$$

## 2.8 Integral Lebesgue

Pada tahun 1902 Lebesgue, seorang matematikawan Perancis mencermati adanya fungsi yang tidak terintegral Riemann yaitu fungsi yang nilainya 0 dan 1. Selanjutnya Lebesgue menyusun teori ukuran yang terkenal dengan ukuran Lebesgue. Lebesgue menyusun teori integral baru yang merupakan perluasan dari integral Riemann karena jika fungsi  $f$  terintegral Riemann pada  $[a, b]$  maka fungsi  $f$  juga terintegral Lebesgue pada  $[a, b]$ .

### Definisi 2.8.1

Misalkan  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi sederhana,  $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ . Integral Lebesgue fungsi  $f$  pada  $E$  dinyatakan dengan notasi  $\int_E f \, dx$  dan didefinisikan oleh  $\int_E f \, dx = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ .

### Contoh 2.8.1

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x < 3 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & -4 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

buktikan fungsi diatas merupakan suatu fungsi sederhana;

penyelesaian :

$f$  dapat dituliskan sebagai

$$f = 1 \cdot \chi_{(1,0)} + 0 \cdot \chi_{(0,1]} + 2 \cdot \chi_{[-4,0]}$$

Untuk fungsi  $f$  kita memperoleh :

$$\begin{aligned} \int_E f \, dx &= 1 \cdot \mu((1, 3)) + 0 \cdot \mu((0, 1]) + 2 \cdot \mu([-4, 0]) \\ &= 1(3 - 1) + 0(1 - 0) + 2\{0 - (-4)\} = 10. \end{aligned}$$

Jadi, merupakan suatu fungsi sederhana.

Integral Lebesgue dari suatu fungsi terbatas yang didefinisikan pada suatu himpunan terukur. Misalkan  $E$  suatu himpunan terukur,  $\mu(E) < \infty$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  suatu fungsi terbatas, jadi ada  $c, d$ ,  $c < d$  sehingga  $c \leq f(x) \leq d$ . bagilah selang  $[c, d]$  menjadi  $n$  selang bagian oleh titik–titik  $y_0 = c < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d$ ;  $P = y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  dinamakan partisi dari  $[c, d]$ . semua partisi dari  $[c, d]$  dinyatakan dengan  $P_{[c,d]}$ . Misalkan

$$m_i = y_{i-1}, \quad M_i = y_i, \quad E_i = f^{-1}(y_{i-1}, y_i)$$

Definisikan dua fungsi sederhana  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$  sebagai berikut :

$$\varphi(x) = m_i, \quad x \in E_i, \quad \psi(x) = M_i, \quad x \in E_i. \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Definisikan

$$L(P, f) = \int_{[a,b]} \varphi \, d\mu, \quad U(P, f) = \int_{[a,b]} \psi \, d\mu;$$

$L(P, f)$  dinamakan jumlah Lebesgue bawah dan  $U(P, f)$  dinamakan jumlah Lebesgue atas dari fungsi  $f$  menurut partisi  $P$ .

### Teorema 2.8.1

Misalkan  $f$  adalah fungsi bilangan real yang terbatas pada  $[a, b]$  jika  $f$  terintegralkan Riemann pada  $[a, b]$  maka  $f$  terintegralkan Lebesgue dan

$$R \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Bukti :

Karena  $f$  terintegralkan Riemann pada  $[a, b]$  maka berdasarkan definisi 2.4

$$\inf_{\psi_1 \geq f} \int_a^b \psi_1(x) dx = \sup_{\varphi_1 \leq f} \int_a^b \varphi_1(x) dx = R \int_a^b f(x) dx,$$

Untuk semua fungsi  $\psi_1$  dan  $\varphi_1$  pada  $[a, b]$ . dari definisi 2. 4 dan definisi 2.1.2 disimpulkan bahwa setiap fungsi tangga adalah subset dari himpunan fungsi sederhana. Hal ini berarti,

$$\sup_{\varphi_1 \leq f} \int_a^b \varphi_1(x) dx \leq \sup_{\varphi \leq f} \int_a^b \varphi(x) dx, \text{ untuk semua fungsi sederhana } \varphi$$

pada  $[a, b]$ .....(i)

$$\inf_{\psi_1 \geq f} \int_a^b \psi_1(x) dx \geq \inf_{\psi \geq f} \int_a^b \psi(x) dx, \text{ untuk semua fungsi sederhana } \psi \text{ pada}$$

$[a, b]$  .....(ii)

Dari (i) dapat disimpulkan bahwa  $R \int_a^b f(x) dx \leq \sup_{\varphi \leq f} \int_a^b \varphi(x) dx = L \int_- f(x) dx$

Dari (ii) dapat disimpulkan bahwa  $R \int_a^b f(x) dx \geq \inf_{\psi \geq f} \int_a^b \psi(x) dx = L \int^- f(x) dx$

Karena  $\varphi$  dan  $\psi$  adalah fungsi-fungsi sederhana maka berdasarkan teorema 2.6.1

$$L \int_- f(x) dx = L \int^- f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Dengan diketahui  $R \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Jadi terbukti bahwa  $f$  terintegral Lebesgue dan  $R \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ .

Contoh 2.8.2, Misalkan  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  didefinisikan dengan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x \in \mathbb{Q} \text{ pada } [0, 1] \\ 0, & \text{jika } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ pada } [a, b] \end{cases}$$

adalah fungsi yang terintegralkan Lebesgue tetapi tidak terintegral Riemann.

Penyelesaian :

$f(x)$  adalah fungsi sederhana. Karena  $f(x)$  adalah fungsi sederhana maka

$f(x)$  terintegral Lebesgue . jadi,  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ , tetapi  $f(x)$  tidak terintegral

Riemann, karena  $\mathcal{L} \int_- f(x) dx = \inf_{\psi \geq f} \int_0^1 \psi(x) dx = 1$  dan  $\mathcal{L} \int_- f(x) dx =$

$$\sup_{\varphi \leq f} \int_0^1 \varphi(x) dx = 0$$

dari contoh ini dapat disampaikan bahwa fungsi yang terintegralkan Lebesgue, belum tentu terintegralkan Riemann.

### Definisi 2.8.2

Misalkan  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi terbatas dan  $E$  adalah himpunan yang berukuran hingga maka

$$\mathcal{L} \int^- f(x) dx = \inf_{\psi \geq f} \int_E \psi \text{ dan } \mathcal{L} \int_+ f(x) d(x) = \sup_{\psi \leq f} \int_E \psi$$

dengan  $\psi$  dan  $\varphi$  adalah fungsi-fungsi sederhana yang terdefinisi pada  $E$ . berturut-turut disebut sebagai Integral Lebesgue atas dan Integral Lebesgue bawah.

### Contoh 2.8.3 :

Fungsi  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [0, 2]$  terintegral Lebesgue

Hitunglah :  $\int_{[0,2]} f d\mu$ .

Penyelesaian :

$$f([0, 2]) = [0, 4].$$

Bagilah selang  $[0, 4]$  menjadi  $n$  selang bagian oleh titik-titik

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \text{ maka } m_i = y_{i-1}, M_i = y_i, E_i = x_{i-1}, x_i.$$

$$y_i = f(x_i) \text{ (} i = 1, 2, \dots, n, \mu(E_i) = x_i - x_{i-1},$$

sehingga

$$\int_{[0,2]}^- f \, d\mu =$$

$$= \lim_{\mu(E_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \mu(E_i) = \lim_{(x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) = \int_0^2 f(x) dx$$

$$\int_- f \, d\mu =$$

$$= \lim_{\mu(E_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \mu(E_i) = \lim_{(x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) = \int_{-0}^2 f(x) dx.$$

Karena fungsi  $f$  kontinu, maka  $f$  terintegral Riemann pada  $[0, 2]$

Jadi

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_{-0}^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx = \frac{8}{3}$$

Sehingga

$$\int_{[0,2]}^- f \, d\mu = \int_0^2 f(x) dx = \int_{-0}^2 f(x) d\mu$$

Berarti fungsi  $f$  terintegral Lebesgue pada  $[0, 2]$  dan  $\int_{[0,2]}^- f \, d\mu = \int_0^2 f(x) dx$ .

(Hutahean, Effendi: 1989).

## 2.9 Himpunan Terukur

### Definisi 2.9.1

Himpunan  $E$  disebut terukur lebesgue atau lebih sederhana disebut terukur

jika untuk sebarang himpunan  $A$  berlaku

$$\mu^*(A) = \mu(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

## Teorema 2.9.2

Misalkan  $x \subseteq \mathbb{R}$  suatu himpunan terbatas dan terukur.

