BANYAKNYA POHON RENTANGAN PADA GRAF *COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
DEDIK ISWAHYUDI
NIM. 08610063

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BANYAKNYA POHON RENTANGAN PADA GRAF *COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Dedik Iswahyudi
NIM. 08610063

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BANYAKNYA POHON RENTANGAN PADA GRAF *COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Dedik Iswahyudi
NIM. 08610063

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 26 Juni 2015

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BANYAKNYA POHON RENTANGAN PADA GRAF *COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Dedik Iswahyudi
NIM. 08610063

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 02 Juli 2015

Penguji Utama	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	.....
Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	.....
Sekretaris Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	.....
Anggota Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si	.....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tagan di bawah ini:

Nama : Dedik Iswahyudi

NIM : 08610063

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 25 Juni 2015
Yang membuat pernyataan,

Dedik Iswahyudi
NIM. 08610063

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTO

"Jika engkau belum mampu berdoa dengan khusyuk, maka tetaplah persembahkan doamu yang kering, munafik, dan minim keyakinan, karena Tuhan dengan rahmat-Nya, akan menerima mata uang palsumu itu"
(Jalaluddin Rumi)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Dengan rasa penuh syukur Alhamdulillah,

karya ini penulis persembahkan untuk:

Orang tua yang saya hormati

Ibu Yuli Hariyanti, Ayah Ali Chamidi, dan Bapak

Saudara-saudari terkasih

Sri Rahayu

Wiwit

Hamzah Afandi

Nila Zuhriah

Etika Silvi Khusnia

Seluruh keluarga besar penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Alhamdulillah puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Swt. yang telah melimpahkan cinta dan kasih-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Commuting dari Grup Dihedral*" ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah Muhammad Saw., yang telah menyampaikan pedoman dan tuntunan penyempurna akhlak manusia.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak lepas dari saran, bimbingan, arahan, serta doa dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis haturkan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya serta penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. H. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus selaku dosen pembimbing I yang senantiasa dengan sabar memberikan arahan dan bimbingan dalam penulisan skripsi ini.
4. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan saran dan arahan dalam penulisan skripsi ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

5. Seluruh dosen UIN Maulana Malik Ibrahim Malang khususnya para dosen matematika yang telah memberikan banyak pengalaman dan ilmu kepada penulis.
6. Ibunda Yuli Hariyanti dan Ayahanda Ali Chamidi dan Bapak tercinta yang telah mencurahkan kasih sayangnya, doa, bimbingan dan motivasi hingga terselesaikannya skripsi ini.
7. Saudara-saudara terkasih yang telah memberikan semangat kepada penulis.
8. Segenap keluarga Integral, PMII Rayon Pencerahan Galileo, tanpa terkecuali.
9. Semua pihak yang turut membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah wawasan khususnya bagi penulis dan bagi pembaca pada umumnya.

Malang, Juni 2015

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR viii

DAFTAR ISI x

DAFTAR GAMBAR xiii

DAFTAR TABEL xiv

ABSTRAK xv

ABSTRACT xvi

ملخص xvii

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Tujuan Penelitian 4
1.4 Manfaat Penelitian 4
1.5 Batasan Masalah 5
1.6 Metode Penelitian 5
1.7 Sistematika Penulisan 6

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf 8
2.1.1 Derajat Titik 9
2.1.2 Graf Terhubung 11
2.1.3 Graf Pohon 12
2.1.4 Matriks dan Determinan suatu Matriks 13
2.1.5 Matriks Pada suatu Graf 14
2.1.6 Graf *Commuting* pada Grup Dihedral (D_{2n}) 14
2.1.7 Teorema Matriks Pohon 15
2.2 Fiqih Prioritas 17

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Aplikasi Matriks Pohon dalam Menentukan Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{2n}, X))$ 23

3.2 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{2n}, X))$dengan$n$ Merupakan Bilangan Asli Ganjil dan $X = \{1, s, \dots, sr^{n-1}\}$, $X \subseteq D_{2n}$ 24

3.2.1 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_6, X))$ 24

3.2.2 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{10}, X))$ 26

3.2.3 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{14}, X))$ 28

3.2.4 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{18}, X))$ 30

3.2.5 Pola Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{2n}, X))$ 32

3.3 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{2n}, X))$dengan$n$ Merupakan Bilangan Asli Ganjil dan $X = \{1, r, \dots, r^{n-1}\}$, $X \subseteq D_{2n}$ 34

3.3.1 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_6, X))$ 34

3.3.2 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{10}, X))$ 35

3.3.3 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{14}, X))$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

.....
37
3.3.4 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral
$\tau(\Gamma(D_{18}, X))$
.....
39
3.3.5 Pola Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{2n}, X))$.....
41
3.4 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{2n}, X))$ dengan n Merupakan Bilangan Asli Ganjil dan $X = \{D_{2n}\}$, $X \subseteq D_{2n}$ .....
44
3.4.1 Banyaknya Pohon Rentangan pada *Commuting* Graf Dihedral $\tau(\Gamma(D_6))$ .....
44
3.4.2 Banyaknya Pohon Rentangan pada *Commuting* Graf Dihedral $\tau(\Gamma(D_{10}))$ .....
46
3.4.3 Banyaknya Pohon Rentangan pada *Commuting* Graf Dihedral $\tau(\Gamma(D_{14}))$ .....
48
3.4.4 Banyaknya Pohon Rentangan pada *Commuting* Graf Dihedral $\tau(\Gamma(D_{18}))$ .....
50
3.4.5 Pola Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{2n}))$.....
53
3.5 Kajian Graf Pohon Rentangan untuk Memudahkan Mengurai Masalah Prioritas Pelaksanaan Haji atau Pembayaran Hutang
.....
56

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan 59
4.2 Saran 60

DAFTAR PUSTAKA 61

RIWAYAT HIDUP

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Banyaknya Pohon Rentangan pada $\Gamma(D_{2n}, X)$ dengan n Bilangan Asli Ganjil dan $X = \{1, s, sr, \cdots, sr^{n-1}\}$ 32
Tabel 3.2 Banyaknya Pohon Rentangan pada $\Gamma(D_{2n}, X)$ dengan n Bilangan Asli Ganjil dan $X = \{1, r, \cdots, r^{n-1}\}$ 41
Tabel 3.3 Banyaknya Pohon Rentangan pada $\Gamma(D_{2n})$ dengan n Bilangan Asli Ganjil dan $X = \{D_{2n}\}$ 53
Tabel 3.4 Graf Pohon Rentangan sebagai Alternatif Solusi dari Graf Permasalahan Muslim 56

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf $G(5,7)$ 8
Gambar 2.2 Graf $G\ (4,5)$ 9
Gambar 2.3 Graf $G\ (4,5)$ 10
Gambar 3.1.1 $\Gamma(D_6, \{1, s, sr, sr^2\})$ 24
Gambar 3.1.2 $\Gamma(D_{10}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\})$ 26
Gambar 3.1.3 $\Gamma(D_{14}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\})$ 28
Gambar 3.1.4 $\Gamma(D_{18}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\})$ 30
Gambar 3.1.5 $\Gamma(D_6, \{1, r, r^2\})$ 34
Gambar 3.1.6 $\Gamma(D_{10}, \{1, r, r^2, r^3, r^4\})$ 35
Gambar 3.1.7 $\Gamma(D_{14}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})$ 37
Gambar 3.1.8 $\Gamma(D_{18}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\})$ 39
Gambar 3.1.9 $\Gamma(D_6)$ 44
Gambar 3.1.10 $\Gamma(D_{10})$ 45
Gambar 3.1.11 $\Gamma(D_{14})$ 48
Gambar 3.1.12 $\Gamma(D_{18})$ 50
Gambar 3.2.1 Graf Permasalahan Muslim 56

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79-80).

Dalam al-Quran surat al-Qamar/54:49 disebutkan,

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ

"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran"(QS. al-Qamar/54:49).

ayat di atas menjelaskan bahwa semua yang ada di alam ini ada ukurannya, hitungannya, rumusnya, atau persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan (Abdussakir, 2007:80). Jadi matematika sebenarnya telah diciptakan sejak zaman dahulu, manusia hanya menyimbolkan fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari. Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan sekian rasul untuk membimbing mereka. Allah juga menganugerahkan akal agar mereka berpikir tentang kebesaran Tuhan. Semua anugerah itu termasuk dalam sistem yang sangat tepat, teliti, dan rapi yang telah ditetapkan Allah Swt. Dalam al-Quran surat al-Furqaan/25:2.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلۡكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَلَمۡ يَتَّخِذۡ وَلَدٗا وَلَمۡ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٞ فِي ٱلۡمُلۡكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيۡءٖ فَقَدَّرَهُۥ تَقۡدِيرٗا ٢

"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya"(QS. al-Furqaan/25:2).

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain dan selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks sehingga penting untuk dipelajari. Dalam kehidupan sehari-hari banyak permasalahan yang memerlukan pemecahan. Sering dengan bantuan matematika permasalahan tersebut lebih mudah dipahami, lebih mudah dipecahkan, atau bahkan dapat ditunjukkan bahwa suatu persoalan tidak mempunyai penyelesaian. Untuk keperluan tersebut, perlu dicari pokok permasalahannya dan kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya (Purwanto, 1998:6).

Teori graf sebagai salah satu cabang matematika sebenarnya sudah ada sejak lebih dari dua ratus tahun yang silam. Jurnal pertama tentang graf muncul pada tahun 1736, oleh matematikawan terkenal dari Swiss bernama Euler. Dari segi matematika, pada awalnya teori graf "kurang" signifikan, karena kebanyakan hanya dipakai untuk memecahkan teka-teki, namun akhirnya mengalami perkembangan yang sangat pesat yaitu terjadi pada beberapa puluh tahun terakhir ini. Salah satu alasan perkembangan teori graf yang begitu pesat adalah aplikasinya yang sangat luas dalam kehidupan sehari-sehari maupun dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan (Budayasa, 2007:1).

