

**PERSAMAAN KLEIN-GORDON  
DALAM RUANG-WAKTU MELENGKUNG**

**SKRIPSI**

Oleh :  
**NINDIA DWI PUSVITASARI**  
NIM. 19640061



**PROGRAM STUDI FISIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2023**

**HALAMAN PENGAJUAN**  
**PERSAMAAN KLEIN-GORDON**  
**DALAM RUANG-WAKTU MELENGKUNG**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada :**  
**Fakultas Sains dan Teknologi**  
**Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang**  
**Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam**  
**Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh :**  
**NINDIA DWI PUSVITASARI**  
**NIM. 19640061**

**PROGRAM STUDI FISIKA**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**  
**MALANG**  
**2023**

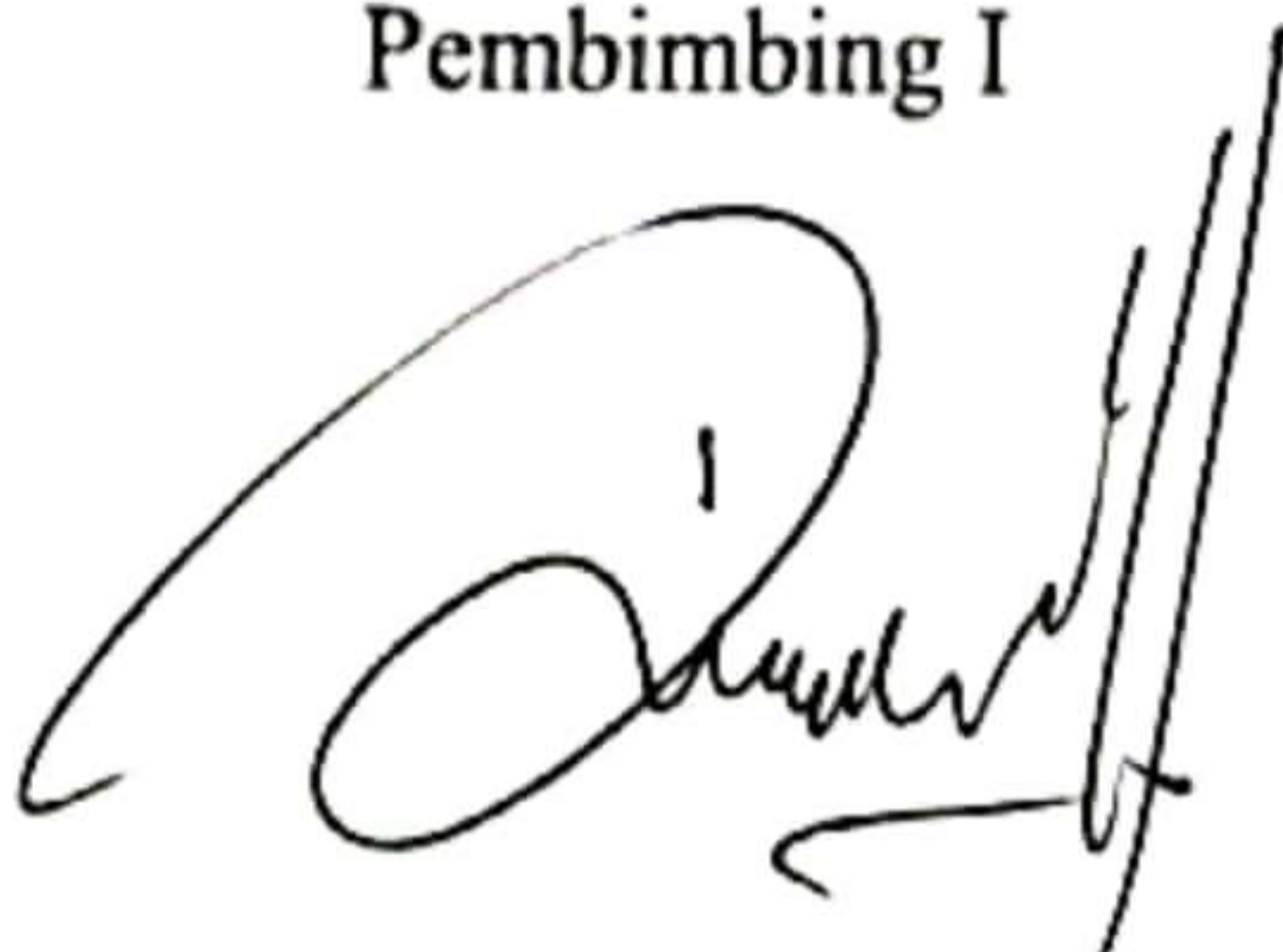
**HALAMAN PERSETUJUAN**  
**PERSAMAAN KLEIN-GORDON**  
**DALAM RUANG-WAKTU MELENGKUNG**

**SKRIPSI**

Oleh :  
NINDIA DWI PUSVITASARI  
NIM. 19640061

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Pada Tanggal, 22 Desember 2023

Pembimbing I



Arista Romadani, M. Sc  
NIP. 19900905 201903 1 018

Pembimbing II



Dr. H. Agus Mulyono, M. Kes  
NIP. 19750808 199903 1 003

Mengetahui,  
Ketua Program Studi



Dr. Imam Tazi, M.Si  
NIP.19740730 200312 1 002


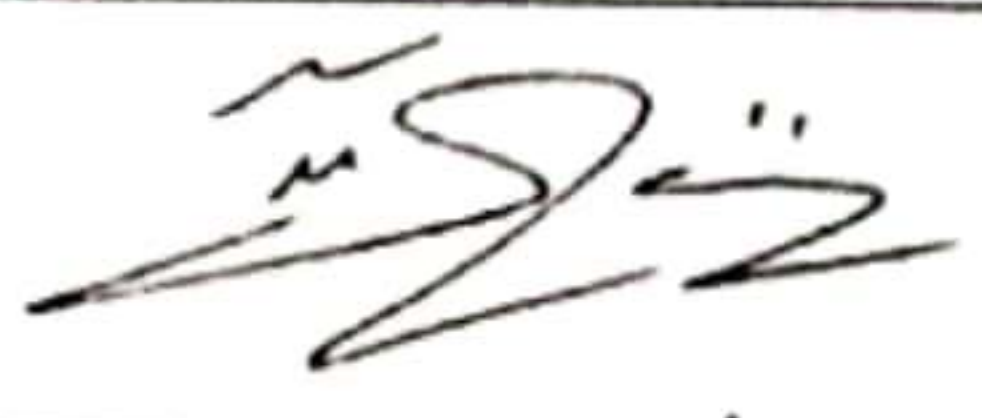
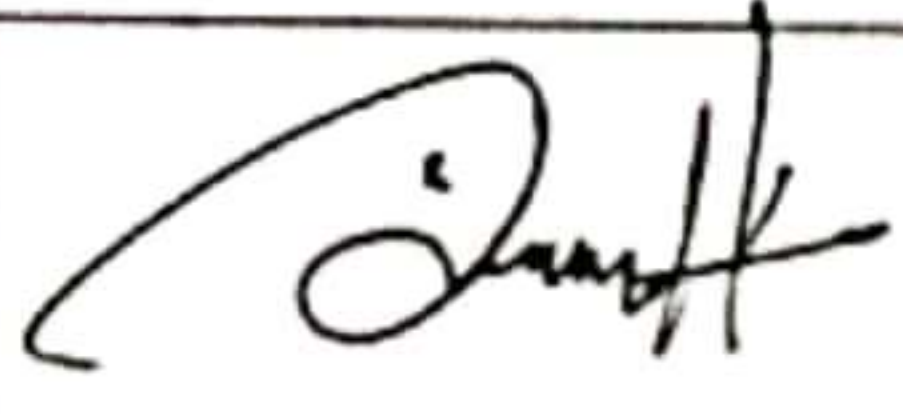

## HALAMAN PENGESAHAN

### PERSAMAAN KLEIN-GORDON DALAM RUANG-WAKTU MELENGKUNG

#### SKRIPSI


Oleh :  
NINDIA DWI PUSVITASARI  
NIM. 19640061

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji  
dan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Pada Tanggal 22 Desember 2023

Penguji Utama	<u>Drs. Abdul Basid, M.Si</u> NIP. 19650504 199003 1 003	
Ketua Penguji	<u>Muhammad Taufiqi, M.Si</u> NIP.LB.64021	
Sekretaris Penguji	<u>Arista Romadani, M. Sc</u> NIP. 19900905 201903 1 018	
Anggota Penguji	<u>Dr. H. Agus Mulyono, M. Kes</u> NIP. 19750808 199903 1 003	

Mengesahkan,  
Ketua Program Studi



  
Dehmat Tazi, M.Si  
NIP.19740730 200312 1 002

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Nindia Dwi Pusvitasari

NIM : 19640061

Jurusan : Fisika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Persamaan Klein-Gordon Dalam Ruang-Waktu

Penelitian Melengkung

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat orang lain, kecuali yang tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 Desember 2023

Membuat Pernyataan



Nindia Dwi Pusvitasari

NIM. 19640061

## **MOTTO**

*“Hargai usaha anda, hargai diri anda. Penghargaan kepada diri sendiri akan membawa anda menuju disiplin diri”*

