

**HOMOMORFISMA GRUP PADA MATRIKS YANG MEMPUNYAI
BALIKAN**

SKRIPSI

**OLEH
IKA ROHMAWATI
NIM. 09610105**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**HOMOMORFISMA GRUP PADA MATRIKS YANG MEMPUNYAI
BALIKAN**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Ika Rohmawati
NIM. 09610105**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**HOMOMORFISMA GRUP PADA MATRIKS YANG MEMPUNYAI
BALIKAN**

SKRIPSI

Oleh
Ika Rohmawati
NIM. 09610105

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 23 Desember 2014

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Drs. H. Turmudi, M.Si
NIP. 19571005 198203 1 006

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 1975006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**HOMOMORFISMA GRUP PADA MATRIKS YANG MEMPUNYAI
BALIKAN**

SKRIPSI

Oleh
Ika Rohmawati
NIM. 09610105

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 07 Januari 2015

Penguji Utama : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

Ketua Penguji : Abdul Aziz, M.Si

Sekretaris Penguji : Drs. H. Turmudi, M.Si

Anggota Penguji : Dr. Abdussakir, M.Pd

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ika Rohmawati
NIM : 09610105
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Homomorfisma Grup pada Matriks yang Mempunyai
Kebalikan

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Januari 2014
Yang membuat pernyataan,

Ika Rohmawati
NIM. 09610105

MOTO

فَمَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَرَهُ

“Barangsiapa yang mengerjakan kebaikan seberat biji “dzarrah” niscaya Dia akan melihat (balasan)nya” (Q.S. Al-Zalzalah : 7)”



PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ

Dengan iringan do'a serta rasa syukur yang tidak terbatas, karya ini penulis persembahkan kepada:

Ibunda (Toyibatun) dan Ayahanda (Rolis Wijaya) yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberikan dukungan, motivasi, dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu, serta selalu memberikan teladan yang baik bagi penulis.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb

Segala puji bagi Allah Swt. Atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-setingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan dosen pembimbing agama.
4. Drs. H. Turmudi, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.

6. Ayah dan ibu yang selalu memberikan doa, semangat, seta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
7. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2009, terutama Rohatul Wardah, Amanatul Husnia, Sukris Tri Handayani, Rita Anis Zulfia, Faza Trinawati, Luvi Dika Widyawati, dan Lina Putri yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terimakasih atas kenangan-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
8. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb

Malang, 12 Januari 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
ABSTRAK	xii
ABSTRACT	xiii
ملخص	xiv
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Metode Penelitian	5
1.6 Sistematika Penulisan	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Grup	7
2.1.1 Definisi Grup	8
2.1.2 Sifat – sifat Grup	9
2.2 Homomorfisma	14
2.3.1 Definisi Homomorfisma	14
2.3.2 Sifat-sifat Homomorfisama	15
2.4 Matriks	17
2.4.1 Definisi Matriks	17
2.4.2 Macam-macam Matriks	18
2.4.3 Operasi pada Matriks	20
2.4.4 Invers Matriks	22
2.5 Kajian Islam Mengenai Grup	27

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Grup matriks $GL_n(\mathbb{R})$	29
3.1.1 Definisi Grup Matriks $GL_n(\mathbb{R})$	29
3.1.2 Matriks $GL_n(\mathbb{R})$ terhadap operasi + adalah grup	30
3.1.3 Matriks $GL_n(\mathbb{R})$ terhadap operasi \times adalah grup	34
3.1.4 Sifat-sifat Grup Matriks $GL_n(\mathbb{R})$	40
3.2 Homomorfisma Grup $GL_n(\mathbb{R})$	51
3.2.1 Homomorfisma Grup $GL_n(\mathbb{R})$ yang didefinisikan $\phi(A_n) = \det A_n$	51
3.2.2 Homomorfisma Grup $GL_n(\mathbb{R})$ yang didefinisikan $\phi(A_n) = \text{tr}A_n$	55
3.2.3 Sifat-sifat Homomorfisma Grup $GL_n(\mathbb{R})$ yang didefinisikan $\phi(A_n) = \det A_n$	59
3.3 Inspirasi Al-Qur'an dalam Kajian tentang Grup	62

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	69
4.2 Saran	69

DAFTAR PUSTAKA	70
-----------------------------	----

RIWAYAT HIDUP	71
----------------------------	----

ABSTRAK

Rohmawati, Ika. 2014. **Homomorfisma Grup pada Matriks yang Mempunyai Balikan**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing:(I) Drs. H. Turmudi, M.Si (II) Dr. Abdussakir, M.Pd

Kata kunci: grup, homomorfisma, matriks yang mempunyai balikan

Matriks adalah susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut anggota dalam matriks tersebut. Matriks invertibel ($GL_n(\mathbb{R})$) adalah himpunan matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ yang entrinya merupakan bilangan real (\mathbb{R}) dan mempunyai balikan.

Grup adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma diantaranya tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan memiliki elemen invers. Homomorfisma grup adalah suatu fungsi yang mempunyai sifat mengawetkan operasi di dalam grupnya. Sifat $\phi(x * y) = \phi(x) \bullet \phi(y)$, dinamakan mengawetkan operasi artinya peta hasil operasi $x * y \in G$ sama dengan hasil operasi peta-petanya di H yaitu $\phi(x) \bullet \phi(y)$.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui keberlakuan sifat-sifat homomorfisma grup pada matriks yang mempunyai balikan.

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh bahwa suatu himpunan matriks invertibel yang entrinya adalah bilangan real yang didefinisikan $GL_n(\mathbb{R})$ dengan operasi pertambahan dan perkalian dengan skalar memenuhi 4 aksioma grup yaitu tertutup, asosiatif, mempunyai identitas, dan mempunyai invers.

Grup $GL_n(\mathbb{R})$ dengan $\phi: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan $A_n \rightarrow \det A_n$ dan $\phi: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan $A_n \rightarrow tr A_n$ adalah homomorfisma grup dan memenuhi sifat-sifat homomorfisma grup.

ABSTRACT

Rohmawati, Ika. 2015. **The Group Homomorphism on Invertible Matrix.**

Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology of the State Islamic University Maulana Malik Ibrahim of Malang. Advisor: (I) Drs. H. Turmudi, M.Si (II) Dr. Abdussakir, M.Pd

Keywords: group, homomorphism, invertible matrix

The matrix is a rectangular-shaped arrangement of numbers, the numbers in the array are called members in the matrix. Invertible matrix ($GL_n(\mathbb{R})$) is the set of squares matrix whose entries are real (R) numbers and has an inverse.

A group is a non empty set equipped with a binary operation that satisfies some axioms there are closed, associative, has the identity element, and has a group invers. Group homomorphism is a function that preserves the operation in the group. The property of $\phi(x * y) = \phi(x) \blacksquare \phi(y)$ is called preserving operation, that is the result of $x * y \in GL_n(\mathbb{R})$ is equal to its map operation in it, that is $\phi(x) \blacksquare \phi(y)$.

This study aims to determine the validity of the properties of the group homomorphism on invertible matrix.

Based on the results of the discussion, we obtain that A set invertible matrix whose entries are real numbers defined $GL_n(\mathbb{R})$ with addition operation and scalar multiplication satisfy the four axioms of group that is closed, associative, has an identity, and has an inverse.

Groups $GL_n(\mathbb{R})$ with $\phi: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ defined $A_n \rightarrow \det A_n$ and $\phi: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $A_n \rightarrow \text{tr} A_n$ is a group homomorphism and meet the properties of a group homomorphism.

الملخص

رهموت، إيكّا. لديها هممرسم . المجموعة في المصفوفة العكسية. بحث جا معى الشعبت. قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا لجامعة الإسلامية العكو ميت مولانا مالك إبراهيم مالانج. مستشار: (1)الدكاترة هج ترمد , مسيء (II) الدكتور ابدسسكر مفد

كلمات البحث: مجموعة مرفسم، مصفوفة عكسيت

المصفوفة هو ترتيب مستطيلة الشكل من الأرقام، وتسمى الأرقام في مجموعة أعضاء في المصفوفة. انفرتبيل المصفوفة هي مجموعة من المربعات المصفوفة التي مداخل هي أرقام حقيقية ولها العكس.

الز حرهي جصمو عث غير فا رغ التي مجهزة بعما ليت ثنائت و فاء البريهيم منها مغلقة، النقايي، لديه عنصر الهوية، ويحتوي على عنصر معكوس. تشاكل الزمر هي دالتى التي حافظت على طبيعة العملية في المجموعة. طبيعة، واسمه الحفاظ على العملية تعني النتائج خريطة جنباً إلى جنب مع نتائج عملية جراحة الخرائط في هـ.

تهدف هذه الدراسة إلى تحديد صلاحية خصائص تشاكل الزمر لديها مصفوفة عكسية. وبناء على نتائج المناقشة، وجدت أن مجموعة مصفوفة العكسيتى التي إدخالات هي الأعداد الحقيقية التي حددتها عملية الزيادة العددية والضرب تلبية مجموعة أربعة البديهيات مغلقة، النقايي، له هوية، ولها ردود الفعل.

الزحر مع تعريفها وتحديدها هو تشاكل الزمر والوفاء خصائص تشاكل الزمر.



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari sering diajarkan tentang betapa pentingnya mencari ilmu, baik ilmu agama maupun ilmu umum, karena pada dasarnya semua ilmu di dunia ini adalah ilmu Allah Swt. Salah satu ayat yang menjelaskan tentang pentingnya mencari ilmu adalah Q.S. al-Mujadalah ayat 11:

يَتَأْتِيهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا فِي الْمَجَالِسِ فَأَفْسَحُوا يَفْسَحِ اللَّهُ لَكُمْ وَإِذَا قِيلَ
 أَنْشُرُوا فَأَنْشُرُوا يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ ءَامَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ ۗ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ
 خَبِيرٌ ﴿١١﴾

“Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: ‘Berlapang-lapanglah dalam majlis’, Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu dan apabila dikatakan: ‘Berdirilah kamu’, Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan” (QS. Al-Mujadalah/58:11)

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa ketika seseorang disuruh melapangkan majelis yang berarti melapangkan hati, bahkan jika disuruh berdiri sekalipun lalu memberikan tempatnya kepada orang yang patut didudukkan di muka janganlah dia berkecil hati. Melainkan hendaklah dia berlapang dada karena orang yang berlapang dada itulah kelak yang akan diangkat imannya dan ilmunya oleh Allah Swt. sehingga derajatnya bertambah naik. Orang yang patuh dan sudi memberikan tempat kepada orang lain itulah yang akan bertambah ilmunya. Salain itu ada orang yang diangkat Allah Swt. derajatnya lebih tinggi dari pada orang kebanyakan, pertama karena imannya, kedua karena ilmunya. Setiap hari kita dapat melihat pada raut muka, pada wajah, pada sinar mata orang yang

beriman dan berilmu. Dengan kata lain, betapa ilmu bisa mengangkat derajat manusia di hadapan Allah Swt dan di hadapan manusia lainnya. Baik itu ilmu agama atau ilmu sains pada hakikatnya semua ilmu adalah ilmu Allah Swt.