$E \subseteq x$  terukur, jika dan hanya jika

$$\mu^*(A) = \mu(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

bukti:

( $\rightarrow$ ) diketahui:  $X$  terukur,  $E$  terukur; akan dibuktikan

$$\mu^*(A) = \mu(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Menurut definisi, untuk setiap himpunan terbatas  $A$  berlaku

$$\mu^*(A) = \mu(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Karena  $E \subseteq X$ , dan  $X$  terukur, maka untuk  $A = X$  kita memperoleh

$$A \cap E = A \cap E = E, \mu^*(A) = \mu(X)$$

Jadi

$$\mu(X) = \mu^*(X) = \mu^*(X \cap E) + \mu^*(X \cap E^c) = \mu^*(E) + \mu^*(X \cap E^c)$$

( $\leftarrow$ ) diketahui :  $X$  terukur,  $\mu(X) = \mu^*(E) + \mu^*(X \cap E^c)$

Akan dibuktikan  $E$  terukur

Misalkan  $A \subseteq X$  himpunan terbatas sebarang, dan  $B \subseteq X$  suatu selimut terukur dari  $A$ ; jadi  $B \supseteq A$  dan  $\mu(B) = \mu^*(A)$

Karena  $B$  terukur maka

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c).$$

$$\mu^*(X \cap E^c) = \mu^*((X \cap E^c) \cap B) + \mu^*((X \cap E^c) \cap B^c) = \mu^*(E^c \cap B) + \mu^*(X \cap (E \cup B)^c)$$

Jadi

$$\mu(X) = \mu^*(E) + \mu^*(X \cap E^c)$$

$$\begin{aligned}
&= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(X \cap E^c) + \mu^*(E^c \cap B) + \mu^*(X \cap (E \cup B)^c) \\
&= [\mu^*(E \cap B) + \mu^*(E^c \cap B)] + [\mu^*(E \cap B^c) + \mu^*(X \cap (E \cup B)^c)] \dots (1)
\end{aligned}$$

Karena

$$\mu(B) = \mu^*(B) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E^c \cap B)$$

$$\mu(X - B) = \mu^*(X - B) = \mu^*(E \cap B^c) + \mu^*(X \cap (E \cup B)^c)$$

Maka dari (1) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mu(X) &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E^c \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) + \mu^*(X \cap (E \cup B)^c) \\
&= \mu^*(B) + \mu(X - B)
\end{aligned}$$

$$\text{Karena } \mu(X - B) \leq \mu^*(E \cap B^c) + \mu^*(X \cap (E \cup B)^c)$$

Maka

$$\mu(B) \geq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E^c \cap B)$$

Selanjutnya

$$(A \cap E) \subseteq (B \cap E) \text{ dan } (A \cap E^c) \subseteq (E \cap B^c).$$

Jadi

$$\mu^*(E \cap B) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \cap E^c) \leq \mu(B) = \mu^*(A)$$

Jadi E terukur.

Lemma :

Untuk setiap himpunan terbatas A dan B berlaku :

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*((A - B) \cup (B - A))$$

Bukti :

Tulislah

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Jika  $\mu^*(A) \geq \mu^*(B)$ , maka dari hubungan

$$A \subseteq B \cup (B - A)$$

Diperoleh

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \Delta B) \quad \dots \dots (1)$$

Jadi

$\mu^*(A) < \mu^*(B)$ , maka dari hubungan

$$B \subseteq A \cup (A \Delta B)$$

Diperoleh

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(A \Delta B)$$

Jadi

$$\mu^*(B) - \mu^*(A) + \mu^*(A \Delta B) \dots \dots \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B).$$

### Definisi 2.9.3

Misalkan  $f$  adalah fungsi bernilai real yang didefinisikan pada himpunan

terukur  $E$ . Fungsi  $f$  disebut terukur lebesgue atau terukur pada  $E$  jika

$E(f(x) > \alpha) = \{x \in E: f(x) > \alpha\}$  terukur, untuk semua bilangan real  $\alpha$ .

### Teorema 2.9.3:

Misalkan  $E$  suatu himpunan terbatas.

Jika ada suatu himpunan terbatas dan terukur  $H \supseteq E$  dan

$$\mu(H) = \mu^*(E) + \mu^*(H - E)$$

Maka,  $E$  terukur

Bukti :

Misalkan  $X$  suatu himpunan terukur terbatas dengan  $X \supseteq H \supseteq E$ ,  
akan dibuktikan

$$\mu(X) = \mu^*(E) + \mu^*(X - E)$$

Karena  $X = E \cup (X - E)$  maka

$$\mu(X) \leq \mu^*(E) + \mu^*(X - E) \dots (1)$$

Karena  $H$  terukur, maka

$$\begin{aligned} \mu(X) &= \mu(X - H) + \mu(H) \\ &= \mu^*(E - H) + \mu^*(H - E) + \mu^*(E) \geq \mu^*(X - E) + \mu^*(E) \end{aligned}$$

Contoh 2.9.1

Misalkan  $A \subset E$  dan  $E$  adalah himpunan terukur Fungsi karakteristik  $k(x)$  yang didefinisikan dengan  $A$  adalah fungsi terukur.

Bukti :

Ambil sebarang  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dalam hal ini dibagi menjadi 3 kasus.

Kasus 1. Untuk  $\alpha \geq 1$

Hal ini berarti  $E(k > \alpha) = \{x \in E : k(x) > \alpha\} = \emptyset$

$\emptyset$  terukur.

Kasus 2. Untuk  $0 \leq \alpha < 1$

Hal ini berarti  $E(k > \alpha) = \{x \in E : k(x) > \alpha\} = A$

Karena  $A \subset E$  dan  $E$  adalah himpunan terukur maka  $A$  terukur.

Kasus 3 : Untuk  $\alpha < 1$

Hal ini berarti  $E(k > \alpha) = \{x \in E : k(x) > \alpha\} = E$

Diketahui bahwa  $E$  terukur.

Karena  $E(k > \alpha) = \{x \in E : k(x) > \alpha\}$  terukur untuk semua bilangan real  $\alpha$  maka fungsi karakteristik  $k(x)$  terukur.

## 2.10 Fungsi Terukur

Integral Lebesgue dari suatu fungsi  $f$  bernilai real meliputi suatu himpunan terukur

$E \in \mathcal{R}$ . integral Lebesgue dari fungsi  $f$  meliputi himpunan terukur  $E \subseteq \mathbb{R}$ . dirumuskan sebagai :

$$\int_E f d\mu = \lim_{\mu(E_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) \mu(E_i)$$

Dalam hal ini

$$E_i = \{x \in E : y_i \leq f(x) < y_{i+1}\}, c = y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_n = d, \mathcal{R}_p = [c, d]$$

$t_i \in E_i$  dipilih sebarang

$E_i$  harus terukur ( $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) membagi selang  $[c, d]$  dinamakan fungsi terukur.

### Teorema 2.10.1

Diberikan fungsi  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^*$  (real extended) dimana domain  $D$  adalah himpunan terukur dan  $\mathcal{M}$  merupakan keluarga himpunan terukur maka fungsi  $f$  dikatakan terukur jika memenuhi salah satu pernyataan berikut:

- i.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  maka  $\{x \in D | f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$
- ii.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  maka  $\{x \in D | f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{M}$
- iii.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  maka  $\{x \in D | f(x) < \alpha\} \in \mathcal{M}$

iv.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  maka  $\{x \in D | f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{M}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$  maka  $\{x \in D | f(x) = \alpha\} \in \mathcal{M}$ , himpunan terukur. (Hutahaeen, Effendi, 1989)

Bukti :

Untuk  $a \in \mathbb{R}$  dengan  $a$  berhingga (finite) berlaku

$$\{x \in D | f(x) = a\} = \{x \in D | f(x) \geq a\} \cap \{x \in D | f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$$

Untuk  $a = +\infty$  berlaku

$$\{x \in D | f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in D | f(x) \geq n\} \in \mathcal{M}$$

Untuk  $a = -\infty$

$$\{x \in D | f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in D | f(x) \leq -n\} \in \mathcal{M}$$

Sehingga terbukti bahwa

$$\{x \in D | f(x) = \alpha\} \in \mathcal{M}, \forall \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Teorema 2.10.1:

Jika  $m(E) = 0$  maka fungsi  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  maka  $E$  adalah terukur

Bukti :

Untuk setiap bilangan real  $c$ , himpunan  $E(f < c) \subseteq E$ .