**(Tung Dasem Waringin)**

*“Perbanyak bersyukur, kurangi mengeluh. Buka mata, jembarkan telinga, perluas hati. Sadari kamu ada pada masa sekarang, bukan kemarin atau besok, nikmati setiap momen dalam hidup, berpetualanglah”*

**(Ayu Estiningtyas)**

*“Apapun bisa jika kamu mau berusaha”*

## HALAMAN PERSEMBAHAN

Alhamdulillah puji syukur kehadiran Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya serta memberikan kesehatan dan kebahagiaan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Pada kesempatan ini saya ingin mengucapkan banyak terimakasih kepada:

1. Kedua orang tua saya bapak Daroji dan ibu Siti Komariyah yang setiap saat mendo'akan dan memberikan kasih sayangnya dengan sepenuh hati. Semoga selalu diberi kesehatan dan dilimpahkan kebahagiaan serta keberkahan oleh Allah SWT. Aamiin.
2. Kakak saya Lukiana Eka Novitasari yang selalu memberi arahan, do'a dan semangat.
3. Keponakan saya Mona Kaysa Ulya Rafanda yang juga selalu memberi do'a dan semangat.
4. Bapak Arista Romadani, M.Sc., Bapak Muhammad Taufiqi, M.Si., Bapak Drs. Abdul Basid, M.Si., dan Bapak Dr. H. Agus Mulyono, M.Kes. yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini.
5. Teman-teman saya Afifah Sukma Karuniawati Cintiya, Ninis Yurinda Ayu Prastyandari, Imala Endi Rahayu, Ulfa Rufaidha, Syifa 'Indana, Safita Defy Nur Jannah, Eva Damayanti, Nila Permatasari, Siti Mufidah, Regita Resti Anggraini, Ursila Rofidah, Sofia Rani, Fitri Ramadani, dan Sinta Dewi Kumala terimakasih sudah memberi semangat dan menghibur selama penulisan skripsi ini.
6. Diri saya Sendiri. Terimakasih karena masih semangat dan bisa sampai di titik ini.

## KATA PENGANTAR

Segala Puji dan Syukur kepada Allah SWT yang telah melimpahkan segala rahmat dan nikmatnya berupa kesehatan, kesabaran, ketekunan, kesempatan, serta kekuatan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul **“Persamaan Klein-Gordon Dalam Ruang-Waktu Melengkung”**. Sholawat serta salam penulis panjatkan kepada Baginda Rasulullah Muhammad SAW, yang telah menuntun manusia dari kegelapan zaman jahiliyah menuju zaman yang terang dan penuh dengan ilmu pengetahuan seperti saat ini.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak akan tersusun dengan baik tanpa adanya bantuan dan bimbingan dari pihak-pihak terkait. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan membimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik. Khususnya penulis ucapkan terima kasih kepada :

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Imam Tazi, M.Si., selaku Ketua Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ahmad Luthfin, M.Si., selaku Dosen Wali yang telah membantu, membimbing, dan memberikan motivasi kepada penulis.

5. Arista Romadani, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Fisika Teori dan pembimbing yang telah membantu dalam proses pembelajaran dan penyelesaian skripsi ini.
6. Muhammad Taufiqi, M.Si., selaku Dosen Fisika Teori yang telah membantu dalam proses pembelajaran dan penyelesaian skripsi ini.
7. Seluruh dosen, laboran dan staf administrasi Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah mendidik dan membimbing penulis.
8. Keluarga tercinta, khususnya Ayah, Ibu, Kakak, dan Keponakan yang selama ini selalu memberikan dukungan do'a agar penulis senantiasa diberikan kemudahan dalam setiap langkahnya.
9. Sahabat-sahabat penulis yang telah memberikan semangat, menjadi tempat curhat, dan memberikan saran kepada penulis.

Semoga Allah SWT membalas semua kebaikan mereka dengan nikmat yang berlipat ganda baik di dunia maupun di akhirat nanti. Penulis berharap penulisan skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis dan juga semua pihak yang membaca, dalam menambah wawasan ilmiah dan memberikan kontribusi bagi perkembangan ilmu pengetahuan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang bersifat konstruktif sangat penulis harapkan.

Malang, 20 Februari 2023

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN PENGAJUAN</b> .....	<b>ii</b>
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b> .....	<b>ii</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	<b>iv</b>
<b>PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b> .....	<b>v</b>
<b>MOTTO</b> .....	<b>vi</b>
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	<b>vii</b>
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>x</b>
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	<b>xii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	<b>xiv</b>
<b>ABSTRAK</b> .....	<b>xv</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>xvi</b>
<b>مستخلص البحث</b> .....	<b>xvii</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan Penelitian .....	5
1.4 Batasan Masalah .....	5
1.5 Manfaat Penelitian .....	6
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b> .....	<b>7</b>
2.1 Teori Relativitas Umum .....	7
2.2 Aksi Hilbert-Einstein .....	12
2.3 Ruang-Waktu .....	15
2.4 Lubang Hitam Schwarzschild.....	20
2.5 Persamaan Umum Klein-Gordon .....	29
<b>BAB III SOLUSI PERSAMAAN KLEIN-GORDON-SCHWARZSCHILD</b> <b>33</b>	
3.1 Modifikasi Persamaan Klein-Gordon Dalam Ruang-Waktu Datar Ke Ruang-Waktu Melengkung .....	33
3.1.1 Metrik Schwarzschild .....	36
3.1.1.1 Simbol Christoffel Dari Metrik Schwarzschild .....	36
3.1.1.2 Turunan Kovarian dan Turunan Kontravarian Dari Metrik Schwarzschild .....	39
3.1.2 Operator D'Alembertian dalam Ruang-Waktu Melengkung.....	42
3.1.3 Persamaan Klein-Gordon dalam Ruang-Waktu Melengkung .....	45
3.2 Solusi Persamaan Klein-Gordon Dalam Ruang-Waktu Melengkung Schwarzschild.....	47
3.2.1 Pemisahan Variabel .....	48
3.2.1.1 Pemisahan Variabel Waktu ( $t$ ).....	48
3.2.1.2 Pemisahan Variabel Sudut ( $\theta, \phi$ ).....	50
3.2.1.3 Pemisahan Variabel Radial ( $r$ ) .....	53

3.2.2 Solusi Akhir .....	64
<b>BAB IV PEMBAHASAN.....</b>	<b>67</b>
4.1 Perbandingan dengan Persamaan Klein-Gordon dalam Ruang-Waktu Datar .....	67
4.2 Integrasi Dalam Al Qur'an .....	71
4.3 Studi Kasus .....	75
<b>BAB V PENUTUP.....</b>	<b>78</b>
5.1 Kesimpulan .....	78
5.2 Saran .....	79
<b>DAFTAR PUSTAKA.....</b>	<b>80</b>
<b>LAMPIRAN.....</b>	<b>82</b>

## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Fungsi Harmonik Bola $Y_{lm}(\theta, \phi)$ (Griffith, 2005).....	53
Tabel 3.2 Hasil numerik dari persamaan radial untuk $l = 0$ , $l = 1$ , dan $l = 2$ ..	61
Tabel 3.3 Hasil Numerik fungsi radial $R_l$ dan $r$ dengan variasi $l = 0$ , $l = 1$ , dan $l = 2$ .....	63

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Ruang-Waktu Datar (Anugraha, 2005) .....	17
Gambar 2.2 Ruang-Waktu Melengkung (Anugraha, 2005).....	18
Gambar 2.3 Ruang-waktu lengkung dua dimensi dari partikel-partikel .....	19
Gambar 2.4 Lubang Hitam Schwarzschild bermassa $M$ beradius $r_s$ .....	22
Gambar 3.1 Solusi radial persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild untuk $l = 0$ , $l = 1$ , dan $l = 2$ .....	62
Gambar 3.2 Perbandingan Fungsi Radial $R_l(r)$ dengan $r$ .....	64

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran A. Solusi Schwarzschild .....	82
Lampiran B. Simbol Christoffel Untuk Kasus Lubang Hitam Schwarzschild .....	91
Lampiran C. Turunan Kovarian dan Kontravarian Untuk Kasus Lubang Hitam Schwarzschild .....	95
Lampiran D. Persamaan Klein-Gordon dalam Ruang-Waktu Melengkung .....	98
Lampiran E. Pemisahan Variabel Persamaan Klein-Gordon dalam Ruang-Waktu Melengkung .....	102
Lampiran F. Metode Numerik.....	118

## ABSTRAK

Pusvitasari, Nindia Dwi. 2023. **Persamaan Klein-Gordon Dalam Ruang-Waktu Melengkung**. Skripsi. Program Studi Fisika. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dosen Pembimbing: (I) Arista Romadani, M.Sc (II) Dr. H. Agus Mulyono, M.Kes.