Aljabar adalah salah satu ilmu yang paling tua dari semua cabang matematika. Sejarahnya adalah sepanjang sejarah dari peradapan. Barang kali lebih panjang. Sejarawan yang terkenal tentang matematika B. L. Van der Waerden percaya ada suatu peradapan yang mendahului peradapan dari mesopotamia, mesir, china, dan india dan bahwa peradapan itu adalah sumber akar dari konsep matematika yang paling awal (Tabak, 2004:xi).

Sebagai cabang matematika seperti halnya teori bilangan, geometri, maupun matematika terapan lainnya, aljabar merupakan salah satu bidang matematika yang mempunyai banyak sekali materi yang dapat dibahas, diantaranya adalah bilangan, himpunan, operasi himpunan, grup, latis, dan sebagainya. Salah satu sistem aljabar yang paling sederhana adalah grup. Grup didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma, diantaranya tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan memiliki elemen invers. Apabila salah satu aksioma tidak terpenuhi maka bukan grup. Sistem aljabar $(G, *)$ dengan himpunan tidak kosong di G dan operasi biner $*$, didefinisikan di G adalah grupoid. Grupoid juga disebut semigrup jika operasi biner $*$ di G adalah asosiatif. Sedangkan semigrup yang mempunyai elemen identitas di G disebut monoid (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:32).

Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks, ukuran (*size*)

suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (arah horizontal) dan kolom (arah vertikal) yang biasanya digunakan dengan simbol $M_{n \times m}$ untuk matriks M dengan n baris dan m kolom (Anton dan Rorres, 2004:26). Jika diberikan matriks persegi $A_{n \times n}$ maka matriks $B_{n \times n}$ yang memenuhi kondisi $AB = I$ dan $BA = I$ disebut invers dari A dan dilambangkan dengan $B = A^{-1}$. Tidak semua matriks persegi mempunyai invers. Matriks nol adalah contoh sederhana tetapi banyak juga matriks tak nol yang tidak mempunyai invers. Matriks yang mempunyai invers dikatakan *nonsingular*, dan matriks yang tidak mempunyai invers disebut matriks *singular* (Meyer, 2000:115).

Homomorfisma grup yaitu salah satu jenis fungsi yang mempunyai sifat mengawetkan operasi di dalam grupnya. Sifat $\phi(x * y) = \phi(x) \circ \phi(y)$, dinamakan mengawetkan operasi artinya peta hasil operasi $x * y \in G$ sama dengan hasil operasi peta-petanya di H yaitu $\phi(x) \circ \phi(y)$ (Cholily, 2013:3).

Novi Rustiana Dewi (2011) telah membahas mengenai kajian struktur aljabar grup pada matriks yang invertibel. Pada penelitian tersebut telah dibuktikan bahwa matriks yang mempunyai invers memenuhi sifat-sifat grup di antaranya tertutup, asosiatif, mempunyai identitas dan ada invers terhadap operasi pertama. Pada jurnal tersebut hanya meneliti tentang keberlakuan grup terhadap matriks yang mempunyai balikan. Sehingga penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian tersebut dengan perluasan dari sifat-sifat grup, yaitu homomorfisme grup yang akan dikenakan pada matriks yang mempunyai balikan.

Dari latar belakang di atas maka penulis akan mengkaji dan meneliti dengan judul “Homomorfisma Grup pada Himpunan Matriks yang Mempunyai Balikan”.

1.2. Rumusan Masalah

Rumusan skripsi ini adalah bagaimana keberlakuan sifat-sifat homomorfisma grup pada himpunan matriks yang mempunyai balikan?

1.3. Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui keberlakuan sifat-sifat homomorfisma grup pada himpunan matriks yang mempunyai balikan.

1.4. Manfaat Penelitian

Dari penulisan skripsi ini diharapkan dapat bermanfaat bagi

1. Penulis

Penelitian ini digunakan untuk menambah pemahaman tentang konsepsi yang ada dalam matematika khususnya struktur aljabar dan sebagai sarana dan latihan untuk menambah pemahaman penguasaan penulis tentang grup, homomorfisma grup, matriks, dan matriks mempunyai balikan.

2. Pembaca

Sebagai tambahan literatur bagi mahasiswa khususnya yang sedang menempuh mata kuliah struktur aljabar.

1.5. Metode Penelitian

1.5.1 Pendekatan Penelitian

Dalam penelitian ini menggunakan pendekatan *library research*, dimana dalam pendekatan *library research* ini dikaji secara literatur yang diambil dari buku pustaka dan artikel ilmiah yang diunduh dari sumber internet.

1.5.2 Langkah-langkah Penelitian

Untuk menyelesaikan penelitian dalam skripsi ini, penulis membuat langkah-langkah dalam keberlakuan syarat-syarat homomorfisma grup pada matriks yang mempunyai balikan sebagai berikut:

1. Grup matriks $GL_n(\mathbb{R})$
 - Mendefinisikan $GL_n(\mathbb{R})$
 - Menunjukkan $GL_n(\mathbb{R})$ adalah grup
 - Menjelaskan sifat-sifat grup pada $GL_n(\mathbb{R})$
2. Homomorfisma dari $GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 - $\phi: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ yang di definisikan $\phi(A_n) = \det A_n, \forall A_n \in GL_n(\mathbb{R})$
 - $\phi: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ yang di definisikan $\phi(A_n) = \text{tr}A_n, \forall A_n \in GL_n(\mathbb{R})$
3. Sifat-sifat Homomorfisma dari $GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 - $\phi: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ yang di definisikan $\phi(A_n) = \det A_n, \forall A_n \in GL_n(\mathbb{R})$
 - $\phi: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ yang di definisikan $\phi(A_n) = \text{tr}A_n, \forall A_n \in GL_n(\mathbb{R})$
4. Membuat kesimpulan.

1.6.Sistematika Penulisan

Untuk lebih mudah memahami penulisan ini secara keseluruhan isinya, maka penulis memberikan gambaran umum tentang sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab pertama ini dibahas tentang latar belakang penelitian, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab kedua ini akan dibahas beberapa teori yang ada kaitannya dengan hal-hal yang penulis bahas.

Bab III Pembahasan

Pada bab ketiga ini dibahas tentang pembuktian dari beberapa teorema homomorfisma grup pada matriks yang mempunyai balikan.

Bab IV Penutup

Pada bab keempat ini berisi tentang kesimpulan dari pembahasan berdasarkan rumusan masalah dan saran yang berkaitan dengan penulisan. Saran ini diharapkan dapat memberikan masukan yang positif untuk dikembangkan.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Grup

2.1.1 Definisi Grup

Grup merupakan salah satu pokok bahasan yang terdapat dalam matematika aljabar. Grup membahas tentang himpunan tak kosong yang dikenai operasi biner dan memenuhi aksioma asosiatif, mempunyai identitas terhadap operasi biner, dan mempunyai invers. Jadi sebelum membahas lebih jauh tentang grup, maka perlu diketahui dahulu pembahasan mengenai operasi biner. Operasi biner didefinisikan sebagai berikut

Definisi 1 (Dummit dan Foote, 1980:17)

1. Operasi biner $*$ pada himpunan G merupakan sebuah fungsi $*: G \times G \rightarrow G$ dan untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $*(a, b) = a * b$.
2. Operasi biner $*$ pada G dikatakan asosiatif jika setiap $a, b, c \in G$ maka $a*(b*c) = (a*b)*c$.
3. Elemen a dan b dari G dikatakan komutatif jika $a*b = b*a$.

Contoh

1. Operasi penjumlahan (+) dan perkalian (\times) merupakan operasi biner yang komutatif pada himpunan bilangan bulat (\mathbb{Z}), himpunan bilangan rasional (\mathbb{Q}), himpunan bilangan real (\mathbb{R}), maupun pada himpunan bilangan kompleks (\mathbb{C}).

2. Operasi pengurangan $(-)$ merupakan operasi biner yang tidak komutatif pada himpunan bilangan bulat (\mathbb{Z}) karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ pada saat $a \neq b$ berlaku $a - b \neq b - a$
3. Operasi pengurangan $(-)$ merupakan operasi yang tidak biner di \mathbb{Z}^+ karena jika $a < b$ maka $a - b \notin \mathbb{Z}^+$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}^+$ artinya $(-)$ merupakan fungsi yang tidak memetakan $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ ke \mathbb{Z}^+ .

Adapun definisi dari grup adalah sebagai berikut:

Definisi 2 (Dummit dan Foote, 1980:17)

1. Grup adalah pasangan terurut $(G, *)$ dimana G adalah himpunan tidak kosong dan $*$ adalah operasi biner di G yang memenuhi beberapa aksioma.
 - i. $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk semua $a, b, c \in G$ (operasi $*$ adalah asosiatif).
 - ii. Ada elemen e di G sedemikian hingga $a * e = e * a = a$ untuk semua $a \in G$.
 - iii. Untuk setiap $a \in G$ ada elemen a^{-1} dari G sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} dinamakan invers dari a)
2. Grup $(G, *)$ disebut abelian atau komutatif jika $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$.

Contoh

Himpunan bilangan bulat \mathbb{Z} merupakan grup terhadap operasi $+$ karena:

1. Operasi $+$ memenuhi syarat operasi biner di \mathbb{Z} karena $+$ merupakan fungsi yang memetakan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ke \mathbb{Z} artinya $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$ atau bersifat tertutup.
2. Operasi $+$ bersifat asosiatif di \mathbb{Z} , karena untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. \mathbb{Z} mempunyai elemen identitas pada operasi $+$ yaitu 0 , karena untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $0 + a = a + 0 = a$.
4. Setiap elemen identitas di \mathbb{Z} mempunyai invers yaitu $-a$ dimana $-a \in \mathbb{Z}$ karena untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $-a + a = a + (-a) = 0$

2.1.2 Sifat – Sifat Grup

Teorema 1 (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:75)

Elemen identitas dalam suatu grup adalah tunggal.