Karena  $m(E) = 0$ , maka  $m(E(f < c)) = 0$ , jadi  $E$  dan  $E(f < c)$  keduanya terukur.

Berarti  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  terukur

Jadi  $E$  terukur. (Hutahaeen, Effendi, 1989) .

### Contoh 2.10.1

$\mathbb{Q}$  = sistem bilangan rasional,  $m(\mathbb{Q}) = 0$

Jawab :

Untuk setiap bilangan  $\mathbb{Q}$  dan untuk setiap bilangan real  $c$ ,

himpunan  $\mathbb{Q}(f < c) \subseteq \mathbb{Q}$

Karena  $m(\mathbb{Q}) = 0$ , maka  $m(\mathbb{Q}(f < c)) = 0$ , jadi  $\mathbb{Q}$  dan  $\mathbb{Q}(f < c)$  keduanya terukur.

Berarti  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  terukur.

### 2.11. Kajian Ilmu Dalam Al-Qur'an

Dalam Al-Qur'an terdapat banyak surat yang menerangkan tentang pentingnya untuk mengembangkan dan memahami pengetahuan. Pada dasarnya semua orang yang berakal diwajibkan untuk menuntut ilmu. Di jelaskan dalam Al-Quran surat Al-Imron ayat 190 sebagai berikut :

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَآخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِّأُولِي الْأَلْبَابِ ﴿١٩٠﴾

Artinya : “Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal.”  
(Qs. Al-Imron: 190)

Ilmu merupakan sesuatu yang sangat penting bagi orang-orang yang berakal, Dimana semua orang sangat membutuhkannya, lebih dari sekedar kebutuhan makan dan minum. Dalam menuntut ilmu berniat untuk memberantas kebodohan dari dirinya dan dari orang lain, karena pada dasarnya manusia itu jahil (bodoh).

Ditegaskan pula dalam firman Allah SWT surat An-Nahl ayat 78 bahwa manusia dilahirkan didunia dalam keadaan fitrah sehingga manusia hanya bisa merubah dirinya sendiri untuk menjadi manusia yang berilmu dan berakal. Dalam Al-Qur'an Allah berfirman sebagai berikut :

وَاللَّهُ أَخْرَجَكُمْ مِنْ بُطُونِ أُمَّهَاتِكُمْ لَا تَعْلَمُونَ شَيْئًا وَجَعَلَ لَكُمُ السَّمْعَ وَالْأَبْصَرَ وَالْأَفْئِدَةَ

لَعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ﴿٧٨﴾

Artinya : “Dan Allah mengeluarkan kamu dari perut ibumu dalam keadaan tidak mengetahui sesuatupun, dan Dia memberi kamu pendengaran, penglihatan dan hati, agar kamu bersyukur.” (QS. An Nahl:78).

Manusia yang diciptakan Allah sebagai makhluk yang paling canggih, mampu menggunakan potensi yang dimilikinya dengan baik.

Al-Qur'an menepatkan manusia sebagai makhluk ciptaan Allah berupa jasmani dan rohani. Al-Qur'an memberi acuan konseptual yang sangat mapan dalam memberi pemenuhan kebutuhan jasmani dan ruhani agar manusia berkembang.

Manusia diciptakan Allah sebagai makhluk berpribadi sebagai makhluk yang hidup bersama-sama dengan orang lain, sebagai makhluk yang hidup di tengah-tengah alam dan sebagai makhluk yang diciptakan dan diasuh oleh Allah. Manusia sebagai makhluk berpribadi, mempunyai fungsi terhadap diri pribadinya. Manusia sebagai anggota masyarakat mempunyai fungsi terhadap masyarakat. Manusia sebagai makhluk yang hidup di tengah-tengah alam, berfungsi terhadap

alam. Manusia sebagai makhluk yang diciptakan dan diasuh, berfungsi terhadap yang menciptakan dan yang mengasuhnya. Selain itu manusia sebagai makhluk pribadi terdiri dari kesatuan tiga unsur yaitu : unsur perasaan, unsur akal, dan unsur jasmani.

Untuk mengaktualisasikan potensi di atas, dibutuhkan kemampuan dan kualitas manusia yaitu kualitas iman, kualitas ilmu pengetahuan, dan kualitas amal saleh untuk mampu mengolah dan mengfungsikan potensi yang diberikan Allah kepada manusia untuk menjadi manfaat bagi dirinya sendiri dan orang lain.

Manusia mengetahui bahwa ilmu pengetahuan sangat luas maknanya mulai dari ilmu agama dan ilmu-ilmu yang berhubungan dengan matematika, karena pengetahuan dapat menghilangkan kebodohan yang akan membawa manusia tahu akan pentingnya ilmu sehingga tidak henti-hentinya untuk mencari dan mempelajari ilmu tersebut.

Dalam ilmu matematika ukuran Lebesgue dinobatkan sebagai pembuka pintu teori tentang ukuran dalam garis real. Dengan menggunakan ukuran Lebesgue, maka Lebesgue menciptakan dan menyusun suatu teori integral baru yang dikenal dengan nama integral Lebesgue, sebab penerapan ukuran Lebesgue pada integral Lebesgue, mengakibatkan bahwa integral Lebesgue memberikan perluasan indah dari integral Riemann dan integral Stieltjes, karena integral Lebesgue membuat lebih banyak fungsi dapat diintegrasikan, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Jadi ukuran Lebesgue dalam integral Lebesgue termasuk pembahasan baru dalam analisis matematika modern.

Sains mengungkapkan bahwa alam semesta ini tidak terjadi secara kebetulan. 'Tuhan tidak sedang bermain dadu', ungkap Albert Einstein. Semua berdasarkan perhitungan, ukuran, dan perencanaan yang matang, bahkan ketika dentuman besar pertama dimana Allah, dengan kata "Kun-Nya", Jadilah, menciptakan alam semesta dalam hitungan  $t = 0$  hingga  $10^{-43}$  detik. Stephen Hawking mengatakan "Seandainya pada saat dentuman besar terjadi kurang atau lebih cepat seperjuta detik saja, maka alam semesta tidak akan seperti ini. Dalam Firman Allah surat Al – Qomar ayat 49 sebagai berikut :

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ

Artinya: "Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran."  
(Qs. Al-Qomar:49)

Allah SWT menerangkan bahwa segala sesuatu yang ada dalam kehidupan di dunia ini tidaklah terjadi secara kebetulan, akan tetapi dengan keputusan dan ketentuan Allah (qada' dan qadar-Nya). Apabila Allah menghendaki sesuatu perkara, maka hanya mengatakan kepadanya, "Jadilah!", maka perkara itupun terjadi.

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Sungguh, tidak salah kiranya jika penulis menyatakan bahwa Allah maha matematis.

Matematika itu pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, termasuk teori ukuran Lebesgue, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang

menyebut matematika adalah ilmu hitung atau ilmu al – hisab. Dalam urusan hitung menghitung ini, Allah adalah rajanya. Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti. Kita perhatikan ayat-ayat Al – Qur'an yang menjelaskan bahwa Allah sangat teliti.

Aktivitas memperhatikan, memikirkan, memahami, menggunakan akal yang banyak dianjurkan oleh Allah SWT dalam Al – Qur'an merupakan sebuah rangkaian metode penelitian ilmiah untuk menghasilkan teori-teori ilmiah untuk menghasilkan teori-teori ilmu pengetahuan, yang semuanya terangkum dalam 2 kegiatan yaitu membaca dan menulis, seperti halnya Allah memberikan Al – Kitab yang berarti tulisan dan Al – Qur'an yang berarti bacaan. Dan dengan Qalam Allah memproses penciptaan dan pengembangan alam semesta beserta isinya, baik yang di langit maupun di bumi, baik yang tampak maupun yang tidak, berjalan hingga detik ini dalam keteraturan dan ketentuan-Nya dalam bentuk ukuran, massa, kecepatan, dan seluruh perhitungan di jagad raya dengan ketelitian yang tidak banding dan tidak akan ada yang mampu untuk menandingi-Nya. Semuanya dalam satuan angka. Allah telah menciptakan segala sesuatu di alam semesta dengan Ukuran yang tepat, dan jika terlihat penyimpangan ini disebabkan karena ilmu pengetahuan masih terlalu dini untuk memahaminya.

