ORDER MINIMUM GRAF UNISENTRAL *G* DENGAN RADIUS *r* DAN DIAMETER *d* (*r*, *d* Bilangan Asli)

SKRIPSI

Oleh:
MOH. NIRWAN KHAMID
NIM. 04510022

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009

ORDER MINIMUM GRAF UNISENTRAL *G* DENGAN RADIUS *r* DAN DIAMETER *d* (*r*, *d* Bilangan Asli)

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
MOH. NIRWAN KHAMID
NIM. 04510022

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG

2009

ORDER MINIMUM GRAF UNISENTRAL *G*
DENGAN RADIUS *r* DAN DIAMETER *d*
(*r*, *d* Bilangan Asli)

SKRIPSI

Oleh:
MOH. NIRWAN KHAMID
NIM. 04510022

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 12 Januari 2009

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Wahyu Henky Irawan, M.Pd	**Achmad Nashichuddin, MA**
NIP: 150 300 415	**NIP. 150 302 531**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

ORDER MINIMUM GRAF UNISENTRAL *G* DENGAN RADIUS *r* DAN DIAMETER *d* (*r*, *d* Bilangan Asli)

SKRIPSI

Oleh:
MOH. NIRWAN KHAMID
NIM. 04510022

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 19 Januari 2009

Susunan Dewan Penguji		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Abdussakir, M.Pd NIP. 150 327 247	( )
2. Ketua	: Sri Harini, M.Si NIP. 150 318 321	( )
3. Sekretaris	: Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP: 150 300 415	( )
4. Anggota	: Achmad Nashichuddin, MA NIP. 150 302 531	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : MOH. NIRWAN KHAMID

NIM : 04510022

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Januari 2009

Yang membuat pernyataan

Moh. Nirwan Khamid

NIM. 04510022

MOTTO

“Sebaik-baik Manusia adalah yang Paling Bermanfaat Bagi Orang Lain”

(HR. Bukhari dan Muslim)

“Kita Datang Bukanlah Untuk Saling Bersaing Melainkan Untuk Saling Melengkapi”

(Bill McCartney)

PERSEMBAHAN

Dengan iringan doa dan rasa syukur yang teramat besar,
Karya tulis ini penulis persembahkan kepada:

Ayah dan ibu tercinta, yang telah memberikan segalanya.
Saudara-saudara tercinta, yang selalu memberikan dukungan moril dan spirituil.

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul *"ORDER MINIMUM GRAF UNISENTRAL G DENGAN RADIUS r DAN DIAMETER d* (*r*, *d* Bilangan Asli) " ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang .
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
3. Sri Harini, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
4. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.

5. Achmad Nashichuddin, MA, selaku dosen pembimbing keagamaan, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.
6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf UIN Malang.
7. Bapak dan Ibu tercinta, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spirituil dan perjuangannya yang tak pernah kenal lelah dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis sukses dalam meraih cita-cita serta ketulusan do'anya kepada penulis sampai dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Kakak-kakak tersayang, yang selalu memberikan bantuan, semangat dan do'a selama kuliah serta dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Teman-teman Matematika angkatan 2004, terima kasih atas doa serta kenangan yang kalian berikan.
10. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan spritual penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya Matematika. Amien.

Malang, 12 Januari 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Khamid, Moh. Nirwan. 2008. **Order Minimum Graf Unisentral dengan Radius *r* dan Diameter *d* (*r, d* Bilangan Asli).** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang. Pembimbing: (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd. (II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Order Minimum, Graf Unisentral, Graf Trivial

Masalah yang dibahas dalam skripsi ini dirumuskan sebagai berikut yaitu; bagaimana menentukan order minimum graf unisentral G dengan radius r dan diameter d serta bagaimana membuktikan rumus order minimum graf unisentral dengan radius r dan diameter d. Sedangkan tujuan penulisan skripsi ini adalah menyelesaikan penentuan order minimum graf unisentral G dengan radius r dan diameter d dan membuktikan rumus order minimum graf unisentral G dengan radius r dan diameter d. Kemudian permasalahan yang dikaji dibatasi dalam graf unisentral yang mempunyai hubungan antara radius r, diameter $d = 2r$ dan $d = r$.

Dalam menentukan order minimum graf unisentral perlu diketahui beberapa definisi sebagai berikut. Jarak $d(u,v)$ antara dua titik u dan v di G adalah panjang dari lintasan terpendek yang menghubungkan u dan v di G. Eksentrisitas $e(u)$ dari suatu titik u di G adalah maksimum $d(u,v): v \in V(G)$. *Radius G* didefinisikan sebagai minimum dari $e(v)$ sedangkan *diameter G* adalah maksimum $e(v)$.. Suatu titik v dikatakan titik sentral jika $e(v) = rad\ G$. Titik v disebut titik sentral jika $e(u) = diam(G)$. Jika titik sentral G tunggal, maka G disebut graf unisentral.

Dalam kajian ini, penulis mengkaji order minimum graf unisentral G yang mempunyai radius r dan diameter d (r, d bilangan asli). Antara radius dan diameter G terdapat hubungan $rad\ G \leq diam\ G \leq 2\ rad\ G$, sehingga dari hubungan tersebut pembahasan dapat disederhanakan menjadi (1) Order minimum graf unisentral G yang mempunyai radius r dan diameter $2r$ (r bilangan asli) dan (2) Order minimum graf unisentral G yang mempunyai radius r dan diameter r (r bilangan asli).

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh bahwa rumus umum banyaknya titik minimum graf unisentral dengan radius $rad\ G = r$ dan diameter $diam\ G = 2r$ adalah $p = |V(G)| = 2r + 1$. Sedangkan rumus umum banyaknya titik minimum graf unisentral dengan radius $rad\ G = r$ dan diameter $diam\ G = r$ adalah $p = |V(G)| = 1$ atau disebut graf trivial. Rumus umum yang diperoleh dibuktikan dengan induksi matematika dan dengan bukti langsung. Pembahasan mengenai minimum order ini masih dapat dilanjutkan untuk penelitian order minimum pada jenis graf yang lain.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan di dunia, manusia tidak lepas dari berbagai macam permasalahan. Permasalahan-permasalahan tersebut menyangkut berbagai aspek, dimana dalam penyelesaiannya diperlukan sebuah pemahaman melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu. Salah satu ilmu bantu yang dapat digunakan adalah ilmu matematika. Sedangkan ilmu Matematika sendiri merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Karena dalam bahasan matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan. Untuk keperluan tersebut, maka pertama dicari pokok masalahnya, kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya, sehingga masalah lebih mudah dipecahkan (Purwanto, 1998:1).

Menurut Abdul Aziz (2006:*v*) matematika adalah salah satu ilmu pasti yang mengkaji abstraksi ruang, waktu, dan angka. Matematika juga mendeskripsikan realitas alam semesta dalam bahasa lambang, sehingga suatu permasalahan dalam realitas alam akan lebih mudah dipahami. Sumber studi matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan dalam Islam, adalah konsep tauhid, yaitu ke-Esaan Allah (Rahman, 1992:92). Namun, Al-Qur'an tidak mengangkat metode baru atau teknik baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta (Rahman, 1992:92). Alam semesta sendiri memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007:79).

Dalam Al Qur'an surat Al Qamar ayat 49 disebutkan:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: "Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Q.S. Al-Qamar: 49).

Menurut Shihab (2003:482) dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti *kadar tertentu* yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti *kuasa*. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu*. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspeknya saja. Manusia misalnya, telah ada *kadar yang ditetapkan* Allah baginya.

Dalam ayat lain juga disebutkan:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: "Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan *serapi-rapinya" (Q.S. Al-Furqaan: 2).*

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya.

Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan, sehingga rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdusysyakir, 1997:80).

Dewasa ini semakin banyak muncul penggunaan model matematika maupun penalaran matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisa model atau rumusan teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto: 1998:1).

Terkait dengan pernyataan di atas, mencari titik minimum pada graf unisentral merupakan salah satu penelitian yang menarik untuk dikaji. Karena pada garf unisentral ini mempunyai suatu keunikan yaitu graf ini hanya mempunyai satu titik sentral saja. Dengan mengkaji dan menganalisis suatu pencarian titik minimum pada graf unisentral ini, akan didapat suatu perumusan yang akan lebih memudahkan proses pengaplikasiannya ke dunia nyata. Selain itu, mencari titik minimum pada graf unisentral ini mempunyai beberapa nilai penting dalam memahami tafsiran Al-Qur’an, yakni masalah *kadar* dan *sistem* yang telah dijelaskan pada ayat di atas. Artinya, dalam masalah mencari titik minimum pada graf unisentral ini ternyata juga terdapat rumusan atau aturan-aturannya. Rumusan atau aturan-aturan yang dimaksud adalah bagaimana menentukan titik minimum pada graf unisentral dengan radius dan diameter tertentu. Begitulah Al-Qur'an menjelaskan dan menjadi sumber dari ilmu pengetahuan yang telah banyak dikembangkan di muka bumi ini, khususnya perkembangan ilmu matematika.

Allah SWT yang telah menciptakan alam semesta ini dengan aturan dan ukuran yang serapi-rapinya, ternyata tidak hanya ada pada firman-Nya saja, tetapi itu semua sudah terbukti. Dapat kita lihat dan rasakan secara langsung segala apa yang ada di muka bumi ini yang kesemuanya tertata dengan sempurna. Demikian pula pada pembahasan yang ada di BAB III nantinya, akan dibuktikan banyaknya titik minimum graf unisentral dengan radius *r* dan diameter *d* (*r*,*d* bilangan asli) tersebut memang benar adanya.

Allah SWT. berfirman dalam Al-Qur'an surat Al-Baqarah ayat 111:

.... قُلْ هَاتُوا۟ بُرْهَـٰنَكُمْ إِن كُنتُمْ صَـٰدِقِينَ ﴿١١١﴾

Artinya: ......Katakanlah: "Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar" (Q.S. Al-Baqarah: 111).

Juga dalam surat Al-An'am ayat 143:

..... نَبِّـُٔونِى بِعِلْمٍ إِن كُنتُمْ صَـٰدِقِينَ ﴿١٤٣﴾

Artinya: ".......Terangkanlah kepadaku dengan berdasar pengetahuan jika kamu memang orang-orang yang benar" (Q.S. Al-An'am: 143).

Beberapa kajian terdahulu tentang minimum order graf unisentral telah dibahas pada karya tulis yang lain, seperti "minimum order graf unisentral dengan radius r dan diameter d" oleh Ketut Budayasa. Dari karya tulisnya diperoleh hasil bahwa graf unisentral dengan radius r dan diameter $< 2r$ diperoleh minimum ordernya $p = |V(G)| \geq 3r + 1$. Untuk selanjutnya penulis tertarik untuk melanjutkan meneliti tentang minimum order graf unisentral, namun dengan menggunakan radius dan diameter yang berbeda. Oleh karena itu penulis merumuskan judul untuk skripsi ini, yakni *Order Minimum Graf Unisentral G dengan Radius r dan Diameter d* (r, d Bilangan Asli).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini antara lain:

1. Bagaimana menentukan order minimum graf unisentral G dengan radius r dan diameter d?
2. Bagaimana membuktikan rumus order minimum graf unisentral dengan radius r dan diameter d?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini antara lain:

1. Menjelaskan cara menentukan order minimum graf unisentral G dengan radius r dan diameter d.

2. Membuktikan rumus order minimum graf unisentral G dengan radius r dan diameter d.

1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan dalam skripsi ini tidak meluas, maka graf yang dibahas dalam skripsi ini adalah graf unisentral yang mempunyai hubungan antara radius r, diameter $d = 2r$ dan $d = r$.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi peneliti, sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai cara menentukan order minimum graf unisentral G.
2. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya teori graf mengenai cara menentukan order minimum graf unisentral G.
3. Bagi lembaga UIN Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah teori graf.

1.6 Metode Penelitian

1.6.1 Jenis Penelitian

Jenis dari penelitian ini adalah deskriptif kualitatif. Pendekatan yang digunakan adalah pendekatan kualitatif dengan metode kepustakaan. Dalam pendekatan deskriptif kualitatif ini maka penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan (Library Research). Metode penelitian kepustakaan yaitu penelitian yang dilakukan di dalam perpustakaan untuk mengumpulkan data dan informasi kemudian dilanjutkan dengan menyusun, mengolah, menganalisis, menarik kesimpulan, menafsirkan, dan menguji hipotesis didasarkan dari hasil pengolahan data sehingga diperoleh ringkasan/kesimpulan data. Pengumpulan data dan informasi tersebut dapat dilakukan dengan bantuan bermacam material yang terdapat di ruang perpustakaan seperti buku-buku dan dokumen yang ada.

1.6.2 Data dan sumber Data

Data yang digunakan penulis dalam rangka penyusunan skripsi ini adalah data-data yang meliputi graf unisentral dengan $rad\ G = r$ dan $diam\ G = d$ (r, d bilangan asli), dan data-data lain yang sesuai.

Sumber data dalam penulisan skripsi ini diperoleh melalui buku-buku antara lain Gary Chartrand dan Linda Lesniak (Graphs and digraphs second edition) J. A. Bondy dan U. S. R. Murty (Graph Theory with Applications) dan sumber-sumber lain yang relevan.