---

**Kata Kunci:** Klein-Gordon, lubang hitam Schwarzschild, modifikasi ruang-waktu, ruang-waktu melengkung

Persamaan Klein-Gordon merupakan persamaan diferensial parsial yang menggambarkan partikel bermassa dan tak berputar dengan spin-0 dalam konteks mekanika kuantum relativitas. Dalam penelitian ini, dengan menerapkan metode pemisahan variabel waktu, variabel radial, dan variabel sudut, diperoleh solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung menggunakan metrik Schwarzschild. Persamaan Klein-Gordon dimodifikasi dengan mengganti operator d'Alembert dalam ruang-waktu datar menjadi operator d'Alembert dalam ruang-waktu melengkung dengan menggunakan turunan kovarian dan kontravarian dari metrik Schwarzschild. Solusi fungsi waktu secara analitik diperoleh dalam bentuk eksponensial, dan solusi fungsi sudut dalam bentuk polinomial Legendre yang bergantung pada bilangan kuantum azimuthal dan magnetik. Fungsi radial dalam persamaan diferensial orde dua dapat diselesaikan dengan metode numerik menggunakan Matlab R2008b. Solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild ini menggambarkan efek gravitasi terhadap partikel di sekitar lubang hitam yang memiliki interaksi gravitasi yang sangat kuat, yang diwakili oleh metrik simetris bola. Saat  $r$  mendekati nol (dalam jari-jari Schwarzschild), medan gravitasi meningkat secara signifikan. Gravitasi di sekitar black hole sangat kuat, dan gaya gravitasi yang bekerja pada partikel sangat besar. Ini berarti partikel akan mengalami percepatan gravitasi yang tinggi. Untuk penelitian selanjutnya, diharapkan dapat memperluas persamaan dalam ruang-waktu Schwarzschild ke ruang-waktu melengkung lain yang telah termodifikasi. Teori ini memberikan pengetahuan baru dalam memandang efek gravitasi dalam teori medan kuantum.

## ABSTRACT

Pusvitasari, Nindia Dwi. 2023. **Klein-Gordon Equation In Curved Spacetime**. Thesis. Physics Study Program, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Arista Romadani, M.Sc (II) Dr. H. Agus Mulyono, M.Kes.

---

**Keywords:** Klein-Gordon, Schwarzschild blackhole, modify spacetime, curved spacetime

The Klein-Gordon equation is a partial differential equation that describes massless, spinless particles with spin-0 in the context of relativity quantum mechanics. In this research, by applying the method of separating time variables, radial variables and angular variables, a solution to the Klein-Gordon equation in curved space-time using the Schwarzschild metric is obtained. The Klein-Gordon equation is modified by changing the d'Alembert operator in flat space-time to the d'Alembert operator in curved space-time using the covariant and contravariant derivatives of the Schwarzschild metric. The time function solution is analytically obtained in exponential form, and the angular function solution is in the form of Legendre polynomials which depend on the azimuthal and magnetic quantum numbers. Radial functions in second order differential equations can be solved by numerical methods using Matlab R2008b. This solution of the Klein-Gordon equation in curved Schwarzschild space-time describes the effect of gravity on particles around a black hole that have very strong gravitational interactions, represented by a spherically symmetric metric. As  $r$  approaches zero (within the Schwarzschild radius), the gravitational field increases significantly. The gravity around a black hole is very strong, and the gravitational force acting on the particles is very large. This means the particles will experience high gravitational acceleration. For further research, it is hoped that we can expand the equations in Schwarzschild space-time to other modified curved space-time. This theory provides new knowledge in viewing gravitational effects in quantum field theory.

## مستخلص البحث

بوسفيتاساري، نينديا دوي. 2023. معادلة كلاين جوردون في الزمكان المنحني. أطروحة. برنامج دراسة الفيزياء. كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف الأول: أريستا رمضاني، الماجستير، المشرفة الثانية: دكتور. الحج. أجوس موليونو، الماجستي

### الكلمات المفتاحية: كلاين جوردون، ثقب شوارزشيلد الأسود، الزمكان المعدل، الزمكان المنحني

معادلة كلاين-جوردون هي معادلة تفاضلية جزئية تصف الجسيمات عديمة الكتلة عديمة الدوران ذات الدوران 0 في سياق ميكانيكا الكم النسبية. في هذا البحث، ومن خلال تطبيق طريقة فصل المتغيرات الزمنية والمتغيرات الشعاعية والمتغيرات الزاوية، تم الحصول على حل لمعادلة كلاين-جوردون في الزمكان المنحني باستخدام مقياس شوارزشيلد. تم تعديل معادلة كلاين-جوردون عن طريق تغيير عامل دالمبرت في الزمكان المسطح إلى عامل دالمبرت في الزمكان المنحني باستخدام مشتقات متغايرة ومتعارضة من مترية شوارزشيلد. تم الحصول على حل دالة الزمن تحليلياً في شكل أسّي، وحل دالة الزاوية في شكل متعددات حدود ليجيندر التي تعتمد على أرقام الكم السمتية والمغناطيسية. يمكن حل الدوال الشعاعية في المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية بالطرق العددية باستخدام Matlab R2008b. يصف هذا الحل لمعادلة كلاين-جوردون في الزمكان المنحني لشوارزشيلد تأثير الجاذبية على الجسيمات الموجودة حول الثقب الأسود والتي لها تفاعلات جاذبية قوية جداً، ممثلة بقياس متري متمثل كروياً. عندما يقترب  $r$  من الصفر (داخل نصف قطر شفارتزشيلد)، يزداد مجال الجاذبية بشكل ملحوظ. الجاذبية حول الثقب الأسود قوية جداً، وقوة الجاذبية المؤثرة على الجسيمات كبيرة جداً. وهذا يعني أن الجسيمات سوف تواجه تسارع جاذبية عاليًا. لمزيد من البحث، من المؤمل أن تتمكن من توسيع المعادلات في زمكان شوارزشيلد لتشمل زمكاناً منحنيًا معدلاً آخر. توفر هذه النظرية معرفة جديدة في عرض تأثيرات الجاذبية في نظرية المجال الكمي.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Dalam fisika klasik, paling tidak kita memahami tiga hukum gerak ialah mekanika Newton, relativitas khusus, serta gravitasi Newton. Mekanika Newton sukses memaparkan sifat gerak benda berkecepatan rendah, namun tidak bisa memaparkan benda yang kecepataannya mendekati kecepatan cahaya (berkecepatan tinggi). Sebab kegagalan tersebut, Einstein memunculkan teori relativitas khusus yang sukses menerangkan sifat gerak benda dengan kecepatan yang mendekati kecepatan cahaya. Tidak hanya itu, terdapat hukum gravitasi umum Newton yang sukses memaparkan fenomena gerak benda langit yang dipengaruhi oleh interaksi gravitasi antara benda-benda tersebut. Namun hukum gravitasi umum Newton yang dikombinasikan dengan relativitas khusus tidak konsisten. Sebab itulah, Einstein mengenalkan teori baru ialah relativitas umum. Teori relativitas umum ini dibentuk bersumber pada dua asas, ialah kesetaraan (*principle of equivalence*) serta kovariansi umum (*general covariance*) (Anugraha, 2005).

Konsep ruang waktu timbul bersamaan dengan dikenalkannya relativitas umum dengan kedua asas di atas. Teori yang diajukan Einstein ini mengganti metode berfikir mengenai alam semesta. Newton menempatkan ruang dan waktu sebagai entitas yang berbeda serta mutlak. Tetapi teori tersebut dipatahkan oleh Einstein, sebab bagi Einstein ruang di sekitar benda merupakan medan gaya berat seperti halnya medan magnet di sekitar batang magnet, setelah itu kemunculan medan gaya tersebut diakibatkan oleh ruang- waktu yang melengkung di

sekitarnya. “*Gravitasi merupakan dampak dari kelengkungan ruang-waktu sebab terdapat penyebaran massa serta tenaga, dalam ruang-waktu tersebut*” seperti itulah ungkapan yang diungkapkan oleh Einstein saat pertama kali mengenalkan Teori Relativitas Umum (TRU) pada tahun 1915 (Krane, 1992).

Seiring berubahnya konsep relativitas Einstein, teori kuantum juga harus bisa memenuhinya. Namun, persamaan Schrodinger yang sejak awal sudah dikenalkan oleh Erwin Schrodinger dan sudah digunakan sebagai acuan dalam berbagai penelitian mekanika kuantum ternyata hanya berlaku untuk partikel non relativistik saja. Schrodinger sempat berusaha menyempurnakan persamaan tersebut, namun tidak membuahkan hasil. Oleh karenanya, pada tahun 1926 dilakukan modifikasi persamaan Schrodinger untuk menjadi persamaan yang lebih sederhana dengan menggunakan konsep momentum dan energi relativistik oleh Oskar Klein dan Walter Gordon yang kemudian kita kenal sebagai persamaan Klein-Gordon. Persamaan gelombang Schrodinger dimodifikasi dengan menggabungkan teori medan kuantum dan teori relativitas khusus. Persamaan Klein-Gordon juga bisa disebut sebagai persamaan Schrodinger versi relativistik.