### BAB III

### PEMBAHASAN

Bab ini membahas fungsi terukur pada integral Lebesgue untuk tiga jenis fungsi terukur yaitu fungsi terukur yang terbatas pada integral Lebesgue, fungsi terukur taknegatif pada integral Lebesgue dan fungsi terukur secara umum pada integral Lebesgue.

#### 3.1 Fungsi Terukur yang Terbatas pada Integral Lebesgue

##### Teorema 3.1.1

Diberikan  $f$  dan  $g$  adalah fungsi terbatas yang terukur pada himpunan  $E$  dari ukuran berhingga maka :

- f.  $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$  untuk semua bilangan real.
- g.  $\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$ .
- h. Jika  $f = g$  h. d maka  $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$
- i. Jika  $f \leq g$  h. d maka  $\int_E f \leq \int_E g$  dengan demikian

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|.$$

Bukti :

- a. Kasus 1 : Untuk  $\alpha = 0$

$$\text{Hal ini berarti } \int_E \alpha f = \alpha \int f = 0$$

Kasus 11 : Untuk setiap  $\alpha \geq 0$ .

Misalkan  $U(f) = \{\alpha\psi: \alpha\psi \text{ adalah fungsi sederhana di } E \text{ dan } \alpha\psi \geq \alpha f\}$

$\psi \leq f$  karena  $\alpha > 0$  diperoleh  $\alpha\psi \leq \alpha f$ .

$$\begin{aligned} \text{jadi } \int_E f &= \inf_{\alpha\psi \leq \alpha f} \int_E \alpha\psi \\ &= \alpha \inf_{\psi \leq f} \int_E \psi \\ &= \alpha \int_E \psi \end{aligned}$$

Kasus III : Untuk  $\alpha < 0$ , diambil sebarang fungsi sederhana  $\varphi \leq f$ .

Karena  $\alpha < 0$  diperoleh  $\alpha\varphi \geq \alpha f$

Jadi,

$$\begin{aligned} \int_E \alpha f &= \sup_{\alpha\varphi \geq \alpha f} \int_E \varphi. \\ &= \alpha \sup_{\alpha\varphi \geq \alpha f} \int_E \varphi. \\ &= \alpha \int_E f. \end{aligned}$$

jadi terbukti bahwa  $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$  untuk semua bilangan real.

$$(b) \int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$

Bukti :

Misalkan  $\psi_1$  dan  $\psi_2$  adalah fungsi sederhana sedemikian sehingga

$\psi_1 \geq f$  dan  $\psi_2 \geq g$  arti  $\psi_1 + \psi_2$  adalah fungsi-fungsi sederhana maka

$$\int_E (\psi_1 + \psi_2) = \int_E \psi_1 + \int_E \psi_2.$$

Sehingga

$$\int_E f + g \leq \int_E (\psi_1 + \psi_2) = \int_E \psi_1 + \int_E \psi_2.$$

Dengan demikian

$$\int_E f + g \leq \inf_{\psi_1} \int_E \psi_1 + \inf_{\psi_2} \int_E \psi_2 = \int_E f + \int_E g \dots \dots (i)$$

Misalkan  $\varphi_1$  dan  $\varphi_2$  adalah fungsi-fungsi sederhana sedemikian sehingga

$$\varphi_1 \leq f \text{ dan } \varphi_2 \leq g,$$

berarti  $\varphi_1 + \varphi_2 \leq f + g$  karena  $\varphi_1 + \varphi_2$  adalah fungsi-fungsi sederhana

maka

$$\int_E (\varphi_1 + \varphi_2) = \int_E \varphi_1 + \int_E \varphi_2.$$

Sehingga

$$\int_E f + g \geq \int_E (\varphi_1 + \varphi_2) = \int_E \varphi_1 + \int_E \varphi_2.$$

Dengan demikian

$$\int_E (f + g) \geq \sup_{\varphi_1 \leq f} \int_E \varphi_1 + \sup_{\varphi_2 \leq g} \int_E \varphi_2 = \int_E f + \int_E g \dots \dots (ii)$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh  $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$

Jadi terbukti,  $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$ .

(c). Jika  $f - g = 0$  hampir dimana-mana dan jika  $\psi \geq 0$  diperoleh

Karena  $f = g$  hampir dimana-mana berarti  $f - g = 0$  hampir dimana-mana

Misalkan  $\psi$  adalah fungsi sederhana sedemikian sehingga  $\psi \geq f - g$  hampir dimana-mana. Akibatnya  $\psi \geq 0$  hampir dimana

Karena  $\psi$  adalah fungsi sederhana maka  $\int_E \psi \geq 0$

Dengan demikian  $\int_E (f - g) \geq 0 \dots (i)$

Misalkan  $\varphi$  adalah fungsi sederhana sedemikian sehingga  $\varphi \leq f - g$  maka karena  $\varphi$  adalah fungsi sederhana maka  $\varphi \leq 0$  oleh karena itu diperoleh

$$\int_E \varphi \leq 0.$$

Dengan demikian  $\int_E (f - g) \leq 0 \dots (ii)$

Dari (i) dan (ii) diperoleh  $\int_E (f - g) = 0$ . Akibatnya  $\int_E f + \int_E g$

Jadi terbukti bahwa jika  $f = g$  hampir dimana-mana maka  $\int_E f \leq \int_E g$

d.  $f \leq g$  hampir dimana-mana pada  $E \Leftrightarrow f - g \leq 0$ . h.d pada  $E$

Karena  $f \leq g$  hampir dimana-mana berarti  $f - g \leq 0$  hampir dimana-mana

Misalkan  $\psi$  adalah fungsi sederhana sedemikian sehingga  $\psi \leq f - g \leq 0$  hampir dimana-mana. Akibatnya  $\psi \leq 0$  hampir dimana-mana

Karena  $\psi$  adalah fungsi sederhana maka  $\int_E \psi \leq 0$

Dengan demikian  $\int_E (f - g) \leq 0$ . Hal ini berarti  $\int_E f \leq \int_E g$

Jadi terbukti bahwa jika  $f \leq g$  hampir dimana-mana

maka  $\int_E f \leq \int_E g$

Teorema 3.1.3 :

Jika  $A, B$  dua himpunan terukur,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$  fungsi terukur

dan terbatas, maka  $\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$

Bukti :

Misalkan

$$A = \bigcup_{i=1}^m A_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^n B_j, \quad f|_A = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}, \quad f|_B = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{B_j}.$$

Karena  $A \cap B = \emptyset$ , maka  $A_i \cap B_j = \emptyset$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ),

Sehingga

Kita dapat menuliskan  $E$ ,  $f|_A$ ,  $f|_B$  dan  $f$  berturut-turut sebagai

$$E = \bigcup_{k=1}^{m+n} E_k, \quad f|_A = \sum_{k=1}^m c_k \chi_{E_k}, \quad f|_B = \sum_{k=m+1}^{m+n} c_k \chi_{E_k}, \quad f = \sum_{k=1}^{m+n} c_k \chi_{E_k}.$$

Dimana

$$E_k = \begin{cases} A_k, & k = 1, 2, \dots, m \\ B_{k-m}, & k = m+1, m+2, \dots, m+n \end{cases}$$

$$c_k = \begin{cases} a_k, & k = 1, 2, \dots, m \\ b_{k-m}, & k = m+1, m+2, \dots, m+n \end{cases}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i} = \sum_{k=1}^m c_k \chi_{E_k}, \quad \int_B f d\mu = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{E_j} \\ &= \sum_{k=m+1}^{m+n} c_k \chi_{E_k}. \end{aligned}$$

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{m+n} c_k \chi_{E_k}.$$

Jadi terbukti bahwa  $\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$ .

### 3.2 Fungsi Terukur Taknegatif pada Integral Lebesgue

#### Definisi 3.2.1

Misalkan  $f$  suatu fungsi terukur taknegatif maka didefinisikan pada himpunan  $E$  yang terukur maka

$$\int_E f = \sup_{h \leq f} \int_E h.$$

Dengan  $h$  adalah fungsi terukur yang terbatas sedemikian sehingga  $\mu(\{x \in E: h(x) \neq 0\})$  adalah hingga.

Contoh :

Jika  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  suatu fungsi terukur taknegatif dan  $\int_E f \, d\mu = 0$ .

Buktikan bahwa  $f = 0$  hampir di mana-mana

Penyelesaian :

Misalkan  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi terukur taknegatif maka ada suatu himpunan  $f \subseteq E$ ,

$\mu(f) = 0$ , sehingga  $f = 0$ ,  $x \in E - f$ .

