APLIKASI MATRIKS POHON
UNTUK MENENTUKAN BANYAKNYA POHON RENTANGAN
PADA GRAF KOMPLIT K_n

SKRIPSI

Oleh:

UMAR ROJANA
NIM. 05510018

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM

MALANG

2010

APLIKASI MATRIKS POHON
UNTUK MENENTUKAN BANYAKNYA POHON RENTANGAN
PADA GRAF KOMPLIT K_n

SKRIPSI

Diajukan Kepada:

Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

UMAR ROJANA
NIM. 05510018

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2010

SURAT PERNYATAAN

KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Umar Rojana

NIM : 05510018

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Aplikasi Matriks Pohon untuk menentukan Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Komplit (K_n)

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Februari 2010

Yang membuat pernyataan,

Umar Rojana

NIM. 05510018

APLIKASI MATRIKS POHON

UNTUK MENENTUKAN BANYAKNYA POHON RENTANGAN

PADA GRAF KOMPLIT (K_n)

SKRIPSI

Oleh:

UMAR ROJANA
NIM. 05510018

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji :

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Drs. H. Turmudi, M.Si	**Dr. Munirul Abidin, M.Ag**
NIP. 19571005 198203 1 006	**NIP. 19720420 200212 1 003**

Tanggal, 19 Februari 2010

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

APLIKASI MATRIKS POHON
UNTUK MENENTUKAN BANYAKNYA POHON RENTANGAN
PADA GRAF KOMPLIT (K_n)

SKRIPSI

Oleh:

Umar Rojana
NIM. 05510048

Telah dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 10 April 2010

Susunan Dewan Penguji			Tanda Tangan
1. **Penguji Utama**	:	**Wahyu H. Irawan, M.Pd** **NIP. 19681103 199203 1 002**	( )
2. **Ketua**	:	**Sri Harini, M.Si** **NIP. 19731014 200112 002**	( )
3. **Sekretaris**	:	**Drs. Turmudi, M.Si** **NIP. 19571005 198203 1 006**	( )
4. **Anggota**	:	**Dr. Munirul Abidin, M.Ag** **NIP. 19720420 200212 1 003**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

MOTTO

JANGAN BERHENTI, TITIK!

PERSEMBAHAN

Karya sederhana ini teruntuk :

Yang tercinta Ayahanda, Ibunda dan Keluargaku:

Bapak Raisa dan Ibu Umiyani, Aku bersyukur memiliki Orang Tua kalian. Kalian Inspirator Terbaikku, Motivator Terampuhku, Ayah dan Ibu Terbaik di seluruh Dunia. Terimakasih, karena kalian dan untuk kalian aku bertahan. Ang Orin dan Istri, Mbak Umi dan suami, Mas Bandi dan Istri, setiap kalian memiliki peran dan tempat tersendiri dalam hati & hidupku. Adik-Adiku tersayang Ida dan Musiri, milikilah mimpi, sekaligus keyakinan bahwa kalian bisa meraihnya. Karena tanpa mimpi, orang-orang seperti kita akan terlupakan.

Tak lupa prajurit-prajurit kecilku, Jeri, Aziz, Amar, Ato' dan Zahwa, Ayo! Langkahi pamanmu dengan mimpi-mimpi kalian yang lebih hebat dimasa yang akan datang!

Juga calon keluargaku:

Rara Radida (Rojana) ^_^, Terimakasih! Satu mimpi telah kuraih, selanjutnya bersamamu aku ingin meraih mimpi-mimpi lain, mimpi-mimpi yang lebih besar dan menakjubkan! Semoga kau takkan lelah menemaniku...

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillah segala puji dan syukur hanya ditujukan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan nikmat terbaik berupa Iman dan Islam, juga yang selalu melimpahkan rahmat, taufik, hidayah serta inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Aplikasi Matriks Pohon Untuk Menentukan Banyaknya Pohon Rentangan Pada Graf Komplit (K_n)" sebagai salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan S1 dan memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si).

Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada kekasih hati baginda Rasulullah Muhammad SAW, yang telah menunjukkan jalan kebenaran dan keselamatan, yakni ajaran Islam yang menjadi rahmat bagi seluruh umat manusia dan sekalian alam.

Selama penulisan skripsi ini penulis telah banyak mendapat bimbingan, masukan, motivasi dan arahan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan panghargaan setinggi-tingginya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU, DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang .

3. Bapak Abdussakir, M.Pd selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Saintek Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Bapak Drs. H. Turmudi M.Si sebagai dosen pembimbing Matematika yang telah banyak memberikan tuntunan dan arahan sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
5. Bapak Dr. Munirul Abidin, M.Ag selaku Dosen Pembimbing Integrasi Sains Matematika dan Islam yang telah banyak memberi arahan kepada penulis.
6. Evawati Alisah, M.Pd sebagai dosen wali matematika penulis yang banyak memberikan pengalaman dan bimbingan belajar selama penulis studi di jurusan Matematika beserta seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi, khususnya dosen jurusan Matematika yang telah mendidik dan memberikan ilmu yang tak ternilai harganya.
7. Kedua orang tua penulis Ayahanda Raisa dan Bunda Umi Yani yang dengan restunya, doanya, harapan-harapan serta pengorbanannya menjadikan penulis untuk tidak menyerah pada keadaan dalam keadaan bagaimanapun, termasuk dalam penyelesaian Skripsi ini.
8. Segenap teman-teman, mas dan mbak, adik-adik di jurusan matematika, khususnya matematika 2005, khsusunya lagi Ima, Navi, Haris, Asis, Ana dan Dzawin atas segala bantuannya dan tetap memotivasi sampai detik-detik terakhir. Dan semua teman-teman Matematika 2005, kalianlah lingkungan terakhir yang turut membentuk kepribadianku.
9. Semua pihak yang terlibat baik secara langsung maupun tidak langsung pada proses terselesaikannya penulisan skripsi ini.

Semoga Allah SWT membalas kebaikan semuanya. Amin.

Dengan segala kerendahan hati penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga kritik dan saran sangat diperlukan demi tercapainya hasil yang lebih baik.

Harapan penulis semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khsusunya dan bagi pembaca pada umumnya. Amin.

Malang, Februari 2010

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Rojana, Umar. 2010. **Aplkikasi Matriks Pohon untuk menetukan banyaknya pohon rentangan pada graf komplit (K_n).** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Drs. H. Turmudi, M.Si. (2) Dr. Munirul Abidin, M.Ag.

Kata kunci : graf komplit, matriks derajat, matriks adjacency, matriks pohon, kofaktor dan pohon rentangan

Salah satu permasalahan dalam topik graf adalah menentukan banyaknya pohon rentangan dari suatu graf. Pohon rentangan adalah subgraf dari graf G yang mengandung semua titik dari G dan merupakan suatu pohon. Untuk menentukan pohon rentangan dari suatu graf terhubung, biasanya dilakukan dengan cara memotong/ memutus sisi-sisi sehingga graf tersebut tidak lagi mengandung sikel.

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan bentuk umum banyaknya pohon rentangan pada graf komplit (K_n) dengan menggunakan aplikasi matriks pohon

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode penelitian pustaka (*library research*) dengan langkah-langkah penelitian sebagai berikut: (1) menggambar graf (Kn) dimana $n \geq 2$ dan $n \in$ **N;** (2) Menentukan matriks $D(K_n) - A(K_n)$ yaitu matriks derajat graf komplit dikurangi matriks adjacency graf komplit; (3) Menentukan kofaktor dari matriks $D(K_n) - A(K_n)$; (4) Melihat pola banyaknya pohon rentangan graf komplit (K_n). Kemudian merumuskan teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh bahwa bentuk umum banyaknya pohon rentangan pada graf komplit (K_n) dengan $n \geq 2$ dan $n \in$ **N** adalah

$$\text{Pohon rentangan } (K_n) = n^{n-2}$$

Penggunaan matriks pohon untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf komplit (K_n) ini masih terbuka bagi peneliti lain untuk digunakan pada jenis-jenis graf yang lain seperti graf lintasan, graf sikel dan lain sebagainya.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al Qur'an sebagai wahyu Allah yang dijadikan panduan utama didalam menjalankan ajaran Islam tidak hanya memuat aturan-aturan peribadatan bagi umat-Nya, tetapi juga memuat pengetahuan baik dimasa yang lalu maupun masa akan datang, termasuk didalamnya adalah tentang Ilmu pengetahun.

Al Qur'an adalah kitab petunjuk sekaligus sumber ilmu. Segala ilmu yang ada baik yang sudah dikenal maupun yang akan diketahui oleh manusia telah diberikan rujukannya dalam Al Qur'an, namun semua ilmu itu hanyalah sebagian kecil dari ilmu Allah. Hal itu dikarenakan pengetahuan Allah meliputi segala sesuatu (QS. Thaha: 98). Al Qur'an menggambarkan betapa luasnya Ilmu Allah dalam Surat Al-Kahfi: 109

□□ □□□□ □□□ □□□□□□□□ □□□□□□ □□»□□□=□□□□□ □□□ı□□ □□□□□□□□□
□□□□□□□□ □□□□□ □□ □□□□□□□ □□»□□□=□ □□□ı□□ □□□□□□ □□÷¥□□
□□□÷□□□□ □□□□□□ □□□□□

109. *Katakanlah: Sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun Kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)".*

Kewajiban menuntut ilmu/ mempelajari ilmu pengetahuan dalam Islam telah jelas diperintahkan dalam Al Qur'an maupun sunnah. Karena dengan mempelajari ilmu pengetahuan diharapkan seorang muslim akan lebih meyakini kekuasaan Allah sehingga bisa mempertebal keimanan kepada-Nya, dimana ilmu pengetahuan itu tidak hanya digali dari ayat-ayat qouliyah yang tertulis di dalam Al Qur'an, tetapi juga ayat-ayat kauniyah yang terhampar di alam semesta.

Matematika sebagai salah satu disiplin Ilmu sering disebut sebagai Ibu sekaligus pelayan ilmu pengetahuan, hal itu karena matematika merupakan salah satu ilmu pengetahuan dasar yang merupakan sumber dari ilmu pengetahuan terapan. Sedangkan dikatakan sebagai pelayan karena matematika juga sering dipakai untuk membantu mempermudah penyelesaian permasalahan yang ada di dalam ilmu-ilmu lainnya.

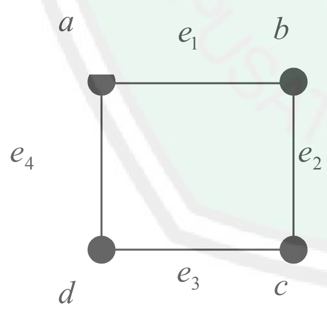
Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang masih menarik untuk dibahas karena teori-teorinya masih aplikatif sampai saat ini dan dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisis model atau rumusan, teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan berbagai permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998:1).

Salah satu cabang dari teori graf adalah tentang pohon. Konsep pohon merupakan konsep yang paling penting karena konsep ini mampu mendukung penerapan graf dalam berbagai bidang ilmu. Kirchoff (1824-1887) mengembangkan teori pohon untuk diterapkan dalam jaringan listrik. Selanjutnya Arthur Cayley (1821-1895) mengembangkan graf jenis ini sewaktu mencacah isomer hoidrokarbon jenuh C_nH_{2n+2}. Sekarang pohon digunakan luas dalam linguistik dan ilmu komputer (Heri Sutarno, 2005:104).

Pohon adalah graf terhubung yang asiklik (tidak memuat sikel). Sebuah pohon selalu terdiri dari *n* titik dan *n-1* sisi. Pohon yang merupakan subgraf dari suatu graf terhubung G, yang memuat seluruh titik dari G disebut pohon rentangan (*spanning tree*) (Rasyid, 2006:18).