Teori relativitas umum banyak mengkaji tentang fenomena-fenomena yang ada di alam semesta seperti lubang hitam. Lubang hitam tercipta saat bintang mati atau hancur akibat tarikan gravitasi. Lubang hitam juga bisa terbentuk ketika ada bintang-bintang yang bertabrakan dan saling melebur satu sama lain. Bintang memiliki gravitasi yang sangat tinggi sehingga tidak dapat bergerak dan akhirnya menjadi tak terlihat. Hal ini juga dibahas dalam Q.S At Takwir ayat 15-16 yang berbunyi :

فَلَا أُقْسِمُ بِالْخُنَّسِ ﴿١٥﴾ الْجَوَارِ الْكُنَّسِ ﴿١٦﴾

Artinya : “*Sungguh, aku bersumpah dengan bintang-bintang, yang beredar dan terbenam*”

*Al- khunnas* ataupun *terbenam* bisa dimaksud sebagai suatu yang tidak nampak lagi pada suatu waktu. Keadaan ini bisa terjalin sebab posisi pengamat di bumi yang relatif senantiasa berganti terhadap bintang ataupun memanglah akibat bintang tersebut musnah. Sehubungan dengan ayat diatas, bintang yang tersembunyi serta menyerap massa benda angkasa disekitarnya disebut *blackhole* ataupun lubang hitam yang tidak bisa dilihat dengan mudah walaupun dengan alat bantu (Sani, 2014). Lubang hitam tercipta sebab peristiwa runtuhnya bintang-bintang yang diakibatkan oleh tarikan gravitasi yang sangat besar. Bintang-bintang tersebut hendak memberikan dampak semacam lekukan-lekukan di luar angkasa. Dengan massa yang lumayan besar sehingga bintang-bintang membentuk lubang bercorak gelap serta ruang angkasa jadi tidak datar lagi (Mulyono, 2006). Lubang hitam yang digunakan untuk fokus riset ini merupakan lubang hitam Schwarzschild. Lubang hitam Schwarzschild ialah lubang hitam statis yang tidak mempunyai muatan listrik maupun momentum sudut. Lubang hitam ini nantinya dijabarkan dengan metrik Schwarzschild (Gautama, 2018).

Penelitian mengenai persamaan Klein-Gordon pertama kali dilakukan pada tahun 1987 oleh Elizalde sebagai tugas akhirnya di salah satu Universitas di Jerman dan Spanyol. Elizalde melakukan dua penelitian mengenai solusi Klein-Gordon dalam ruang-waktu. Dari penelitian pertamanya, diperoleh tiga pasang solusi dari persamaan radial yang sesuai dengan bidang massif Klein-Gordon yang ada di ruang-waktu Schwarzschild. Sedangkan pada penelitian keduanya, membahas mengenai solusi persamaan Klein-Gordon dari partikel massif di

ruang-waktu Schwarzschild. Pada tahun 2019, Lizardo mengatakan pada penelitiannya mengenai persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu bahwa solusi yang didapatkan masih berupa fungsi gelombang untuk kasus ruang datar ( $k = 0$ ) dengan asumsi *mass less*, dan *power law function* dengan dominasi materi dan berdasarkan fungsi yang didapat bergantung pada bilangan kuantum magnetik dan bilangan kuantum orbital. Selanjutnya yaitu penelitian dari Rebekah, D.Lehn, Sophia S. Chabysheva, dan John R. Hiller pada tahun 2017 yang berjudul “*Klein-Gordon Equation in Curved Spacetime*”. Dalam penelitian mereka, solusi persamaannya dibandingkan dengan solusi Coulomb non relativistik dan teori perturbasi. Kekurangan dari penelitian ini adalah kurangnya solusi eksak mengenai persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu Schwarzschild, karena pengambilan data hanya berfokus pada metode komputasi atau solusi non eksaknya saja.

Partikel yang memiliki spin-0 atau yang biasa disebut dengan partikel Boson skalar bergerak di sekitar lubang hitam, sedangkan lubang hitam itu sendiri melengkungkan ruang-waktu karena massa di lubang hitam yang sangat besar. Penelitian ini dilatarbelakangi oleh keinginan untuk mempelajari perilaku partikel di sekitar objek yang memiliki medan gravitasi yang sangat kuat seperti lubang hitam. Persamaan gerak umum partikel Boson dapat dijelaskan melalui persamaan Klein-Gordon yang bergerak dalam ruang-waktu datar. Persamaan Klein-Gordon memiliki peran penting dalam fisika kuantum, terutama dalam konteks gravitasi dan relativitas umum. Dalam ruang-waktu datar (*flat spacetime*), persamaan Klein-Gordon dapat diturunkan dengan menggunakan prinsip-prinsip mekanika kuantum dan relativistik. Namun dalam ruang-waktu melengkung (*curved*

*spacetime*), persamaan Klein-Gordon harus dimodifikasi agar dapat memperhitungkan efek gravitasi. Salah satu metrik yang digunakan untuk membantu modifikasi persamaan Klein-Gordon ini adalah metrik Schwarzschild, yang dapat menggambarkan ruang-waktu di sekitar lubang hitam yang melengkung karena efek gravitasi yang sangat kuat di sekitarnya. Dalam penelitian ini, akan dikaji gerak partikel dalam ruang-waktu melengkung akibat kehadiran lubang hitam Schwarzschild tersebut.

### **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat dirumuskan beberapa rumusan masalah seperti di bawah ini :

1. Bagaimana perumusan persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung?
2. Bagaimana solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild?

### **1.3 Tujuan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dilakukannya penelitian ini diantaranya adalah untuk :

1. Mengetahui perumusan persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung dengan metrik Schwarzschild.
2. Mengetahui solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild.

### **1.4 Batasan Masalah**

Penelitian ini mengkaji secara teoritik mengenai persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung dengan menggunakan metrik Schwarzschild.

### **1.5 Manfaat Penelitian**

Manfaat dari penelitian ini diantaranya :

1. Hasil penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat kepada masyarakat umum untuk memahami teori-teori umum pada kajian struktur ruang-waktu melengkung Schwarzschild.
2. Sebagai referensi untuk penelitian selanjutnya mengenai persamaan Klein-Gordon dalam konteks ruang-waktu melengkung.
3. Sebagai referensi untuk penelitian selanjutnya yang berkaitan dengan ruang-waktu melengkung dengan bantuan metrik yang ada di lubang hitam.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Teori Relativitas Umum

Percobaan melalui sebuah persamaan antara dua benda yang saling tarik-menarik pertama kali dikenalkan oleh Issac Newton. Dua benda tersebut memiliki massa yang berbeda yaitu  $m_1$  dan  $m_2$  yang terpisah jarak sejauh  $r$  dan  $G$  sebagai ketetapan nilai gravitasi universal (Anugraha, 2005).

$$\vec{F} = -(Gm_1m_2)(\vec{r}/r^3) \quad (2.1)$$

Hukum ini kemudian dikenal sebagai hukum gravitasi Newton. Hukum gravitasi menjelaskan tentang pergerakan suatu benda karena adanya interaksi gravitasi antara benda tersebut. Pada tahun 1980, Bose mencatat bahwa presisi orbit planet di sekitar matahari sebagai benda massif atau benda yang bermassa besar. Pembelokan cahaya saat melewati benda massif dan fenomena lainnya tidak dapat dijelaskan menggunakan hukum gravitasi Newton. Lawden juga mengomentari penelitiannya pada tahun 1982 bahwa hukum gravitasi Newton hanya berlaku dalam medan gravitasi yang lemah dan tidak konsisten dengan teori relativitas khusus. Ketika suatu benda bergerak, gaya gravitasi dari benda tersebut terhadap benda lain akan berubah atau terjadi tindakan spontan. Dengan kata lain, pengaruh gravitasi harus berpropagasi dengan kecepatan tak terhingga. Hal ini menyebabkan hukum gravitasi Newton bertentangan dengan teori relativitas khusus. Oleh karena itu, perlu dikembangkan teori baru yang konsisten, yaitu teori relativitas umum (Anugraha, 2005).

Menurut Teori Relativitas Khusus, pengaruh gravitasi dari objek astronomi dapat merambat dengan kecepatan yang melebihi kecepatan cahaya. Ini berbeda

dengan hukum gravitasi Newton, di mana gaya gravitasi antara dua objek akan berubah secara otomatis jika salah satunya mengalami pergerakan. Inilah sebabnya mengapa hukum gravitasi Newton dianggap tidak sesuai dengan Teori Relativitas Khusus. Berdasarkan hal ini, Einstein kemudian berusaha merumuskan teori gravitasi baru yang konsisten dan sesuai dengan Teori Relativitas Khusus (Gautama, 2018). Pada tahun 1915, Einstein mengembangkan teori gravitasi yang konsisten dan kompatibel dengan Teori Relativitas Khusus, yang kemudian dikenal sebagai Teori Relativitas Umum. Teori Relativitas Umum menjelaskan bahwa gravitasi bukanlah gaya seperti gaya-gaya lainnya, melainkan hasil dari lengkungan ruang-waktu. Teori Relativitas Umum didasarkan pada dua prinsip, yaitu prinsip kesetaraan (*principle of equivalence*) dan prinsip kovariansi umum (*general covariance*) (Weinberg, 1972).