Karena  $\mu(f) = 0$ , maka  $\int_f f \, d\mu = f = 0$ .

Definisi :

Misalkan  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi terukur taknegatif.

$\int_E f \, d\mu$  didefinisikan sebagai

$$\int_E f \, d\mu = \sup \left\{ \int_E \varphi \, d\mu \mid \varphi : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ terukur, terbatas, } \varphi \leq f \right\}$$

Fungsi  $f$  dikatakan integrabel (atau dapat dijumlahkan) pada  $E$ ,

jika  $\int_E f \, d\mu < \infty$ .

Teorema 3.2.1

Diberikan  $f$  dan  $g$  fungsi taknegatif yang terukur maka :

a.  $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu, \quad \alpha > 0.$

b.  $\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$

c.  $\int_E (f - g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu - \int_E g \, d\mu$

d. Jika  $f \leq g$  h. d maka  $\int_E f \leq \int_E g$

Bukti :

a. Berdasarkan definisi diperoleh

$$\int_E \alpha f \, d\mu = \sup_{\alpha h \leq \alpha f} \int_E \alpha h \, d\mu = \alpha \sup_{h \leq f} \int_E h \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu.$$

jadi terbukti bahwa  $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$

b. Dimana  $h$  dan  $k$  adalah terukur, terbatas dan tak negative, sehingga

$h \leq f$  dan  $k \leq g$ . misalkan

$$\mu(\{x \in E : h(x) \neq 0\}) < \infty$$

$$\mu(\{x \in: k(x) \neq 0\}) < \infty.$$

Misalkan  $h \leq f$  dan  $k \leq g$  maka

$$\begin{aligned}(h + k)(x) &= h(x) + k(x) \leq f(x) + g(x) \\ &= (f + g)(x)\end{aligned}$$

Hal ini berarti  $(h + k)(x) = (f + g)(x)$

$$\text{Sehingga } \int_E h + \int_E k = \int_E (h + k) \leq \int_E (f + g)$$

$$\text{Akibatnya } \sup_{h \leq f} \int_E h + \sup_{k \leq g} \int_E k \leq (f + g)$$

$$\text{Dengan demikian } \int_E f + \int_E g \leq \int_E (f + g) \dots \dots (i)$$

Misalkan  $\psi$  adalah fungsi terukur terbatas dan taknegatif,  $\psi \leq f + g$  didefinisikan

$$h(x) = \min(f(x), \psi(x))$$

$$k(x) = \psi(x) - h(x) \text{ maka } h(x) \leq f(x), k(x) \leq g(x)$$

Dalam hal ini dibagi menjadi dua kasus, yaitu:

Kasus 1. Untuk  $h(x) = \psi(x)$

$$\text{Hal ini berarti } k(x) = 0$$

Karena  $g$  adalah fungsi terukur tak negatif dan  $k(x) = 0$  maka

$$k(x) \leq g(x)$$

kasus 2. Untuk  $h(x) = f(x)$

$$\text{hal ini berarti } k(x) \leq g(x)$$

jadi terbukti bahwa  $k(x) \leq g(x)$

karena  $\psi(x) = h(x) = k(x)$  adalah fungsi terukur yang terbatas yang didefinisikan pada sebuah himpunan yang berukuran hingga dan terbukti bahwa  $h(x) \leq f(x)$  dan  $k(x) \leq g(x)$  maka

$$\sup_{\psi \leq f+g} \int_E \psi + \sup_{h \leq g} \int_E h + \sup_{k \leq f} \int_E k \leq \int_E f + \int_E g.$$

berdasarkan definisi 3.2.1,  $\sup_{\psi \leq f+g} \int_E \psi = \int_E (f+g)$

dengan demikian  $\int_E f + \int_E g \geq \int_E (f+g) \dots \dots (ii)$

dari (i) dan (ii) diperoleh  $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$

jadi terbukti bahwa  $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$ .

c. Karena  $f$  dan  $g$  adalah fungsi-fungsi terukur tak negatif.

Jika  $f > g$  maka fungsi  $(f - g)$  bisa dipastikan merupakan fungsi terukur tak negatif juga.

Berdasarkan teorema 3.2.1 (b),  $\int_E (f - g + g) = \int_E f - \int_E g + \int_E g$ .  
diketahui bahwa  $f$  terintegralkan pada  $E$ .

hal ini berarti  $\int_E f < \infty$  karena  $\int_E f < \infty$  dan

$\int_E f = \int_E (f - g) + \int_E g$  maka  $\int_E (f - g) < \infty$  dan

$\int_E g < \infty$  sehingga  $g$  juga terintegralkan pada  $E$ .

akibatnya  $\int_E (f - g) = \int_E f - \int_E g$ .

Jadi terbukti bahwa  $g$  terintegralkan pada  $E$  dan  $\int_E (f - g) = \int_E f - \int_E g$ .

a. Jika  $f \leq g$  maka  $\int_E f \leq \int_E g$

Bukti

Karena  $f \leq g$  berarti  $f - g \leq 0$

Misalkan  $\varphi$  adalah fungsi terukur yang terbatas yang didefinisikan pada himpunan  $E$  yang berukuran hingga dan  $\varphi \leq f - g \leq 0$ .

Akibatnya  $\varphi \leq 0$  karena  $\varphi$  adalah fungsi terukur yang terbatas maka  $\int_E \varphi \leq 0$

Berdasarkan definisi 3.2.1,

$$\sup_{\varphi \leq f-g} \int_E \varphi = \int_E (f - g).$$

Karena  $\int_E \varphi \leq 0$  dan  $\sup_{\varphi \leq f-g} \int_E \varphi = \int_E (f - g)$

berarti  $\int_E (f - g) \leq 0$

Akibatnya  $\int_E f \leq \int_E g$

Jadi terbukti bahwa jika  $f \leq g$  maka  $\int_E f \leq \int_E g$ .

Contoh :

Jika  $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$  fungsi terukur taknegatif,  $\alpha_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

Maka

$$\int_E (\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i) d\mu = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \int_E f_i d\mu).$$

Penyelesaian :

Misalkan  $\varphi$  suatu fungsi terukur terbatas,  $\varphi(x) \leq f(x)$ ,  $x \in E$  maka  $\alpha\varphi$  adalah fungsi terukur terbatas dengan  $\alpha\varphi(x) \leq \alpha f(x)$ ,  $x \in E$ .

$$\begin{aligned} \int_E \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \right) d\mu &= \sup \int_E \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right) d\mu \mid \varphi \leq f. \\ &= \sup \int_E \left( \sum_{i=1}^n \alpha_{1,\dots,n} \cdot \varphi_{1,\dots,n} \right) d\mu \mid \varphi \leq f. \\ &= \sup \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \int_E \varphi_i d\mu \mid \varphi \leq f. \right. \\ &= \alpha_i \sup \sum_{i=1}^n \left( \int_E f_i d\mu \right). \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i \int_E f_i d\mu \right). \end{aligned}$$

Teorema 3.2.2 :

Jika  $A, B$  dua himpunan terukur,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$  suatu fungsi terukur tak negatif, maka

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

Bukti :

Misalkan  $\varphi : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$  fungsi terukur terbatas,  $\varphi(x) \leq f(x)$ ,  $x \in A \cup B$ ,

Maka

$\varphi|_A$  dan  $\varphi|_B$  adalah fungsi terukur terbatas

$f|_A$  dan  $f|_B$  adalah fungsi terukur taknegatif

$$(\varphi|_A)(x) \leq (f|_A)(x), (\varphi|_B)(x) \leq (f|_B)(x)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \int_{A \cup B} f d\mu &= \sup \left\{ \int_{A \cup B} \varphi d\mu \mid \varphi \leq f \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_A \varphi|_A d\mu + \int_B \varphi|_B d\mu : \varphi \leq f \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup\left\{\int_A \varphi \, d\mu : \varphi|_A \leq f|_A + \sup_{E_j} \varphi|_{E_j} : \varphi|_A \leq f|_A\right\} \\
&= \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.
\end{aligned}$$

Contoh :

Jika  $E_i$  terukur ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $E_i \cap E_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ),  $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$  dan

$f : \bigcup_{i=1}^n E_i \rightarrow \mathbb{R}$  suatu fungsi terukur tak negative, maka

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \left(\int_{E_i} f \, d\mu\right).$$

Penyelesaian :

Misalkan  $\varphi : E_i \cap E_j \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) \leq f(x)$ ,  $x \in E_i \cap E_j$