Secara umum graf G adalah himpunan tak-kosong yang berhingga dari objek – objek yang disebut titik (*vertex*) bersama dengan himpunan pasangan tak

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

terurut yaitu sisi (*edge*). Himpunan titik G dinotasikan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi dinotasikan dengan $E\ (G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Salah satu materi dalam teori graf adalah pohon (*tree*). Pohon (*tree*) didefinisikan sebagai graf tak-berarah terhubung yang tidak memuat sikel. Menurut definisi tersebut, ada dua sifat penting pada pohon (*tree*) yaitu terhubung dan tidak memuat sikel (Chartrand dan Lesniak, 1986:67).

Konsep pohon (*tree*) merupakan konsep yang penting karena konsep ini mampu mendukung penerapan graf dalam berbagai bidang ilmu. Kirchoff (1824 – 1887) mengembangkan teori-teori pohon untuk diterapkan dalam jaringan listrik. Selanjutnya Arthur Cayley (1821-1895) mengembangkan graf jenis ini, sewaktu mencacah isomer hoidrokarbon jenuh $C_nH_{2n} + 2$. Sekarang pohon (*tree*) digunakan luas dalam linguistik dan ilmu komputer (Sutarno, 2005:104).

Salah satu masalah dalam bidang matematika yang dapat dihubungkan dengan teori graf adalah graf *commuting* dari grup dihedral. Elemen-elemen anggota grup dihedral adalah titik-titik yang membentuk grafnya. Apabila dua anggota elemen-elemen grup dihedral saling komutatif $(a * b = b * a)$, maka pada graf *commuting*-nya dua elemen tersebut akan terhubung langsung, sedangkan apabila dua anggota elemen grup dihedral tidak saling komutatif $(a * b \neq b * a)$, maka pada graf *noncommuting*-nya dia akan terhubung langsung.

Berkaitan dengan subgraf rentangan, maka permasalahan yang menarik untuk dikaji adalah menentukan banyaknya subgraf rentangan yang berbentuk pohon dari suatu graf, yang dikenal dengan sebutan banyaknya pohon rentangan (*spanning tree number)*. Oleh karena itu, pada skripsi ini akan dibahas tentang banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana mengaplikasikan teorema matriks-pohon dalam menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah mempelajari penerapan teorema matriks-pohon dalam menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral.

1.4 Manfaat Penelitian

1. Bagi Penulis
   a. Sebagai bentuk partisipasi penulis dalam memberikan kontribusi terhadap pengembangan keilmuan, khususnya dalam bidang ilmu matematika.
   b. Sebagai suatu bentuk aplikasi ilmu yang telah penulis dapatkan selama berada di bangku kuliah.
   c. Sebagai bahan referensi dalam menambah pengetahuan tentang konsep graf.
2. Bagi Pembaca

   Sebagai wahana untuk menambah wawasan dan khasanah keilmuan serta menjadi bahan rujukan untuk melakukan penelitian lebih lanjut tentang graf pohon rentangan.
3. Bagi Lembaga

   Sebagai bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah Teori Graf.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.5 Batasan Masalah

Permasalahan dalam tugas akhir ini, dibatasi oleh graf yang dikaji merupakan graf sederhana, graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{2n}, X)$ dengan:

1. n merupakan bilangan asli ganjil.
2. $n \geq 3$.
3. X merupakan himpunan semua rotasi di D_{2n}, X merupakan himpunan semua refleksi di D_{2n}, atau X merupakan himpunan semua refleksi dan rotasi di D_{2n}.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, karena penelitian ini adalah berbentuk kajian. Metode ini dilakukan dengan cara mengumpulkan data dan mencari bahan-bahan literatur berupa buku, jurnal maupun makalah sebagai landasan teori yang berhubungan dengan objek penelitian. Selanjutnya pembahasan dilakukan dengan mengkaji literatur dengan menganalisiskan terhadap objek penelitian dan konsultasi kepada dosen pembimbing, serta menuangkannya ke dalam bentuk laporan penelitian yang akhirnya akan ditarik kesimpulan.

Tahapan yang akan dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Diberikan grup dihedral D_{2n} dan $X \subseteq D_{2n}$,
2. Menentukan bentuk graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{2n}, X)$,
3. Menentukan matriks *Adjacency* graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{2n}, X)$,
4. Menentukan matriks Derajat graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{2n}, X)$,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

5. Menentukan matriks Laplacian graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{2n}, X)$, Mencari banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral$\tau(\Gamma(D_{2n}, X))$ dengan mencari nilai kofaktor $C_{n,n}$ dari matriks Laplacian,
6. Mengamati dan menentukan pola yang terbentuk dari banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* grup dihedral $\tau(\Gamma(D_{2n}, X))$,
7. Membuat dugaan (konjektur) berdasarkan perhitungan yang ditemukan dengan membuat tabel dan merumuskan konjektur sebagai suatu teorema,
8. Menghasilkan suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif,

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam sistematika penulisan penelitian ini dibagi menjadi 4 bab sebagaimana berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini penulis menjelaskan beberapa konsep (teori-teori) yang berhubungan dengan penelitian ini, yaitu mengenai graf, graf pohon, matriks dan determinan, matriks pada suatu graf, graf *commuting* dari grup dihedral, teorema matriks-pohon, serta fiqih prioritas.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini penulis menjelaskan tentang bagaimana menerapkan teorema matriks-pohon, kemudian menentukan pola banyaknya pohon rentangan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

yang termuat pada graf *commuting* dari grup dihedral, serta kajian graf pohon rentangan untuk memudahkan mengurai masalah prioritas pelaksanaan haji atau pembayaran hutang.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian dan saran yang berkaitan dengan hasil penelitian ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

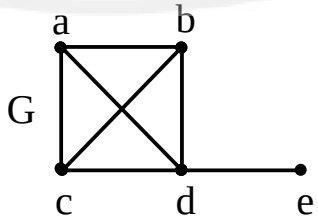
Definisi 1

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut size dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Penulis memberikan contoh pada graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E yaitu:

$V = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (c, d), (d, e)\}$.

Graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 2.1: Graf $G(5,7)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Graf G mempunyai 5 titik sehingga order G adalah $p = 5$. Graf G mempunyai 7 sisi sehingga *size* graf G adalah $q = 7$. Graf G memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E yaitu:

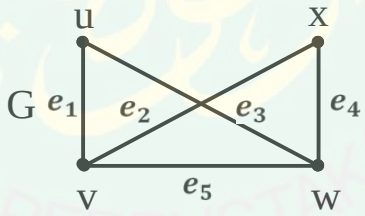
$V = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

dengan $e_1 = (a, b), e_2 = (a, c), \quad e_3 = (a, d), \quad e_4 = (b, d), \quad e_5 = (b, c), e_6 = (c, d), e_7 = (d, e)$

Definisi 2

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Penulis memberikan contoh pada graf G yang memuat himpunan $V = \{U, V, W, X\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ berikut ini.



Gambar 2.2: Graf G (4,5)

Dari gambar 2.2 tersebut, titik U dan e_1 serta e_1 dan V adalah *incident* (terkait langsung) dan titik U dan V adalah *adjacent* (terhubung langsung).

2.1.1 Derajat Titik

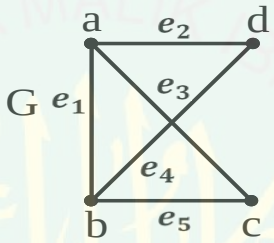
Definisi 3

Derajat dari titik v di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (*incident*) dengan v (Chartrand dan Lesniak, 1986:7). Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

disingkat menjadi $deg(v)$. Titik yang berderajat genap sering disebut *titik genap* (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut *titik ganjil* (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut *titik ujung* (*end vertices*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Penulis memberikan contoh graf G pada gambar 2.3 yang mempunyai himpunan titik $V = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.



Gambar 2.3: Graf $G(4,5)$

Berdasarkan gambar 2.3, diperoleh bahwa: $deg(a) = 3$, $deg(b) = 3$, $deg(c) = 2$, $deg(d) = 2$. Titik a dan b adalah titik ganjil, titik c dan d adalah titik genap. Karena tidak ada yang berderajat 1, maka graf G tidak mempunyai titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q, adalah $\sum_{v \in G} deg(d) = 2q$. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 1

Jika G graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Maka $\sum_{i=1}^{p} deg_G(v_i) = 2q$

(Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Bukti:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali. Sehingga berakibat pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

2.1.2 Graf Terhubung

Definisi 4

Sebuah jalan (*walk*) $u - v$ di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong) $W : u = u_0, e_1, u_1, e_2, \ldots, u_n - 1, e_n, u_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v, dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ adalah sisi di G. u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir, $u_1, u_2, \ldots, u_n - 1$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 5

Jalan $u - v$ disebut *terbuka* atau *tertutup* jika $u = v$ atau $u \neq v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 6

Jalan $u - v$ yang semua sisinya berbeda disebut *trail* $u - v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 7

Jalan $u - v$ yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) $u - v$. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 8

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Suatu titik u yang membentuk lintasan $u - u$ disebut jalan trivial (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 9

Suatu jalan tertutup (*closed trail*) yang tak-trivial pada Graf G disebut Sirkuit G. (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Definisi 10

Sirkuit $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, v_n - 1, e_n - 1, e_n, v_n, v_1$ dengan $n \geq 3$ dan v_i berbeda untuk setiap i disebut Sikel (*Cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Definisi 11

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G. Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

2.1.3 Graf Pohon

Definisi 12

Pohon adalah graf tak-berarah terhubung yang tidak memuat sikel. Menurut definisi tersebut, ada dua sifat penting pada pohon yaitu terhubung dan tidak memuat sikel (Chartrand dan Lesniak, 1986:67).

Definisi 13

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf tak-berarah terhubung yang bukan pohon, yang berarti di G terdapat beberapa sirkuit. G dapat diubah menjadi pohon $T = (V1, E1)$ dengan cara memutuskan sirkuit-sirkuit yang ada. Caranya, mula-mula dipilih sebuah sirkuit, lalu hapus satu buah sisi dari sirkuit ini. G akan tetap terhubung dan jumlah sirkuitnya berkurang satu. Bila proses ini

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dilakukan berulang-ulang sampai semua sirkuit di *G* hilang, maka *G* menjadi sebuah pohon *T*, yang dinamakan pohon rentangan (*spanning tree*). Disebut pohon rentangan karena semua simpul pada pohon *T* sama dengan semua simpul pada graf *G*, dan sisi-sisi pada pohon *T* subset sisi-sisi pada graf *G* (Munir, 2005:447).