1.6.3 Tehnik Analisis data

Dalam menganalisis data, penulis melakukan pencarian dengan menggunakan contoh-contoh pencarian order minimum graf unisentral dengan $rad\ G = r$ dan $diam\ G = 2r$ serta graf unisentral dengan $rad\ G = r$ dan $diam\ G = r$ sampai akhirnya diperoleh pola tertentu. Pola yang diperoleh dianggap sebagai dugaan (konjektur). Kemudian konjektur tersebut dibuktikan terlebih dahulu. Setelah konjektur terbukti, penulis merumuskan konjektur tersebut sebagai suatu teorema sehingga diperoleh laporan penulisan bahwa graf unisentral dengan $rad\ G = r$ dan $diam\ G = 2r$ serta graf unisentral dengan $rad\ G = r$ dan $diam\ G = r$ untuk r bilangan asli mempunyai titik minimum.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yeng terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian graf, graf terhubung, jarak pada graf.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang menentukan order minimum graf unisentral G dengan radius r dan diameter d dan membuktikannya, serta Kajian Agama Islam tentang menentukan order minimum graf unisentral.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Graf

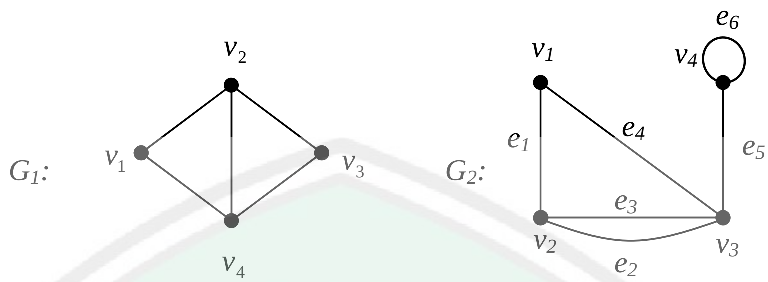
2.1.1. Definisi Graf

Definisi 1

Graf *G* adalah pasangan himpunan (*V*, *E*) dengan *V* adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan *E* adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di *G* yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di *G* dinotasikan dengan *V(G)* dan himpunan sisi dinotasikan dengan *E*(G). Sedangkan banyaknya unsur di *V* disebut order dari *G* dan dilambangkan dengan *p(G)* dan banyaknya unsur di *E* disebut ukuran dari *G* dan dilambangkan dengan *q(G)*. Jika graf yang dibicarakan hanya graf *G*, maka order dan ukuran dari *G* tersebut cukup ditulis dengan *p* dan *q* (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Dari definisi di atas, maka suatu graf sederhana tidak boleh mempunyai sisi rangkap (*multiple edges*) dan loop. Sisi rangkap dari suatu graf adalah jika dua titik yang dihubungkan oleh lebih dari satu sisi. Sedangkan yang disebut dengan loop adalah suatu sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri (Suryanto, 1986:14). Graf yang mempunyai sisi rangkap dan loop disebut multigraf.

Contoh:



Gambar 2.1 Graf dan Multigraf

Pada Gambar 2.1 G_1 merupakan graf, memuat himpunan titik $V(G_1)$ dan sisi $E(G_1)$ yaitu :

$$V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

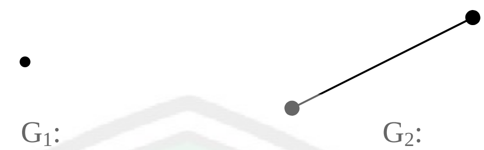
$$E(G_1) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_1)\}$$

Graf G_1 mempunyai order 4 atau $p = 4$ dan *size* 5 atau $q = 5$.

Sedangkan G_2 merupakan multigraf karena mempunyai sisi rangkap e_2, e_3 dan loop pada titik v_4 yaitu e_6.

Graf G disebut *finite* atau berhingga jika himpunan titik adalah berhingga, atau graf yang jumlah titiknya adalah n berhingga. Graf *infinite* atau tak berhingga adalah graf yang jumlah titiknya tidak berhingga. *Graf trivial* adalah graf berorder satu dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf *non trivial* adalah graf yang berorder lebih dari satu (Bondy and Murthy, 1976:3).

Contoh:



Gambar 2.2 G_1 Graf Trivial dan G_2 Graf Non Trivial

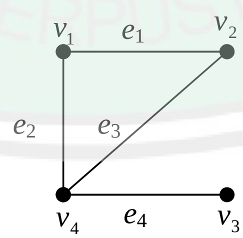
Pada Gambar 2.2 G_1 merupakan graf trivial karena G_1 hanya memuat satu titik atau berorder satu dan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Sedangkan G_2 merupakan graf non trivial karena berorder lebih dari satu.

2.1.2. *Adjacent* dan *Incident*

Definisi 2

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u,v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:



Gambar 2.3 Graf *G*

Dari Gambar 2.3 titik v_4 dan sisi e_2, e_3 dan e_4 adalah terkait langsung. Sedangkan titik v_3 dan v_4 adalah terhubung langsung tetapi v_3 dan v_2 tidak.

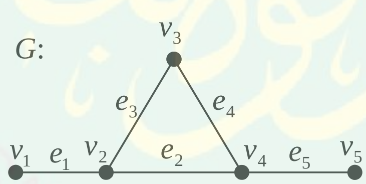
2.1.3. Derajat Titik

Definisi 3

Derajat dari titik *v* di graf *G*, ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di *G* yang terkait langsung (*incident*) dengan *v*. Jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf *G*, maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$. Titik yang berderajat genap sering disebut titik genap (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut titik terisolasi (*isolated vértices*) dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (*end vertices*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh:

Perhatikan graf *G* berikut yang mempunyai himpunan titik $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ dan himpu nan sisi $E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$



Gambar 2.4 Graf dengan Derajat Titik

Berdasarkan Gambar 2.4, diperolah bahwa:

$\deg(v_1)=1$

$\deg(v_2)=3$

$\deg(v_3)=2$

$\deg(v_4)=3$

$$\deg(v_5) = 1$$

Titik v_2 dan v_4 adalah titik ganjil, titik v_3 adalah titik genap, titik v_1 dan v_3 adalah titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q, adalah

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q.$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 1

Jika G graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_P\}$

maka $\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Corollary 1.

Pada sebarang graf, banyak titik ganjil adalah genap.

Bukti:

Misalkan graf G dengan banyak sisi (*size*) q. Misalkan W himpunan yang memuat titik ganjil pada G serta U himpunan yang memuat titik genap di G. Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in v(\mathrm{G})} \deg(v) = \sum_{v \in \mathrm{W}} \deg(v) + \sum_{v \in \mathrm{U}} \deg(v) = 2q$$

Dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \deg(v)$ genap, maka $\sum_{v \in W} \deg(v)$ (jumlah derajat titik ganjil) juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap.

2.1.4. Graf Beraturan-*r*

Definisi 4

Graf beraturan-*r* adalah graf yang semua titiknya berderajat *r*, atau $\deg(v) = r,\ \forall v \in V(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:9).

Contoh:

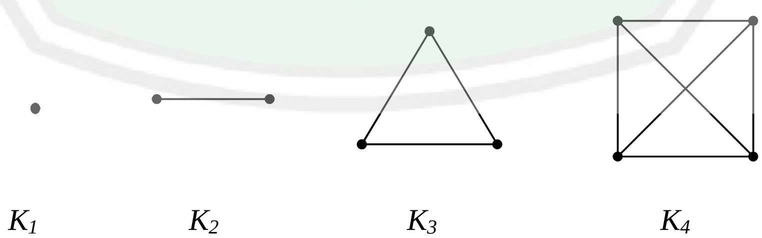
Gambar 2.5 Graf G_1 Beraturan-1 dan G_2 Beraturan-2

Dari Gambar 2.5, graf G_1 disebut graf beraturan-1 karena derajat tiap titiknya adalah 1. Graf G_2 disebut graf beraturan-2 karena derajat tiap titiknya adalah 2.

2.1.5. Graf Komplit

Definisi 5

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan oleh satu sisi. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Purwanto, 1998:21).



Gambar 2.6 Graf Komplit

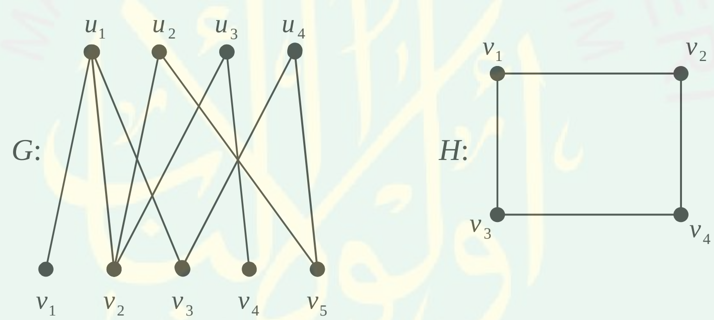
Dari Gambar 2.6. K_1, K_2, K_3 dan K_4 adalah graf komplit karena tiap titik dalam graf tersebut selalu *adjacent* dengan semua titik yang lain.

2.1.6. Graf Bipartisi

Definisi 6

Graf bipartisi (*bipartite graph*) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisahkan menjadi dua himpunan tak kosong X dan Y sehingga masing-masing sisi di graf tersebut menghubungkan satu titik di X dan satu titik di Y; X dan Y disebut himpunan partisi (Purwanto, 1998:21).

Contoh:



Gambar 2.7 Graf Bipartisi

Pada Gambar 2.7, G adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $X = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $Y = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Demikian juga H adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $X = \{v_1, v_4\}$ dan $Y = \{v_2, v_3\}$.

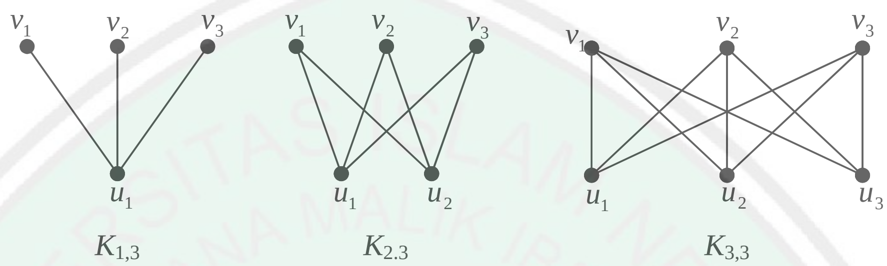
2.1.7. Graf Bipartisi Komplit

Definisi 7

Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X

dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X|$ = m dan $|Y|$ = n, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{m,n}$. (Purwanto, 1998:22).

Contoh:



Gambar 2.8 Graf Bipartisi Komplit

Pada Gambar 2.8 akan dijelaskan sebagai berikut:

$K_{1,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$X = \{u_1\}$, $|X| = 1$

$Y = \{v_1, v_2, v_3\}$, $|Y| = 3$

$K_{2,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$X = \{u_1, u_2\}$, $|X| = 2$

$Y = \{v_1, v_2, v_3\}$, $|Y| = 3$

$K_{3,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$X = \{u_1, u_2, u_3\}$, $|X| = 3$

$Y = \{v_1, v_2, v_3\}$, $|Y| = 3$

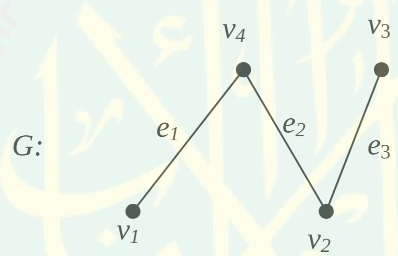
2.2. Graf Terhubung

Definisi 8

Sebuah jalan (*walk*) $u - v$ di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong). $W : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_n, v_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik sedemikian hingga untuk $0 < i \le n$. Dengan $e_i = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G.

v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, v_1, v_2, ..., v_{n-1} disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Contoh:



Gambar 2.9 Graf dengan Jalan

Jalan pada graf G di Gambar 2.9 adalah W: $v_1, e_1, v_4, e_2, v_2, e_3, v_3$

Definisi 9

Jalan $u - v$ yang semua sisinya berbeda disebut *Trail* $u - v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 10

Trail $u - v$ yang semua titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) $u - v$. Dengan demikian, semua lintasan adalah *Trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

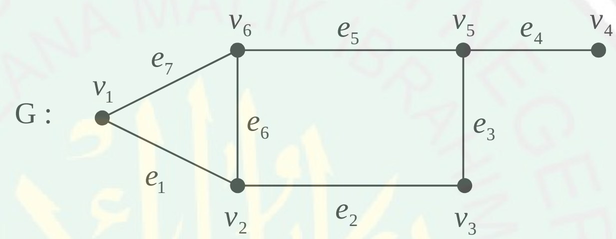
Definisi 11

Trail tertutup (*closed trail*) yang tak-trivial pada graf *G* disebut Sirkuit *G* (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Definisi 12

Sirkuit $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ ($n \geq 3$) dimana v_i adalah titik-titik berbeda untuk $1 \leq i \leq n$ disebut Sikel (*cycle*). (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:



Gambar 2.10 Trail, Lintasan, Sirkuit dan Sikel

Trail pada graf G di Gambar 2.10 adalah : $v_5, e_3, v_3, e_2, v_2, e_6, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4$.

Lintasan pada graf G di Gambar 2.10 adalah : $v_3, e_2, v_2, e_1, v_1, e_7, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4$.

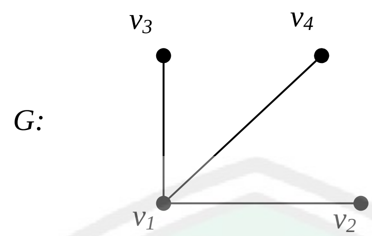
Sirkuit pada graf G di Gambar 2.10 adalah : $v_5, e_5, v_6, e_7, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_5$

Sikel pada graf G di Gambar 2.10 adalah : $v_5, e_5, v_6, e_6, v_2, e_2, v_3, e_3, v_5$

Definisi 13

Misalkan *u* dan *v* titik berbeda pada graf *G*. Maka titik *u* dan *v* dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan *u* – *v* di *G*. Sedangkan suatu graf *G* dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik *u* dan *v* di *G* terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:



Gambar 2.11 Graf Terhubung (*connected*)

Graf G pada Gambar 2.11 dikatakan terhubung karena setiap titiknya terhubung dengan titik yang lain.

