PEWARNAAN MINIMAL GRAF PIRAMIDA DAN BERLIAN

SKRIPSI

Oleh:
YUSUF AFANDI
NIM: 03510007

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
2009

PEWARNAAN MINIMAL GRAF PIRAMIDA DAN BERLIAN

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :
YUSUF AFANDI
NIM: 03510007

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009

PEWARNAAN MINIMAL GRAF PIRAMIDA DAN BERLIAN

Oleh:

YUSUF AFANDI
NIM: 03510007

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 14 April 2009

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Evawati Alisah, M.Pd	**Munirul Abidin, M.Ag**
NIP 150 291 271	**NIP 150 321 634**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si

NIP 150 318 321

PEWARNAAN MINIMAL GRAF PIRAMIDA DAN BERLIAN

SKRIPSI

Oleh:
YUSUF AFANDI
NIM. 03510007

Telah Dipertahankan di depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 14 April 2009

Susunan Dewan Penguji		Tanda Tangan
1. **Penguji Utama**	**Wahyu H. Irawan, M.Pd** **NIP. 150 300 415**	( )
2. **Ketua**	**Abdussakir, M.Pd** **NIP. 150 327 247**	( )
3. **Anggota**	**Evawati Alisah, M.Pd** **NIP. 150 291 271**	( )
4. **Sekretaris**	**Munirul Abidin, M.Ag** **NIP. 150 321 634**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : YUSUF AFANDI

NIM : 03510007

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 04 April 2009

Yang membuat pernyataan

Yusuf Afandi

NIM. 03510007

MOTTO

فَسَبِّحْ بِحَمْدِ رَبِّكَ وَٱسْتَغْفِرْهُ ۚ إِنَّهُۥ كَانَ تَوَّابًۢا ﴿٣﴾

Maka bertasbihlah dengan memuji Tuhanmu dan mohonlah ampun kepada-Nya. Sesungguhnya Dia adalah Maha Penerima taubat.

Persembahan

Skripsi ini spesial saya persembahkan sebagai terima kasih terdalamku untuk kedua orang tua, ibuku tercinta Kamilatun dan bapakku H. Zainal Abidin suri tauladanku, yang telah mewakili Allah dalam mendidiku didunia ini. Kakak-kakakku Muhammad Yasin, Imam Bashori, Dewi Mahmudah A, Agus Munir (alm), dan Syamsul Arifin, dan kakak iparku mbak Anis, mbak Preh & mas Huda terimakasih telah membimbing adikmu ini. Keponakanku Lutfi, Fikri, Fahmi, Roni, Hafid, Aisy, Rossy, Ilham, Dina, dan Abi, semoga kalian semua bisa berkarya lebih & menjadi orang yang berguna bagi Bangsa & Agama.

Untuk "*motivasi*" terbesarku de Fatim, trimakasih atas semuanya. Hidup memang penuh liku-liku semoga kita bisa hadapi semua dengan tulus & ikhlas. Harapan adalah impian, yang harus diperjuangkan sampai kita bisa meraihnya.

Semua teman teman yang pernah menemaniku dalam keceriaan dan kesedihan. Kokok, Fuad, Ichenk, Fatur *kapan kita touring lagi*. Temen2 ngopi Asoy, Abenk, Okta, Bolang *jangan kebanyakan ngopi thok*. Nyong, Yik, Bembeng *diajari ngenet donk & semoga cepet lulus.*

Sahabat sahabat PMII khususnya GALILEO, matur suwun waktu yang telah kalian berikan untuk kita belajar bersama, tanpa berproses bersama kalian aku tidak akan menjadi seperti sekarang ini. Maju terus PMII, VIVA GALILEO!!!

Dan untuk seluruh keluarga & temen2ku yang tidak bisa saya sebut semua terimakasih atas seluruh motivasi dan inspirasi yang kalian berikan.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "PEWARNAAN MINIMAL GRAF PIRAMIDA DAN BERLIAN" ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
4. Ibu Evawati Alisah, M.Pd. selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
5. Bapak Munirul Abidin, M.Ag selaku dosen pembimbing keagamaan, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.

6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf UIN Malang.
7. Ibu, Ayah, kakak – kakak tercinta dan keponakan ku serta seluruh keluarga yang dengan sepenuh hati memberikan dukungan moril maupun spiritual serta ketulusan do'anya sehingga penulisan skripsi ini dapat diselesaikan.
8. Dewi Fatimah, terima kasih atas semua bantuan, semangat dan do'a yang telah diberikan
9. Kokok, Rizal, Rohman, Fuad, Toni, Okta dan semua teman-teman kost yang telah memberikan bantuan, semangat, dorongan dalam menyelesaian skripsi ini.
10. Teman-teman matematika angkatan 2003 yang telah memberikan bantuan, semangat, dorongan dan kebersamaan selama kuliah di UIN Malang.

Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amien.

Malang, 04 April 2009

Penulis.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Afandi,Yusuf. 2008. **Pewarnaan Minimal Graf Piramida dan Berlian.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang. Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Munirul Abidin, M.Ag

Kata Kunci: Pewarnaan titik, Pewarnaan sisi, Graf Piramida, Graf Berlian, Bilangan Kromatik

Pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian warna untuk setiap titik pada graf sehingga tidak ada dua titik yang terhubung langsung berwarna sama. Pada pewarnaan sisi untuk G adalah pemberian warna pada sisi-sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang bertemu pada titik yang sama mendapatkan warna berbeda. Sedangkan pewarnaan peta adalah pemberian warna yang berbeda untuk dua daerah yang bersisian (bersekutu pada satu sisi). Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk menjelaskan cara mendeskripsikan bilangan kromatik pada pewarnaan titik dan sisi pada graf Piramida dan graf Berlian.

Langkah-langkah yang dilakukan adalah; a. Menentukan bilangan kromatik pada beberapa kasus, b. Menentukan pola dari bilangan kromatik pada langkah (a), c. Pola yang diperolah diasumsikan sebagai teorema, dan d. Teorema dibuktikan.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh bilangan kromatik pewarnaan titik dan sisi pada graf Piramida Pr_n masing-masing adalah

$$\chi(\mathrm{Pr}_n) = 3, \ \forall n \in N \ \text{ dan}$$

$$\chi'(\mathrm{Pr}_n) = \begin{cases} 3 & \text{untuk n } = 1 \\ 4 & \text{untuk n } = 2 \\ 6 & \text{untuk n } > 2 \end{cases}$$

untuk n bilangan asli. Bilangan kromatik pewarnaan titik dan sisi pada graf Berlian Dn_n masing-masing adalah

$$\chi \ (Dn_n) = 3, \ \ \forall \ \ n \in \mathrm{N} \ \text{ dan}$$

$$\chi'\left(Dn_n\right) = 6, \forall n \in N$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ada banyak tuntutan yang harus dilaksanakan oleh setiap muslim dalam kehidupan di dunia ini, salah satunya adalah keharusan menjalin hubungan yang baik kepada Allah (hablum minAllah), hubungan yang baik dengan manusia (hablum minannas) dan hubungan yang baik dengan alam (hablum minal'alam). Hal ini ditekankan karena manusia sangat membutuhkan Tuhan dan Tuhan yang sesungguhnya adalah Allah SWT, di samping itu manusia juga tidak dapat hidup sendirian, karenanya ia membutuhkan manusia lain yang dapat berinteraksi secara baik untuk mewujudkan kehidupan yang baik. Di dalam Al-Qur'an, Allah SWT berfirman:

۞ وَٱعْبُدُوا۟ ٱللَّهَ وَلَا تُشْرِكُوا۟ بِهِۦ شَيْـًٔا ۖ وَبِٱلْوَٰلِدَيْنِ إِحْسَٰنًا وَبِذِى ٱلْقُرْبَىٰ وَٱلْيَتَٰمَىٰ
وَٱلْمَسَٰكِينِ وَٱلْجَارِ ذِى ٱلْقُرْبَىٰ وَٱلْجَارِ ٱلْجُنُبِ وَٱلصَّاحِبِ بِٱلْجَنۢبِ وَٱبْنِ ٱلسَّبِيلِ
وَمَا مَلَكَتْ أَيْمَٰنُكُمْ ۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُحِبُّ مَن كَانَ مُخْتَالًا فَخُورًا ﴿٣٦﴾

Artinya: *"Sembahlah Allah dan janganlah kamu mempersekutukan-Nya dengan sesuatupun. dan berbuat baiklah kepada dua orang ibu-bapa, karib-kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga yang dekat dan tetangga yang jauh, dan teman sejawat, ibnu sabil dan hamba sahayamu. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang sombong dan membangga-banggakan diri"* (An-Nisa':36).

Dalam ayat di atas, manusia harus menyembah Allah SWT dan menunjukkan pengabdian kepada-Nya dengan semurni-murninya sehingga ia tidak boleh mempersekutukan Allah dengan apapun dan siapapun juga. Menjalin hubungan baik kepada Allah SWT bagi manusia merupakan sesuatu yang sangat mendasar. Manusia telah dicipta oleh Allah SWT, maka ia harus menyembah dan mengabdi kepada sang pencipta sebagai ungkapan rasa syukur kepada Allah SWT.

Menurut agama Islam, Tuhan itu ada dan tunggal. EksistensiNya ada (wujud) dan di luar nalar manusia, sehingga wujudnya seperti apa tidak boleh diinterpretasikan. Sehingga umat Islam mengenal Allah (ma'rifatullah) adalah melalui ciptaan-ciptaanNya. Jadi umat Islam diwajibkan untuk mempelajari ciptaanNya (science) untuk lebih mengenalNya. Melalui ilmu pengetahuan dengan menggunakan akal yang telah dianugerahkan kepada manusia, kita dapat meningkatkan keimanan dan ketaqwaan terhadap Allah SWT.

Dalam keterkaitan hubungan manusia dengan Tuhan, manusia dengan manusia dari gambaran tersebut tersimpan filosofi bahwa manusia tidak dapat hidup sendiri. Manusia adalah Makhluk sosial yang artinya ada keterhubungan atau garis sebuah timbal balik antara satu dengan lainya. Hubungan antara titik satu dengan titik lain yang dihubungkan dengan sebuah garis (sisi) itulah arti dari sebuah keterhubungan.

Matematika merupakan salah satu ilmu yang erat kaitannya dengan kehidupan. Secara garis besar matematika bisa dibagi dalam dua kategori yaitu matematika diskrit dan kontinu. Salah satu bagian dari matematika diskrit yang menarik adalah teori graf. Disadari atau tidak, banyak aplikasi teori graf dalam kehidupan. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang mempelajari mengenai hubungan himpunan tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi.

Banyak sekali struktur yang dapat direpresentasikan dengan graf dan banyak masalah yang dapat diselesaikan dengan bantuan graf. Jika titik-titik tersebut diasumsikan sebagai suatu elemen dalam islam yakni Allah dan ciptaanNya (Manusia dan alam), maka suatu sisi dalam graf dapat diasumsikan sebagai hubungan antara titik-titik tersebut. Jadi dapat dipelajari bagaimana hubungan antara manusia dengan Allah, manusia dengan sesamanya dan juga manusia dengan alam secara lebih sederhana. Tak kalah menariknya jika manusia mempelajari mengenai masalah pewarnaan pada graf.

Banyak persoalan yang mempunyai karakteristik seperti pewarnaan graf sehingga membuat pewarnaan pada graf ini menarik untuk dikaji lebih dalam. Misalnya dalam mengatur sejumlah saluran frekuensi ke beberapa pemancar sehingga interferensi dapat dijaga pada level yang dapat diterima. Contoh yang mungkin dapat dilihat langsung misalnya menentukan jadwal ujian sedemikian sehingga semua mahasiswa dapat mengikuti ujian setiap mata kuliah yang diambilnya dengan waktu ujian yang tidak bertabrakan antara satu mata kuliah dengan mata kuliah yang lain.

Masalah pewarnaan di dalam graf memiliki banyak variasi dengan tipe yang berbeda. Ada bilangan kromatik dan pewarnaan dengan teorema Ramsey. Ada tiga macam pewarnaan graf, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah (region). Dalam persoalan pewarnaan graf, tidak hanya sekedar mewarnai titik-titik atau sisi dengan warna berbeda dari warna simpul atau sisi tetangganya saja, namun juga dapat menginginkan jumlah macam warna yang digunakan sesedikit mungkin.

Jumlah warna minimum yang dibutuhkan untuk mewarnai graf disebut bilangan kromatik (χ). Sebagai contoh, bilangan kromatik dari graf lengkap K_m dengan m simpul (graf sederhana yang setiap simpulnya memiliki sisi ke semua simpul lainnya), adalah χ (K_m) = m. Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf G, dinyatakan dengan $\chi(G)$, adalah bilangan m terkecil sehingga G dapat diwarnai dengan m warna. Biasanya warna-warna yang digunakan untuk mewarnai suatu graf dinyatakan dengan 1, 2, 3, …, m. Jelas bahwa χ (G) ≤ $|V(G)|$ (Purwanto, 1998:73).

Pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian warna untuk setiap titik pada graf sehingga tidak ada dua titik yang terhubung langsung berwarna sama (Rosen dalam Khotimah, 2006:3). Pewarnaan sisi untuk G adalah pemberian warna pada sisi-sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang bertemu pada titik yang sama mendapatkan warna berbeda (Wilson dan Watkins, 1990:240).

Bahasan mengenai pewarnaan pada graf tidak hanya difokuskan pada beberapa jenis graf itu sendiri, akan tetapi juga dapat diaplikasikan pada kehidupan sehari-hari yang dapat membantu dan memudahkan. Di antaranya pada pemasangan kabel telefon, pada masalah penjadwalan, pewarnaan peta dan masih banyak lagi.

Beberapa kajian terdahulu tentang pewarnaan pada graf tertentu telah dibahas pada skripsi yang lain seperti Pewarnaan Titik dan Aplikasinya pada Penjadwalan Mata Kuliah Jurusan Matematika oleh Khotimah (2006), Pewarnaan

Titik pada Graf yang Berkaitan dengan Sikel oleh Ghofur (2008) dan Pewarnaan pada graf Buku & graf Tangga telah dikaji oleh Wahyudi (2008). Kajian ini difokuskan pada pencarian bilangan kromatik dalam pewarnaan titik dan sisi pada graf Piramida dan Berlian, serta membuktikannya.