2.1.4 Matriks dan Determinan Suatu Matriks

Definisi 14

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilagan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks (Anton,1997:22).

Definisi 15

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$ determinan A dinyatakan dengan $\det(A)$ didefinisikan sebagai:

$$det \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\det(M_{1j})$$

dan

$$\det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka minor entri a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan sub matriks yang tetap setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihapus dari A. Bilangan $(-1)_i + M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan dinamakan kofaktor entri a_{ij}.

2.1.5 Matriks pada Suatu Graf

Definisi 16

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Misalkan G graf dengan order p $(p \geq 1)$ dan ukuran q serta himpunan titik $V\ G\ v1, v2, \ldots, vp$, matrik keterhubungan titik (atau matriks *adjacency*) dari graf G dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks $(p\ x\ p)$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain, matriks keterhubungan dapat ditulis:

$$A(G) = [a_{ij}], 1 \leq i, j \geq px \text{ dengan } a_{ij} \begin{cases} 1\ jika\ v_i v_j \in E(G) \\ 0\ jika\ v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dengan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya. Hal ini karena graf tidak memuat lup dan tidak memuat sisi paralel (Chartrand, 1986:4).

Definisi 17

Matriks derajat dari Graf (G), dinotasikan dengan $D(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-i adalah derajat dari $v_i, i = 1,2,3, \ldots, p.$ Jika $D(G) = [d_{ij}], 1 \leq i, j \leq p$ maka $d_{ii} = v_i$ dan $D_{ij} = 0\ untuk\ i \neq j$ (Agnarsson dan Greenlaw, 2007:112).

2.1.6 Graf *Commuting* pada Grup Dihedral (D_{2n})

Definisi 16

Diberikan D_{2n} dan X merupakan himpunan bagian dariD_{2n}. Maka graf *commuting* dari grup dihedral dinyatakan sebagai$\Gamma(D2_n, X)$,dimana X merupakan himpunan titik-titik. Kemudian dua titik berbeda pada X akan terhubung langsung (*adjacent*) jika dua titik tersebut komutatif dalam D_{2n} (Chelvam, dkk, 2011:402).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.1.7 Teorema Matriks Pohon

Teorema 2

Misalkan G adalah graf sederhana dan dimisalkan $B_{-1}(G)$ adalah digraf matriks insiden dari G yang berkaitan dengan pelabelan yang tetap dari n titik dan m sisi dari G. Untuk setiap $n(n-1)$sub matriks B' dari $B_{-1}(G)$ adalah sama sebagai berikut:

1. rank $(B') = n - 1$
2. Pada sisi $n - 1$ sesuai dengan kolom B' membentuk pohon merentang dari G

Bukti:

Jika sisi $n - 1$ membentuk pohon merentang dari G, maka rank $(B') = n - 1$. Dilanjutkan dengan induksi pada $n \geq 1$. Asumsikan bahwa $e_1, \ldots, e_{n-1}$ membentuk pohon merentang τ dari G. Dengan pelabelan yang sesuai pada sisi dan titik pada G, maka dapat diasumsikan bahwa μ_1 adalah daun dari τ yang terhubung ke μ_2 dengan sisi e_1. Dalam hal ini B' memiliki ± 1 pada entri $(1,1)$ dan 0 di trmpat lain pada baris pertama. Karena jumlah semua baris dalam B' adalah nol. Itu sudah cukup untuk mempertimbangkan bahwa $(n-1)(n-1)$ sub matriks B'' dari B', di mana baris ke-n telah dihapus dari B' (sebenarnya, dapat menghapus semua baris ke i dimana $2 \leq i \leq n$). Itu sudah cukup untuk menunjukan bahwa $\det B'' \neq 0$. Memperluas determinan di sepanjang baris pertama maka akan diperoleh:

$$\det \mathrm{B}'' = \pm(\mathrm{B}''_{1.1})$$

Dimana $\mathrm{B}''_{1.1}$ adalah matriks $(n-2)(n-2)$ yang diperoleh dari B'' dengan menghapus baris dan kolom pertama. Sejak sekarang $\mathrm{B}''_{1.1}$ sesuai dengan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

pohon pada $e_1, \dots, e_{n-1}$ (kecuali untuk baris terakhir) dengan hipotesis induksi rank $(n-2)$ dengan demikian determinan tidak nol.

Teorema 3

Misalkan $m, n \in \mathbb{N}$ dimana $m \geq n$ misalkan X matriks $n \times m$ dan Y matriks $m \times n$. Untuk setiap $S = i_1, \dots, i_n \subseteq 1, \dots, m$. Misalkan X_s (demikian juga Y_s) adalah nomor matriks persegi $n \times n$ diperoleh dengan memilih kolom (demikian juga baris) i_1 melalui i_n dari X (demikian juga, Y). Dalam hal ini didapatkan:

$$\det(XY) = \sum_{S \subseteq 1,\dots,m} \det(X_s) \det(Y_s)$$

Mengambil alih semua $\binom{m}{n}$ subhimpunan S dari $1, \dots, m$ yang memuat unsur n tepat.

Bukti:

Perhatikan bahwa

$$\begin{bmatrix} i_m & 0 \\ X & i_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -i_m & Y \\ X & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_m & Y \\ 0 & XY \end{bmatrix}$$

dimana i_a adalah matriks identitas $a \times a$ untuk $a = m, n$ oleh karena itu:

$$\det \begin{bmatrix} -i_m & Y \\ X & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -i_m & Y \\ 0 & XY \end{bmatrix} = (-1)^m \det(XY)$$

dan karenanya maka:

$$\det(XY) = (-1)^m \det \begin{bmatrix} -i_m & Y \\ X & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 4

Untuk graf G tanpa lup, semua kofaktor $D(G) - A(G)$ adalah sama dengan jumlah pohon merentangan di G yang dinyatakan $(\tau(G))$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti:

Untuk G graf tanpa lup, maka didapatkan

$$A(G) + B_{-1}(G)B_{-1}(G)^t = D(G)$$

dari pernyataan di atas didapatkan

$$D(G) - A(G) = B_{-1}(G)B_{-1}(G)^t$$

dari sini dicatat bahwa kofaktor (i, i) pada $D(G) - A(G)$ adalah matriks yang diperoleh dari perkalian matriks $B_{-1,i}(G)B_{-1,i}(G)^t$ dimana $B_{-1,i}(G)$ diperoleh dari $B_{-1}(G)$ dengan menghapus baris ke i. Pada teorema 3 didapati bahwa:

$$\det B_{-1}(G)B_{-1}(G)^t = \sum \det\left(B^{'}\right)\det\left(B^{'}\right)^t$$

dimana $B^{'}$ submatriks tidak singular $(n-1)(n-1)$ dari $B_{-1,i}(G)$ kemudian berdasarkan teorema 2 maka tepat dengan jumlah pohon rentangannya, dan dengan setiap jumlah- jumlahnya itu sama dengan $(\pm 1)^2 = 1$ oleh karena itu, setiap kofaktor ke (i, i) dari $D(G) - A(G)$ sama dengan $\tau(G)$ (Agnarsson dan Greenlaw, 2007:115).

2.2 Fiqih Prioritas

Sesungguhnya kedaulatan hukum itu hanya milik Allah, bagi kehidupan manusia, dalam urusan yang besar maupun kecil. Untuk semua itu, Allah telah membuat syariat yang dituangkan-Nya dalam al-Quran dan diutus-Nya Rasul yang tidak pernah berbicara dengan memperturutkan hawa nafsunya untuk menjelaskannya kepada manusia, oleh karena itu syariat Rasulullah termasuk syariat Allah (Quthb, 2000:399).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jika semua kelompok berpegang teguh kepada al-Quran yang diturunkan kepada Rasulullah sebagai dalil-dalil yang handal, maka pertikaian dalam kehidupan ini akan hilang dan kesatuan akan merata (Faqih, 2006:77).

Sebagaimana penafsiran ayat di atas, al-Quran menjadi pedoman hidup umat manusia, al-Quran banyak mengemukakan pokok-pokok serta prinsip-prinsip umum pengaturan hidup dalam hubungan antara manusia dengan Allah dan mahluk lainnya. Di dalamnya terdapat peraturan-peraturan seperti: beribadah langsung kepada Allah Swt, berkeluarga, bermasyarakat, berdagang, utang-piutang, kewarisan, pendidikan dan pengajaran, pidana, dan aspek-aspek kehidupan lainnya yang oleh Allah Swt. dijamin dapat berlaku dan dapat sesuai pada setiap tempat dan setiap waktu. Sebagaimana firman Allah Swt.

ذَٰلِكَ ٱلۡكِتَٰبُ لَا رَيۡبَۛ فِيهِۛ هُدٗى لِّلۡمُتَّقِينَ ٢

"Kitab (al-Quran) ini tidak ada keraguan padanya; petunjuk bagi mereka yang bertaqwa" (QS. al-Baqarah/2:2).

Kitab dalam ayat ini adalah al-Quran. Keraguan berarti kebimbangan. Ayat ini menetapkan bahwa al-Quran merupakan kebenaran. Tidak seorang pun boleh meragukan kebenarannya dan bahwa ia berasal dari Allah. Isi kandungan al-Quran adalah kebaikan dan petunjuk bagi umat manusia (Al-Banna, 2010:117).

Kemudian apabila kita memperhatikan kehidupan kita dari berbagai sisinya baik dari segi material maupun spiritual, dari segi pemikiran, sosial, ekonomi, politik ataupun yang lainnya maka kita akan menemukan bahwa timbangan prioritas pada umat sudah tidak seimbang lagi (Al Qardhawy, 1996:14).