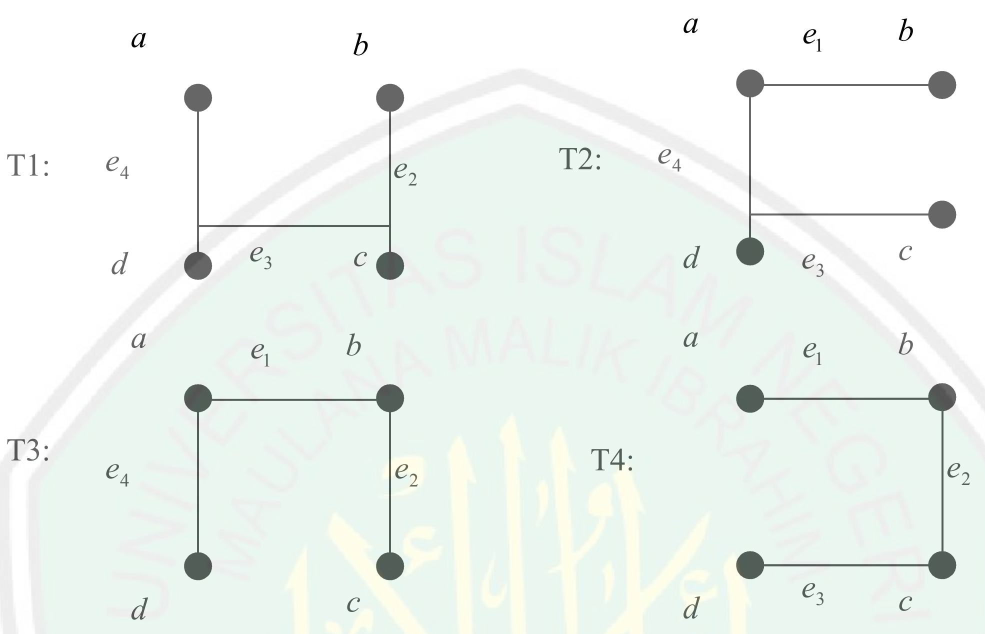
Menentukan banyaknya pohon rentangan dari suatu graf merupakan masalah tersendiri dalam teori graf. Selama ini dikenal dua algoritma atau algoritma solin (metode memotong) dan algoritma kruskal (motode membangun). Namun kedua algoritma tersebut biasa digunakan untuk mendapatkan pohon rentangan minimal yaitu pohon rentangan dari suatu graf yang memiliki bobot, dimana pohon rentangan minimal dari graf tersebut adalah pohon rentangan dengan jumlah bobot terkecil.

Untuk menentukan pohon rentangan dari suatu graf terhubung, biasanya dilakukan dengan cara memotong/ memutus sisi-sisi sehingga graf tersebut tidak lagi mengandung sikel. Misal graf G dengan $V(G) = \{a, b, c, d\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$



Gambar 1.1 Graf G

Maka untuk membentuk spanning tree dari graf G tersebut adalah dengan cara menghapus salah satu atau lebih sisi sehingga graf G tidak lagi memuat sikel,



Gambar 1.2 banyaknya Pohon Rentangandari Graf G

Pada Gambar 1.2 T1 dibentuk dengan menghapus sisi e_1, T2 dibentuk dengan menghapus sisi e_2, T3 dibentuk dengan menghapus sisi e_3, T4 dibentuk dengan menghapus sisi e_4

Dari contoh tersebut, dapat dilihat bahwa banyaknya pohon rentangan (*spanning tree*) yang dibentuk dari graf terhubung G adalah sebanyak 4 pohon rentangan.

Menururt penulis, penghitungan dengan cara tersebut untuk menentukan banyaknya pohon rentangan dari suatu graf memerlukan waktu yang lama, misalnya untuk meentukan banyaknya pohon rentangan dari graf komplit dengan K_{10}, K_{20}, atau bahkan K_{100}, sehingga perlu digunakan cara atau rumusan baku untuk menentukan banyaknya pohon rentangan dari suatu graf.

Ada beberapa masalah dalam teori graf yang bisa lebih mudah diselesaikan apabila graf yang dihadapi direpresentasikan dalam bentuk matriks. Bentuk graf yang dinyatakan dalam suatu matriks kemudian diselesaikan dengan metode-metode yang berlaku pada matriks.

Maka berdasarkan uraian tersebut penulis bermaksud mengajukan penelitian untuk skripsi ini dengan judul "**Aplikasi Matriks-Pohon untuk menentukan banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Komplit** (K_n)"

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah: bagaimana menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf komplit *(*K_n*)* dengan aplikasi *Matriks-Pohon* .

1.3 Batasan Masalah

Agar pembahasan dalam skripsi ini tidak meluas, maka penulis membatasi penelitian ini hanya pada masalah *banyaknya pohon rentangan pada graf komplit (*K_n*)* dengan n $\geq$ 2 dan n $\in \mathbb{N}$.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi peneliti, sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai teori graf khusunya Aplikasi Matriks-Pohon untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada Graf Komplit *(*K_n*)*.
2. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya Teori Graf mengenai *Aplikasi Matriks-Pohon untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf komplit (*K_n*)*

3. Bagi lembaga UIN Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah Teori Graf.

1.5 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini penulis menggunakan jenis penelitian deskriptif kualitatif dengan metode penelitian kepustakaan (*library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang dijadikan acuan dalam pembahasan ini.
2. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.
3. Memahami dan mempelajari konsep Matriks Pohon .
4. Menerapkankan konsep tersebut, yaitu Aplikasi Matriks Pohon untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada Graf Komplit (K_n).

5. Sistematika Penulisan

Agar dalam pembahasan penelitian ini sistematis dan mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini kedalam empat bab sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN : Dalam bab ini dijelaskan latar belakang masalah, permasalahan, tujuan penelitian, manfaat penelitian, kerangka teori, metode penelitian dan sistematika pembahasan.

BAB II KAJIAN TEORI : Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji, yaitu memuat definisi graf, *adjacen* dan *incident*, graf komlpit, graf terhubung, pohon, pohon rentangan, definisi matriks, operasi matriks, determinan, dan kofaktor

BAB III PEMBAHASAN: Dalam bab ini dipaparkan *Aplikasi Matriks Pohon untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada Graf Komplit* (K_n).

BAB IV PENUTUP : Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Teori graf pertama kali ditemukan dalam tulisan Euler yang berisi tentang pemecahan masalah jembatan Konisberg pada tahun 1736 (Sutarno, 2005: 65). Pada periode selanjutnya, teori graf terus berkembang seiring dengan banyaknya permasalahan yang bisa direpresentasikan dan diselesaikan dengan konsep graf, terutama pada masa tiga puluh tahun terakhir dianggaap merupakan periode yang sangat intensif dalam aktifitas pengembangan teori graf. Secara Matematis, Chartrand dan Lesniak menyatakan teori graf sebagai berikut:

Definisi 1

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4)

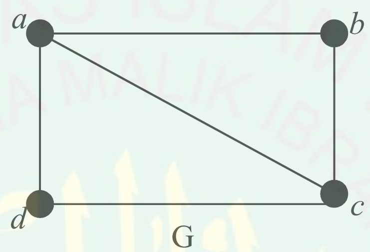
Sedangkan Purwanto mendefinisikan graf sebagai berikut:

Definisi 2

Suatu graf terdiri dari suatu himpunan tak kosong yang masing-masing unsurnya disebut titik (*vertex*) dan suatu himpunan pasangan tak berurutan dari titik-titik tersebut yang disebut sisi (*edge*) (Purwanto, 1997:5).

Dalam penotasian, Chartrand dan Lesniak maupun Purwanto sama-sama menyatakan bahwa himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan Chartrand dan Lesniak menambahkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q.

Contoh :



G

Gambar 2.1 Contoh Graf G

Graf G pada Gambar 2.1 dapat dinyatakan sebagai $\boxed{G = (V(G), E(G))}$ dengan $\boxed{V(G) = \{a, b, c, d\}}$ dan $E(G) = \{ab, ad, ac, bc, cd\}$.

Dapat juga ditulis dengan

$\boxed{V(G) = \{a, b, c, d\}}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

untuk $e_1 = (a,b)$, $e_2 = (a,c)$, $e_3 = (b,d)$, $e_4 = (c,d)$, $e_5 = (d,e)$

Pada contoh di atas Graf G mempunyai 4 titik sehingga order G adalah $p = 4$ dan mempunyai 5 sisi sehingga ukuran graf G adalah $q = 5$.

Sebagaimana sifat himpunan, sebuah graf G juga memiliki graf bagian (subgraf) dimana setiap titik dan atau sisinya merupakan bagian dari graf G. Secara matematis, subgraf didefinisikan sebagai berikut

Definisi 3

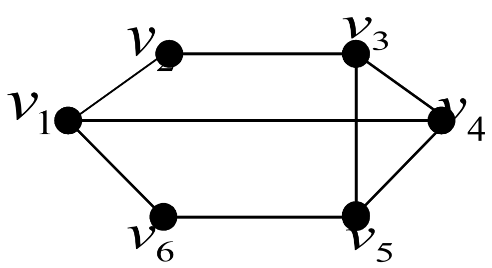
Graf H disebut subgraf dari G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G dan himpunan sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di G. Dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf G, maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 8).

Jika H subgraf dari G dan $V(H) = V(G)$, maka H disebut subgraf rentangan (*spanning subgraph*) dari G (Purwanto, 1998:6)

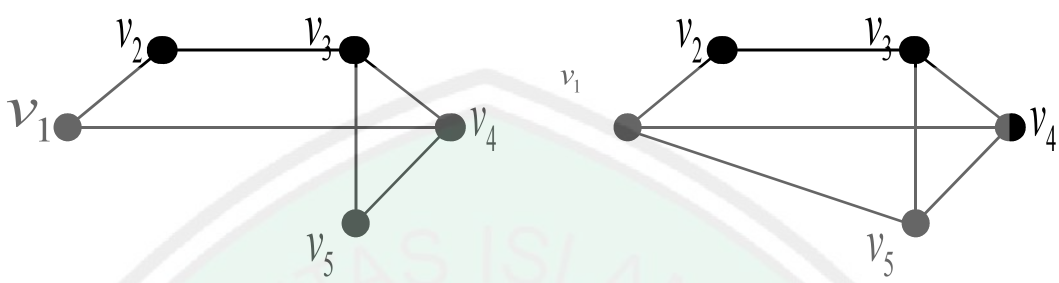
Jika ditelaah lebih lanjut dari definisi subgraf tersebut, maka akan ditemui beberapa sifat sebagai berikut

1. Setiap graf merupakan subgraf dari dirinya sendiri
2. Subgraf dari suatu subgraf G merupakan subgraf dari G
3. Sebuah titik dalam graf G merupakan subgraf dari G
4. Sebuah sisi dari G bersamaan dengan kedua titik ujungnya juga merupakan subgraf dari G.

Contoh:



G



Gambar 2.2 Gr H dan J dimana H Subgraf dari G dan J n subgraf dari G

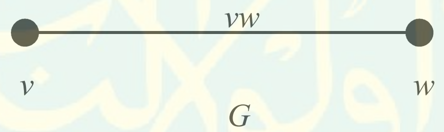
Pada graf G, $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(G) = \{ v_1 v_2, v_1 v_6, v_1 v_4, v_2 v_3, v_3 v_4, v_3v_5, v_4v_5, v_5 v_6\}$ pada graf H, $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(H) = \{ v_1 v_2, v_1 v_4, v_2 v_3, v_3 v_4, v_3v_5, v_4v_5\}$ dimana $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$ sehingga H adalah subgraf dari G. Sedangkan pada graf J, $V(J) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(J) = \{ v_1 v_2, v_1 v_4, v_2 v_3, v_3 v_4, v_3v_5, v_4v_5, v_5 v_1\}$ dimana $V(H) \subset V(G)$ tetapi $E(J) \not\subset E(J)$ sehingga J bukan subgraf dari G

2.1.2 Terhubung Langsung (*Adjacent*) dan Terkait Langsung (*Incident*)

Dari definisi graf, suatu graf paling tidak memiliki sebuah titik. Jika suatu graf memiliki lebih dari satu titik dan lebih dari satu sisi maka secara matematis hubungan antara titik dan sisi itu di definisikan sebagai berikut:

Definisi 4

Misalkan v dan w adalah titik-titik dari suatu graf. Jika v dan w dihubungkan oleh suatu sisi vw, maka v dan w disebut terhubung langsung (*adjacent*). Lebih lanjut, v dan w dikatakan terkait langsung (*incident*) dengan vw, vw dikatakan terkait langsung dengan v dan w, dan titik v dan w disebut titik ujung dari vw (Wilson dan Watkins, 1990:31).