Maka

$\varphi|_{E_i}$  dan  $\varphi|_{E_j}$  adalah fungsi terukur terbatas

$f|_{E_i}$  dan  $f|_{E_j}$  adalah fungsi terukur taknegatif

$$(\varphi|_{E_i})(x) \leq (f|_{E_i})(x), (\varphi|_{E_j})(x) \leq (f|_{E_j})(x)$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\int_{E_i \cap E_j} f \, d\mu &= \sup\left\{\int_{E_i \cap E_j} \varphi \, d\mu : \varphi \leq f\right\} = \sup\left\{\int_{E_i} \varphi|_{E_i} \, d\mu + \int_{E_j} \varphi|_{E_j} \, d\mu : \varphi \leq f\right\} \\
&= \sup\left\{\int_{E_i} \varphi|_{E_i} \, d\mu : \varphi|_{E_i} \leq f|_{E_i}\right\} + \sup\left\{\int_{E_j} \varphi|_{E_j} \, d\mu : \varphi|_{E_j} \leq f|_{E_j}\right\} \\
&= \int_{E_i} f \, d\mu + \int_{E_j} f \, d\mu. \\
&= \int_{E_i} f \, d\mu + \int_{E_j} f \, d\mu = \int_{\bigcup_{i=1}^n E_i} f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \left(\int_{E_i} f \, d\mu\right).
\end{aligned}$$

### 3.3 Fungsi Terukur Secara Umum pada Integral Lebesgue

Pad bagian ini akan dibahas integral Lebesgue dari suatu fungsi terukur sebarang pada suatu himpunan berukuran hingga, jadi fungsi dapat bernilai positif untuk  $x$  dan bernilai negative untuk  $x$  lainnya. Pendefinisian integral dalam hal ini dilakukan dengan menuliskan fungsi tersebut sebagai selisih dari dua fungsi terukur taknegative.

#### Definisi 3.3.1

Misalkan  $f^+ : \rightarrow \mathbb{R}$  yang didefinisikan oleh

$$f^+(x) = \max \{f(x), 0\}, x \in A.$$

Dinamakan bagian positif fungsi  $f$ ;

Fungsi  $f^- : \rightarrow \mathbb{R}$  yang didefinisikan oleh

$$f^-(x) = \max \{-f(x), 0\}, x \in A.$$

Dinamakan bagian negative fungsi  $f$ .

#### Teorema 3.3.4

Jika  $f$  dan  $g$  adalah fungsi terintegral pada  $E$  maka

- a. Fungsi dari  $\alpha f$  ( $\alpha$  hingga) terintegral pada  $E$ , dan

$$\int_E \alpha f = \alpha \int_E f.$$

- b. Fungsi  $f + g$  terintegral pada  $E$

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

- c. Jika  $f \leq g$  hampir dimana-mana maka  $\int_E f \leq \int_E g$ .

- d. Jika  $E_1$  dan  $E_2$  adalah himpunan terukur yang saling asing pada  $E$  maka

$$\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$$

Bukti :

- a. Dibedakan untuk  $\alpha \geq 0$  dan  $\alpha < 0$

Untuk  $\alpha \geq 0$

$$(\alpha f)^+ = \max \{ \alpha f(x), 0 \}$$

$$= \alpha \max \{ f(x), 0 \}$$

$$= (\alpha f)^+(x)$$

$$\text{Jadi } (\alpha f)^+ = \alpha f^+$$

$$(\alpha f)^-(x) = \max \{ -\alpha f(x), 0 \}$$

$$= \alpha \max \{ -f(x), 0 \}$$

$$= \alpha f^-(x)$$

$$\text{Jadi } (\alpha f)^- = \alpha f^-$$

$$\text{Jadi } \int_E \alpha f = \int_E (\alpha f)^+ - \int_E (\alpha f)^-$$

$$= \int_E (\alpha f)^+ - \int_E \alpha f^-$$

$$= \alpha \left\{ \int_E f^+ - \int_E f^- \right\}$$

$$= \alpha \int_E f \text{ untuk } \alpha < 0.$$

$$(\alpha f)^+(x) = \max \{ \alpha f(x), 0 \}$$

$$= -\alpha \max \{-f(x), 0\}$$

$$= -\alpha f^-(x)$$

Jadi

$$(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$$

$$(\alpha f)^-(x) = \max \{-\alpha f(x), 0\}$$

$$= -\alpha \max \{f(x), 0\}$$

$$= -\alpha f^+(x)$$

$$\text{Jadi, } (\alpha f)^- = -(\alpha f)^+$$

$$\text{Jadi } \int_E \alpha f = \int_E (\alpha f)^+ - \int_E (\alpha f)^-$$

$$= \int_E -\alpha f^- - \int_E -(\alpha f)^+$$

$$= -\alpha \int_E f^- + \alpha \int_E f^+$$

$$= \alpha \left( \int_E f^+ + \int_E f^- \right)$$

$$= \alpha \int_E f$$

b. Jika  $f_1$  dan  $f_2$  adalah fungsi taknegatif dengan  $f = f_1 - f_2$ ; maka

$$\int_E f = \int_E f_1 - \int_E f_2.$$

Diketahui bahwa  $f = f^+ - f^-$  sehingga

$$f^+ - f^- = f_1 - f_2.$$

$$\Rightarrow f^+ + f_2 = f_1 + f^-$$

Dapat ditarik kesimpulan

$$\int_E f^+ + \int_E f_2 = \int_E f_1 + \int_E f^-.$$

diperoleh

$$\int_E f = \int_E f^+ + \int_E f_2 = \int_E f_1 + \int_E f^-$$

Jika  $f$  dan  $g$  terintegral maka  $f^+ + g^+$  dan

$f^- + g^-$  juga terintegral, dan  $f + g = (f^+ + g^+) - f^- + g^-$ .

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} \int_E (f + g) &= \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^- \\ &= \int_E f + \int_E g \end{aligned}$$

$$c. \quad f \leq g \Leftrightarrow f^+ - f^- \leq g^+ - g^-$$

$$\Leftrightarrow f^+ + g^- \leq g^+ + f^-$$

Kedua ruas masing-masing merupakan jumlah fungsi-fungsi negative maka

$$\int_E (f^+ + g^-) \leq \int_E (g^+ + f^-)$$

$$\int_E f^+ + \int_E g^- \leq \int_E g^+ + \int_E f^-$$

Atau

$$\int_E f^+ + \int_E f^- \leq \int_E g^+ + \int_E g^-$$

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

Diketahui bahwa  $g$  terintegralkan pada himpunan  $E$ , berarti  $\int_E g < \infty$

Akibatnya  $\int_E f^+ < \infty$  dan  $\int_E f^- < \infty$ .

Berdasarkan definisi 3.3.2,  $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$

Sehingga  $\int_E f < \infty$ .

Berdasarkan definisi 3.2.2,

$f$  terintegralkan pada himpunan  $E$  dan fungsi  $g$  terintegralkan pada himpunan  $E$  sedemikian sehingga  $|f| \leq g$  maka  $f$  terintegralkan pada himpunan  $E$ .

$$d. E = E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2 = \emptyset \text{ dan } f = f^+ - f^-$$

$$\Rightarrow f \cdot \chi_{E_i} = f^+ \cdot \chi_{E_i} - f^- \cdot \chi_{E_i} (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

$$= \int_{E_1 \cup E_2} f^+ - \int_{E_1 \cup E_2} f^-.$$

$$= \int_{E_1} f^+ \cdot \chi_{E_1} + \int_{E_2} f^+ \cdot \chi_{E_2} - (\int_{E_1} f^- \cdot \chi_{E_1} + \int_{E_2} f^- \cdot \chi_{E_2})$$

$$= \int_{E_1} f^+ \cdot \chi_{E_1} + \int_{E_2} f^+ \cdot \chi_{E_2} - \int_{E_1} f^- \cdot \chi_{E_1} + \int_{E_2} f^- \cdot \chi_{E_2}.$$

$$= (\int_{E_1} f^+ \cdot \chi_{E_1} - \int_{E_1} f^- \cdot \chi_{E_1}) - (\int_{E_2} f^+ \cdot \chi_{E_2} - \int_{E_2} f^- \cdot \chi_{E_2})$$

$$= (\int_{E_1} f^+ - \int_{E_1} f^-) - (\int_{E_2} f^+ - \int_{E_2} f^-)$$

$$= \int_{E_1} f + \int_{E_2} f.$$

Jadi terbukti  $\int_E f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$

Contoh :