Kebanyakan dari kita tidak mendapatkan cahaya ilmu pengetahuan dan arahan dari fiqih yang benar. kita telah memusnahkan batas antara berbagai macam amalan dan tidak membedakannya satu sama lain, atau mereka menetapkannya di

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

luar hukum agama, sehingga ketetapan mereka kurang atau malah berlebihan. Dalam kasus seperti ini, agama akan hilang di tangan orang yang sangat berlebihan dan melampaui batas dan orang yang kurang memiliki pengetahuan tentang agama itu. Oleh karena hal yang demikian itu, muncul kajian-kajian tentang fiqih prioritas yang mengkaji tentang pertimbangan meletakkan segala sesuatu pada peringkatnya dengan adil, dari segi hukum, nilai, dan pelaksanaannya. Pekerjaan yang mula-mula dikerjakan harus didahulukan, berdasarkan penilaian syari'ah yang shahih, yang diberi petunjuk oleh cahaya wahyu, dan diterangi oleh akal.

Fiqih prioritas memiliki hubungan yang sangat erat dengan bentuk fiqih lainnya, dalam beberapa hal, ia berkaitan dengan fiqih pertimbangan (*muwazanah*), dengan mengutip beberapa pokok pikiran Syaikh Islam, Ibn Taimiyah, yang saya pandang sangat berguna. Peran terpenting yang dapat dilakukan oleh fiqih pertimbangan ini adalah:

1. Memberikan pertimbangan antara berbagai kemaslahatan dan manfaat dari berbagai kebaikan yang disyariatkan.
2. Memberikan pertimbangan antara berbagai bentuk kerusakan, *madharat*, dan kejahatan yang dilarang oleh agama.
3. Memberikan pertimbangan antara maslahat dan kerusakan, antara kebaikan dan kejelekan apabila dua hal yang bertentangan ini bertemu satu sama lain.

Pada kategori pertama (kemaslahatan), kita dapat menemukan kemaslahatan yang telah ditetapkan oleh syari'ah agama, bahwa kemaslahatan tidak berada pada satu peringkat. Tetapi ia bertingkat-tingkat, sebagaimana peringkat utama yang telah ditetapkan oleh para ahli usul fiqih. Mereka membagi kemaslahatan itu menjadi tiga tingkatan dengan urutan *dharuriyyat*, *hajjiyyat*, dan *tahsinat*. Yang

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dimaksudkan dengan *dharuriyyat* adalah sesuatu yang kita tidak bisa hidup kecuali dengannya dan *hajjiyyat* adalah kehidupan memungkinkan tanpa dia, tetapi kehidupan itu mengalami kesulitan dan kesusahan, dan *tahsinat* adalah sesuatu yang dipergunakan untuk menghias dan mempercantik kehidupan, dan seringkali kita sebut dengan *kamaliyyat* (pelengkap). Fiqih prioritas mengharuskan kita untuk:

1. Mendahulukan *dharuriyyat* atas *hajjiyyat*, apalagi terhadap *tahsinat*
2. Dan mendahulukan *hajjiyyat* atas *tahsinat* dan *kamaliyyat*.

Pada bagian kedua kita dapat menemukan bahwa kerusakan dan *madharat* itu memiliki tingkatan, sebagaimana tingkat yang terdapat pada kemaslahatan. Kerusakan yang dapat merusak perkara yang termasuk *dharuriyyat* adalah berbeda dengan kerusakan yang dapat merusak *hajjiyyat*, atau *tahsinat*. Kerusakan yang dapat membahayakan harta benda tidak sama tingkatannya dengan kerusakan yang dapat membunuh jiwa dan juga tidak sama dengan kerusakan yang dapat membahayakan agama dan aqidah.

Volume, intensitas, dan bahaya yang ditimbulkan oleh kerusakan dan *madharat* itu berbeda-beda tingkatannya. Atas dasar inilah, para *fuqaha* menetapkan sejumlah kaidah yang baku mengenai hukum yang penting antara lain:

1. Tidak ada bahaya dan tidak boleh membahayakan.
2. Suatu bahaya sedapat mungkin harus disingkirkan.
3. Suatu bahaya tidak boleh disingkirkan dengan bahaya yang sepadan atau yang lebih besar.
4. Bahaya yang lebih ringan, dibandingkan dengan bahaya lainnya yang mesti dipilih, boleh dilakukan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

5. Bahaya yang lebih ringan boleh dilakukan untuk menolak bahaya yang lebih besar.
6. Bahaya yang bersifat khusus boleh dilakukan untuk menolak bahaya yang sifatnya lebih luas dan umum.

Apabila dalam suatu perkara terdapat maslahat dan kerusakannya, ada bahaya dan manfaatnya, maka keduanya harus dipertimbangkan dengan betul. Kita harus mengambil keputusan terhadap pertimbangan yang lebih berat dan lebih banyak, karena sesungguhnya yang lebih banyak itu memuat hukum yang menyeluruh. Kalau misalnya kerusakannya dirasakan lebih banyak dan lebih berat dalam suatu perkara dibandingkan dengan manfaat yang terkandung di dalamnya, maka perkara seperti ini mesti dicegah, karena kerusakan lebih banyak, kita terpaksa mengabaikan sedikit manfaat yang terkandung di dalamnya. Keputusan ini didasarkan kepada apa yang dikatakan oleh al-Quran al-Karim sehubungan dengan hukum khamar dan berjudi ketika dia memberikan jawaban terhadap orang-orang yang bertanya mengenai kedua hal itu:

"Mereka bertanya kepadamu tentang khamar dan judi. Katakanlah: "Pada keduanya itu terdapat dosa besar dan beberapa manfaat bagi manusia, tetapi dosa keduanya lebih besar dari pada manfaatnya ..."" (QS al-Baqarah/2:219).

Sebaliknya, apabila dalam suatu perkara terdapat manfaat yang lebih besar, maka perkara itu boleh dilakukan, sedangkan kerusakan kecil yang ada padanya dapat diabaikan. Di antara kaidah penting dalam hal ini adalah menolak kerusakan harus didahulukan atas pengambilan manfaat.

Kaidah ini kemudian disempurnakan dengan kaidah lain yang dianggap penting yaitu:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1. Kerusakan yang kecil diampuni untuk memperoleh, kemaslahatan yang lebih besar.
2. Kerusakan yang bersifat sementara diampuni demi kemaslahatan yang sifatnya berkesinambungan.
3. Kemaslahatan yang sudah pasti tidak boleh ditinggalkan karena ada kerusakan yang baru diduga adanya.
4. Sesungguhnya fiqih pertimbangan seperti itu memiliki arti yang sangat penting dalam kehidupan nyata manusia, khususnya dalam masalah *Siyasah Syari'ah* (politik syari'ah), karena ia merupakan landasan bagi pembinaan umat, yang pada gilirannya dapat dipandang sebagai fiqih prioritas.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Aplikasi Matriks Pohon dalam Menentukan Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{2n}, X))$

Pada bab ini dibahas tentang aplikasi matriks pohon untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{2n}, X)$, yang dibatasi berdasarkan batasan masalah pada bab 1. Adapun langkah-langkah menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{2n}, X)$ adalah sebagai berikut:

1. Diberikan grup dihedral (D_{2n}) dan $X \subseteq D_{2n}, X \neq \{\}$
2. Menggambar graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{2n}, X)$ berdasarkan definisi 18 pada bab II halaman 14,
3. Menentukan matriks keterhubungan titik graf *commuting* dari grup dihedral $A(\Gamma(D_{2n}, X))$ berdasarkan definisi 16 pada bab II halaman 13,
4. Menentukan matriks derajat graf *commuting* dari grup dihedral $D(\Gamma(D_{2n}, X))$ berdasarkan definisi 17 pada bab II halaman 14,
5. Menentukan matriks Laplacian graf *commuting* dari grup dihedral $T(\Gamma(D_{2n}, X))$ dengan menggunakan persamaan:

$$T(\Gamma(D_{2n}, X)) = A(\Gamma(D_{2n}, X)) - A(\Gamma(D_{2n}, X)),$$

6. Menghitung kofaktor $C_{n,n}$ dari matriks Laplacian, dimana nilai kofaktor dari matriks Laplacian merupakan banyaknya pohon rentangan dari graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{2n}, X)$,
7. Membuat Tabel pola banyaknya pohon rentangan dari graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{2n}, X)$,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

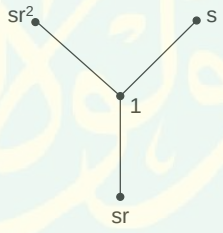
8. Merumuskan pola ke dalam teorema,
9. Membuktikan teorema secara deduksi.

Sebelum menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\tau(\Gamma(D_{2n}, X))$ dengan menggunakan teorema matrix pohon, berdasarkan definisi bahwa banyaknya pohon rentangan sama dengan nilai setiap kofaktor $C_{n,n}$ dari matriks Laplacian $T\big(\Gamma(D_{2n}, X)\big)$, maka penulis memilih nilai kofaktor $C_{1,1}$ untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{2n}, X)$.