Pemilihan judul "Pewarnaan Minimal Graf Piramid dan Berlian" didasari untuk melanjutkan penelitian sebelumnya dan membuktikan bahwa untuk mewarnai suatu graf (seberapa banyak titik & sisinya) dapat digunakan macam warna yang minimum.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah:

1. Bagaimana menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik dan sisi pada graf Piramid?
2. Bagaimana menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik dan sisi pada Berlian?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian skripsi ini antara lain:

1. Mendeskripsikan cara menentukan bilangan kromatik titik dan sisi pada pewarnaan graf Piramida.
2. Mendeskripsikan cara menentukan bilangan kromatik titik dan sisi pada pewarnaan graf Berlian.

1.4 Batasan Masalah

Dengan melihat permasalahan yang telah dipaparkan di atas, terdapat batasan masalah yang digunakan sebagai acuan dalam penyelesaian tugas akhir ini, yaitu terletak pada pewarnaan titik dan sisi pada graf Piramida dan graf Berlian

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Jurusan Matematika

   Hasil pembahasan ini dapat digunakan sebagai tambahan bahan dalam pengembangan ilmu matematika khususnya di kalangan mahasiswa jurusan matematika.

2. Peneliti

   Melalui penelitian ini dapat menambah penguasaan materi, sebagai pengalaman dalam melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah dalam bentuk skripsi, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya.

3. Pengembangan ilmu pengetahuan

   Menambah khasanah dan mempertegas keilmuan matematika dalam peranannya terhadap perkembangan teknologi dan disiplin ilmu lain.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian perpustakaan (*library research*), yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam materi yang terdapat di ruangan perpustakaan, seperti buku-buku, majalah, dokumen, catatan dan kisah-kisah sejarah dan lain-lainnya.

Adapun langkah – langkah umum yang dilakukan penulis adalah

1. Merumuskan masalah yang akan dibahas
2. Mengumpulkan sumber – sumber dan informasi dengan cara membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan graf Piramida dan graf Berlian serta pewarnaan titik dan sisi pada graf
3. Menganalisa permasalahan yang telah diperoleh dengan mendeskripsikan permasalahan. Selanjutnya mendapatkan teorema yang di buktikan
4. Merumuskan kesimpulan dari hasil analisis teorema yang telah buktikan
5. Langkah terakhir dari penelitian ini adalah menyusun laporan dari penelitian dalam bentuk tugas akhir

Sebagai literatur utama, penulis menggunakan buku *Graph & Digraph 2nd Edition* (Chartrand & Lesniak), *Matematika Diskrit* (Purwanto), dan *Graf Pengantar* (Wilson & Watkin). Sedangkan sebagai literatur pendukung adalah semua buku atau sumber lain yang berhubungan dengan pewarnaan graf.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika sebagai berikut:

Pada bab I penulis mengkaji tentang pendahuluan yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Pada bab II mengenai Kerangka Teori penulis mengkaji tentang konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang graf, operasi pada graf, graf terhubung, graf Piramid, graf Berlian dan pewarnaan pada graf.

Dalam bab III penulis mengkaji tentang pembahasan yang terdiri dari bagaimana menentukan bilangan kromatik pada pewarnaan titik dan sisi pada graf piramid dan graf Berlian serta membuktikannya. Kajian Agama Islam tentang pewarnaan pada graf akan dibahas juga dalam bab ini. Untuk bab IV tentang kesimpulan dan saran yang penulis peroleh dalam melakukan penulisan karya ilmiah sebagai penutup.

BAB II

KAJIAN TEORI

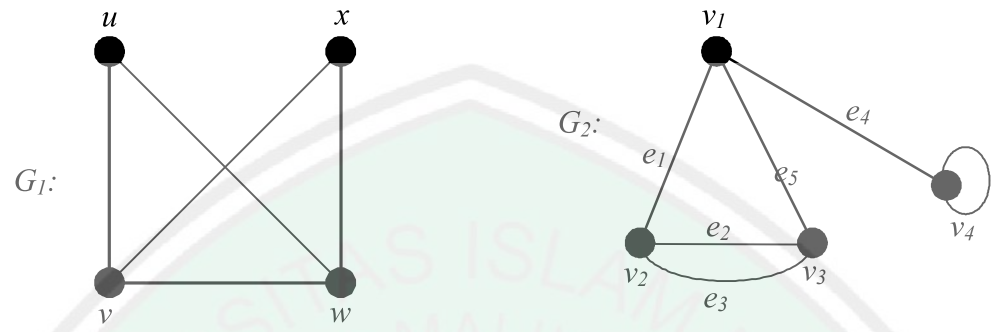
2.1 Graf

2.1.1. Definisi Graf

Graf G adalah pasangan himpunan (V,G) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Dari uraian di atas, maka suatu graf tidak boleh mempunyai sisi rangkap dan loop. Sisi rangkap dari suatu graf adalah jika dua titik yang dihubungkan oleh lebih dari satu sisi. Sedangkan yang disebut dengan *loop* adalah suatu sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri (Suryanto dalam Fitria, 2007: 6). Graf yang mempunyai sisi rangkap dan loop disebut *multigraf*.

Contoh 2.1



a. Graf

b. Multigraf

Gambar 2.1 Graf dan Multigraf

2.1.2. Definisi *Adjacent* dan *Incident*

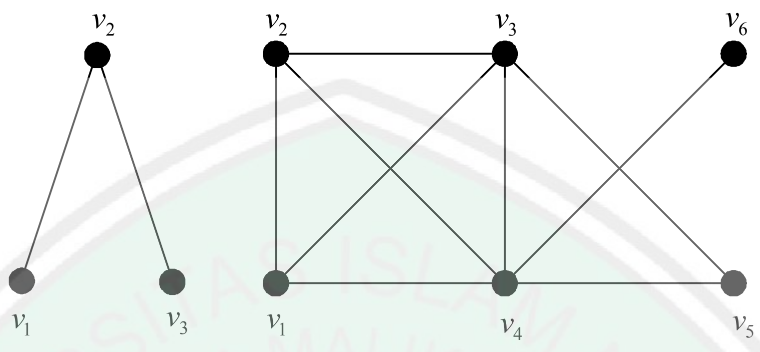
Sisi $e = (u,v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u,v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4)

Dari Gambar 2.1 pada G_2, titik v_1 dan sisi e_1, e_5 dan e_4 adalah *incident* dengan titik v_2, v_3, v_4. Sedangkan titik v_1 dan v_4 adalah *adjacent* tetapi v_4 dan v_2 tidak.

2.1.3. Definisi Derajat

Derajat suatu titik v pada sebuah graf G, ditulis dengan $\deg_G(v)$, adalah jumlah sisi yang terkait langsung (*incident*) pada v. Dengan kata lain, jumlah sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah $\deg_G(v)$ genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh 2.2



Gambar 2.2 Graf dengan Derajat Titik

Pada Gambar 1 :	- **deg (v_1) = 1** - **deg (v_2) = 2** - **deg (v_3) = 1**	**Pada Gambar 2 :**	- **deg (v_1) = 3** - **deg (v_2) = 3** - **deg (v_3) = 4** - **deg (v_4) = 5** - **deg (v_5) = 2** - **deg (v_6) = 1**

Teorema 1

Jika G dengan (p, q) adalah graf, dimana $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

maka $\sum_{i=1}^{p} deg_G(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:7-8).

Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik, jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Teorema 2

Pada sebarang graf, banyak titik berderajat ganjil adalah genap.

Bukti:

Misalkan graf G dengan ukuran q. Maka ambil W yang memuat himpunan titik ganjil pada G serta U yang memmuat himpunan titik genap di G.

Dari Teorema 1 maka diperoleh:

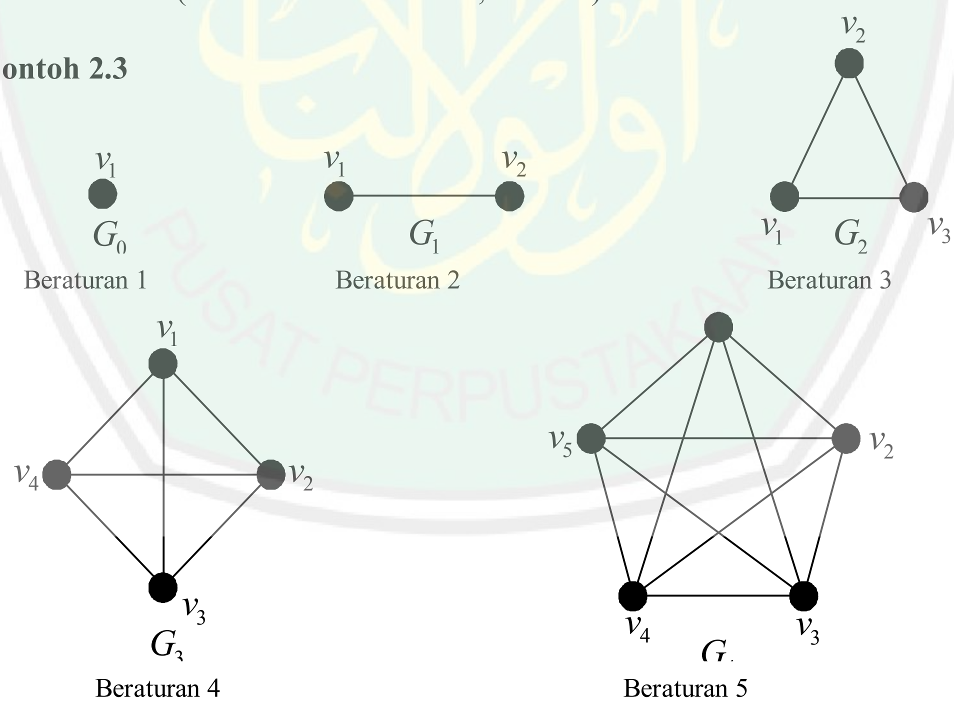
$$\sum_{v \in v(G)} deg_G\ v = \sum_{v \in W} deg_G\ v + \sum_{v \in U} deg_G\ v = 2q$$

dengan demikian karena $\sum_{v \in U} deg_G\ v$ genap, maka $\sum_{v \in W} deg_G\ v$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap.

2.1.4. Definisi Graf Beraturan -*r*

Graf beraturan – r adalah graf yang semua titiknya berderajat r, $deg\ v = r$. $\forall r \in G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 9)

Contoh 2.3

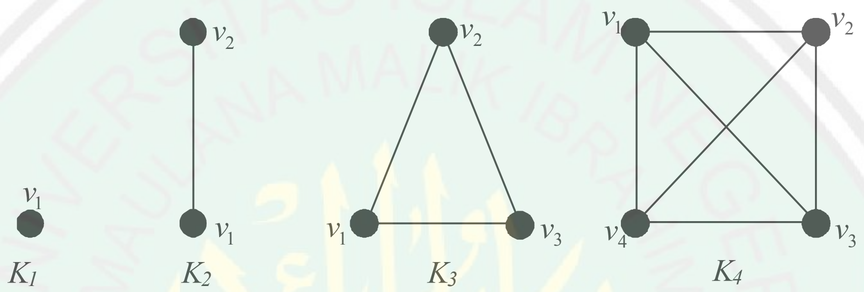


Gambar 2.3 Graf Komplit beraturan 1-5

2.1.5. Definisi Graf Komplit

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf yang dua titiknya saling berdekatan atau terhubung langsung (*adjacent*). Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Chartrand dan Lesniak, 1986:9).

Contoh 2.4



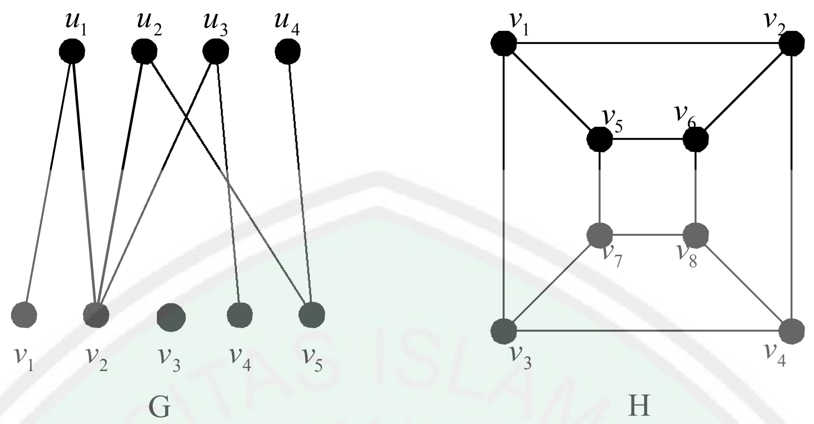
Gambar 2.4 Graf Komplit

2.1.6. Definisi Graf Bipartisi

Graf bipartisi (*bipartite graph*) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisahkan menjadi dua himpunan tak kosong X dan Y sehingga masing-masing sisi di graf tersebut menghubungkan satu titik di X dan satu titik di Y, X dan Y disebut himpunan partisi (Purwanto, 1998:21).

Contoh 2.5

G adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $X = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $Y = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ demikian juga H adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $X = \{v_1, v_4, v_6, v_7,\}$ dan $Y = \{ v_{2,}, v_3 , v_5, v_6 \}$.



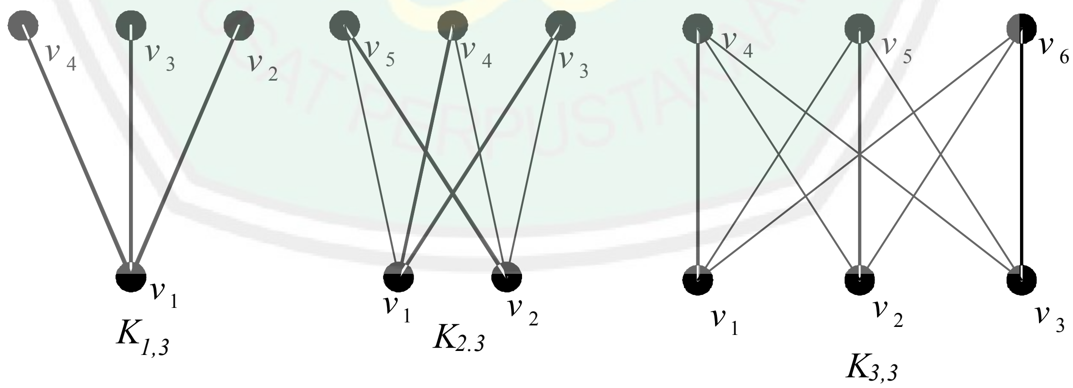
Gambar 2.5 Graf Bipartisi

2.1.7. Definisi Graf Bipartisi Komplit

Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y, dimana $|X| = m$ dan $|Y| = n$ yang dinotasikan dengan $K_{m,\,n}$. Graf $K_{(m,\,n)}$ disebut graf bintang dan ditulis S_n (Chartrand dan Lesniak, 1986:10).