Bukti

Misal (G, \times) adalah grup

Andaikan e dan e' adalah elemen identitas di G dan $(e \neq e')$, maka berlaku:

- (i) $e \times e' = e' \times e = e'$ e sebagai elemen identitas
- (ii) $e' \times e = e \times e' = e$ e' sebagai elemen identitas

Dari (i) dan (ii) berakibat $e = e'$

$$e' = e \times e' = e' \times e = e$$

$$e' = e$$

Jadi, elemen identitas di G adalah tunggal.

Teorema 2 (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:75)

Invers dari invers suatu elemen di grup adalah elemen itu sendiri.

Bukti

Akan dibuktikan $(a^{-1})^{-1} = a$

Ambil $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$, sehingga $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = I$ (I = elemen identitas)

$$(i) \quad a \times a^{-1} = I$$

$$(a \times a^{-1}) \times (a^{-1})^{-1} = I \times (a^{-1})^{-1} \quad \dots \quad \text{(Dioperasikan dengan } (a^{-1})^{-1} \text{ di sebelah kanan)}$$

$$a \times (a^{-1} \times (a^{-1})^{-1}) = (a^{-1})^{-1} \quad \dots \quad \text{(Operasi } \times \text{ bersifat Asosiatif)}$$

$$a \times I = (a^{-1})^{-1} \quad \dots \quad \text{(Sifat ketiga dari grup)}$$

$$a = (a^{-1})^{-1} \quad \dots \quad \text{(Sifat keempat dari grup)}$$

juga,

$$(ii) \quad a^{-1} \times a = I$$

$$(a^{-1})^{-1} \times (a^{-1} \times a) = (a^{-1})^{-1} \times I \quad \dots \quad \text{(Dioperasikan dengan } (a^{-1})^{-1} \text{ di sebelah kiri)}$$

$$((a^{-1})^{-1} \times a^{-1}) \times a = (a^{-1})^{-1} \quad \dots \quad \text{(Operasi } \times \text{ bersifat Asosiatif)}$$

$$I \times a = (a^{-1})^{-1} \quad \dots \quad \text{(Sifat ketiga dari grup)}$$

$$a = (a^{-1})^{-1} \quad \dots \quad \text{(Sifat keempat dari grup)}$$

Dari (i) dan (ii), maka $a = (a^{-1})^{-1}$

Teorema 3 (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:76)

Dalil kanselasi dipertahankan atau berlaku pada suatu grup.

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa pada grup berlaku dalil kanselasi kiri maupun kanan.

Misal (G, \times) adalah grup, dan $\forall a, b, c \in G$ berlaku:

(i) $b \times a = c \times a$, maka $b = c$ kanselasi kanan

(ii) $a \times b = a \times c$, maka $b = c$ kanselasi kiri

Selanjutnya $a \in G$, maka $a^{-1} \in G$

(i) $b \times a = c \times a$

$(b \times a) \times a^{-1} = (c \times a) \times a^{-1}$ (Dioperasikan dengan a^{-1} di
sebelah kanan)

$b \times (a \times a^{-1}) = c \times (a \times a^{-1})$ (Operasi \times bersifat Asosiatif)

$b \times I = c \times I$ (Sifat keempat dari grup)

$b = c$ (Sifat ketiga dari grup)

(ii) $a \times b = a \times c$

$a^{-1} \times (a \times b) = a^{-1} \times (a \times c)$ (Dioperasikan dengan a^{-1} di
sebelah kiri)

$(a^{-1} \times a) \times b = (a^{-1} \times a) \times c$ (Operasi \times bersifat Asosiatif)

$I \times b = I \times c$ (Sifat keempat dari grup)

$b = c$ (Sifat ketiga dari grup)

Jadi dalil kanselasi berlaku pada sebarang grup

Teorema 4 (Raisinghanian dan Aggarwal, 1980:76)

Balikan dari hasil operasi dua elemen di grup adalah hasil operasi balikan elemen kedua dan pertama.

Bukti

$$(a \times b)^{-1} = b^{-1} \times a^{-1}$$

Untuk setiap $a, b \in G$, maka ada $a^{-1} \in G$ dan $b^{-1} \in G$ (setiap elemen punya invers). $a, b \in G$ maka $a \times b \in G$, begitu pula ada $(a \times b)^{-1} \in G$. Sehingga,

$$(a \times b) \times (a \times b)^{-1} = I \text{ dan } (a \times b)^{-1} \times (a \times b) = I$$

$$(a \times b) \times b^{-1} \times a^{-1} = a \times (b \times b^{-1}) \times a^{-1} \dots\dots\dots (\text{Operasi } \times \text{ bersifat Asosiatif})$$

$$= a \times I \times a^{-1} \dots\dots\dots (\text{Sifat keempat dari grup})$$

$$= a \times a^{-1} \dots\dots\dots (\text{Sifat ketiga dari grup})$$

$$= I \dots\dots\dots (\text{Sifat keempat dari grup})$$

$$(a \times b)^{-1} \times (a \times b) = b^{-1} \times (a^{-1} \times a) \times b \dots\dots\dots (\text{Operasi } \times \text{ bersifat Asosiatif})$$

$$= b^{-1} \times I \times b \dots\dots\dots (\text{Sifat keempat dari grup})$$

$$= b^{-1} \times b \dots\dots\dots (\text{Sifat ketiga dari grup})$$

$$= I \dots\dots\dots (\text{Sifat keempat dari grup})$$

Diperoleh $(a \times b) \times (a \times b)^{-1} = (a \times b) \times b^{-1} \times a^{-1}$ dan

$$(a \times b)^{-1} \times (a \times b) = (b^{-1} \times a^{-1}) \times (a \times b)$$

Kanselasi kiri dan kanan berlaku pada grup maka $(a \times b)^{-1} = b^{-1} \times a^{-1}$.

Teorema 5 (Raisinghanian dan Aggarwal, 1980:78)

G dengan operasi biner dengan susunan merupakan perkalian

- i. Susunan itu adalah asosiatif

- ii. Untuk setiap $a, b \in G$ dengan persamaan $a \times x = b$ dan $y \times a = b$ mempunyai penyelesaian tunggal.

Bukti

Pertama kita akan menunjukkan bahwa $a \times x = b$ memiliki selesaian.

$\forall a, b \in G$ maka ada $a^{-1} \in G$ dan $a^{-1} \times b \in G$ (karena G bersifat tertutup terhadap operasi \times).

Selanjutnya,

$$a \times x = b$$

$$a^{-1} \times (a \times x) = a^{-1} \times b \quad \dots\dots\dots \text{(Dioperasikan dengan } a^{-1} \text{ di sebelah kanan)}$$

$$(a^{-1} \times a) \times x = a^{-1} \times b \quad \dots\dots\dots \text{(Operasi } \times \text{ bersifat Asosiatif)}$$

$$I \times x = a^{-1} \times b \quad \dots\dots\dots \text{(Sifat keempat dari grup)}$$

$$x = a^{-1} \times b \quad \dots\dots\dots \text{(Sifat ketiga dari grup)}$$

untuk mengecek $a^{-1} \times b$ adalah selesaian dari $a \times x = b$, maka kita substitusikan yaitu $a \times x = b$

$$a \times (a^{-1} \times b) = b \quad \dots\dots\dots \text{(Substitusi dari } x = a^{-1} \times b \text{)}$$

$$(a \times a^{-1}) \times b = b \quad \dots\dots\dots \text{(Sifat Asosiatif dari grup)}$$

$$I \times b = b \quad \dots\dots\dots \text{(Sifat keempat dari grup)}$$

$$b = b \quad \dots\dots\dots \text{(Sifat ketiga dari grup)}$$

Kedua, penulis akan menunjukkan bahwa selesaian tersebut adalah tunggal.

Andaikan $a \times x = b$ memiliki selesaian tidak tunggal yaitu x_1 dan x_2 dengan

$$x_1 \neq x_2.$$

Selanjutnya $a \times x_1 = b$ dan $a \times x_2 = b$

Diperoleh $a \times x_1 = a \times x_2$

$$x_1 = x_2$$

Ini bertentangan dengan pengandaian. Jadi $a \times x = b$ memiliki penyelesaian tunggal. Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $y \times a = b$ memiliki penyelesaian tunggal adalah analog dengan cara di atas.

2.2 Homomorfisma

2.2.1 Definisi Homomorfisma

Definisi 3 (Dummit dan Foote, 1980:35)

Misal $(G, *)$ dan (H, \circ) merupakan dua buah grup. Sebuah fungsi $\phi: G \rightarrow H$ disebut homomorfisma jika berlaku $\phi(x * y) = \phi(x) \circ \phi(y)$, untuk setiap $x, y \in G$.

Contoh

Misal (\mathbb{R}, \times) adalah grup bilangan real dan $x \in \mathbb{Z}$ serta grup bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +)$

Didefinisikan suatu fungsi

$$\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dengan } \phi(x) = 2^x$$

Setiap fungsi $x \in \mathbb{Z}$. Fungsi ϕ ini merupakan homomorfisma karena setiap x, y di \mathbb{Z} berlaku

$$\phi(x + y) = 2^{x+y} = 2^x \times 2^y = \phi(x) \times \phi(y)$$

2.2.2 Sifat-sifat Homomorfisma

Teorema 5 (Raisinghanian dan Aggarwal, 1980:255)

Misalkan (G, \times) dan (G^*, \times) dua buah grup dan $\phi: G \rightarrow G^*$ adalah homomorfisma. Hal berikut ini benar.

- a. Pemetaan elemen identitas pada G adalah elemen identitas pada G^*
- b. Pemetaan invers setiap elemen g dari G adalah invers bayangan dari g
- c. Jika a merupakan sembarang elemen berhingga pada G maka hasil pemetaan a juga berhingga dan merupakan pembagi dari a

Bukti

- a. Ambil $i_G =$ identitas G

$$i_G = \text{identitas } G^*$$

$$\text{Adib } \phi(i_G) = i_{G^*}$$

Jawab

$$\phi: G \rightarrow H$$

- i. $g \times I = g$

$$\phi(g \times I) = \phi(g)$$

$$\phi(g) \times \phi(I_G) = \phi(g)$$

$$\phi(I_G) = I_{G^*}$$

- ii. $I \times g = g$

$$\phi(I \times g) = \phi(g)$$

$$\phi(I_G) \times \phi(g) = \phi(g)$$

$$\phi(I_G) = I_{G^*}$$

Dari (i) dan (ii) maka operasi identitas $\phi(I_G) = I_{G^*}$

b. Ambil $g \in G$

$$\text{Akan dibuktikan } \phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$$

Jawab

$$\phi: G \rightarrow H$$

$$\text{i. } g \times g^{-1} = i_G$$

$$\phi(g \times g^{-1}) = \phi(i_G) = i_H$$

$$\phi(g)\phi(g^{-1}) = i_H$$

$$\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$$

$$\text{ii. } g^{-1} \times g = i_G$$

$$\phi(g^{-1} \times g) = \phi(i_G) = i_H$$

$$\phi(g^{-1})\phi(g) = i_H$$

$$\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$

c. Ambil $g \in G, m = 1, 2, 3, \dots, n$

I_G = elemen identitas di G

Didefinisikan $g^m = I_G$

Akan dibuktikan $(\phi(g))^m = \phi(I_G)$

Jawab

$$\begin{aligned}
 g^m = I_G &\Rightarrow \phi(g^m) = \phi(I_G) \\
 &\Rightarrow \phi\left(\underbrace{g \times g \times \dots \times g}_m\right) = \phi(I_G) \\
 &\Rightarrow \underbrace{\phi(g) \times \phi(g) \times \dots \times \phi(g)}_m = \phi(I_G) \\
 &\Rightarrow (\phi(g))^m = \phi(I_G)
 \end{aligned}$$

2.3. Matriks

2.3.1 Definisi Matriks

Definisi 4 (Anton, 2000:45)

Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut anggota dalam matriks tersebut.

Contoh :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}), \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

Definisi 5 (Baker, 2006:1)

Diberikan $M_{n,n}(\mathbb{R})$ adalah himpunan matriks bujur sangkar $n \times n$ yang entrinya merupakan bilangan real (\mathbb{R}). Selanjutnya dinotasikan matriks $M_{n,n}(\mathbb{R})$

dengan $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, dimana A adalah matriks bujur sangkar $n \times n$.

$M_{n,n}(\mathbb{R})$ dapat disimbulkan dengan $M_n(\mathbb{R})$ yaitu merupakan suatu ruang vektor- \mathbb{R} dengan operasi matriks penjumlahan dan perkalian dengan skalar.

2.4.2 Macam-macam Matriks

Definisi 6 (Supranto, 2003:8).

Matriks persegi adalah suatu matriks dimana banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom ($m = n$), maka matriks A disebut matriks segi empat.

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Definisi 7 (Supranto, 2003:8)

Matriks identitas adalah suatu matriks dimana elemen–elemen mempunyai nilai 1 pada diagonal pokok dan 0 pada tempat–tempat lain di luar diagonal pokok.

Jadi kalau matriks $A = (a_{ij}), i = j = 1, 2, \dots, n$ dan

$$a_{ij} = 1 \text{ untuk } i = j$$

$$a_{ij} = 0 \text{ untuk } i \neq j$$

maka matriks A disebut matriks identitas dan biasanya diberi simbol I_n

Contoh :

$$n = 2,$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definisi 8 (Supranto, 2003:9)

Matriks diagonal adalah suatu matriks dimana semua elemen di luar diagonal pokok mempunyai nilai 0 dan paling tidak satu elemen pada diagonal pokok tidak 0, biasanya diberi simbol D .

Contoh :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Definisi 9 (Supranto, 2003:10)

Skalar adalah suatu bilangan konstan. Kalau k , suatu bilangan konstan, maka hasil kali kI dinamakan matriks skalar.

Contoh :

$$k.I_3 = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Definisi 10 (Supranto, 2003:10)

Apabila $A = (a_{ij}); ij = 1, 2, \dots, n$ dan $a_{ij} = a_{ji}$, maka A disebut matriks simetris (*symmetric matrix*).

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}, a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32}$$

Definisi 11 (Supranto, 2003:11)

Matriks null adalah suatu matriks dimana semua elemennya mempunyai nilai 0 (null), biasanya diberi simbol $\underline{0}$ dibaca matriks nol.

Contoh :

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4.3 Operasi pada Matriks

Untuk dapat melakukan penjumlahan dan pengurangan pada matriks A dan B, kedua matriks tersebut harus mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama atau dimensinya sama.

Definisi 12 (Anton, 2000:47)

Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah (sum) $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pada B dan selisih (*difference*) $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian ada B. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka $(A + B)_{m \times n} = A_{m \times n} + B_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]$ dan $(A - B)_{m \times n} = A_{m \times n} - B_{m \times n} = [a_{ij} - b_{ij}]$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$$

Maka

$$A + B = \begin{pmatrix} (a+b)_{11} & (a+b)_{12} \\ (a+b)_{21} & (a+b)_{22} \end{pmatrix} \text{ dan } A - B = \begin{pmatrix} (a-b)_{11} & (a-b)_{12} \\ (a-b)_{21} & (a-b)_{22} \end{pmatrix}$$

$$A + C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + c_{11} & a_{12} + \dots \\ a_{21} + c_{21} & a_{22} + \dots \end{pmatrix}$$

Untuk $A + C$, $B + C$, $A - C$, dan $B - C$ tidak terdefinisi.

Definisi 13 (Anton, 2000:48)

Jika A adalah matriks sembarang dan c adalah skalar sembarang, maka hasil kalinya (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan blangan c . Matriks cA disebut sebagai kelipatan skalar (*scalar mutiple*) dari A .

Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$ dan $cA = A + A + \dots + A$, maka

$$(cA)_{m \times n} = cA_{m \times n} = [ca_{ij}] \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

$$cA = A + A + \dots + A$$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Didapatkan

$$2A = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} \\ 2a_{21} & 2a_{22} \end{pmatrix}, (-1)B = \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} \end{pmatrix}, \frac{1}{2}c = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c_{11} & \frac{1}{2}c_{12} \\ \frac{1}{2}c_{21} & \frac{1}{2}c_{22} \end{pmatrix}$$

Definisi 14 (Anton, 2000:49)

Jika A adalah sebuah matriks $m \times r$ dan B adalah sebuah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang anggota-anggotanya didefinisikan sebagai berikut. Untuk mencari anggota dalam baris i dan kolom j dari AB , pilih baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B , kalikan anggota-anggota yang

berpadanan dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasilnya.

Contoh

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

Karena A adalah matriks 2×3 dan B adalah matriks 3×4 , maka hasil kali AB adalah sebuah matriks 2×4 . Misalnya, untuk menentukan anggota pada baris ke 2 dan kolom 3 dari AB, dipilih baris 2 dari A kolom 3 baris B. Selanjutnya, sebagai mana yang diilustrasikan di bawah ini, kalikan anggota-anggota yang berpadanan secara bersama-sama dan menjumlahkan hasil kali-hasil kali ini.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

2.4.4 Invers Matriks

Matriks mempunyai kolom dan baris berbeda dan ada yang mempunyai baris dan kolom yang sama, hanya matriks kuadrat (*square matrix*) saja yang mempunyai invers. Banyak metode atau cara dalam mencari suatu invers matriks diantaranya dengan substitusi, menggunakan adjoint, metode counter, matrix partisi. Di bawah ini akan dijelaskan bagaimana mencari invers matriks dengan menggunakan adjoint.

Definisi 15 (Supranto, 2003:130)

Misalkan A merupakan suatu matriks kuadrat dengan n baris dan n kolom dan I_n suatu identitas matriks. Apabila ada *square matrix* A^{-1} sedemikian rupa sehingga berlaku hubungan sebagai berikut:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n, \text{ maka } A^{-1} \text{ ini disebut invers matriks A.}$$

Definisi 16 (Supranto, 2003:50)

Kalau dari matriks kuadrat A dengan n baris dan n kolom kita hilangkan baris ke-i dan kolom ke-j, maka determinan dari matriks kuadrat dengan $(n-1)$ baris dan $(n-1)$ kolom, yaitu sisa matriks yang tinggal (disebut minor matriks dari elemen a_{ij}) diberi simbol $|A_{ij}|$ atau M_{ij} . Apabila pada setiap minor kita tambahkan tanda + (plus) atau - (minus) sebagai tanda pada determinan dan kemudian kita beri simbol : $(-1)^{i+j} |M_{ij}|$ maka diperoleh apa yang sering disebut kofaktor elemen a_{ij} dan biasanya diberi simbol K_{ij} jadi $K_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$, ini berarti bahwa setiap elemen mempunyai kofaktor sendiri-sendiri.

Nilai determinan dari matriks A sama dengan penjumlahan hasil kali semua elemen dari suatu baris (kolom) matriks A dengan kofaktor (K_{ij}) masing-masing, yaitu :

1. Dengan menggunakan elemen-elemen baris ke-i

$$\det(A) = A = a_{i1}K_{i1} + a_{i2}K_{i2} + \dots + a_{in}K_{in}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}K_{ii}; i = 1, 2, \dots, n$$

2. Dengan menggunakan elemen-elemen baris ke-j

$$\det(A) = A = a_{1j}K_{1j} + a_{2j}K_{2j} + \dots + a_{nj}K_{nj}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}K_{ij}; j = 1, 2, \dots, n$$

Contoh :

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, maka determinan $A = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Definisi 17 (Supranto, 2003:135)

Adjoint matriks A adalah suatu matriks yang elemen-elemennya terdiri dari transpos semua kofaktor dari elemen-elemen matriks A, yaitu apabila $K = (K_{ij})$ dimana K_{ij} adalah kofaktor dari elemen a_{ij} , maka adjoint matriks A yaitu:

$$\text{adj}(A) = K^T = (K_{ij}^T = K_{ji}).$$

Jadi, jelasnya $\text{adj}(A)$ adalah transpose dari matriks kofaktor K, yaitu :

$$\text{adj}(A) = K^T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nm} \end{pmatrix}$$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } K_{11} = (-1)^{1+1} \det(M_{11}) = 1 \cdot (2-6) = -4$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } K_{12} = (-1)^{1+2} \det(M_{12}) = -1 \cdot (1-12) = 11$$

$$M_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } K_{13} = (-1)^{1+3} \det(M_{13}) = 1 \cdot (2-8) = -6$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } K_{21} = (-1)^{2+1} \det(M_{21}) = -1 \cdot (1-4) = 3$$

$$M_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } K_{22} = (-1)^{2+2} \det(M_{22}) = 1 \cdot (2-8) = -6$$

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } K_{23} = (-1)^{2+3} \det(M_{23}) = -1 \cdot (4-4) = 0$$

$$M_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ dan } K_{31} = (-1)^{3+1} \det(M_{31}) = 1 \cdot (3-4) = -1$$

$$M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ dan } K_{32} = (-1)^{3+2} \det(M_{32}) = -1 \cdot (6-2) = -4$$

$$M_{33} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } K_{33} = (-1)^{3+3} \det(M_{33}) = 1 \cdot (4-1) = 3$$

$$\text{Jadi } \text{adj}(A) = K^T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 11 & -6 & -6 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Definisi 18 (Supranto, 2003:136)

Apabila matriks A yang kuadrat dengan n baris dan n kolom dan merupakan matriks yang non-singular yaitu $\det(A) \neq 0$ dan K_{ij} merupakan kofaktor dari elemen a_{ij} , maka matriks invers A yaitu A^{-1} dirumuskan sebagai berikut:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{K^T}{\det(A)}, K^T = K$$

Jadi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{K_{11}}{\det(A)} & \frac{K_{21}}{\det(A)} & \dots & \frac{K_{n1}}{\det(A)} \\ \frac{K_{12}}{\det(A)} & \frac{K_{22}}{\det(A)} & \dots & \frac{K_{n2}}{\det(A)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{K_{1n}}{\det(A)} & \frac{K_{2n}}{\det(A)} & \dots & \frac{K_{nn}}{\det(A)} \end{pmatrix}$$

Contoh

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \det(A) = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$$

$$K_{11} = (-1)^2(2) = 2$$

$$K_{12} = (-1)^3(3) = -3$$

$$K_{21} = (-1)^3(1) = -1$$

$$K_{22} = (-1)^4(4) = 4$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

2.5 Kajian Islam Mengenai Grup

Suatu himpunan dikatakan sebagai grup jika memiliki penyusun-penyusun seperti himpunan tak kosong, operasi biner, dan aturan atau aksioma yang harus dipenuhi agar menjadi suatu grup. Sebagai contoh seperti yang telah disebutkan adalah grup *ulul albab*. *Ulul albab* awalnya merupakan himpunan manusia yang saling berinteraksi sebagaimana manusia lainnya. Namun selain berinteraksi, mereka juga senantiasa mengingat Allah, baik saat berdiri, duduk, dan berbaring,

serta memikirkan segala penciptaan Allah baik yang di langit maupun di bumi dengan keyakinan bahwa semua itu tidaklah sia-sia. Inilah yang membedakan mereka dengan manusia lain sehingga disebut sebagai manusia yang *ulul albab*. Dengan demikian dapat dilihat perbedaan sifat yang jelas antara *ulul albab* dengan manusia biasa umumnya. Seseorang yang senantiasa mengingat Allah belum tentu disebut *ulul albab*. Begitu juga seseorang yang memikirkan penciptaan-Nya belum tentu disebut *ulul albab*. Namun, seseorang sudah tentu disebut *ulul albab* jika senantiasa mengingat Allah dan memikirkan penciptaan-Nya (Khotimah, 2010:57).

إِن فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لآيَاتٍ لِّأُولِي الْأَلْبَابِ ﴿١٩٠﴾ الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَذَا بَطْلًا سُبْحَانَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ ﴿١٩١﴾

Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan Kami, Tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha suci Engkau, Maka peliharalah Kami dari siksa neraka (QS. Ali Imron, 3:190-191)

Dalam QS Ali Imron ayat 190-191 tersebut dijelaskan bahwa sekelompok manusia yang disebut *ulul albab* adalah orang-orang yang senantiasa mengingat Allah, baik saat berdiri, duduk, dan berbaring, serta memikirkan segala penciptaan Allah baik yang di langit maupun di bumi dengan keyakinan bahwa semua itu tidaklah sia-sia. Dalam matematika sifat-sifat yang dimiliki kelompok manusia yang *ulul albab* tersebut dikenal dengan aturan atau aksioma. Aturan atau aksioma tersebut harus dipenuhi agar suatu kelompok dapat disebut kelompok tertentu atau kelompok yang lebih khusus lagi.



BAB III

PEMBAHASAN

Pada penelitian ini akan dibuktikan bahwa matriks yang mempunyai invers memenuhi sifat-sifat grup diantaranya tertutup, asosiatif, mempunyai identitas, ada invers terhadap operasi pertama dan memenuhi sifat-sifat homomorfisme grup.

3.1. Grup Matriks $GL_n(\mathbb{R})$

3.1.1. Definisi Matriks $GL_n(\mathbb{R})$

Diberikan $M_{n,n}(\mathbb{R})$ adalah himpunan matriks bujur sangkar $n \times n$ yang entrinya merupakan bilangan real (\mathbb{R}). Selanjutnya dinotasikan matriks $M_{n,n}(\mathbb{R})$

dengan $A = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, dimana A adalah matriks bujur sangkar $n \times n$.

$M_{n,n}(\mathbb{R})$ dapat disimbulkan dengan $M_n(\mathbb{R})$ yaitu merupakan suatu ruang vektor- \mathbb{R} dengan operasi matriks penjumlahan dan perkalian dengan skalar (Baker, 2006:1).

Untuk himpunan $M_n(\mathbb{R})$ yang invertibel penulis menggunakan notasi

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A | A \in M_n(\mathbb{R}), \det(A) \neq 0\}$$

3.1.2 Matriks $GL_n(\mathbb{R})$ terhadap Operasi $+$ adalah Grup

Akan dibuktikan bahwa $GL_n(\mathbb{R})$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan matriks. Berdasarkan definisi 2, akan dibuktikan bahwa $GL_n(\mathbb{R})$ terhadap operasi penjumlahan matriks memenuhi 4 aksioma grup, yaitu :

i. Bersifat Tertutup

Jika untuk setiap $A_n, B_n, C_n \in GL_n(\mathbb{R})$, maka $A_n + B_n \in GL_n(\mathbb{R})$ dikatakan bersifat tertutup.

Bukti :

Ambil $A_n, B_n, C_n \in GL_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
 A_n + B_n &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (a+b)_{11} & \cdots & (a+b)_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a+b)_{n1} & \cdots & (a+b)_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} + b_{ij} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj} + b_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})
 \end{aligned}$$

ii. Bersifat Asosiatif

Jika untuk setiap $A_n + B_n + C_n \in GL_n(\mathbb{R})$, maka

$(A_n + B_n) + C_n = A_n + (B_n + C_n)$ dikatakan bersifat asosiatif.

Bukti :

Jika $A_n + B_n + C_n \in GL_n(\mathbb{R})$ maka

$$\begin{aligned}
 [(A_n + B_n) + C_n] &= \left[\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \right] \\
 &= \left[\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} + b_{ij} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj} + b_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n c_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{nn} \end{pmatrix} \right] \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{in} + b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj} + b_{nj} + c_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nn} + b_{nn} + c_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= \left[\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} + c_{ij} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n b_{nj} + c_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{nn} + c_{nn} \end{pmatrix} \right] \\
 &= [A_n + (B_n + C_n)]
 \end{aligned}$$

iii. Untuk setiap $A_n \in GL_n(\mathbb{R})$, terdapat matriks identitas penjumlahan atau null

matriks $\underline{0}$ sehingga $\underline{0} + A_n = A_n + \underline{0} = A_n$.

Bukti :

Berdasarkan definisi 11 matriks identitas penjumlahan atau null matriks adalah matriks bujur sangkar yang semua unsurnya adalah 0. Secara umum matriks identitas penjumlahan atau null matriks dapat ditulis sebagai berikut :

Ambil $A_n \in GL_n(\mathbb{R})$

$$A_n + \underline{0} = \underline{0} + A_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} + 0 & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{in} + 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj} + 0 & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nn} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n 0 + a_{ij} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n 0 + a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n 0 + a_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n 0 + a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_n = A_n$$

iv. Untuk setiap $A_n \in GL_n(\mathbb{R})$ terdapat matriks invers tunggal yang dinotasikan

$$A_n^{-1} \in GL_n(\mathbb{R}), \text{ sedemikian rupa sehingga } A_n^{-1} + A_n = A_n + A_n^{-1}.$$

Bukti :

Ambil $A_n \in GL_n(\mathbb{R})$

Maka $A_n^{-1} + A_n = A_n + A_n^{-1}$

Berdasarkan definisi 18 maka

$$A_n^{-1} = \frac{1}{\det(A_n)} \text{adj}(A_n)$$

$$\det(A) = a_{1j}K_{1j} + a_{2j}K_{2j} + \dots + a_{nj}K_{nj}$$

$$= \sum_{t=1}^n a_{tj}K_{tj}; j = 1, 2, \dots, n$$

$$A_n^{-1} = \frac{1}{a_{1j}K_{1j} + a_{2j}K_{2j} + \dots + a_{nj}K_{nj}} \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_n^{-1} = \frac{1}{\sum_{t=1}^n a_{tj}K_{tj}} \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{K_{11}}{\sum_{t=1}^n a_{tj}K_{tj}} & \frac{K_{12}}{\sum_{t=1}^n a_{tj}K_{tj}} & \dots & \frac{K_{1n}}{\sum_{t=1}^n a_{tj}K_{tj}} \\ \frac{K_{21}}{\sum_{t=1}^n a_{tj}K_{tj}} & \frac{K_{22}}{\sum_{t=1}^n a_{tj}K_{tj}} & \dots & \frac{K_{2n}}{\sum_{t=1}^n a_{tj}K_{tj}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{K_{n1}}{\sum_{t=1}^n a_{tj}K_{tj}} & \frac{K_{n2}}{\sum_{t=1}^n a_{tj}K_{tj}} & \dots & \frac{K_{nn}}{\sum_{t=1}^n a_{tj}K_{tj}} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A + A^{-1} = A^{-1} + A$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} + x_{ij} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{in} + x_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj} + x_{ij} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nn} + x_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n x_{ij} + a_{ij} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n x_{ij} + a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n x_{ij} + a_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n x_{ij} + a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

1.1.3 Matriks $GL_n(\mathbb{R})$ terhadap Operasi \times adalah Grup

Akan dibuktikan bahwa $GL_n(\mathbb{R})$ merupakan grup terhadap operasi perkalian matriks. Berdasarkan definisi 2, akan dibuktikan bahwa $GL_n(\mathbb{R})$ terhadap operasi perkalian matriks memenuhi 4 aksioma grup, yaitu:

i. Bersifat Tertutup

Jika untuk setiap $A_n, B_n \in GL_n(\mathbb{R})$, maka $A_n B_n \in GL_n(\mathbb{R})$ dikatakan bersifat tertutup.

Bukti :

Ambil $A_n, B_n, C_n \in GL_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} A_n B_n &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ab)_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \dots + a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \dots + a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{1j}b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj}b_{i1} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nj}b_{in} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$$

ii. Bersifat Asosiatif

Jika untuk setiap $A_n B_n C_n \in GL_n(\mathbb{R})$, maka $(A_n B_n) C_n = A_n (B_n C_n)$ dikatakan bersifat asosiatif.

Bukti :

Jika $A_n B_n C_n$, maka

$$\begin{aligned} [(AB)C]_{ij} &= \sum_{i=1}^n [AB]_{ij} C_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} \right) c_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} c_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ij} c_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} c_{ij} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} [bc]_{ij} \\ &= [A(BC)]_{ij} \end{aligned}$$

iii. Untuk setiap $A_n \in GL_n(\mathbb{R})$ terdapat matriks identitas $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ sehingga

$$I_n A_n = A_n I_n = A_n.$$

Bukti :

Berdasarkan definisi 7 matriks identitas adalah matriks bujur sangkar yang semua unsur diagonal utamanya sama dengan 1, dan semua unsur lainnya sama dengan nol. Secara umum matriks identitas dapat ditulis sebagai berikut :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_n I_n = I_n A_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}i_{11} + a_{12}i_{21} + \cdots + a_{1n}i_{n1} & a_{11}i_{12} + a_{12}i_{22} + \cdots + a_{1n}i_{n2} & \cdots & a_{11}i_{1n} + a_{12}i_{2n} + \cdots + a_{1n}i_{nn} \\ a_{21}i_{11} + a_{22}i_{21} + \cdots + a_{2n}i_{n1} & a_{21}i_{12} + a_{22}i_{22} + \cdots + a_{2n}i_{n2} & \cdots & a_{21}i_{1n} + a_{22}i_{2n} + \cdots + a_{2n}i_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}i_{12} + a_{n2}i_{22} + \cdots + a_{nn}i_{n2} & a_{n1}i_{12} + a_{n2}i_{22} + \cdots + a_{nn}i_{n2} & \cdots & a_{n1}i_{1n} + a_{n2}i_{2n} + \cdots + a_{nn}i_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} i_{11}a_{11} + i_{12}a_{21} + \cdots + i_{1n}a_{n1} & i_{11}a_{12} + i_{12}a_{22} + \cdots + i_{1n}a_{n2} & \cdots & i_{11}a_{1n} + i_{12}a_{2n} + \cdots + i_{1n}a_{nn} \\ i_{21}a_{11} + i_{22}a_{21} + \cdots + i_{2n}a_{n1} & i_{21}a_{12} + i_{22}a_{22} + \cdots + i_{2n}a_{n2} & \cdots & i_{21}a_{1n} + i_{22}a_{2n} + \cdots + i_{2n}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{31}a_{12} + i_{32}a_{22} + \cdots + i_{3n}a_{n2} & i_{31}a_{12} + i_{32}a_{22} + \cdots + i_{3n}a_{n2} & \cdots & i_{n1}a_{1n} + i_{n2}a_{2n} + \cdots + i_{nn}a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{1j}i_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{1j}i_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{1j}i_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n a_{2j}i_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{2j}i_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{2j}i_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj}i_{i2} & \sum_{i,j=1}^n a_{nj}i_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nj}i_{in} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_n = A_n$$

iv. Untuk setiap $A_n \in GL_n(\mathbb{R})$ terdapat matriks invers tunggal yang dinotasikan

$$A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R}), \text{ sedemikian rupa sehingga } A^{-1}A_n = A_nA^{-1} = I_n.$$

Bukti :

Misal $A_n \in GL_n(\mathbb{R})$

Berdasarkan definisi 18

$$A_n^{-1} = \frac{1}{\det(A_n)} \text{adj}(A_n)$$

$$\det(A) = a_{1j}K_{1j} + a_{2j}K_{2j} + \dots + a_{nj}K_{nj}$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{ij}K_{ij}; j = 1, 2, \dots, n$$

$$A_n^{-1} = \frac{1}{a_{1j}K_{1j} + a_{2j}K_{2j} + \dots + a_{nj}K_{nj}} \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_n^{-1} = \frac{1}{\sum_{t=1}^n a_{tj} K_{tj}} \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{K_{11}}{\sum_{t=1}^n a_{tj} K_{tj}} & \frac{K_{12}}{\sum_{t=1}^n a_{tj} K_{tj}} & \cdots & \frac{K_{1n}}{\sum_{t=1}^n a_{tj} K_{tj}} \\ \frac{K_{21}}{\sum_{t=1}^n a_{tj} K_{tj}} & \frac{K_{22}}{\sum_{t=1}^n a_{tj} K_{tj}} & \cdots & \frac{K_{2n}}{\sum_{t=1}^n a_{tj} K_{tj}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{K_{n1}}{\sum_{t=1}^n a_{tj} K_{tj}} & \frac{K_{n2}}{\sum_{t=1}^n a_{tj} K_{tj}} & \cdots & \frac{K_{nn}}{\sum_{t=1}^n a_{tj} K_{tj}} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Andaikan $A_n A^{-1} = I_n$

Maka $A_n A^{-1} = I_n$

$$A^{-1} = A_n^{-1} I_n$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Andaikan $A^{-1}A = I_n$

Maka $A^{-1}A = I_n$

$$A^{-1} = IA^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Terbukti bahwa $A^{-1}A_n = A_nA^{-1} = I_n$

1.1.4 Sifat – Sifat Grup pada Matriks $GL_n(\mathbb{R})$

Berdasarkan teorema 1, maka akan dibuktikan bahwa elemen identitas dari matriks $GL_n(\mathbb{R})$ adalah tunggal.

Bukti :

Andaikan

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B_n = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Keduanya adalah matriks identitas $A_n \neq B_n$, maka berlaku:

i. $A_n B_n = B_n A_n = A_n$... B_n sebagai matriks identitas

$$A_n B_n = B_n A_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{1j} b_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{1j} b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{1j} b_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n a_{2j} b_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{2j} b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{2j} b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj} b_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{nj} b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nj} b_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n b_{1j} a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} a_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n b_{2j} a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n b_{nj} a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} a_{in} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{1j}i_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{1j}i_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{1j}i_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n a_{2j}i_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{2j}i_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{2j}i_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj}i_{i2} & \sum_{i,j=1}^n a_{nj}i_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nj}i_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n i_{1j}a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n i_{1j}a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n i_{1j}a_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n i_{2j}a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n i_{2j}a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n i_{2j}a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n i_{nj}a_{i2} & \sum_{i,j=1}^n i_{nj}a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n i_{nj}a_{in} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_n = A_n$$

ii. $A_n B_n = B_n A_n = B_n \dots A_n$ sebagai matriks identitas

$$A_n B_n = B_n A_n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{1j}b_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{1j}b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{1j}b_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n a_{2j}b_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{2j}b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{2j}b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj}b_{i2} & \sum_{i,j=1}^n a_{nj}b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nj}b_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n b_{1j}a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n b_{1j}a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{1j}a_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n b_{2j}a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n b_{2j}a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{2j}a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n b_{nj}a_{i2} & \sum_{i,j=1}^n b_{nj}a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{nj}a_{in} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n i_j b_{i1} & \sum_{i,j=1}^n i_j b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n i_j b_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n i_2 b_{i1} & \sum_{i,j=1}^n i_2 b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n i_2 b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n i_{nj} b_{i2} & \sum_{i,j=1}^n i_{nj} b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n i_{nj} b_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n b_{1j} i_{i1} & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} i_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} i_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n b_{2j} i_{i1} & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} i_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} i_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n b_{nj} i_{i2} & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} i_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} i_{in} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B_n = B_n$$

Karena $A_n B_n$ dan $B_n A_n$ adalah elemen tunggal pada matriks $GL_n(\mathbb{R})$ maka (i) dan (ii) berakibat $A_n = B_n$ (kontradiksi dengan pengandaian) ini berarti bahwa matriks identitas di $GL_n(\mathbb{R})$ adalah tunggal.

Berdasarkan teorema 2, maka akan dibuktikan invers dari invers suatu elemen di grup $GL_n(\square)$ adalah elemen itu sendiri.

Misal: $A_n \in GL_n(\mathbb{R})$ adalah grup

untuk setiap $A_n \in GL_n(\mathbb{R})$ berlaku $A_n = (A_n^{-1})^{-1}$

Bukti :

a. $A_n \in GL_n(\mathbb{R})$ maka $A_n^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ sehingga $A_n A_n^{-1} = A_n^{-1} A_n = I_n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \\
& \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$A_n = (A_n^{-1})^{-1}$$

Dari a dan b maka $A_n = (A_n^{-1})^{-1}$

Berdasarkan teorema 3, maka akan dibuktikan bahwa dalil kanselasi dipertahankan atau berlaku pada $GL_n(\square)$.

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa pada grup berlaku dalil kanselasi kiri maupun kanan,

misal $A_n, B_n, C_n \in GL_n(\mathbb{R})$ adalah grup dan $\forall A_n, B_n, C_n \in GL_n(\square)$ berlaku:

a. $B_n A_n = C_n A_n$, maka

$$B_n = C_n \quad \dots \text{ kanselasi kanan}$$

b. $A_n B_n = A_n C_n$, maka

$$B_n = C_n \quad \dots \text{ kanselasi kiri}$$

Selanjutnya

a.
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in GL_n(\square) \text{ maka } \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \in GL_n(\square)$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n b_{1j} a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} a_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n b_{2j} a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n b_{nj} a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} a_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n c_{1j} a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n c_{1j} a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{1j} a_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n c_{2j} a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n c_{2j} a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{2j} a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n c_{nj} a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n c_{nj} a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{nj} a_{in} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n b_{1j} a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} a_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n b_{2j} a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n b_{nj} a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n c_{1j} a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n c_{1j} a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{1j} a_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n c_{2j} a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n c_{2j} a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{2j} a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n c_{nj} a_{i1} & \sum_{i,j=1}^n c_{nj} a_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{nj} a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n b_{1j} a_{i1} x_{i1} & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} a_{i2} x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} a_{in} x_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n b_{2j} a_{i1} x_{i1} & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} a_{i2} x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} a_{in} x_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n b_{nj} a_{i2} x_{i2} & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} a_{i2} x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} a_{in} x_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n c_{1j} a_{i1} x_{i1} & \sum_{i,j=1}^n c_{1j} a_{i2} x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{1j} a_{in} x_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n c_{2j} a_{i1} x_{i1} & \sum_{i,j=1}^n c_{2j} a_{i2} x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{2j} a_{in} x_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n c_{nj} a_{i2} x_{i2} & \sum_{i,j=1}^n c_{nj} a_{i2} x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{nj} a_{in} x_{in} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n b_{1j} & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} \\ \sum_{i,j=1}^n b_{2j} & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n b_{nj} & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{1j} i_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{1j} x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{1j} x_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n a_{2j} i_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{2j} x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{2j} x_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj} i_{i2} & \sum_{i,j=1}^n a_{nj} x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nj} x_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n c_{1j} & \sum_{i,j=1}^n c_{1j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{1j} \\ \sum_{i,j=1}^n c_{2j} & \sum_{i,j=1}^n c_{2j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n c_{nj} & \sum_{i,j=1}^n c_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{1j} x_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{1j} x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{1j} x_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n a_{2j} x_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{2j} x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{2j} x_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj} x_{i2} & \sum_{i,j=1}^n a_{nj} x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nj} x_{in} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n b_{1j} & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} \\ \sum_{i,j=1}^n b_{2j} & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n b_{nj} & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n c_{1j} & \sum_{i,j=1}^n c_{1j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{1j} \\ \sum_{i,j=1}^n c_{2j} & \sum_{i,j=1}^n c_{2j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n c_{nj} & \sum_{i,j=1}^n c_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n b_{1j} & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} \\ \sum_{i,j=1}^n b_{2j} & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n b_{nj} & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n c_{1j} & \sum_{i,j=1}^n c_{1j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{1j} \\ \sum_{i,j=1}^n c_{2j} & \sum_{i,j=1}^n c_{2j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n c_{nj} & \sum_{i,j=1}^n c_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{nj} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B_n = C_n$$

b. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in GL_n(\square)$ maka $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \in GL_n(\square)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{1j}b_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{1j}b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{1j}b_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n a_{2j}b_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{2j}b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{2j}b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj}b_{i2} & \sum_{i,j=1}^n a_{nj}b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nj}b_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{1j}c_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{1j}c_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{1j}c_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n a_{2j}c_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{2j}c_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{2j}c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj}c_{i2} & \sum_{i,j=1}^n a_{nj}c_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nj}c_{in} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n x_{1j}a_{i1}b_{11} & \sum_{i,j=1}^n x_{1j}a_{i2}b_{12} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n x_{1j}a_{in}b_{1n} \\ \sum_{i,j=1}^n x_{2j}a_{i1}b_{11} & \sum_{i,j=1}^n x_{2j}a_{i2}b_{12} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n x_{2j}a_{in}b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n x_{nj}a_{i2}b_{12} & \sum_{i,j=1}^n x_{nj}a_{i2}b_{12} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n x_{nj}a_{in}b_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n x_{1j}a_{i1}c_{11} & \sum_{i,j=1}^n x_{1j}a_{i2}c_{12} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n x_{1j}a_{in}c_{1n} \\ \sum_{i,j=1}^n x_{2j}a_{i1}c_{11} & \sum_{i,j=1}^n x_{2j}a_{i2}c_{12} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n x_{2j}a_{in}c_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n x_{nj}a_{i2}c_{12} & \sum_{i,j=1}^n x_{nj}a_{i2}c_{12} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n x_{nj}a_{in}c_{1n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{1j}i_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{1j}x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{1j}x_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n a_{2j}i_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{2j}x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{2j}x_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj}i_{i2} & \sum_{i,j=1}^n a_{nj}x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nj}x_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n b_{1j} & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} \\ \sum_{i,j=1}^n b_{2j} & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n b_{nj} & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{1j}x_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{1j}x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{1j}x_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n a_{2j}x_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{2j}x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{2j}x_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj}x_{i2} & \sum_{i,j=1}^n a_{nj}x_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nj}x_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n c_{1j} & \sum_{i,j=1}^n c_{1j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{1j} \\ \sum_{i,j=1}^n c_{2j} & \sum_{i,j=1}^n c_{2j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n c_{nj} & \sum_{i,j=1}^n c_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{nj} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n b_{1j} & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{1j} \\ \sum_{i,j=1}^n b_{2j} & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n b_{nj} & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n b_{nj} \end{pmatrix} = \\
 \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n c_{1j} & \sum_{i,j=1}^n c_{1j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{1j} \\ \sum_{i,j=1}^n c_{2j} & \sum_{i,j=1}^n c_{2j} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n c_{nj} & \sum_{i,j=1}^n c_{nj} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n c_{nj} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B_n = C_n$$

Jadi dalil kanselasi berlaku pada $GL_n(\mathbb{R})$.

Berdasarkan teorema 4, maka akan dibuktikan:

Misal: $A_n, B_n \in GL_n(\mathbb{R})$ adalah grup

untuk setiap $A_n, B_n \in GL_n(\mathbb{R})$ berlaku $A_n = (A_n^{-1})^{-1}$

Bukti :

$A_n \in GL_n(\mathbb{R})$ maka $A_n^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ sehingga $A_n A_n^{-1} = A_n^{-1} A_n = I_n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \\
& \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \right)^{-1} \\
& A_n = (A_n^{-1})^{-1}
\end{aligned}$$

Dari a dan b maka $A_n = (A_n^{-1})^{-1}$

1.2. Homomorfisma Grup pada $GL_n(\mathbb{R})$

3.2.1 Homomorfisma Grup $GL_n(\mathbb{R})$ yang Didefinisikan $\phi(A_n) = \det A_n$

Misal diambil $I_n, A_n \in GL_n(\mathbb{R})$ dan $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ dan (\mathbb{R}, \times) merupakan

dua buah grup, didefinisikan $\phi(A_n) = \det A_n$ maka :

$$I_n = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \text{ adalah elemen identitas matriks}$$

$$\phi \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(I_n) = i_{1j}K_{1j} + i_{2j}K_{2j} + \dots + i_{nj}K_{nj}$$

$$= \sum_{j=1}^n i_{jj}K_{jj}; j = 1, 2, \dots, n$$

$$= 1 \in \square$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A_n) = a_{1j}K_{1j} + a_{2j}K_{2j} + \dots + a_{nj}K_{nj}$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{jj}K_{jj}; j = 1, 2, \dots, n$$

Akan dibuktikan $\phi(I_n A_n) = \phi(I_n) \phi(A_n)$

Bukti

$$\phi \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \right) = \phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \phi \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\phi \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{1j}i_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{1j}i_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{1j}i_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n a_{2j}i_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{2j}i_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{2j}i_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj}i_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{nj}i_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nj}i_{in} \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \phi \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\phi \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \phi \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix}$$

$$b_{1j}K_{1j} + b_{2j}K_{2j} + \dots + b_{nj}K_{nj}$$

$$= (a_{1j}K_{1j} + a_{2j}K_{2j} + \dots + a_{nj}K_{nj})(i_{1j}K_{1j} + i_{2j}K_{2j} + \dots + i_{nj}K_{nj})$$

$$\sum_{i=1}^n b_{ij}K_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij}K_{ij} \sum_{i=1}^n i_{ij}K_{ij}; j=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^n b_{ij}K_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij}i_{ij}K_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^n b_{ij}K_{ij} = \sum_{i=1}^n b_{ij}K_{ij}$$

Jadi untuk $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ dan (\mathbb{R}, \times) merupakan dua grup, sebuah fungsi

$\phi: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan $\phi(A_n) = \det A_n$ berlaku

$$\phi(I_n A_n) = \phi(I_n) \phi(A_n).$$

Misal $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ dan (\mathbb{R}, \times) merupakan sebuah dua grup. Sebuah fungsi

$\phi: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ disebut homomorfisma jika berlaku $\phi(A_n B_n) = \phi(A_n) \phi(B_n)$,

dengan $\phi(A_n) = \det A_n$ untuk setiap $A_n, B_n \in GL_n(\mathbb{R})$.

Bukti

Ambil $A_n, B_n \in GL_n(\mathbb{R}), \det A_n \in \mathbb{R}$

Didefinisikan $\phi: A_n \rightarrow \det A_n, \phi(A_n) = \det A_n$

Adib : $\det(A_n B_n) = \det(A_n) \det(B_n)$

$\phi(A_n B_n) = \phi(A_n) \phi(B_n)$

$$\phi \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \right) = \phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \phi \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\phi \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^n a_{1j} b_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{1j} b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{1j} b_{in} \\ \sum_{i,j=1}^n a_{2j} b_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{2j} b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{2j} b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^n a_{nj} b_{i1} & \sum_{i,j=1}^n a_{nj} b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^n a_{nj} b_{in} \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \phi \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\phi \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \phi \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix}$$

$$c_{1j} K_{1j} + c_{2j} K_{2j} + \cdots + c_{nj} K_{nj}$$

$$= (a_{1j} K_{1j} + a_{2j} K_{2j} + \cdots + a_{nj} K_{nj})(b_{1j} K_{1j} + b_{2j} K_{2j} + \cdots + b_{nj} K_{nj})$$

$$\sum_{i=1}^n c_{ij} K_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} K_{ij} \sum_{i=1}^n b_{ij} K_{ij}; j=1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} K_{ij} = \sum_{i=1}^n b_{ij} K_{ij}$$

Terbukti bahwa $GL_n(\mathbb{R})$ adalah homomorfisma.

Contoh :

$$\phi(A_2 B_2) = \phi \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \phi \left[\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 15 \end{pmatrix} \right] \\
 &= (9)(15) - (23)(7) \\
 &= -26
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi(A_2)\phi(B_2) &= \phi \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \phi \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= (4-6)(15-2) \\
 &= -26
 \end{aligned}$$

3.2.2 Homomorfisma Grup $GL_n(\mathbb{R})$ yang Didefinisikan $\phi(A_n) = trA_n$

Missal diambil $I_n, A_n \in GL_n(\mathbb{R})$ dan $(GL_n(\mathbb{R}), +)$ dan $(\mathbb{R}, +)$ merupakan dua buah grup, didefinisikan $\phi(A_n) = trA_n$ maka :

$$I_n = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \text{ adalah elemen identitas matriks}$$

$$\phi \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} = tr \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix}$$

$$tr(I_n) = i_{11} + i_{22} + \dots + i_{nn}$$

$$= \sum_{i,j=1}^n i_{ij}$$

$$= n \in \mathbb{R}$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}(A_n) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

$$= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}$$

$$= d \in \square$$

Akan dibuktikan $\phi(I_n + A_n) = \phi(I_n) + \phi(A_n)$

$$\phi \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix} \right) = \phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \phi \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\phi \begin{pmatrix} a_{11} + i_{11} & a_{12} + i_{12} & \cdots & a_{1n} + i_{1n} \\ a_{21} + i_{21} & a_{22} + i_{22} & \cdots & a_{2n} + i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + i_{n1} & a_{n2} + i_{n2} & \cdots & a_{nn} + i_{nn} \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \phi \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\phi \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \phi \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1n} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i_{n1} & i_{n2} & \cdots & i_{nn} \end{pmatrix}$$

$$b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn} = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) + (i_{11} + i_{22} + \dots + i_{nn})$$

$$b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn} = ((a+i)_{11} + (a+i)_{22} + \dots + (a+i)_{nn})$$

$$b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn} = b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn}$$

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij} = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}$$

contoh

$$\phi(I_2 + A_2) = \phi\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right]$$

$$\phi(I_2 + A_2) = \phi\left[\begin{pmatrix} 1+a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1+a_{22} \end{pmatrix}\right]$$

$$\phi(I_2 + A_2) = 2 + a_{11} + a_{22}$$

$$\phi(I_2 + A_2) = \phi\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] + \phi\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right]$$

$$\phi(I_2 + A_2) = \phi(I_2) + \phi(A_2)$$

Jadi untuk $(GL_n(\mathbb{R}), +)$ dan $(\mathbb{R}, +)$ merupakan dua grup, sebuah fungsi

$\phi: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan $\phi(A_n) = trA_n$ berlaku $\phi(I_n A_n) = \phi(I_n) \phi(A_n)$.