3.2 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\boldsymbol{\tau\big(\Gamma\big(D_{2n}, X\big)\big)}$ dengan $\boldsymbol{n}$ Merupakan Bilangan Asli Ganjil dan $\boldsymbol{X = \{1, s, \dots, sr^{n-1}\}, X \subseteq D_{2n}}$

3.2.1 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\boldsymbol{\tau(\Gamma\big(D_6, X\big))}$

Bentuk graf dari $\Gamma(D_6, \{1, s, sr, sr^2\})$ yaitu:



Gambar 3.1 $\Gamma(D_6, \{1, s, sr, sr^2\})$

Dari $\Gamma(D_6, \{1, s, sr, sr^2\})$ menghasilkan matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

$$A\big(\Gamma(D_6, \{1, s, sr, sr^2\})\big) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$D\big(\Gamma(D_6,\{1,s,sr,sr^2\})\big)=\begin{bmatrix}3&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik dan matriks derajat maka akan dicari matriks Laplacian yaitu dengan menggunakan persamaan:

$$T\big((D_6,\{1,s,sr,sr^2\})\big)=\ D\big(\Gamma(D_6,\{1,s,sr,sr^2\})\big)-\ A\big(\Gamma(D_6,\{1,s,sr,sr^2\})\big)$$

sehingga diperoleh matriks Laplacian dari $\Gamma(D_6,\{1,s,sr,sr^2\})$ sebagai berikut:

$$T\big(\Gamma(D_6,\{1,s,sr,sr^2\})\big)=\begin{bmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

Kemudian akan ditentukan banyaknya pohon rentangan dari $\Gamma(D_6,\{1,s,sr,sr^2\})$ dengan cara menentukan nilai kofaktor $C_{1,1}$ dari matriks Laplacian tersebut, yaitu:

$$\tau\big(\Gamma(D_6,\{1,s,sr,sr^2\})\big)=C_{1,1}=(-1)^2\ det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=(-1)^2\left(1\ det\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+0\ det\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}+0\ det\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)$$

$$=1(1+0+0)$$

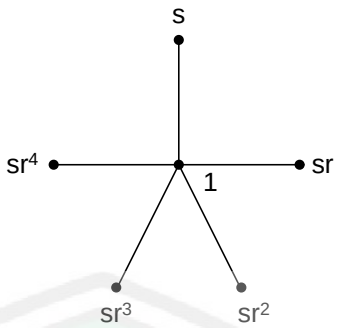
$$\tau\big(\Gamma(D_6,\{1,s,sr,sr^2\})\big)=1$$

Maka diperoleh bahwa banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_6,X)$ dengan $X=\{1,s,sr,sr^2\}$ adalah sebanyak 1 pohon rentangan.

3.2.2 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{10},X))$

Diperoleh bentuk graf dari $\Gamma(D_{10},\{1,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4\})$ yaitu:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.2 $\Gamma(D_{10}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\})$

Dari graf $\Gamma(D_{10}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\})$ menghasilkan matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

$$A\left(\Gamma(D_{10}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\})\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat sebagai berikut:

$$D\left(\Gamma(D_{10}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\})\right) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik dan matriks derajat maka akan dicari matriks Laplacian yaitu dengan menggunakan persamaan:

$$T\left(\Gamma(D_{10}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\})\right)$$

$$= D\left(\Gamma(D_{10}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\})\right) - A\left(\Gamma(D_{10}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\})\right)$$

sehingga diperoleh matriks Laplacian dari $\Gamma\left((D_{10}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\})\right)$ sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$T\left(\Gamma(D_{10},\{1,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4\})\right)=\begin{bmatrix}4&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&1&0&0&0&0\\-1&0&1&0&0&0\\-1&0&0&1&0&0\\-1&0&0&0&1&0\\-1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Kemudian akan ditentukan banyaknya pohon rentangan dari $\Gamma(D_{10},\{1,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4\})$ dengan cara menentukan nilai kofaktor $C_{1,1}$ dari matriks Laplacian tersebut, yaitu:

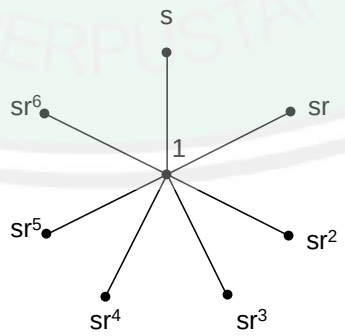
$$\tau\left(\Gamma(D_{10},\{1,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4\})\right)=C_{1,1}=(-1)^2\,det\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=1$$

Maka diperoleh bahwa banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{10},X)$ dengan $X=\{1,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4\}$ adalah sebanyak 1 pohon rentangan.

3.2.3 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{14},X))$

Diperoleh bentuk graf dari $\Gamma(D_{14},\{1,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4,sr^5,sr^6\})$ yaitu:



Gambar 3.3 $\Gamma(D_{14},\{1,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4,sr^5,sr^6\})$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari graf $\Gamma(D_{14}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\})$ menghasilkan matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

$$A\left(\Gamma(D_{14}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\})\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat sebagai berikut:

$$D\left(\Gamma(D_{14}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\})\right) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik dan matriks derajat maka akan dicari matriks Laplacian yaitu dengan menggunakan persamaan:

$T\left(\Gamma(D_{14}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\})\right)$

$= D\left(\Gamma(D_{14}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\})\right) - A\left(\Gamma(D_{14}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\})\right)$

sehingga diperoleh matriks Laplacian sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$T\left(\Gamma(D_{14},\{1,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4,sr^5,sr^6\})\right)=\begin{bmatrix}6&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&1&0&0&0&0&0&0\\-1&0&1&0&0&0&0&0\\-1&0&0&1&0&0&0&0\\-1&0&0&0&1&0&0&0\\-1&0&0&0&0&1&0&0\\-1&0&0&0&0&0&1&0\\-1&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Kemudian akan ditentukan banyaknya pohon rentangan dari $\Gamma(D_{14},\{1,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4,sr^5,sr^6\})$ dengan cara menentukan nilai kofaktor $C_{1,1}$ dari matriks Laplacian tersebut, yaitu:

$$\tau\left(\Gamma(D_{14},\{1,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4,sr^5,sr^6\})\right)=C_{1,1}$$

$$C_{1,1}=(-1)^2\,det\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=(-1)^2(1)$$

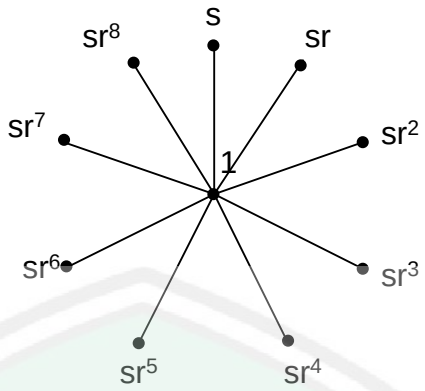
$$=1$$

Maka diperoleh bahwa banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{14},X)$ dengan $X=\{1,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4,sr^5,sr^6\}$ adalah sebanyak 1 pohon rentangan.

3.2.4 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{18},X))$

Diperoleh bentuk $\Gamma(D_{18},\{1,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4,sr^5,sr^6,sr^7,sr^8\})$ yaitu:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.4 $\Gamma(D_{18}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\})$

Dari graf $\Gamma(D_{18}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\})$ menghasilkan matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

$$A\big(\Gamma(D_{18}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\})\big) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga menghasilkan matriks derajat sebagai berikut:

$$D\big(\Gamma(D_{18}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\})\big) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik dan matriks derajat maka akan dicari matriks Laplacian yaitu dengan menggunakan persamaan:

$$T\big(\Gamma(D_{18}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\})\big)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= D\left(\Gamma(D_{18}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\})\right)$$

$$- A\left(\Gamma(D_{18}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\})\right)$$

sehingga diperoleh matriks Laplaciannya sebagai berikut:

$$T\left(\Gamma(D_{18}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\})\right) = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan ditentukan banyaknya pohon rentangan dari $\Gamma(D_{18}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\})$ dengan cara menentukan nilai kofaktor $C_{1,1}$ dari matriks Laplacian tersebut, yaitu:

$$\tau\left(\Gamma(D_{18}, \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\})\right) = C_{1,1}$$

$$C_{1,1} = (-1)^2 \, det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^2(1)$$

$$= 1$$

Maka diperoleh bahwa banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{18}, X)$ dengan $X = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$ adalah sebanyak 1 pohon rentangan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.2.5 Pola Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{2n}, X))$

Berdasarkan data yang diperoleh dari pembahasan di atas maka diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1 Banyaknya Pohon Rentangan pada $\Gamma(D_{2n}, X)$ dengan n Merupakan Bilangan Asli Ganjil dan $X = \{1, s, sr, \cdots, sr^{n-1}\}$

$\Gamma(D_{2n}, X)$	$\tau(\Gamma(D_{2n}, X))$
$n = 3\ dan\ X = \{1, s, sr, sr^3\}$	1
$n = 5\ dan\ X = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$	1
$n = 7\ dan\ X = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$	1
$n = 9\ dan\ X = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$	1
$\vdots$	$\vdots$
n bilangan asli ganjil dan $X = \{1, s, sr, \cdots, sr^{n-1}\}$	1

Teorema 1

Misalkan $\Gamma(D_{2n}, X)$ adalah graf *commuting* grup dihedral dengan n bilangan asli ganjil dan $X = \{1, s, sr, \cdots sr^{n-1}\}$ maka $\tau(D_{2n}, X) = 1$

Bukti:

Misalkan $\Gamma(D_{2n}, X)$, dengan n bilangan asli ganjil dan $X = \{1, s, sr, \cdots sr^{n-1}\}$ memuat titik $= \{1, s, sr, \cdots, sr^{n-1}\}$ diketahui bahwa $sr^i * sr^j \neq sr^j * sr^i$, untuk $i \neq j$ dan $1 * sr^i = sr^i * 1$ maka $\Gamma(D_{2n}, X)$ beroder $n + 1$, sehingga dapat dibentuk matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

$$A\big(\Gamma(D_{2n}, X)\big) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

sedangkan matriks derajatnya adalah:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$D\big(\Gamma(\mathrm{D}_{2n}, X)\big) = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian dapat ditentukan pula matriks Laplaciannya sebagai berikut:

$$T\big(\Gamma(\mathrm{D}_{2n}, X)\big) = \begin{bmatrix} n & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Maka $C_{1,1}$ dari matriks Laplacian tersebut adalah:

$$C_{1,1} = (-1)^2 det[M_{1,1}]$$

dengan matriks $M_{1,1}$ memiliki banyaknya kolom n dan banyaknya baris n atau matriks dengan orde n sehingga:

$$C_{1,1} = (-1)^2 det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{1,1} = (-1)^2 (1)$$

$$C_{1,1} = 1$$

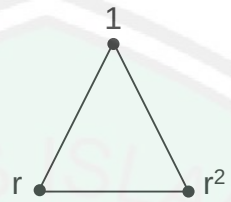
Maka berdasarkan teorema matriks pohon terbukti bahwa banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\tau(D_{2n}, X) = 1$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.3 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{2n}, X))$ dengan n Merupakan Bilangan Asli Ganjil dan $X = \{1, r, \dots, r^{n-1}\}$, $X \subseteq D_{2n}$