Asas kesetaraan yang diajukan oleh Einstein menyatakan, "*Tidak ada eksperimen yang dapat dilakukan di dalam wilayah kecil (lokal) yang dapat membedakan antara gravitasi dan akselerasi sistem yang setara*". Asas kesetaraan menyatakan bahwa hukum-hukum fisika harus sama bagi semua pengamat yang bergerak teratur, tanpa percepatan relatif satu sama lain. Jadi tidak ada pengamat istimewa dalam alam semesta ini. Einstein mengajukan asas ini sebagai generalisasi dari asas relativitas khusus. Jika dalam relativitas khusus hanya berlaku bagi pengamat dengan kecepatan konstan, maka dalam relativitas umum prinsip ini diperluas tidak hanya kecepatan konstan tapi juga percepatan. Akibat dari asas ini adalah gravitasi dan percepatan adalah setara. Jika seseorang berada di dalam ruang angkasa yang jauh dari gravitasi, dia tidak akan bisa

membedakan apakah dirinya sedang melayang bebas atau dipercepat dengan roket, keduanya sama secara fisika.

Asas kesetaraan inilah yang menjadi landasan Einstein mengembangkan relativitas umumnya, di mana gravitasi dipandang sebagai lengkungan ruang waktu oleh benda-benda dengan massa, bukan sebagai gaya seperti yang dikonsepsikan Newton. Misalkan kita melepaskan dua objek yang terpisah oleh jarak  $r$ , sehingga ketika objek-objek tersebut bergerak di sepanjang lintasan berbentuk lingkaran mengarah ke pusat Bumi, maka seiring berjalannya waktu, kedua objek tersebut akan semakin mendekat. Namun jika ukuran objek tersebut cukup kecil, perbedaannya tidak akan dapat diamati. Hal ini serupa dengan eksperimen yang dilakukan di dalam roket di luar angkasa yang mengalami percepatan tertentu (Krane, 1992).

Massa inersia dan massa gravitasi adalah konsekuensi dari asas kesetaraan. Massa inersia adalah massa benda yang menentukan seberapa sulit benda tersebut diubah kecepatannya. Semakin besar massa inersianya, makin sulit dirubah kecepatannya. Menurut asas kesetaraan, percepatan yang dialami suatu benda tidak tergantung pada massa inersianya. Misalnya, semua benda akan jatuh dengan percepatan yang sama dalam medan gravitasi Bumi terlepas dari massa inersianya. Namun, massa inersia juga mempengaruhi seberapa kuat medan gravitasi yang dihasilkan oleh suatu benda. Semakin besar massa benda, gravitasi yang dihasilkannya juga semakin kuat. Jadi meskipun asas kesetaraan menyamakan gravitasi dan percepatan, massa inersia tetap penting karena menentukan kuat lemahnya medan gravitasi suatu benda. Gravitasi muncul dari benda-benda dengan massa inersia. Itulah mengapa dalam relativitas umum,

massa-massa benda dan energi di alam semesta membengkokkan ruang dan waktu, sehingga benda lain terperangkap dalam lengkungan ruang waktu itu dan mengalami percepatan (yang kita sebut gravitasi). Sifat ini memungkinkan untuk menghilangkan efek gravitasi yang muncul dengan menggunakan kerangka acuan yang mengalami akselerasi. Dalam medan gravitasi, semua objek yang berada di dalamnya akan mengalami percepatan yang sama dan tidak tergantung pada massa objek tersebut (Wospakrik, 1987).

Dalam mekanika Newton, persamaan gerak suatu benda dengan massa  $m$  yang jatuh dalam medan gravitasi dengan percepatan gravitasi  $g$  dengan koordinat  $(y, t)$  dapat dinyatakan seperti persamaan di bawah ini (Anugraha, 2005) :

$$m_I \frac{d^2 y}{dt^2} = m_G g \quad (2.2)$$

Melalui persamaan transformasi berikut,

$$y' = y - \frac{1}{2} g t^2 \text{ dan } t' = t \quad (2.3)$$

Pada koordinat  $(y', t')$  maka persamaan (2.2) akan berubah menjadi,

$$m_I \frac{d^2 y'}{dt'^2} + m_I g = m_G g \quad (2.4)$$

Karena massa inersia  $m_I$  sama dengan massa gravitasi  $m_G$ , maka persamaan (2.4) dapat disederhanakan seperti bentuk di bawah ini :

$$m \frac{d^2 y'}{dt'^2} = 0 \quad (2.5)$$

Kita dapat memilih kerangka acuan inersia  $(y', t')$  untuk menghilangkan efek gravitasi pada kerangka  $(y, t)$  yang merupakan kerangka dipercepat dengan percepatan sebesar  $g$  terhadap kerangka inersia  $(y', t')$  pada medan gravitasi. Hukum gerak dalam kerangka inersia dalam daerah tanpa medan gravitasi sama

dengan hukum gerak pada kerangka jatuh bebas dalam medan gravitasi (Anugraha, 2005). Transformasi Lorentz dapat digunakan untuk mengaitkan kerangka-kerangka inersia. Hukum alam yang berlaku pada kerangka inersia menurut asas kovariansi harus berlaku juga pada kerangka tak inersia (seperti kerangka jatuh bebas dalam medan gravitasi). Inilah yang dimaksud dengan asas kovariansi umum yang berbunyi, "*Hukum alam harus memiliki bentuk yang tetap terhadap sebaran pemilihan transformasi koordinat*" (Krane, 1992).

Teori relativitas umum menghadirkan konsep baru tentang ruang-waktu. Menurut teori ini, ruang-waktu dapat melengkung ketika ada benda massif di dalamnya. Sebagai contoh, ketika cahaya bintang melintasi objek langit massif seperti matahari, cahaya tersebut akan mengalami pembelokan di sekitar objek tersebut. Fenomena pembelokan cahaya ini bukan disebabkan oleh gaya gravitasi bumi, tetapi oleh lengkungnya ruang-waktu di sekitar matahari. Jika kita menggunakan konsep teori relativitas khusus dan gravitasi Newton, cahaya bintang dianggap memiliki massa yang sebanding dengan energinya, dan meskipun terjadi pembelokan, nilai pembelokannya hanya setengah dari apa yang dijelaskan oleh teori relativitas umum. Oleh karena itu, konsep teori relativitas umum lebih cocok untuk menjelaskan fenomena ini. Teori relativitas umum adalah salah satu teori fisika modern yang memiliki peran penting dalam menjelaskan struktur ruang-waktu dan alam semesta. Teori ini memiliki keindahan tersendiri dan memiliki daya tarik dalam meramalkan fenomena alam yang menarik. Namun, teori ini juga membutuhkan persyaratan matematis berupa analisis tensor (Anugraha, 2005).

## 2.2 Aksi Hilbert-Einstein

Aksi Hilbert Einstein dapat digunakan untuk memperoleh persamaan gravitasi Einstein. Diketahui bahwa skalar paling sederhana yang dapat dibangun dengan menggunakan tensor metrik dan turunannya yaitu skalar kelengkungan Ricci  $\mathcal{R}$  dan aksi paling sederhana untuk relativitas umum dalam vakum adalah aksi Hilbert Einstein (Sporea, 2014). Persamaan medan gravitasi Einstein yang diperoleh dari prinsip variasi dalam kondisi vakum yaitu (Sporea, 2014) :

$$\delta S = \delta \int d\Omega \sqrt{-g} \mathcal{L} = 0 \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) digunakan untuk menurunkan persamaan-persamaan partikel dan persamaan medan. Dengan  $\sqrt{-g}d\Omega$  merupakan elemen volume invarian dan  $\mathcal{L}$  sebagai rapat Lagrangian. Alih ragam koordinat (Sporea, 2014) :

$$\bar{x}^\alpha \rightarrow x^\alpha = x^\alpha(\bar{x}^\alpha) \quad (2.7)$$

Dengan  $\bar{x}^\alpha$  adalah koordinat lokal awal dan  $J$  adalah determinan alih ragam Jacobi.

$$d\Omega = Jd\bar{\Omega}, \quad J = \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\right) \quad (2.8)$$

Jika diketahui juga nilai

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} g_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

Untuk mendapatkan nilai  $\eta = -1 = J^2 g$ , oleh karenanya

$$d\Omega = \frac{d\bar{\Omega}}{J} = \sqrt{-g}d\bar{\Omega} \quad (2.10)$$

Karena persamaan Euler-Lagrange diturunkan dari prinsip variasi menjadi orde dua, maka Lagrangian harus berbentuk kuadrat pada turunan orde pertama

terhadap  $g_{\mu\nu}$ . Turunan orde pertama berisi simbol Christoffel yang tidak invarian terhadap koordinat. Oleh karena itu, rapat Lagrangian yang dipilih adalah skalar kelengkungan Ricci  $R$ , sehingga prinsip variasinya menjadi (Gautama, 2018) :

$$\delta S = \delta \int d\Omega \sqrt{-g} R = 0 \quad (2.11)$$

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{\delta g}{\delta \sqrt{-g}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \quad (2.13)$$