Misal $(GL_n(\mathbb{R}), +)$ dan $(\mathbb{R}, +)$ merupakan sebuah dua buah grup. Sebuah

fungsi $\phi: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ disebut homomorfisma jika berlaku

$\phi(A_n + B_n) = \phi(A_n) + \phi(B_n)$, $\phi(A_n) = trA_n$ untuk setiap $A_n, B_n \in GL_n(\mathbb{R})$.

Bukti

Ambil $A_n, B_n \in GL_n(\mathbb{R})$, $trA_n \in \mathbb{R}$

Didefinisikan $\phi: A_n \rightarrow trA_n$, $\phi(A_n) = trA_n$

Adib : $tr(A_n + B_n) = tr(A_n) + tr(B_n)$

$$\begin{aligned} \phi \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \right) &= \phi \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right) + \phi \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \right) \\ \phi \left(\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} \right) &= \phi \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right) + \phi \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \right) \\ \phi \left(\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \right) &= \phi \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right) + \phi \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn} = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn})$$

$$c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn} = ((a+b)_{11} + (a+b)_{22} + \dots + (a+b)_{nn})$$

$$c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn} = c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn}$$

$$\sum_{i,j=1}^n c_{ij} = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}$$

Terbukti bahwa $GL_n(\mathbb{R})$ adalah homomorfisma.

Contoh

$$\begin{aligned} \phi(A_2 + B_2) &= \phi \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right] \\ &= \phi \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= 9$$

$$\phi(A_2) + \phi(B_2) = \phi \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \phi \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (1+3) + (2+3)$$

$$= 9$$

3.2.3 Sifat-sifat Homomorfisma Grup $GL_n(\mathbb{R})$ yang Didefinisikan

$$\phi(A_n) = \det A_n$$

Teorema 5

Misalkan $GL_n(\mathbb{R})$, \mathbb{R} dua buah grup dan $\phi: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$\phi(A_n) = \det A_n$ sebuah homomorfisme. Hal berikut ini benar.

Maka :

1. Jika $I_n, 1$ masing-masing identitas di $GL_n(\mathbb{R})$ dan \mathbb{R} maka

$$\phi(I_n) = \underbrace{1 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1}_n = 1$$

Bukti

Ambil $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ dan $1 \in \mathbb{R}$

$$\phi(I_n) = \phi \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n 1_{ij} 1_{ij}$$

$$= 1$$

2. Untuk sebarang $A_n \in GL_n(\mathbb{R})$ maka $\phi(A_n^{-1}) = (\phi(A_n))^{-1}$

Ambil $A_n \in GL_n(\mathbb{R})$

Didefinisikan $\phi(A_n) = \det A_n$

Akan dibuktikan $\phi(A_n^{-1}) = (\phi(A_n))^{-1}$

Bukti

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\phi(A_n^{-1}) = (\phi(A_n))^{-1}$$

$$\phi \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \left(\phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

$$x_{1j}K_{1j} + x_{2j}K_{2j} + \cdots + x_{nj}K_{nj} = (a_{1j}K_{1j} + a_{2j}K_{2j} + \cdots + a_{nj}K_{nj})^{-1}$$

$$\sum_{t=1}^n x_{tj}K_{tj} = \left(\sum_{t=1}^n a_{tj}K_{tj} \right)^{-1}; j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{t=1}^n x_{tj}K_{tj} = \sum_{t=1}^n x_{tj}K_{tj}$$

$$3. \quad M_n(\square) \leq GL_n(\square) \rightarrow \phi(M_n(\square)) \leq \square$$

$$\phi: GL_n(\square) \rightarrow \square$$

$$i. \quad \text{Adit } \phi(M_n(\square)) \subseteq \square$$

$$\phi(M_n(\square)) : \{a \in H \mid H = \phi(A_n)\}$$

$$\begin{aligned}
M_n(\square) &\rightarrow \phi(M_n(\square)) \\
M_n(\square) &\leq GL_n(\square) \\
M_n(\square) &\subseteq GL_n(\square) \\
\phi(M_n(\square)) &\subseteq \phi(GL_n(\square)) \\
\phi(M_n(\square)) &\subseteq \square
\end{aligned}$$

ii. Adit $\phi(M_n(\square)) \neq \emptyset$

$$\begin{aligned}
M_n(\square) &\leq GL_n(\square) \\
A_n &\in M_n(\square) \\
\phi(A_n) &\in \phi(M_n(\square)) \\
\square &\in \phi(M_n(\square)) \\
\phi(M_n(\square)) &\neq \emptyset
\end{aligned}$$

iii. Adit $\phi(A_n), \phi(B_n) \in \phi(M_n(\square))$ maka $\phi(g_1)\phi(g_2)^{-1} \in \phi(A)$

$$\begin{aligned}
A_n \in M_n(\square) &\rightarrow \phi(A_n) \in \phi(M_n(\square)) \\
B_n \in M_n(\square) &\rightarrow \phi(B_n) \in \phi(M_n(\square))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_n(\square) &\leq GL_n(\square) \\
A_n, B_n \in M_n(\square) &\rightarrow A_n B_n^{-1} \in \phi(M_n(\square))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n B_n^{-1} &\in M_n(\square) \\
\phi(A_n)\phi(B_n^{-1}) &\in \phi(M_n(\square))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n^{-1} A_n &\in M_n(\square) \\
\phi(B_n^{-1})\phi(A_n) &\in \phi(M_n(\square))
\end{aligned}$$

$$A_n B_n^{-1} \in M_n(\square) \text{ maka } \phi(A_n)\phi(B_n^{-1}) \in \phi(M_n(\square))$$

Dari (i), (ii), dan (iii) diperoleh $M_n(\square) \leq GL_n(\square) \rightarrow \phi(M_n(\square)) \subseteq \square$

3.3 Inspirasi Al-Qur'an dalam Kajian tentang Grup

Adapun salah satu ayat Al-Qur'an yang menginspirasi tentang wajibnya mencari ilmu dalam QS. Al-Mujadalah : 11 yang berbunyi:

يَتَأْتِيهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا فِي الْمَجَالِسِ فَأَفْسَحُوا يَفْسَحِ اللَّهُ لَكُمْ وَإِذَا قِيلَ

أَدْنُوا فَاذْنُوا يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ ءَامَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ ۗ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ

خَبِيرٌ

“Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: ‘Berlapang-lapanglah dalam majlis’, Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. dan apabila dikatakan: ‘Berdirilah kamu’, Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan”(QS. Al-Mujadalah/58:11)

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa ketika seseorang disuruh melapangkan majelis, yang berarti melapangkan hati, bahkan jika dia disuruh berdiri sekali pun lalu memberikan tempatnya kepada orang yang patut didudukkan di muka, janganlah dia berkecil hati. Melainkan hendaklah dia berlapang dada karena orang yang berlapang dada itulah kelak yang akan diangkat imannya dan ilmunya oleh Allah Swt. Sehingga derajatnya bertambah naik. Orang yang patuh dan sudi memberikan tempat kepada orang lain itulah yang akan bertambah ilmunya. Salain itu ada orang yang diangkat Allah SWT derajatnya lebih tinggi dari pada orang kebanyakan, pertama karena imannya, kedua karena ilmunya. Setiap hari kita dapat melihat pada raut rnuka, pada wajah, pada sinar mata orang yang beriman dan berilmu. Dengan kata lain, betapa ilmu bisa mengangkat derajat manusia di hadapan Allah SWT dan di hadapan manusia lainnya. Baik itu ilmu agama atau ilmu sains pada hakikatnya semua ilmu adalah ilmu Allah Swt.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan bab III, maka dapat diambil kesimpulan, antara lain :

1. Suatu himpunan matriks invertibel yang entrinya adalah bilangan real yang didefinisikan $GL_n(\mathbb{R})$ dengan operasi pertambahan dan perkalian dengan skalar memenuhi 4 aksioma grup yaitu tertutup, asosiatif, mempunyai identitas, dan mempunyai invers.
2. Grup $GL_n(\mathbb{R})$ dengan $\phi: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan $\phi(A_n) = \det A_n$ dan $\phi: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan $\phi(A_n) = trA_n$ adalah homomorfisma grup.
3. Grup $GL_n(\mathbb{R})$ telah memenuhi sifat-sifat homomorfisma grup.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada fungsi $\phi: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan $\phi(A_n) = \det A_n$ dan $\phi(A_n) = trA_n$. Maka disarankan kepada peneliti yang lain untuk menggunakan penelitian secara lebih mendalam mengenai fungsi dan pendefinisian fungsi yang digunakan.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. 2000. *Aljabar Linier Elementer*. Jakarta: Erlangga
- Arifin, A. 2000. *Ajabar*. Bandung: ITB Bandung
- Baker, A. 2006. *Matrix Group an Introduction to Lie Group Theory*. London: Springer Verlag
- Cholily, Y.M. 2013. *Homomorfisma*. Malang: Malang. Universitas Muhammadiyah Malang
- Dummit, D.S dan Foote, R.M. 1991. *Abstract Algebra*. New York: Prentice-Hall International
- Raisinghania, M.D. and Anggarwai, R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar
- Supranto, J. 2003. *Pengantar Matriks*. Jakarta: PT Rineka Cipta