Jika  $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$  terintegral pada  $E$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$\int_E (\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i) d\mu = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \int_E f_i d\mu).$$

Penyelesaian :

a. Dibedakan untuk  $\alpha \geq 0$  dan  $\alpha < 0$

Untuk  $\alpha \geq 0$

$$(\alpha f)^+ = \max \{ \alpha f(x), 0 \}$$

$$= \alpha \max \{ f(x), 0 \}$$

$$= (\alpha f)^+(x)$$

$$\text{Jadi } (\alpha f)^+ = \alpha f^+$$

$$(\alpha f)^-(x) = \max \{ -\alpha f(x), 0 \}$$

$$= \alpha \max \{ -f(x), 0 \}$$

$$= \alpha f^-(x)$$

$$\text{Jadi } (\alpha f)^- = \alpha f^-(x)$$

$$\text{Jadi } \int_E (\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i) = \int_E (\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i)^+ - \int_E (\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i)^-$$

$$= \int_E (\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i)^+ - \int_E (\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i)^-$$

$$= \alpha \{ \int_E (\sum_{i=1}^n f_i)^+ - \int_E (\sum_{i=1}^n f_i)^- \} = \alpha \int_E \sum_{i=1}^n f_i \text{ untuk } \alpha < 0.$$

Teorema 3.3.5 :

Jika  $A, B$  dua himpunan terukur,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  integrabel pada  $A$ ,  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  integrabel pada  $B$ .

Bukti :

Karena  $f^+$  dan  $f^-$  adalah dua fungsi terukur taknegatife, maka

$$\begin{aligned} \text{maka } \int_{A \cup B} f \, d\mu &= \int_{A \cup B} (f^+ - f^-) \, d\mu = \int_{A \cup B} f^+ \, d\mu - \int_{A \cup B} f^- \, d\mu \\ &= \int_A f^+ \, d\mu + \int_B f^+ \, d\mu - \int_A f^- \, d\mu - \int_B f^- \, d\mu \\ &= (\int_A f^+ \, d\mu - \int_B f^- \, d\mu) + (\int_A f^+ \, d\mu - \int_B f^- \, d\mu) \\ &= (\int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu). \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa  $\int_{A \cup B} f \, d\mu = (\int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu)$ .

Teorema 3.3.1

suatu fungsi  $f$  terintegralkan pada himpunan  $E$  jika dan hanya jika  $|f|$  terintegralkan pada himpunan  $E$ .

Bukti

Diketahui bahwa  $f$  terintegralkan pada himpunan  $E$  maka berdasarkan definisi

3.2.2,  $\int_E f < \infty$ . Berdasarkan definisi 3.3.2,  $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$ .

Karena  $\int_E f < \infty$  maka  $\int_E f^+ < \infty$  dan  $\int_E f^- < \infty$

Sehingga  $f^+$  dan  $f^-$  terintegralkan pada E

Berdasarkan definisi 3.3.1,  $|f| = f^+ + f^-$

Sehingga berdasarkan 3.2.1, (b),  $\int_E |f| = \int_E f^+ + \int_E f^-$

Karena  $\int_E f^+ < \infty$  dan  $\int_E f^- < \infty$  berarti  $\int_E |f| < \infty$

Dengan demikian, berdasarkan definisi 3.2.2,  $|f|$  terintegralkan pada himpunan E sebaliknya, diketahui bahwa  $|f|$  terintegralkan pada himpunan E maka berdasarkan definisi 3.2.2,  $\int_E |f| < \infty$ .

Karena  $\int_E |f| = \int_E f^+ + \int_E f^-$  berarti  $\int_E f^+ < \infty$  dan  $\int_E f^- < \infty$ .

Berdasarkan definisi 3.3.2,  $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$ .

Hal ini berarti  $\int_E f < \infty$

Dengan demikian, berdasarkan definisi 3.2.2,  $f$  terintegralkan pada himpunan E.

Jadi terbukti bahwa suatu fungsi  $f$  terintegralkan pada himpunan E jika dan hanya jika  $|f|$  terintegralkan pada himpunan E.

### 3.4 Hubungan Antara Integral Lebesgue Dengan Integral Riemann

Teorema berikut diperlihatkan bahwa integral Lebesgue merupakan perluasan integral Riemann.

Teorema 2.8.1 :

Jika  $f$  adalah fungsi terbatas pada  $[a, b]$ . jika  $f$  terintegral Lebesgue pada

$[a, b]$  dan berlakulah  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f d\mu$

Bukti :

Jika  $f$  terintegral Riemann pada  $[a, b]$  diperoleh

$$\inf_{\psi_1 \geq f} \int_a^b \psi_1(x) dx = \sup_{\varphi_1 \leq f} \int_a^b \varphi_1(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Dimana  $\varphi_1$  dan  $\psi_1$  fungsi tangga pada  $[a, b]$  dan setiap fungsi tangga adalah fungsi sederhana. Oleh karena itu

$$\sup_{\varphi_1} \int_a^b \varphi_1(x) dx \leq \sup_{\varphi} \int_a^b \varphi(x) dx,$$

$$\inf_{\psi_1 \geq f} \int_a^b \psi_1(x) dx \geq \inf_{\psi \geq f} \int_a^b \psi(x) dx.$$

$\varphi$  dan  $\psi$  adalah fungsi sederhana pada  $[a, b]$  sehingga diperoleh relasi

$$\int_a^b f(x) dx \leq \sup_{\varphi} \int_a^b \varphi(x) dx \leq \inf_{\psi \geq f} \int_a^b \psi(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx,$$

$$\sup_{\varphi} \int_a^b \varphi(x) dx = \inf_{\psi \geq f} \int_a^b \psi(x) dx = \int_a^b f(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f d\mu.$$

Contoh 2.8.1 :

Diketahui :

$$f(x) = \begin{cases} 4, & \text{jika } x \text{ rasional} \\ 5, & \text{jika } x \text{ irrasional} \end{cases}$$

carilah apakah fungsi  $f$

- a) terintegral Riemann pada  $[0, 1]$ ,
- b) terintegral Lebesgue pada  $[0, 1]$ ,

penyelesaian :

- a) misalkan  $P$  partisi sebarang dari  $[0, 1]$ , maka

$$m_i = 4, M_i = 5 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Jadi

$$\int_0^1 f(x) dx = 4, \int_0^1 f(x) dx = 5$$

Dan ini berarti fungsi tak terintegral Riemann pada  $[0, 1]$

Jadi  $f \notin \mathcal{R}$

- b) fungsi  $f$  adalah suatu fungsi sederhana dengan

$$E_1 = \mathbb{Q} \cap [0, 1], E_2 = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0, 1], a_1 = 4, a_2 = 5$$

jadi

$$\int_{[0,1]} f d\mu = a_1 \mu(E_1) + a_2 \mu(E_2) = 4.0 + 5.1 = 5$$

Ini berarti  $f \in \mathcal{L} [0, 1]$ .

Proposisi berikut ini memperlihatkan bahwa integral Lebesgue merupakan generalisasi integral Riemann.

#### Proposisi 2.8.1

Diberikan  $f$  suatu fungsi terbatas pada interval  $[a, b]$ . Jika  $f$  terintegral Riemann, maka  $R \int_a^b f = \int_a^b f$  dan  $f$  fungsi terukur.

Bukti :

Karena setiap fungsi tangga adalah fungsi sederhana, maka diperoleh pertidaksamaan  $R \int_a^b f \, dx \leq \sup \int_a^b \varphi \, dx \leq \inf \int_a^b \psi \, dx \leq R \int_a^b f \, dx$ .

Tetapi  $f$  terintegral Riemann sehingga  $\sup \int_a^b \varphi \, dx = \inf \int_a^b \psi \, dx$ ,

### 3.5 Kajian Antara Al-Qur'an dengan Integral Lebesgue

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan dan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007: 79).

Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat Al Furqan ayat 2 sebagai berikut :

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ  
فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya : "Yang Kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan-Nya, dan dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya." (QS: Al-furqan: 2).

Semua yang ada di alam ini, ada ukurannya, ada hitungannya, ada rumusnya atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun tetapi mereka hanya menemukan rumus atau persamaan tersebut. Apabila dalam kehidupan terdapat suatu permasalahan, manusia harus berusaha untuk menemukan solusinya.