Contoh 2.6

Graf $K_{1,3}$, $K_{2.3}$, *dan* $K_{3,3}$



Gambar 2.6 Graf Bipartisi Komplit

Pada $K_{1,3}$ graf Bipartisi Komplit v_1 terhubung dengan v_2, v_3, v_4, tapi v_2, v_3, v_4,tidak bertetangga (tidak terhubung). Pada $K_{2,3}$ v_1,v_2 saling terhubung langsung dengan v_3, v_4, v_5, tapi v_1, v_2 dan v_3, v_4, v_5 tidak bertetangga (tidak terhubung) dan pada $K_{3,3}$ v_1, v_2, v_3 saling terhubung langsung dengan v_4, v_5, v_6, tapi v_1, v_2, v_3 dan v_4, v_5, v_6 tidak bertetangga (tidak terhubung).

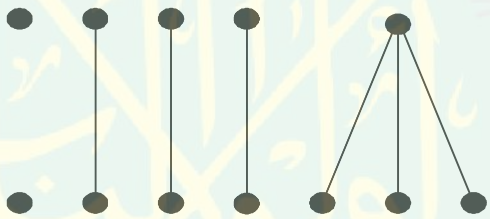
2.2 Operasi pada Graf

2.2.1. Definisi *Union*

Graf gabungan $G = G_1 \cup G_2$ adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf G terdiri atas n copy graf H, $n \geq 2$, maka ditulis $G = nH$. (Chartrand dan Lesniak, 1986:11).

Contoh 2.7

Graf $2K_1 \cup 3K_2 \cup K(1,3)$

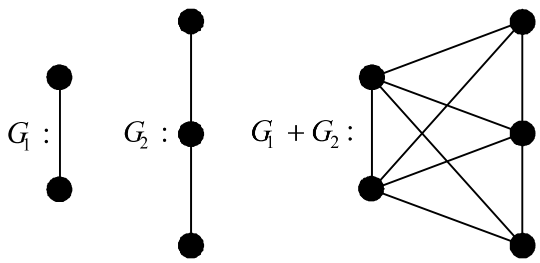


Gambar 2.7 Graf Gabungan

2.2.2. Definisi *Join*

Graf join $G = G_1 + G_2$ adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1)\ dan\ v \in V(G_2)\}$. (Chartrand dan Lesniak, 1986:11).

Contoh 2.8



Gambar 2.8 Dua graf *Join*

2.2.3. Definisi Perkalian *Cartesius*

Graf hasil kali *Cartesius* $G = G_1 \times G_2$ adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari G dikatakan terhubung langsung (*adjacent*) jika dan hanya jika

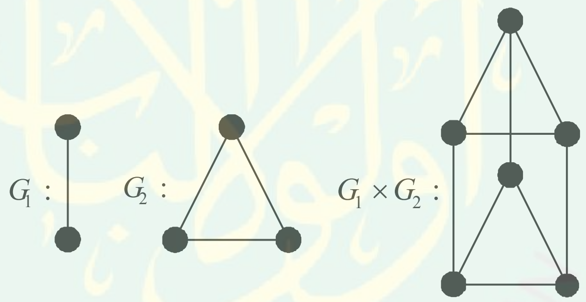
$$u_1 = v_1 \text{ dan } u_2v_2 \in \mathrm{E}(G_2)$$

atau

$$u_2 = v_2 \text{ dan } u_1v_1 \in \mathrm{E}(G_1)$$

(Chartrand dan Lesniak, 1986:11)

Contoh 2.9



Gambar 2.9 G_1 dan G_2 Hasil Kali Cartesius

2.3 Graf Terhubung

2.3.1. Definisi *walk*

Sebuah jalan (*walk*) $u - v$ di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong). $W : u = u_0, e_1, u_1, e_2, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v, dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk i = 1, 2, . . ., n adalah sisi di G. u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir, u_1, u_2, ..., u_{n-1} disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

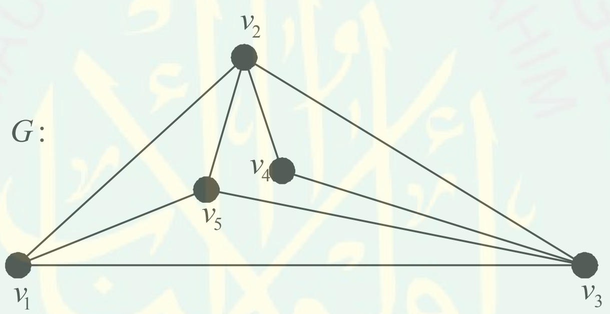
2.3.2. Definisi *Trail*

Jalan $u - v$ yang semua sisinya berbeda disebut *Trail* $u - v$. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

2.3.3. Definisi *Path*

Jalan $u - v$ yang semua titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) $u - v$. Dengan demikian, semua lintasan adalah *Trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Contoh 2.10



Gambar 2.10 Jalan (*Walk*), (*Trail*), dan Lintasan (*Path*)

Dari graf di atas $W_1 : v_1, v_2, v_3, v_2, v_5, v_3, v_4$ merupakan jalan (*walk*) $v_1 - v_4$ tetapi bukan jalan kecil (*trail*), $W_2 : v_1, v_2, v_5, v_1, v_3, v_4$ merupakan (*trail*) $v_1 - v_4$ tetapi bukan lintasan (*path*), dan $W_3 : v_1, v_3, v_4$ merupakan lintasan (*path*) $v_1 - v_4$.

2.3.4. Definisi Sirkuit

Jalan tertutup (*closed trail*) dan tak trivial pada graf G disebut Sirkuit G (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

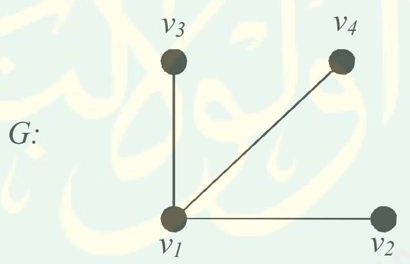
2.3.5. Definisi Sikel

Sirkuit $v_1, v_2, ..., v_n, v_1$ ($n \geq 3$) memiliki n titik dengan v_i adalah titik-titik berbeda untuk $1 \leq i \leq n$ disebut Sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

2.3.6. Definisi Graf Terhubung

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G. Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung, jika untuk setiap 2 titik berbeda u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh 2.11



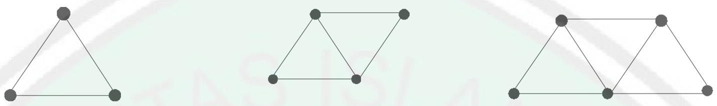
Gambar 2.11 Graf Terhubung (*connect*)

2.4 Graf Piramida

Definisi Graf Piramida

Misalkan terdapat suatu pengubinan pada bidang menggunakan segitiga sama sisi. Dua segitiga dikatakan terhubung jika ia bersekutu pada satu sisi. Misal T adalah kumpulan segitiga - segitiga yang terhubung, maka T adalah graf Planar terhubung dengan sikel terpendek 3 dan masing - masing segitiga bersekutu pada paling sedikit satu satu sisi dengan lainnya. Kumpulan segitiga terhubung disebut triomino. Jadi T disebut n-triomino jika T adalah pengubinan dari n segitiga yang terhubung.

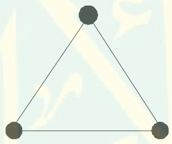
Graf Ular dengan panjang n adalah 1-triomino, dengan menempatkan n segitiga sama sisi dengan cara berikut :



Ular panjang 1 Ular panjang 2 Ular panjang 3

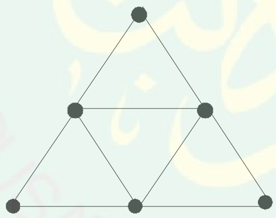
Graf Piramida dengan tinggi n, di tulis Pr_n, adalah 1-triomino, yang dibentuk dengan menempatkan Ular n dengan cara berikut :

Pr_1



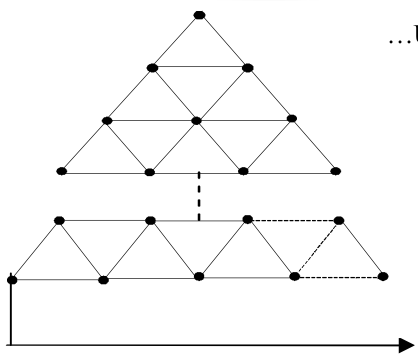
Pr_1 adalah Ular panjang 1

Pr_2



Pr_2 adalah Ular panjang 1 dan Ular panjang 3 yang ditumpuk. (Low Richard M, Lee Sin-Min,2004)

Secara umum Pr_n dapat diketahui sebagai berikut :



…Ular panjang 1

…Ular panjang 3

…Ular panjang 5

…Ular panjang (2n – 1)

$v_n = \frac{1}{2}u(u+1),\ n = u - 1 \ dan\ u \geq 2$

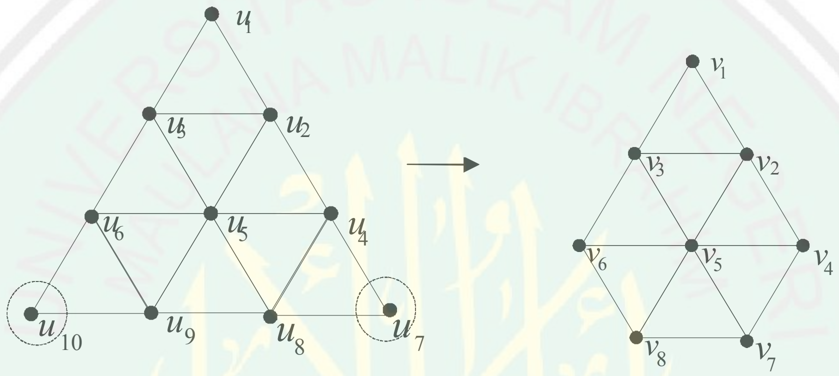
Gambar 2.12 Graf Piramida

2.5 Graf Berlian (Diamond)

Definisi Graf Berlian

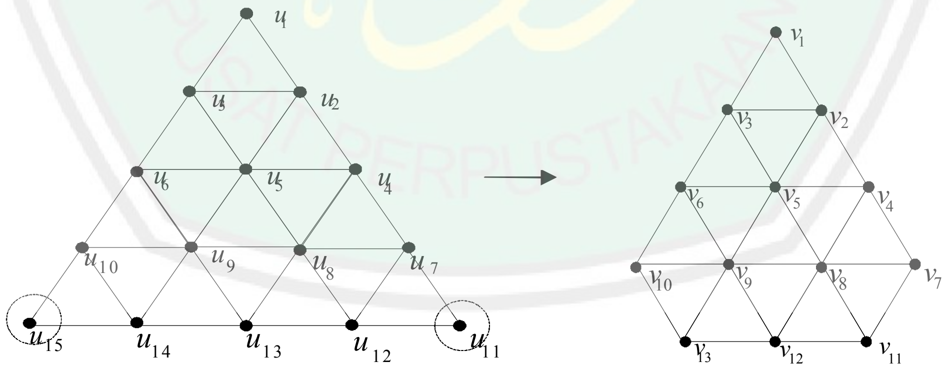
Graf Berlian (Diamond) Dn_n adalah graf Piramida Pr_{n+2} yang kedua titik sudutnya dihilangkan (dihapus).

Contoh :



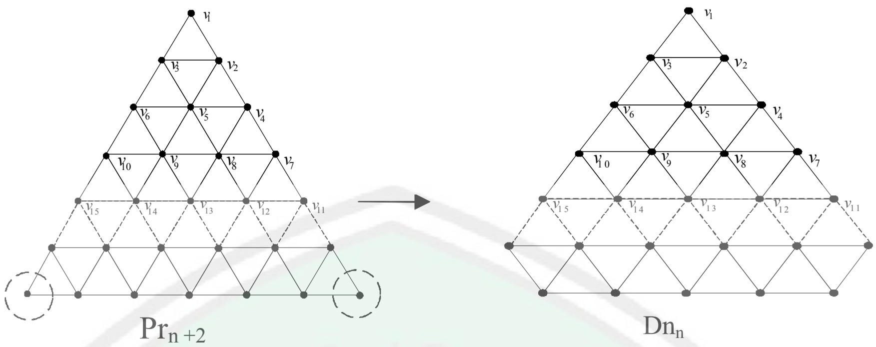
Pr_3 Dn_1

Pr_3 - $\{u_7 \; dan \; u_{10}\}$ = Dn_1



Pr_4 Dn_2

Pr_4 - $\{u_{11} dan \; u_{15}\}$ = Dn_2



Gambar 2.14 Graf Berlian (Diamond)

Diketahui $v_n = \frac{1}{2}u\,(u+1),\ n = u-1\ dan\, u \geq 2$

Maka $Dn_y = \Pr_x - \{v_{(c-x)}, v_c\}$

Untuk $c = v_n, v_n \geq 10$

$y \geq 1\ dan\ x \geq 3$

2.6 Pewarnaan Pada Graf

Pewarnaan pada graf dibedakan menjadi tiga, pewarnaan titik, pewarnaan sisi dan pewarnaan peta.

2.7.1. Pewarnaan Titik (*Vertex Couloring*)

Definisi 20

Pewarnaan titik dari graf *G* adalah sebuah proses pemberian warna pada titik-titik suatu graf sehingga tidak ada dua buah titik yang bertetangga pada graf tersebut berwarna sama. Graf *G* berwarna *n* jika terdapat sebuah pewarnaan dari *G* yang menggunakan *n* warna (Chartrand dan Lesniak, 1986:271).

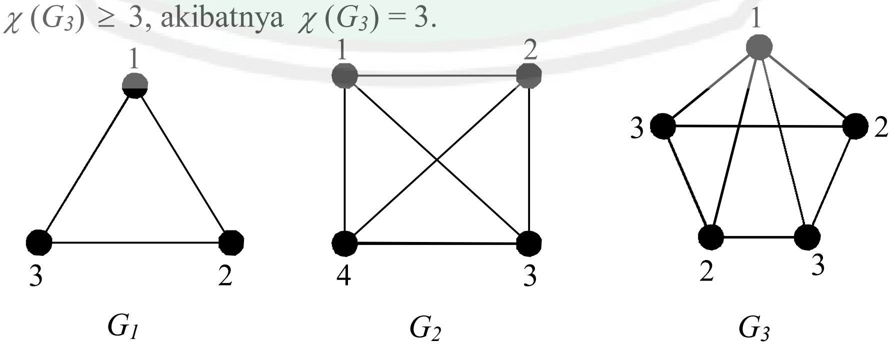
Dalam pewarnaan titik erat kaitannya dengan penentuan bilangan kromatik, yaitu masalah menentukan banyak warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf sehingga dua titik yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda.

Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf G, dinyatakan dengan $\chi(G)$, adalah bilangan n terkecil sehingga G dapat diwarnai dengan n warna. Biasanya warna-warna yang digunakan untuk mewarnai suatu graf dinyatakan dengan 1, 2, 3, …, n. Jelas bahwa $\chi(G) \leq |V(G)|$ (Purwanto, 1998:73).

Beberapa graf tertentu dapat langsung ditentukan bilangan kromatiknya. Graf kosong N_n memiliki $\chi(G) = 1$, karena semua titik tidak terhubung langsung. Jadi untuk mewarnai semua titik cukup dibutuhkan satu warna saja. Graf komplit K_n memiliki $\chi(K_n) = n$ sebab semua titik saling terhubung sehingga diperlukan n warna (Chartrand dan Lesniak, 1986:271).

Contoh 2.15

Perhatikan gambar 2.15, untuk graf G_1, karena $|V(G_1)| = 3$, maka $\chi(G_1) \leq 3$. Untuk G_2, karena $|V(G_2)| = 4$, maka $\chi(G_1) \leq 4$. Karena semua titik pada G_1 dan G_2 saling terhubung langsung, akibatnya $\chi(G_1) \geq 3$ dan $\chi(G_1) \geq 4$. Jadi, $\chi(G_1) = 3$ dan $\chi(G_2) = 4$. Untuk graf G_3, $\chi(G_3) \leq 3$, karena 3 warna untuk mewarnainya seperti pada gambar. Karena graf G_3 memuat graf Komplit K_3, maka $\chi(G_3) \geq 3$, akibatnya $\chi(G_3) = 3$.



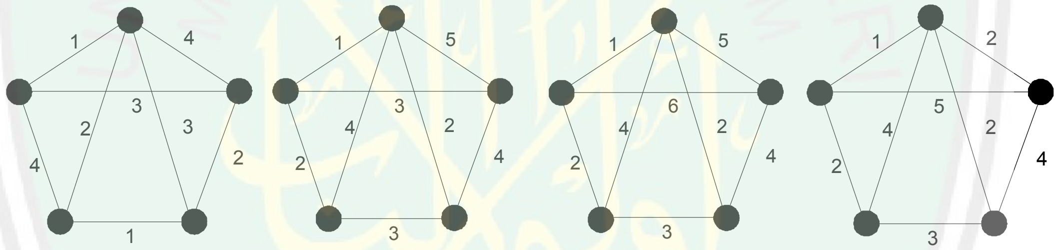
Gambar 2.15 Pewarnaan Titik

2.7.2. Pewarnaan Sisi (*Edge Couloring*)

Definisi

Suatu pewarnaan sisi-k untuk graf G adalah suatu penggunaan sebagian atau semua k warna untuk mewarnai semua sisi di G sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda. Jika G mempunyai pewarnaan sisi-n, maka dikatakan sisi-sisi di G diwarnai dengan n warna. Indeks kromatik G dinotasikan dengan $\chi'(G)$ adalah bilangan n terkecil sehingga sisi di G dapat diwarna dengan n warna (Purwanto, 1998:80).

Contoh 2.16



(a) (b) (c) (d)

Gambar 2.16 Pewarnaan Sisi graf G

Biasanya pewarnaan sisi-n ini ditunjukkan dengan menulis bilangan-bilangan 1, 2, 3, …, n di dekat sisi-sisi yang sesuai. Contoh: diagram (a), (b), dan (c) di atas mengilustrasikan pewarnaan sisi-4, pewarnaan sisi-5, dan pewarnaan sisi-6 untuk graf G yang memiliki delapan sisi. Diagram (d) tidak dapat diwarnai, karena dua sisi yang berwarna 2 bertemu pada titik yang sama. Dengan demikian $\chi'(G) \leq 4$, karena G memiliki pewarnaan sisi-4 [diagram (a)]. Sebaliknya, $\chi'(G) \geq 4$, karena G memuat empat sisi yang bertemu pada titik yang sama (yaitu titik berderajat 4), sehingga padanya harus diberikan warna berbeda. Jadi $\chi'(G) = 4$

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Pewarnaan pada Graf Piramida

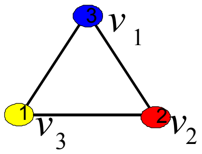
Dalam pewarnaan pada graf Piramida yang harus diperhatikan adalah cara mambangun Piramida dan mencari bilangan kromatiknya. Langkah – langkah membangun Piramida sebagai berikut :

1. Dasar Piramida adalah segitiga atau graf komplit K_3
2. $Pr_{1,2,3,\dots,n}$ adalah segitiga yang mempunyai titik luar dan dalam yang berbeda dan panjang sisi luar berbeda yang dihubungkan dengan titik.
3. Titik pada K_3 tersebut adalah pola dari graf Piramida, titik tersebut saling dihubungkan dengan garis yang disebut sisi dari graf Piramida.
4. Melihat pola tersebut, maka cara membangun graf Piramida dengan menambah 1 titik sembarang yang dihubungkan dengan 2 titik.
5. Menambah titik lain dan dihubungkan juga dengan 2 titik yang berdekatan sampai membentuk graf Piramida Pr_n

3.1.1 Pewarnaan Titik pada Graf Piramida

Dalam pewarnaan titik pada graf Piramida yang harus diperhatikan adalah mencari bilangan kromatiknya terlebih dahulu, yaitu dengan menentukan banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf Piramida, sehingga dua titik yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda, langkah-langkah yang digunakan sebagai berikut:

1. Menentukan $\chi(\mathrm{Pr}_n),\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$



$$\chi(\mathrm{Pr}_1) = 3$$

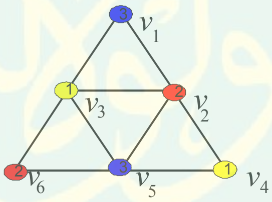
Gambar 3.1.1.2 Pewarnaan titik Graf Piramida *Pr₁*

Menurut penulis,

Langkah – langkah pewarnaan titik pada graf Piramida Pr_1 adalah sebagai berikut:

1. Pr_1 adalah K_3, yang mana semua titik dan sisi saling terhubung maka pilih warna 3 (biru) pada v_1
2. Karena semua titik dan sisi saling terhubung maka pilih warna 1 (kuning) pada v_3 dan pilih warna 2 (merah) pada v_2

Jadi pewarnaan minimal titik pada graf Piramida Pr_1 adalah 3 warna



$$\chi(\mathrm{Pr}_2) = 3$$

Gambar 3.1.1.2 Pewarnaan titik Graf Piramida *Pr₂*

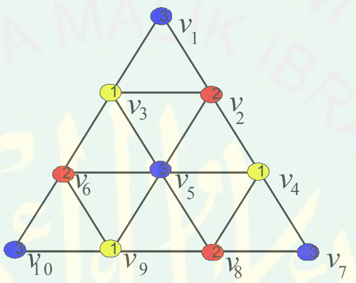
Menurut penulis,

Langkah – langkah pewarnaan titik pada graf Piramida Pr_2 adalah sebagai berikut:

1. Pewarnaan awal pada segitiga tengah, v_2, v_3 dan v_4 segitiga tengah dengan v_3 warna 1 (kuning), karena v_2 terhubung langsung dengan v_3 maka v_2 pilih warna 2 (merah), dan karena v_5 terhubung langsung dengan v_2 dan v_3 maka pilih warna 3 (biru) pada v_5

2. Pemberian warna pada titik – titik ujung graf Piramida Pr_2, jika v_1 terhubung langsung dengan v_2 dan v_3 maka pilih warna 3 (biru) pada v_1. karena v_4 terhubung langsung dengan v_2 dan v_5 maka pilih warna 1 (kuning) dan karena v_6 terhubung langsung dengan v_3 dan v_5 maka pilih warna 2 (merah) pada v_6

Jadi pewarnaan minimal titik pada graf Piramida Pr_2 adalah 3 warna



$$\chi(Pr_3) = 3$$

Gambar 3.1.1.3 Pewarnaan titik Graf Piramida *Pr₃*

Menurut penulis,

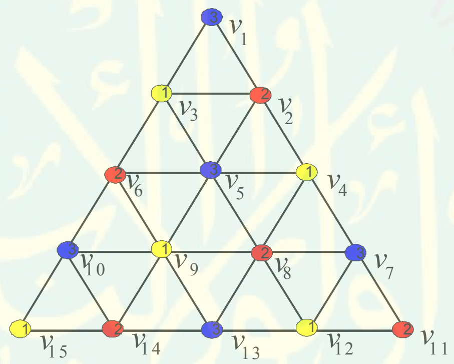
Langkah – langkah pewarnaan titik pada graf Piramida Pr_3 adalah sebagai berikut:

1. Menentukan titik tengah dan memberi warna, v_5 adalah titik tengah dari graf Piramida Pr_3 maka pilih warna 3 (biru)
2. Menentukan dan memberi warna pada titik yang terhubung langsung dengan titik tengah, v_5 adalah titik tengah maka v_2, v_3, v_6, v_9, v_8, dan v_4 adalah titik yang berhubungan langsung dengan titik tengah. Karena v_2 terhubung langsung v_5 dan v_3 maka pilih warna 2 (merah), dan v_3 terhubung langsung dengan v_2 dan v_5 maka pilih warna 1 (kuning).
3. Pewarnaan titik pada v_2, v_3, v_6, v_9, v_8, dan v_4 yang terhubung langsung dengan v_5 (titik tengah) dilakukan dengan berseling, v_2 pilih warna 2

(merah) dan v_3 pilih warna 1 (kuning) maka v_6 pilih warna 2 (merah), v_9 pilih warna 1 (kuning), v_8 pilih warna 2 (merah) dan v_4 pilih warna 1 (kuning)

4. Pemberian warna pada titik – titik ujung graf Piramida Pr_3, karena semua titik ujung tidak terhubung langsung dengan titik pusat dengan warna 3 (biru) maka pilih warna 3 (biru) untuk titik ujung v_1, v_7 dan v_{10} pada graf Piramida Pr_3

Jadi pewarnaan minimal titik pada graf Piramida Pr_3 adalah 3 warna



$$\chi(Pr_4) = 3$$

Gambar 3.1.1.4 Pewarnaan titik Graf Piramida Pr_4

Menurut penulis,

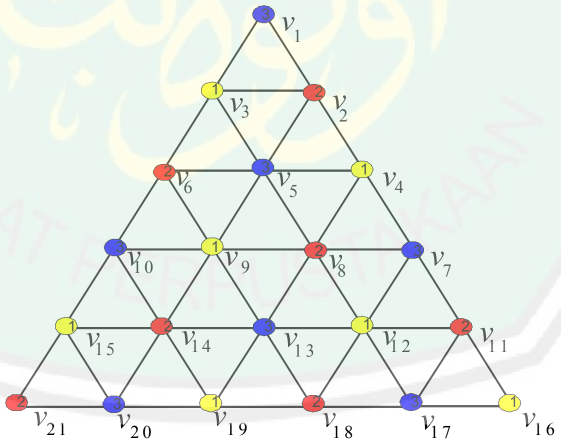
Langkah – langkah pewarnaan titik pada graf Piramida Pr_4 adalah sebagai berikut:

1. Menentukan titik tengah atau titik dalam dan memberi warna, v_5, v_8, dan v_9 adalah titik tengah dari graf Piramida Pr_4 maka pilih warna 3 (biru), 2 (merah), 1 (kuning) kembali pada Pr_1 (K_3)
2. Menentukan dan memberi warna pada titik yang terhubung langsung dengan titik tengah, ambil satu titik tengah v_5 adalah titik tengah maka v_2, v_3, v_6, v_9, v_8, dan v_4 adalah titik yang berhubungan langsung dengan titik tengah. Karena v_2 terhubung langsung v_5 dan v_3 maka pilih warna 2

(merah), dan v_3 terhubung langsung v_2 dan v_5 maka pilih warna 1 (kuning). Pewarnaan titik pada v_2, , v_3, v_6, v_9, v_8, dan v_4 yang terhubung langsung dengan v_5 (titik tengah) dilakukan dengan berseling, misal v_2 pilih warna 2 (merah) dan v_3 pilih warna 1 (kuning) maka v_6 pilih warna 2 (merah), v_9 pilih warna 1 (kuning), v_8 pilih warna 2 (merah) dan v_4 pilih warna 1 (kuning). Demikian juga pada titik tengah lain yaitu v_8 dan v_9

3. Pemberian warna pada titik – titik ujung graf Piramida Pr_4, jika v_1 terhubung langsung dengan v_2 dan v_3 maka pilih warna 3 (biru) pada v_1. karena v_{11} terhubung langsung dengan v_7 dan v_{12} maka pilih warna 2 (merah) dan karena v_{15} terhubung langsung dengan v_{10} dan v_{14} maka pilih warna 1 (kuning) pada v_{15}

Jadi pewarnaan minimal titik pada graf Piramida Pr_4 adalah 3 warna



$\chi(Pr_5) = 3$

Gambar 3.1.1.5 Pewanaan titik Graf Piramida *Pr_5*

Menurut penulis,

Langkah – langkah pewarnaan titik pada graf Piramida Pr_4 adalah sebagai berikut:

1. Menentukan titik tengah atau titik dalam dan memberi warna v_5, v_9, v_8, v_{12}, v_{13}, v_{14} adalah titik tengah dari graf Piramida Pr_5 maka pilih segitiga tengah, dalam titik tersebut pilih warna 3 (biru) v_{13}, 2 (merah) v_8, 1 (kuning) v_9 kembali pada Pr_2
2. Menentukan dan memberi warna pada titik yang terhubung langsung dengan titik tengah, ambil satu titik tengah v_5 adalah titik tengah maka v_2, v_3, v_6, v_9, v_8, dan v_4 adalah titik yang berhubungan langsung dengan titik tengah. Karena v_2 terhubung langsung v_5 dan v_3 maka pilih warna 2 (merah), dan v_3 terhubung langsung dengan v_2 dan v_5 maka pilih warna 1 (kuning). Pewarnaan titik pada v_2,v_3, v_6, v_9, v_8, dan v_4 yang terhubung langsung dengan v_5 (titik tengah) dilakukan dengan berseling, v_2 pilih warna 2 (merah) dan v_3 pilih warna 1 (kuning) maka v_6 pilih warna 2 (merah), v_9 pilih warna 1 (kuning), v_8 pilih warna 2 (merah) dan v_4 pilih warna 1 (kuning). Demikian juga pada titik tengah lain yaitu v_5, v_9, v_8, v_{12}, v_{13}, dan v_{14}
3. Pemberian warna pada titik – titik ujung graf Piramida Pr_5, jika 1 terhubung langsung dengan v_2 dan v_3 maka pilih warna 3 (biru) pada v_1. karena v_{16} terhubung langsung dengan v_{11} dan v_{17} maka pilih warna 1 (kuning) dan karena v_{21} terhubung langsung dengan v_{15} dan v_{20} maka pilih warna 2 (merah) pada v_{21}

Jadi pewarnaan minimal titik pada graf Piramida Pr_5 adalah 3 warna

2. Mencari pola bilangan kromatik dari,

$$\chi(Pr_1) = 3$$

$$\chi(\mathrm{Pr}_2)=3$$
$$\chi(\mathrm{Pr}_3)=3$$
$$\chi(\mathrm{Pr}_4)=3$$
$$\chi(\mathrm{Pr}_5)=3$$

Maka diperoleh pola bahwa

$$\chi(\mathrm{Pr}_n)=3, \quad \forall \quad n\in \mathrm{N}$$

3. Pola yang diperoleh dinyatakan sebagai konjektur.

$$\chi(\mathrm{Pr}_n)=3, \quad \forall \quad n\in \mathrm{N}$$

Konjektur tersebut bersifat induktif dan belum diterima kebenarannya dalam matematika.

4. Konjektur tersebut dinyatakan sebagai teorema dan dibuktikan

Teorema 3.1.1

Bilangan kromatik pewarnaaan titik pada graf Piramida adalah

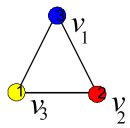
$$\chi(\mathrm{Pr}_n)=3, \quad \forall \quad n\in \mathrm{N}$$

Bukti:

Jika n = 1, maka p = 3 dan q = 3

Karena pada Pr_1 adalah graf komplit order 3 atau K_3, maka

$$\chi(\mathrm{Pr}_1)=\chi(K_3)=3$$

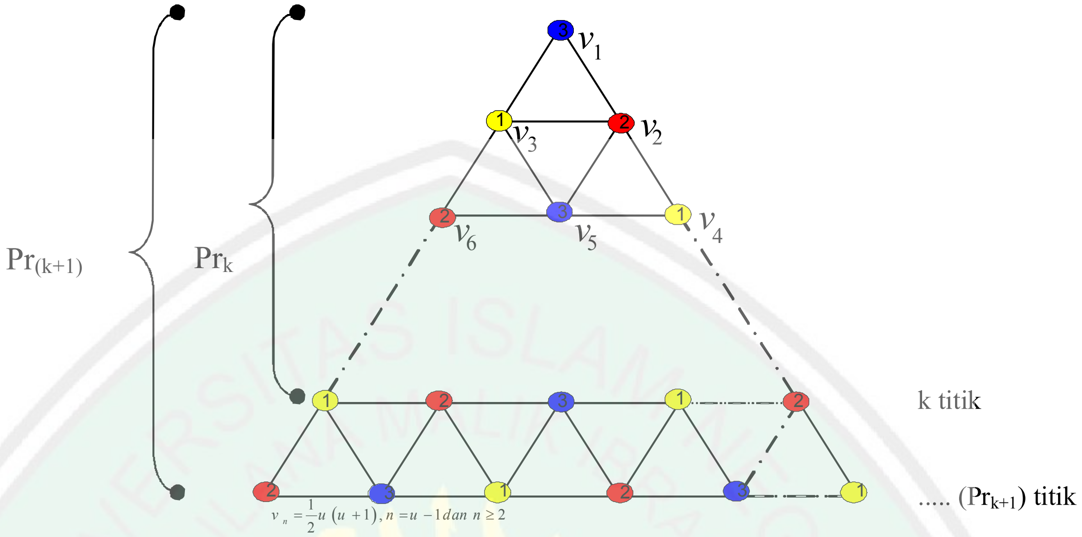


$$\chi(\mathrm{Pr}_1)=\chi(K_3)=3$$

Jadi benar untuk n = 1

Asumsikan benar untuk n = k, artinya $\chi(\mathrm{Pr}_k)=3$

Graf Piramida (Pr_{k+1}) dapat digambar sebagai berikut :



Telah diketahui bahwa $\chi(\mathrm{Pr}_k) = 3$

Tanpa mengurangi keumuman, maka pewarnaan titik pada bagian bawah Pr_k akan berselang seling 3 warna, yaitu 1,2,3,1,2,3,1,2,3,…

Dengan demikian, maka bagian bawah Pr_{k+1}, dapat diwarnai dengan 3 warna tersebut dengan cara mengatur agar titik yang saling terhubung langsung tidak berwarna sama.

Jadi pewarnaan titik pada Pr_{k+1} memerlukan warna minimum sebanyak 3 warna.

Jadi $\chi(\mathrm{Pr}_{k+1}) = 3$

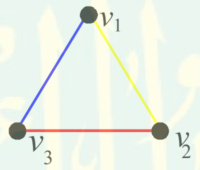
Sesuai dengan prinsip induksi matematika, maka dapat disimpulkan $\chi(\mathrm{Pr}_n) = 3, \ \forall n \in N$

Jadi $\chi(\mathrm{Pr}_n) = 3, \ \forall n \in N$

3.1.2 Pewarnaan Sisi pada Graf Piramida

Dalam pewarnaan sisi pada graf Piramida yang harus diperhatikan adalah mencari bilangan kromatiknya terlebih dahulu yaitu dengan menentukan banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai sisi-sisi pada graf Piramida, sehingga sisi yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda, langkah-langkah yang digunakan sebagai berikut:

1. Menentukan $\chi'(\mathrm{Pr}_n)$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$



$\chi'(\mathrm{Pr}_1) = 3$

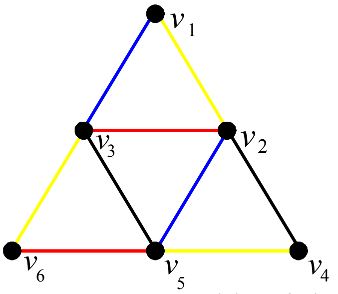
Gambar 2.1.2.1 Pewarnaan sisi graf Piramida Pr_1

Menurut penulis,

Langkah – langkah pewarnaan sisi graf Piramida Pr_1 sebagai berikut:

1. Pr_1 adalah K_3, yang mana semua titik dan sisi saling berhubungan maka pilih warna 3 (biru) pada $v_1 - v_3$
2. Karena semua titik dan sisi saling berhubungan maka pilih warna 1 (kuning) pada $v_1 - v_2$ dan pilih warna 2 (merah) pada $v_2 - v_3$

Jadi, pewarnaan minimal sisi pada graf piramida Pr_1 adalah 3 warna.



$\chi'(\mathrm{Pr}_2) = 4$

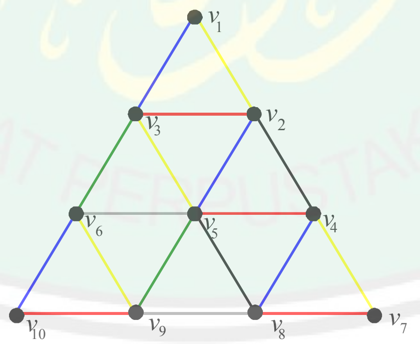
Gambar 2.1.2.2 Pewarnaan sisi graf Piramida Pr_2

Menurut penulis,

Langkah – langkah pewarnaan sisi pada graf Piramida Pr_2 :

1. Pewarnaan awal pada titik yang mempunyai derajat maksimal terbesar, misal v_2, v_3 dan v_5 yang mamiliki $\Delta G = 4$ dan terbesar pada Pr_2, karena v_2, v_3 dan v_5 adalah K_3 maka setiap sisi yang terhubung langsung tidak boleh sama, maka pilih warna merah untuk v_2,v_3, pilih warna biru untuk v_2,v_5 dan warna hitam untuk v_3, v_5. Kembali ke Pr_1.
2. Beri warna lain pada sisi yang terhubung langsung pada v_2, v_3 dan v_5. v_2 terhubung langsung dengan v_1, v_3, v_5 dan v_4, maka pilih warna kuning pada v_1, v_2, warna hitam untuk v_2,v_4. Pada v_3 pilih warna biru untuk v_1, v_3 dan warna kuning untuk v_3, v_6. Pada v_5 pilih warna kuning pada v_5,v_4 dan warna merah pada v_5, v_6

Jadi, pewarnaan minimal sisi pada graf piramida Pr_2 adalah 4 warna.



$$\chi'(Pr_3) = 6$$

Gambar 2.1.2.2 Pewarnaan sisi graf Piramida Pr_3

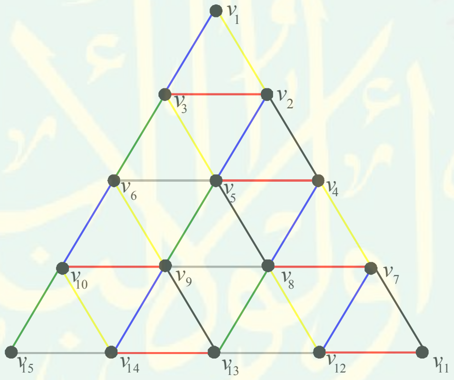
Menurut penulis,

Langkah – langkah pewarnaan sisi pada graf Piramida Pr_3 sebagai berikut:

1. Pewarnaan awal pada titik tengah atau dalam yang mempunyai derajat maksimal terbesar, misal v_5 yang memiliki $\Delta G = 6$ dan terbesar pada Pr_3.

2. karena v_2, v_3, v_6, v_9, v_8 dan v_4 adalah titik yang tehubung langsung dengan titik tengah v_5, maka sisi tiap titik yang terhubung langsung tidak boleh punya warna sama. Pilih warna biru pada v_2, v_5, warna kuning untuk v_3, v_5, warna merah untuk v_4, v_5, warna abu-abu untuk v_5, v_6, warna hijau untuk v_5, v_9, dan warna hitam untuk v_5, v_8.
3. Pewarnaan sisi lain dilakukan dengan memilih warna random dari 6 warna di atas.

Jadi, pewarnaan minimal sisi pada graf piramida Pr_3 adalah 6 warna



$$\chi'(Pr_4) = 6$$

Gambar 2.1.2.1 Pewarnaan sisi graf Piramida Pr_4

Menurut penulis,

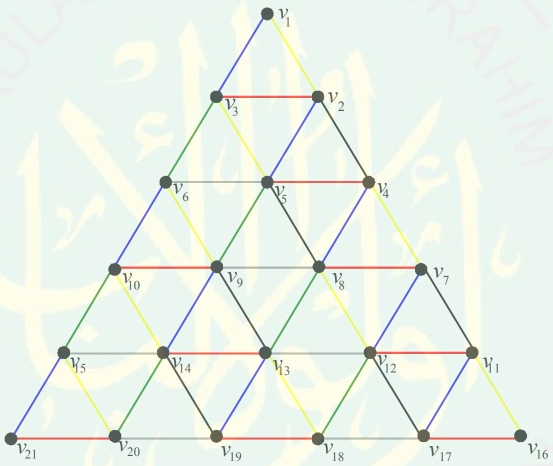
Langkah – langkah pewarnaan sisi graf Piramida Pr_4 sebagai berikut:

1. Pewarnaan awal pada titik tengah atau dalam yang mempunyai derajat maksimal terbesar, misal v_5, v_8 dan v_9 yang memiliki $\Delta G = 6$ dan terbesar pada graf Piramida Pr_4.
2. karena v_2, v_3, v_6, v_9, v_8 dan v_4 adalah titik yang tehubung langsung dengan titik tengah v_5, maka sisi tiap titik yang terhubung langsung tidak boleh punya warna sama. Pilih warna biru pada v_2, v_5, warna kuning untuk v_3, v_5,

warna merah untuk v_4, v_5, warna abu-abu untuk v_5, v_6, warna hijau untuk v_5, v_9, dan warna hitam untuk v_5, v_8.

3. Pewarnaan yang sama dilakukan pada v_8 dan v_9 yang memiliki derajat maksimal sama dengan v_5.
4. Pewarnaan sisi lain dilakukan dengan memilih warna random dari 6 warna di atas.

Jadi, pewarnaan minimal sisi pada graf piramida Pr_4 adalah 6 warna



$$\chi'(Pr_5) = 6$$

Gambar 3.1.2.1 Pewarnaan Sisi Graf Piramid Pr_5

Menurut penulis,

Langkah – langkah pewarnaan sisi graf Piramida Pr_4 sebagai berikut:

1. Pewarnaan awal pada titik tengah atau dalam, misal v_5, v_8, v_9, v_{12}, v_{13}, dan v_{14} adalah titik dalam maka pewarnaannya seperti graf piramida pewarnaan sisi Pr_2
2. Pewarnaan sisi pada derajat maksimal terbesar pada graf Pr_5. Karena v_5, v_8, v_9, v_{12}, v_{13}, dan v_{14} mempunyai derajat maksimal 6 Pada titik v_5, terhubung langsung dengan v_2, v_3, v_6, v_9, v_8 dan v_4 maka sisi tiap titik yang

terhubung langsung tidak boleh punya warna sama. Pilih warna biru pada v_2, v_5, warna kuning untuk v_3, v_5, warna merah untuk v_4, v_5, warna abu-abu untuk v_5, v_6, warna hijau untuk v_5, v_9, dan warna hitam untuk v_5, v_8.

3. Pewarnaan yang sama dilakukan pada v_8, v_9, v_{12}, v_{13}, dan v_{14} yang memiliki derajat maksimal sama dengan v_5.
4. Pewarnaan sisi lain dilakukan dengan memilih warna random dari 6 warna di atas.

Jadi, pewarnaan minimal sisi pada graf piramida Pr_5 adalah 6 warna

2. Mencari pola dari bilangan kromatik dari,

$$\chi'(Pr_1) = 3$$
$$\chi'(Pr_2) = 4$$
$$\chi'(Pr_3) = 6$$
$$\chi'(Pr_4) = 6$$
$$\chi'(Pr_5) = 6$$

Maka diperoleh pola bahwa

$$\chi'(Pr_n) = \begin{cases} 3 & \text{untuk n } = 1 \\ 4 & \text{untuk n } = 2 \\ 6 & \text{untuk n } > 2 \end{cases}$$

3. Pola yang diperoleh dinyatakan sebagai konjektur.

$$\chi'(Pr_n) = \begin{cases} 3 & \text{untuk n } = 1 \\ 4 & \text{untuk n } = 2 \\ 6 & \text{untuk n } > 2 \end{cases}$$

Konjektur tersebut bersifat induktif dan belum diterima kebenarannya dalam matematika.

4. Konjektur tersebut dinyatakan sebagai teorema dan dibuktikan.

Teorema 3.1.2

Bilangan kromatik untuk pewarnaaan sisi pada graf Piramid adalah,

$$\chi'(\mathrm{Pr}_n) = \begin{cases} 3 & \text{untuk n } = 1 \\ 4 & \text{untuk n } = 2 \\ 6 & \text{untuk n } > 2 \end{cases}$$

Bukti

a. Kasus I untuk n = 1

Pilih warna 1 pada sisi v_1, v_2.

Karena v_2, v_3 terkait langsung dengan v_1, v_2, maka pilih warna 2 untuk v_1, v_3.

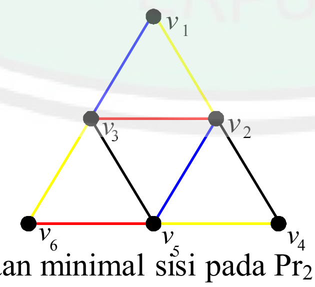
Karena v_1, v_3 terkait langsung dengan v_1, v_2 dan v_2, v_3 maka pilih warna 3 pada v_1, v_3.

Jadi, $X'(\mathrm{Pr}_1) = 3 \; untuk \;\; n = 1$

b. Kasus II untuk n = 2

Karena $\Delta(G) \le X' \le \Delta(G) + 1$ untuk n = 2 dengan $\Delta G = 4$ maka warna minimum 4 dan maksimum 4 + 1

Pada Pr_2 dapat jelaskan dengan gambar berikut :



Maka, pewarnaan minimal sisi pada $\mathrm{Pr}_2 = 4$

$\chi'(\mathrm{Pr}_2) = 4 \; untuk \;\; n = 2$

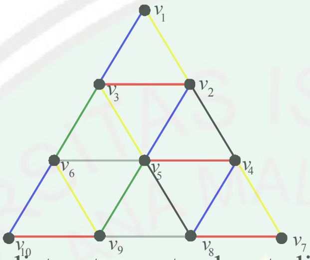
Jadi $\chi'(\mathrm{Pr}_2) = 4$

c. Kasus III untuk n > 2

Ambil n = 3

Untuk n = 3, maka p = 10 dan q = 18

Graf Pr_3 dapat diwarnai sisinya dengan warna minimal sebagai berikut :



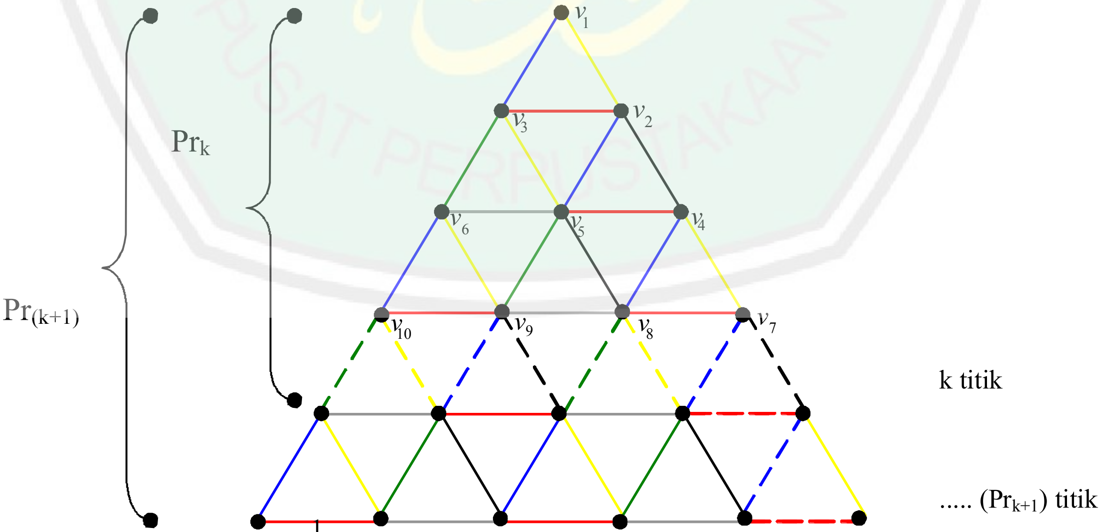
Dari gambar diatas ternyata dapat dibuktikan bahwa warna minimal sisi pada Pr_3 adalah 6 warna.

Jadi $\chi'(\mathrm{Pr}_3) = 6$ benar

Asumsikan benar untuk n = k ≥ 3

Jadi $\chi(\mathrm{Pr}_k) = 6$

Graf Pr_k dapat digambar sebagai berikut :



$$v_n = \frac{1}{2}u(u+1), n = u - 1 \, dan \, n \geq 2$$

Telah diketahui bahwa $\chi'(\mathrm{Pr}_k) = 6$

Tanpa mangurangi keumuman, maka pewarnaan sisi pada bawah Pr_k akan berselang seling 2 warna, yaitu warna 1 (merah) dan 2 (abu-abu).

Dengan demikian maka bagian bawah Pr_{k+1} dapat diwarnai 1, 2. dan 4 warna lainnya dapat diatur untuk mewrnai sisi lainnya, sehingga sisi yang saling terhubung langsng tidak berwarna sama.

Jadi Pr_{k+1} dapat diberi warna minimal 6 untuk pewarnaan sisinya.

Jadi $\chi'(\mathrm{Pr}_{k+1}) = 6$

Sesuai prinsip induksi matematika, maka dapat disimpulkan

$\chi'(\mathrm{Pr}_n) = 6, \forall n \in N$

Jadi $\chi'(\mathrm{Pr}_n) = 6, \forall n \in N$

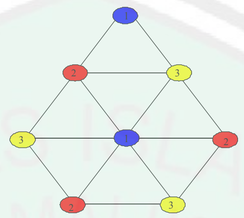
3.2 Pewarnaan pada Graf Berlian

Dalam pewarnaan pada graf Berlian (Diamond) yang harus diperhatikan adalah cara mambangun Berliannya. Pola Berlian pada dasarnya sama dengan Piramida, hanya saja pada $Dn_1 = Pr_3$ yang 2 titik ujungnya dibuang. Begitu juga $Dn_2 = Pr_4$ yang 2 titik ujungnya dibuang dan seterusnya. Dengan begitu tidak ada perbedaan yang signifikan dalam membuat pola pada graf Piramida n + 2 dan graf Berlian n.

3.2.1 Pewarnaan titik pada Graf Berlian

Pewarnaan titik pada graf Berlian diawali dengan mencari bilangan kromatiknya terlebih dahulu yakni dengan menentukan banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik pada graf Berlian, sehingga titik yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda, langkah-langkah yang digunakan sebagai berikut:

1. Menentukan $\chi \ (Dn_n), \quad n = 1,2,...,5$

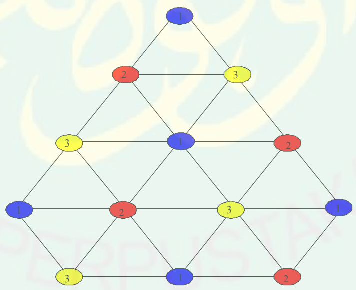


$\chi \ (Dn_1) = 3$

Gambar 3.2.1.1 Pewarnaan titik graf Berlian Dn_1

Langkah – langkah pewarnaan pada titik Dn_1 pada dasarnya sama dengan pewarnaan titik pada graf Piramida Pr_3. Pola dan cara pewarnaanya sama persis, hanya terdapat perbedaan pada 2 titik dan sisinya ujung graf Berlian yang tidak ada, maka pewarnaan titik pada graf Berlian Dn_1 sama dengan graf Piramida Pr_3.

Jadi pewarnaan minimal titik pada graf Berlian Dn_2 adalah 3 warna.

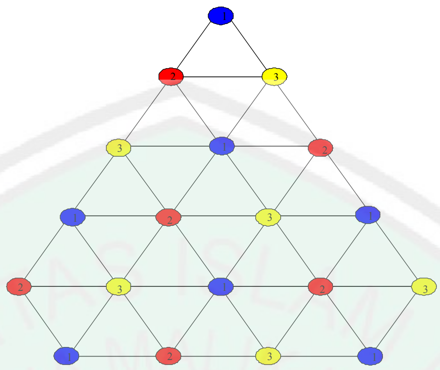


$\chi \ (Dn_2) = 3$

Gambar 3.2.1.2 Pewarnaan titik graf Berlian Dn_2

Langkah – langkah pewarnaan pada titik Dn_2 pada dasarnya sama dengan pewarnaan titik pada graf Piramida Pr_4. Pola dan cara pewarnaanya sama persis, hanya terdapat perbedaan pada 2 titik dan sisinya ujung graf Berlian yang tidak ada, maka pewarnaan titik pada graf Berlian Dn_2 sama dengan graf Piramida Pr_4.

Jadi pewarnaan minimal titik pada graf Berlian Dn_2 adalah 3 warna

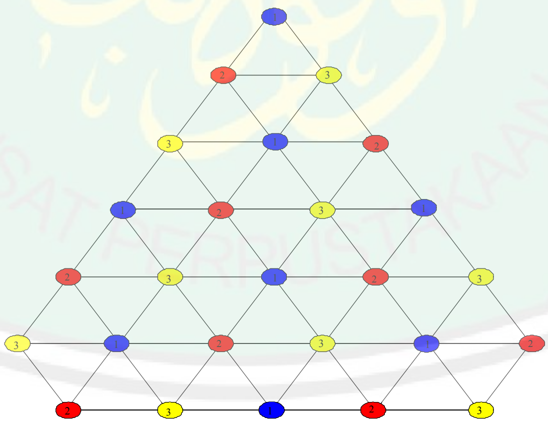


$\chi\ (Dn_3) = 3$

Gambar 3.2.1.3 Pewarnaan titik graf Berlian Dn_3

Langkah – langkah pewarnaan pada titik Dn_3 pada dasarnya sama dengan pewarnaan titik pada graf Piramida Pr_5. Pola dan cara pewarnaanya sama persis, hanya terdapat perbedaan pada 2 titik dan sisinya ujung graf Berlian yang tidak ada, maka pewarnaan titik pada graf Berlian Dn_3 sama dengan graf Piramida Pr_5.

Jadi pewarnaan minimal titik pada graf Berlian Dn_3 adalah 3 warna.

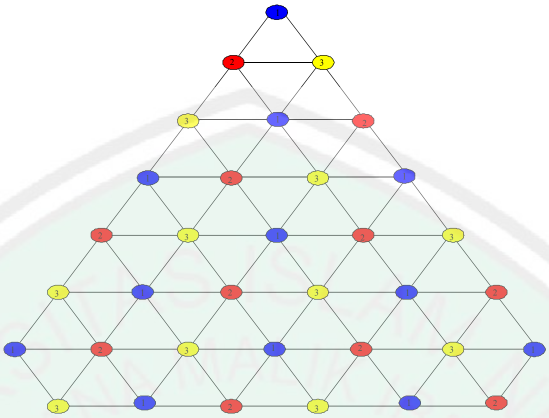


$\chi\ (Dn_4) = 3$

Gambar 3.2.1.4 Pewarnaan titik graf Berlian Dn_4

Langkah – langkah pewarnaan pada titik Dn_4 pada dasarnya sama dengan pewarnaan titik pada graf Piramida Pr_6. Pola dan cara pewarnaanya sama persis, hanya terdapat perbedaan pada 2 titik dan sisinya ujung graf Berlian yang tidak ada, maka pewarnaan titik pada graf Berlian Dn_3 sama dengan graf Piramida Pr_6.

Jadi pewarnaan minimal titik pada graf Berlian Dn_4 adalah 3 warna.



$\chi\ (Dn_5) = 3$

Gambar 3.2.1.5 Pewarnaan titik graf Berlian Dn_5

Langkah – langkah pewarnaan pada titik Dn_5 pada dasarnya sama dengan pewarnaan titik pada graf Piramida Pr_7. Pola dan cara pewarnaanya sama persis, hanya terdapat perbedaan pada 2 titik dan sisinya ujung graf Berlian yang tidak ada, maka pewarnaan titik pada graf Berlian Dn_5 sama dengan graf Piramida Pr_7.

Jadi pewarnaan minimal titik pada graf Berlian Dn_5 adalah 3 warna

2. Mencari pola bilangan kromatik dari:

   $\chi\ (Dn_1) = 3$

   $\chi\ (Dn_2) = 3$

   $\chi\ (Dn_3) = 3$

   $\chi\ (Dn_4) = 3$

   $\chi\ (Dn_5) = 3$

   Maka diperoleh pola :

   $$\chi\left(Dn_n\right) = 3, \quad \forall n \in \mathrm{N}$$

3. Pola yang diperoleh dinyatakan sebagai konjektur.

   $$\chi\left(Dn_n\right) = 3, \quad \forall n \in \mathrm{N}$$

Konjektur tersebut bersifat induktif dan belum diterima kebenarannya dalam matematika.

4. Konjektur tersebut dinyatakan sebagai teorema dan dibuktikan

Teorema 3.3.1

Bilangan kromatik untuk pewarnaaan titik pada graf Berlian adalah:

$$\chi(Dn_n)=3, \quad \forall \quad n \in \mathrm{N}$$

Bukti

Graf Berlian Dn_n sama dengan graf Piramida Pr_{n+2} yang dibuang dua titik ujungnya.

Telah diketahui bahwa $\chi(\mathrm{Pr}_n) = 3$.

Maka $\chi(Dn_n) \leq (\mathrm{Pr}_{n+2}) = 3$.

Karena Dn_n memuat K_3, maka

$3=\chi(K_3) \leq \chi(Dn_n)$

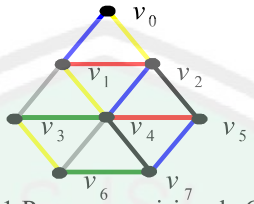
Jadi $3 \leq \chi(Dn_n) \leq 3$

Jadi $\chi(Dn_n) \leq 3, \ \forall n \in N$

3.2.2 Pewarnaan sisi pada Graf Berlian

Yang harus diperhatikan dalam pewarnaan sisi pada graf Berlian adalah mencari bilangan kromatiknya terlebih dahulu dengan menentukan banyaknya warna minimum yang dipegunakan untuk mewarnai sisi pada graf Berlian, sehingga sisi yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda, langkah-langkah yang digunakan sebagai berikut:

1. Menentukan $\chi'(Dn_n), \quad n=1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5$

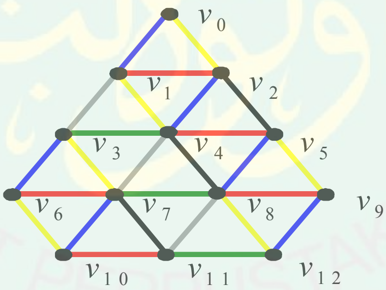


$$\chi'(Dn_1) = 6$$

Gambar 3.2.2.1 Pewarnaan sisi pada Graf Berlian Dn_1

Langkah – langkah pewarnaan pada sisi Dn_1 pada dasarnya sama dengan pewarnaan sisi pada graf Piramida Pr_3. Pola dan cara pewarnaanya sama persis, hanya terdapat perbedaan pada 2 titik dan sisinya ujung bawah graf Berlian yang tidak ada, maka pewarnaan sisi pada graf Berlian Dn_1 sama dengan graf Piramida Pr_3.

Jadi pewarnaan minimal sisi pada graf Berlian Dn_1 adalah 6 warna.

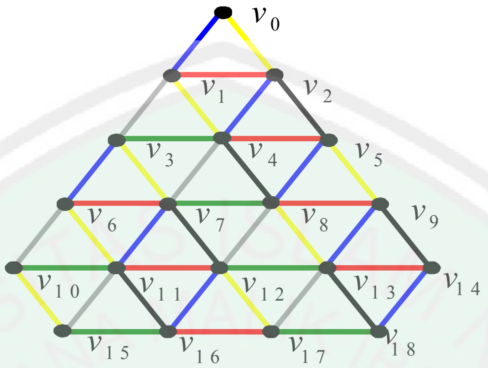


$$\chi'(Dn_2) = 6$$

Gambar 3.2.2.2 Pewarnaan sisi pada Graf Berlian Dn_2

Langkah – langkah pewarnaan pada sisi Dn_2 pada dasarnya sama dengan pewarnaan sisi pada graf Piramida Pr_4. Pola dan cara pewarnaanya sama persis, hanya terdapat perbedaan pada 2 titik dan sisinya ujung bawah graf Berlian yang tidak ada, maka pewarnaan sisi pada graf Berlian Dn_2 sama dengan graf Piramida Pr_4.

Jadi pewarnaan minimal sisi pada graf Berlian Dn_2 adalah 6 warna.

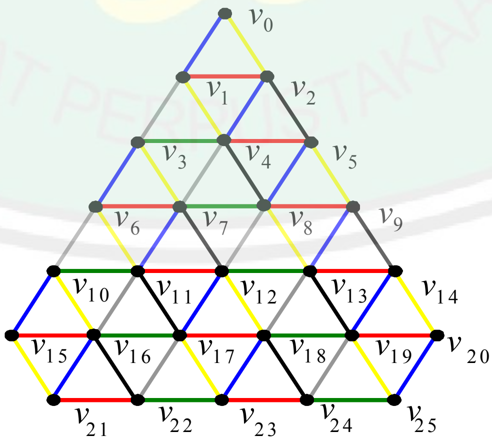


$$\chi'(Dn_3) = 6$$

Gambar 3.2.2.3 Pewarnaan sisi pada Graf Berlian Dn_3

Langkah – langkah pewarnaan pada sisi Dn_3 pada dasarnya sama dengan pewarnaan sisi pada graf Piramida Pr_5. Pola dan cara pewarnaanya sama persis, hanya terdapat perbedaan pada 2 titik dan sisinya ujung bawah graf Berlian yang tidak ada, maka pewarnaan sisi pada graf Berlian Dn_3 sama dengan graf Piramida Pr_5.

Jadi pewarnaan minimal sisi pada graf Berlian Dn_3 adalah 6 warna.

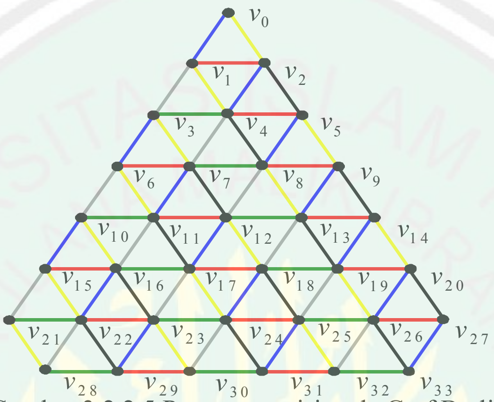


$$\chi'(Dn_4) = 6$$

Gambar 3.2.2.4 Pewarnaan sisi pada Graf Berlian Dn_4

Langkah – langkah pewarnaan pada sisi Dn_4 pada dasarnya sama dengan pewarnaan sisi pada graf Piramida Pr_6. Pola dan cara pewarnaanya sama persis, hanya terdapat perbedaan pada 2 titik dan sisinya ujung bawah graf Berlian yang tidak ada, maka pewarnaan sisi pada graf Berlian Dn_4 sama dengan graf Piramida Pr_6.

Jadi pewarnaan minimal sisi pada graf Berlian Dn_4 adalah 6 warna.



$\chi'(Dn_5) = 6$

Gambar 3.2.2.5 Pewarnaan sisi pada Graf Berlian Dn_5

Langkah – langkah pewarnaan pada sisi Dn_5 pada dasarnya sama dengan pewarnaan sisi pada graf Piramida Pr_7. Pola dan cara pewarnaanya sama persis, hanya terdapat perbedaan pada 2 titik dan sisinya ujung bawah graf Berlian yang tidak ada, maka pewarnaan sisi pada graf Berlian Dn_5 sama dengan graf Piramida Pr_7.

Jadi pewarnaan minimal sisi pada graf Berlian Dn_5 adalah 6 warna.

2. Mencari pola bilangan kromatik dari:

$\chi'(Dn_1) = 6$
$\chi'(Dn_2) = 6$
$\chi'(Dn_3) = 6$
$\chi'(Dn_4) = 6$
$\chi'(Dn_5) = 6$

Maka diperoleh pola :

$\chi'(Dn_n) = 6, \quad \forall \quad n \in \mathrm{N}$

3. Pola yang diperoleh dinyatakan sebagai konjektur.

$$\chi'(Dn_n) = 6, \quad \forall \quad n \in \mathrm{N}$$

Konjektur tersebut bersifat induktif dan belum diterima kebenarannya dalam matematika.

4. Konjektur tersebut dinyatakan sebagai teorema dan dibuktikan

Teorema 3.3.2

Bilangan kromatik untuk pewarnaaan sisi pada graf Berlian adalah:

$$\chi'(Dn_n) = 6, \quad \forall \quad n \in \mathrm{N}$$

Bukti:

Graf Berlian Dn_n sama dengan graf Piramida Pr_{n+2} yang dibuang dua titik ujungnya.

Telah diketahui bahwa $\chi'(\mathrm{Pr}_n) = 6,\ n \geq 3$

Maka $\chi'(Dn_n) \leq \chi'(\mathrm{Pr}_n) = 6$

Karena $\Delta(Dn_n) = 6$, maka

$6 = \Delta(Dn_n) \leq \chi'(Dn_n)$

Jadi $6 \leq \chi'(Dn_n) \leq 6$

Jadi $\chi'(Dn_n) = 6, \forall\, n \in N$

3.3 Pewarnaan Graf Dalam Prespektif Islam

Manusia diciptakan oleh Allah untuk berbakti dan mengabdi kepada-Nya. Allah mengutus nabi-nabi untuk menjelaskan kepada manusia mengenai tata cara mengabdi kepada-Nya dengan Firman Allah yang disebut Al-Qur’an sebagai petunjuk dan landasan dasar keimanan. Sebagaimana dijelaskan dalam firman-Nya:

وَمَا خَلَقْتُ ٱلْجِنَّ وَٱلْإِنسَ إِلَّا لِيَعْبُدُونِ ٥٦

Artinya : *"Dan Aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka mengabdi kepada-Ku"* (Ad-Dzaariyat:56).

Penjelasan yang terperinci yang diberikan Nabi Muhammad SAW, mengenai tata cara pengabdian misalnya tata cara sholat, zakat, puasa, haji, dan lain-lain. Penjelasan yang diberikan nabi tersebut dengan Sunnah Hadist berupa perkataan dan perbuatan atau persetujuan nabi. Dua hal pokok di atas Al-Qur'an dan Sunnah sudah menjadi pedoman pokok manusia berhubungan dengan Penciptanya (Setiawan dalam Ghofur, 2008).

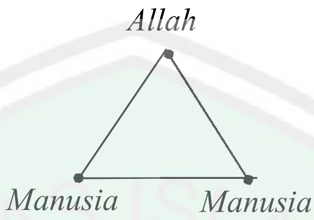
Hubungan manusia dengan Allah SWT disebut dengan pengabdian (ibadah). Pengabdian manusia tidak untuk kepentingan Allah karena Allah tidak menghajatkan kepada orang lain. Pengabdian yang dimaksud untuk mengembalikan manusia kepada asal Penciptanya yaitu fitrah dan kesucian agar kehidupan manusia ini diridhoi Allah (Setiawan dalam Ghofur, 2008).

Agama Islam mewajibkan untuk percaya bahwa Tuhan itu ada dan Esa. EksistensiNya ada (wujud) dan diluar nalar manusia, sehingga wujudnya seperti apa tidak boleh diinterpretasikan. Bagaimana umat Islam mengenal Allah (ma'rifatullah) adalah lewat ciptaanNya. Jadi umat Islam diwajibkan untuk mempelajari ciptaanNya (science) untuk lebih mengenalNya.

Melalui ilmu Pengetahuan dengan menggunakan akal yang telah dianugerahkan kepada manusia, kita dapat meningkatkan keimanan dan ketaqwaan terhadap Allah SWT. Salah satu bidang keilmuan yang dapat dijadikan alat untuk mendekatkan diri kepadaNya adalah ilmu Matematika. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang mempelajari mengenai hubungan himpunan tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi.

Titik-titik dalam suatu graf, dapat diasumsikan menurut keperluan dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Jika dua titik pada suatu graf diasumsikan sebagai suatu benda dan dihubungkan dengan suatu sisi, maka hal ini memiliki artian bahwa dua benda tersebut mempunyai suatu hubungan tertentu. Jika dua titik dalam suatu graf diasumsikan sebagai suatu kejadian dan dihubungkan dengan suatu sisi, maka dapat diambil suatu pengertian bahwa ada dua kejadian yang mempunyai hubungan.

Dalam teori Islam elemen-elemen yang dimaksud meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hambanya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hamba-hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas. Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain. Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu, yang selanjutnya kejadian-kejadian tersebut memiliki keterkaitan dengan titik lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya



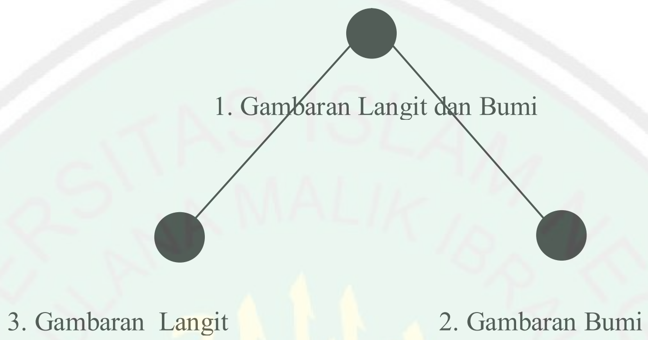
Gambar 2.23 Gambaran *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*

Salah satu contoh representasi suatu graf adalah kejadian langit dan bumi. Banyak sekali para ilmuwan memperdebatkan mengenai kejadian asal usul bumi dan benda-benda langit yang lainnya. Salah satunya adalah mengenai teori big-bang dimana teori ini menyebutkan bahwa dahulu ada satu benda yang sangat besar di langit kemudian karena suatu hal benda tersebut meledak dan menjadi benda-benda yang lebih kecil. Benda yang terbesar disebut matahari dan benda-benda yang lebih kecil menjadi bumi dan planet-planet yang lainnya. Hal ini sesuai dengan firman Allah dalam Al-Qur'an yaitu surat Al-Anbiya ayat 30, yang berbunyi:

أَوَلَمْ يَرَ ٱلَّذِينَ كَفَرُوٓا۟ أَنَّ ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضَ كَانَتَا رَتْقًا فَفَتَقْنَـٰهُمَا ۖ وَجَعَلْنَا مِنَ
ٱلْمَآءِ كُلَّ شَىْءٍ حَىٍّ ۖ أَفَلَا يُؤْمِنُونَ ﴿٣٠﴾

Artinya: "*Dan apakah orang-orang yang kafir tidak mengetahui bahwasanya langit dan bumi itu keduanya dahulu adalah suatu yang padu, Kemudian kami pisahkan antara keduanya. dan dari air kami jadikan segala sesuatu yang hidup. Maka mengapakah mereka tiada juga beriman?"* (Al-Anbiyaa:30)

Kejadian tersebut dapat digambarkan dalam suatu teori graf sebagai berikut:



Gambar 3.3.2 Gambaran langit dan bumi

Dari Gambar 1 di atas, gambaran langit dan bumi yang menjadi satu membentuk graf trivial karena sisinya berupa himpunan kosong. Sedangkan pada Gambar 2 dan Gambar 3 menunjukkan bahwa langit dan bumi telah terpisah.

Nabi Muhammad SAW diberi Mukjizat yang sifatnya khusus dan berbeda. Seperti mukjizat yang ada di dalam ayat Al Qur'an tentang proses pembentukan manusia, meski beliau bukan seorang ilmuwan atau cendekiawan, tapi apa yang diterangkan di dalam Al-Qur'an mengenai pembentukan manusia sangat jelas dan detail. Firman Allah SWT yang menjelaskan mengenai pembentukan manusia adalah:

ثُمَّ خَلَقْنَا ٱلنُّطْفَةَ عَلَقَةً فَخَلَقْنَا ٱلْعَلَقَةَ مُضْغَةً فَخَلَقْنَا ٱلْمُضْغَةَ عِظَٰمًا فَكَسَوْنَا
ٱلْعِظَٰمَ لَحْمًا ثُمَّ أَنشَأْنَٰهُ خَلْقًا ءَاخَرَ ۚ فَتَبَارَكَ ٱللَّهُ أَحْسَنُ ٱلْخَٰلِقِينَ ﴿١٤﴾

Artinya: *"Kemudian air mani itu kami jadikan segumpal darah, lalu segumpal darah itu kami jadikan segumpal daging, dan segumpal daging itu kami jadikan tulang belulang, lalu tulang belulang itu kami bungkus dengan daging. Kemudian kami jadikan dia makhluk yang (berbentuk) lain. Maka Maha sucilah Allah, Pencipta yang paling baik"*(Al-Mu'minun : 14).

Tahap pembentukan manusia yang pertama adalah berasal dari nutfa. Nutfa dalam bahasa Arab berarti air yang sangat kecil atau setetes air. Ini sesuai dengan cairan laki-laki yang mengandung sperma sebagai salah satu komponennnya. Sperma dihasilkan dari air yang hina/tidak penting (nutfa) dan berbentuk seperti ikan dengan ekor yang panjang (ini salah satu arti/pengertian *Sulalah*-air mani). Allah SWT berfirman dalan surat As Sajadah 32:7-8:

ٱلَّذِىٓ أَحۡسَنَ كُلَّ شَىۡءٍ خَلَقَهُۥ‌ۖ وَبَدَأَ خَلۡقَ ٱلۡإِنسَـٰنِ مِن طِينٍ ۝٧ ثُمَّ جَعَلَ نَسۡلَهُۥ
مِن سُلَـٰلَةٍ مِّن مَّآءٍ مَّهِينٍ ۝٨

Artinya: *"Yang membuat segala sesuatu yang dia ciptakan sebaik-baiknya dan yang memulai penciptaan manusia dari tanah. Kemudian dia menjadikan keturunannya dari saripati air yang hina (air mani/ sulalah)"* (As-Sajadah : 7-8).

Proses pembuahan dan perjalanan/transport zigot ke dalam rahim berlangsung kurang lebih 6 hari dan kemudian terjadi implantasi zigot (dikenal sebagai blastosit) dan tumbuh dalam dinding uterus selama 15 hari, saat tahap Alaqa (darah beku tebal) dimulai. Pada hari ke 15 dan berakhir pada hari ke-23 atau 24 terjadi proses pembekuan darah (Alaqah). Zigot tumbuh membesar melalui pembelahan sel, dan terbentuklah segumpalan sel yang kemudian membenamkan diri pada dinding rahim. Seiring pertumbuhan zigot yang semakin membesar, sel-sel penyusunnya pun mengatur diri mereka sendiri guna membentuk tiga lapisan. Dalam firman Allah tahapan ini telah dijelaskan pada surat Al-Mu'minun ayat 14 sebagaimana tersebut diatas.

Embrio ditranformasikan dari tahap Alaqa ke awal tahap mudgha pada hari ke 24 sampai 26, merupakan periode yang sangat singkat dibandingkan dengan perubahan periode nutfa ke Alaqa. Pada masa ini bayi disebut sebagai "embrio". Pada tahap ini, organ dan sistem tubuh bayi mulai terbentuk dari lapisan- lapisan sel tersebut.

Dalam minggu ke-6, tulang rawan mulai tumbuh di dalam tubuh. Transformasi dari mudgha ke awal pembentukan tulang terjadi dalam periode yang singkat pada akhir minggu ke-6 dan awal minggu ke-7. Tahap ini ditandai dengan kemunculan tulang/skeleton yang memberi gambaran embrio seperti manusia. Tahap pembentukan otot ditandai dengan terbentuknya otot yang mengelilingi dan menempel ketat di tulang. Dengan terbentuknya pembungkus tulang yang membungkus otot dan tulang secara komplet dan pembentukan otot selesai, maka embrio dapat mulai bergerak. Ahli embriologi menyebutkan tahap ini berakhir pada minggu ke-8 dan dilanjutkan sebagai tahap fetus (Nash'ah). Hal ini sesuai dengan Al Qur'an dalam surat Al Mu'minun ayat 14.

Dimulai dari tahap ini dan seterusnya, bayi disebut sebagai fetus. Tahap ini dimulai sejak kehamilan akhir minggu kedelapan dan berakhir hingga masa kelahiran. Ciri khusus tahapan ini adalah terlihatnya fetus menyerupai manusia, dengan wajah, kedua tangan dan kakinya. Meskipun pada awalnya memiliki panjang 3 cm, kesemua organ telah nampak. Tahap ini berlangsung selama kurang lebih 30 minggu, dan perkembangan berlanjut hingga minggu kelahiran.

Proses pembentukan manusia tersebut dapat direpresentasikan dalam teori graf sebagaimana berikut:

Gambar 3.2.3 Graf sikel proses pembentukan Manusia.

Ada banyak tuntutan yang harus dilaksanakan oleh setiap muslim dalam kehidupan di dunia ini, salah satunya adalah keharusan menjalin hubungan yang baik kepada Allah (hablum minallah), hubungan yang baik dengan manusia (hablum minannas) dan hubungan yang baik dengan alam (hablum minnal'alam). Hal ini ditekankan karena manusia sangat membutuhkan Tuhan dan Tuhan yang sesungguhnya adalah Allah Swt, disamping itu manusia juga tidak bisa hidup sendirian, karenanya ia membutuhkan manusia lain yang dapat berinteraksi secara baik untuk bisa mewujudkan kehidupan yang baik. Di dalam Al-Qur'an, Allah Swt berfirman:

۞ وَٱعۡبُدُواْ ٱللَّهَ وَلَا تُشۡرِكُواْ بِهِۦ شَيۡـٔٗاۖ وَبِٱلۡوَٰلِدَيۡنِ إِحۡسَٰنٗا وَبِذِى ٱلۡقُرۡبَىٰ وَٱلۡيَتَٰمَىٰ
وَٱلۡمَسَٰكِينِ وَٱلۡجَارِ ذِى ٱلۡقُرۡبَىٰ وَٱلۡجَارِ ٱلۡجُنُبِ وَٱلصَّاحِبِ بِٱلۡجَنۢبِ وَٱبۡنِ ٱلسَّبِيلِ
وَمَا مَلَكَتۡ أَيۡمَٰنُكُمۡۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُحِبُّ مَن كَانَ مُخۡتَالٗا فَخُورًا ٣٦

Artinya: *"Sembahlah Allah dan janganlah kamu mempersekutukan-Nya dengan sesuatupun. dan berbuat baiklah kepada dua orang ibu-bapa, karib-kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga yang dekat dan tetangga yang jauh, dan teman sejawat, ibnu sabil dan hamba sahayamu. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang sombong dan membangga-banggakan diri"* (An-Nisa':36).

Dalam ayat di atas, manusia harus menyembah Allah Swt dan menunjukkan pengabdian kepada-Nya dengan semurni-murninya sehingga ia tidak boleh mempersekutukan Allah dengan apapun dan siapapun juga. Menjalin hubungan baik kepada Allah Swt bagi manusia merupakan sesuatu yang sangat mendasar. Manusia telah dicipta oleh Allah Swt, maka ia harus menyembah dan mengabdi kepada sang pencipta sebagai ungkapan rasa syukur kepada Allah SWT.

Jika kita mengingat betapa Allah tidak menyukai perbuatan yang berlebihan dalam mengenakan dan melakukan sesuatu seperti dalam firman Allah surat Al-maidah ayat 99:

Artinya : *"Wahai Ahli kitab, janganlah kamu berlebih-lebihan (melampaui batas) dengan cara yagn tidak benar dalam agamamu. Dan janganlah kamu memperturutkan hawa nafsu orang-orang yang telah sesat dan (karena) mereka telah menyesatkan banyak orang, dan merekapun tersesat dari jalan yang lurus"*

Dengan ayat di atas, Allah mengharamkan sikap ghuluw. Sedangkan ghuluw itu sendiri adalah melampaui batas. Dia mencontohkan, bahwa di antara bentuk ghuluw seperti sikap ghuluwnya orang-orang Yahudi terhadap Maryam binti Imran yang sampai-sampai menuduhnya berzinah. Sebaliknya juga sikap ghuluw-nya orang-orang Nashrani terhadap dia (Maryam) sehingga menganggapnya sebagai Tuhan (Basyir, 2004:3). Demikian juga dalam mengaplikasikan warna pada pewarnaan titik, sisi ataupun peta dalam graf diusahakan menggunakan macam warna yang seminimal mungkin. Sebagai upaya untuk mencegah dari perbuatan yang berlebihan atau pemborosan warna. Pewarnaan dalam teori graf sendiri memiliki aturan-aturan tertentu, dimana kita harus mencari nilai minimum untuk penggunaan warna atau yang disebut dengan bilangan kromatik.

Banyak persoalan yang mempunyai karakteristik seperti pewarnaan graf sehingga membuat pewarnaan pada graf ini menarik untuk dikaji lebih dalam. Misalnya dalam mengatur sejumlah saluran frekuensi ke beberapa pemancar sehingga interferensi dapat dijaga pada level yang dapat diterima. Contoh yang mungkin dapat dilihat langsung misalnya menentukan jadwal ujian sedemikian sehingga semua mahasiswa dapat mengikuti ujian setiap mata kuliah yang diambilnya dengan waktu ujian yang tidak bertabrakan antara satu mata kuliah dengan mata kuliah yang lain.

Masalah pewarnaan di dalam graf memiliki banyak variasi dengan tipe yang berbeda. Ada bilangan kromatika dan bilangan pewarnaan dengan teorema Ramsey. Ada tiga macam pewarnaan graf, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah (region). Dalam persoalan pewarnaan graf, kita tidak hanya sekedar mewarnai titik-titik atau sisi dengan warna berbeda dari warna simpul atau sisi tetangganya saja, namun kita juga menginginkan jumlah macam warna yang digunakan sesedikit mungkin.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan, antara lain:

1) Untuk menentukan bilangan kromatik pada graf Piramida dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a) Menentukan bilangan kromatik pada beberapa kasus khusus yaitu pada $\Pr_1,\ \Pr_2,\ \Pr_3,\ldots,\ \Pr_5$
   b) Menentukan pola dari bilangan kromatik pada langkah (a)
   c) Pola yang diperoleh diasumsikan sebagai teorema
   d) Pembuktian teorema

   Berdasarkan langkah-langkah di atas diperoleh:

   I. $\chi\left(\Pr_n\right) = 3, \quad \forall \quad n \in \mathrm{N}$

   II. $\chi'(\Pr_n) = \begin{cases} 3 & \text{untuk n } = 1 \\ 4 & \text{untuk n } = 2 \\ 6 & \text{untuk n } > 2 \end{cases}$

2) Untuk menentukan bilangan kromatik pada graf Berlian dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a) Menentukan bilangan kromatik pada beberapa kasus khususnya yaitu pada $Dn_1,\ Dn_2,\ Dn_3,\ldots,\ Dn_5$
   b) Menentukan pola dari bilangan kromatik pada langkah (a)

c) Pola yang diperoleh diasumsikan sebagai teorema

d) Pembuktian teorema

Berdasarkan langkah-langkah di atas diperoleh:

I. $\chi(Dn_n) = 3, \quad \forall n \in \mathrm{N}$

II. $\chi'(Dn_n) = 6, \quad \forall n \in \mathrm{N}$

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan mengenai masalah pewarnaan titik dan sisi pada graf Piramida dan graf Berlian.

Penelitian lain yang dapat dikembangkan dari skripsi ini adalah

a. Dalam memberi pewarnaan pada Graf Piramida (P_r) dan Graf Berlian (Diamond) (D_n) selanjutnya dengan mengunakan cara lain tidak cukup dengan yang dipaparkan dalam skripsi ini

b. Pewarnaan dapat dilakukan dengan menggunakan program komputer untuk mempermudah dan visualisasi gambar

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Basyir, Abu Umar. 2004. *Apa dan Bagaimana Ghuluw (sikap berlebihan)*. www.vbaitullah.or.id di akses tanggal 1 April 2009 jam 19.55 WIB

Bony, J.A, and Murty, U.S. R. 1976. Graph Theory with Applications. London: MacMilan Press.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition. California: Wadsworth. Inc.*

Gafur, Abdul. 2008. *Pewarnaan Titik pada Graf yang Berkaitan dengan Sikel.* UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.

Khotimah, Siti. 2006. *Pewarnaan Titik pada Penjadwalan Kuliah Jurusan Matematika.* UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan

Low, Ricard M and Lee, Sin-Min. 2004. *On the Integer-Magic Spectra Of Tesselation Graphs.* Jurnal Matematika v.2.2

Rahman, Afzalur. 1992. *Al-Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan.* Jakarta: Rineka Cipta.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Wahyudi, Kokok Imam. 2008. *Pewarnaan Graf Buku dan Graf Tangga*. UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan

Wilson, Robin J dan Watkins John J. 1989. *Graphs: An Introductory approach: A First Course in Discrete Mathematics*. Canada: John Wiley and Sons, Inc.

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Yusuf Afandi
Nim : 03510007
Fakultas/ jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : Pewarnaan Minimal Graf Piramida dan Berlian
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Munirul Abidin, M.Ag

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	10 September2008	Konsultasi Masalah	1.
2	19 September 2008	ACC Proposal	2.
3	12 November 2008	Konsultasi BAB III	3.
4	1 Maret 2009	Revisi BAB III	4.
5	9 Maret 2009	Revisi BAB III	5.
6	25 Maret 2009	ACC BAB III	6.
7	20 Maret 2009	Konsultasi BAB I dan II	7.
8	27 Maret 2009	Revisi BAB I dan II	8.
9	29 Maret 2009	Revisi BAB I dan II	9.
10	02 April 2009	ACC BAB I dan II	10.
11	03 April 2009	Konsultasi Keseluruhan	11.
12	03 April 2009	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 04 April 2009
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321