2.3. Ruang Metrik

Definisi 14

Suatu metrik pada himpunan S adalah suatu fungsi $d: S \times S \to \Re$ maka memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in S$ (*Positivity*);

(b) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ (*definiteness*);

(c) $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in S$ (*symmetry*);

(d) $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in S$ (*triangle inequality*).

Suatu ruang metrik (S, d) adalah suatu himpunan S dengan suatu metrik d pada S (Bartle dan Sherbert, 1992:365).

Contoh:

Metrik yang umum pada $\Re$ didefinisikan oleh

$$d(x, y) = |x - y| \text{ untuk } x, y \in \Re .$$

Ketaksamaan segitiga untuk *d* mengikuti dari ketaksamaan segitiga untuk harga mutlak kita mempunyai

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x-y| \\ &= |(x-z)+(z-y)| \\ &\le |x-z|+|z-y| \\ &= d(x,z)+d(z,y), \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y, z \in \Re$

2.4. Jarak

Definisi 15

Untuk suatu graf terhubung G, maka jarak (*distance*) $d(u,v)$ antara dua titik u dan v di G adalah panjang dari lintasan terpendek yang menghubungkan u dan v di G. Dengan fungsi jarak ini, himpunan $V(G)$ adalah suatu ruang metrik (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

Definisi 16

Eksentrisitas (*eccentricity*) $e(v)$ dari suatu titik v pada graf terhubung G merupakan maksimum $d(u,v), \forall u \in V(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

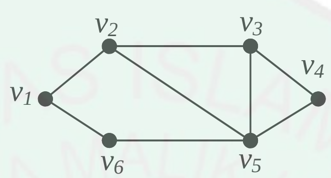
Definisi 17

Titik v adalah titik eksentrik dari u jika jarak dari v ke u sama dengan eksentrisitas dari u atau $d(v,u) = e(u)$ (Gafur, 2007:1).

Radius rad G didefinisikan sebagai minimum dari $e(v)$ sedangkan *diameter* diam G adalah maksimum $e(v)$. Suatu titik v dikatakan titik sentral jika $e(v) = rad\ G$ dan $Z(G)$ adalah himpunan titik sentral di G (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

Contoh:

G:



Gambar 2.12 Graf Terhubung (*connected*)

Jarak pada graf G di Gambar 2.12 adalah :

$d(v_1,v_2)=1$, $d(v_1,v_3)=2$, $d(v_1,v_4)=3$, $d(v_1,v_5)=2$, $d(v_1,v_6)=1$,

$d(v_2,v_1)=1$, $d(v_2,v_3)=1$, $d(v_2,v_4)=2$, $d(v_2,v_5)=1$, $d(v_2,v_6)=2$,

$d(v_3,v_1)=2$, $d(v_3,v_2)=1$, $d(v_3,v_4)=1$, $d(v_3,v_5)=1$, $d(v_3,v_6)=2$,

$d(v_4,v_1)=3$, $d(v_4,v_2)=2$, $d(v_4,v_3)=1$, $d(v_4,v_5)=1$, $d(v_4,v_6)=2$,

$d(v_5,v_1)=2$, $d(v_5,v_2)=1$, $d(v_5,v_3)=1$, $d(v_5,v_4)=1$, $d(v_5,v_6)=1$,

$d(v_6,v_1)=1$, $d(v_6,v_2)=2$, $d(v_6,v_3)=2$, $d(v_6,v_4)=2$ dan $d(v_6,v_5)=1$

Eksentrisitas pada graf G pada Gambar 2.12 adalah : $e(v_1)=3$, $e(v_2)=2$, $e(v_3)=2$, $e(v_4)=3$, $e(v_5)=2$ dan $e(v_6)=2$.

Titik eksentrik pada graf G pada Gambar 2.12 adalah :

titi eksentrik v_1 adalah v_4

titi eksentrik v_2 adalah v_4 dan v_6

titi eksentrik v_3 adalah v_1 dan v_6

titi eksentrik v_4 adalah v_1

titi eksentrik v_5 adalah v_1

titi eksentrik v_6 adalah v_2, v_3 dan v_4

Radius pada graf G di Gambar 2.12 adalah : rad G = 2

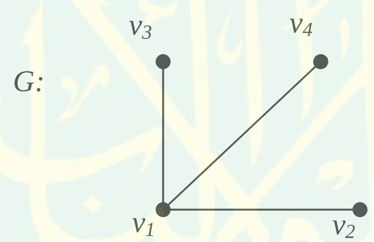
Diameter pada graf G di Gambar 2.12 adalah : diam G = 3

Titik sentral pada graf G di Gambar 2.12 adalah : v_2, v_3, v_5, v_6

Definisi 18

Misal v adalah titik sentral di G dan v adalah tunggal maka G disebut graf *unisentral* (Budayasa, 2000:145).

Contoh:



Gambar 2.13 Graf Unisentral

Titik sentral pada graf G di Gambar 2.13 adalah : v_1

Teorema 2

Untuk setiap graf terhubung G, antara radius dan diameter G terdapat hubungan sebagai berikut,

$$rad\ G \leq diam\ G \leq 2\ rad\ G$$

Bukti

Pertidaksamaan $rad\ G \leq diam\ G$ adalah suatu konsekuensi langsung dari definisi yaitu $rad\ G = \min e(v)$ dan $diam\ G = \max e(v)$. Untuk menunjukkan ketidaksamaan yang kedua, pilih titik u dan v di G, sedemikian hingga $d(u,v) = diam\ G$. Kemudian, misalkan w sebagai titik sentral dari G. Titik u ke v melalui titik sentral w karena jarak $d(u,v)$ di G merupakan panjang dari lintasan terpendek yang menghubungkan u dan v di G jika u ke v melalui titik sentral w. Karena d adalah metrik pada $V(G)$, sedemikian hingga terdapat sifat ketaksamaan segitiga (*triangle inequality*) sebagai berikut,

$$d(u,v) \le d(u,w) + d(w,v) \le 2\ rad\ G$$

Sehingga grafnya dapat digambarkan sebagai berikut

Gambar 2.14 Graf Hubungan radius G dan diameter G

2.5. Pembuktian dalam Pandangan Islam

Al-Quran merupakan kitab suci yang banyak menyimpan rahasia-rahasia baik dalam dunia nyata maupun ghaib, baik kehidupan masa sekarang ataupun masa yang akan datang, dan kini mulai banyak dikaji oleh para ilmuwan. Karena tanpa disadari bahwa Al-Quran sebenarnya menjadi acuan dalam berbagai hal bukan hanya sekedar sebagai pelengkap. Dari Al-Quran banyak ilmu-ilmu yang dapat digali diantaranya ilmu matematika, contohnya hukum mawaris. Surat yang berkaitan dengan mawaris salah satunya adalah surat An-Nisa’ ayat 11 yang menerangkan bagian yang harus diperoleh seorang anak laki-laki yaitu dua kali anak perempuan. Dari sini dapat dilihat suatu perhitungan secara matematis yaitu berkaitan dengan operasi perkalian.

Berangkat dari ilmu matematika, yang di dalamnya terdapat suatu konsep pembuktian secara matematis. Dimana suatu pembuktian matematika merupakan sebuah demonstrasi yang meyakinkan atas rumus, teorema, atau pernyataan. Namun sebuah pembuktian dapat pula terdiri atas pencarian bahwa pernyataan itu benar, dengan bantuan logika dan matematika (http://id.wikipedia.org/wiki/Pembuktian_matematika).

Dalam Al-Qur'an menyebutkan bahwa kebenaran sesuatu tidak cukup hanya dengan bentuk ucapan, dan tulisan saja, tetapi perlu dan harus dibuktikan. Hal ini sesuai pada surat Al-Baqarah ayat 111:

وَقَالُواْ لَن يَدۡخُلَ ٱلۡجَنَّةَ إِلَّا مَن كَانَ هُودًا أَوۡ نَصَٰرَىٰۗ تِلۡكَ أَمَانِيُّهُمۡۗ قُلۡ هَاتُواْ
بُرۡهَٰنَكُمۡ إِن كُنتُمۡ صَٰدِقِينَ ١١١

Artinya: Dan mereka (Yahudi dan Nasrani) berkata: "Sekali-kali tidak akan masuk surga kecuali orang-orang (yang beragama) Yahudi atau Nasrani". demikian itu (hanya) angan-angan mereka yang kosong belaka. Katakanlah: "Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar"(Q.S. Al-Baqarah:111).

Ayat di atas, menceritakan bahwa pada zaman dahulu para ahli kitab (Yahudi dan Nasrani), yang berangan-angan bahwa tidak akan ada yang masuk surga kecuali siapa yang memeluk agama mereka. Selain itu mereka juga menyatakan bahwa mereka tidak akan disentuh api neraka kecuali beberapa hari saja dan kemudian akan segera berpindah ke surga. Demikianlah angan-angan dari para Ahli Kitab tersebut yang tiada sama sekali kebenarannya. Sehingga Allah

SWT langsung memberikan teguran bahwa hendaknya mereka menunjukkan bukti pengakuan (hujjah) akan kebenaran dari yang mereka katakan jika memang itu benar (Murakfuri dalam Ghafur, 2007:385-386).

Allah SWT penguasa yang memiliki wewenang tunggal dalam hal surga dan neraka, secara langsung membantah para Ahli Kitab. Allah tidak menggunakan perantara dan tidak memerintahkan siapapun termasuk Nabi Muhammad SAW Untuk menjawab kebohongan itu. Allah yang menyatakan: Yang *demikian itu*, yakni ucapan tersebut, dan ucapan-ucapan mereka yang lain, yang sangat jauh dari kebenaran hanya (*Amaani*) *angan-angan belaka* yang lahir dari kebohongan yang disampaikan oleh pendeta-pendeta Yahudi tanpa ada dasarnya *dan mereka hanya menduga-duga*.

Selanjutnya, Allah SWT tidak memerlukan bukti dari mereka menyangkut kebohongan mereka, karena Allah Maha Mengetahui segala sesuatu. Tetapi manusia perlu. Karena itu, di sini Allah memerintahkan Nabi Muhammad SAW: *katakanlah* wahai Muhammad kepada mereka, ”*Tunjukkanlah* kepada kami *bukti kebenaran kamu jika kamu adalah orang yang benar*”. Bukti yang dimaksud di sini adalah berupa wahyu Illahi, karena surga dan neraka adalah wewenang Allah. Hanya Dia yang mengetahui siapa yang berhak memasukinya. Nabi Muhammad SAW pun tidak tahu. Itu sebabnya, maka bukti kebenaran yang dituntut adalah informasi-Nya, yakni wahyu-wahyu yang disampaikan kepada utusan-utusan-Nya (Shihab, 2002: 296-297).

Dalam surat Al-an’am ayat 143 juga disebutkan:

ثَمَٰنِيَةَ أَزْوَٰجٍ ۖ مِّنَ ٱلضَّأْنِ ٱثْنَيْنِ وَمِنَ ٱلْمَعْزِ ٱثْنَيْنِ ۗ قُلْ ءَآلذَّكَرَيْنِ حَرَّمَ أَمِ
ٱلْأُنثَيَيْنِ أَمَّا ٱشْتَمَلَتْ عَلَيْهِ أَرْحَامُ ٱلْأُنثَيَيْنِ ۖ نَبِّـُٔونِى بِعِلْمٍ إِن كُنتُمْ صَٰدِقِينَ ﴿١٤٣﴾

Artinya: ”(yaitu) delapan binatang yang berpasangan, sepasang domba, sepasang dari kambing. Katakanlah: "Apakah dua yang jantan yang diharamkan Allah ataukah dua yang betina, ataukah yang ada dalam kandungan dua betinanya?" Terangkanlah kepadaku dengan berdasar pengetahuan jika kamu memang orang-orang yang benar” (Q.S. Al-An’am: 143).

Berdasarkan dari kedua ayat itulah hendaknya segala sesuatu baik perkataan maupun perbuatan baik yang tertulis maupun yang tidak, jika memang benar adanya, maka sudah sepatutnyalah untuk diberikan pembuktiannya.

Secara umum beberapa konsep ilmu telah dijelaskan dalam al-Quran. Pembuktian kebenaran dari suatu pernyataan seperti pada pembuktian matematika, telah dijelaskan dalam surat al-Hujurat ayat 6.

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓا۟ إِن جَآءَكُمْ فَاسِقٌۢ بِنَبَإٍ فَتَبَيَّنُوٓا۟ أَن تُصِيبُوا۟ قَوْمًۢا بِجَهَٰلَةٍ فَتُصْبِحُوا۟
عَلَىٰ مَا فَعَلْتُمْ نَٰدِمِينَ ﴿٦﴾

Artinya: ”Hai orang-orang yang beriman, jika datang kepadamu orang fasik membawa suatu berita, maka periksalah dengan teliti agar kamu tidak menimpakan suatu musibah kepada suatu kaum tanpa mengetahui keadaannya yang menyebabkan kamu menyesal atas perbuatanmu itu.”

Jika dimaknai secara matematis, berita atau pernyataan yang dimaksud dalam ayat tersebut adalah konjektur. Konjektur adalah pernyataan yang belum diketahui nilai kebenarannya. Sebuah konjektur tidak dapat dijadikan dasar bagi pengembangan pengetahuan, karena sifatnya masih meragukan. Hal yang masih meragukan, tidak dapat memberi manfaat sebagaimana disebutkan dalam al-Quran surat an-Najm ayat 28.