Selanjutnya disederhanakan persamaan (2.13) menggunakan persamaan (2.11), akan menghasilkan

$$\begin{aligned} \int d\Omega \sqrt{-g} R + \int d\Omega R \delta \sqrt{-g} &= \int d\Omega \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\ &+ \int d\Omega \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \int d\Omega R \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \int d\Omega \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\ &+ \int d\Omega \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Suku integral pertama dapat dievaluasi pada kerangka inersia lokal (koordinat normal) yaitu :

$$R_{\mu\nu}(0) = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} \quad (2.15)$$

$$\delta R_{\mu\nu}(0) = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha}) \quad (2.16)$$

Dan

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}(0) \delta R_{\mu\nu}(0) &= g^{\mu\nu}(0) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) - g^{\mu\nu}(0) \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha}) \\ &= g^{\mu\nu}(0) \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}) - g^{\mu\rho}(0) \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x^\rho} [g^{\mu\nu}(0)(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho) - g^{\mu\rho}(0)(\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha)] \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\rho} [W^\rho]
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Agar dapat menyelesaikan suku pertama (2.14)  $W^\rho$  dianggap sebagai

$$W^\rho = g^{\mu\nu}(0)(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho) - g^{\mu\rho}(0)(\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha)$$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d\Omega &= \int \sqrt{-g} \frac{\partial W^\rho}{\partial x^\rho} d\Omega \\
\int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d\Omega &= \int \frac{\partial}{\partial x^\rho} (\sqrt{-g} W^\rho) d\Omega \\
\int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d\Omega &= 0
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Dan persamaan (2.14) memperoleh :

$$\int \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] d\Omega = 0 \tag{2.19}$$

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \tag{2.20}$$

Keberadaan materi memberikan sumbangan terhadap bentuk Lagrangian yaitu Lagrangian materi  $\mathcal{L}_{mat}$  berkaitan dengan tensor kovarian energi momentum  $T_{\mu\nu}$  sehingga diperoleh bentuk umum sebagai berikut (Sporea, 2014) :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu} \tag{2.21}$$

Persamaan di atas menyatakan bahwa hukum gravitasi Einstein dengan  $k$  berupa suatu tetapan positif yang berhubungan dengan nilai konstanta gravitasi  $G$ , persamaan Euler-Lagrange pada aksi Hilbert-Einstein. Keberadaan materi memberikan sumbangsih terhadap bentuk Lagrangian yaitu Lagrangian materi  $\mathcal{L}_{mat}$  berkaitan dengan tensor kovarian energi momentum  $T_{\mu\nu}$  sehingga diperoleh bentuk umum medan Einstein dalam relativitas umum yaitu (Sporea, 2014) :

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad (2.22)$$

dengan,  $R_{\mu\nu}$  = tensor Ricci,  $g_{\mu\nu}$  = tensor metrik,  $R$  = skalar Ricci,  $T_{\mu\nu}$  = tensor energi momentum, dan  $G$  = konstanta gravitasi (Sporea, 2014).

### 2.3 Ruang-Waktu

Dalam teori relativitas khusus, dijelaskan bahwa ruang dan waktu memiliki sifat yang relatif terhadap pengamat yang sedang bergerak. Pengamat yang bergerak akan mengukur panjang dan selisih waktu yang berbeda dibandingkan dengan pengamat lain. Perbedaan utama antara teori relativitas khusus dan teori relativitas umum terletak pada fakta bahwa teori relativitas khusus hanya berlaku untuk ruang-waktu yang datar, sedangkan teori relativitas umum mencakup ruang-waktu yang melengkung. Jika kita meninjau dua titik yang berdekatan dalam ruang tiga dimensi, yang masing-masing dinyatakan dengan koordinat Kartesian A  $(x, y, z)$  dan B  $(x + dx, y + dy, z + dz)$ , kuadrat jarak antara kedua titik tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut (Anugraha, 2005) :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.23)$$

Jika dilakukan perpindahan ke koordinat silinder melalui transformasi di bawah ini,

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z \quad (2.24)$$

Maka jaraknya akan berubah menjadi,

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (2.25)$$

Ruang tiga dimensi dimana bentuk  $ds^2$  ini nantinya dapat dikembalikan lagi ke bentuk  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  dengan melalui transformasi inversi menggunakan  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\phi = \arctan \frac{y}{x}$ ,  $z = z$ . Apabila ruang tiga dimensi

dimana bentuk  $ds^2$  dapat dikembalikan ke bentuk  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  ini dinamakan sebagai ruang datar atau ruang *Euclid*. Jika tidak dapat dicari suatu sistem koordinatnya  $(x, y, z)$  yang memenuhi  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  maka ruang tersebut dinamakan ruang lengkung atau ruang *Riemann*. Bentuk  $ds^2$  untuk ruang datar satu dan dua dimensi berturut-turut adalah  $dx^2$  dan  $dx^2 + dy^2$ . Contoh ruang datar untuk dimensi tersebut masing-masing adalah garis lurus dan bidang datar. Sedangkan contoh ruang lengkung dua dimensi adalah permukaan bola, ellipsoida, paraboloida, permukaan sadel kuda, dan lain sebagainya (Anugraha, 2005).

Contoh ruang-waktu datar empat dimensi (tiga dimensi ruang berkoordinat  $(x, y, z)$  dan satu dimensi waktu berkoordinat  $t$ ) dengan invarian kuadrat elemen garis adalah ruang-waktu Minkowski yang memiliki bentuk  $ds^2$ ,

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.26)$$

Untuk contoh ruang-waktu lengkung empat dimensi adalah ruang bermetrik Schwarzschild, yang mana kuadrat elemen garisnya berbentuk :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.27)$$

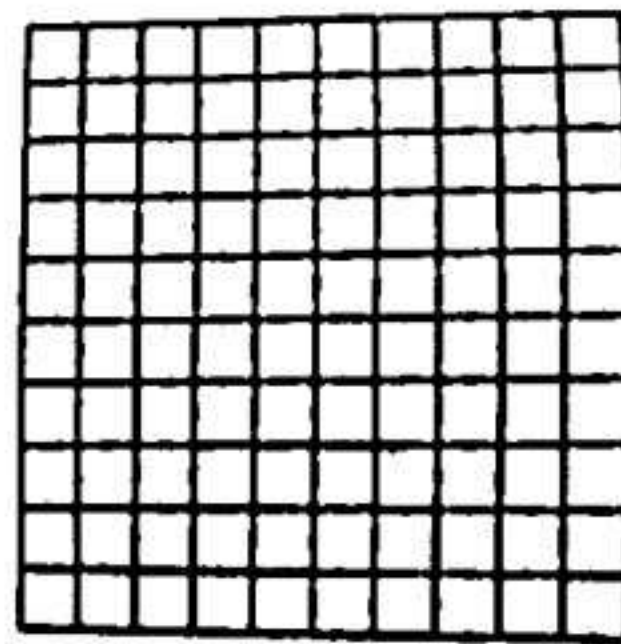
Menurut (Anugraha, 2005), terdapat beberapa perbedaan antara ruang-waktu melengkung dan ruang-waktu datar, antara lain:

1. Jumlah sudut dalam sebuah segitiga pada ruang-waktu melengkung tidak sama dengan  $180^\circ$  seperti pada ruang-waktu datar. Ini berarti bahwa garis lurus yang merupakan penghubung terpendek antara titik sudut segitiga tidak ada lagi.
2. Pada ruang-waktu melengkung, perbandingan antara keliling dengan diameter lingkaran tidak lagi sama dengan  $\pi$  seperti pada ruang-waktu datar. Ini

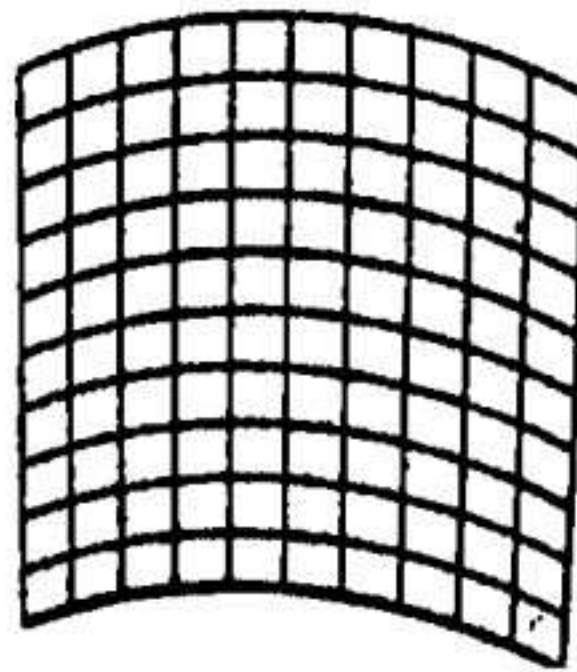
menunjukkan bahwa konsep lingkaran pada ruang-waktu melengkung berbeda dengan ruang-waktu datar.