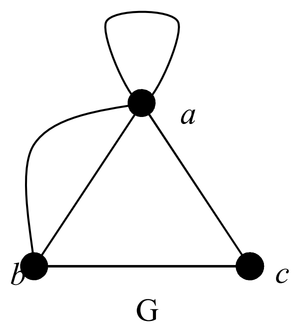


Gambar 2.3 Graf Adjacent dan Incident

Dari Gambar 2.3 titik v dan vw serta vw dan w adalah *incident* dan titik v dan w adalah *adjacent*.

Dua sisi atau lebih yang menghubungkan satu pasang titik disebut sisi rangkap (*multiple edges*). Suatu sisi yang titik ujungnya sama disebut *loop* (Purwanto, 1997:5).

Contoh :



Gambar 2.4 Graf dengan Sisi rangkap dan Loop

Graf *G* pada gambar 2.4 terdapat sisi rangkap *ab*, dan terdapat loop *aa*.

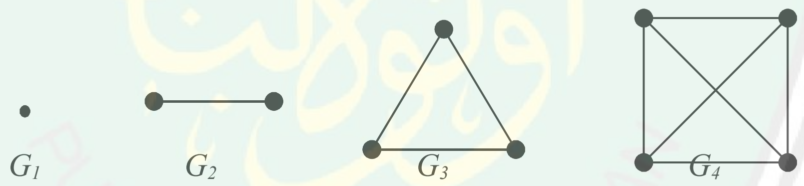
2.1.3 Graf Komplit

Dalam pembahasan mengenai banyaknya pohon rentangan dengan menggunakan aplikasi *matriks-pohon*, graf yang akan digunakan adalah graf komplit. Secara matematis definisi graf komplit adalah sebagai berikut:

Definisi 5

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan dua titik yang berbeda saling *adjacent*. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Chartrand dan Lesniak, 1986: 9).

Contoh:



Gambar 2.5 Graf Komplit

Dari gambar 2.5. K_1, K_2, K_3, K_4 adalah graf komplit karena tiap titik dalam graf tersebut selalu *adjecent* dengan semua titik yang lain.

2.1.4 Derajat Titik

Chartrand dan Purwanto berturut-turut mendefiniskan derajat titik sebagai berikut:

Definisi 6

Derajat titik v pada graf G adalah jumlah sisi dari graf G yang terakit langsung dengan v. Derajat titik v pada graf G dinotasikan dengan deg_G

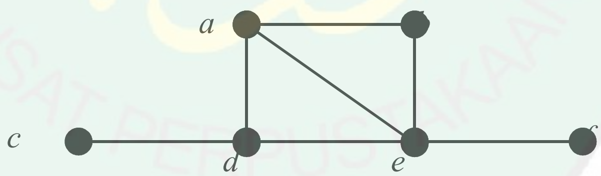
atau secara sederhana dapat juga dinotasikan dengan *deg v* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7).

Definisi 7

Derajat suatu titik v di G, dinyatakan dengan *deg (v),* adalah banyak sisi di G yang terkait langsung dengan v. Derajat minimum dan derajat maksimum titik-titik di G berturut-turut dinyatakan dengan $\delta(G)$ dan $\Delta(G)$ (Purwanto, 1997:7).

Chartran menambahkan titik yang berderajat genap sering disebut titik genap (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (*end vertices*) (Chartrand dan Leniak, 1986:7).

Contoh :



Gambar 2.6 Graf Derajat Titik

Untuk graf G pada Gambar 2.6 *deg(a)* = 3, *deg(b)* = 2, *deg(c)* = 1, *deg(d)*= 3, *deg(e)*= *4* dan *deg(f)*= 1. Sedangkan $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 4$. Lebih lanjut titik *a* dan *d* adalah titik ganjil, titik *b* dan *e* adalah titik genap, titik *c* dan *f* adalah titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu $q(G)$, adalah

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q.$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 1

Jika graf G dengan $V(G) = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

maka $\sum_{i=1}^{n} \deg_G (v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7)

Bukti:

Setiap sisi terkait langsung dengan 2 titik. Bila derajat tiap titik tersebut dijumlahkan maka sisi tersebut dihitung 2 kali.

Akibat 1

Pada sebarang graf, banyaknya titik yang berderajat ganjil adalah genap (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7).

Bukti:

Misalkan graf G dengan titik sebanyak q, maka ambil W yang memuat himpunan titik ganjil di G serta U yang memuat himpunan titik genap di G. Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G v = \sum_{v \in W} \deg_G v + \sum_{v \in U} \deg_G v = 2q$$

dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \deg_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} \deg_G v$ juga genap..

2.2 Graf Terhubung

Untuk sampai pada pembahasan mengenai pohon, maka sebelumnya perlu pemahaman tentang *cycle* dan graf terhubung.

Definisi 8

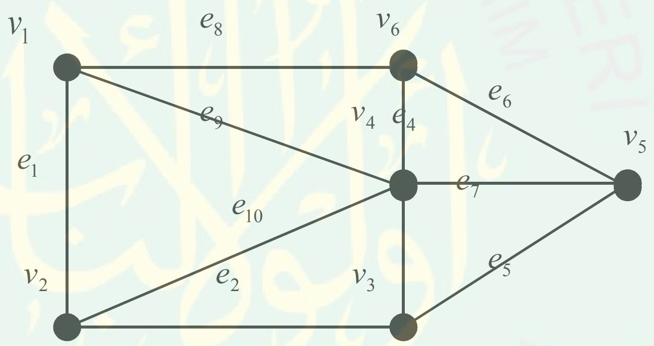
Sebuah jalan (*walk*) u-v di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong) $W : u = u_0, e_1, u_1, e_2, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v, dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ adalah sisi di G. u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir, $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 9

Jalan u-v disebut *tertutup* jika $u = v$ dan *terbuka* jika $u \neq v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Contoh

G :



Gambar 2.7 Jalan, Jalan Terbuka dan Jalan Tertutup

Dari gambar 2.7 barisan dari $v_1, e_1, v_2, e_{10}, v_4, e_3, v_3, e_5, v_5, e_7, v_4, e_4, v_6$ disebut jalan, $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_5, v_5, e_6, v_6$ adalah jalan terbuka, sedangkan $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_6, e_8, v_1$ disebut jalan tertutup.

Definisi 10

Jalan u-v yang semua sisinya berbeda disebut *trail* u-v (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 11

Jalan *u-v* yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) *u-v*. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 12

Suatu titik *u* yang membentuk lintasan (*path*) *u-u* disebut jalan trivial (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Dari definisi 12 dapat diambil pengertian bahwa setiap jalan yang memiliki ≥ 2 titik adalah jalan tak trivial.

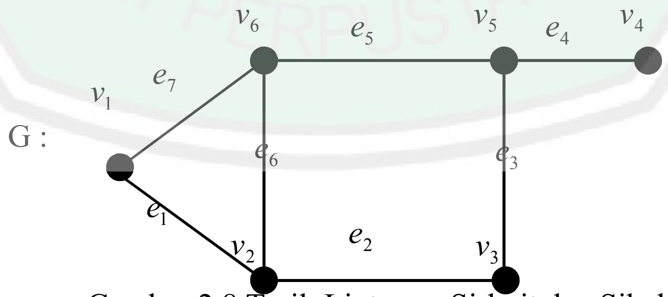
Definisi 13

Suatu jalan tertutup (*closed trail*) yang tak-trivial pada Graf *G* disebut Sirkuit *G*. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Definisi 14

Sirkuit $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, e_n, v_n, v_1$ dengan $n \geq 3$ dan v_i berbeda untuk setiap *i* disebut Sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Contoh:



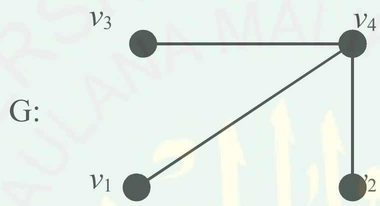
Gambar 2.8 Trail, Lintasan, Sirkuit dan Sikel

Dari gambar 2.8 jalan $v_5, e_3, v_3, e_2, v_2, e_6, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4$ disebut trail, jalan $v_3, e_2, v_2, e_1, v_1, e_7, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4$ disebut lintasan, $v_5, e_5, v_6, e_7, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_5$ disebut sirkuit sedangkan jalan $v_5, e_5, v_6, e_6, v_2, e_2, v_3, e_3, v_5$ disebut sikel.

Definisi 15

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G. Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Contoh:



Gambar 2.9 Graf Terhubung

2.3 Pohon

Teori pohon pertama kali dikembangkan dalam teori graf oleh G.R Kirchof (1824-1887) pada tahun1847 yang digunakan dalam persoalan jaringan listrik. Selain itu teori pohon banyak digunakan untuk masalah-masalah yang lain. Secara matematis definisi pohon adalah sebgai berikut:

2.3.1 Definisi Pohon

Definisi 16

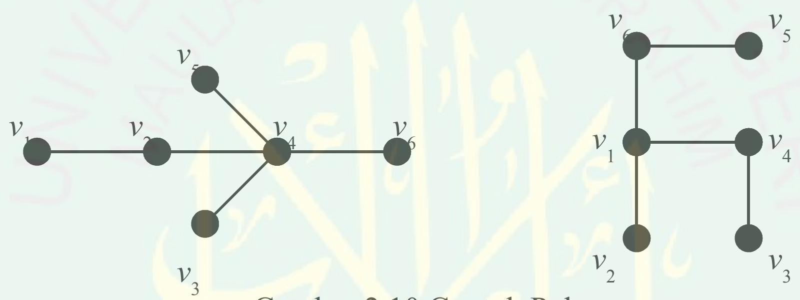
Pohon adalah graf terhubung yang tidak mengandung sikel (*acyclic*). (Chartrand dan Lesniak, 1986: 68)

Misalkan G adalah suatu graf dengan n titik. Maka pernyataan berikut ini adalah ekivalen:

1. G terhubung dan tidak memuat sikel;

2. G terhubung dan memiliki n-1 sisi;
3. G memiliki n-1 sisi dan tidak memuat sikel;
4. setiap dua titik di G terhubung dengan tepat satu lintasan (path);
5. G tidak memuat sikel, tetapi penambahan sembarang sisi baru membentuk tepat satu sikel.

Contoh:



Gambar 2.10 Contoh Pohon

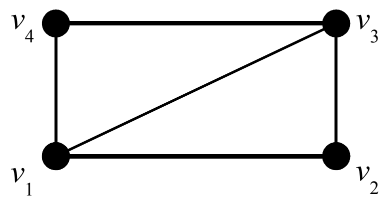
2.3.2 Pohon Rentangan (*spanning tree*)

Suatu pohon dapat dibentuk dari sebuah graf terhubung. Pohon-pohon yang dibentuk dari graf tersebut disebut pohon rentangan. Secara matematis pohon rentangan didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 17

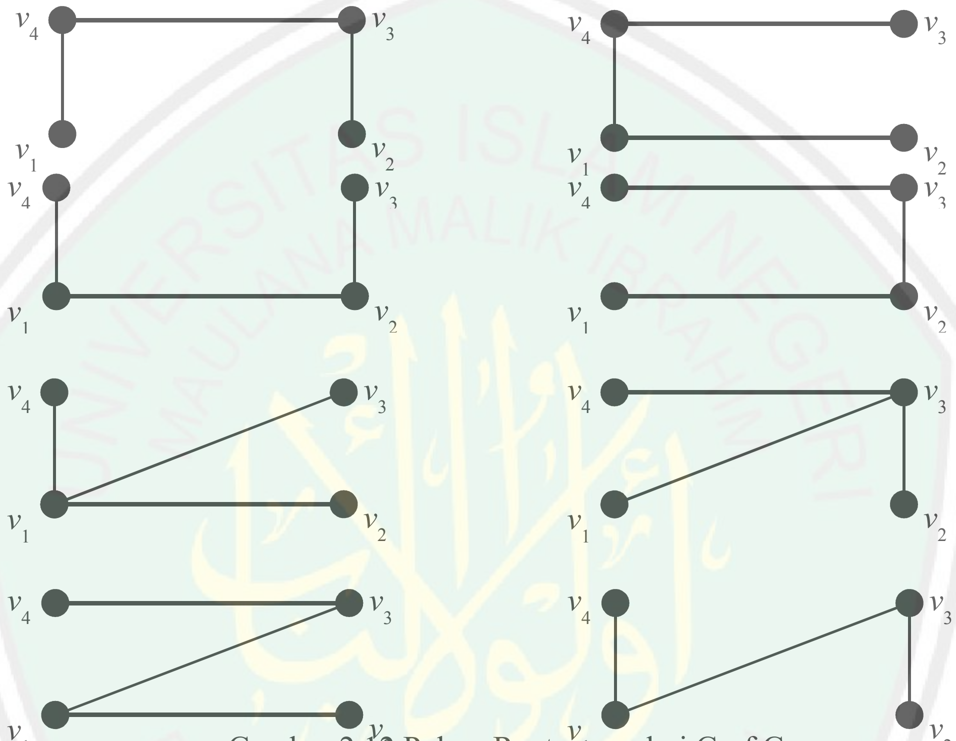
Misal G adalah Graf, suatu pohon rentangan atau *spanning tree* adalah subgraf dari graf G yang mengandung semua titik dari G dan merupakan suatu pohon (Yuni Dwi Astuti, 2006:2)

Contoh



Gambar 2.11 Graf G

Maka pohon rentangan dari graf G adalah



Gambar 2.12 Pohon Rentangan dari Graf G

Untuk setiap graf terhubung, dapat ditemukan pohon rentangan dengan cara menghapus sisi-sisi yang membentuk sikel sehingga graf terhubung tidak lagi memuat sikel. Namun cara ini tidak sistematis sehingga mengalami kesulitan jika digunakan untuk graf terhubung yang memiliki banyak titik dan sisi.

2.4 Matriks

Dalam aplikasi *matriks-pohon* untuk menentukan banyaknya pohon rentangan dari graf komplit, graf komplit K_n harus direpresentasikan terlebih dahulu dalam bentuk matriks. Oleh karena itu perlu dijelaskan tentang matriks dan operasi matriks.

2.4.1 Definisi matriks

Definisi 18

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. (Howard Anton,1997:22)

Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

Matriks pertama pada contoh di atas mempunyai 2 baris dan 3 kolom sehingga ukurannya adalah 2 kali 3 (yang ditulis 2 x 3). Angka pertama selalu menunjukkan banyaknya baris dan angka kedua menunjukkan banyaknya kolom. Jadi, matriks selebihnya dalam contoh di atas berturut-turut mempunyai ukuran: 1 x 2, 3 x 1, 2 x 2, 1x 1.

Definisi 19

Sebuah matriks dengan n baris dan n kolom dinamakan matriks luadrat berorde n, dan entri-entri a_{11}, a_{22}, ..., a_{33} dikatakan berada pada diagonal utama dari A (Anton,1997:23)

Dua matriks dikatakan sama jika kedua matriks tersebut mempunyai ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian sama. (Anton,1997:22)

Selanjutnya, matriks kuadrat dinamakan segitiga atas (*upper triangular*) jika semua entri di bawah diagonal utama adalah nol. Begitu juga matriks kuadrat dinamakan segitiga bawah (*lower triangular*), jika semua entri diatas diagonal utama adalah nol. (Anton,1997:65)

Contoh matriks segitiga atas 4 x 4

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga bawah 4 x 4

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a41 & a_{42} & a43 & a_{44} \end{bmatrix}$$

2.4.2 Operasi Matriks

Definisi 20

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah A+B adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.

Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak bisa ditambahkan. (Anton, 1997:23)

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Maka A + B adalah:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+1 & 0+1 \\ -1+0 & 2+(-3) & 2+2 \\ 5+0 & 1+4 & -3+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 5 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 4-1 & 0-1 \\ -1-0 & 2-(-3) & 2-2 \\ 5-0 & 1-4 & -3-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Definisi 21

Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu scalar, maka hasil kali (product) cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A oleh c. (Anton,1997:24)

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka 2A adalah:

$$2A = 2\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x4 & 2x1 \\ 2x-2 & 2x0 \\ 2x3 & 2x1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -4 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Definisi 22

Jika A adalah matriks *m x r* dan B adalah matriks, *r x n* maka hasilkali AB adalah matriks *m x n* yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris *i* dan kolom *j* dari AB, pilih baris *i* dari matriks A dan kolom *j* dari matriks B. kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan. (Anton,1997:25)

Sifat-Sifat Operasi Matriks

$A + B = B + A$

$A + (B + C) = (A + B) + C$

$k(A + B) = kA + kB$

$A(B + C) = AB + AC$

$(A + B)C = AC + BC$

$A(BC) = (AB)C$

Pada umumnya

$AB \neq BA$

tidak berakibat atau

tidak berakibat (Gazali dalam Kurniawan, 2009:20).

2.4.3 Determinan Matriks

Definisi 23

Jika A adalah suatu matriks *n* x *n*, determinan dari A dinyatakan dengan det(A) atau dinotasikan $|A|$ didefinisikan sebagai

$$\det \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} \det(M_{1j}) \qquad (2.1)$$

dan

$$\det(A)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (2.2)$$

Jika A adalah suatu matriks *n* x *n,* maka minor entri a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan submatriks yang tetap setelah baris ke *i* dan kolom ke *j* dicoret dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan dinamakan kofaktor entri a_{ij} (Anton,1997:77)

Jika $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ maka

$$M_{12} = B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31}$$

Dengan menggunakan definisi 11 maka

$C_{12} = (-1)^{1+2} \det(M_{12})$

$C_{12} = (-1)^{3} (b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31})$

$C_{12} = (b_{23}b_{31} - b_{21}b_{33})$

Jika persamaan 2.1 dan 2.2 diterapkan pada matriks A yang berukuran 3 x 3 , dari persamaan 2.1 akan diperoleh

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\det(M_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2}\det(M_{12}) + a_{13}(-1)^{1+3}\det(M_{13})$$

$$= a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

selanjutnya dengan menggunakan persamaan 2.2 diperoleh rumus

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (2.3)$$

yang terdiri dari enam suku. (Charles G. Cullen dalam Kurniawan, 2009:22)

Contoh:

Hitunglah $\det B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & -3 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(B) = 1\det\begin{bmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} - 4\det\begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} - 3\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} -$$

$$1\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= 1\left(0\det\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - 6\det\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) -$$

$$4\left(2\det\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - 6\det\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 3\det\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\right) -$$

$$3\left(2\det\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 0 & 4\end{bmatrix} - 0\det\begin{bmatrix}4 & 5\\ 1 & 4\end{bmatrix} - 3\det\begin{bmatrix}4 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right) -$$

$$1\left(2\det\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix} - 0\det\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix} + 6\det\begin{bmatrix}4 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$= 1[0 - 6(-4-0) - 3(2-0)] - 4[2(8+10) - 6(16-5) - 3(-8-2)] -$$

$$3[2(-4-0) - 0 - 3(0+1)] - 1[2(2-0) - 0 + 6(0+1)]$$

$$= 18 - 0 + 33 - 10 = 41$$

Salah satu cara lain dalam menentukan determinan suatu matriks n x n adalah dengan mereduksi bentuk matriks tersebut menjadi matriks baru yang mempunyai penghitungan determinan lebih mudah, misalkan dalam bentuk matriks segitiga, dimana determinan dari matriks segitiga adalah hasil kali entri-entri pada diagonal utamanya (Anton, 1997: 67)

Untuk mereduksi sebuah matriks, dapat dilakukan dengan operasi baris elementer (OBE). Operasi baris elementer merupakan operasi aritmatika (penjumlahan dan perkalian) yang dikenakan pada setiap unsur dalam suatu baris pada sebuah matriks.

Operasi baris elementer meliputi :

1. Pertukaran baris
2. Perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol
3. Penjumlahan suatu baris pada baris yang lain

Secara sederhana, determinan suatu matriks merupakan hasil kali setiap unsur diagonal pada suatu matriks segitiga atas / bawah. Sehingga operasi baris elementer pada sebuah matriks akan mempengaruhi nilai determinannya. Pengaruh operasi baris elementer pada suatu matriks antara lain:

1) *Jika A' adalah matriks yang dihasilkan bila baris tunggal A dikalikan oleh konstanta k, maka det(A') = k det(A)*

2) *Jika A' adalah matriks yang dihasilkan bila dua baris A dipertukarkan, maka det(A)= - det(A)*

3) *Jika A' adalah matriks yang dihasilkan bila kelipatan suatu baris A ditambahkan pada baris lain, maka det(A') = det(A)*

(Anton, 1997: 67)

Contoh

Hitunglah det(A) dimana

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka dengan meruduksi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Baris pertama dan baris kedua A dipertukarkan

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Faktor bersama sebesar 3 dari baris pertama matriks terdahulu diambil melalui tanda det tersebut

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

-2 kali baris pertama dari matriks terdahulu ditambahkan pada baris ketiga

$$= (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Faktor bersama sebesar -55 dari baris terakhir matriks terdahulu diambil melalui tanda det

$$= (-3)(-55)(1) = 165$$

2.5 Matriks Graf

Untuk menyatakan suatu graf, selain dengan gambar dapat juga digunakan matriks. Matriks yang dibentuk dari banyaknya sisi yang *adjacent* disebut matriks adjacency, sedangkan matriks graf yang dibentuk dari derajat titik disebut matriks derajat. Secara matematis matriks adjacency dan matriks graf didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 24

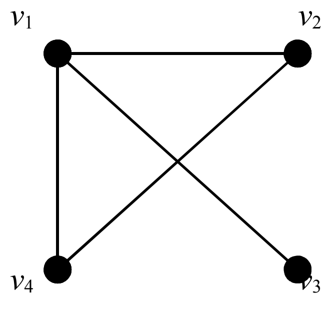
Misalkan G suatu graf tanpa loop dengan V(G) = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dan E(G) = $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Matriks Adjacency graf G adalah matriks n x n, A(G) = $\lfloor a_{ij} \rfloor$, dengan a_{ij} merupakan banyak sisi yang menghubungkan v_i dan v_j. Matriks Derajat graf G adalah matriks n x n. D(G) = $\lfloor a_{ij} \rfloor$ dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} d(v_i), jika.....i = j \\ 0......, jika....i \neq j \end{cases}$$

(Purwanto, 1998:11)

Contoh:

Diberikan sebuah graf G



Gambar 2.13 Graf G

Berdasarkan definisi 22 di atas bentuk matrix Adjacency dari graf G adalah

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} &
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Dimana a_{ij} merupakan banyak sisi yang menghubungkan langsung v_i dan v_j, maka $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 1$, $a_{14} = 1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{24} = 1$, $a_{31} = 1$, $a_{32} = 0$, $a_{33} = 0$, $a_{34} = 0$, $a_{41} = 1$, $a_{42} = 1$, $a_{43} = 0$, $a_{44} = 0$. Sehingga

$$
A(G) = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Sedangkan matriks Derajat dari graf G adalah

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} &
\begin{bmatrix}
d(v_1) & 0 & 0 & 0 \\
0 & d(v_2) & 0 & 0 \\
0 & 0 & d(v_3) & 0 \\
0 & 0 & 0 & d(v_4)
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Dimana $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 1$, $d(v_4) = 2$, sehingga

$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4$

$$D(G) = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2.6 Teorema Matriks-Pohon

Untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada sutu graf terhubung, dapat dilakukan dengan aplikasi *matriks-pohon,* yaitu dengan menghitung nilai kofaktor dari matriks D(G) – A(G), dimana nilai kofaktor dari matriks D(G) – A(G) tersebut adalah sama dengan banyaknya pohon rentangan yang bisa didapatkan dari sutu graf G. Secara lengkap hal tersebut dijelaskan dalam teorema berikut ini

Teorema 2

Banyaknya pohon rentangan τ(G) dari suatu graf G adalah sama dengan nilai setiap kofaktor dari matriks D(G) – A(G) (Skiena, 1990:235)

Dalam teorema yang disebutkan Skiena ini, tidak disebutkan lebih jelas mengenai kofaktor yang dihitung untuk menentukan banyaknya pohon rentangan dari suatu graf G. Sementara kita tahu antara kofaktor C_{11} dengan C_{12} dari suatu matriks kemungkinan bisa saja berbeda. Lebih terperinci teorema Matriks-Pohon disampaikan oleh Vivek Dhand sebagai berikut:

Teorema 3

Misalkan L(G) adalah matriks Laplace dimana L(G) = D(G) – A(G). Dan Ĺ(G) didefinisikan sebagai matriks yang diperoleh dengan menghapus baris dan kolom pertama dari L(G). Maka, banyaknya pohon rentangan τ(G) = det Ĺ(G).

Dalam teorema Vivek Dhand determinan Ĺ(G) adalah sama dengan nilai Minor Unsur M_{11} dari matriks L(G) dan sama juga dengan nilai dari kofaktor C_{11}. Sehingga dari penjelasan teorema matriks-pohon oleh Vivek Dhand dan Skiena dapat ditarik kesimpulan bahwa banyaknya pohon rentangan τ(G) dari suatu graf G adalah sama dengan nilai kofaktor C_{11} dari matriks D(G) – A(G).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang aplikasi matriks pohon untuk menentukan banyaknya pohon rentangan dari graf komplit K_n dengan $n \geq 2$ dan $n \in$ **N.** Adapun langkah-langkah menentukan banyaknya pohon rentangan dari graf komplit K_n dengan $n \geq 2$ dan $n \in$ N adalah sebagai berikut:

1. Menggambar graf komplit K_n dengan $n \geq 2$ dan $n \in$ N.
2. Menentukan matriks adjacency A(G) pada graf komplit K_n.
2. Menentukan matriks derajat dari D(G) pada graf komplit K_n.
3. Menentukan matriks hasil dari D(G) – A(G) dari graf komplit K_n .
4. Menghitung kofaktor dari matriks D(G) – A(G), dimana nilai kofaktor dari matriks D(G) – A(G) adalah jumlah banyaknya pohon rentangan dari graf komplit K_n.
5. Melihat pola banyaknya pohon rentangan dari graf komplit K_n.
6. Merumuskan pola ke dalam teorema.
7. Membuktikan teorema.

Sebelum menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf komplit K_n dengan $n \geq 2$ dan $n \in$ N dengan menggunakan aplikasi matrix pohon, berdasarkan definisi bahwa banyaknya pohon rentangan sama dengan nilai setiap kofaktor dari matriks $D(K_n) - A(K_n)$, maka penulis disini memilih nilai C_{11} untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf komplit K_n.

3.1 Pohon rentangan dari Graf Komplit (K_2)

Untuk graf komplit K_2 dapat digambarkan grafnya seperti pada gambar 3.1 berikut

Gambar 3.1 Graf Komlpit K_2

Pada graf komplit K_2 menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_2) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sedangkan untuk matriks derajatnya adalah sebagai berikut

$$D(K_2) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan matrix $A(K_2)$ dan $D(K_2)$ maka akan dicari nilai kofaktor dari matriks $D(K_2)$ – (AK_2) untuk menentukan banyaknya pohon rentangan dari graf komplit K_2.

$$D(K_2) - A(K_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka C_{11} dari $D(K_2) - A(K_2) = (-1)^2\det[1]$

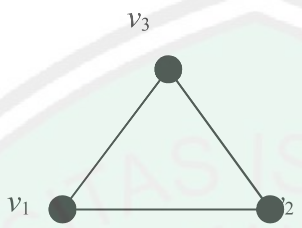
$$= 1$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf komplit K_2 adalah = 1

3.2 Pohon Rentangan dari Graf Komplit (K_3)

Untuk graf komplit K_3 dapat digambarkan grafnya seperti gambar 3.2 berikut

K_3:



Gambar 3.2 Graf Komlpit K_3

Pada graf komplit K^3 menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_3) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sedangkan untuk graf derajatnya adalah sebagai berikut

$$D(K_3) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan matrix $A(K_3)$ dan $D(K_3)$ maka akan dicari nilai kofaktor dari matriks $D(K_3) - A(K_3)$ untuk menentukan banyaknya pohon rentangan dari graf komplit K_3.

$$D(K_3) - A(K_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka C_{11} dari $D(K_3) - A(K_3) = (-1)^2 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

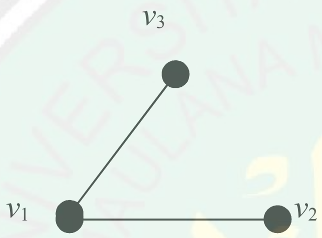
$$= 1\,(4-1)$$

$$= 3$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf komplit K_3 adalah = 3

Secara terperinci pohon rentangan dari graf komplit K_3 dapat digambarkan sebagai berikut:

T$_1$:



Gambar 3.3 T1

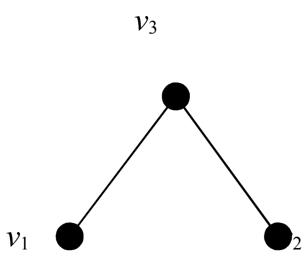
Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T$_1$ adalah

$$D(T1)- A(T1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan C_{11} dari D(T1)- A(T1) = $(-1)^2$ det M_{11} = 1

T$_2$:



Gambar 3.4 T2

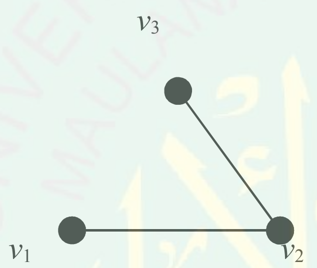
Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T$_2$ adalah

$$D(T2) - A(T2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan C_{11} dari $D(T2) - A(T2) = (-1)^2 \det M_{11} = 1$

T_3:



Gambar 3.5 T3

Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T_3 adalah

$$D(T3) - A(T3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

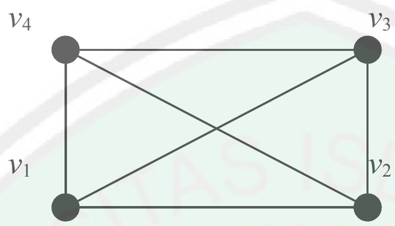
Sehingga didapatkan C_{11} dari $T_3 = (-1)^2 \det M_{11} = 1$

Hasil perhitungan diatas menunjukkan bahwa nilai C_{11} dari setiap pohon rentangan K_3 adalah 1, dan nilai kofaktor C_{11} dari K_3 adalah sama dengan jumlah nilai kofaktor C_{11} dari setiap pohon rentangannya.

3.3 Pohon Rentangan dari Graf Komplit (K_4)

Untuk graf komplit K_4 dapat digambarkan grafnya seperti gambar 3.3 berikut

K_4 :



Gambar 3.6 Graf Komlpit K_4

Pada graf komplit K^4 menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_4) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sedangkan untuk matriks derajatnya adalah sebagai berikut

$$D(K_4) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan matrix $A(K_4)$ dan $D(K_4)$ maka akan dicari nilai kofaktor dari matriks $D(K_4) - (AK_4)$ untuk menentukan banyaknya pohon rentangan dari graf komplit K_4.

$$D(K_4) - (AK_4) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka C_{11} dari D(K_4) – A(K_4) = $(-1)^2 \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$= 3 \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + 1 \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} -$$

$$1 \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= 3(9-1) + (-3-1) - (1+3)$$

$$= 24 - 4 - 4 = 16$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf komplit K_4 adalah = 16

Secara terperinci pohon rentangan dari graf komplit K_4 dapat digambarkan sebagai berikut:

T_1 :

Gambar 3.7 T1

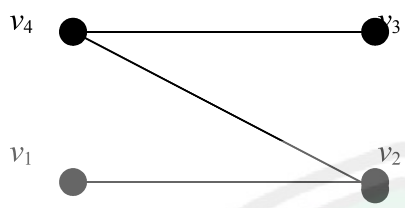
Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T_1 adalah

$$D(T1) - A(T1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan C_{11} dari D(T1)- A(T1) = $(-1)^2 \det M_{11} = 1$

T_2 :



Gambar 3.8 T2

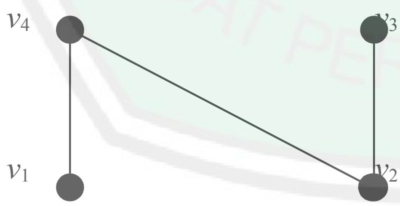
Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T_2 adalah

$$D(T2)-A(T2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan C_{11} dari D(T2)- A(T2) $= (-1)^2 \det M_{11} = 1$

T_3 :



Gambar 3.9 T3

Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T_3 adalah

$$D(T3)- A(T3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan C_{11} dari $D(T3)- A(T3) = (-1)^2 \det M_{11} = 1$

T_4 :

Gambar 3..10 T4

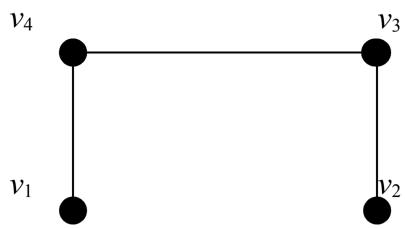
Matriks derajat dikurnagi matriks adjacency dari T4 adalah

$$D(T4)\ A(T4) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan C_{11} dari $D(T4)- A(T4) = (-1)^2 \det M_{11} = 1$

T_5:



Gambar 3.11 T 5

Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T5 adalah

$$D(T5)- A(T5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan C_{11} dari $D(T5)- A(T5) = (-1)^2 \det M_{11} = 1$

T_6:

Gambar 3.12 T6

Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T6 adalah

$$D(T6)- A(T6) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga didaaptkan C_{11} dari $D(T6) – A(T6) = (-1)^2 \det M_{11} = 1$

T_7:

Gambar 3.13 T7

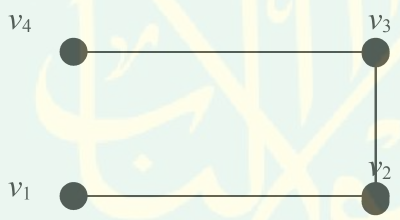
Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T7 adalah

$$D(T7) - A(T7) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan C_{11} dari $D(T7) - A(T7) = (-1)^2 \det M_{11} = 1$

T_8:



Gambar 3.14 T 8

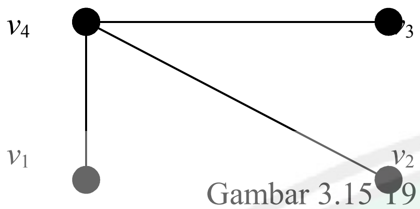
Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T8 adalah

$$D(T8)-A(T8) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan C_{11} dari $D(T8)-A(T8) = (-1)^2 \det M_{11} = 1$

T_9



Gambar 3.15 T9

Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T9 adalah

$$D(T9) - A(T9) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan C_{11} dari $D(T9) - A(T9) = (-1)^2 \det M_{11} = 1$

T_{10}:

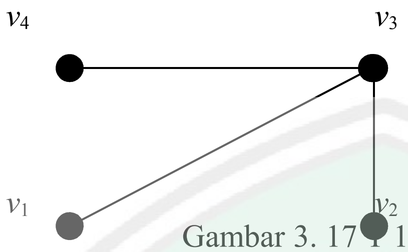
Gambar 3.16 T10

Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T10 adalah

$$D(T10)-A(T10) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan C_{11} dari $D(T10)-A(T10) = (-1)^2 \det M_{11} = 1$



T_{11}

Gambar 3. 17 T11

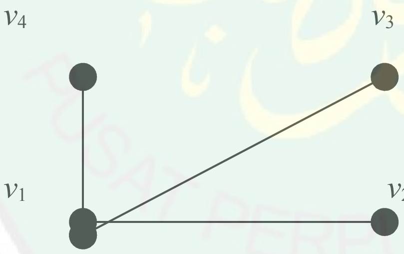
Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T11 adalah

$$D(T11)-A(T11) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan C_{11} dari D(T11)-A(T11) = $(-1)^2$ det M_{11} = 1

T_{12}:



Gambar 3.18 T12

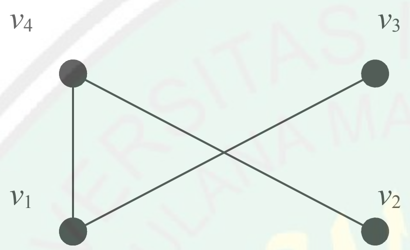
Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T12 adalah

$$D(T12)-A(T12) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan C_{11} dari D(T12)-A(T12) = $(-1)^2$ det M_{11} = 1

T_{13}:



Gambar 3.19 T13

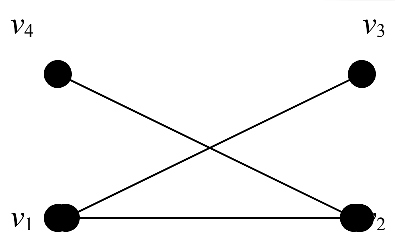
Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T13 adalah

$$D(T13)\text{-}A(T13) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan C_{11} dari D(T13)-A(T13) = $(-1)^2$ det M_{11} = 1

T_{14}:



Gambar 3.20 T 14

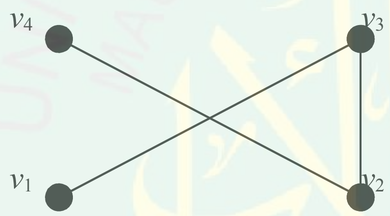
Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T14 adalah

$$D(T14)-A(T14) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan C_{11} dari $D(T14)-A(T14) = (-1)^2 \det M_1 = 1$

T_{15}:



Gambar 3.21 T15

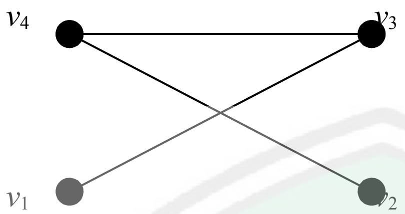
Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T15 adalah

$$D(T15)-A(T15) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan C_{11} dari $D(T15)-A(T15) = (-1)^2 \det M_{11} = 1$

T_{16}:



Gambar 3.22 T16

Matriks derajat dikurangi matriks adjacency dari T16 adalah

$$D(T16)-A(T16) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

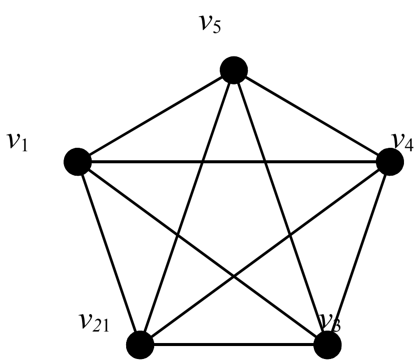
Sehingga didapatkan C_{11} dari $D(T16)-A(T16) = (-1)^2 \det M_1 = 1$

Hasil perhitungan diatas menunjukkan bahwa nilai C_{11} dari setiap pohon rentangan K_4 adalah 1, dan nilai kofaktor C_{11} dari K_4 adalah sama dengan jumlah nilai kofaktor C_{11} dari setiap pohon rentangannya.

3.4 Pohon Rentangan dari Graf Komplit (K_5)

Untuk graf komplit K_5 dapat digambarkan grafnya seperti gambar 3.4 berikut

K_5 :



Gambar 3.23 Graf Komplit K^5

Pada graf komplit K^5 menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_5) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sedangkan untuk matriks derajatnya adalah sebagai berikut

$$D(K_5) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$D(K_5) - A(K_5) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Maka C_{11} dari $D(K_5) - A(K_5)$

$$= (-1)^2 \det \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 4 \det \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} + 1 \det \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$+ 1 \det \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= 4 \left(4 \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + 1 \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) +$$

$$1 \left(-1 \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + 1 \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) -$$

$$1 \left(-1 \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - 4 \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) +$$

$$1 \left(-1 \det \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - 4 \det \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 4\left[4(16-1) + (-4-1) - (1+4)\right] + \left[-1(16-1) + (-4-1) - (1+4)\right] -$$

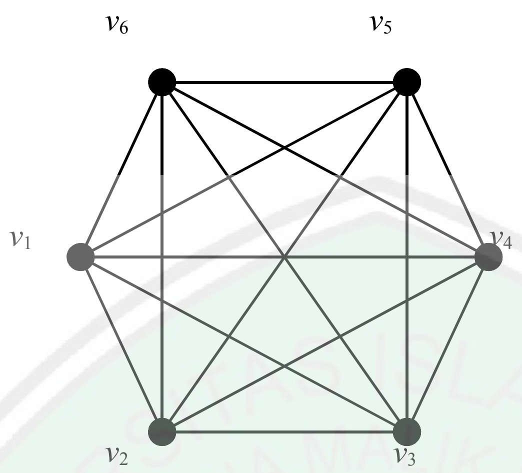
$$1\left[-1(-4-1) - 4(-4-1) - (1-1)\right] + \left[-(1+4) - 4(1+4) - (1-1)\right]$$

$$= 200 - 25 - 25 - 25 = 125$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf komplit K_5 adalah = 125

3.4 Pohon Rentangan dari Graf Komplit (K_6)

Untuk graf komplit K_6 dapat digambarkan grafnya seperti gambar 3.5 berikut



Gambar 3.24 Graf Komplit (K_6)

Pada graf komplit K^5 menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_6) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sedangkan untuk matriks derajatnya adalah sebagai berikut

$$D(K_6) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$D(K_6) - A(K_6) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Maka C_{11} dari $D(K_6) - A(K_6)$

$$= (-1)^2 \det \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= 5\det \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1- & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} + 1\det \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} -$$

$$1\det \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} + 1\det \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} -$$

$$1\det \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= 5\left(\begin{matrix} 5\det\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \\ -1\det\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} - 1\det\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}\right) + \\
&\quad 1\left(\begin{matrix} -1\det\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \\ -1\det\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}\right) - \\
&\quad 1\left(\begin{matrix} -1\det\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} - 5\det\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \\ -1\det\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}\right) + \\
&\quad 1\left(\begin{matrix} -1\det\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} - 5\det\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \\ -1\det\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix}\right) - \\
&\quad 1\left(\begin{matrix} -1\det\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} - 5\det\begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ -1\det\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}\right)
\end{aligned}
$$

$$
= 5\left(\begin{array}{l}
5\left(5\det\begin{bmatrix}5 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} - 1\det\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right) + \\
1\left(-1\det\begin{bmatrix}5 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} - 1\det\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right) - \\
1\left(-1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} - 5\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} - 1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right) + \\
1\left(-1\det\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix} - 5\det\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix} - 1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right)
\end{array}\right) +
$$

$$
1\left(\begin{array}{l}
-1\left(5\det\begin{bmatrix}5 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} - 1\det\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right) + \\
1\left(-1\det\begin{bmatrix}5 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} - 1\det\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right) - \\
1\left(-1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} - 5\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} - 1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right) + \\
1\left(-1\det\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix} - 5\det\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix} - 1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right)
\end{array}\right) -
$$

$$
1\left(\begin{array}{l}
-1\left(-1\det\begin{bmatrix}5 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} - 1\det\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right) - \\
5\left(-1\det\begin{bmatrix}5 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} - 1\det\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right) - \\
1\left(-1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix} - 1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right) + \\
1\left(-1\det\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix} + 1\det\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix} - 1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right)
\end{array}\right) +
$$

$$
1\begin{pmatrix}
-1\left(-1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}-5\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}-1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right)-\\
5\left(-1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}-5\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}-1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right)-\\
1\left(-1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}+1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}-1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right)+\\
1\left(-1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}-5\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}-1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right)
\end{pmatrix}-
$$

$$
1\begin{pmatrix}
-1\left(-1\det\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}-5\det\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}-1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right)-\\
5\left(-1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}-5\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}-1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right)-\\
1\left(-1\det\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}+1\det\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}-1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right)+\\
1\left(+1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}+1\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}+5\det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right)
\end{pmatrix}
$$

$= 5\{5[5(25-1)+(-5-1)-(1+5)]+1[-(25-1)+(-5-1)-(1+5)]$

$-1[-1(-5-1)-5(-5-1)-1(1-1)]+1[-1(1+5)-5(1+5)-1(1-1)]\}$

$+1\{-1[5(25-1)+1(-5-1)-1(1+5)]+1[-1(25-1)+1(-5-1)-1(1+5)$

$-1[-1(-5-1)-5(-5-1)-1(1-1)]+1[-1(1+5)-5(1+5)-1(1-1)]\}$

$-1\{-1[-1(25-1)+1(-5-1)-1(1+5)]-5[-1(25-1)+1(-5-1)-1(1+5)]$

$+1[-1(-5-1)+1(-5-1)-1(1-1-)]+1[-1(1+5)+1(1+5)-1(1-1)]\}$

$+1\{-1[-1(-5-1)-5(-5-1)-1(1-1)]-5[-1(-5-1)-5(-1-1)-1(1-1)]-$

$1[-1(-5-1)+1(-5-1)-1(1-1)]+1[-1(-5-1)-5(-1-1)-1(1-1)]\}$

$-1\{-1[(1+5)-5(1+5)-1(1-1)]-5[-1(-5-1)-5(-5-1)-1(1-1)$

$-1[1-(1+5)+1(1+5)-1(1-1)]+1[-1(1-1)+1(1-1)+5(1-1)]\}$

$= 2160 - 216 - 216 - 216 - 216$

$= 1296$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf komplit K_6 adalah = 1296

Berdasakan data diatas yaitu banyaknya pohon rentangan dari graf komplit (K_n) dimana $n \geq 2$ dan $n \in N$, maka diperoleh tabel berikut

Tabel 3.1 Banyaknya Pohon Rentangan graf Komplit (K_n)

No	Graf Komplit (K_n)	Banyaknya Pohon Rentangan (K_n)
1	K_2	1 atau 2^0
2	K_3	3 atau 3^1
3	K_4	16 atau 4^2
4	K_5	125 atau 5^3
5	K_6	1296 atau 6^4

Dari tabel diatas terlihat bahwa pola banyaknya pohon rentangan dari graf komplit (K_n) adalah = n^{n-2}

Teorema:

Misalkan K_n adalah graf komplit berorder n, maka banyaknya pohon rentangan K_n adalah n^{n-2}

Bukti:

Misal K_n adalah graf komplit order n, maka matriks adjacency dari graf komplit (K_n)

$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \qquad v_{n-1} \quad v_n$

$$A(K_n) = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ : \\ v_{n-1} \\ v_n \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & .. & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & .. & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & .. & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & .. & 1 & 1 \\ : & : & : & : & : & & : & : \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & .. & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & .. & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sedangkan untuk matrix derajatnya adalah

$$D(K_n) = \begin{array}{c|cccccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & & v_{n-1} & v_n \\ \hline v_1 & n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & n-1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & n-1 & 0 & .. & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & .. & 0 & 0 \\ : & : & : & : & : & : & & : & : \\ v_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & n-1 & 0 \\ v_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & n-1 \end{array}$$

Sehingga

$$D(K_n) - A((K_n) = \begin{bmatrix} n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n-1 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & .. & 0 & 0 \\ : & : & : & : & : & & : & : \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & n-1 \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & .. & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & .. & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & .. & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & .. & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & .. & 1 & 1 \\ : & : & : & : & : & & : & : \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & .. & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & .. & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & .. & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & -1 & -1 & .. & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & -1 & -1 & .. & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & n-1 & -1 & .. & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & n-1 & .. & -1 & -1 \\ : & : & : & : & : & & : & : \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & .. & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & .. & -1 & n-1 \end{bmatrix}$$

Maka, $C_{11} = (-1)^{1+1}\det(M_{11})$

$$= (-1)^2 \det \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & .. & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & -1 & -1 & .. & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & -1 & -1 & .. & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & n-1 & -1 & .. & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & n-1 & .. & -1 & -1 \\ : & : & : & : & : & & : & : \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & .. & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & .. & -1 & n-1 \end{bmatrix}$$

dengan banyaknya kolom adalah n-1 dan banyaknya baris n-1 atau matriks dengan orde n-1.

Melalui operasi baris elementer, M_{11} direduksi menjadi matriks segitiga atas diperoleh,

$$\begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & .. & -1 & -1 \\ 0 & \frac{n(n-2)}{n-1} & \frac{-n}{n-1} & \frac{-n}{n-1} & \frac{-n}{n-1} & .. & \frac{-n}{n-1} & \frac{-n}{n-1} \\ 0 & 0 & \frac{n(n-3)}{n-2} & \frac{-n}{n-2} & \frac{-n}{n-2} & .. & \frac{-n}{n-2} & \frac{-n}{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n(n-4)}{n-3} & \frac{-n}{n-3} & .. & \frac{-n}{n-3} & \frac{-n}{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{n(n-5)}{n-4} & .. & \frac{-n}{n-4} & \frac{-n}{n-4} \\ : & : & : & : & : & & : & : \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & \frac{n(n-(n-2))}{n-(n-3)} & \frac{-n}{n-(n-3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & \frac{n(n-(n-1))}{n-(n-2)} \end{bmatrix}$$

Dimana det M_{11} tidak lain adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut. Jadi,

$$\text{Det } M_{11} = n\text{-}1 \cdot \frac{n(n-2)}{n-1} \cdot \frac{n(n-3)}{n-2} \cdot \frac{n(n-4)}{n-3} \cdot \frac{n(n-5)}{n-4} \cdot \ldots \cdot \frac{n(n-(n-2))}{n-(n-3)}$$

$$\cdot \frac{n(n-(n-1))}{n-(n-2)}$$

$$= n^{n-2} \cdot (n-(n-1))$$

$= n^{n-2} \cdot 1$

$= n^{n-2}$

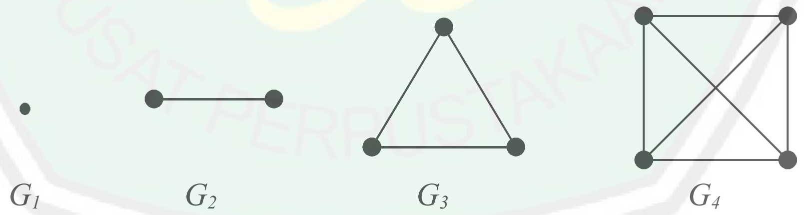
Jadi terbukti bahwa banyaknya pohon rentangan (K_n) = n^{n-2}

3.5 Kajian Keagamaan

Salah satu cabang ilmu matematika yang memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan sehari-hari adalah teori graf. Banyak sekali masalah yang bisa direpresentasikan dalam bentuk graf. Setelah permasalahan direpresentsaikan dalam bentuk graf, kemudian dengan teori graf masalah tersebut dikaji dan dianilisis sehingga ditemukan pemecahannya. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf biasanya dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya.

Graf komplit adalah salah satu bentuk graf yang bisa digunakan untuk menggambarkan beberapa permasalahan di dunia nyata. Secara matematis, graf komplit (*Complete Graph*) didefinisikan sebagai graf dengan dua titik yang berbeda saling terhubung langsung. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Chartrand dan Lesniak, 1986: 9).

Contoh:



Gambar 3.25. Graf Komplit

Jika diperhatikan lebih seksama, dari graf komplit tersebut dapat dilihat beberapa sifat antara lain:

(1) Setiap titik di graf komplit selalu terhubung langsung dengan titik-titik yang lainnya

(2) Setiap titik dalam graf komplit memiliki derajat yang sama. Derajat adalah banyaknya sisi yang terkait langsung dengan titik tersebut.

Dalam Islam banyak ajaran atau amalan dalam kehidupan sehari-hari yang bisa digambarkan dengan graf komplit. Salah satunya adalah tentang tujuan Allah yang menciptakan manusia bersuku-suku dan berbangsa-bangsa untuk saling menganal. Sebagaimana disebutkan dalam Q.S Al Hujurat:13 Allah berfirman

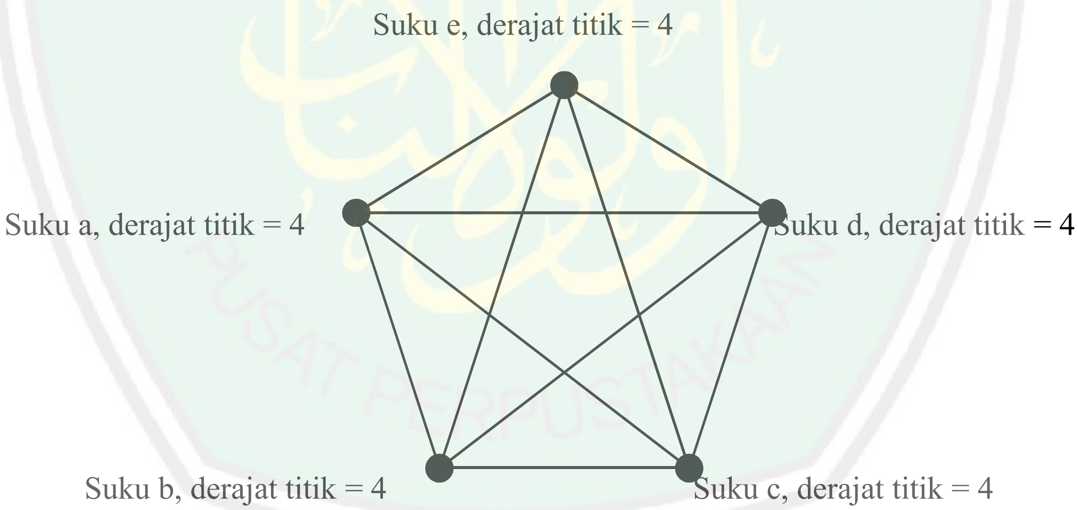
[illegible]

13. *Hai manusia, Sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu disisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal.*

Dalam ayat tersebut Allah menjelaskan bahwa Dia menciptakan manusia dari seorang laki-laki dan perempuan, kemudian dengan kekuasaan dan kehendak-Nya terlahir manusia yang berbeda ras dan warna kulit, dan sudah menjadi sunah-Nya bahwa segala yang diciptakannya tidak sia-sia. Perbedaan itu adalah agar semua manusia satu sama lain melakukan *ta'aruf* (saling mengenal). Karena pada dasarnya manusia tidak bisa hidup tanpa bermasyarakat dan bantuan orang lain.

Selain itu juga, warna kulit, ras, bahasa, negara, dan lainnya tidak ada dalam pertimbangan Allah. Di sana hanya ada satu timbangan untuk memnguji seluruh nilai dan mengetahui keutamaan manusia yaitu, "*Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu disisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu"* (Sayyid Qutb, 2008: 421)

Dalam Islam, graf komplit dapat direpresentasikan untuk menggambarkan tujuan Allah menciptakan manusia berbangsa-bangsa dan bersuku-suku sebagaimana disebutkan dalam Al Qur'an Q.S Al Hujurat: 13 tersebut. Misal setiap suku/ bangsa pada ayat tersebut di lambangkan sebagai titik di dalam graf komplit, maka sesuai dengan sifat graf komplit setiap bangsa/ suku itu haruslah saling berhubungan (mengenal) dengan bangsa/suku yang lain. Sedangkan ukuran kemuliaan disisi Allah yang tidak memandang suku, ras dan golongan melainkan berdasarkan ketaqwaannya direpresentasikan dalam graf komplit dengan banyaknya derajat setiap titik yang nilainya sama. Sebagaimana digambarkan pada graf komplit K_5 berikut,



Gambar 3.26 Representasi Graf Komplit K_5 dari Q.S 49:13

Dalam graf komplit, semua titik pasti terhubung oleh sebuah sisi dengan titik-titik yang lainnya. Jika graf komplit diartikan sebagai persatuan semua titik, maka pada graf komplit menggambarkan bahwa persatuan hanya bisa dibentuk apabila semua titik terhubung dengan semua titik yang lainnya.

Jika ditelaah lebih lanjut, sebuah graf komplit jika ada satu sisi saja yang dihapus atau salah satu titik tidak terhubung dengan satu titik yang lainnya, maka persatuan yang digambarkan pada graf komplit akan terpecah, sehingga bisa diartikan bahwa jika ada satu golongan yang tidak mau menjalin hubungan dengan golongan yang lain, persatuan dan kesatuan dalam sebuah negara tidak akan terwujud.

Selanjutnya jika pengertian ini di interpretasikan dalam ajaran islam, maka persatuan yang dibentuk oleh keterhubungan semua golongan bukan hanya hubungan karena saling mengenal saja, tetapi lebih dari itu yaitu hubungan yang dipersatukan oleh ajaran agama, yaitu islam. Hubungan yang dijalain oleh setiap golongan, suku maupun bangsa akan tetap kokoh jika didasarkan atas ajaran islam dan tetap berpegang teguh didalamnya. Hal ini sebagaimana di jelaskan dalam Q.S Ali Imran: 103

[illegible]

103. *Dan berpeganglah kamu semuanya kepada tali (agama) Allah, dan janganlah kamu bercerai berai, dan ingatlah akan nikmat Allah kepadamu ketika kamu dahulu (masa Jahiliyah) bermusuh-musuhan, Maka Allah mempersatukan hatimu, lalu menjadilah kamu karena nikmat Allah, orang-orang yang bersaudara; dan kamu telah berada di tepi jurang neraka, lalu Allah menyelamatkan kamu dari padanya. Demikianlah Allah menerangkan ayat-ayat-Nya kepadamu, agar kamu mendapat petunjuk.*

Disebutkan dalam ayat tersebut, bahwa ukhuwah dengan berpegang pada tali Allah ini adalah nikmat yang dikaruniakan-Nya kepada kaum muslimin angkatan pertama dahulu. Dalam ayat ini, Allah juga mengingatkan bahwa pada awalnya mereka dan suku-suku mereka dahulu saling bermusuhan. Tetapi, kemudian Allah mempersatukan hati suku-suku tersbut dengan Islam. Karena hanya Islam sajalah yang dapat mempersatukan hati-hati yang saling bermusuhan dan berjauhan ini. Tidak ada tali yang dapat mengikat mereka menjadi satu kecuali tali Allah, sehingga dengan nikmat Allah ini mereka menjadi orang-orang yang bersaudara. (Sayyid Quthb, 2008: 122)

Selain itu, dalam teori graf, hubungan antara graf komplit dan pohon rentangannya juga dapat digunakan untuk menggambarkan hubungan nabi dengan para ulama sebagai penerus risalahnya.

Dalam teori graf, pohon rentangan dari sebuah graf komplit (K_n) adalah graf bagian yang dibentuk dari graf komplit (K_n), disebut subgraf, dimana graf (subgraf) tersebut memuat semua titik yang ada pada graf komplit (K_n) dan dia merupakan pohon. Selain itu, sebuah pohon rentangan dari suatu graf haruslah memiliki titik yang sama dari graf pembentuknya. Tetapi banyaknya sisi tidak harus sama dengan graf yang menjadi pembentuknya (dalam kasus ini, penulis merepresentasikan pohon rentangan dari graf komplit).

Di dalam Al Qur'an, Allah memerintahkan untuk mentaati rasulullah sebagaimana disebutkan dalam Q.S Annisa ayat 59, Ali Imran ayat 32, 132, Al Ahzab: 33, Muhammad: 33. Dalam ayat-ayat tersebut perintah untuk mentaati Rasulullah selalu digandeng setelah perintah untuk mentaati Allah. Namun secara jelas perintah untuk mentaati rasul juga disebutkan dalam Q.S. An-Nisa ayat 64 yang berbunyi

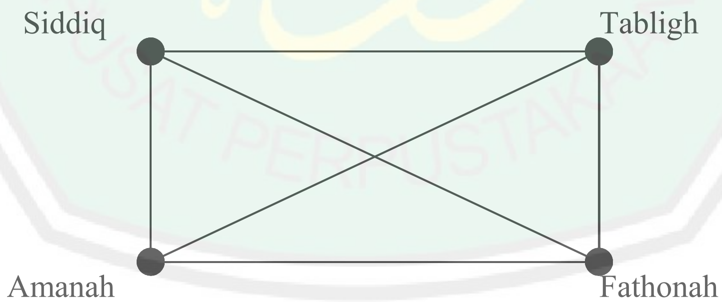
□□□□ □□□=□□□□□ □□□ □□□□□§□ □□□ □□□□□□□□ □□□□□□̃ « □… □□□□

64. "*Dan Kami tidak mengutus seseorang Rasul melainkan untuk ditaati dengan seizin Allah....*"

Setelah nabi wafat, sebagaimana disebutkan dalam sebuah hadits, nabi tidaklah meninggalkan warisan berupa dinar maupun dirham (harta), tetapi para ulama yang berpegang teguh pada Al Qur'an dan As-sunnah sebagai penerus risalahnya, sebagaimana diriwayatkan oleh Bukhari dan Muslim,

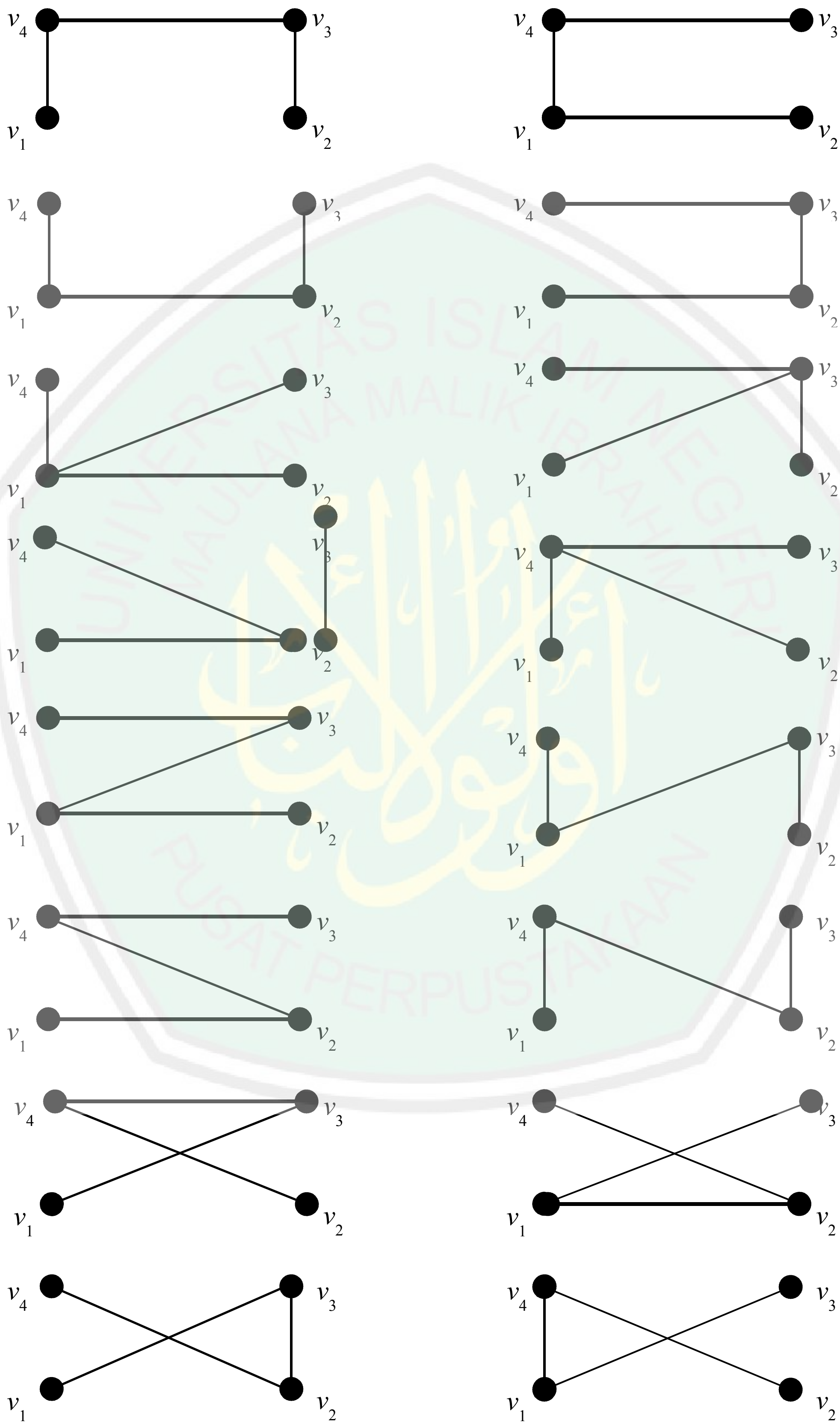
"*Sesungguhnya ulama adalah pewaris para nabi, sungguh para nabi tidak mewariskan dinar dan dirham, dan tidak pula setengahnya*". (H.R Bukhari 3470, Muslim 2541)

Seorang ulama, sebagai penerus risalah nabi tentu harus memiliki sifat-sifat utama yang dimiliki nabi. Misalkan sifat-sifat itu direpresentasikan sebagai titik-titik dalam sebuah graf komplit, maka titik-titik itu juga dimiliki oleh pohon rentangan dari graf tersebut. Untuk lebih jelasnya bisa digambarkan dalam graf komplit K_4 berikut,



Gambar 3.27. Representasi sifat-sifat Nabi dalam graf komplt K_4

Maka pohon rentangan dari graf komplit K_4 adalah:



Gambar 3.28. Pohon rentangan dari graf komplit K_4

dimana v_1 diartikan sebagai amanah, v_2 = fathonah, v_3 = tabligh, v_4 = siddiq.

Dari contoh graf komplit dan pohon rentangannya tersebut, ditunjukkan bahwa 4 sifat yaitu amanah, fathonah, tabligh dan siddiq semuanya ada didalam diri nabi sebagaimana digambarkan bahwa semua titik-titik itu terhubung. Sedangkan banyaknya sisi yang terkait langsung dengan titik yang ada adalah menggambarkan derajat titik itu, artinya nabi memiliki 4 sifat dengan derajat yang sama, 3, yang bisa dijadikan patokan derajat yang sempurna.

Selanjutnya dalam pohon rentangan yang terbentuk yang menggambarkan ulama sebagai pewaris nabi, 4 sifat itu tetap ada dan terhubung yang artinya juga harus dimiliki oleh seorang ulama. Selain itu, berbeda dengan nabi, 4 sifat yang dimiliki oleh para ulama tersebut memiliki derajat yang lebih kecil dan berbeda-beda antar satu ulama dengan ulama yang lain, hal ini tidak menjadi masalah selama 4 sifat yang dimilliki nabi tersebut tetap ada didalam diri seorang ulama sebagai penerus dan pewaris risalah nabi.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab III, maka dapat diambil kesimpulan antara lain:

1. Banyaknya pohon rentangan pada graf komplit (K_2) = 1
2. Banyaknya pohon rentangan pada graf komplit (K_3) = 3
3. Banyaknya pohon rentangan pada graf komplit (K_4) = 16
4. Banyaknya pohon rentangan pada graf komplit (K_5) = 125
5. Banyaknya pohon rentangan pada graf komplit (K_6) = 1296

Berdasarkan hasil penentuan banyaknya pohon rentangan graf komplit (K_n) dengan $n \in N$, maka dapat disimpulkan bahwa bentuk umum banyaknya pohon rentangan pada graf komplit K_n dengan $n \geq 2$ dan $n \in N$ adalah:

$$\text{Pohon rentangan } (K_n) = n^{n-2}$$

4.2 Saran

Apliksai matriks pohon dapat digunakan untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada sebarang graf terhubung. Sehingga, untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan penggunaan matriks pohon untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada jenis-jenis graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 1997. *Aljabar Linear Elementer*, Jakarta: Erlangga

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition.* California: Wadsworth. Inc.

Dhand, Vivek. The Matrix-Tree Theorem. (Online:http:www./math.msu.edu/~dhand/ diakses 06 Nopember 2009)

Dwi Astuti, Yuni. 2006. *Logika dan Algoritma. Pohon (Tree).* (Online:http:/www.yuni_dwi.staff.gunadarma.ac.id diakses 02 Nopember 2009).

Kurniawan, Haris. 2009. Spectrum Graf Komplit (Kn) dengan $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$. UIN Maulana Malik Ibrahim Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.

Purwanto. 1997. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP MALANG.

Quthb, Sayyid. 2008. *Tafsir Fi Zhilali Qur'an. Jilid 2.* Bandung: Gema Insani Press

------------------------- *Tafsir Fi Zhilali Qur'an. Jilid 10.* Bandung: Gema Insani Press

Shihab, Quraysh. 2004. *Membumikan Al Qur'an*. Bandung: Mizan.

Skiena. 1990. *Implementing Discrete Mathematics Combinatorics and Graph Theory with Mathematics*. (Online:http:/www.mathworld.wolfram.com/Matrix-TreeTheorem.html diakses 12 Desember 20009)

Sutarno, Heri. 2005. *Matriks*. Malang: UM Press

Turmudi dkk. 2006. *Islam, Sains & Teknologi.* Malang: UIN Press

Wallis, W. D., Baskoro, Edy T., Miller, and Slamin. Edge-Magic Total Labeling. *Australian Journal of Combinatorics Volume 22* (2000) 1-15.

Wilson, R. J and Watkins,J. J. 1990. *Graphs: An Introductory Approach a First Course in Discrete Mathematics*. Canada: John Willy and Sons, Inc.

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Umar Rojana**
NIM : **05510018**
Fakultas/ Jurusan : **Sains Dan Teknologi/ Matematika**
Judul Skripsi : **Aplikasi Matriks Pohon untuk menentukan banyaknya Pohon Rentangan Pada Garaf Komplit (K_n)**
Pembimbing I : **Drs. H. Turmudi, M.Si**
Pembimbing II : **Dr. Munirul Abidin, M.Ag**

No	Tanggal	HAL	Tanda	Tangan
1	09 Desember 2010	Konsultasi Masalah	1.	
2	14 Desember 2010	Konsultasi BAB I		2.
3	04 Januari 2010	Revisi BAB I	3.	
4	7 Januari 2010	Konsultasi BAB II		4.
5	13 Januari 2010	Revisi BAB II	5.	
6	29 Januari 2010	Revisi BAB II		6.
7	05 Febrauri 2010	Konsultasi BAB III	7.	
8	10 Februari 2010	Konsultasi Keagamaan		8.
9	12 Februari 2010	Revisi BAB III	9.	
10	15 Febrauri 2010	Revisi Keagamaan BAB III		10.
11	18 Februari 2010	Revisi Keseluruhan	11.	

Malang, 19 Februari 2010
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001