3.3.1 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_6, X))$

Diperoleh bentuk graf dari $\Gamma(D_6, \{1, r, r^2\})$ yaitu:



Gambar 3.5 $\Gamma(D_6, \{1, r, r^2\})$

Dari graf $\left(\Gamma(D_6, \{1, r, r^2\})\right)$ menghasilkan matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

$$A\left(\Gamma(D_6, \{1, r, r^2\})\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat sebagai berikut:

$$D\left(\Gamma(D_6, \{1, r, r^2\})\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik dan matriks derajat maka akan dicari matriks Laplacian yaitu dengan menggunakan persamaan:

$$T\left(\Gamma(D_6, \{1, r, r^2\})\right) = D\left(\Gamma(D_6, \{1, r, r^2\})\right) - A\left(\Gamma(D_6, \{1, r, r^2\})\right)$$

sehingga diperoleh matriks Laplacian dari $\left(\Gamma(D_6, \{1, r, r^2\})\right)$ sebagai berikut:

$$T\left(\Gamma(D_6, \{1, r, r^2\})\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan ditentukan banyaknya pohon rentangan dari $\Gamma(D_6, \{1, r, r^2\})$ dengan cara menentukan nilai kofaktor $C_{1,1}$ dari matriks Laplacian tersebut, yaitu:

$$\tau\left(\Gamma(D_6, \{1, r, r^2\})\right) = C_{1,1}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$C_{1,1} = (-1)^2 \, det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

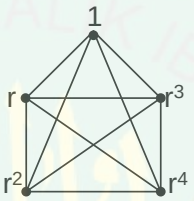
$$= (-1)^2(4 - (1))$$

$$= 3$$

Maka diperoleh bahwa banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_6, X)$ dengan $X = \{1, r, r^2\}$ adalah sebanyak 3 pohon rentangan.

3.3.2 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Commuting dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(\boldsymbol{D_{10}, X}))$

Diperoleh bentuk graf dari $\Gamma(D_{10}, \{1, r, r^2, r^3, r^4\})$ yaitu:



Gambar 3.1.6 $\Gamma(D_{10}, \{1, r, r^2, r^3, r^4\})$

Dari graf $\Gamma(D_{10}, \{1, r, r^2, r^3, r^4\})$ menghasilkan matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

$$A\big(\Gamma(D_{10}, \{1, r, r^2, r^3, r^4\})\big) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat sebagai berikut:

$$D\big(\Gamma(D_{10}, \{1, r, r^2, r^3, r^4\})\big) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik dan matriks derajat maka akan dicari matriks Laplacian yaitu dengan menggunakan persamaan:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$T\big(\Gamma(D_{10},\{1,r,r^2,r^3,r^4\})\big)$

$= D\big(\Gamma(D_{10},\{1,r,r^2,r^3,r^4\})\big) - A\big(\Gamma(D_{10},\{1,r,r^2,r^3,r^4\})\big)$

sehingga diperoleh matriks Laplacian dari $\Gamma(D_{10},\{1,r,r^2,r^3,r^4\})$ sebagai berikut:

$$T\big(\Gamma(D_{10},\{1,r,r^2,r^3,r^4\})\big) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan ditentukan banyaknya pohon rentangan dari $\Gamma(D_{10},\{1,r,r^2,r^3,r^4\})$ dengan cara menentukan nilai kofaktor $C_{1,1}$ dari matriks Laplacian tersebut, yaitu:

$\tau(D_{10},\{1,r,r^2,r^3,r^4\}) = C_{1,1}$

$$C_{1,1} = (-1)^2\, det \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^2 \left(4\, det \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} - det \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} - det \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 1\left(4\left(4\, det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right) + det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + 4\, det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$=1(4\big(4(15)\big) - 15 + 5 - (4(15))$

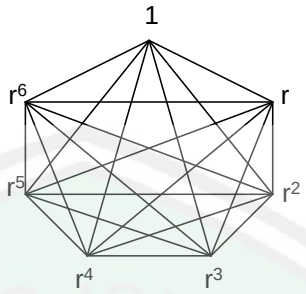
$=125$

Maka diperoleh bahwa banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{10},X)$ dengan $X = \{1,r,r^2,r^3,r^4\}$ adalah sebanyak 125 pohon rentangan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.3.3 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{14}, X))$

Diperoleh bentuk graf dari $\Gamma(D_{14}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})$ yaitu:



Gambar 3.7 $\Gamma(D_{14}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})$

Dari graf $\Gamma(D_{14}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})$ menghasilkan matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

$$A\left(\Gamma(D_{14}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat sebagai berikut:

$$D\left(\Gamma(D_{14}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})\right) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik dan matriks derajat maka akan dicari matriks Laplacian yaitu dengan menggunakan persamaan:

$T\left(\Gamma(D_{14}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})\right)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= D\left(\Gamma(D_{14}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})\right) - A\left(\Gamma(D_{14}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})\right)$

sehingga diperoleh matriks Laplacian dari $\Gamma(D_{14}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})$ sebagai berikut:

$$T\left(\Gamma(D_{14}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})\right) = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan ditentukan banyaknya pohon rentangan dari $\Gamma(D_{14}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})$ dengan cara menentukan nilai kofaktor $C_{1,1}$ dari matriks Laplacian tersebut, yaitu:

$\tau\left(\Gamma(D_{14}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})\right) = C_{1,1}$

$$C_{1,1} = (-1)^2 \, det \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

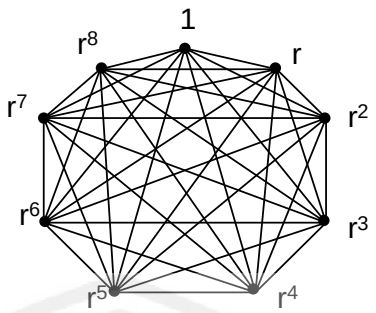
$$= (-1)^2 (16807)$$

Maka diperoleh bahwa banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{14}, X)$ dengan $X = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$ adalah sebanyak 16807 pohon rentangan**.**

3.3.4 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{18}, X))$

Diperoleh bentuk graf dari $\Gamma(D_{18}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\})$ yaitu:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.8 $\Gamma(D_{18}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\})$

Dari $\Gamma(D_{18}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\})$ menghasilkan matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

$$A\left(\Gamma(D_{18}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\})\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat sebagai berikut:

$$D\left(\Gamma(D_{18}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\})\right) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik dan matriks derajat maka akan dicari matriks Laplacian yaitu dengan menggunakan persamaan:

$$T\left(\Gamma(D_{18}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\})\right)$$

$$= D\left(\Gamma(D_{18}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\})\right) - A\left(\Gamma(D_{18}, \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\})\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sehingga diperoleh matriks Laplacian dari $\Gamma(D_{18},\{1,r,r^2,r^3,r^4,r^5,r^6,r^7,r^8\})$ sebagai berikut:

$$T\left(\Gamma(D_{18},\{1,r,r^2,r^3,r^4,r^5,r^6,r^7,r^8\})\right)=\begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan ditentukan banyaknya pohon rentangan dari $\Gamma(D_{18},\{1,r,r^2,r^3,r^4,r^5,r^6,r^7,r^8\})$ dengan cara menentukan nilai kofaktor $C_{1,1}$ dari matriks Laplacian tersebut, yaitu:

$$\tau\left(\Gamma(D_{18},\{1,r,r^2,r^3,r^4,r^5,r^6,r^7,r^8\})\right)=C_{1,1}$$

$$C_{1,1}=(-1)^2\,det\begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$=(-1)^2(4782969)$$

Maka diperoleh bahwa banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{18},X)$ dengan $X=\{1,r,r^2,r^3,r^4,r^5,r^6,r^7,r^8\}$ adalah sebanyak 4782969 pohon rentangan.

3.3.5 Pola Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{2n},X))$

Berdasarkan data yang diperoleh dari pembahasan di atas maka diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2 Banyaknya Pohon Rentangan pada $\Gamma(D_{2n},X)$ dengan n Bilangan Asli Ganjil dan $X=\{1,r,\cdots,r^{n-1}\}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\Gamma(\mathrm{D}_{2n}, X)$	$\tau(\Gamma(D_{2n}, X))$
$n = 3\ dan\ X = \{1, r, r^2\}$	3
$n = 5\ dan\ X = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$	125
$n = 7\ dan\ X = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$	16807
$n = 9\ dan\ X = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\}$	4782969
$\vdots$	$\vdots$
$n =$ bilangan asli ganjil dan $X = \{1, r, \cdots, \cdots r^{n-1}\}$	n^{n-2}

Teorema 2

Misalkan $\Gamma(\mathrm{D}_{2n}, X)$ merupakan graf *Commuting* pada grup dihedral dengan n bilangan asli ganjil dan $X = \{1, r, \cdots, r^{n-1}\}$ maka $\tau(D_{2n}, X) = n^{n-2}$

Bukti:

$\Gamma(\mathrm{D}_{2n}, X)$, dengan n bilangan asli ganjil dan $X = \{1, r, \ldots, r^{n-1}\}$ memuat titik $\{1, r, \ldots, r^{n-1}\}$ diketahui bahwa $r^i * r^j = r^j * r^i$, untuk $i \neq j$ dan $1 * r^i = r^i * 1$ maka $\Gamma(\mathrm{D}_{2n}, X)$ beroder n, sehingga dapat dibentuk matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

$$A\big(\Gamma(\mathrm{D}_{2n}, X)\big) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

sedangkan matriks derajatnya adalah:

$$D\big(\Gamma(\mathrm{D}_{2n}, X)\big) = \begin{bmatrix} n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

kemudian dapat ditentukan pula matriks Laplaciannya sebagai berikut:

$$T\left(\Gamma(\mathrm{D_{2n}}, X)\right) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}$$

Maka $C_{1,1}$ dari matriks Laplacian tersebut adalah:

$$C_{1,1} = (-1)^2 det[M_{1,1}]$$

dengan matriks $M_{1,1}$ memiliki banyaknya kolom $n-1$ dan banyaknya baris $n-1$ atau matriks dengan orde $n-1$ sehingga:

$$C_{1,1} = (-1)^2 det \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}$$

Melalui operasi baris elementer, $M_{1,1}$ direduksi menjadi matriks segitiga atas sehingga diperoleh:

$$M_{1,1} = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \frac{n(n-2)}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \cdots & \frac{-1}{n-1} \\ 0 & 0 & \frac{n(n-3)}{n-2} & \frac{-1}{n-2} & \cdots & \frac{-1}{n-2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{n(n-4)}{n-3} & \cdots & \frac{-1}{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n(n-(n-1))}{n-(n-2)} \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dimana det $M_{1,1}$ tidak lain adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut. Jadi:

$$C_{1,1} = (-1)^2(n-1)\left(\frac{n(n-2)}{(n-1)}\right)\left(\frac{n(n-3)}{(n-2)}\right)\left(\frac{n(n-4)}{(n-3)}\right)\cdots\left(\frac{n(n-(n-1))}{n-(n-2)}\right)$$

$$C_{1,1} = (-1)^2(n^{n-2})(n-(n-1))$$

$$C_{1,1} = (-1)^2(n^{n-2})(1)$$

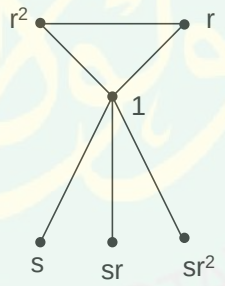
$$C_{1,1} = n^{n-2}$$

Maka berdasarkan teorema matriks pohon terbukti bahwa banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\tau(D_{2n}, X) = n^{n-2}$.