وَمَا لَهُم بِهِۦ مِنۡ عِلۡمٍۖ إِن يَتَّبِعُونَ إِلَّا ٱلظَّنَّۖ وَإِنَّ ٱلظَّنَّ لَا يُغۡنِي مِنَ ٱلۡحَقِّ شَيۡـٔٗا ٢٨

Artinya : "Dan mereka tidak mempunyai sesuatu pengetahuanpun tentang itu. mereka tidak lain hanyalah mengikuti persangkaan sedang Sesungguhnya persangkaan itu tiada berfaedah sedikitpun terhadap kebenaran."

Konjektur baru dapat dijadikan dasar bagi pengembangan pengetahuan, ketika dapat dibuktikan kebenarannya, atau dengan kata lain menjadi teorema.

Teorema adalah pernyataan yang dapat ditunjukkan kebenarannya. Teorema dapat ditunjukkan kebenarannya dengan serangkaian pernyataan yang membentuk sebuah argumen, disebut bukti. Pembuktian pada teorema berperan sebagai jaminan kebenaran. Untuk mengkontruksi bukti, metode-metode diperlukan untuk memperoleh pernyataan-pernyataan baru dari pernyataan-pernyataan lama. Pernyataan-pernyataan yang digunakan dalam sebuah bukti dapat meliputi aksioma atau postulat, yaitu pernyataan dasar yang tidak perlu dibuktikan kebenarannya, hipotesis dari teorema yang dibuktikan, dan teorema yang telah dibuktikan sebelumnya (Rosen, 2003: 56).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini, akan dibahas mengenai order minimum graf unisentral G yang mempunyai radius r dan diameter d (r, d bilangan asli). Diketahui antara radius dan diameter G terdapat hubungan bahwa $rad\ G \leq diam\ G \leq 2\ rad\ G$, sehingga dari hubungan tersebut pembahasan dapat disederhanakan sebagai berikut:

1. Order minimum graf unisentral G yang mempunyai radius r dan diameter $2r$ (r bilangan asli).
2. Order minimum graf unisentral G yang mempunyai radius r dan diameter r (r bilangan asli).

Graf yang dibahas pada karya tulis ini merupakan graf tak berarah, tidak punya *loop* dan tidak mempunyai sisi rangkap. Selain itu merupakan graf yang hanya mempunyai satu titik sentral (unisentral).

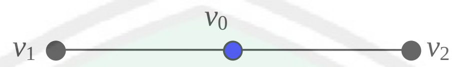
3.1 Order Minimum Graf Unisentral *G*

3.1.1 Graf Unisentral *G* dengan Radius *r* dan Diameter 2*r* (*r* Bilangan Asli)

Untuk menentukan order minimum suatu graf unisentral G dengan radius r dan diameter $2r$ (r bilangan asli) maka akan dijelaskan sebagai berikut:

1. Mencari order minimum graf unisentral G dengan radius $r = 1$ dan diameter $2r = 2$.

a. Misal G adalah sebarang graf unisentral dengan radius $r=1$ dan diameter $2r=2$. Misalkan v_0 adalah titik sentral dari G, dan graf G dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.1 Graf Unisentral G dengan Radius $r=1$ dan Diameter $2r=2$

Karena $rad\ G=1$ dan $diam\ G=2$ sesuai definisi radius dan diameter, maka pasti eksentrisitas minimumnya adalah $1=rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $2=diam\ G$.

Untuk menunjukkan bahwa eksentrisitas minimumnya adalah $1=rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $2=diam\ G$, maka terlebih dahulu ditunjukkan jarak maksimum dari masing-masing titik graf tersebut. Sesuai definisi jarak maka diperoleh:

$d(v_0,v_1)=1$, $d(v_0,v_2)=1$, $d(v_1,v_0)=1$

$d(v_1,v_2)=2$

$d(v_2,v_1)=2$

Sedemikian hingga sesuai dengan definisi eksentrisitas, maka dapat ditentukan eksentrisitas masing-masing titiknya sebagai berikut:

$e(v_0)=1$, $e(v_1)=2$ dan $e(v_2)=2$.

Jadi terbukti bahwa eksentrisitas minimum graf G adalah:

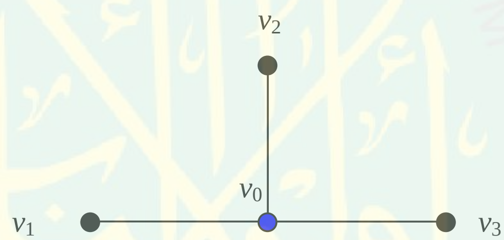
$$rad\ G=1=r$$

dan eksentrisitas maksimum graf G adalah:

$$diam\ G = 2 = 2r$$

Sehingga untuk graf dengan $p = |V| = 3$ merupakan graf Unisentral dengan $rad\ G = r = 1$ dan $diam\ G = 2r = 2$.

b. Misal graf G pada Gambar 3.1 di atas ditambah satu titik yang terhubung langsung (*adjacent*) dengan titik sentral v_0, sebut titik v_3. Dengan tidak merubah bahwa graf tersebut merupakan graf unisentral dengan $rad\ G = 1$ dan $diam\ G = 2$ sedemikian hingga dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.2 Graf Unisentral G dengan Penambahan Titik v_3

Karena $rad\ G = 1$ dan $diam\ G = 2$ sesuai definisi radius dan diameter, maka pasti eksentrisitas minimumnya adalah $1 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $2 = diam\ G$.

Untuk menunjukkan bahwa eksentrisitas minimumnya adalah $1 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $2 = diam\ G$, maka terlebih dahulu ditunjukkan jarak maksimum dari masing-masing titik graf tersebut. Sesuai definisi jarak maka diperoleh:

$d(v_0, v_1) = 1$, $d(v_0, v_2) = 1$, $d(v_0, v_3) = 1$

$d(v_1, v_2) = 2$, $d(v_1, v_3) = 2$

$d(v_2, v_1) = 2$, $d(v_2, v_3) = 2$

$d(v_3, v_1) = 2$, $d(v_3, v_2) = 2$

Sedemikian hingga sesuai dengan definisi eksentrisitas, maka dapat ditentukan eksentrisitas masing-masing titiknya sebagai berikut:

$e(v_0) = 1$, $e(v_1) = 2$, $e(v_2) = 2$ dan $e(v_3) = 2$.

Jadi terbukti bahwa eksentrisitas minimum graf G adalah:

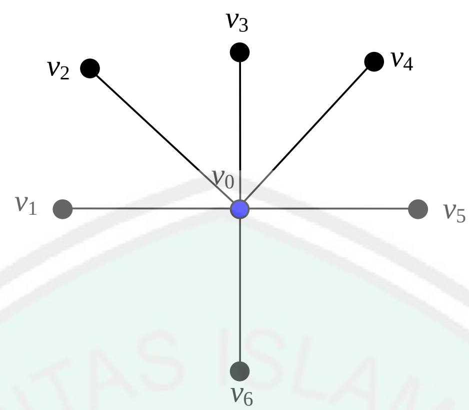
$$rad\ G = 1 = r$$

dan eksentrisitas maksimum graf G adalah:

$$diam\ G = 2 = 2r$$

Sehingga untuk graf dengan $p = |V| = 4$ juga merupakan graf Unisentral dengan $rad\ G = r = 1$ dan $diam\ G = 2r = 2$.

c. Misal graf G pada Gambar 3.2 di atas ditambah titik satu-satu yang terhubung langsung (*adjacent*) dengan titik sentral v_0, Sebut v_4, v_5, …, v_n dan misalkan n = 6. Dengan tidak merubah bahwa graf tersebut merupakan graf unisentral dengan $rad\ G = 1$ dan $diam\ G = 2$ sedemikian hingga dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.3 Graf Unisentral G dengan Penambahan Titik v_4, v_5, v_6

Karena $rad\ G = 1$ dan $diam\ G = 2$ sesuai definisi radius dan diameter, maka pasti eksentrisitas minimumnya adalah $1 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $2 = diam\ G$.

Untuk menunjukkan bahwa eksentrisitas minimumnya adalah $1 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $2 = diam\ G$, maka terlebih dahulu ditunjukkan jarak maksimum dari masing-masing titik graf tersebut. Sesuai definisi jarak maka diperoleh:

$d(v_0, v_1) = 1$, $d(v_0, v_2) = 1$, $d(v_0, v_3) = 1$, $d(v_0, v_4) = 1$, $d(v_0, v_5) = 1$, $d(v_0, v_6) = 1$

$d(v_1, v_2) = 2$, $d(v_1, v_3) = 2$, $d(v_1, v_4) = 2$, $d(v_1, v_5) = 2$, $d(v_1, v_6) = 2$

$d(v_2, v_1) = 2$, $d(v_2, v_3) = 2$, $d(v_2, v_4) = 2$, $d(v_2, v_5) = 2$, $d(v_2, v_6) = 2$

$d(v_3, v_1) = 2$, $d(v_3, v_2) = 2$, $d(v_3, v_4) = 2$, $d(v_3, v_5) = 2$, $d(v_3, v_6) = 2$

$d(v_4, v_1) = 2$, $d(v_4, v_2) = 2$, $d(v_4, v_3) = 2$, $d(v_4, v_5) = 2$, $d(v_4, v_6) = 2$

$d(v_5, v_1) = 2$, $d(v_5, v_2) = 2$, $d(v_5, v_3) = 2$, $d(v_5, v_4) = 2$, $d(v_5, v_6) = 2$

$d(v_6, v_1) = 2$, $d(v_6, v_2) = 2$, $d(v_6, v_3) = 2$, $d(v_6, v_4) = 2$, $d(v_6, v_5) = 2$

Sedemikian hingga sesuai dengan definisi eksentrisitas, maka dapat ditentukan eksentrisitas masing-masing titiknya sebagai berikut:

$e(v_0) = 1$, $e(v_1) = 2$, $e(v_2) = 2$, $e(v_3) = 2$, $e(v_4) = 2$, $e(v_5) = 2$ dan $e(v_6) = 2$.

Jadi terbukti bahwa eksentrisitas minimum graf *G* adalah:

$$rad\ G = 1 = r$$

dan eksentrisitas maksimum graf *G* adalah:

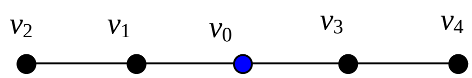
$$diam\ G = 2 = 2r$$

Sehingga untuk graf dengan $p = |V| = 7$ juga merupakan graf Unisentral dengan $rad\ G = r = 1$ dan $diam\ G = 2r = 2$.

Dari contoh-contoh yang telah diuraian di atas mengenai graf unisentral dengan $rad\ G = 1$ dan $diam\ G = 2$ maka dapat disimpulkan bahwa untuk graf dengan $rad\ G = 1$ dan $diam\ G = 2$ mempunyai order minimum $p = |V| = 3$.

2. Mencari order minimum graf unisentral *G* dengan radius $r = 2$ dan diameter $2r = 4$.

   a. Misal *G* adalah sebarang graf unisentral dengan radius $r = 2$ dan diameter $2r = 4$. Misalkan v_0 adalah titik sentral dari *G*, dan graf *G* dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.4 Graf Unisentral G dengan Radius $r=2$ dan Diameter $2r=4$

Karena $rad\ G = 2$ dan $diam\ G = 4$ sesuai definisi radius dan diameter, maka pasti eksentrisitas minimumnya adalah $2 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $4 = diam\ G$.

Untuk menunjukkan bahwa eksentrisitas minimumnya adalah $2 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $4 = diam\ G$, maka terlebih dahulu ditunjukkan jarak maksimum dari masing-masing titik graf tersebut. Sesuai definisi jarak maka diperoleh:

$d(v_0, v_2) = 2$, $d(v_0, v_4) = 2$

$d(v_1, v_4) = 3$

$d(v_2, v_4) = 4$

$d(v_3, v_2) = 3$

$d(v_4, v_2) = 4$

Sedemikian hingga sesuai dengan definisi eksentrisitas, maka dapat ditentukan eksentrisitas masing-masing titiknya sebagai berikut:

$e(v_0) = 2$, $e(v_1) = 3$, $e(v_2) = 4$, $e(v_3) = 3$ dan $e(v_4) = 4$.

Jadi terbukti bahwa eksentrisitas minimum graf G adalah:

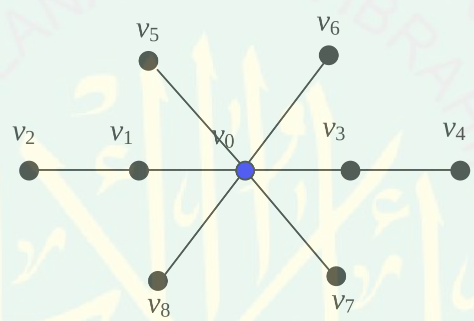
$$rad\ G = 2 = r$$

dan eksentrisitas maksimum graf G adalah:

$$diam\ G = 4 = 2r$$

Sehingga untuk graf dengan $p = |V| = 5$ merupakan graf Unisentral dengan $rad\ G = r = 1$ dan $diam\ G = 2r = 2$.

b. Misal graf G pada Gambar 3.4 di atas ditambah titik satu-satu yang terhubung langsung (*adjacent*) dengan titik sentral v_0, sebut titik $v_5, \ldots, v_n$ dan misalkan $n = 8$. Dengan tidak merubah bahwa graf tersebut merupakan graf unisentral dengan $rad\ G = 2$ dan $diam\ G = 4$ sedemikian hingga dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.5 Graf Unisentral G dengan Penambahan Titik v_5, v_6, v_7, v_8

Karena $rad\ G = 2$ dan $diam\ G = 4$ sesuai definisi radius dan diameter, maka pasti eksentrisitas minimumnya adalah $2 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $4 = diam\ G$.

Untuk menunjukkan bahwa eksentrisitas minimumnya adalah $2 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $4 = diam\ G$, maka terlebih dahulu ditunjukkan jarak maksimum dari masing-masing titik graf tersebut. Sesuai definisi jarak maka diperoleh:

$d(v_0, v_2) = 2$, $d(v_0, v_4) = 2$

$d(v_1, v_4) = 3$

$d(v_2, v_4) = 4$

$d(v_3, v_2) = 3$

$d(v_4, v_2) = 4$

$d(v_5, v_2) = 3$, $d(v_5, v_4) = 3$

$d(v_6, v_2) = 3$, $d(v_6, v_4) = 3$

$d(v_7, v_2) = 3$, $d(v_7, v_4) = 3$

$d(v_8, v_2) = 3$, $d(v_8, v_4) = 3$

Sedemikian hingga sesuai dengan definisi eksentrisitas, maka dapat ditentukan eksentrisitas masing-masing titiknya sebagai berikut:

$e(v_0) = 2$, $e(v_1) = 3$, $e(v_2) = 4$, $e(v_3) = 3$, $e(v_4) = 4$, $e(v_5) = 3$, $e(v_6) = 3$, $e(v_7) = 3$ dan $e(v_8) = 3$.

Jadi terbukti bahwa eksentrisitas minimum graf *G* adalah:

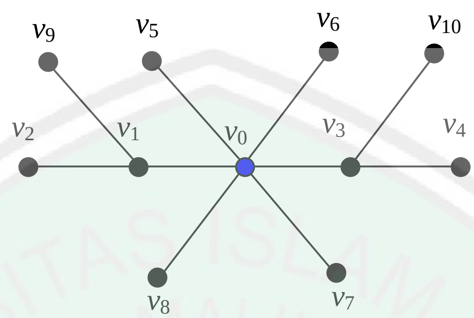
$$rad\ G = 2 = r$$

dan eksentrisitas maksimum graf *G* adalah:

$$diam\ G = 4 = 2r$$

Sehingga untuk graf dengan $p = |V| = 9$ juga merupakan graf Unisentral dengan $rad\ G = r = 2$ dan $diam\ G = 2r = 4$.

c. Misal graf *G* pada Gambar 3.5 di atas ditambah titik satu-satu yang terhubung langsung (*adjacent*) dengan titik v_1 sebut v_9 dan terhubung langsung (*adjacent*) dengan titik v_3 sebut v_{10}. Dengan tidak merubah bahwa graf tersebut merupakan graf unisentral dengan $rad\ G = 2$ dan $diam\ G = 4$ maka dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.6 Graf Unisentral G dengan Penambahan Titik v_9, v_{10}

Karena $rad\ G = 2$ dan $diam\ G = 4$ sesuai definisi radius dan diameter, maka pasti eksentrisitas minimumnya adalah $2 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $4 = diam\ G$.

Untuk menunjukkan bahwa eksentrisitas minimumnya adalah $2 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $4 = diam\ G$, maka terlebih dahulu ditunjukkan jarak maksimum dari masing-masing titik graf tersebut. Sesuai definisi jarak maka diperoleh:

$d(v_0, v_2) = 2$, $d(v_0, v_4) = 2$, $d(v_0, v_9) = 2$, $d(v_0, v_{10}) = 2$

$d(v_1, v_4) = 3$, $d(v_1, v_{10}) = 3$

$d(v_2, v_4) = 4$, $d(v_2, v_{10}) = 4$

$d(v_3, v_2) = 3$, $d(v_3, v_2) = 3$

$d(v_4, v_2) = 4$, $d(v_4, v_9) = 4$

$d(v_5, v_2) = 3$, $d(v_5, v_4) = 3$, $d(v_5, v_9) = 3$, $d(v_5, v_{10}) = 3$

$d(v_6,v_2)=3$, $d(v_6,v_4)=3$, $d(v_6,v_9)=3$, $d(v_6,v_{10})=3$

$d(v_7,v_2)=3$, $d(v_7,v_4)=3$, $d(v_7,v_9)=3$, $d(v_7,v_{10})=3$

$d(v_8,v_2)=3$, $d(v_8,v_4)=3$, $d(v_8,v_9)=3$, $d(v_8,v_{10})=3$

$d(v_9,v_4)=4$, $d(v_9,v_{10})=4$

$d(v_{10},v_2)=4$, $d(v_{10},v_9)=4$

Sedemikian hingga sesuai dengan definisi eksentrisitas, maka dapat ditentukan eksentrisitas masing-masing titiknya sebagai berikut:

$e(v_0)=2$, $e(v_1)=3$, $e(v_2)=4$, $e(v_3)=3$, $e(v_4)=4$, $e(v_5)=3$, $e(v_6)=3$, $e(v_7)=3$, $e(v_8)=3$, $e(v_9)=4$ dan $e(v_{10})=4$.

Jadi terbukti bahwa eksentrisitas minimum graf G adalah:

$$rad\ G=2=r$$

dan eksentrisitas maksimum graf G adalah:

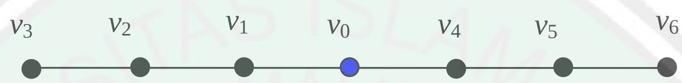
$$diam\ G=4=2r$$

Sehingga untuk graf dengan $p=|V|=11$ juga merupakan graf Unisentral dengan $rad\ G=r=2$ dan $diam\ G=2r=4$.

Dari contoh-contoh yang telah diuraian di atas mengenai graf unisentral dengan $rad\ G=2$ dan $diam\ G=4$ maka dapat disimpulkan bahwa untuk graf dengan $rad\ G=2$ dan $diam\ G=4$ mempunyai order minimum $p=|V|=5$.

3. Mencari order minimum graf unisentral G dengan radius $r = 3$ dan diameter $2r = 6$.

   a. Misalkan G adalah sebarang graf unisentral dengan radius $r = 3$ dan diameter $2r = 6$. Misalkan v_0 adalah titik sentral dari G, dan graf G dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.7 Graf Unisentral G dengan Radius $r = 3$ dan Diameter $2r = 6$

Karena $rad\ G = 3$ dan $diam\ G = 6$ sesuai definisi radius dan diameter, maka pasti eksentrisitas minimumnya adalah $3 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $6 = diam\ G$.

Untuk menunjukkan bahwa eksentrisitas minimumnya adalah $1 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $2 = diam\ G$, maka terlebih dahulu ditunjukkan jarak maksimum dari masing-masing titik graf tersebut. Sesuai definisi jarak maka diperoleh:

$d(v_0, v_3) = 3$, $d(v_0, v_6) = 3$

$d(v_1, v_6) = 4$

$d(v_2, v_6) = 5$

$d(v_3, v_6) = 6$

$d(v_4, v_3) = 4$

$d(v_5, v_3) = 5$

$d(v_6, v_3) = 6$

Sedemikian hingga sesuai dengan definisi eksentrisitas, maka dapat ditentukan eksentrisitas masing-masing titiknya sebagai berikut:

$e(v_0) = 3$, $e(v_1) = 4$, $e(v_2) = 5$, $e(v_3) = 6$, $e(v_4) = 4$, $e(v_5) = 5$ dan $e(v_6) = 6$.

Jadi terbukti bahwa eksentrisitas minimum graf G adalah:

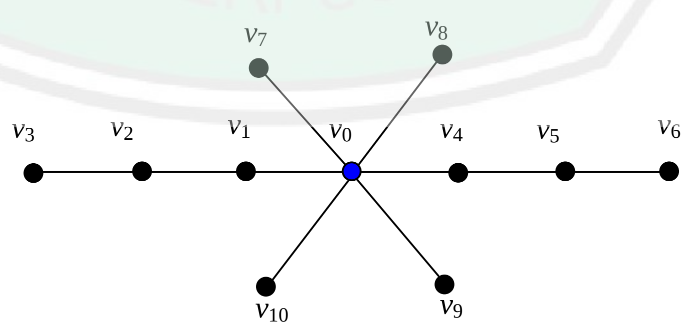
$$rad\ G = 3 = r$$

dan eksentrisitas maksimum graf G adalah:

$$diam\ G = 6 = 2r$$

Sehingga untuk graf dengan $p = |V| = 7$ merupakan graf Unisentral dengan $rad\ G = r = 3$ dan $diam\ G = 2r = 6$.

b. Misal graf G pada Gambar 3.7 di atas ditambah titik satu-satu yang terhubung langsung (*adjacent*) dengan titik sentral v_0, sebut titik $v_7, \ldots, v_n$ dan misalkan n = 10. Dengan tidak merubah bahwa graf tersebut merupakan graf unisentral dengan $rad\ G = 3$ dan $diam\ G = 6$ maka dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.8 Graf Unisentral G dengan Penambahan Titik v_7, v_8, v_9, v_{10}

Karena $rad\ G = 3$ dan $diam\ G = 6$ sesuai definisi radius dan diameter, maka pasti eksentrisitas minimumnya adalah $3 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $6 = diam\ G$.

Untuk menunjukkan bahwa eksentrisitas minimumnya adalah $1 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $2 = diam\ G$, maka terlebih dahulu ditunjukkan jarak maksimum dari masing-masing titik graf tersebut. Sesuai definisi jarak maka diperoleh:

$d(v_0, v_3) = 3$, $d(v_0, v_6) = 3$

$d(v_1, v_6) = 4$

$d(v_2, v_6) = 5$

$d(v_3, v_6) = 6$

$d(v_4, v_3) = 4$

$d(v_5, v_3) = 5$

$d(v_6, v_3) = 6$

$d(v_7, v_3) = 4$, $d(v_7, v_6) = 4$

$d(v_8, v_3) = 4$, $d(v_8, v_6) = 4$

$d(v_9, v_3) = 4$, $d(v_9, v_6) = 4$

$d(v_{10}, v_3) = 4$, $d(v_{10}, v_6) = 4$

Sedemikian hingga sesuai dengan definisi eksentrisitas, maka dapat ditentukan eksentrisitas masing-masing titiknya sebagai berikut:

$e(v_0) = 3$, $e(v_1) = 4$, $e(v_2) = 5$, $e(v_3) = 6$, $e(v_4) = 4$, $e(v_5) = 5$, $e(v_6) = 6$, $e(v_7) = 4$, $e(v_8) = 4$, $e(v_9) = 4$ dan $e(v_{10}) = 4$.

Jadi terbukti bahwa eksentrisitas minimum graf *G* adalah:

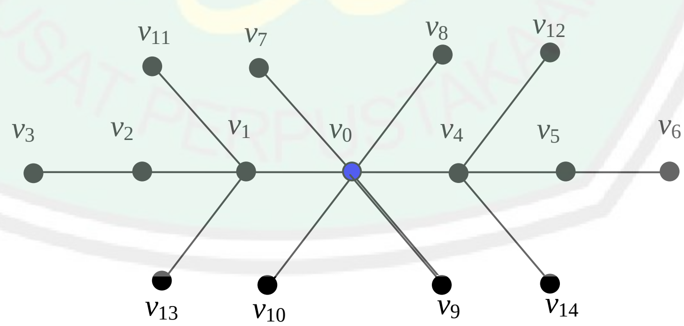
$$rad\ G = 3 = r$$

dan eksentrisitas maksimum graf *G* adalah:

$$diam\ G = 6 = 2r$$

Sehingga untuk graf dengan $p = |V| = 11$ juga merupakan graf Unisentral dengan $rad\ G = r = 2$ dan $diam\ G = 2r = 4$.

c. Misal graf *G* pada Gambar 3.8 di atas ditambah titik satu-satu yang terhubung langsung (*adjacent*) dengan titik v_1, v_2, v_4 atau v_5, misal terhubung langsung (*adjacent*) dengan titik v_1 sebut v_{11}, v_{13} dan terhubung langsung (*adjacent*) dengan titik v_4 sebut v_{12}, v_{14}. Dengan tidak merubah bahwa graf tersebut merupakan graf unisentral dengan $rad\ G = 2$ dan $diam\ G = 4$ maka dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.9 Graf Unisentral *G* dengan Penambahan Titik v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}

Karena $rad\ G = 3$ dan $diam\ G = 6$ sesuai definisi radius dan diameter, maka pasti eksentrisitas minimumnya adalah $3 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $6 = diam\ G$.

Untuk menunjukkan bahwa eksentrisitas minimumnya adalah $1 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $2 = diam\ G$, maka terlebih dahulu ditunjukkan jarak maksimum dari masing-masing titik graf tersebut. Sesuai definisi jarak maka diperoleh:

$d(v_0, v_3) = 3$, $d(v_0, v_6) = 3$

$d(v_1, v_6) = 4$

$d(v_2, v_6) = 5$

$d(v_3, v_6) = 6$

$d(v_4, v_3) = 4$

$d(v_5, v_3) = 5$

$d(v_6, v_3) = 6$

$d(v_7, v_3) = 4$, $d(v_7, v_6) = 4$

$d(v_8, v_3) = 4$, $d(v_8, v_6) = 4$

$d(v_9, v_3) = 4$, $d(v_9, v_6) = 4$

$d(v_{10}, v_3) = 4$, $d(v_{10}, v_6) = 4$

$d(v_{11}, v_6) = 5$

$d(v_{12}, v_3) = 5$

$d(v_{13}, v_6) = 5$

$d(v_{14}, v_3) = 5$

Sedemikian hingga sesuai dengan definisi eksentrisitas, maka dapat ditentukan eksentrisitas masing-masing titiknya sebagai berikut:

$e(v_0) = 3$, $e(v_1) = 4$, $e(v_2) = 5$, $e(v_3) = 6$, $e(v_4) = 4$, $e(v_5) = 5$, $e(v_6) = 6$, $e(v_7) = 4$, $e(v_8) = 4$, $e(v_9) = 4$, $e(v_{10}) = 4$, $e(v_{11}) = 5$, $e(v_{12}) = 5$, $e(v_{13}) = 5$ dan $e(v_{14}) = 5$.

Jadi terbukti bahwa eksentrisitas minimum graf *G* adalah:

$$rad\ G = 3 = r$$

dan eksentrisitas maksimum graf *G* adalah:

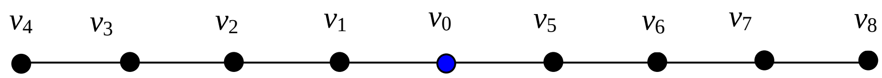
$$diam\ G = 6 = 2r$$

Sehingga untuk graf dengan $p = |V| = 11$ juga merupakan graf Unisentral dengan $rad\ G = r = 2$ dan $diam\ G = 2r = 4$.

Dari contoh-contoh yang telah diuraian di atas mengenai graf unisentral dengan $rad\ G = 2$ dan $diam\ G = 4$ maka dapat disimpulkan bahwa untuk graf dengan $rad\ G = 2$ dan $diam\ G = 4$ mempunyai order minimum $p = |V| = 5$.

4. Mencari order minimum graf unisentral *G* dengan radius $r = 4$ dan diameter $2r = 8$.

   a. Misalkan *G* adalah sebarang graf unisentral dengan radius $r = 4$ dan diameter $2r = 8$. Misalkan v_0 adalah titik sentral dari *G*, dan graf *G* dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.10 Graf Unisentral G dengan Radius $r = 4$ dan Diameter $2r = 8$

Karena $rad\ G = 4$ dan $diam\ G = 8$ sesuai definisi radius dan diameter, maka pasti eksentrisitas minimumnya adalah $4 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $8 = diam\ G$.

Untuk menunjukkan bahwa eksentrisitas minimumnya adalah $1 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $2 = diam\ G$, maka terlebih dahulu ditunjukkan jarak maksimum dari masing-masing titik graf tersebut. Sesuai definisi jarak maka diperoleh:

$d(v_0, v_4) = 4$, $d(v_0, v_8) = 4$

$d(v_1, v_8) = 5$

$d(v_2, v_8) = 6$

$d(v_3, v_8) = 7$

$d(v_4, v_8) = 8$

$d(v_5, v_4) = 5$

$d(v_6, v_4) = 6$

$d(v_7, v_4) = 7$

$d(v_8, v_4) = 8$

Sedemikian hingga sesuai dengan definisi eksentrisitas, maka dapat ditentukan eksentrisitas masing-masing titiknya sebagai berikut:

$e(v_0)=4$, $e(v_1)=5$, $e(v_2)=6$, $e(v_3)=7$, $e(v_4)=8$, $e(v_5)=5$, $e(v_6)=6$, $e(v_5)=7$ dan $e(v_6)=8$.

Jadi terbukti bahwa eksentrisitas minimum graf *G* adalah:

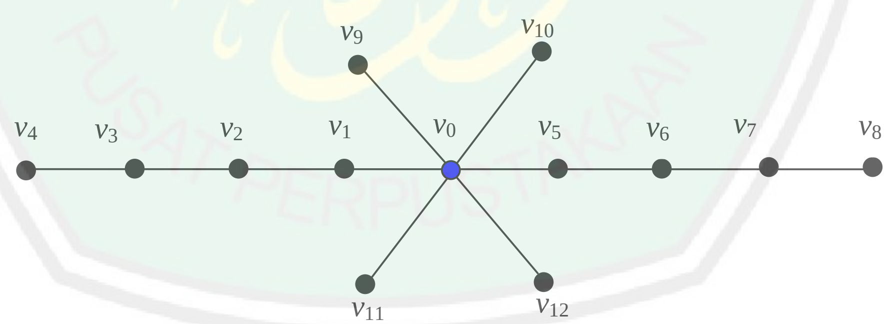
$$rad\ \ G=4=r$$

dan eksentrisitas maksimum graf *G* adalah:

$$diam\ \ G=8=2r$$

Sehingga untuk graf dengan $p=|V|=9$ merupakan graf Unisentral dengan $rad\ \ G=r=3$ dan $diam\ \ G=2r=6$.

b. Misal graf *G* pada Gambar 3.10 di atas ditambah titik satu-satu yang terhubung langsung (*adjacent*) dengan titik sentral v_0, sebut titik v_9, …, v_n dan misalkan n = 12. Dengan tidak merubah bahwa graf tersebut merupakan graf unisentral dengan $rad\ \ G=4$ dan $diam\ G=8$ maka dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.11 Graf Unisentral *G* dengan Penambahan Titik v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}

Karena $rad\ \ G=4$ dan $diam\ \ G=8$ sesuai definisi radius dan diameter, maka pasti eksentrisitas minimumnya adalah $4=rad\ \ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $8=diam\ \ G$.

Untuk menunjukkan bahwa eksentrisitas minimumnya adalah $1 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $2 = diam\ G$, maka terlebih dahulu ditunjukkan jarak maksimum dari masing-masing titik graf tersebut. Sesuai definisi jarak maka diperoleh:

$d(v_0, v_4) = 4$, $d(v_0, v_8) = 4$

$d(v_1, v_8) = 5$

$d(v_2, v_8) = 6$

$d(v_3, v_8) = 7$

$d(v_4, v_8) = 8$

$d(v_5, v_4) = 5$

$d(v_6, v_4) = 6$

$d(v_7, v_4) = 7$

$d(v_8, v_4) = 8$

$d(v_9, v_4) = 5$, $d(v_9, v_8) = 5$

$d(v_{10}, v_4) = 5$, $d(v_{10}, v_8) = 5$

$d(v_{11}, v_4) = 5$, $d(v_{11}, v_8) = 5$

$d(v_{12}, v_4) = 5$, $d(v_{12}, v_8) = 5$

Sedemikian hingga sesuai dengan definisi eksentrisitas, maka dapat ditentukan eksentrisitas masing-masing titiknya sebagai berikut:

$e(v_0) = 4$, $e(v_1) = 5$, $e(v_2) = 6$, $e(v_3) = 7$, $e(v_4) = 8$, $e(v_5) = 5$, $e(v_6) = 6$, $e(v_7) = 7$, $e(v_8) = 8$, $e(v_9) = 5$, $e(v_{10}) = 5$, $e(v_{11}) = 5$ dan $e(v_{12}) = 5$.

Jadi terbukti bahwa eksentrisitas minimum graf G adalah:

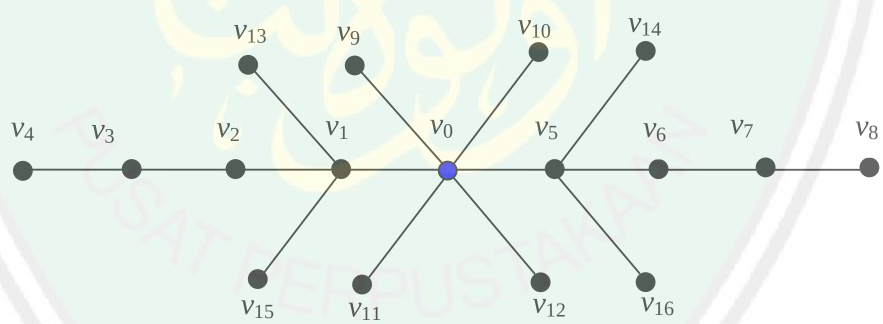
$$rad\ G = 4 = r$$

dan eksentrisitas maksimum graf G adalah:

$$diam\ G = 8 = 2r$$

Sehingga untuk graf dengan $p = |V| = 13$ juga merupakan graf Unisentral dengan $rad\ G = r = 4$ dan $diam\ G = 2r = 8$.

c. Misal graf G pada Gambar 2.11 di atas ditambah titik satu-satu yang terhubung langsung (*adjacent*) dengan titik v_1, v_2, v_4 atau v_5, misal terhubung langsung dengan titik v_1 sebut v_{13}, v_{15} dan terhubung langsung dengan titik v_5 sebut v_{14}, v_{16}. Dengan tidak merubah bahwa graf tersebut merupakan graf unisentral dengan $rad\ G = 4$ dan $diam\ G = 8$ maka dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.12 Graf Unisentral G dengan Penambahan Titik v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}

Karena $rad\ G = 4$ dan $diam\ G = 8$ sesuai definisi radius dan diameter, maka pasti eksentrisitas minimumnya adalah $4 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $8 = diam\ G$.

Untuk menunjukkan bahwa eksentrisitas minimumnya adalah $1 = rad\ G$ dan eksentrisitas maksimumnya adalah $2 = diam\ G$, maka terlebih dahulu ditunjukkan jarak maksimum dari masing-masing titik graf tersebut. Sesuai definisi jarak maka diperoleh:

$d(v_0, v_4) = 4$, $d(v_0, v_8) = 4$

$d(v_1, v_8) = 5$

$d(v_2, v_8) = 6$

$d(v_3, v_8) = 7$

$d(v_4, v_8) = 8$

$d(v_5, v_4) = 5$

$d(v_6, v_4) = 6$

$d(v_7, v_4) = 7$

$d(v_8, v_4) = 8$

$d(v_9, v_4) = 5$, $d(v_9, v_8) = 5$

$d(v_{10}, v_4) = 5$, $d(v_{10}, v_8) = 5$

$d(v_{11}, v_4) = 5$, $d(v_{11}, v_8) = 5$

$d(v_{12}, v_4) = 5$, $d(v_{12}, v_8) = 5$

$d(v_{13}, v_8) = 6$

$d(v_{14}, v_4) = 6$

$d(v_{15}, v_8) = 6$

$d(v_{16}, v_4) = 6$

Sedemikian hingga sesuai dengan definisi eksentrisitas, maka dapat ditentukan eksentrisitas masing-masing titiknya sebagai berikut:

$e(v_0)=4$, $e(v_1)=5$, $e(v_2)=6$, $e(v_3)=7$, $e(v_4)=8$, $e(v_5)=5$, $e(v_6)=6$, $e(v_7)=7$, $e(v_8)=8$, $e(v_9)=5$, $e(v_{10})=5$, $e(v_{11})=5$, $e(v_{12})=5$, $e(v_{13})=6$, $e(v_{14})=6$, $e(v_{15})=6$ dan $e(v_{16})=6$.

Jadi terbukti bahwa eksentrisitas minimum graf *G* adalah:

$$rad\ G=4=r$$

dan eksentrisitas maksimum graf *G* adalah:

$$diam\ G=8=2r$$

Sehingga untuk graf dengan $p=|V|=17$ juga merupakan graf Unisentral dengan $rad\ G=r=4$ dan $diam\ G=2r=8$.

Dari contoh-contoh yang telah diuraian di atas mengenai graf unisentral dengan $rad\ G=4$ dan $diam\ G=8$ maka dapat disimpulkan bahwa untuk graf dengan $rad\ G=4$ dan $diam\ G=8$ mempunyai order minimum $p=|V|=9$.

Dari beberapa pembahasan yang telah diuraikan di atas mengenai penentuan order minimum suatu graf unisentral *G* dengan radius *r* dan diameter 2*r* dengan *r* adalah bilangan asli dapat ditunjukkan pada bentuk tabel berikut:

Radius (r)	Diameter (d)	Order $(\|V\|)$
1	2	3
2	4	5
3	6	7
4	8	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	$2r$	$2r+1$

Tabel 3.1 Tabel Hasil Pencarian Order Minimum Graf Unisentral

Berdasarkan beberapa uraian di atas maka dapat diperoleh rumus umum mengenai penentuan order minimum suatu graf unisentral G dengan radius r dan diameter $2r$ dengan r adalah bilangan asli yaitu $|V(G)| \geq 2r+1$ dan sekaligus diperoleh teorema sebagai berikut:

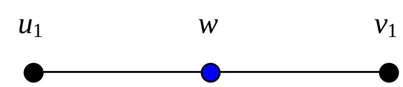
Teorema 1.

Jika G graf unisentral dengan $rad\, G = r$ dan $diam\ G = 2r$ (dengan r bilangan asli), maka mempunyai order minimum $p = |V(G)| = 2r+1$

Bukti

Teorema tersebut akan dibuktikan dengan cara induksi matematika

Untuk $r = 1$ maka, suatu graf unisentral G dengan $rad\, G = r = 1$ dan $diam\ G = 2r = 2$ sedemikian hingga graf unisentral yang mempunyai $rad\, G = 1$ dan $diam\ G = 2$ adalah seperti pada contoh di pembahasan, maka graf unisentral G dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.13 Graf Unisentral G dengan $rad\, G = r = 1$ dan $diam\ G = 2r = 2$

ini berarti order minimum G adalah 3.

Dari Teorema 1 maka diperoleh $p = |V(G)| = 2r + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

Jadi untuk $r = 1$ benar

Asumsikan benar untuk $r = k$ maka, suatu graf unisentral G_1 dengan $rad\ G_1 = r = k$ dan $diam\ G_1 = 2r = 2k$ sesuai Teorema 1 maka, graf yang mempunyai $rad\ G_1 = k$ dan $diam\ G_1 = 2k$ order minimummya adalah $p = |V(G_1)| = 2r + 1 = 2k + 1$ artinya graf unisentral G_1 mempunyai eksentrisitas terkecil k dan eksentrisitas terbesar $2k$ mempunyai order minimum $2k + 1$.

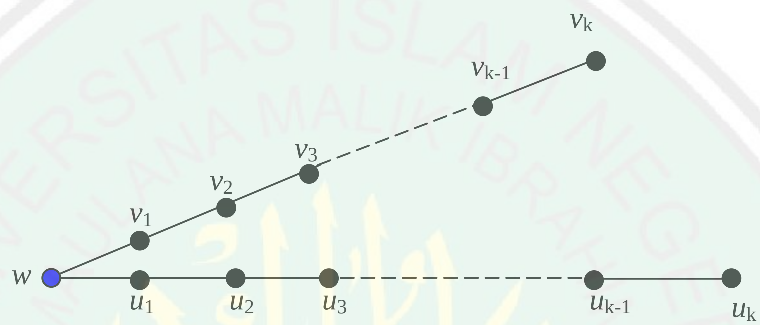
Akan ditunjukkan benar untuk $r = k + 1$, yang berarti $rad\ G_2 = r = k + 1$ dan $diam\ G_2 = 2r = 2k + 2$ maka $p = |V(G_2)| = 2k + 3$.

Dimana,

$$\begin{aligned} p = |V(G_2)| &= 2k + 3 \\ &= 2k + 1 + 2 \\ &= |V(G_1)| + 2, \quad \text{dengan 2 adalah penambahan titik di masing - masing ujung graf sehingga tidak merubah graf tersebut adalah graf unisentral} \end{aligned}$$

$$\therefore p = |V(G_2)| = |V(G_1)| \cup \{u, v\}$$

Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $p = |V(G_2)| = 2k+3$ maka, dimisalkan untuk *G₁* adalah graf unisentral dengan titik sentral *w* dan $r = k$, yang berarti *G₁* mempunyai $rad\, G_1 = k$ dan $diam\ G_1 = 2k$, sehingga graf yang akan diperoleh adalah graf berbentuk $path(P_{2k+1})$, dan dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.14 Graf Unisentral G_1 dengan $rad\ G = k$ dan $diam = 2k$

Dari Gambar 3.14 dapat ditentukan bahwa,

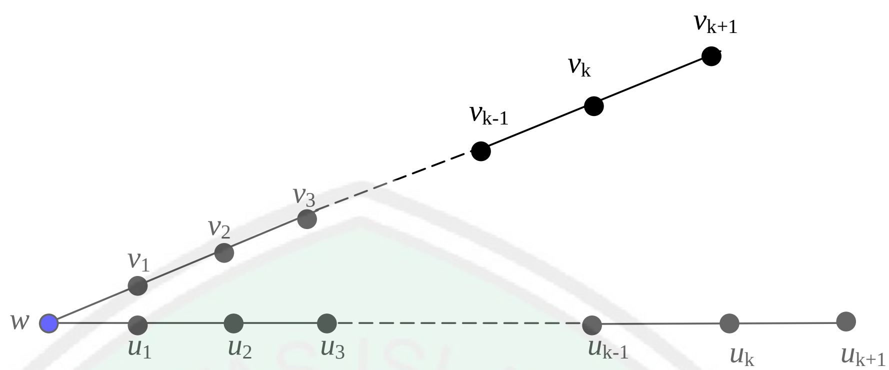
$e(v_k) = e(u_k) = 2k$

$e(v_i) = e(u_i) = k + i,\ \forall\, i = 1, 2, 3, \dots, k$

$e(w) = k$

Dimana $e(w) = k$ adalah merupakan radius dari G_1 dan $e(v_k) = e(u_k) = 2k$ adalah diameter dari G_1. Sehingga untuk graf dengan $r = k$, merupakan graf unisentral G_1 dengan $rad\ G_1 = k$ dan $diam\ G_1 = 2k$.

kemudian jika G_2 merupakan penambahan 2 titik di G_1 yaitu $\{u, v\}$ di masing-masing titik ujung, sehingga G_2 akan tetap merupakan graf unisentral dan mempunyai $rad\, G_2 = r$ dan $diam\ G_2 = 2r$, maka graf yang diperoleh akan berbentuk sebagai berikut,



Gambar 3.15 Graf Unisentral G_2 dengan $rad\, G = k+1$ dan $diam\ G = 2k+2$

Dari Gambar 3.15 dapat ditentukan bahwa,

$e(v_{k+1}) = e(u_{k+1}) = 2k+2$

$e(v_{i+1}) = e(u_{i+1}) = k+i+1,\ \forall\, i = 1, 2, 3, \ldots, k$

$e(w) = k+1$

Dimana $e(w) = k+1$ adalah merupakan radius dari G_2 dan $e(v_{k+1}) = e(u_{k+1}) = 2k+2$ adalah diameter dari G_2. Sehingga untuk graf dengan $r = k+1$, juga merupakan graf unisentral G_2 dengan $rad\ G_2 = k+1$ dan $diam\ G_2 = 2k+2$.

Jadi G_2 dengan $rad\ G = k+1$ dan $diam\ G = 2k+2$ sesuai dengan Teorema 1 maka, mempunyai order minimum $p = |V(G)| = 2k+3$.

Sesuai prinsip induksi matematika, maka graf unisentral G dengan $rad\ G = r$ dan $diam\ G = 2r$ mempunyai order minimum $p = |V(G)| = 2r+1,\ \forall r \in$ bilangan asli.

3.1.2 Graf Unisentral *G* dengan Radius *r* dan Diameter *r* (*r* Bilangan Asli)

Untuk menentukan order minimum suatu graf unisentral *G* dengan radius *r* dan diameter *r* dengan *r* adalah bilangan asli maka akan dijelaskan sebagai berikut:

Mencari order minimum graf unisentral *G* dengan radius r dan diameter r.

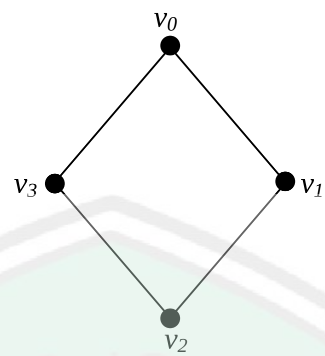
Misal *G* adalah sebarang graf unisentral dengan radius r dan diameter r. Karena $rad\ G = diam\ G$ maka sesuai definisi radius dan diameter maka eksentrisitas minimum dan maksimum dari graf *G* adalah sama.

Selanjutnya dimisalkan $r = 1$ maka, $rad\ G = diam\ G = 1$ sehingga grafnya dapat digambarkan sebagai berikut,

Gambar 3.16 Graf Unisentral *G* dengan Radius *r* =1 dan Diameter *r* =1

Dari gambar dapat ditentukan bahwa graf *G* dengan $rad\ G = diam\ G = 1$ mempunyai 2 titik sentral yaitu $Z(G) = \{v_0, v_1\}$ sehingga graf *G* bukan merupakan graf unisentral.

Kemudian dimisalkan $r = 2$ maka, $rad\ G = diam\ G = 2$ sehingga grafnya dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.17 Graf Unisentral G dengan Radius r =2 dan Diameter r =2

Dari gambar dapat ditentukan bahwa graf G dengan $rad\ G = diam\ G = 1$ mempunyai 4 titik sentral yaitu $Z(G) = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ sehingga graf G bukan merupakan graf unisentral.

Demikian untuk $r = i,\ \forall\, i \in$ bilangan asli maka, dapat ditentukan bahwa graf G dengan $rad\ G = diam\ G = i$ maka, setiap titiknya merupakan titik sentral sedemikian hingga graf G dengan $rad\ G = diam\ G = i$ dengan $r = i,\ \forall\, i \in$ bilangan asli adalah merupakan graf *multisentral* (graf dengan banyak titik sentral).

Karena graf dengan $r \geq 1$ bukan merupakan graf unisentral maka, selanjutnya akan dimisalkan bahwa G adalah graf tidak trivial dan terdapat $v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$ di G dengan $v_0 \neq v_1 \neq v_2 \neq \ldots \neq v_n$ sedemikian hingga $rad(G) = diam(G) = r$.

Maka dari definisi titik sentral akan diperoleh bahwa:

$e(v_0) = r$ adalah titik sentral dari G

$e(v_1) = r$ adalah titik sentral dari G

$e(v_2) = r$ adalah titik sentral dari G

$\vdots$

$e(v_n) = r$ adalah titik sentral dari G.

Karena graf unisentral adalah graf yang hanya mempunyai satu titik sentral saja maka, selanjutnya dapat disimpulkan bahwa $v_0 = v_1 = v_2 = \ldots = v_n$ artinya di G hanya mempunyai satu titik saja. Sehingga graf G adalah merupakan graf trivial dan dapat di gambarkan sebagai berikut,

Gambar 3.18 Graf Unisentral G dengan Radius $r = 0$ dan Diameter $r = 0$

Dari Gambar 3.18 di atas dapat ditunjukkan bahwa graf tersebut mempunyai $rad\ G = r$ dan $diam\ G = r$. Sesuai definisi jarak maka jarak titiknya adalah $d(v_0, v_0) = 0$ sehingga eksentrisitasnya juga $e(v_0) = 0$.

Jadi terbukti bahwa eksentrisitas minimum graf unisentral G adalah:

$$rad\ G = 0 = r$$

dan eksentrisitas maksimum graf unisentral G adalah:

$$diam\ G = 0 = r$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk graf dengan $rad\ G = 0 = r$ dan $diam\ G = 0 = r$ mempunyai order minimum $|V| = 1$.

Berdasarkan uraian di atas maka dapat diperoleh rumus umum mengenai penentuan order minimum suatu graf unisentral G dengan radius r dan diameter r yaitu $p = |V(G)| = 1$ dan sekaligus diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 2.

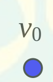
Jika G graf unisentral dengan $rad\ G = r$ dan $diam\ G = r$, maka mempunyai order minimum $p = |V(G)| = 1$

Bukti

Misalkan v_0 adalah titik sentral dari G.

Karena $rad\ G = diam\ G = r$ maka, pasti G hanya mempunyai satu eksentrisitas saja, yaitu $e(v) = r, \forall v \in V(G)$, artinya tidak ada suatu titik v_0 di G yang terhubung v sedemikian hingga $d(v_0, v) = e(v_0) = r$, $\forall v \in V(G)$.

Sesuai dengan definisi eksentrisitas bahwa $e(u) = maks\ d(u, v), \forall v \in V(G)$ dan karena G harus unisentral maka graf G pasti hanya mempunyai satu jarak yaitu 0. Sehingga graf G adalah graf trivial. Seperti contoh pada pembahasan maka akan diperoleh graf sebagai berikut,



Gambar 3.17 Graf Unisentral G dengan Radius r dan Diameter r

Jadi graf unisentral G dengan $rad\ G = r$ dan $diam\ G = r$ mempunyai order minimum $p = |V(G)| = 1$.

3.2 Kajian Agama Berdasarkan Hasil Pembahasan

Berdasarkan hasil pembahasan, maka dapat diketahui bahwa: rumus umum order minimum graf unisentral dengan radius $rad\ G = r$ dan diameter $diam\ G = 2r$ adalah $p = |V(G)| = 2r + 1$. Sedangkan rumus umum order minimum graf unisentral dengan radius $rad\ G = r$ dan diameter $diam\ G = r$ adalah $p = |V(G)| = 1$ atau disebut graf trivial.

Dari beberapa rumus-rumus di atas, jika direlevansikan dengan kajian agama adalah sejajar dengan ayat yang menyebutkan bahwa segala sesuatu yang ada di dunia ini diciptakan oleh Allah SWT sesuai dengan kadar dan ukurannya dan ditata-Nya dengan sedemikian rapi. Demikianlah sebagaimana yang tertera pada surat Al-Qamar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: "Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Q.S. Al-Qamar: 49).

Juga dalam surat Al-furqaan ayat 2:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى
ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: "Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Q.S. Al-Furqaan:2).

Maksud dari kata dapat direlevansi antara konsep awal dari masalah jumlah titik minimum graf dengan kajian agama Islam adalah bahwa berdasarkan ayat di atas yang menyebutkan masalah kadar dan ukuran dari segala yang ada di muka bumi yang menurut penafsiran Shihab (2002: 482) yakni *ketentuan* dan *sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu yang ada di muka bumi ini*, sehingga dengan kekuasaan-Nya maka semua akan terlihat rapi dan sempurna.

Sama halnya dengan masalah jumlah titik minimum graf khususnya adalah graf unisentral yang mana banyak membutuhkan kadar dan ukuran yang berarti aturan-aturan dan rumus-rumus yang digunakan untuk mempermudah dalam menemukan titik minimum pada pencarian titik minimum dari graf unisentral.

Penemuan sekaligus pembuktian rumus-rumus yang digunakan dalam mencari jumlah titik minimum graf unisentral ini bertujuan untuk mempermudah dalam menemukan jumlah titik minimum graf unisentral dengan radius dan diameter tertentu. Setelah mengetahui dengan jelas hasil dari pembahasan di atas yang intinya adalah menemukan rumus untuk jumlah titik minimum graf unisentral, pembuktian sekaligus penggambaran dari grafnya, ternyata semuanya telah benar terbukti.

Jika dikaitkan dengan kajian agama Islam, hal ini dapat direlevansikan dengan Al-Qur’an yang menyebutkan bahwa kebenaran sesuatu tidak cukup hanya dengan bentuk ucapan, dan tulisan saja, tetapi perlu dan harus dibuktikan. Hal ini sesuai pada surat Al-Baqarah ayat 111:

وَقَالُواْ لَن يَدْخُلَ ٱلْجَنَّةَ إِلَّا مَن كَانَ هُودًا أَوْ نَصَـٰرَىٰ ۗ تِلْكَ أَمَانِيُّهُمْ ۗ قُلْ هَاتُواْ بُرْهَـٰنَكُمْ إِن كُنتُمْ صَـٰدِقِينَ ﴿١١١﴾

Artinya: Dan mereka (Yahudi dan Nasrani) berkata: "Sekali-kali tidak akan masuk surga kecuali orang-orang (yang beragama) Yahudi atau Nasrani". demikian itu (hanya) angan-angan mereka yang kosong belaka. Katakanlah: "Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar"(Q.S. Al-Baqarah:111).

Ayat di atas, menceritakan bahwa pada zaman dahulu para ahli kitab (Yahudi dan Nasrani), yang berangan-angan bahwa tidak akan ada yang masuk surga kecuali siapa yang memeluk agama mereka. Selain itu mereka juga menyatakan bahwa mereka tidak akan disentuh api neraka kecuali beberapa hari saja dan kemudian akan segera berpindah ke surga. Demikianlah angan-angan dari para Ahli Kitab tersebut yang tiada sama sekali kebenarannya.sehingga Allah SWT langsung memberikan teguran bahwa hendaknya mereka menunjukkan bukti pengakuan (hujjah) akan kebenaran dari yang mereka katakan jika memang itu benar (Murakfuri dalam Ghafur, 2007:385-386).

Allah SWT penguasa yang memiliki wewenang tunggal dalam hal surga dan negara, secara langsung membantah para Ahli Kitab. Allah tidak menggunakan perantara dan tidak memerintahkan siapapun termasuk Nabi Muhammad SAW Untuk menjawab kebohongan itu. Allah yang menyatakan: Yang *demikian itu*, yakni ucapan tersebut, dan ucapan-ucapan mereka yang lain, yang sangat jauh dari kebenaran hanya (*Amaani*) *angan-angan belaka* yang lahir dari kebohongan yang disampaikan oleh pendeta-pendeta Yahudi tanpa ada dasarnya *dan mereka hanya menduga-duga*.

Selanjutnya, Allah SWT tidak memerlukan bukti dari mereka menyangkut kebohongan mereka, karena Allah Maha Mengetahui segala sesuatu. Tetapi manusia perlu. Karena itu, di sini Allah memerintahkan Nabi Muhammad SAW: *katakanlah* wahai Muhammad kepada mereka, ”*Tunjukkanlah* kepada kami *bukti kebenaran kamu jika kamu adalah orang yang benar*”. Bukti yang dimaksud di sini adalah berupa wahyu Illahi, karena surga dan neraka adalah wewenang Allah. Hanya Dia yang mengetahui siapa yang berhak memasukinya. Nabi Muhammad SAW pun tidak tahu. Itu sebabnya, maka bukti kebenaran yang dituntut adalah informasi-Nya, yakni wahyu-wahyu yang disampaikan kepada utusan-utusan-Nya (Shihab, 2002: 296-297).

Dalam surat Al-an'am ayat 143 juga disebutkan:

ثَمَٰنِيَةَ أَزْوَٰجٍ ۖ مِّنَ ٱلضَّأْنِ ٱثْنَيْنِ وَمِنَ ٱلْمَعْزِ ٱثْنَيْنِ ۗ قُلْ ءَآلذَّكَرَيْنِ حَرَّمَ أَمِ ٱلْأُنثَيَيْنِ أَمَّا ٱشْتَمَلَتْ عَلَيْهِ أَرْحَامُ ٱلْأُنثَيَيْنِ ۖ نَبِّـُٔونِى بِعِلْمٍ إِن كُنتُمْ صَٰدِقِينَ ﴿١٤٣﴾

Artinya: "(yaitu) delapan binatang yang berpasangan, sepasang domba, sepasang dari kambing. Katakanlah: "Apakah dua yang jantan yang diharamkan Allah ataukah dua yang betina, ataukah yang ada dalam kandungan dua betinanya?" Terangkanlah kepadaku dengan berdasar pengetahuan jika kamu memang orang-orang yang benar" (Q.S. Al-An'am: 143).

Berdasarkan dari kedua ayat itulah hendaknya segala sesuatu baik perkataan maupun perbuatan baik yang tertulis maupun yang tidak, jika memang benar adanya, maka sudah sepatutnyalah untuk diberikan pembuktiannya.

Sebagai akhir dari analisis tentang relevansi antara konsep salah satu cabang matematika yaitu teori graf khususnya masalah pencarian jumlah titik minimum graf unisentral dengan kajian agama Islam, yang sekaligus merupakan hal yang utama yang dapat dijadikan sebagi refleksi dari semuanya yakni ternyata setelah banyak mempelajari matematika yang merupakan ilmu hitung-menghitung serta banyak mengetahui mengenai masalah yang terdapat dalam matematika yang dapat direlevansikan dalam agama Islam sesuai dengan konsep-konsep yang ada dalam Al-Qur'an, maka akan dapat menambah keyakinan diri akan kebesaran Allah SWT selaku sang pencipta yang serba Maha, salah satunya adalah Maha Matematisi. Karena Dialah sang raja yang sangat cepat dan teliti dalam semua masalah perhitungan (Abdusysyakir, 2007: 83). Hal ini sesuai dalam Al-Qur'an surat Al- Baqarah ayat 202:

أُوْلَٰٓئِكَ لَهُمۡ نَصِيبٞ مِّمَّا كَسَبُواْۚ وَٱللَّهُ سَرِيعُ ٱلۡحِسَابِ ٢٠٢

Artinya: "Mereka itulah orang-orang yang mendapat bahagian daripada yang mereka usahakan; dan Allah sangat cepat perhitungan-Nya" (Q.S. Al-Baqarah: 202).

Juga dalam surat Maryam ayat 94:

لَّقَدۡ أَحۡصَىٰهُمۡ وَعَدَّهُمۡ عَدّٗا ٩٤

Artinya: "Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti" (Q.S. Maryam: 94).

Selanjutnya, dengan belajar matematika, yang merupakan alat (*tools*) bagi ilmu sains lainnya, juga semakin dapat mendekatkan diri kepada Allah. Karena Allah adalah salah satunya dzat yang Maha cepat dalam perhitungannya. Sebagaimana dalam firman-Nya:

أُوْلَٰٓئِكَ لَهُمۡ نَصِيبٞ مِّمَّا كَسَبُواْۚ وَٱللَّهُ سَرِيعُ ٱلۡحِسَابِ ٢٠٢

Artinya: "Mereka Itulah orang-orang yang mendapat kebahagiaan daripada yang mereka usahakan; dan Allah sangat cepat perhitungan-Nya" (Q.S. Al-Baqarah: 202).

لَّقَدۡ أَحۡصَىٰهُمۡ وَعَدَّهُمۡ عَدّٗا ٩٤

Artinya: "Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti" (Q.S. Maryam : 94).

Dari ayat di atas, dapat diketahui bahwa Allah yang dilukiskan sebagai *Ahshaahum* atau dalam istilah hadits *Asma' al-Husna* adalah *al-Muhshi*, dipahami oleh banyak ulama sebagai "Dia yang mengetahui kadar setiap peristiwa dan rinciannya, baik yang dapat dijangkau oleh manusia maupun yang tidak. Seperti hembusan nafas, rincian perolehan rezeki dan kadarnya untuk masa kini dan mendatang". Alhasil, Allah adalah Dia yang mengetahui dengan amat teliti rincian segala sesuatu dari segi jumlah dan kadarnya, panjang, dan lebarnya, jauh dan dekatnya, tempat dan waktunya, kadar cahaya dan gelapnya, sedang/ ketika dan saat wujudnya dan lain sebagainya.

Dari sini terlihat, bahwa betapa kuasanya Allah dalam melakukan perhitungan meskipun pada dzat yang terkecil yang tak akan dapat/mampu dihitung dengan kasat mata manusia. Sekalipun menggunakan alat yang canggihpun, tak kan ada yang dapat menyaingi Allah SWT Sehingga hal ini dapat menambah ketaqwaan kita kepada Allah SWT sang Kholiq yang Maha cepat dalam penghitungannya. Selain itu, dengan mengetahui tentang kajian masalah berhitung yang ada dalam Al-Qur'an juga dapat menambah keyakinan bahwa meskipun matematika basiknya tergolong dalam ilmu umum, tetapi sebenarnya telah banyak dibahas dalam Al-Qur'an. Hal ini terbukti, bahwa di dalam Al-Qur'an disiplin ilmu matematika tak hanya membahas masalah perhitungan angka saja, tetapi juga membahas masalah himpunan, bilangan, pengukuran, statistika, estimasi, dan masih banyak lagi keajaiban-keajaiban matematika yang terdapat dalam Al-Qur'an.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan bahwa:

1. Rumus umum order minimum graf unisentral dengan $rad\ G = r$ dan $diam\ G = 2r$ (r bilangan asli), adalah $p = |V(G)| = 2r + 1$. Sedangkan rumus umum order minimum graf unisentral dengan $rad\ G = r$ dan $diam\ G = r$ (r bilangan asli), adalah $p = |V(G)| = 1$ atau disebut dengan graf trivial.
2. Rumus umum order minimum graf unisentral dengan radius $rad\ G = r$ dan diameter $diam\ G = 2r$ (r bilangan asli), dibuktikan secara induksi matematika dengan langkah-langkah sebagai berikut, dimana Untuk $r = 1$ maka, diperoleh order minimummya adalah $p = |V(G)| = 2r + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. kemudian diasumsikan benar untuk $r = k$ maka, diperoleh order minimummya adalah $p = |V(G_1)| = 2r + 1 = 2k + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan benar untuk $r = k + 1$, sehingga diperoleh order minimummya adalah $p = |V(G_2)| = 2k + 3$.

   Dimana,

   $$\begin{aligned} p = |V(G_2)| &= 2k + 3 \\ &= 2k + 1 + 2 \end{aligned}$$

$= |V(G_1)| + 2,$ dengan 2 adalah penambahan titik di masing - masing ujung graf sehingga tidak merubah graf tersebut adalah graf unisentral

$\therefore\ p = |V(G_2)| = |V(G_1)| \cup \{u, v\}$

Sehingga sesuai prinsip induksi matematika, maka graf unisentral *G* dengan $rad\, G = r$ dan $diam\ G = 2r$ mempunyai order minimum $p = |V(G)| = 2r + 1,\ \forall r \in$ bilangan asli.

Sedangkan rumus umum order minimum graf unisentral dengan $rad\ G = r$ dan $diam\ G = r$ (r bilangan asli), adalah $p = |V(G)| = 1$ atau disebut dengan graf trivial dibuktikan dengan bukti langsung sedemikian hingga terbukti order minimum graf unisentral dengan $rad\ G = r$ dan $diam\ G = r$ (r bilangan asli), adalah $p = |V(G)| = 1$.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah order minimum graf unisentral *G* yang mempunyai radius *r* dan diameter 2*r* serta yang mempunyai radius *r* dan diameter *r* (*r* bilangan bulat positif). Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah order minimum pada graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Aziz, Abdul dan Abdusysyakir. 2006. *Analisis Matematis Terhadap Filsafat Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Bartle, Robert dan Sherbert, R Donald. 1992. *Introduction to Real Analysis 2nd Edition*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Bondy, J.A, and Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory With Applications*. London: MacMillan Press,

Budayasa, Ketut. 2000. *Minimum Order Graph Unisentral dengan Radius r dan Diameter d* (Prosiding Konperensi Nasional X Matematika). (ITB, 17-20 Juli 2000).

Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Gafur, Abdul. 2008. *Eksentrik Digraf dari Graf Star, Graf Double Star, Graf Komplit Bipartit dan Pelabelan Konsekutif pada Graf Sikel dan Graf Bipartit Komplit*. (Online): (*http://www. Combinatoric. Com*. Diakses tanggal 15 Agustus 2008).

Ghofur, Abdul. 2008. *Pewarnaan Titik Pada Graf Yang Berkaitan dengan Sikel*. UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.

http://id.wikipedia.org/wiki/Pembuktian_matematika, diakses pada hari Minggu, tanggal 3 Agustus 2008, pukul 06.56 WIB

Muis, Abdul. 2008. *Pelabelan Konsekutif (Consecutive Labeling) pada Graf Star S_n dan Graf Double Star $S_{n,n+1}$ (n Bilangan Asli)*. UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.

Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Rahman, Afzalur. 1992. *Al Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Rosen, Kenneth H.. 2003. *Discrete Mathemathics and Its Application: Fifth Edition*. Singapura: McGraw Hill

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 1 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 3 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 4 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 8 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 13 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Suryanto. 1986. *Materi Pokok Pengantar Teori Graph*. Karunia Universitas Terbuka: Jakarta

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345 Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Moh. Nirwan Khamid
NIM : 04510022
Fakultas/ jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : Order Minimum Graf Unisentral *G* dengan Radius *r* dan Diameter *d* (*r*, *d* Bilangan Asli)
Pembimbing I : Wahyu Henky Irawan, M.Pd
Pembimbing II : Achmad Nashichuddin, MA

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	17 Oktober 2008	Konsultasi Masalah	1.	
2	22 Oktober 2008	Konsultasi BAB III		2.
3	27 Oktober 2008	Revisi BAB III	3.	
4	31 Oktober 2008	Konsultasi BAB II, III		4.
5	03 November 2008	Konsultasi Keagamaan	5.	
6	06 November 2008	Revisi BAB II dan III		6.
7	10 November 2008	Konsultasi BAB I, II, III	7.	
8	15 November 2008	Revisi BAB I, II, III		8.
9	02 Desember 2008	Revisi Keagamaan	9.	
10	03 Desember 2008	Revisi Keagamaan		10.
11	07 Januari 2009	Konsultasi Keseluruhan	11.	
12	08 Januari 2009	ACC Keseluruhan		12.

Malang, 12 Januari 2009
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321