Oleh karena itu sangat penting bagi manusia untuk belajar matematika karena matematika memang ada dalam Al-Qur'an, misalnya tentang penjumlahan, pengurangan, persamaan, ilmu faraid, dan lain sebagainya. Dengan belajar matematika, selain untuk menumbuhkan cara berpikir secara sistematis, logis dan analisis, kritis, dan konsisten, juga diharapkan dapat menumbuhkan sikap teliti. Dalam hal ini, Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat Al-Mu'minuun ayat 112-114 sebagai berikut :

قُلْ كَمْ لَبِثْتُمْ فِي الْأَرْضِ عَدَدَ سِنِينَ ﴿١١٢﴾  
قَالُوا لَبِثْنَا يَوْمًا أَوْ بَعْضَ يَوْمٍ فَسَلِ الْعَادِينَ ﴿١١٣﴾  
قُلْ إِنْ لَبِثْتُمْ إِلَّا قَلِيلًا لَّوْ أَنْتُمْ كُنْتُمْ تَعْلَمُونَ ﴿١١٤﴾

Artinya : “Allah bertanya: “ Barapa tahunkah lamanya kamu tinggal di bumi? Mereka menjawab : “Kami tinggal (di bumi) sehari atau setengah hari, maka tanyakanlah kepada orang-orang yang menghitung. “Allah berfirman: “Kamu tidak tinggal (di bumi) melainkan sebentar saja, kalau kamu sesungguhnya mengetahui (Qs:Al-Mu’minun 112-114).

Matematika disebut sebagai ilmu hitung karena pada hakikatnya matematika berkaitan dengan bilangan-bilangan dan masalah hitung-menghitung. Mempelajari bilangan dan angka-angka mendapat dorongan kuat dari Al-Qur’an yang membuka cakrawala baru dalam bidang matematika.

Matematika pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika ada yang menyebutnya ilmu hitung atau ilmu Al-hisab. Dalam urusan hitung-menghitung, Allah berfirman dalam Al-Qur’an surat Al-Baqarah ayat 202 sebagai berikut :

أُولَٰئِكَ لَهُمْ نَصِيبٌ مِّمَّا كَسَبُوا ۖ وَاللَّهُ سَرِيعُ الْحِسَابِ ﴿٢٠٢﴾

Artinya : “ Mereka itulah orang-orang yang mendapat bagian dari apa yang mereka usahakan; dan Allah cepat perhitungannya.

Ditegaskan juga dalam surat Ali Imran ayat 199 sebagai berikut :

وَإِنَّ مِنْ أَهْلِ الْكِتَابِ لَمَنْ يُؤْمِنُ بِاللَّهِ وَمَا أُنْزِلَ إِلَيْكُمْ وَمَا أُنْزِلَ إِلَيْهِمْ خَشَعِينَ لِلَّهِ لَا يَشْتَرُونَ بِعَايَتِ اللَّهِ ثَمَنًا قَلِيلًا ۖ أُولَٰئِكَ لَهُمْ أَجْرُهُمْ عِنْدَ رَبِّهِمْ ۖ إِنَّ اللَّهَ سَرِيعُ الْحِسَابِ ﴿١٩٩﴾

Artinya : “Dan sesungguhnya di antara ahli kitab, ada orang yang beriman kepada Allah dan kepada apa yang diturunkan kepada kamu dan yang

diturunkan kepada mereka, sedang mereka berendah hati kepada Allah, dan mereka tidak menukarkan ayat-ayat Allah dengan harga yang sedikit. Mereka memperoleh pahala di sisi Tuhan-Nya. Sesungguhnya Allah amat cepat perhitungannya (Qs: Ali Imran, 199).

Belajar matematika, yang merupakan alat (*tools*) bagi ilmu sains lainnya, juga semakin dapat mendekatkan diri kepada Allah. Karena Allah adalah salah satunya dzat yang Maha cepat dalam perhitungannya.

Allah maha matematis, bukti bahwa Allah maha matematis terdapat begitu jelas dalam alam semesta, dalam pemberian pahala dan dalam masalah shalat. Dalam Al-Qur'an menjelaskan tentang perkalian dan perhitungan bilangan dalam berbagai peristiwa dan dalam konteks. Dalam urusan perhitungan Allah adalah rajanya, Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Integral Lebesgue adalah integral yang dikembangkan dari konsep teori ukuran Lebesgue. Integral Lebesgue pada fungsi real dibedakan menjadi tiga macam yaitu : integral Lebesgue pada fungsi terbatas, integral Lebesgue pada fungsi taknegatif, dan integral Lebesgue pada fungsi terukur sebarang.

Integral Lebesgue mempunyai sifat-sifat antara lain :

##### (1). Fungsi Terukur yang Terbatas pada Integral Lebesgue

j.  $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$  untuk semua bilangan real.

k.  $\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$ .

l. Jika  $f = g$  h.d maka  $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$

m. Jika  $f \leq g$  h. d maka  $\int_E f \leq \int_E g$  dengan demikian  $\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$ .

##### (2). Fungsi Terukur Taknegatif pada Integral Lebesgue

e.  $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu, \quad \alpha > 0.$

f.  $\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$

g.  $\int_E (f - g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu - \int_E g \, d\mu$

h. Jika  $f \leq g$  h. d maka  $\int_E f \leq \int_E g$

##### (3). Fungsi Terukur Secara Umum pada Integral Lebesgue

- a. Fungsi dari  $\alpha f$  ( $\alpha$  hingga) terintegral pada  $E$ , dan  $\int_E \alpha f = \alpha \int_E f$ .
- b. Fungsi  $f + g$  terintegral pada  $E$  dan  $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$ .
- c. Jika  $f \leq g$  hampir dimana-mana maka  $\int_E f \leq \int_E g$ .
- d. Jika  $E_1$  dan  $E_2$  adalah  $\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$ .

#### 4.2 Saran

Skripsi ini merupakan tulisan tentang integral Lebesgue di  $\mathbb{R}^1$  kepada para pembaca yang menginginkan pembahasan lebih lanjut dapat meneruskan pembahasan integral Lebesgue di  $\mathbb{R}^n$ , fungsi terukur yang tak terbatas pada integral Lebesgue, fungsi terukur negatif pada integral Lebesgue. Pada hasil penelitian dalam skripsi yang dilakukan diharapkan dapat menginformasikan dan memberikan ilmu, wawasan, serta pengetahuan kepada lembaga akan pentingnya masalah integral Lebesgue, Sehingga lembaga dapat memberikan bahasan tersebut di dalam bangku perkuliahan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.
- Bartle, Robert dan R, Donald Sherbert. 1992. *Introduction to Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Bartle, Robert. G. 1976. *The Element of Real Analysis*. New York : John Wiley & Sons, Inc.
- Jones, Franks. 1993. *Lebesgue Integration on Euclidean Space*. London: Jones and Bartlett Publishers.
- Hawkins, Thomas. 1970. *Lebesgue Theory of Integration*. The University of Wisconsin Press: London.
- Hutahaean, E. 1999. *Fungsi Riil*. ITB: Bandung.
- Leithold, Louis. 1991. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*. Erlangga : Jakarta.
- Lipschutz, Seymour dan Silaban, Pantur. 1995. *Teori Himpunan*. Erlangga: Jakarta.
- Murray, R, Spiengel. 1992. *Theory and Problem of Real Variables*.. McGraw-Hill, Inc. American.
- M. E. Munroe. 1959. *Introduction to Measure and Integration*. Addison- Wasley Publishing Company Inc. United State of America.
- Peng, Yee Lee dan Vyborny. 2000. *Integral: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock*. Cambridge University Press: USA.
- Purcell, Edwin. J & Varberg, Dale. 1984. *Kalkulus dan Geometri Analitis*, terjemahan oleh Nyoman Susila, Bana Kartasmita & Rawuh Edisi Keempat. Jakarta: Erlangga.

Paul R, halmos. 1965. *Measure Theory*. D Van Nostrand Company, INC : Canada

Rahman, Hairur. 2008. Pengantar Analisis Real.

Russel, A Gordon. 1994. *the Integral of Lebesgue*, Denjoy, perron, and Henstock.  
American Mathematical society. American.

Vladimir I. bogacher. 2000. *Measure Theory*. Springer: Moscow.

Walter, Rudin. 1987. *Mathematical Analysis*. mcGraw-Hill Publishing Co. ltd:  
New Delhi.

Wheeden, Richard dan Zygmund, Antoni. 1977. *Measure and Integral An  
Introduction to Real Analysis*. Mancel Dekker: New York.