3.4 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral $\tau(\Gamma(D_{2n}, X))$ dengan n Merupakan Bilangan Asli Ganjil dan $X = \{D_{2n}\}, X \subseteq D_{2n}$

3.4.1 Banyaknya Pohon Rentangan pada *Commuting* Graf Dihedral $\tau(\Gamma(D_6))$

Diperoleh bentuk graf dari $\Gamma(D_6)$ yaitu:



Gambar 3.9 $\Gamma(D_6)$

Dari graf $(\Gamma(D_6))$ menghasilkan matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

$$A(\Gamma(D_6)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$D(\Gamma(D_6)) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik dan matriks derajat maka akan dicari matriks Laplacian yaitu dengan menggunakan persamaan:

$$T(\Gamma(D_6)) = D(\Gamma(D_6)) - A(\Gamma(D_6))$$

sehingga diperoleh matriks Laplacian dari $(\Gamma(D_6))$ sebagai berikut:

$$T(\Gamma(D_6)) = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

kemudian akan ditentukan banyaknya pohon rentangan dari $\Gamma(D_6)$ dengan cara menentukan nilai kofaktor $C_{1,1}$ dari matriks Laplacian tersebut, yaitu:

$$\tau(\Gamma(D_6)) = C_{1,1} = (-1)^2 \, det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

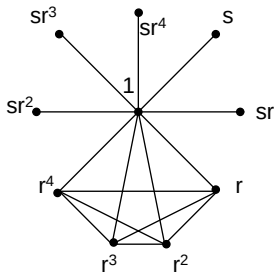
$$C_{1,1} = 3$$

Maka diperoleh bahwa banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_6)$ adalah sebanyak 3 pohon rentangan.

3.4.2 Banyaknya Pohon Rentangan pada *Commuting* Graf Dihedral $\tau(\Gamma(D_{10}))$

Diperoleh bentuk graf dari $\Gamma(D_{10})$ yaitu:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.10 $\Gamma(D_{10})$

Dari graf $(\Gamma(D_{10}))$ menghasilkan matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

$$A(\Gamma(D_{10})) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat sebagai berikut:

$$D(\Gamma(D_{10})) = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik dan matriks derajat maka akan dicari matriks Laplacian yaitu dengan menggunakan persamaan:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$T(\Gamma(D_{10})) = D(\Gamma(D_{10})) - A(\Gamma(D_{10}))$$

sehingga diperoleh matriks Laplacian dari $\Gamma(D_{10})$ sebagai berikut:

$$T(\Gamma(D_{10})) = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan ditentukan banyaknya pohon rentangan dari $\Gamma(D_{10})$ dengan cara menentukan nilai kofaktor $C_{1,1}$ dari matriks Laplacian tersebut, yaitu:

$$\tau(\Gamma(D_{10})) = C_{1,1} = (-1)^2 \, det \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

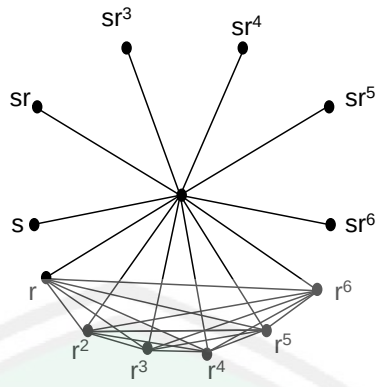
$$C_{1,1} = 125$$

Maka diperoleh bahwa banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{10})$ adalah sebanyak 125 pohon rentangan**.**

3.4.3 Banyaknya Pohon Rentangan pada *Commuting* Graf Dihedral $\tau(\Gamma(D_{14}))$

Diperoleh bentuk graf dari $\Gamma(D_{14})$ yaitu:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.11 $\Gamma(D_{14})$

Dari graf $\Gamma(D_{14})$ menghasilkan matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

$$A\big(\Gamma(D_{14})\big) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$D\left(\Gamma(D_{14})\right) = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik dan matriks derajat maka akan dicari matriks Laplacian yaitu dengan menggunakan persamaan:

$$T\left(\Gamma(D_{14})\right) = D\left(\Gamma(D_{14})\right) - A\left(\Gamma(D_{14})\right)$$

sehingga diperoleh matriks Laplacian dari $\Gamma(D_{14})$ sebagai berikut:

$$T\left(\Gamma(D_{14})\right) = \begin{bmatrix} 13 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan ditentukan banyaknya pohon rentangan dari $\Gamma(D_{14})$ dengan cara menentukan nilai kofaktor $C_{1,1}$ dari matriks Laplacian tersebut, yaitu:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

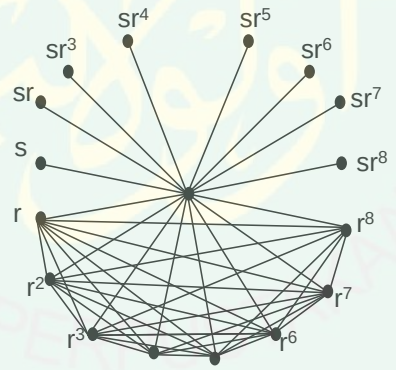
$$\tau(\Gamma(D_{14})) = C_{11} = 1\ det \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = 16807$$

Maka diperoleh bahwa banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{12})$ adalah sebanyak 16807 pohon rentangan**.**

3.4.4 Banyaknya Pohon Rentangan pada *Commuting* Graf Dihedral $\tau(\Gamma(D_{18}))$

Diperoleh bentuk graf dari $\Gamma(D_{18})$ yaitu:



Gambar 3.12 $\Gamma(D_{18})$

Dari graf $\Gamma(D_{18})$ menghasilkan matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$A\left(\Gamma(D_{18})\right) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat sebagai berikut:

$$D\left(\Gamma(D_{18})\right) = \begin{bmatrix}
17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks keterhubungan titik dan matriks derajat maka akan dicari matriks Laplacian yaitu dengan menggunakan persamaan:

$$T\left(\Gamma(D_{18})\right) = D\left(\Gamma(D_{18})\right) - A\left(\Gamma(D_{18})\right)$$

sehingga diperoleh matriks Laplacian dari $\Gamma(D_{18})$ sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$T\big(\Gamma(D_{18})\big) = \begin{bmatrix}
18 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

Kemudian akan ditentukan banyaknya pohon rentangan dari $\Gamma(D_{18})$ dengan cara menentukan nilai kofaktor $C_{1,1}$ dari matriks Laplacian tersebut, yaitu:

$\hat{o}\big(\Gamma(D_{18})\big) = C_{1,1}$

$$C_{1,1} = 1\ det \begin{bmatrix}
8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$C_{1,1} = 4782969$

Maka diperoleh bahwa banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{18})$ adalah sebanyak 4782969 pohon rentangan**.**

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.4.5 Pola Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral (D_{2n})

Berdasarkan data yang diperoleh dari pembahasan di atas maka diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 3.3 Banyaknya Pohon Rentangan pada $\Gamma(D_{2n})$ dengan n Bilangan Asli Ganjil dan $X = \{D_{2n}\}$

$\Gamma(D_{2n})$	$\hat{o}(\Gamma(D_{2n}))$
$n = 3$	3
$n = 5$	125
$n = 7$	16807
$n = 9$	4782969
⋮	⋮
n bilangan asli ganjil	n^{n-2}

Teorema 3

Misalkan $\Gamma(D_{2n}, X)$ dengan n bilangan asli ganjil $X = \{D_{2n}\}$

Maka $\tau(D_{2n}) = \tau(K_n) = n^{n-2}$

Bukti:

Misalkan $\Gamma(D_{2n})$, dengan n bilangan asli ganjil dan $X = \{D_{2n}\}$ memuat titik $\{1, r, \dots, r^n, sr, \dots, sr^{n-1}\}$ diketahui bahwa $r^i * r^j = r^j * r^i$, dan $1 * r^i = r^i * 1$, untuk $i \neq j$ serta $sr^i * sr^j \neq sr^j * sr^i$ dan $1 * sr^i = sr^i * 1$, untuk $i \neq j$ dengan demikian berarti bahwa $\Gamma(D_{2n}, X)$ beroder $2n$, sehingga dapat dibentuk matriks keterhubungan titik sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$A\big(\Gamma(\mathrm{D}_{2n}, X)\big) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

sedangkan matriks derajatnya adalah:

$$D\big(\Gamma(\mathrm{D}_{2n}, X)\big) = \begin{bmatrix} 2n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

kemudian dapat ditentukan pula matriks Laplaciannya sebagai berikut:

$$T\big(\Gamma(\mathrm{D}_{2n}, X)\big) = \begin{bmatrix} 2n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Maka $C_{1,1}$ dari matriks Laplacian tersebut adalah:

$$C_{1,1} = (-1)^2 det[M_{1,1}]$$

dengan matriks $M_{1,1}$ memiliki banyaknya kolom $2n-1$ dan banyaknya baris $2n-1$ atau matriks dengan orde $2n-1$ sehingga:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$C_{1,1} = (-1)^2 det \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

melalui operasi baris elementer, $M_{1,1}$ direduksi menjadi matriks segitiga atas sehingga diperoleh:

$$M_{1,1} = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n(n-2)}{n-1} & \cdots & \frac{-n}{(n-1)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{n(n-(n-1))}{n-(n-2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

dimana det $M_{1,1}$ tidak lain adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut. Jadi:

$$C_{11} = (n-1) \times \left(\frac{n(n-2)}{n-1}\right) \times \cdots \times \left(\frac{n\big(n-(n-1)\big)}{n-(n-2)}\right) \times 1 \times 1 \times 1 \times \cdots \times 1$$

$$C_{11} = (n^{n-2})\big(n-(n-1)\big)(1)$$

$$C_{11} = (n^{n-2})(1)(1)$$

$$C_{11} = n^{n-2}$$

maka berdasarkan teorema matriks pohon terbukti bahwa banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\tau(D_{2n}, X) = \tau(K_n) = n^{n-2}$

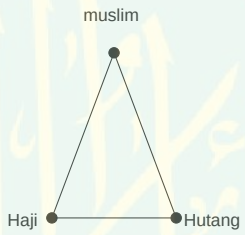
3.5 Kajian Graf Pohon Rentangan untuk Memudahkan Mengurai Masalah Prioritas Pelaksanaan Haji atau Pembayaran Hutang

Kajian graf pohon rentangan dapat diaplikasikan dalam berbagai hal dalam kehidupan salah satunya ialah membantu mengurai masalah pokok dan menetukan cabang-cabangnya,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

menententukan banyaknya model pemecahan masalah berurutan, dan masih banyak lagi aplikasinya, dalam pembahasan ini akan sedikit dibahas mengenai fungsi graf pohon dalam membantu mengurai permasalahan dalam permasalahan fiqih prioritas.

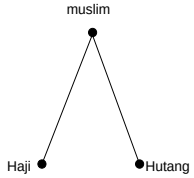
Dimisalkan seorang muslim mendapati permasalahan fiqih, dia meiliki hutang kepada tetangganya, sekaligus ingin naik haji, dia kebingungan dalam menentukan permasalahan mana yang harus dia selesaikan terlebih dahulu. Adapun permasalahan tersebut dapat digambarkan dalam sebuah graf $G(V,E)$ dimana V merupakan himpunan titik-titik manusia dengan permasalahannya dan E adalah himpunan garis prioritas penyelesaian masalah. Sehingga graf tersebut dapat disajikan dalam bentuk graf sebagai berikut:



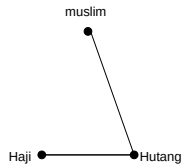
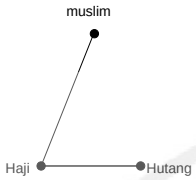
Gambar 3.13 Graf Permasalahan Muslim

Berdasarkan gambar 3.13 maka dapat dikatakan bahwa graf tersebut memiliki bentuk graf komplit-3 (K_3) sehingga dapat ditentukan pohon rentangan dari graf tersebut mengikuti rumus banyaknya pohon rentangan pada graf komplit-n yaitu $K_n = n^{n-2}$, maka diperoleh tiga pohon rentangan dalam graf tersebut, hal ini berarti bahwa terdapat tiga pilihan solusi penyelesaian masalah tersebut yaitu:

Tabel.3.4 Graf Pohon Rentangan sebagai Alternatif Solusi dari Graf Permasalahan Muslim

Graf pohon rentangan dari graf permasalahan muslim	Interpretasi penulis terhadap graf permasalahan muslim
	Solusi 1: muslim tersebut memberi prioritas yang sama terhadap pelaksanaan haji dan pembayaran hutang

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

	Solusi 2: muslim tersebut memberi prioritas pembayaran hutang kemudian pelaksanaan haji
	Solusi 3: muslim tersebut memberi prioritas pelaksanaan haji kemudian pembayaran hutang

Kemudian dari ketiga pilihan solusi tersebut maka dapat ditentukan pilihan terbaik yaitu solusi kedua, dimana muslim harus memprioritaskan pembayaran hutang sebelum melaksanakan haji. Muslim yang mempunyai hutang tidak boleh mendahulukan ibadah haji sampai dia membayar hutangnya, kecuali bila dia meminta izin kepada orang yang mempunyai piutang, atau dia meminta pembayaran utang itu ditunda, dan dia meyakinkannya bahwa dia mampu membayar utang itu tepat pada waktunya (Al Qardhawy, 1996:4).

Dalam sebuah hadits shahih disebutkan,

"Semua dosa orang yang mati syahid akan diampuni kecuali utangnya."

hadits yang diriwayatkan oleh Muslim dari Abu Qatadah dalam al-Imarah (1885) ini disebutkan bahwa ada seorang lelaki berkata, "Wahai Rasulullah, apakah engkau melihat bahwa apabila aku gugur di medan pertempuran dalam membela agama Allah maka dosa-dosaku akan diampuni semuanya oleh Allah Swt., maka Rasulullah Saw. bersabda, "Ya, jika engkau terbunuh di medan pertempuran dalam membela agama Allah, dan engkau teguh dalam menghadapinya dan tidak melarikan diri. " Kemudian Rasulullah Saw. bersabda, "Apa yang engkau katakan tadi?" Lelaki itu kemudian mengulangi pertanyaannya, dan Rasulullah Saw. yang mulia mengulangi jawabannya sambil menambahkan, "Kecuali hutang, karena sesungguhnya Jibril a.s. berkata kepadaku tentang itu".

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dalam ulasan hadits di atas dijelaskan bahwa diampuni dosa-dosa dari seseorang yang wafat dalam berjihad, kecuali perkara hutang. Dalam keadaan wafat tertinggi (wafat dalam jihad) ini, Allah Swt. lantas tidak serta merta menghapus perkara hutangnya. Ini menandakan bahwa hukum fardhu a'in terhadap sesama manusia haruslah terselesaikan terlebih dahulu. Fardhu a'in yang memuat hak-hak manusia haruslah mendapat prioritas yang lebih utama dibandingkan fardhu a'in yang memuat hak-hak Allah Swt semata (Al Qardhawy, 1996:4).

Oleh karena hal tersebut, maka dapat disimpulkan bahwa ketika muslim dihadapkan pada permasalahan mana yang harus didahulukan antara pembayaran hutang atau pelaksanaan haji berdasarkan fiqih prioritas hendaklah muslim tersebut mendahulukan pembayaran hutangnya lantas baru melaksanakan ibadah haji.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada penelitian ini, maka dapat diambil kesimpulan mengenai banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{2n}, X)$ yaitu sebagai berikut:

a. Adapun langkah-langkah untuk mengaplikasikan teorema matriks pohon dalam menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{2n}, X)$ adalah sebagai berikut:

1. Diberikan grup dihedral D_{2n} dan $X \subseteq D_{2n}$,
2. Menentukan bentuk graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{2n}, X)$,
3. Menentukan matriks keterhubungan titik graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{2n}, X)$,
4. Menentukan matriks Derajat graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{2n}, X)$,
5. Menentukan matriks Laplacian graf *commuting* dari grup dihedral $\Gamma(D_{2n}, X)$,
6. Mencari banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\tau(\Gamma(D_{2n}, X))$ dengan mencari nilai kofaktor $C_{n,n}$ dari matriks Laplacian,
7. Mengamati dan menentukan pola yang terbentuk dari banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* grup dihedral $\tau(\Gamma(D_{2n}, X))$,
8. Membuat dugaan (konjektur) berdasarkan perhitungan yang ditemukan dengan membuat tabel dan merumuskan konjektur sebagai suatu teorema,
9. Menghasilkan suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.

b. Banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\tau(\Gamma(D_{2n}, X)) = 1$ dengan n bilangan ganjil dan $X = \{1, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

c. Banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\tau\big(\Gamma(D_{2n}, X)\big) = n^{n-2}$ dengan *n* bilangan ganjil dan $X = \{1, r, \dots, r^{n-1}\}$.

d. Banyaknya pohon rentangan pada graf *commuting* dari grup dihedral $\tau\big(\Gamma(D_{2n}, D_{2n})\big) = \tau(K_n) = n^{n-2}$ dengan *n* bilangan ganjil dan $X = \{D_{2n}\}$.

4.2 Saran

Dalam penulisan penelitian ini, penulis hanya membatasi pembahasan dari *commuting* graf dari grup dehidral dengan n bilangan asli ganjil. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kepada pembaca untuk mengembangkannya lebih luas dan menyeluruh untuk n bilangan genap dan pada graf *noncommuting* grup dihedral.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Agnarsson, G. dan Greenlaw, R.. 2007. *Graph Teory : Modeling, Applications, and Alghoritms.* New Jersey: Pearson Prentice Hall

Al-Banna, A.S.I.H. 2010. *Tafsir Hasan Al-Banna*. Jakarta: Suara Agung.

Al-Qardawy, Y.. 1996. Sebuah Kajian Baru Berdasarkan Al-Qur'an dan As-Sunnah. Jakarta: Robbani press

Anton, H.. 1997. Aljabar Linear Elementer. Jakarta: Erlangg

Budayasa, I. K.. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya.* Surabaya: Unesa University Press

Chartrand, G. dan Lesniak, L.. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Chelvam, T.T., Selvakumar, K., dan Raja, S.. 2011. Commuting Graph on Dihedral Group. *The Journal of Matematics and Computer Science*, 2:402-404.

Imani, A.K.F. 2006. *Tafsir Nurul Quran*. Jakarta: Al-Huda.

Munir, R.. 2005. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.

Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Quthb, S. S. 2000. *Tafsir fi Zhilalil-Qur'an di bawah Naungan Al-Qur'an Jilid 1-10*. Jakarta: Gema Insani Press.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG