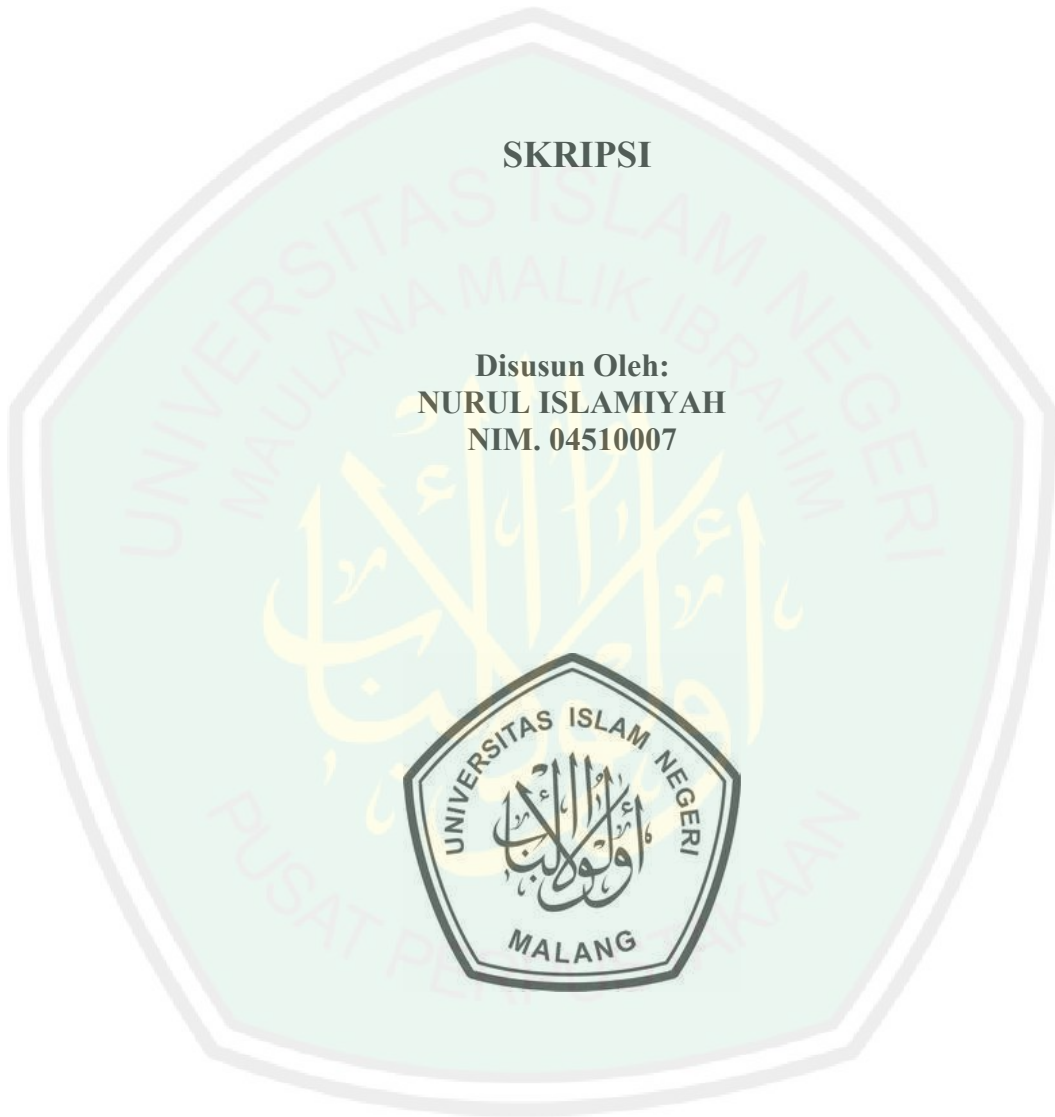


**APLIKASI DIAGONALISASI MATRIKS UNTUK
MENYELIDIKI PEWARISAN PADA GENOTIP GENERASI
Ke-n**

SKRIPSI

**Disusun Oleh:
NURUL ISLAMIYAH
NIM. 04510007**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009**

**APLIKASI DIAGONALISASI MATRIKS
UNTUK MENYELIDIKI PEWARISAN GENOTIP
PADA GENERASI KE-n**

SKRIPSI

Oleh:

NURUL ISLAMIYAH

NIM. 04510007

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 13 April 2009

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Drs.H.Turmudi, M.Si

NIP: 150 209 630

Abdussakir, M.Pd

NIP. 150 327 247

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si

NIP. 150 318 321

**APLIKASI DIAGONALISASI MATRIKS
UNTUK MENYELIDIKI PEWARISAN GENOTIP
PADA GENERASI KE-n**

SKRIPSI

Oleh:

NURUL ISLAMIYAH

NIM. 04510007

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 11 April 2009

Susunan Dewan Penguji

Tanda Tangan

- | | | | |
|------------------|-------------------------------|---|---|
| 1. Penguji Utama | : <u>Usman Pagalay, M.Si</u> | (|) |
| | NIP. 150 327 240 | | |
| 2. Ketua | : <u>Sri Harini, M.Si</u> | (|) |
| | NIP. 150 318 321 | | |
| 3. Sekretaris | : <u>Drs. H.Turmudi, M.Si</u> | (|) |
| | NIP. 150 209 630 | | |
| 4. Anggota | : <u>Abdussakir, M.Pd</u> | (|) |
| | NIP. 150 327 247 | | |

Mengetahui dan Mengesahkan,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si

NIP. 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : NURUL ISLAMİYAH

NIM : 04510007

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 April 2009

Yang membuat pernyataan

Nurul Islamiyah

NIM. 04510007

MOTTO

﴿الْمُحْسِنِينَ أَجْرُ يُضِيعُ لَا اللَّهُ فَإِنَّ وَأَصْبِرَ﴾

Artinya: “ Dan bersabarlah, Karena Sesungguhnya Allah tiada menyia-nyiakan pahala orang-orang yang berbuat kebaikan” (Q. S Huud: 115).

“Sebaik-baik Manusia adalah yang Paling Bermanfaat Bagi Orang Lain”

(HR. Bukhari dan Muslim)

PERSEMBAHAN

Dengan iringan doa dan rasa syukur yang teramat besar,

Karya tulis ini penulis persembahkan kepada:

Ayah dan ibu tercinta , dengan kesabaran dan pengorbanannya tanpa mengenal lelah dalam berusaha memberikan pendidikan yang lebih baik, untuk anak-anaknya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi dengan lancar.

Saudara-saudara tercinta, yang selalu memberikan dukungan moril dan spirituil.

KATA PENGANTAR



Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “*Aplikasi Diagonalisasi Matriks Untuk Menyelidiki Pewarisan Genotip Pada Generasi Ke-n* ” ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang .
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
3. Sri Harini, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
4. Drs.H. Turmudzi, M.Si, selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.

5. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing keagamaan, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.
6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf UIN Malang.
7. Teman-teman Matematika angkatan 2004, terima kasih atas doa serta kenangan yang kalian berikan.
8. Sahabat tercinta (Pebri dan Era) dan teman-teman warga wartel SD 4 (khususnya Bat, Eni, Eliza dan Nia) yang selalu membantu dan mendukung penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Mukhlis Firdiansyah yang senantiasa memberikan perhatian, dukungan, dan do'a selama menyelesaikan skripsi ini.
10. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan sprituil penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya matematika. Amien.

Malang, April 2009

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR i

DAFTAR ISIiii

DAFTAR TABEL..... vi

ABSTRAKvii

BAB I: PENDAHULUAN

A. Latar Belakang 1

B. Rumusan Masalah 4

C. Tujuan Penelitian 4

D. Batasan Masalah 4

E. Manfaat Penelitian 5

F. Metode Penelitian	6
G. Sistematika Pembahasan	7

BAB II: KAJIAN PUSTAKA

A. Kajian Tentang Matriks	8
1. Pengertian Matriks	8
2. Matriks Bujursangkar	10
3. Perkalian Matriks	13
4. Perpangkatan Matriks dan Polinomial dalam Matriks	15
5. Determinan.....	16
6. Invers Matriks.....	17
7. Nilai Eigen dan Vektor Eigen.....	24
8. Diagonalisasi Matriks.....	27
B. Kajian Tentang Genetika	
1. Penurunan Autosomal (<i>autosomal inheritance</i>).....	34
2. Kromosom.....	36
3. Genetika Mendel.....	37
4. Variabilitas Gen.....	38
5. Perkawinan Satu Sifat Beda (<i>Monohybrid</i>).....	38
6. Perkawinan Dua Sifat Beda (<i>Dihybrid</i>).....	39
7. Peristiwa Keacakan.....	40
a. Perkawinan Satu Sifat Beda (<i>Monohybrid</i>).....	40
b. Perkawinan Dua Sifat Beda (<i>Dihybrid</i>).....	42

C. Kajian Keislaman Tentang Genetika.....	44
---	----

BAB III: PEMBAHASAN

A. Penentuan Distribusi Genotip dari Warisan Autosomal.....	50
B. Aplikasi Diagonalisasi Matriks pada Pewarisan Genotip	51
1. Pewarisan Autosomal (<i>autosomal inheritance</i>).....	52
2. Penyakit Terpendam pada Autosomal.....	83
C. Kajian Keislaman tentang Matriks pada Warisan autosomal.....	104

BAB IV: PENUTUP

A. Kesimpulan	109
B. Saran	110

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Tabel 1 : Hasil Persilangan Dua Sifat Beda (<i>Dihybrid</i>) antara Laki-laki dan Perempuan Pembawa Penyakit bagi Warisan Autosomal.....	48
Tabel 2 : Peluang dari Persilangan Dua Individu bagi Penurunan Autosomal.....	49
Tabel 3 : Peluang Genotip dari Persilangan Individu yang Normal dengan Heterezigot dan Carier.....	53
Tabel 4 : Nilai $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n, h_n, i_n$ pada generasi 3.....	83
Tabel 5 : Peluang Genotip dari Persilangan Dua Sifat Beda (<i>Dihybrid</i>) antar Laki-laki Normal dan Perempuan Penderita.....	85
Tabel 6 : Peluang Genotip dari Persilangan Dua Sifat Beda (<i>Dihybrid</i>) antar Laki-laki Penderita dan Perempuan Normal.....	94

ABSTRAK

Islamiyah, Nurul. 2009. Aplikasi Diagonalisasi Matriks Untuk Menyelidiki Pewarisan Genotip Pada Generasi Ke-n. Skripsi, jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri. Pembimbing : Drs H. Turmudi, M. Si. dan Abdussakir, M. Pd.

Kata kunci : matriks, nilai eigen, vektor eigen, diagonalisasi matriks, genotip.

Sering kali banyak permasalahan di luar bidang matematika yang tidak dapat diselesaikan secara langsung. Maka harus dilakukan adalah manerjemahkan masalah itu menjadi masalah matematika yang disebut model matematika, sehingga akan dapat diselesaikan dengan mudah. Di dalam bidang genetika digunakan aljabar linier khususnya tentang matriks untuk menyelidiki keturunan dari suatu populasi. Melalui matematika, yaitu aljabar matriks akan dapat diketahui genotip yang dimiliki oleh setiap individu dari hasil perkawinan.

Di dalam suatu populasi terdapat bermacam-macam genotip, jika disilangkan atau dikawinkan maka akan diperoleh suatu distribusi genotip sampai generasi ke-n, dengan ketentuan persilangan dengan dua sifat beda (*dihybrid*) dengan perkawinan yang terkontrol. Dengan persilangan itu diharapkan dapat menghasilkan keturunan yang lebih baik. Adapun tujuan dari pembahasan ini adalah untuk mengetahui aplikasi diagonalisasi matriks pada warisan autosomal dan bentuk persamaan eksplisit dalam fraksi-fraksi dari AABB, AABb, AAbb, AaBB, AaBb, Aabb, aaBB, aaBb, dan aabb pada suatu populasi generasi ke-n. sedangkan metode yang digunakan penulis adalah kajian pustaka, yakni kajian yang bersumber dari buku-buku yang terkait dengan pembahasan ini.

Dalam menentukan keturunan ini akan dibahas mengenai warisan autosomal dan penyakit yang terpendam pada warisan autosomal. Beberapa penyakit yang berkaitan dengan warisan autosomal diantaranya kidal dan rambut kriting. Penyakit yang berkaitan dengan penyakit yang terpendam pada warisan autosomal yaitu albino (*Albinisme*). Untuk menyelesaikan masalah ini digunakan nilai eigen dan vektor eigen yang sangat erat hubungannya dalam pendagonalan suatu matriks bujursangkar. Dapat didefinisikan sebagai $D = PAP^{-1}$, dimana elemen-elemen matriks yang didiagonalisasi diperoleh dari probabilitas hasil perkawinan dari kedua induknya. Kemudian untuk menyelesaikan persamaan eksplisit dapat menggunakan rumus yaitu: $X^{(n)} = A^n X^{(0)} = PD^n P^{-1} X^{(0)}$.

Dari hasil perhitungan didapatkan bahwa pada generasi ke-n dimana limit untuk n menuju tak hingga diperoleh bahwa warisan autosomal dan penyakit yang terpendam pada warisan autosomal semua turunannya akan normal atau individu yang bergenotip AABB, yakni tidak ada lagi generasi yang menderita dan pembawa penyakit.



BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Dalam kehidupan di dunia, manusia tidak lepas dari berbagai macam permasalahan. Permasalahan-permasalahan tersebut menyangkut berbagai aspek, yang mana dalam penyelesaiannya diperlukan suatu pemahaman melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu. Salah satu ilmu bantu yang dapat digunakan adalah ilmu matematika. Ilmu Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Karena dalam bahasa matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan. Untuk keperluan tersebut, maka pertama dicari pokok masalahnya, kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya, sehingga masalah lebih mudah dipecahkan (Purwanto, 1998:1).

Matematika juga merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari sebagai hitungan dasar. Selain itu, matematika juga dapat digunakan sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu dengan model matematika ataupun penalaran matematika, sehingga suatu masalah dapat diselesaikan dengan mudah. Sebagaimana firman Allah SWT dalam Al Qur'an surat Al Maidah ayat 6 disebutkan :

مَا يُرِيدُ اللَّهُ لِيَجْعَلَ عَلَيْكُمْ مِنْ حَرَجٍ وَلَكِنْ يُرِيدُ لِيُطَهِّرَكُمْ وَلِيُتِمَّ نِعْمَتَهُ
عَلَيْكُمْ لَعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ﴿٦﴾

Artinya : “Allah tidak hendak menyulitkan kamu, tetapi dia hendak membersihkan kamu dan menyempurnakan nikmat-Nya bagimu, supaya kamu bersyukur”(Q.S Al Maidah : 6).

Pada genetika populasi, dipelajari tentang penurunan (hereditas) sifat-sifat yang dimiliki induk pada turunannya setiap pasangan kromosom yang dimiliki induknya diwariskan pada keturunannya satu kromosom, sehingga membentuk pasangan kromosom dalam individu dalam suatu generasi. Kromosom dibedakan menjadi dua yaitu autosom (kromosom tubuh) dan kromosom seks (Surya, 1984:xvi).

Dalam warisan autosomal (autosomal inheritance), setiap individu dalam populasi masing-masing jenis kelamin, akan memiliki dua dari antara kromosom-kromosom yang berikut, yakni pasangan-pasangan yang mungkin ditandai dengan AABB, AABb, AaBB, AaBb, Aabb, Aabb, aaBB, aaBb dan aabb.

Sumber studi matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan dalam Islam, adalah konsep tauhid, yaitu ke-Esaan Allah (Rahman, 1992:92). Namun, Al-Qur'an tidak mengangkat metode baru atau teknik baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta (Rahman, 1992:92). Alam semesta sendiri memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang

mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyagir, 2007:79). Demikianlah sebagaimana yang tertera pada surat Al-Qamar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: “Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran” (Q.S. Al-Qamar: 49).

Banyak sekali aplikasi matematika yang dapat dikaitkan dengan disiplin ilmu yang lain. Aljabar matriks merupakan salah satu teori matematika yang dapat di aplikasikan pada ilmu biologi, fisika dan ilmu ekonomi. Salah satu masalah biologi yang dapat diselesaikan dengan matriks adalah masalah genetika. Untuk menyelesaikan masalah genetika ini dapat menggunakan nilai eigen dan vektor eigen, diagonalisasi matriks serta limit untuk mengetahui sifat yang muncul pada individu di dalam suatu generasi. Untuk diagonalisasi matriks, rumus yang digunakan adalah $D = PAP^{-1}$, D merupakan diagonalisasi matriks. Sedangkan A adalah matriks yang diperoleh dari distribusi genotip dari suatu perkawinan dan matriks P diperoleh dari vektor-vektor eigennya.

Berdasarkan penurunan autosomal, gen-gen induk diteruskan kepada keturunannya untuk kedua jenis penurunan tersebut. Akan membentuk model matriks yang menunjukkan genotip yang mungkin pada keturunan dengan mengacu pada genotip induknya, kemudian model matriks tersebut untuk menyelidiki pewarisan genotip pada sebuah populasi dari generasi ke generasi. Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik untuk mengkajinya lebih lanjut

dengan mengangkat judul **"Aplikasi Diagonalisasi Matriks Untuk Menyelidiki Pewarisan Genotip pada Generasi Ke-n"**.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini antara lain:

1. Bagaimana aplikasi diagonalisasi matriks pada pewarisan genotip pada suatu populasi generasi ke-n?
2. Bagaimana penyelesaian persamaan eksplisit dalam fraksi-fraksi dari AABB, AABb, AAbb, AaBB, AaBb, Aabb, aaBB, aaBb, dan aabb genotif pada sebuah populasi generasi ke-n?

C. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan skripsi ini sebagaimana rumusan masalah di atas adalah:

1. Untuk mengetahui aplikasi diagonalisasi matriks pada pewarisan genotip pada suatu populasi generasi ke-n.
2. Untuk mengetahui penyelesaian persamaan eksplisit dalam fraksi-fraksi dari AABB, AABb, AAbb, AaBB, AaBb, Aabb, aaBB, aaBb, dan aabb genotip pada sebuah populasi generasi ke-n.

D. Batasan Masalah

Agar pembahasan dalam penelitian skripsi ini tidak meluas, maka penulis perlu memberikan batasan-batasan sebagai berikut:

1. Pewarisan genotipnya yang dibahas hanya pada pewarisan autosomal (*autosomal inheritance*).
2. Menggunakan perkawinan silang dengan dua sifat beda (dihybrid) dengan perkawinan yang terkontrol .
3. Bentuk persamaan eksplisit terjadi pada fraksi-fraksi AABB, AABb, AAbb, AaBB, AaBb, Aabb, aaBB, aaBb, dan aabb genotip pada sebuah populasi generasi ke-n dari fraksi-fraksi genotip awal.

E. Manfaat Penelitian

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat memberikan manfaat khususnya kepada penulis dan umumnya kepada semua pembaca baik secara teoritis maupun secara praktis.

1. Secara Teoritis

Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi sarana untuk menambah wawasan dan pengetahuan tentang aplikasi aljabar linear khususnya pada matriks.

2. Secara Praktis

Hasil penelitian tentang matriks ini diharapkan dapat digunakan untuk mengetahui sifat/karakter atau menyelidiki pewarisan pada genotip generasi ke-n.

F. Metode Penelitian

Jenis dari penelitian ini adalah deskriptif kualitatif. Pendekatan yang digunakan adalah pendekatan kualitatif dengan metode kepustakaan. Dalam pendekatan diskriptif kualitatif ini penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan (*library reseach*). Metode penelitian yang digunakan adalah kajian literatur atau metode penelitian kepustakaan (*library reseach*), yaitu penelitian yang dilakukan di perpustakaan dengan cara mengumpulkan data dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat di ruangan perpustakaan, seperti buku-buku, baik buku matematika maupun buku biologi dan catatan-catatan (Mardalis,1989:28).

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari, mempelajari dan menelaah sumber-sumber informasi yang berhubungan dengan topik yang diteliti.
2. Memberikan deskripsi dan pembahasan lebih lanjut tentang matriks pada pewarisan autosomal dengan genotip pada sebuah populasi generasi ke-n.
3. Mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut kemudian matriksnya didiagonalisasikan.
4. Mencari bentuk persamaan eksplisit.
5. Mencari nilai limit dari hasil perhitungan tersebut.
6. Memberikan contoh aplikasi diagonalisasi matriks pada pewarisan autosomal dengan genotip pada sebuah populasi generasi ke-n.
7. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil pembahasan.

G. Sistematika Pembahasan

Agar pembahasan dalam penelitian ini dapat dilakukan secara sistematis, maka sistematika penulisannya disusun dengan kerangka sebagai berikut:

BAB I: PENDAHULUAN

Bab ini merupakan bab pengantar yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penulisan, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II: KAJIAN PUSTAKA

Bab ini berisi tentang studi teoritis dari berbagai literatur dan sumber-sumber yang relevan dengan masalah yang diteliti. Bab ini membahas tentang pengertian matriks, operasi matriks, nilai eigen, vektor eigen, diagonalisasi matriks, genetika, penurunan autosomal, kromosom, genetika mendel, dan relevansinya dengan kajian keislaman.

BAB III: PEMBAHASAN

Bab ini memaparkan hasil penelitian dan pembahasannya tentang bentuk aplikasi diagonalisasi matriks pada pewarisan genotip pada sebuah populasi generasi ke- n dan bentuk persamaan eksplisitnya serta relevansi hasil pembahasan dengan kajian keislaman.

BAB IV: PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

A. Kajian Tentang Matriks

Matriks merupakan salah satu teori dalam matematika yang merupakan pengembangan lebih lanjut dari sistem persamaan linear, dan sering juga disebut aljabar matriks. Matriks dapat digunakan untuk merumuskan berbagai masalah secara singkat dan jelas untuk kemudian memecahkannya dengan mudah.

1. Pengertian Matriks

Definisi 2.1:

Suatu matriks (*matrix*) adalah suatu susunan segiempat siku-siku dari bilangan- bilangan. Bilangan- bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks (Anton,1997: 22).

Definisi 2.2:

Matriks ialah suatu susunan bilangan yang berbentuk persegi panjang (Cullen, 1993:49).

elemen yang terletak pada baris i dan kolom j di dalam matriks A akan dinyatakan sebagai a_{ij} . Dalam notasi matriks, $A = [a_{ij}]$, untuk $i = 1, \dots, m$ dan $j = 1, \dots, n$. Jadi matriks umumnya $m \times n$ adalah :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks A dikatakan berukuran $m \times n$ dan unsur a_{ij} berada pada baris-baris i dan kolom j . Dua matriks dikatakan sama jika ukurannya sama dan mempunyai unsur yang sama di dalam setiap posisi.

Bilangan-bilangan $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ yang menyusun rangkaian matriks pada definisi di atas disebut unsur dari matriks. Sedangkan ordo atau ukuran suatu matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom.

Contoh:

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & 6 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika a_{ij} menunjukkan elemen matriks A yang terletak pada baris ke- i dan kolom ke- j , tentukanlah:

- a. (i) banyak baris matriks A
- (ii) banyak kolom matriks A
- b. a_{11} , a_{21} , a_{24} dan a_{32}

jawab :

a. (i) Banyaknya baris matriks A adalah 3.

(ii) Banyaknya kolom matriks A adalah 4.

b. $a_{11} = 1$, $a_{21} = 2$, $a_{24} = 6$, dan $a_{32} = 0$

2. Matriks Bujursangkar

Matriks bujursangkar adalah matriks yang memiliki baris dan kolom yang sama banyak. Matriks bujursangkar $n \times n$ dikatakan sebagai matriks dengan orde n . Jika $A = [a_{ij}]$ dengan $i = 1, \dots, n$ dan $j = 1, \dots, n$ maka dinyatakan sebagai:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Misalnya $A = [a_{ij}]$ adalah matriks bujursangkar ordo n . Diagonal atau diagonal utama dari A terdiri elemen-elemen dengan subskrip bilangan kembar, yaitu:

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$$

Dan elemen-elemen $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \dots, a_{n1}$ dinamakan diagonal kedua (Lipschutz dan lipson, 2004: 28-29).

Menurut Gere dan Weaver (1987:22) ada beberapa jenis matriks bujursangkar, yaitu:

1. Matriks nol, yaitu matriks yang semua elemennya nol. Matriks ini berupa persegi panjang.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Matriks skalar, yaitu matriks bujursangkar yang diagonal utamanya berupa skalar λ . Dimana $S = [\lambda \delta_{ij}] = \lambda I$ dengan

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{untuk } i=j \\ 0 & \text{untuk } i \neq j \end{cases}, \text{ maka dapat ditulis sebagai :}$$

$$S = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

3. Matriks identitas (I), yaitu matriks identitas berordo n, yang ditulis dengan I atau I_n adalah matriks bujursangkar yang mempunyai angka-angka satu sepanjang diagonal utama (diagonal dari kiri atau menuju kanan bawah) dan nol dimana-mana.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Jika ditulis $I = [\delta_{ij}]$, maka $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = j \\ 0, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$

4. Matriks segitiga

Ada dua macam matriks segitiga, yaitu matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah.

a. Suatu matriks bujursangkar $A = [a_{ij}]$ adalah matriks segitiga atas jika dan hanya jika $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$ dapat ditulis sebagai :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

b. Suatu matriks bujursangkar $A = [a_{ij}]$ adalah matriks segitiga bawah jika dan hanya jika $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$ dapat ditulis sebagai :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

5. Matriks diagonal, adalah matriks bujursangkar yang mempunyai elemen-elemen nol kecuali elemen-elemen pada diagonal utamanya. Suatu matriks diagonal umum D , berordo $n \times n$ dimana $D = [\lambda_i \delta_{ij}]$, dapat dinyatakan sebagai :

$$A = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Dimana notasi D menunjukkan sebuah matriks diagonal berordo n , dan elemen $d_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$. Matriks diagonal disebut juga matriks segitiga atas dan juga segitiga bawah.

3. Perkalian Matriks

Secara umum operasi perkalian matriks dapat dilakukan dengan mengalikan suatu matriks A yang berordo $m \times n$ dengan matriks B yang berordo $n \times p$, sehingga hasil kalinya berupa matriks C yang berordo $m \times p$, dan dapat dinyatakan sebagai :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

dengan $C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$, untuk $i=1, \dots, m$ dan $j=1, \dots, p$

$$AB = C$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

Perkalian dilakukan antara baris-baris dari matriks A dan kolom-kolom dari matriks B yang menghasilkan matriks C. Elemen C_{11} berasal dari perkalian antara baris pertama matriks A dengan kolom pertama matriks B, yaitu $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}$. Elemen – elemen baris kedua matriks C dihitung dari perkalian antara baris kedua matriks A dengan setiap kolom matriks B secara bergantian, yaitu:

$$\begin{aligned} c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n2} \\ &\dots \qquad \qquad \qquad \dots \\ &\dots \qquad \qquad \qquad \dots \\ c_{2p} &= a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + \dots + a_{2n}b_{np} \end{aligned}$$

dan seterusnya sampai semua elemen matriks C terhitung.

Supaya suatu matriks dapat dikalikan maka kolom matriks A harus selalu sama dengan banyaknya baris matriks B (Gere dan Weaver, 1987:15).

4. Perpangkatan Matriks dan Polinomial dalam Matriks

Misalkan A adalah suatu matriks bujursangkar-n atas suatu medan K. Pangkat dari A didefinisikan sebagai berikut:

$$A^2 = AA, \quad A^3 = A^2 A, \quad \dots, \quad A^{n+1} = A^n A, \quad \dots \text{ dan } A^0 = 1$$

Polinomial-polinomial dalam matriks A juga didefinisikan. Khususnya untuk sebarang polinomial

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Dimana a_i adalah skalar-skalar dalam K, $f(A)$ didefinisikan sebagai matriks berikut:

$$f(x) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n$$

Perhatikan bahwa $f(A)$ diperoleh dari $f(x)$ dengan cara mensubstitusi skalar a_0 dengan matriks skalar $a_0 I$. Jika $f(A)$ adalah matriks nol, maka A disebut sebagai *nol* atau *akar* dari $f(x)$ (Lipschutz dan lipson, 2004:30).

Contoh :

$$\text{Anggaplah } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 38 \\ 57 & -106 \end{bmatrix}$$

Anggaplah $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ dan $g(x) = x^2 + 3x - 10$. Maka

$$f(A) = 2 \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{bmatrix}$$

$$g(A) = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi A adalah matriks nol dari polinomial $g(x)$.

5. Determinan

Determinan dari suatu matriks ialah jumlah dari semua bentuk perkalian secara diagonal dari elemen-elemen matriks dengan mengambil satu elemen dari baris atau kolom dengan memperhatikan urutan. Dalam penulisan determinan elemen-elemen matriks bujursangkar ditulis diantara sepasang garis tegak $| |$, misalnya matriks A dinotasikan dengan $|A|$.

Determinan matriks berordo 2×2 dan matriks berordo 3×3 adalah :

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

determinan suatu matriks berordo 2×2 dapat dicari dengan mengurangkan diagonal kedua dari diagonal utama matriks tersebut yaitu $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Untuk mencari determinan matriks berordo 3 x 3 dengan rumus

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{21}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Atau menggunakan $\det(A) = \sum a_{ij}(-1)^{i+j}|M_{ij}|$. Dimana M_{ij} adalah minor elemen a_{ij} , minor suatu matriks adalah determinan lain yang dibentuk dengan menghilangkan sejumlah sama (banyak) baris dan kolom dari determinan mula-mula. Ordo suatu minor ditentukan oleh banyaknya baris atau kolom pada minor itu sendiri (Assauri, 1983 : 60).

6. Invers Matriks

Definisi 2.3:

Matriks A yang berordo n x n dinamakan non singular jika ada matriks B yang bersifat $AB=I=BA$. B disebut invers dari A dan ditulis dengan A^{-1} (Assauri, 1985:77).

Misalkan $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, jika B adalah matriks invers dari A dimana

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \text{ maka } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dengan syarat}$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}z & a_{11}y + a_{12}w \\ a_{21}x + a_{22}z & a_{21}y + a_{22}w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi: } \begin{array}{ll} a_{11}x + a_{12}z = 1 & a_{11}y + a_{12}w = 0 \\ a_{21}x + a_{22}z = 0 & a_{21}y + a_{22}w = 1 \end{array}$$

Dengan menggunakan metode eliminasi maka dapat dinyatakan:

$$\begin{array}{l} \rightarrow \begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}z = 1 \\ a_{21}x + a_{22}z = 0 \end{array} \begin{array}{l} \times a_{21} \\ \times a_{11} \end{array} \left| \begin{array}{l} a_{11} \cdot a_{21}x + a_{12} \cdot a_{21}z = a_{21} \\ a_{11} \cdot a_{21}x + a_{11} \cdot a_{22}z = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a_{11} \cdot a_{21}x + a_{11} \cdot a_{22}z = 0 \\ a_{11} \cdot a_{21}x + a_{12} \cdot a_{21}z = a_{21} \\ \hline (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})z = -a_{21} \\ z = \frac{-a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}z = 1 \\ a_{11}x = 1 - a_{12} \left(\frac{-a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \right) \\ a_{11}x = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} + a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \\ x = \frac{a_{22}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \begin{array}{l} a_{11}y + a_{12}w = 1 \\ a_{21}y + a_{22}w = 0 \end{array} \begin{array}{l} \times a_{21} \\ \times a_{11} \end{array} \left| \begin{array}{l} a_{11} \cdot a_{21}y + a_{12} \cdot a_{21}w = a_{21} \\ a_{11} \cdot a_{21}y + a_{11} \cdot a_{22}w = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a_{11} \cdot a_{21}y + a_{11} \cdot a_{22}w = a_{11} \\ a_{11} \cdot a_{21}y + a_{12} \cdot a_{21}w = 0 \\ \hline (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})w = a_{11} \\ w = \frac{a_{11}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \end{array}$$

$$a_{11}y + a_{12}w = 0$$

$$a_{11}y = -a_{12} \left(\frac{a_{11}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \right)$$

$$a_{11}y = \frac{-a_{11} \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

$$y = \frac{-a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Karna determinan $A \neq 0$ dengan $|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$, maka dengan aturan Cramer.

$$\begin{cases} x = \frac{a_{22}}{|A|} \\ z = -\frac{a_{21}}{|A|} \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{a_{12}}{|A|} \\ w = \frac{a_{11}}{|A|} \end{cases}$$

$$\text{jadi } B = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

dimana $AB = BA = I$, maka B disebut invers dari matriks A (Assauri, 1983 : 77-78).

Suatu matriks bujursangkar dikatakan punya invers jika determinan matriks tersebut tidak sama dengan nol atau disebut non singular. Untuk mengetahui apakah suatu matriks merupakan invers dari suatu matriks lain adalah dengan mengalikan kedua matriks itu, jika hasilnya merupakan matriks identitas maka matriks itu dinamakan matriks yang dapat dibalik atau saling invers.

Definisi 2.4

Kofaktor unsur (i,j) matriks A didefinisikan sebagai

$$kof_{ij} = kof_{ij}(A) = (-1)^{i+j} |M_{ij}(A)| \quad (\text{Cullen, 1993:116}).$$

Definisi 2.5

Untuk suatu matriks A berordo $n \times m$, transpose matriks A , dilambangkan A^T , didefinisikan sebagai matriks $m \times n$ yang diperoleh dari A dengan menukarkan baris menjadi kolom lebih tepatnya, jika $B = A^T$, maka

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{Cullen, 1993 : 110}).$$

Definisi 2.6

Untuk sebarang matriks A berordo $n \times n$, adjoint matriks A didefinisikan sebagai matriks $n \times n$ yang unsur pada posisi (i,j) nya adalah kof_{ji} . Maka matriks adjoint dari A akan dilambangkan dengan $\text{adj}(A)$ (Cullen, 1993 : 126).

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, maka matriks kofaktor adalah

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \quad \text{transpos dari matriks kofaktor ini disebut}$$

adjoint matriks yaitu :

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Suatu matriks A dikalikan dengan adjoint matriksnya sama dengan adjoint matriksnya dikali dengan matriks A tersebut sama dengan determinan dikali matriks identitas. Jadi :

$$A(\text{Adj}(A)) = (\text{Adj}(A))A = (\det(A))I$$

Suatu matriks A berordo $n \times n$, maka adjoint matriksnya adalah :

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

(Assauri, 1983: 80-81).

Teorema 2.1:

Jika A adalah matriks yang dapat dibalik, maka:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

(Anton, 1997:82).

Bukti:

Jika A tak singular, maka $\det A$ adalah skalar tak nol sehingga invers sebuah matriks dapat dinyatakan dengan:

$$A \left(\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \right) = I \quad (2.1)$$

$$A(\text{adj}(A)) = \det(A) I$$

Mula-mula akan dibuktikan bahwa: $A(\text{adj}(A)) = \det(A) I$

Perkalian dari $A(\text{adj}(A))$ adalah

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri-entri dalam baris ke- i dan kolom ke- j dari $A(\text{adj}(A))$ adalah

$$a_{i1}c_{j1} + a_{i2}c_{j2} + \cdots + a_{in}c_{jn}$$

Dimana $i, j = 1, 2, \dots, n$, jika $i = j$ maka persamaan diatas adalah kofaktor dari $\det(A)$ sepanjang baris ke- i dari A . Sebaliknya jika $i \neq j$, maka koefisien-koefisien dan kofaktor-kofaktor berasal dari baris-baris A yang berbeda, sehingga nilai dari persamaan (2.1) sama dengan nol, sehingga

$$A(\text{adj}(A)) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I \quad (2.2)$$

Karena A dapat dibalik, maka $\det A \neq 0$, yakni non singular, sehingga persamaan (2.2) dapat dituliskan kembali sebagai :

$$\frac{1}{\det(A)} A(\text{adj}(A)) = 1 \text{ atau } A\left(\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)\right) = 1$$

Dengan mengalikan kedua ruas dari kiri dengan A^{-1} , maka akan menghasilkan $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$

Salah satu cara untuk mencari invers sebuah matriks adalah dengan membagi matriks adjoin dengan determinan matriks tersebut.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Carilah invers dari A

Selesaikan:

Mula-mula hitung $\det(A)$ dan $\text{adj}(A)$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (1 \times 5 \times 8) + (2 \times 3 \times 1) + (3 \times 2 \times 0) - (3 \times 5 \times 1) - (1 \times 3 \times 0) - (2 \times \\ &2 \times 8) = 40 + 6 + 0 - 15 - 0 - 32 = 46 - 47 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{adj}(A) &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T \\
 &= \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned}
 A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \\
 &= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

7. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Kata “vektor eigen” adalah ramuan bahasa Jerman dan Inggris. Dalam bahasa Jerman “eigen” diartikan sebagai “sebenarnya” atau “karakteristik”. Oleh karena itu nilai eigen dapat juga dinamakan nilai sebenarnya atau nilai karakteristik. Sedangkan vektor adalah bentuk matriks khusus yang hanya

mempunyai satu baris atau satu kolom. Jadi vektor eigen dapat diartikan sebagai vektor sebenarnya (Anton,1997).

Definisi 2.7 :

Misalkan A adalah suatu matriks $n \times n$, skalar λ disebut sebagai suatu nilai eigen atau nilai karakteristik dari A jika terdapat suatu vektor tak nol x , sehingga $Ax = \lambda x$. Vektor x disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari λ (Leon, 2001:260).

Menurut Anton (1998), untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka dapat ditulis kembali $Ax = \lambda x$ sebagai: $Ax = \lambda I x$

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad (2.3)$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan (2.3). Suatu persamaan akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika :

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) dinamakan persamaan karakteristik A , skalar λ yang memenuhi persamaan tersebut merupakan nilai eigen dari A . Bila diperluas maka persamaan karakteristik tersebut adalah polinom λ karakteristik dari A mempunyai derajat n dan koefisien dari λ^n adalah 1. Jadi polinom karakteristik dari matriks $n \times n$ mempunyai bentuk:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n$$

Dengan $\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n$ merupakan persamaan karakteristik yang mempunyai paling banyak n penyelesaian yang berbeda, sehingga suatu matriks $n \times n$ mempunyai paling banyak n nilai eigen yang berbeda.

Untuk mencari vektor eigen A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor tak nol x yang memenuhi dengan $Ax = \lambda x$. Secara ekuivalen, vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah vektor tak nol dalam ruang pemecahan dari

$$(\lambda I - A)x = 0$$

Contoh:

Carilah nilai-nilai eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Selesaikan:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 4 & -17 & -8 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Maka nilai-nilai eigen dari A harus memenuhi persamaan pangkat tiga $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$ untuk memecahkan persamaan (2.5), maka akan mulai mencari selesaian-selesaian bilangan bulat. Ini dapat disederhanakan dengan

memanfaatkan kenyataan bahwa semua pecahan bilangan bulat (jika ada) dari persamaan polinom dengan koefisien bilangan bulat $\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0$ harus merupakan pembagi dari suku konstan c_n . Jadi selesaian bilangan bulat yang mungkin hanya pembagi dari -4, yakni $\pm 1, \pm 2, \pm 4$, dengan mensubstitusikan nilai-nilai berturut-turut maka akan memperhatikan bahwa $\lambda = 4$ adalah selesaian bilangan bulat. Sebagai konsekuensinya maka $\lambda - 4$ haruslah merupakan faktor dari ruas kiri. Faktorisasi dapat dilakukan dengan pembagian, sehingga persamaan (2.5) menjadi: $(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$

Jadi selesaian selanjutnya memenuhi persamaan kuadrat

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

yang dapat diselesaikan dengan rumus kuadrat, maka nilai-nilai eigen dari A adalah

$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 2 + \sqrt{3} \quad \text{dan} \quad \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$$

8. Diagonalisasi Matriks

Definisi 2.8:

Suatu matriks bujur sangkar A dikatakan dapat didiagonalisasi (*diagonalizable*) jika terdapat sebuah matriks P yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal ;

matriks P dikatakan mendiagonalisasi (*diagonalize*) A (Anton, 2004: 395).

Teorema 2.2

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka kedua pernyataan berikut ini adalah ekuivalen.

- a. A dapat didiagonalisasi.
- b. A memiliki n vektor eigen yang bebas linear.

Bukti :

$(a) \Rightarrow (b)$ oleh karena A dapat didiagonalisasi, maka terdapat matriks yang dapat dibalik:

$P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, P merupakan vektor-vektor kolom yang bebas linear.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \text{ sehingga } P^{-1}AP \text{ diagonal,}$$

Katakan $P^{-1}AP = D$, dimana $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ maka $AP = PD$,

$$\text{yakni: } AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \dots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \dots & \lambda_n p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_1 p_{n2} & \dots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Jika sekarang dimisalkan $P_1, P_2, \dots, P_n$ menyatakan vektor-vektor kolom P maka bentuk persamaan (2.6) kolom-kolom AP yang berurutan adalah $\lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \dots, \lambda_n P_n$, akan tetapi kolom-kolom dari AP yang berurutan adalah:

$$AP_1 = \lambda_1 P_1, AP_2 = \lambda_2 P_2, \dots, AP_n = \lambda_n P_n \quad (2.7)$$

Oleh karena P dapat dibalik, maka vektor-vektor kolomnya semuanya tak nol, jadi menurut persamaan (2.7) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen A, dan $P_1, P_2, \dots, P_n$ adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian. Karena P dapat dibalik, maka diperoleh bahwa $P_1, P_2, \dots, P_n$ bebas linear. Jadi A mempunyai n vektor eigen bebas linear.

(b) $\Rightarrow$ (a) dimisalkan bahwa A mempunyai n vektor eigen bebas linear maka $P_1, P_2, \dots, P_n$ dengan nilai eigen yang bersesuaian $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dan misalkan :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

adalah matriks yang vektor-vektor kolomnya adalah $P_1, P_2, \dots, P_n$, kolom-kolom dari hasil kali AP adalah $AP_1, AP_2, \dots, AP_n$, tetapi

$$AP_1 = \lambda_1 P_1, AP_2 = \lambda_2 P_2, \dots, AP_n = \lambda_n P_n$$

sehingga $AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \dots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \dots & \lambda_n p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_1 p_{n2} & \dots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= PD \quad (2.8)$$

dimana D adalah matriks diagonal yang mempunyai nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada diagonal utama. Oleh karena itu vektor-vektor kolom dari P bebas linear, maka P dapat dibalik, jadi persamaan (2.8) dapat ditulis kembali sebagai $P^{-1}AP = D$, A terdiagonalisasi.

Dari bukti ini didapat prosedur untuk mendiagonalakan matriks A yang berukuran $n \times n$ (Anton, 1998: 286), sehingga langkah- langkah yang harus dilakukan adalah:

1. Carilah n vektor eigen bebas linear dari A yakni : $P_1, P_2, \dots, P_n$
2. Bentuk matriks P yang mempunyai $P_1, P_2, \dots, P_n$ sebagai vektor-vektor kolomnya.
3. Matriks $P^{-1}AP$ akan diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Adalah unsur diagonal utamanya yang berurutan, dimana λ_i adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan P_i , $i=1, 2, \dots, n$

Contoh:

Carilah matriks P yang mendiagonalakan:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Selesaian:

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0$$

Maka nilai eigen: $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 1$ untuk $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0 \quad \text{ambil } x_2 = s$$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian adalah

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Untuk } \lambda_3 = 1; (\lambda I - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-2x_1 + 2x_2 = 0$ maka $x_1 = x_2$ ambil $x_1 = t$, maka $x_3 = 0$. Jadi penyelesaiannya adalah $x_1 = x_2 = t$ dan $x_3 = 0$.

$$\text{sehingga vektor eigen yang bersesuaian adalah } v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{dengan demikian maka diperoleh: } P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ akan mendiagonalkan } A.$$

Sebagai pemeriksaan akan dibuktikan bahwa $D = P^{-1}AP$:

$$\begin{aligned}
 P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D
 \end{aligned}$$

dari hasil perhitungan dapat dilihat bahwa elemen-elemen dari matriks D sama dengan nilai-nilai eigen dari matriks A. Sehingga dalam pembahasan selanjutnya nilai matriks D dapat diperoleh langsung dari nilai-nilai eigen suatu matriks.

Untuk mendapatkan pernyataan eksplisit untuk A^n , maka pertamanya mendiagonalkan A, yakni dicari matrik P yang dapat dibalik dan matriks diagonal D sedemikian rupa sehingga $A = PDP^{-1}$

Pangkat suatu matriks bujursangkar dapat dinyatakan sebagai: $A^n = AA, \dots, A$ sampai ke n suku. Pangkat 2 dari matriks A ditulis A^2 atau $A \times A$, dimana matriks A muncul sebanyak n kali dalam perkalian di ruas kanan. Pangkat bilangan bulat positif dari suatu bujursangkar juga dapat dihitung dengan menggunakan matriks P dan matriks D. Jika persamaan $A = PDP^{-1}$

Dipangkatkan dua, maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
 A^2 &= PDP^{-1}PDP^{-1} \\
 &= PDIDP^{-1} \\
 &= PD^2P^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Proses tersebut dapat diulang untuk pangkat bilangan bulat yang lebih tinggi, sehingga hasil umumnya adalah: $A^n = PD^nP^{-1}$, dimana A adalah matriks bujursangkar ordo n yang mempunyai n buah vektor yang bebas linear, P adalah matriks yang bersesuaian dengan vektor-vektor eigen dan matriks D adalah matriks diagonal yang entri-entrinya bersesuaian dengan nilai-nilai eigen matriks A (Gere dan Weaver, 1987: 155).

B. Kajian Tentang Genetika

Genetika merupakan ilmu pengetahuan yang mempelajari tentang hereditas (pewarisan sifat-sifat individu pada keturunannya). Gen merupakan faktor turunan tersimpan didalam kromosom, yaitu di dalam manik-manik yang disebut kromoner atau nukleosom dari kromosom. Gen sebagai zarah kompak yang mengandung satuan informasi genetik dan mengatur sifat-sifat menurun tertentu, memenuhi lokus suatu kromosom. Setiap kromosom mengandung banyak gen. Gen terdiri dari DNA yang diselaputi dan diikat oleh protein. Jadi, secara kimia dapat disebut bahwa bahan genetis itu adalah DNA.

Gen memiliki sifat-sifat antara lain:

1. Dapat menduplikasi diri menjadi dua bentuk yang sama persis
2. Mengandung informasi genetik, dan
3. Merupakan zarah tersendiri yang menempati lokus tertentu dalam kromosom (Surya, 1984: xvi).

1. Pewarisan Autosomal (*autosomal inheritance*)

Pada pewarisan autosomal suatu individu mewarisi satu gen dari tiap pasangan gen induknya untuk membentuk pasangan gennya sendiri. Sejauh yang kita ketahui, hal ini berkaitan dengan peluang yang mana di antara dua gen dari induk yang diteruskan kepada keturunannya. Sehingga, jika salah satu induk mempunyai genotip AABb, maka kecenderungan bahwa keturunannya akan mewarisi gen AB atau gen ab dari induk tersebut adalah sama besarnya. Jika salah satu induk mempunyai genotip aabb dan yang lain mempunyai genotip AaBB, AaBb, AAbb, Aabb, aaBB, maka keturunan akan selalu menerima gen ab dari induk aabb, dan akan menerima AB atau gen ab, dengan probabilitas yang sama, dari induk AB, Ab, dan ab. Konsekuensinya, tiap keturunan mempunyai probabilitas yang sama untuk memiliki genotip aaBb, aabb atau AABb, AaBb.

Ciri dominan yang menunjukkan pewarisan autosomal adalah manifestasi dalam keadaan heterozigot, artinya seseorang dengan kelainan dimana kromosom tubuh mengandung satu gen abnormal yang akan

menyebabkan penyakit. Biasanya setiap penderita mempunyai salah satu orang tua yang sakit. Tetapi kadang-kadang kelainan dapat muncul pada satu generasi tanpa adanya satu anggota keluarga pada generasi sebelumnya yang terkena tersebut. Hal ini mungkin terjadi, karena kedua atau salah satu orang tua adalah pembawa (carrier).

Penyakit yang terpendam pada autosomal terjadi kelainan pada individu yang homozigot untuk gen yang mengalami kelainan, jika perempuan yang menderita menikah dengan laki-laki normal, maka anaknya perempuan normal karena individu yang heterozigot benar-benar sehat dan semua anak laki-laki penderita. Jika suatu sifat resesif adalah sangat jarang, seperti kebanyakan kondisi abnormal, maka peluang dua individu yang heterozigot bagi sifat ini adalah lebih besar jika mereka mempunyai hubungan keluarga daripada jika mereka tidak ada hubungan keluarga. Mengingat bahwa orang tua yang mempunyai keluarga bisa mewarisi gen yang sama dari nenek moyangnya. Jadi, tidaklah mengherankan jika ditemukan adanya perkawinan antar keluarga apabila berurusan dengan sifat resesif (Surya,1984:71) .

2. Kromosom

Sel merupakan kesatuan hereditas, sel dapat berperan dalam pewarisan sifat makhluk hidup. Pengendali faktor keturunan pada makhluk hidup disebut gen dan terdapat pada kromosom yang berada di dalam nukleus. Substansi genetik di dalam kromosom berupa asam nukleat yang terdiri atas

asam deoksiribonukleat (ADN) atau disebut juga DNA dan asam ribonukleat (ARN). DNA merupakan rangkaian dari gula deoksiribosa, asam fosfat, dan basa N (purin atau pirimidin). DNA dapat diduplikasi berulang kali, dan setiap duplikasi dapat diwariskan dari induk ke keturunannya. Penduplikasian sifat DNA ini mengakibatkan pemindahan informasi dari satu generasi ke generasi berikutnya (Welsh dan Moge, 1981:14).

3. Genetika Mendel

Pemuliaan tanaman pada dasarnya banyak dimanfaatkan pada prinsip-prinsip genetika dari hasil penelitian klasik Gregor Mendel. Pengetahuan ilmiah tentang pewarisan sifat telah sangat maju. Pada mulanya Mendel mempelajari beberapa jenis tumbuhan, namun akhirnya ia memilih tanaman ercis (*Pisum Sativum*), karena tanaman ini memiliki dua kriteria penting yang mendukung pemikirannya. Yang pertama, dia mengetahui ada beberapa ciri yang diwariskan berulang kali dari induk tanaman itu kepada generasi selanjutnya. Ciri tersebut adalah biji yang berbentuk bulat dan biji yang kisut.

Dengan mempelajari data semua karakter dan mengetahui hubungan antar karakter tersebut, maka muncullah hukum genetika yang diperkenalkan oleh Mendel dikenal dengan hukum Mendel, yaitu:

1. Hibrid F1 yang menghasilkan satu atau dua karakter biji berbeda, separuhnya akan berkarakter seperti F1, sedangkan lainnya tetap membentuk keturunan yang manerima karakter dominan atau resesif, masing-masing dalam jumlah yang seimbang.

2. Bila suatu tanaman hibrida yang memiliki beberapa karakter disilangkan, maka turunan tersebut akan menghasilkan seri kombinasi yang berpasangan. Pada turunan berikutnya, masing-masing pasangan karakter tersebut ternyata bermunculan secara bebas dari pasangan karakter induknya (Welsh dan Moge, 1981: 7-8).

4. Variabilitas Gen

Mendel menggunakan dua variasi alela untuk setiap karakter. Misalnya tinggi dikendalikan oleh satu lokus yang terdiri atas dua alela. Disebutkan bahwa kedua alela tersebut masing-masing terdiri atas satu alela dominan dan yang lain resesif, dan ia memberikan notasi untuk kedua alela tersebut masing-masing dengan huruf besar dan huruf kecil. Alela dominan menghasilkan individu tinggi, sedangkan alela resesif, bila homozigot menghasilkan tanaman pendek atau kerdil. Terminologi ini menyiratkan bahwa pada setiap gen tersebut terdapat dua bentuk alele. Hal ini mungkin benar bagi beberapa lokus tetapi bila lokusnya cukup banyak, maka kemungkinan alela yang dijumpai pada suatu individu dalam populasi, cukup besar pula (Welsh dan Moge, 1981: 33).

5. Perkawinan Monohibrid

Pada marmot. Rambut marmot (seperti juga pada manusia, tikus, dll). Ada yang hitam dan ada yang putih (albino). Marmot yang normal adalah yang berambut hitam, disebabkan karena ia memiliki gen dominan A yang

menentukan pembentukan pigmen melanin. Alelnya a dalam keadaan homozigotik menyebabkan melanin tidak terbentuk, sehingga marmot berambut putih. Perkawinan antara marmot jantan hitam dengan marmot betina albino menghasilkan keturunan F1 yang semuanya hitam. Jika anak-anaknya ini kawin sesamanya didapatkan keturunan F2 yang memperlihatkan perbandingan fenotip 3 hitam : 1 albino. Perbandingan genotipnya adalah $1AA : 2Aa : 1aa$ (Surya, 1984 : 10).

Pada manusia telah diketahui cukup banyak sifat hereditas (turun temurun), misalnya jari lebih (polydactyli) ditentukan oleh gen dominan P , sedang alelnya resesif p menentukan jari normal. Seorang ibu normal, suaminya polydactyli mempunyai 3 orang anak. Anak pertama dan ke dua adalah laki-laki polydactyli dan anak ketiga adalah perempuan normal.

6. Perkawinan Dihibrid

Pada marmot misalnya, rambut hitam (ditentukan oleh gen H) adalah dominan terhadap rambut putih (ditentukan oleh gen h). Rambut kasar (ditentukan oleh gen K) dominan pula terhadap rambut halus (ditentukan oleh gen k). Cara menurunnya gen-gen akan didapatkan perbandingan 9 hitam kasar : 3 hitam halus : 3 putih kasar : 1 putih halus.

Pada manusia telah diketahui cukup banyak sifat hereditas (turun temurun), misalnya sifat kidal adalah resesif dan ditentukan oleh gen kd . Sifat normal adalah dominan (ditentukan oleh Kd). Rambut keriting adalah dominan (ditentukan oleh gen Kr) terhadap rambut normal (lurus) yang

ditentukan oleh gen resesif kr. Seperti halnya , maka F2 akan didapatkan perbandingan 9 : 3 : 3 : 1.

7. Peristiwa Keacakan

a. Perkawinan Monohibrid

Mendel berpendapat pasangan tersebut terpisah secara seimbang dalam bentuk mekanisme komponen reproduksi jantan dan betina (gamet). Dengan cara demikian nantinya masing-masing karakter ini diwariskan pada generasi yang berikutnya. Pendapat mendel ini kemudian dijelaskan lebih lanjut dengan menggunakan papan catur (bujursangkar punnett). Pada tanaman yang mempunyai biji bulat dominan digunakan notasi karakter A, karakter pasangannya yaitu biji yang kisut resesif bernotasi a. Dua induk murni tanaman itu diperoleh dari hasil suatu seleksi dengan melihat karakter-karakter yang muncul pada setiap individu. Dengan demikian, maka diperoleh tanaman murni dengan karakter AA atau aa. Dalam genetika saat ini, tanaman yang mempunyai notasi karakter demikian disebut homozigot (*homozygote*). Dengan demikian pada induk murni atau tanaman homozigot pasangan karakter akan mengalami pemisahan notasi karakter yang tepat sama. Pada bujursangkar punnett (Gb. 2,1a) terlihat karakter gamet terletak di bagian tengah. Sebagai hasil persilangan induk murni maka F1 mempunyai notasi Aa, namun karena A sifatnya dominan maka biji yang merupakan generasi F1 ini mempunyai bentuk bulat. Tanaman yang mempunyai karakter Aa ini disebut heterozigot (*heterozygote*).

genotip	A
a	Aa

(a) Genarasi F1

genotip	A	A
A	AA	Aa
A	Aa	aa

(b) Generasi F2

Gambar 2.1 Segresi pola pewarisan pada persilangan $AA \times aa$ dengan sel-sel reproduksinya (gamet) pada margin dan anakan di bagian tengah.

Untuk mendapat hasil F2, perlu dipilih tanaman F1 yang baik. Perolehan populasi generasi F2, tertera pada bujursangkar punnett (Gambar 2.1b). di sini, setiap induk tanaman menyumbangkan karakter A dan a dengan perbandingan yang seimbang pada anaknya. Persilangan F1 menghasilkan sejumlah biji (generasi F2). Biji-biji tersebut mempunyai perbandingan karakter $1AA : 2Aa : 1aa$ dengan perbandingan bentuk sebagai berikut, 3 bulat : 1 kisut (Welsh dan Moge, 1981: 9 -10).

Diwaktu Mendel mengawinkan tanaman ercis berbatang tinggi dengan yang berbatang kerdil, maka semua tanaman keturunan pertama seragam berbatang tinggi. Suatu tanda bahwa sifat tinggi mengalahkan sifat kerdil. Sifat demikian disebut sifat dominan; sifat yang dikalahkan disebut sifat resesif. Ketika tanaman keturunan pertama tadi dibiarkan menyerbuk sendiri didapatkan tanam-tanaman keturunan ke dua yang memperlihatkan

pemisahan dengan perbandingan kira-kira $\frac{3}{4}$ batang tinggi : $\frac{1}{4}$ batang kerdil (Surya, 1984:7).

Dari perkawinan dua individu dengan satu sifat beda, yaitu :

1. Semua individu F1 adalah seragam.
2. Jika dominan nampak sepenuhnya yang dominan
3. Pada waktu individu F1 yang heterozigotik itu membentuk gamet-gamet terjadilah pemisahan alel, sehingga gamet hanya memiliki salah satu alel saja
4. Jika dominan nampak sepenuhnya, maka perkawinan monohibrid ($Tt \times Tt$) menghasilkan keturunan yang memperlihatkan perbandingan fenotip 3 : 1 (yaitu $\frac{3}{4}$ tinggi : $\frac{1}{4}$ kerdil), tetapi memperlihatkan perbandingan genotip 1: 2 : 1 (yaitu $\frac{1}{4}TT : \frac{2}{4} Tt : \frac{1}{4} tt$) (Surya, 1984 : 10).

b. Perkawinan Dihibrid

Pada hasil percobaan Mendel dengan tanaman ercis. Pada bijinya terdapat 2 sifat beda, yaitu soal bentuk biji dan warna biji. Kedua sifat beda ini ditentukan oleh gen-gen yang berbeda yaitu sebagai berikut :

A = Gen untuk biji bulat

a = Gen untuk biji keriput

B = Gen untuk biji kuning

b = Gen untuk biji hijau

Jadi bentuk bulat dan warna kuning adalah dominan. Jika tanaman ercis bulat kuning homozigotik (AABB) disilangkan dengan tanaman ercis berbiji keriput hijau (aabb), maka semua tanaman F1 berbiji bulat kuning. Apabila tanam-tanaman F1 membentuk 4 macam baik jantan maupun betina, masing-masing dengan kombinasi AB, Ab, aB dan ab. Akibatnya dalam F2 didapatkan $4 \times 4 = 16$ kombinasi, yang terdiri atas 4 macam fenotip, yaitu tanaman berbiji bulat-kuning (9/16 bagian), berbiji bulat-hijau (3/16 bagian), berbiji keriput-kuning (3/16 bagian) dan berbiji keriput hijau (1/16 bagian). Dua di antara keempat fenotip itu serupa dengan induknya semula, yaitu yang berbiji bulat-kuning dan yang berbiji keriput-hijau, sedangkan dua fenotip lainnya merupakan hasil baru, yaitu yang berbiji bulat hijau dan yang berbiji keriput-kuning (Gb 2.2).

Genotip	AB	Ab	aB	ab
AB	AABB	AABb	AaBB	AaBb
Ab	AABb	Aabb	AaBb	AaBb
aB	AaBB	AaBb	aaBB	aaBb
ab	AaBb	Aabb	aaBb	aabb

Gambar 2.2 segresi pola pewarisan pada persilangan AABB x aabb dengan sel-sel reproduksinya (gamet) pada margin dan anakan dibagian tengah.

C. Kajian Keislaman tentang Genetika

Al-qur'an merupakan sumber dari segala ilmu pengetahuan. Misalnya, ayat al-qur'an yang pertama-tama turun bukanlah perintah untuk sholat, puasa atau zakat tetapi perintah untuk membaca. Keberadaan ilmu menurut al-qur'an sangatlah luas, tidak terbatas terhadap segala sesuatu yang tampak saja atau berkaitan langsung dengan manusia ataupun harus menunggu dari hasil penemuan-penemuan manusia. Al-qur'an membuka selebar-lebarnya untuk menggali ilmu pengetahuan yang telah disediakan oleh Allah SWT (Ulum, 2007 : 20). Sebagaimana yang difirmankan dalam Q.S. Luqman ayat 27 :

وَلَوْ أَنَّمَا فِي الْأَرْضِ مِنْ شَجَرَةٍ أَقْلَمٌ وَالْبَحْرُ يَمُدُّهُ مِنْ بَعْدِهِ سَبْعَةُ أَنْحَارٍ مَا
نَفَدْتَ كَلِمَتُ اللَّهِ إِنَّ اللَّهَ عَزِيزٌ حَكِيمٌ

Artinya : "Dan seandainya pohon-pohon di bumi menjadi pena dan laut (menjadi tinta), ditambahkan kepadanya tujuh laut (lagi) sesudah (kering)nya, niscaya tidak akan habis-habisnya (dituliskan) kalimat Allah. Sesungguhnya Allah Maha Perkasa lagi Maha Bijaksana" (Q.S. Luqman :27)

Genetika merupakan ilmu pengetahuan yang mempelajari tentang hereditas (pewarisan sifat-sifat individu pada keturunannya). Gen merupakan faktor turunan tersimpan didalam kromosom, yaitu di dalam manik-manik yang disebut kromomer atau nukleosom dari kromosom.

Di dalam al-qur'an ternyata telah dijelaskan jauh sebelum ilmu genetika modern berkembang bahwa penentu jenis kelamin bayi adalah spermatozoa yang berasal dari air mani-mani laki-laki. Sebagaimana firman Allah SWT dalam surat An-Najm : 45-46.

وَأَنَّهُ خَلَقَ الزَّوْجَيْنِ الذَّكَرَ وَالْأُنثَىٰ ﴿٤٥﴾ مِن نُّطْفَةٍ إِذَا تُمْنَىٰ ﴿٤٦﴾

Artinya : "Dan bahwasanya dialah yang menciptakan berpasang-pasangan pria dan wanita, Dari air mani, apabila dipancarkan" (Q.S. An-Najm : 45-46).

Dalam al-qur'an dinyatakan berkali-kali bahwa Allah menurunkan air hujan dari langit. Dengan air itu bumi yang mati menjadi hidup, tumbuhlah tanaman yang beraneka ragam, kurma, anggur dan segala jenis buah-buahan, semua itu tumbuh dengan satu jenis air. Demikian juga pada saat Allah menciptakan manusia, air memiliki peran yang besar. Sebagaimana firman Allah SWT dalam surat Al-furqaan [67]:54

وَهُوَ الَّذِي خَلَقَ مِنَ الْمَاءِ بَشَرًا فَجَعَلَهُ نَسَبًا وَصِهْرًا ۚ وَكَانَ رَبُّكَ قَدِيرًا ﴿٥٤﴾

Artinya : "Dan dia (pula) yang menciptakan manusia dari air lalu dia jadikan manusia itu (punya) keturunan dan mushaharah dan adalah Tuhanmu Maha Kuasa" (Q.S. al-furqaan : 54).

Selain tumbuh-tumbuhan yang beraneka ragam dan manusia tercipta dari air, al-qur'an juga mempertegas bahwa segala sesuatu yang hidup tercipta dari air. Dalam surat Al- Anbiya' [68]: 30

أَوَلَمْ يَرِ الَّذِينَ كَفَرُوا أَنَّ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ كَانَتَا رَتْقًا فَفَتَقْنَاهُمَا ۚ وَجَعَلْنَا
مِنَ الْمَاءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ أَفَلَا يُؤْمِنُونَ ﴿٣٠﴾

Artinya : "Dan apakah orang-orang yang kafir tidak mengetahui bahwasanya langit dan bumi itu keduanya dahulu adalah suatu yang padu, Kemudian kami pisahkan antara keduanya. dan dari air kami jadikan segala sesuatu yang hidup. Maka mengapakah mereka tiada juga beriman" (Q.S Al-Anbiya':30).

Hal ini menunjukkan bahwa setiap jenis air akan memungkinkan timbulnya kehidupan. Betapa banyak kehidupan di sekitar kita yang disebabkan munculnya makhluk hidup yang berbahaya, misalnya nyamuk. Air yang kotor juga berarti air yang memiliki kandungan yang bercampur dengan bahan-bahan yang tidak bermanfaat, terutama untuk dikonsumsi. Karena itu, dari ayat tersebut dapat diambil hikmah agar senantiasa memperhatikan kebersihan air. Air yang bersih akan menciptakan suasana kehidupan yang bersih dan sehat.

Pada penurunan autosomal suatu individu mewarisi satu gen dari tiap pasangan gen induknya untuk membentuk pasangan gennya sendiri. Pewarisan sifat atau karakteristik seseorang kita ketahui saat ini secara kuantitatif separuh berasal dari ayah (sperma) dan separuhnya lagi berasal dari ibunya (sel telur) (Muchtaromah, 2007: 48). Sebagaimana firman Allah SWT dalam surat Maryam :28

يٰٓأَحْتٰ هٰرُوْنَ مَا كَانَ اَبُوكَ اَمْرًا سَوًّءًا وَمَا كَانَتْ اُمُّكَ بَغِيًّا

Artinya : "Hai saudara perempuan Harun, ayahmu sekali-kali bukanlah seorang yang jahat dan ibumu sekali-kali bukanlah seorang pezina" (Q.S. Maryam : 28).

Pada ayat diatas menyebutkan bahwa Maryam tidak akan berbuat salah atau dosa, sebab ayah dan ibunya tidak mewariskan itu kepadanya, artinya bahwa sifat dan karakter Maryam merupakan warisan dari ayah dan ibunya [49]: 28.

Allah SWT menciptakan makhluk hidup selalu berpasang-pasangan, bukan pada manusia maupun hewan saja tetapi tumbuhan juga saling

berpasang-pasangan. Sebagaimana firman Allah SWT dalam surat Adz-Dzariyat : 49 .

وَمِنْ كُلِّ شَيْءٍ خَلَقْنَا زَوْجَيْنِ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ ﴿٤٩﴾

Artinya : "Dan segala sesuatu kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat kebesaran Allah" (Q.S Adz-Dzariyat: 49).

Al-qur'an menjelaskan tentang bahan-bahan makanan dan buah-buahan yang tumbuh di atas bumi, sebagai hasil dari adanya air dan sinar matahari, yang merupakan sumber gizi bagi manusia. Allah menciptakan buah-buahan di atas bumi dalam dalam jenis yang berpasang-pasangan. Bahwa buah-buahan merupakan bagian makhluk hidup yang mengandung sel-sel jantan dan betina, yang berkembang biak melalui proses yang disebut pembuahan silang.

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam bab pendahuluan dan kajian pustaka yang telah dipaparkan di atas, maka selanjutnya akan di bahas tentang aplikasi diagonalisasi matriks untuk menyelidiki pewarisan pada genotip generasi ke-n. pada pembahasan ini akan diterangkan bagaimana cara menentukan kromosom dari orang tua yang di teruskan pada keturunan, yaitu perkawinan silang yakni persilangan dengan dua sifat beda (dihybrid) dengan perkawinan terkontrol.

A. Penentuan Distribusi Genotip dari Pewarisan

Ciri-ciri pewarisan yang akan di tinjau ditentukan atau di atur oleh dua kromosom (pembawa sifat) yang akan di tandai huruf AABb dan aabb. pada pewarisan autosomal setiap individu dalam populasi, masing-masing kelamin akan memiliki dua dari kromosom yang berikutnya, yaitu pasangan-pasangan dari persilangan dua sifat beda akan ditandai dengan AABb, AABb, AAbb, AaBB, AaBb, Aabb, aaBB, aaBb dan aabb atau disebut genotip. Genotip ini menentukan keturunan dari perkawinan silang.

Misalnya dalam warisan autosomal, suami istri masing-masing normal tetapi keduanya pembawa gen untuk albino. Maka perkawinan suami istri itu dapat digambarkan sebagai berikut.

Tabel 1. Hasil persilangan dua sifat beda antara laki-laki dan perempuan pembawa penyakit bagi warisan autosomal.

Genotip	AB	Ab	aB	ab
AB	AABB	AABb	AaBB	AaBb
Ab	AABb	AAbb	AaBb	AaBb
aB	AaBB	AaBb	aaBB	aaBb
ab	AaBb	Aabb	aaBb	aabb

Gambar 2.2 Segresi pola pewarisan pada persilangan AABB x aabb dengan sel-sel reproduksinya (gamet) pada margin dan anakan dibagian tengah

Dari tabel tersebut dapat di lihat bahwa 1/16 dari AABB, 1/8 dari AABb, 1/16 dari AAbb, 1/8 dari AaBB, 1/4 dari AaBb, 1/8 dari Aabb, 1/16 dari aaBB, 1/8 dari aaBb dan 1/16 dari aabb. Maka dapat dinyatakan bahwab "1/16" dari anak mereka adalah normal (AABB), seperempatnya adalah pembawa sifat atau heterezigot (AaBb) dan "1/16" lagi carier atau penderita penyakit (aabb). Hasil dari persilangan karakter F1 kemudian akan menghasilkan F2 dengan pola distribusi 9 : 3 : 3 : 1.

Dengan memperhatikan tabel di atas tentang persilangan dan kemungkinan-kemungkinan keturunan yang dihasilkan, maka selanjutnya akan dipaparkan secara langsung dari probabilitas dari genotip yang mungkin pada keturunan untuk seluruh kombinasi yang mungkin dari genotip induknya.

Tabel 2. Peluang dari persilangan dua individu bagi pewarisan autosomal.

Ge no tip da ri ke tur un an	Genotip dari kedua orang tua																																					
	A A B B - A A B B	A A B B - A A B b	A A B B - A A b b	A A B B - A a B B	A A B B - A a B b	A A B B - A a b b	A A B B - aa B B	A A B B - aa B b	A A B B - aa b b	A A B b- A A B b	A A B b- A a B B	A A B b- A a B b	A A B b- A a b b	A A B b- a a B B	A A B b- a a B b	A A B b- a a b b	A a B B - A a B B	AaB B- AaB b	Aa B B- Aa bb	A a B B - a a B B	A a B B - a a B b	A a B B - a a b b	A a B B - a a B b	A a B B - a a b b	A a b b - A a b b	A a b b - A a B B	A a b b - a a B b	A a b b - a a b b	a a B B - a a B B	a a B B - a a B b	a a B B - a a b b	a a B b - a a B b	a a B b - a a b b	a a b b - a a b b				
A A B B	1	1/2	0	1/2	1/2	0	0	0	0	1/4	0	1/4	1/8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/4	1/8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
A A Bb	0	1/2	1	0	0	1/2	0	0	0	1/2	1/2	1/4	1/4	1/4	0	0	0	0	1/2	1/2	0	0	0	1/8	1/4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A A bb	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/4	1/2	0	1/8	1/4	0	0	0	1	0	0	1/2	0	0	0	0	0	0	1/4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Aa B B	0	0	0	1/2	1/4	0	1	1/2	0	0	0	1/4	1/8	0	1/2	1/4	0	0	0	0	0	0	1/2	1/4	0	1/2	1/4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Aa Bb	0	0	0	0	1/4	1/2	0	1/2	1	0	0	1/4	1/4	1/4	1/2	1/2	1/2	0	1/2	1/4	0	1	1/2	0	0	1/2	0	1/2	1/4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Aa bb	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/8	1/4	0	1/4	1/2	0	0	1/4	1/2	0	1/2	1	0	0	0	0	1/8	1/4	1/4	1/8	1/4	1/2	0	0	0	0
aa B B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1/2	0	1/4	0	0	
aa Bb	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/2	1	1/2	1/2	0	0	
aa bb	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/4	1/2	1	1	



MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

B. Aplikasi Diagonalisasi Matriks pada Pewarisan Genotip

Dalam pembahasan ini akan diterangkan bagaimana cara kromosom dari orang tua yang di teruskan pada keturunannya. Matriks yang akan di bangun memberikan genotip yang mungkin dari keturunan yang dinyatakan dalam genotip induknya, sehingga akan diperoleh distribusi genotip dari satu populasi sampai generasi-generasi selanjutnya.

Untuk lebih memperjelas aplikasi diagonalisasi matriks untuk menyelidiki keturunan sampai generasi ke-n. maka di gunakan langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut :

1. Membentuk persamaan linear dari tabel yang menjelaskan peluang dari masing-masing genotip sedemikian sehingga didapatkan persamaan dalam notasi matriks.
2. Membentuk matriks A , kemudian di cari nilai-nilai eigen dari matriks A sehingga di peroleh pula vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen tersebut.
3. Membentuk matriks P dari vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen tersebut.
4. Substitusikan matriks A dengan matriks D yang sudah terlebih dahulu didiagonalisasi oleh matriks P .
5. Menyelesaikan persamaan distribusi genotip dalam generasi ke-n.
6. Membentuk sebuah persamaan eksplisit.
7. Dicari limit dari masing-masing persamaan untuk n menuju tak hingga.

Berdasarkan langkah-langkah diatas maka pewarisan autosomal dan penyakit yang terpendam pada keturunan autosomal dapat ditampilkan sebagai berikut:

1. Pewarisan Autosomal

Kemungkinan-kemungkinan dari genotip yang memiliki individu dari hasil persilangan adalah sebagai berikut.

Tabel 3. Peluang genotip dari persilangan atau perkawinan silang individu yang normal dengan heterozigot dan carier.

Genotip dari keturunan	Genotip dari kedua orang tua								
	AABB-AABB	AABB-AABb	AABB-Aabb	AABB-AaBB	AABB-AaBb	AABB-Aabb	AABB-aaBB	AABB-aaBb	AABB-aabb
AABB	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
AABb	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0
AAbb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AaBB	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
AaBb	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
Aabb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
aaBB	0	0	0	0	0	0	0	0	0
aaBb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
aabb	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Untuk menghitung probabilitas gen yang dimiliki satu individu maka dapat dibuat:

untuk $n = 0, 1, 2, \dots$

a_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip AABB pada generasi ke-n

b_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip AABb pada generasi ke-n

c_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip AAbb pada generasi ke-n

d_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip AaBB pada generasi ke-n

e_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip AaBb pada generasi ke-n

f_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip Aabb pada generasi ke-n

g_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip aaBB pada generasi ke-n

h_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip aaBb pada generasi ke-n

i_n = fraksi dari probabilitas individu dengan genotip aabb pada generasi ke-n.

Dan $a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0, h_0$ serta i_0 menyatakan distribusi permulaan dari genotip-genotip itu diketahui suatu probabilitas adalah :

$$a_n + b_n + c_n + d_n + e_n + f_n + g_n + h_n + i_n = 1 \text{ untuk } n = 1, 2, \dots$$

Dari tabel tersebut dapat ditentukan distribusi genotip setiap generasi dari distribusi genotip generasi terdahulu dengan menggunakan persamaan. Dimana persamaan itu menyatakan bahwa semua turunan yang di hasilkan, yakni $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n, h_n$ dan i_n dari individu yang bergenotip AABB, AABb, Aabb, AaBB, AaBb, Aabb, aaBB, aaBb dan aabb yang di nyatakan dengan $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, d_{n-1}, e_{n-1}, f_{n-1}, g_{n-1}, h_{n-1}, i_{n-1}$ Sedangkan koefisien-koefisien dari ketiga persamaan itu berasal dari probabilitas genotip yang mungkin dimiliki oleh individu tersebut dari hasil perkawinan, persamaan itu adalah:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}e_{n-1} \\
b_n &= \frac{1}{2}b_{n-1} + c_{n-1} + \frac{1}{2}f_{n-1} \\
c_n &= 0 \\
d_n &= d_{n-1} + \frac{1}{4}e_{n-1} + g_{n-1} + \frac{1}{2}h_{n-1} \\
e_n &= \frac{1}{4}e_{n-1} + \frac{1}{2}f_{n-1} + \frac{1}{2}h_{n-1} + i_{n-1} \\
f_n &= 0 \\
g_n &= 0 \\
h_n &= 0 \\
i_n &= 0
\end{aligned} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Pada persamaan (3.1) dari kesembilan persamaan di atas menunjukkan bahwa seluruh keturunan dengan genotip AABB, AABb, AaBB dan AaBb akan mempunyai genotip dalam program pengembangbiakkan ini, dari empat perenam belas dari turunan dengan genotip Aabb, Aabb, aaBB dan aaBb akan mempunyai genotip AABB.

Kemudian dapat ditulis persamaannya dalam notasi matriks sebagai :

$$X^{(n)} = AX^{(n-1)} \quad (3.2)$$

Dengan

$$X^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix}, \quad X^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \\ d_{n-1} \\ e_{n-1} \\ f_{n-1} \\ g_{n-1} \\ h_{n-1} \\ i_{n-1} \end{bmatrix} \text{ dan } A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pada persamaan (3.2), jika A dipangkatkan 2, maka persamaan tersebut menjadi :

$$X^{(n)} = A^2 X^{(n-2)}$$

Proses tersebut dapat diulang untuk pangkat bilangan bulat yang lebih tinggi, sehingga hasil umumnya adalah :

$$\begin{aligned} X^{(n)} &= A^n X^{(n-n)} \\ X^{(n)} &= A^n X^0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sebagai konsekuensinya, jika dapat dicari sebuah pernyataan eksplisit untuk A^n , maka dapat digunakan persamaan (3.3) untuk mendapatkan $X^{(n)}$ dengan cara mendiagonalisasikan matriks A . untuk mendiagonalisasikan matriks A yaitu dengan mencari matriks P yang dapat dibalik dan matriks diagonal D sedemikian sehingga :

$$A = PDP^{-1}$$

Dengan diagonalisasi seperti itu, menurut persamaan (2.9) maka akan diperoleh :

$$A^n = PD^n P^{-1} \quad \text{untuk } n = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Dimana

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k^n \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan matriks A di atas, maka dapat dicari A^n yaitu :

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda_1 - 1) \left(\lambda_2 - \frac{1}{2} \right) \lambda_3 \left(\lambda_4 - \frac{1}{2} \right) \left(\lambda_5 - \frac{1}{4} \right) \cdot \lambda_6 \cdot \lambda_7 \cdot \lambda_8 \cdot \lambda_9 = 0$$

Maka diperoleh nilai-nilai eigennya adalah :

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = \frac{1}{2}, \lambda_5 = \frac{1}{4}, \lambda_6 = 0$$

$$\lambda_7 = 0, \lambda_8 = 0 \text{ dan } \lambda_9 = 0$$

➤ Untuk $\lambda_1 = 1$

$$(\lambda I - A)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode operasi elementer baris (OBE) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow B1(-2) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow -\frac{1}{2}B1+B2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow B3(-2) \\
 & B4(-2) \\
 & \rightarrow B5(\frac{4}{3})
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{2}{3}B6 + B5 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} -2B7 + B4 \\ \rightarrow \frac{2}{3}B8 + B5 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{4}{3}B9 + B5 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang bersesuaian adalah :

$$x_2 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

$$x_4 + \frac{1}{2}x_5 + x_8 = 0$$

$$x_5 = 0$$

$$x_6 = 0$$

$$x_7 = 0$$

$$x_8 = 0$$

$$x_9 = 0$$

Maka $x_1 = s$, dan $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 0$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$ adalah :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

➤ Untuk $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$$(\lambda I - A)X = 0$$

$$\begin{bmatrix}
 -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3 \\
 x_4 \\
 x_5 \\
 x_6 \\
 x_7 \\
 x_8 \\
 x_9
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode OBE dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}
 -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 B1(-2) \\
 B3(2) \\
 B4(-4) \\
 \rightarrow B5(4) \\
 B6(2) \\
 B7(2) \\
 B8(2) \\
 B(2)
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -4 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 B3 + B2 \\
 \rightarrow B4 - B5
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 B2(-2) \\
 \rightarrow -2B6 + B5
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 -4B7 + B4 \\
 \rightarrow B5\left(\frac{1}{4}\right)
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} -2B8 + B4 \\ \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang bersesuaian adalah:

$$x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 0$$

$$x_6 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$x_5 = 0$$

$$x_7 = 0$$

$$x_8 = 0$$

$$x_9 = 0$$

Ambil $x_2 = s$, $x_4 = t$ misalkan s dan t=1.

Maka $x_1 = s - t$, $x_2 = s$, $x_3 = 0$, $x_4 = t$ dan $x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 0$

Sehingga vektor eigen dari yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ adalah :

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

➤ Untuk $\lambda_3 = 0$

$$(\lambda I - A)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode OBE dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} B1(-1) \\ B2(-2) \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -\frac{1}{2}B_2 + B_1 \\ B_3(-3) \\ B_4(-4) \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}B_3 + B_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}B_4 + B_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka sistem persamaan yang bersesuaian adalah :

$$x_1 - x_3 + \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{2}x_6 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 + x_6 = 0$$

$$x_4 - x_6 + 2x_7 - 2x_9 = 0$$

$$x_5 + 2x_6 + 2x_8 + 4x_9 = 0$$

$$x_1 = x_3 - \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{2}x_6$$

$$x_2 = -2x_3 - x_6$$

$$x_4 = x_6 - 2x_7 + 2x_9$$

$$x_5 = -2x_6 - 2x_8 - 4x_9$$

$$\text{ambil } x_3 = s, x_6 = t, x_7 = p, x_8 = q, \text{ dan } x_9 = r$$

Misal : s, t, p, q dan r = 1, untuk setiap s, t, p, q dan r $\in \mathbb{R}$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian adalah :

$$v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ -8 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

➤ Untuk $\lambda_4 = \frac{1}{2}$, $\lambda_4 = \lambda_2$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian adalah :

$$v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

➤ Untuk $\lambda_5 = \frac{1}{4}$

$$(\lambda I - A)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode OBE dapat dinyatakan :

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} B1(\frac{4}{3}) \\ B2(-4) \\ B3(4) \\ B4(-4) \\ \rightarrow B5(-2) \\ B6(4) \\ B7(4) \\ B8(4) \\ B9(4) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -4B3 + B2 \\ -4B7 + B4 \\ \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka sistem persamaan yang bersesuaian adalah:

$$x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 = 0$$

$$x_2 + 2x_6 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 + x_5 + 2x_8 = 0$$

$$x_6 + x_8 + 2x_9 = 0$$

$$x_6 = 0$$

$$x_7 = 0$$

$$x_8 = 0$$

$$x_9 = 0$$

Ambil $x_5 = 5$

Maka $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = -s$, $x_5 = s$ dan $x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 0$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian adalah:

$$v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

➤ Untuk $\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0$, $\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_3$

Sehingga vektor eigennya adalah :

$$v_6 = v_7 = v_8 = v_9 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ -8 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Akhirnya diperoleh :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dan

$$P = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9]$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 1 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mencari invers P dengan mereduksi matriks P menjadi matriks identitas yaitu :

$$[P|I]$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \begin{array}{l} -3B_3 + B_1 \\ B_4 - B_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccccccc|cccccccc} 1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -6 & -6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 3B3+B1 \\ -3B3+B2 \\ B3+B4 \\ -8B3+B5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 1 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 1 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan $A^n = PD^nP^{-1}$, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned}
 X^{(n)} &= A^n X^{(0)} \\
 &= PD^n P^{-1} X^{(0)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 1 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 1 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (-1)^n & 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 1 & -8 & -8 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2+(-1)^n+(-1)^n & 3-3(-1)^n & -2+(-1)^n+(-1)^n & 1 & 3-3(-1)^n+(-1)^n & 3-3(-1)^n+(-1)^n & 3-3(-1)^n+(-1)^n & 3-3(-1)^n+(-1)^n \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+2^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n-\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+2^n & -\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+2^n & -\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+2^n & -\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+2^n & -\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+2^n \\ 0 & 0 & -2^n & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & -2^n & -2^n & -2^n & -2^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + (-2 + (-1)^n + (-1)^n)b_0 + (3 - 3(-1)^n + (-1)^n)c_0 + (-2 + (-1)^n + (-1)^n)d_0 + e_0 + (3 - 3(-1)^n + (-1)^n)f_0 + (3 - 3(-1)^n + (-1)^n)g_0 + (3 - 3(-1)^n + (-1)^n)h_0 + (3 - 3(-1)^n + (-1)^n)i_0 \\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)b_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)c_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)d_0 - \left(\frac{1}{2}\right)e_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)f_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)g_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)h_0 \\ + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)i_0 \\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)b_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right)c_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)d_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)e_0 + \left(-\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right)f_0 + \left(-\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right)g_0 \\ + \left(-\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right)h_0 + \left(-\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right)i_0 \\ (-2)^n c_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^n e_0 + (-2)^n f_0 + (-2)^n g_0 + (-2)^n h_0 + (-2)^n i_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oleh kerana itu $a_n + b_n + c_n + d_n + e_n + f_n + g_n + h_n + i_n = 1$

Sehingga $a_0 + b_0 + c_0 + d_0 + e_0 + f_0 + g_0 + h_0 + i_0 = 1$

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_0 + b_0 + c_0 + d_0 + e_0 + f_0 + g_0 + h_0 + i_0 + ((-1)^n + (-1)^n)b_0 + (3^n + (-1)^n)c_0 \\
 &\quad + ((-1)^n + (-1)^n)d_0 + (3^n + (-1)^n)f_0 + (3^n + (-1)^n)g_0 + (3^n + (-1)^n)h_0 + (3^n + (-1)^n)i_0 \\
 b_n &= \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)b_0 + \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)c_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)d_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n e_0 \\
 &\quad + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)f_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)g_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)h_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)i_0 \\
 c_n &= 0 \\
 d_n &= \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)b_0 + \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right)c_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)d_0 + \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)e_0 + \\
 &\quad \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right)f_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right)g_0 + \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right)h_0 + \\
 &\quad \left(-3\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right)i_0 \\
 e_n &= (-2)^n c_0 + (-2)^n e_0 + (-2)^n f_0 + (-2)^n g_0 + (-2)^n h_0 + (-2)^n i_0 \\
 f_n &= 0 \\
 g_n &= 0 \\
 h_n &= 0 \\
 i_n &= 0 \quad n=1,2,\dots
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Pada persamaan (3.5) merupakan persamaan eksplisit untuk fraksi-fraksi dari kesembilan genotip pada populasi generasi ke-n yang di tinjau dari fraksi-fraksi genotip awal karna $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ cenderung mendekati nol untuk n menuju tak hingga

$n \rightarrow \infty$, maka limit dari persamaan (3.5) adalah :

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_0 + b_0 + c_0 + d_0 + e_0 + f_0 + g_0 + h_0 + i_0 + ((-1)^n + (-1)^n)b_0 + (3^n + (-1)^n)c_0 \\
 &\quad + ((-1)^n + (-1)^n)d_0 + (3^n + (-1)^n)f_0 + (3^n + (-1)^n)g_0 + (3^n + (-1)^n)h_0 + (3^n + (-1)^n)i_0\} = 1
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) b_0 + \left(-3 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) c_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) d_0 - \left(\frac{1}{2} \right)^n e_0 + \left(-3 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) f_0 + \left(-3 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) g_0 + \left(-3 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) h_0 + \left(-3 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) i_0 \right\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{0\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) b_0 + \left(-3 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2^n \right) c_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) d_0 + \left(-\left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) e_0 + \left(-3 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2^n \right) f_0 + \left(-3 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2^n \right) g_0 + \left(-3 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2^n \right) h_0 + \left(-3 \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2^n \right) i_0 \right\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (-2)^n c_0 + \left(\frac{1}{4} \right)^n e_0 + (-2)^n f_0 + (-2)^n g_0 + (-2)^n h_0 + (-2)^n i_0 \right\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{0\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{0\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{0\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{0\} = 0$$

Sehingga diperoleh :

$$a_n \rightarrow 1$$

$$b_n \rightarrow 0$$

$$c_n \rightarrow 0$$

$$d_n \rightarrow 0$$

$$e_n \rightarrow 0$$

$$f_n \rightarrow 0$$

$$g_n \rightarrow 0$$

$$h_n \rightarrow 0$$

$$i_n \rightarrow 0$$

Jadi dapat ditarik kesimpulan bahwa untuk n mendekati takhingga, turunan pada generasi ke- n semuanya bergenotip AABB.

Berdasarkan uraian diatas, maka genotip pada warisan autosomal pada generasi ke-n , dengan $n = 1, \dots, 3$ dapat dicontohkan sebagai berikut:

Misalkan distribusi permulaan dari genotip pada warisan autosomal adalah

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hitunglah X^n dan limit dari X^n jika n menuju tak berhingga!

Selesaian:

Mula-mula akan dicari A^n dengan matriks P , yang dapat dibalik dan matriks diagonal D , yaitu

$$D = PAP^{-1}$$

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Dengan melalui proses perhitungan yang panjang maka diperoleh :

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 1 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 1 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & (-1)^n & 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 1 & -8 & -8 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian maka X^n dapat dihitung, yaitu :

$$X^n = A^n X^{(0)}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 + (-1)^n + (-1)^n & 3 - 3(-1)^n & -2 + (-1)^n + (-1)^n & 1 & 3 - 3(-1)^n + (-1)^n & 3 - 3(-1)^n + (-1)^n & 3 - 3(-1)^n + (-1)^n & 3 - 3(-1)^n + (-1)^n \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_n & \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_n & 0 & -2^n & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & -2^n & -2^n & -2^n & -2^n \\ g_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh :

$$a_n = 1 - 6\left(\frac{1}{8}\right)^n + 2\left(\frac{3}{8}\right)^n - 3\left(\frac{1}{16}\right)^n + 3\left(\frac{3}{16}\right)^n$$

$$b_n = 6\left(\frac{1}{16}\right)^n - 3\left(\frac{3}{32}\right)^n + 3\left(\frac{1}{32}\right)^n - \left(\frac{1}{8}\right)^n - 2\left(\frac{3}{16}\right)^n$$

$$c_n = 0$$

$$d_n = 7\left(\frac{1}{16}\right)^n - 3\left(\frac{3}{32}\right)^n + 3\left(\frac{1}{32}\right)^n + 2\left(\frac{1}{8}\right)^n - 2\left(\frac{3}{16}\right)^n + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$e_n = -3\left(\frac{1}{8}\right)^n + \left(\frac{1}{16}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$f_n = 0$$

$$g_n = 0$$

$$h_n = 0$$

$$i_n = 0$$

Maka untuk n menuju tak berhingga, limitnya adalah :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - 6\left(\frac{1}{8}\right)^n + 2\left(\frac{3}{8}\right)^n - 3\left(\frac{1}{16}\right)^n + 3\left(\frac{3}{16}\right)^n \right\} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 6\left(\frac{1}{16}\right)^n - 3\left(\frac{1}{32}\right)^n + 3\left(\frac{1}{32}\right)^n - \left(\frac{1}{8}\right)^n - 2\left(\frac{3}{16}\right)^n \right\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{0\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 7\left(\frac{1}{16}\right)^n - 3\left(\frac{3}{32}\right)^n + 3\left(\frac{1}{32}\right)^n + 2\left(\frac{1}{8}\right)^n - 2\left(\frac{3}{16}\right)^n + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -3\left(\frac{1}{8}\right)^n + \left(\frac{1}{16}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{0\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{0\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{0\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{0\} = 0$$

Sehingga diperoleh $a_n=1, b_n=0, c_n=0, d_n=0, e_n=0, f_n=0, g_n=0, h_n=0$

dan $i_n=0$

Jadi pemberian distribusi permulaan tidak dipengaruhi nilai limit, oleh karena itu untuk n menuju tak berhingga tidak ada lagi penderita penyakit dan pembawa penyakit dalam populasi tersebut, atau dengan kata lain semua keturunannya bergenotip normal AABB.

Pengembangan dari contoh soal misalkan $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n, h_n, i_n$ untuk $n = 1, \dots, 3$ dapat ditabelkan adalah :

Tabel 4. Nilai $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n, h_n, i_n$ pada generasi 3

n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n	f_n	g_n	h_n	i_n
1	$3 \frac{3}{8}$	$4 \frac{5}{16}$	0	$9 \frac{3}{16}$	$5 \frac{1}{16}$	0	0	0	0
2	$3 \frac{1}{8}$	$4 \frac{71}{16}$	0	$9 \frac{5}{128}$	$5 \frac{11}{256}$	0	0	0	0
3	$3 \frac{33}{682}$	$4 \frac{149}{16384}$	0	$9 \frac{171}{16384}$	$5 \frac{55}{4096}$	0	0	0	0

Terlihat bahwa banyaknya individu pembawa penyakit (carier) dalam setiap generasi adalah seperempat dari banyaknya individu pembawa penyakit dalam generasi terdahulu.

2. Penyakit Terpendam Pada Autosomal

Suatu sifat keturunan yang di tentukan oleh sebuah gen resesif pada autosomal baru akan tampak bila suatu individu menerima gen itu dari kedua orang tuanya. Biasanya kedua orang tua itu nampak normal, meskipun sebenarnya pembawa gen resesif di mana masing-masing heterezigot (AaBb).

Misalkan di laksanakan suatu program untuk mengidentifikasi pembawa penyakit tersebut, dan semua pembawa penyakit yang diidentifikasi tersebut menyepakati untuk tidak menghasilkan turunan (tidak kawin) di antara sesama mereka. Dengan cara ini, semua anak masa depan akan mempunyai orang tua normal (AABB-AABB), (AABB-AABb), (AABB-AaBB) dan seorang orang tua pembawa penyakit (AABB-AaBb). Sebagai konsekuensinya, maka tidak ada anak masa depan yang akan menderita penyakit tersebut. Walaupun didalam generasi masa depan masih terdapat pembawa penyakit. Berdasarkan pelaksanaan program perkawinan terkontrol maka dapat ditentukan fraksi pembawa penyakit (carier) pada generasi-generabsi yang akan datang :

$$X^n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} \quad \text{untuk } n=1,2,\dots$$

dengan

a_n = Fraksi probabilitas individu yang genotipnya AABB dalam generasi ke-n.

b_n = Fraksi probabilitas individu yang genotipnya AABb dalam generasi ke-n.

c_n = Fraksi probabilitas individu yang genotipnya AaBB dalam generasi ke-n.

d_n = Fraksi probabilitas individu yang genotipnya AaBb dalam generasi ke-n.

Oleh karena tiap turunan mempunyai sedikit-dikitnya satu orang tua normal, maka di tinjau dari program perjodohan yang kontrol itu sebagai sebuah program

perjodohan yang berlangsung terus-menerus dengan genotip AABB. Jadi peralihan distribusi genotip ke generasi berikutnya ditentukan oleh persamaan

$$X^{(n)} = A^{(n)} X^{(0)} \quad \text{untuk } n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Dengan } X^n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}, \quad X^{(0)} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

dan A adalah matriks yang elemen-elemennya merupakan kemungkinan genotip yang di miliki turunan itu.

Hasil dari perkawinan dapat ditabelkan sebagai berikut :

Tabel 5. Peluang genotip dari perkawinan dua sifat beda (dihybrid) antar laki-laki normal dan perempuan penderita.

Genotip dari keturunan	Genotip dari kedua orang tua			
	AABB-AABB	AABB-AABb	AABB-AaBB	AABB-AaBb
AABB	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
AABb	0	$\frac{1}{2}$	0	0
AaBB	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
AaBb	0	0	0	$\frac{1}{4}$

Maka matriksnya

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Untuk mencari A'' , matriks M terlebih dahulu didiagonalisasi

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda_1 - 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \lambda_2 - \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 - \frac{1}{4} \end{vmatrix} \\ &= (\lambda_1 - 1) \left(\lambda_2 - \frac{1}{2} \right) \left(\lambda_3 - \frac{1}{2} \right) \left(\lambda_4 - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

sehingga diperoleh nilai-nilai eigen yang bersesuaian adalah :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{1}{4}$$

➤ Untuk $\lambda_1 = 1$

$$(\lambda I - A)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode OBE dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} B2(2) \\ \rightarrow B3(2) \\ B4(\frac{4}{3}) \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{2} B2 + B1 \\ \frac{1}{2} B4 + B3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka sistem persamaan yang bersesuaian adalah :

$$x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 0$$

Ambil $x_1 = s$, misals=1,

Maka $x_1 = s$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ dan $x_4 = 0$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian adalah :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

➤ Untuk $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$$(\lambda I - A)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode OBE dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} B1(-2) \\ B3(-4) \\ B4(4) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka sistem persamaannya adalah :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_4 = 0$$

Ambil $x_2 = s$ dan $x_3 = t$ untuk setiap $s, t \in R$

Maka $x_1 = -s - t$, $x_2 = s$, $x_3 = t$ dan $x_4 = 0$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian adalah :

$$v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

➤ Untuk $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = \lambda_2$

Maka vektor eigennya adalah :

$$v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

➤ Untuk $\lambda_4 = \frac{1}{4}$

$$(\lambda I - A)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode OBE dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{B1(\frac{4}{3}) \\ B2(-4) \\ B3(-4)}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{2}{3}B2 + B1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{2}{3}B3 + B1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka sistem persamaan yang bersesuaian adalah :

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 + x_4 = 0$$

Ambil $x_4 = s$, untuk setiap $s \in R$

Maka $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = -s$ dan $x_4 = s$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian adalah :

$$v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Akhirnya diperoleh:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$P = [v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad v_4]$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mencari invers P dengan mereduksi matriks P menjadi matriks identitas yaitu :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{2B2+B1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-2B2+B1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Sehingga diperoleh $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Mengingat bahwa $A^n = PD^nP^{-1}$, maka

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} X^n &= A^n X^{(0)} \\ &= PD^n P^{-1} X^{(0)} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (-1)^n & (-1)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 + (-1)^n + (-1)^n & -2 + (-1)^n + (-1)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + (-2 + (-1)^n + (-1)^n)b_0 + (-2 + (-1)^n + (-1)^n)c_0 \\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 \\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)c_0 - \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)d_0 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^n d_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 + c_0 + ((-1)^n + (-1)^n)b_0\left(-\frac{1}{2}\right) + ((-1)^n + (-1)^n)c_0\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 \\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)c_0 - \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)d_0 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^n d_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 + c_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)c_0 \\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 \\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)c_0 - \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)d_0 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^n d_0 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$

$$a_n = a_0 + b_0 + c_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)c_0$$

$$b_n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0$$

$$c_n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)b_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)c_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)d_0$$

$$d_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n d_0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

untuk n menuju tak hingga $n \rightarrow \infty$, maka limit dari persamaan (3.6) adalah :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) b_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) c_0 \right\} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) b_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) c_0 - \left(\frac{1}{2} \right)^n d_0 \right\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) b_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) c_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) d_0 \right\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^n d_0 \right\} = 0$$

Sehingga diperoleh

$$a_n \rightarrow 1$$

$$b_n \rightarrow 0$$

$$c_n \rightarrow 0$$

$$d_n \rightarrow 0$$

Tabel 6. Peluang genotip dari perkawinan dua sifat beda (dihybrid) antar laki-laki penderita dan perempuan normal.

Genotip dari keturunan	Genotip dari kedua orang tua			
	AABB-AABB	AABB-AABb	AABB-AaBB	AABB-AaBb
AABB	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
AABb	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$
AaBB	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
AaBb	0	0	0	$\frac{1}{4}$

Maka matriksnya

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Untuk mencari A^n , matriks M terlebih dahulu didiagonalisasi

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \lambda_2 - \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 - \frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_1 - 1) \left(\lambda_2 - \frac{1}{2} \right) \left(\lambda_3 - \frac{1}{2} \right) \left(\lambda_4 - \frac{1}{4} \right)$$

sehingga diperoleh nilai-nilai eigen yang bersesuaian adalah :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{1}{4}$$

➤ Untuk $\lambda_1 = 1$

$$(\lambda I - A)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode OBE dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} B2(2) \\ \rightarrow B3(2) \\ B4(\frac{4}{3}) \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{2} B2 + B1 \\ \frac{1}{2} B4 + B3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka sistem persamaan yang bersesuaian adalah :

$$x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 0$$

Ambil $x_1 = s$, misals=1,

Maka $x_1 = s$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ dan $x_4 = 0$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian adalah :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

➤ Untuk $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$$(\lambda I - A)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode OBE dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{B1(-2) \\ B3(-4) \\ B4(4)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka sistem persamaannya adalah :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 0$$

$$x_4 = 0$$

Ambil $x_2 = s$ dan $x_3 = t$ untuk setiap $s, t \in R$

Maka $x_1 = -s - t$, $x_2 = s$, $x_3 = t$ dan $x_4 = 0$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian adalah :

$$v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

➤ Untuk $\lambda_3 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = \lambda_2$

Maka vektor eigennya adalah :

$$v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

➤ Untuk $\lambda_4 = \frac{1}{4}$

$$(\lambda I - A)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode OBE dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{B1(\frac{4}{3}) \\ B2(-4) \\ B3(-4)}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{2}{3}B2 + B1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{2}{3}B3 + B1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka sistem persamaan yang bersesuaian adalah :

$$x_1 + x_4 = 0$$

$$x_2 + x_4 = 0$$

$$x_3 + x_4 = 0$$

Ambil $x_4 = s$, untuk setiap $s \in R$

Maka $x_1 = -s$, $x_2 = -s$, $x_3 = -s$ dan $x_4 = s$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian adalah :

$$v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Akhirnya diperoleh:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$P = [v_1, v_2, v_3, v_4]$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mencari invers P dengan mereduksi matriks P menjadi matriks identitas yaitu :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2B2+B1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2B2+B1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Mengingat bahwa $A^n = PD^nP^{-1}$, maka

$$\begin{aligned} X^n &= A^n X^{(0)} \\ &= PD^nP^{-1}X^{(0)} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (-1)^n & (-1)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

Dengan melaliu proses perhitungan yang panjang maka diperoleh:

$$a_n + b_n + c_n + d_n = 1$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + b_0 + c_0 + d_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) b_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) c_0 \\ b_n &= \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) b_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) c_0 - \left(\frac{1}{2} \right)^n d_0 \\ c_n &= \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) b_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) c_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) d_0 \\ d_n &= \left(\frac{1}{4} \right)^n d_0 \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

untuk n menuju tak hingga $n \rightarrow \infty$, maka limit dari persamaan (3.7) adalah :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) b_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) c_0 \right\} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) b_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) c_0 - \left(\frac{1}{2} \right)^n d_0 \right\} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) b_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) c_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) d_0 \right\} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^n d_0 \right\} = 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow 1 \\ b_n &\rightarrow 0 \\ c_n &\rightarrow 0 \\ d_n &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Jadi pemberian distribusi tidak mempengaruhi nilai limit, maka untuk n menuju tak hingga tidak ada lagi pembawa penyakit dalam populasi tersebut bergenotip (AABB).

Berdasarkan uraian di atas, maka genotip pada penyakit yang terpendam pada warisan autosomal pada generasi ke- n dapat dicontohkan sebagai berikut :

Diberikan distribusi awal yaitu a_0 , b_0 , c_0 dan d_0 dari genotip-genotip pada

penyakit terpendam pada keturunan autosomal yaitu : $X^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$. Hitunglah

X^n dan $\lim X^{(0)}$, n menuju tak berhingga!

Selesaian :

Berdasarkan persamaan (3.7) yaitu :

$$a_n = 1 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) b_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) c_0$$

$$b_n = \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) b_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) c_0 - \left(\frac{1}{2} \right)^n d_0$$

$$c_n = \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) b_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) c_0 + \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) d_0$$

$$d_n = \left(\frac{1}{4} \right)^n d_0 \quad n = 1, 2, \dots$$

Dan oleh karena itu $X^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, maka

$$a_n = 1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$$

$$b_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

$$c_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$d_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

Untuk n menuju tak berhingga limitnya adalah

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} \right\} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \right\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right\} = 0$$

Sehingga diperoleh

$$a_n \rightarrow 1$$

$$b_n \rightarrow 0$$

$$c_n \rightarrow 0$$

$$d_n \rightarrow 0$$

Jadi pemberian distribusi tidak mempengaruhi nilai limit, maka untuk n menuju tak hingga tidak ada lagi pembawa penyakit dalam populasi tersebut (genotip AABB).

C. Kajian Keislaman tentang Matriks pada Warisan Autosomal.

Genetika merupakan ilmu pengetahuan yang mempelajari tentang hereditas (pewarisan sifat-sifat individu pada keturunannya). Gen merupakan faktor turunan tersimpan didalam kromosom, yaitu di dalam manik-manik yang disebut kromoner atau nukleosom dari kromosom.

Di dalam al-qur'an ternyata telah dijelaskan jauh sebelum ilmu genetika modern berkembang bahwa penentu jenis kelamin bayi adalah spermatozoa yang berasal dari air mani-mani laki-laki. Sebagaimana firman Allah SWT dalam surat An-Najm : 45-46.

وَأَنَّهُ خَلَقَ الزَّوْجَيْنِ الذَّكَرَ وَالْأُنثَىٰ ﴿٤٥﴾ مِن نُّطْفَةٍ إِذَا تُمْنَىٰ ﴿٤٦﴾

Artinya : "Dan bahwasanya dialah yang menciptakan berpasang-pasangan pria dan wanita, Dari air mani, apabila dipancarkan" (Q.S. An-Najm : 45-46).

Pada penurunan autosomal suatu individu mewarisi satu gen dari tiap pasangan gen induknya untuk membentuk pasangan gennya sendiri. Pewarisan

sifat atau karakteristik seseorang kita ketahui saat ini secara kuantitatif separuh berasal dari ayah (sperma) dan separuhnya lagi berasal dari ibunya (sel telur)(Muchtaromah, 2007: 48). Sebagaimana firman Allah SWT dalam surat Maryam ayat 28:

يَتَّخِذَ هَرُونَ مَا كَانَ أَبُوكَ أَمْرًا سَوَاءً وَمَا كَانَتْ أُمُّكَ بَغِيًّا

Artinya : "Hai saudara perempuan Harun, ayahmu sekali-kali bukanlah seorang yang jahat dan ibumu sekali-kali bukanlah seorang pezina"(Q.S. Maryam : 28).

Pada ayat diatas menyebutkan bahwa Maryam tidak akan melakukan kesalahan, sebab ayah dan ibunya tidak mewariskan itu kepadanya, artinya bahwa sifat dan karakter Maryam merupakan warisan dari ayah dan ibunya [49]: 28.

Dari masalah genetika di atas, jika direlevansikan dengan kajian agama adalah sejajar dengan ayat yang menyebutkan bahwa segala sesuatu yang ada di dunia ini diciptakan oleh Allah SWT. sesuai dengan kadar dan ukurannya dan ditata-Nya dengan sedemikian rapi. Demikianlah sebagaimana yang tertera pada surat Al-Qamar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ

Artinya: "Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Q.S. Al-Qamar: 49).

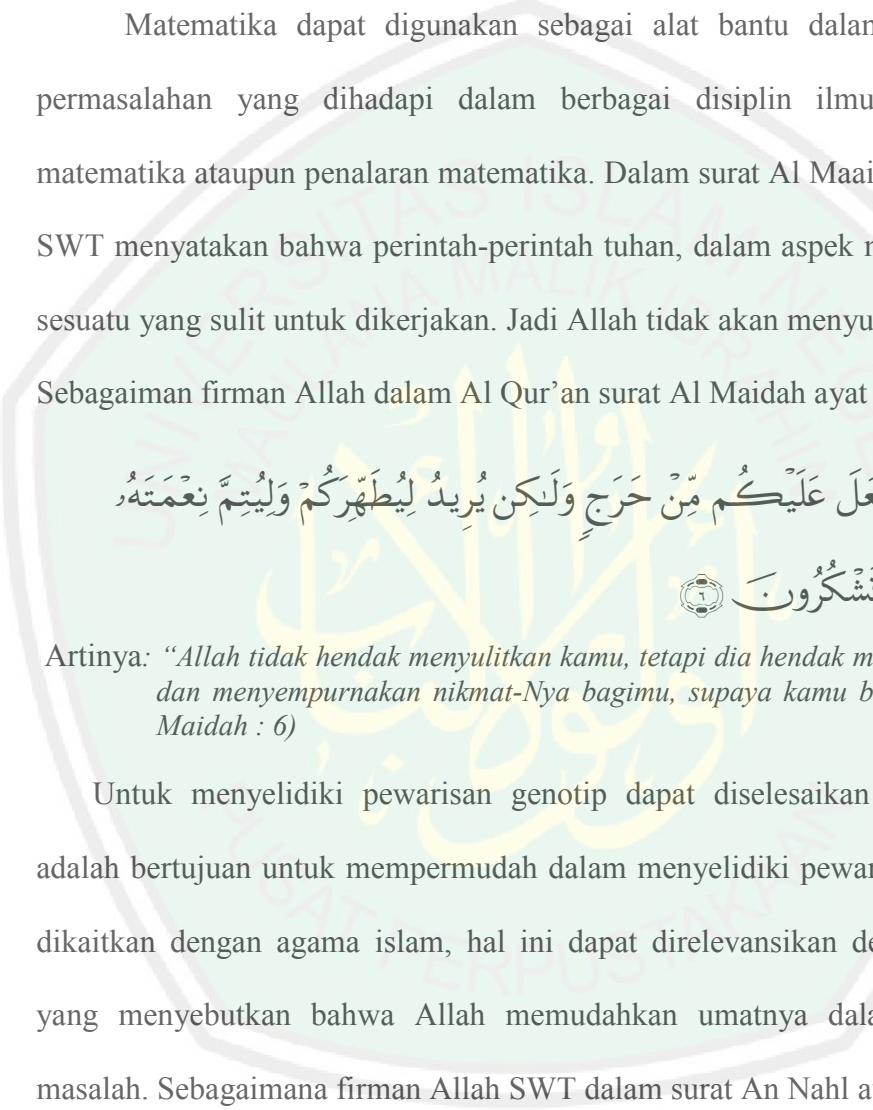
Juga dalam surat Al-furqaan ayat 2:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا

Artinya: "Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Q.S. Al-Furqaan:2).

Matematika dapat digunakan sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu dengan model matematika ataupun penalaran matematika. Dalam surat Al Maaidah ayat 6, Allah SWT menyatakan bahwa perintah-perintah tuhan, dalam aspek manapun tidaklah sesuatu yang sulit untuk dikerjakan. Jadi Allah tidak akan menyulitkan hambanya.

Sebagaiman firman Allah dalam Al Qur'an surat Al Maidah ayat 6 disebutkan :


 مَا يُرِيدُ اللَّهُ لِيَجْعَلَ عَلَيْكُمْ مِنْ حَرَجٍ وَلَٰكِنْ يُرِيدُ لِيُطَهِّرَكُمْ وَلِيُتِمَّ نِعْمَتَهُ
 عَلَيْكُمْ لَعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ

Artinya: "Allah tidak hendak menyulitkan kamu, tetapi dia hendak membersihkan kamu dan menyempurnakan nikmat-Nya bagimu, supaya kamu bersyukur" (Q.S Al Maidah : 6)

Untuk menyelidiki pewarisan genotip dapat diselesaikan dengan matriks adalah bertujuan untuk mempermudah dalam menyelidiki pewarisan genotip jika dikaitkan dengan agama islam, hal ini dapat direlevansikan dengan Al Qur'an yang menyebutkan bahwa Allah memudahkan umatnya dalam memecahkan masalah. Sebagaimana firman Allah SWT dalam surat An Nahl ayat 69 :

ثُمَّ كُلِي مِنْ كُلِّ الثَّمَرَاتِ فَاسْلُكِي سُبُلَ رَبِّكِ ذُلًّا

Artinya : ". Kemudian makanlah dari tiap-tiap (macam) buah-buahan dan tempuhlah jalan Tuhanmu yang Telah dimudahkan (bagimu)" (Q.S An Nahl : 69).

Sebagai akhir dari analisis tentang relevansi antara konsep salah satu cabang matematika yaitu aljabar matriks khususnya pada aplikasi diagonalisasi matriks pada masalah genetika dengan kajian agama Islam, yang sekaligus

merupakan hal yang utama yang dapat dijadikan sebagai refleksi dari semuanya. Setelah banyak mempelajari matematika yang merupakan ilmu hitung-menghitung serta banyak mengetahui mengenai masalah yang terdapat dalam matematika yang dapat direlevansikan dalam agama Islam sesuai dengan konsep-konsep yang ada dalam Al-Qur'an, maka akan dapat menambah keyakinan diri akan kebesaran Allah SWT selaku sang pencipta yang serba Maha, salah satunya adalah Maha Matematis. Karena Dialah sang raja yang sangat cepat dan teliti dalam semua masalah perhitungan (Abdusysyahir, 2007: 83). Hal ini sesuai dalam Al-Qur'an surat Al- Baqarah ayat 202:


 أُولَٰئِكَ لَهُمْ نَصِيبٌ مِّمَّا كَسَبُوا ۖ وَاللَّهُ سَرِيعُ الْحِسَابِ

Artinya: "Mereka itulah orang-orang yang mendapat bahagian daripada yang mereka usahakan; dan Allah sangat cepat perhitungan-Nya" (Q.S. Al-Baqarah: 202).

Juga dalam surat Maryam ayat 94:


 لَقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا

Artinya: "Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti" (Q.S. Maryam: 94).

Dari ayat di atas, dapat diketahui bahwa Allah yang dilukiskan sebagai *Ahshaahum* atau dalam istilah hadits *Asma' al-Husna* adalah *al-Muhshi*, dipahami oleh banyak ulama sebagai "Dia yang mengetahui kadar setiap peristiwa dan rinciannya, baik yang dapat dijangkau oleh manusia maupun yang tidak. Seperti hembusan nafas, rincian perolehan rezeki dan kadarnya untuk masa kini dan mendatang". Alhasil, Allah adalah Dia yang mengetahui dengan amat teliti rincian

segala sesuatu dari segi jumlah dan kadarnya, panjang, dan lebarnya, jauh dan dekatnya, tempat dan waktunya, kadar cahaya dan gelapnya, sedang atau ketika dan saat wujudnya dan lain sebagainya.

Dari sini terlihat, bahwa betapa kuasanya Allah dalam melakukan perhitungan meskipun pada dzat yang terkecil yang tak akan dapat dihitung dengan kasat mata manusia. Sekalipun menggunakan alat yang canggihpun, tidak akan ada yang dapat menyaingi Allah SWT. Sehingga hal ini dapat menambah ketaqwaan kita kepada Allah SWT sang Kholiq yang Maha cepat dalam penghitungannya. Selain itu, dengan mengetahui tentang kajian masalah berhitung yang ada dalam Al-Qur'an juga dapat menambah keyakinan bahwa meskipun matematika pada dasarnya tergolong dalam ilmu umum, tetapi sebenarnya telah banyak dibahas dalam Al-Qur'an. Hal ini terbukti, bahwa di dalam Al-Qur'an disiplin ilmu matematika tak hanya membahas masalah perhitungan angka saja, tetapi juga membahas masalah himpunan, bilangan, pengukuran, statistika, estimasi, dan masih banyak lagi keajaiban-keajaiban matematika yang terdapat dalam Al-Qur'an.

BAB IV

PENUTUP

Berdasarkan hasil pembahasan di atas, maka penggunaan diagonalisasi matriks dalam menentukan keturunan dapat disimpulkan sebagai berikut:

A. Kesimpulan

1. Aplikasi diagonalisasi matriks untuk menyelidiki pewarisan genotip pada generasi ke-n adalah sebagai berikut :
 - a. Membentuk persamaan linear dari tabel yang menjelaskan peluang dari masing-masing genotip sedemikian sehingga didapatkan persamaan dalam notasi matriks.
 - b. Membentuk matriks A, kemudian di cari nilai-nilai eigen dari matriks A sehingga diperoleh pula vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen tersebut.
 - c. Membentuk matriks P dari vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen tersebut.
 - d. Substitusikan matriks A dengan matriks D yang sudah terlebih dahulu didiagonalisasi oleh matriks P.
 - e. Menyelesaikan persamaan distribusi genotip dalam generasi ke-n.
 - f. Membentuk sebuah persamaan eksplisit.

g. Dicari limit dari masing-masing persamaan untuk n menuju tak hingga

2. Persamaan eksplisit dalam fraksi-fraksi dari AABB, AABb, AAbb, AaBB, AaBb, Aabb, aaBB, aaBb dan aabb pada populasi generasi ke- n . Akan diperoleh dari matriks A yang didiagonalkan, kemudian membentuk matriks P yang dapat di balik dan terdapat matriks diagonal D , sehingga dapat dinyatakan $A^n = PD^n P^{-1}$. Untuk menyelesaikan persamaan eksplisit tersebut dapat dicari dengan menggunakan rumus yaitu :

$$\begin{aligned} X^{(n)} &= A^n X^{(0)} \\ &= PD^n P^{-1} X^{(0)} \end{aligned}$$

B. Saran

Pembahasan tentang genetika ini selain menggunakan matriks dalam penyelesaiannya, dapat juga digunakan metode lain untuk perkawinan dengan tiga atau empat sifat beda dengan perkawinan acak. Karena dalam perkawinan secara acak akan menghasilkan persamaan-persamaan tak linear, sehingga dapat digunakan dengan metode lain. Dengan demikian pembahasan seperti ini bisa diteruskan dengan menggunakan metode lain selain matriks.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysykir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Anton, H dan Rorres, C. 2005. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan/ Jilid 2*. Jakarta: Erlangga.
- Anton, H dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan/ Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Anton, Howard.1997. *Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.
- Anton, H dan Rorres, C. 1988. *Penerapan Aljabar Linier*. Terjemahan: Pantura Silaban. Jakarta : Erlangga.
- Assauri, Sofyan. 1983. *Aljabar Linear Dasar Ekonometri Edisi Kedua*. Jakarta: Rajawali.
- Cullen, C, G. 1993. *Aljabar Linear dengan Penerapannya*. Terjemahan : Bambang Sumantri. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.
- Gere, J,M dan Weaver, W, Jr. 1987. *Aljabar Matriks Untuk Para Insinyur*. Terjemahan :G. Tejosutikno. Jakarta: Erlangga.
- Jauhari, Syekh Thantawi. 1984. *Al-qur'an dan Ilmu Pengetahuan Modern*. Surabaya: Al-ikhlas.
- Leon, Steven J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Jakarta: Erlangga.
- Lipschutz, S dan Lipso, M, L. 2004. *Schaum's Oulines Teori dan Soal Aljabar Linear Edisi Ketiga*. Terjemahan : Refina Indriasari. Jakarta: Erlangga.
- Mardalis. 1989. *Metode penelitian Suatu pendekatan Proposal*. Jakarta: bumi Aksara.
- Muchtaromah, Bayyinatul. 2007. *Siapakah Penentu Jenis Kelamin Bayi Studi Genetika Modern dalam AlQur'an*. Malang: UIN Malang Press.
- Naik, Zakir. 2005. *Jelajah Alam Bersama Al-qur'an*. Solo: Pustaka Arafah
- Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Rahman, Afzalur. 1992. *Al Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Surya. 1984. *Genetika Strata I*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.

Welsh, James R, dkk.1991. *Dasar-dasar Genetika dan Pemuliaan Tanaman*. Jakarta: Erlangga.





DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nurul Islamiyah
NIM : 04510007
Fakultas/ jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : Aplikasi Diagonalisasi Matriks Untuk Menyelidiki
Pewarisan Genotip pada Generasi Ke-n
Pembimbing I : Drs.H. Turmudi, M.Si
Pembimbing II : Abdussakir, M.Pd

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	06 Februari 2009	ACC Proposal	1.	
2	10 Februari 2009	Konsultasi BAB I		2.
3	12 Februari 2009	Revisi BAB I	3.	
4	18 Frebruari 2009	ACC BAB I		4.
5	27 Maret 2009	Konsultasi Keagamaan	5.	
6	12 Maret 2009	Konsultasi BAB II		6.
7	16 Maret 2009	Revisi BAB II	7.	
8	18 Maret 2009	ACC BAB II		8.
9	28 Maret 2009	Revisi Keagamaan	9.	
10	02 April 2009	ACC Keagamaan		10.
11	23 Maret 2009	Konsultasi BAB III	11.	
12	25 Maret 2009	Revisi BAB III		12.
13	01 April 2009	Konsultasi Keseluruhan	13.	
14	03 April 2009	ACC Keseluruhan		14.

Malang, 03 April 2009
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321