3. Garis penghubung terpendek antara dua titik pada ruang-waktu melengkung tidak berbentuk garis lurus seperti pada ruang-waktu datar. Garis ini akan berbentuk lengkung atau melengkung mengikuti kelengkungan ruang-waktu.
4. Dua garis yang sejajar dalam ruang-waktu datar tidak akan berpotongan. Namun, dalam ruang-waktu melengkung, dua garis yang sejajar secara lokal dapat berpotongan karena kelengkungan ruang-waktu tersebut.
5. Untuk menggambarkan ruang melengkung dalam ruang-waktu datar, diperlukan satu dimensi tambahan. Ini berarti bahwa kita membutuhkan representasi visual yang menggunakan dimensi tambahan untuk memahami ruang-waktu melengkung.

Perbedaan-perbedaan ini menunjukkan karakteristik unik dari ruang-waktu melengkung dibandingkan dengan ruang-waktu datar dan merupakan salah satu konsep utama dalam teori relativitas umum.



Gambar 2.1 Ruang-Waktu Datar (Anugraha, 2005)



Gambar 2.2 Ruang-Waktu Melengkung (Anugraha, 2005)

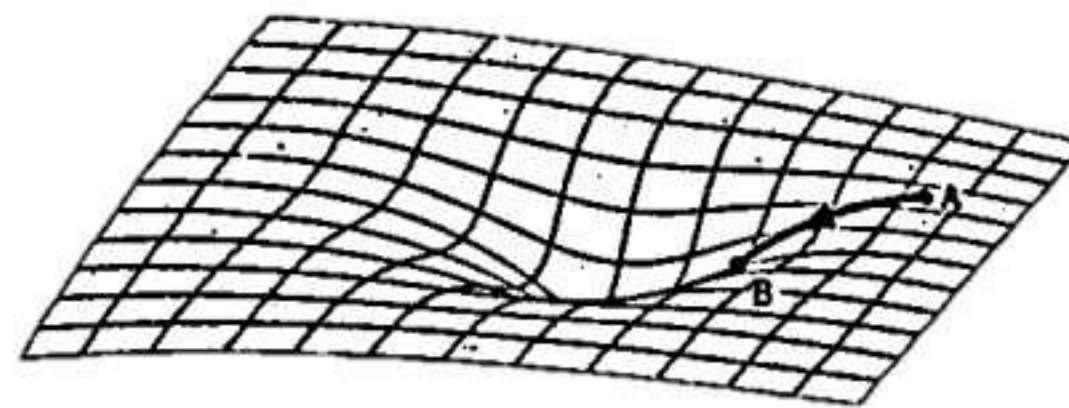
Dalam konteks ini, untuk memahami konsep ruang dan waktu, cahaya menjadi penting karena berkas cahaya mengikuti lintasan terpendek atau terdekat antara dua titik. Jika berkas cahaya mengikuti lintasan yang melengkung, hal ini menunjukkan adanya ruang-waktu melengkung. Penyebab kelengkungan ini adalah medan gravitasi. Kurva yang menghubungkan dua titik dalam geometri yang melengkung disebut geodesik. Dalam geometri datar, geodesik berupa garis lurus, sementara dalam geometri bola (melengkung), geodesik berupa busur lingkaran. Perbedaan mendasar antara teori gravitasi Newton dan teori berdasarkan ruang-waktu yang melengkung terletak pada bahasa yang digunakan. Sebagai contoh, jika sebuah massa  $m$  bergerak bebas sepanjang sumbu  $x$  dengan kecepatan tetap dan tanpa adanya gesekan, dalam bahasa fisika klasik dinyatakan sebagai  $x = x_A - vt$ . Namun, dalam bahasa ruang-waktu, hal ini didefinisikan dengan cara yang berbeda (Krane, 1992).

$$(ds)^2 = v^2(dt)^2 - (ds)^2 \quad (2.28)$$

Jadi menurut teori, partikel tersebut hanya diperbolehkan bergerak melalui titik-titik ruang dan waktu yang dihubungkan oleh selisih nol, kedudukan titik-titik tersebut dinamakan geodesik (Krane, 1992).

Sekarang, misalkan pada titik asal koordinat ditempatkan sebuah massa  $M$  yang besar, massa  $m$  akan ditarik oleh massa  $M$  dengan gaya gravitasi Newton.

Sewaktu  $m$  bergerak dari lintasan A menuju lintasan B akan mengalami percepatan. Jadi, lintasan ruang-waktunya akan melengkung. Kehadiran massa  $M$  melengkungkan ruang waktu  $xt$ , oleh karenanya ruang-waktu akan tampak seperti gambar 2.2. Dengan demikian massa  $m$  sebenarnya menempuh lintasan terpendek dari A menuju B dalam ruang-waktu lengkungnya (Krane, 1992).



Gambar 2.3 Ruang-waktu lengkung dua dimensi dari partikel-partikel

Penjelasan tentang ruang-waktu pada skala makroskopis dapat diberikan melalui Persamaan Medan Einstein. Persamaan ini dianggap sebagai landasan teoritis untuk menjelaskan berbagai fenomena seperti inflasi alam semesta, perilaku lubang hitam, perambatan gelombang gravitasi, dan pembentukan struktur di alam semesta mulai dari planet hingga galaksi dan gugus kelompok galaksi. Namun, ketika diterapkan pada skala mikroskopis, teori relativitas umum tidak cocok. Selain itu, terdapat beberapa permasalahan dalam teori kosmologi modern yang tidak dapat dijelaskan sepenuhnya oleh persamaan ini. Salah satu permasalahan yang dihadapi adalah percepatan ekspansi alam semesta, yang telah memunculkan beberapa model dengan dua pendekatan dasar. Pendekatan pertama adalah memodifikasi ruas kanan persamaan medan Einstein, yang dikenal sebagai *dark energy*. Pendekatan kedua adalah memodifikasi ruas kiri persamaan medan Einstein, yang dikenal sebagai *modified gravity*. Persamaan medan Einstein yang umumnya dikenal berlaku dalam empat dimensi ruang-waktu. Namun, terdapat pertanyaan tentang bagaimana persamaan ini dapat dimasukkan ke dalam dimensi

yang lebih tinggi, dan apakah mungkin untuk menurunkan persamaan medan ini dari aksi Einstein-Hilbert di ruang-waktu berdimensi lebih tinggi, atau menghasilkan himpunan persamaan efektif dalam empat dimensi. Kedua pendekatan ini masih belum konsisten dan belum diketahui apakah persamaan medan Einstein yang diperoleh akan mengandung konstanta kosmologis atau tidak (Timothy Clifton, 2012).

#### 2.4 Lubang Hitam Schwarzschild

Terdapat pernyataan dalam QS. Al-Mursalaat (77) ayat 8 yang menyebutkan bahwa peristiwa runtuhnya bintang disebut sebagai supernova. Pernyataan tersebut menggambarkan bahwa bintang dapat mengalami keruntuhan akibat gravitasi yang saling tarik-menarik antara partikel-partikelnya. Awalnya, bintang terbentuk dari awan gas yang melayang di ruang antar bintang dan mengalami kontraksi akibat gaya gravitasi. Kontraksi ini menyebabkan peningkatan suhu dan tekanan dalam bintang. Untuk menjaga stabilitasnya, bintang membutuhkan sumber energi panas internal yang dapat mengimbangi pengerutan lanjutan. Tanpa sumber energi ini, bintang akan kehilangan panas, tekanan dalamnya akan menurun, dan lapisan luar bintang akan runtuh. Proses ini sering disebut sebagai supernova, yang merupakan ledakan hebat yang menghasilkan energi yang sangat besar (Purwanto, 2015).

فَإِذَا النُّجُومُ طُمِسَتْ ﴿٨﴾

Artinya : *“Maka apabila bintang-bintang telah dihapuskan”*

Setelah mengalami keruntuhan, bintang tidak lagi dapat memancarkan cahaya. Oleh karena itu, supernova dianggap sebagai akhir dari keberadaan bintang tersebut, atau disebut juga sebagai *“kematian”* bintang. Setelah mati,

bintang akan bertransformasi menjadi objek yang padat dan kompak, yang dikenal sebagai "*compact object*" dalam konteks ini. Istilah "*compact object*" mengacu pada kategori objek astronomi seperti bintang katai putih, bintang neutron, dan lubang hitam. Objek-objek ini diklasifikasikan sebagai *compact object* karena memiliki kepadatan yang sangat tinggi akibat keruntuhan gravitasi. Dalam proses keruntuhan, pusat bintang mengalami pemampatan, menyebabkan elektron di pusat bintang terhimpit dan mendekati inti dengan jarak yang semakin dekat (Gautama, 2018). *Compact object* sering kali menjadi titik akhir dalam evolusi bintang dan mewakili sisa-sisa bintang tersebut. Jenis *compact object* yang terbentuk tergantung pada massa maksimum yang dicapai oleh bintang selama evolusinya.

Menurut John Michell, medan gravitasi yang sangat kuat pasti dimiliki oleh bintang yang masif dan antap sehingga mengakibatkan cahaya tidak dapat keluar dari bintang tersebut. Sebenarnya bintang ini memancarkan cahaya dari permukaannya, akan tetapi tertarik kembali oleh gravitasinya sendiri sebelum sempat bergerak jauh. Akibatnya proses ini tidak terlihat oleh pengamat di luar, tapi masih dapat dirasakan tarikan gravitasinya. Objek seperti ini diberi nama lubang hitam (*Black Hole*) oleh John Wheeler. Lubang hitam merupakan singularitas ruang-waktu. Singularitas terjadi akibat kuatnya gravitasi suatu benda yang sangat masif. Lubang hitam terjadi apabila suatu bintang neutron yang bermassa lebih besar dari  $3M_{\odot}$  maka tekanan degenerasi elektron dan neutron tak akan mampu menghentikan keruntuhan gravitasi bintang. Bintang akan menjadi semakin mampat dan medan gravitasinya semakin kuat. Dengan begitu kelengkungan ruang-waktu di sekitar bintang akan semakin besar sehingga cahaya

tidak dapat lolos. Radius maksimal bintang agar dapat menjadi lubang hitam adalah (Gautama, 2018) :

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.29)$$

Jari-jari ini dinamakan jari-jari Schwarzschild, dan lingkarannya disebut horizon peristiwa atau *event horizon*. Dari persamaan di atas, dapat diketahui bahwa kecepatan pada lubang hitam lebih besar atau sama dengan laju cahaya, sehingga cahaya tidak dapat lepas setelah memasuki *event horizon* (Gautama, 2018) :



Gambar 2.4 Lubang Hitam Schwarzschild bermassa  $M$  beradius  $r_s$

Geometri ruang-waktu yang terdapat di sekitar objek ditentukan oleh fungsi metrik yang berkaitan dengan objek tersebut. Lubang hitam Schwarzschild merupakan lubang hitam statis yang tidak memiliki muatan listrik ataupun momentum sudut. Lubang hitam ini nantinya dijabarkan dengan metrik Schwarzschild (Gautama, 2018).

Persamaan medan Einstein secara umum dituliskan seperti pada persamaan (2.22) sebagai :

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Dimana  $G_{\mu\nu}$  adalah tensor Einstein, kemudian  $T_{\mu\nu}$  adalah tensor energi momentum,  $R_{\mu\nu}$  untuk tensor Ricci dan  $R$  skalar Ricci. Solusi Schwarzschild

adalah solusi persamaan medan Einstein untuk ruang-waktu vakum di  $r$  objek massif yang statik simetri bola. Dikatakan statik karena benda tidak bergantung waktu, sehingga medannya pun tak bergantung waktu. Dikatakan spiral jika tidak bergantung pada suku  $\theta$  dan  $\phi$ . Dimulai dari ruang-waktu datar Minkowski dengan elemen garisnya berupa (Gautama, 2018) :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.30)$$

Kemudian diperkenalkan koordinat bola dengan mengubah variabelnya, maka didapatkan elemen garisnya sebagai berikut (Gautama, 2018) :

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.31)$$

Bentuk umum dari metrik ruang waktunya adalah (Gautama, 2018) :

$$ds^2 = e^{2\alpha(r,t)} dt^2 - e^{2\beta(r,t)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.32)$$

Dimana  $\alpha(r,t)$  dan  $\beta(r,t)$  adalah dua fungsi yang ditentukan oleh persamaan Einstein. Bentuk metrik di atas didapatkan dari hasil asumsi coba-coba atau yang biasa disebut dengan ansatz. Berdasarkan bentuk metrik di atas, dapat dituliskan tensor kovarian ruang-waktu simetri bola adalah (Gautama, 2018) :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\beta(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Dengan determinan metriknya :

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = -e^{2(\alpha+\beta)} r^4 \sin^2 \theta \quad (2.34)$$

Untuk tensor kontravariannya,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-2\alpha(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\beta(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Selanjutnya bisa dicari simbol Christoffel dari metrik di atas. Definisi dari simbol Christoffel itu sendiri adalah (Gautama, 2018) :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right) \quad (2.36)$$

Karena metrik yang digunakan berupa metrik diagonal, maka simbol Christoffel akan bernilai jika komponen indeksnya  $\alpha = \beta$ , maka persamaan di atas dapat diubah menjadi (Gautama, 2018) :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \left( \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right) \quad (2.37)$$

Nilai dari simbol Christoffel yang tidak nol diperoleh dengan beberapa syarat di bawah ini (Gautama, 2018) :

1. Suku pertama dalam kurung tidak nol jika  $\nu \neq \mu = \alpha$
2. Suku kedua dalam kurung tidak nol jika  $\mu \neq \nu = \alpha$
3. Suku ketiga dalam kurung tidak nol jika  $\alpha \neq \mu = \nu$
4. Ketika  $\alpha = \mu = \nu$

Syarat pertama dan kedua diperoleh karena adanya sifat simetri dari simbol Christoffel yang dituliskan dalam hubungan (Gautama, 2018) :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} \quad (2.38)$$

Maka untuk nilai dari simbol Christoffel yang tidak nol adalah :

Untuk  $\nu \neq \mu = \alpha$  dan simetrinya  $\neq \nu = \alpha$ , maka  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\mu\mu} \partial_{\nu} g_{\mu\mu}$

$$\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \partial_r e^{2\alpha} = a' \quad (2.39)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2} e^{-2\beta} \partial_t e^{2\beta} = \dot{\beta} \quad (2.40)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2r^2} \partial_r r^2 = \frac{1}{r} \quad (2.41)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \partial_r r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{r} \quad (2.42)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \partial_\theta r^2 \sin^2 \theta = \cot \theta \quad (2.43)$$

Untuk  $\alpha \neq \mu = \nu$ , maka  $\Gamma_{\mu\mu}^\alpha = -\frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \partial_\alpha g_{\mu\mu}$

$$\Gamma_{11}^0 = -\frac{1}{2} e^{-2\alpha} \partial_t (-e^{2\beta}) = \dot{\beta} e^{2(\beta-\alpha)} \quad (2.44)$$

$$\Gamma_{00}^1 = -\frac{1}{2} (-e^{-2\beta}) \partial_r e^{2\alpha} = a' e^{2(\alpha-\beta)} \quad (2.45)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} e^{-2\beta} \partial_r r^2 = -r e^{-2\beta} \quad (2.46)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{1}{2} e^{-2\beta} \partial_r r^2 \sin^2 \theta = -r \sin^2 \theta e^{-2\beta} \quad (2.47)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{2r^2} \partial_\theta r^2 \sin^2 \theta = -\sin \theta \cos \theta \quad (2.48)$$

Untuk  $\alpha = \mu = \nu$ , maka  $\Gamma_{\mu\mu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\mu} \partial_\mu g_{\mu\mu}$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \partial_t e^{2\alpha} = \dot{\alpha} \quad (2.49)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} e^{-2\beta} \partial_r e^{2\beta} = \beta' \quad (2.50)$$

Setelah diperoleh nilai dari simbol Christoffel yang hasilnya tidak sama dengan nol, dapat dicari nilai tensor Riccinya dengan menggunakan persamaan :

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \quad (2.51)$$

Dengan menggunakan sifat kesimetriannya diperoleh nilai tensor Ricci yang tidak nol adalah (Gautama, 2018) :

$$R_{00} = (\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2) + e^{2(\alpha-\beta)} \left[ \begin{array}{l} \alpha'' + \alpha'^2 \\ + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \end{array} \right] \quad (2.52)$$

$$R_{01} = \frac{2\dot{\beta}}{r} \quad (2.53)$$

$$R_{11} = -e^{2(\alpha-\beta)}(\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2) + \left[ \begin{array}{c} -\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\beta'}{r} + \\ \alpha'\beta' \end{array} \right] \quad (2.54)$$

$$R_{22} = -e^{-2\beta}(\alpha'r - \beta'r + 1) + 1 \quad (2.55)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22} \quad (2.56)$$

Berdasarkan nilai tensor Ricci yang telah diperoleh di atas, dapat ditentukan skalar Riccinya, yaitu :

$$\mathcal{R} = 2e^{-2\beta} \left[ \alpha'' - \alpha'\beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{2}{r^2} + 2e^{2(\alpha-\beta)}(\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2) \quad (2.57)$$

Dengan menerapkan syarat statis pada persamaan, suku yang diturunkan terhadap waktu akan dihilangkan, maka nilai tensor Ricci dan skalar Riccinya menjadi :

$$R_{00} = e^{2(\alpha-\beta)} \left[ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \right] \quad (2.58)$$

$$R_{11} = -\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} + \alpha'\beta' \quad (2.59)$$

$$R_{22} = -e^{-2\beta}(\alpha'r - \beta'r + 1) + 1 \quad (2.60)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22} \quad (2.61)$$

$$\mathcal{R} = 2e^{-2\beta} \left[ \alpha'' - \alpha'\beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{2}{r^2} \quad (2.62)$$

Hasil yang diperoleh di atas selanjutnya akan disubstitusikan ke dalam persamaan medan Einstein pada persamaan (2.22), dan hasilnya menjadi :

$$G_{00} = \frac{2\beta'e^{2(\alpha-\beta)}}{r} - \frac{e^{2(\alpha-\beta)}}{r^2} + \frac{e^{2\alpha}}{r^2} = 0 \quad (2.63)$$

$$G_{11} = \frac{2\alpha'}{r} - \frac{e^{2\beta}}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0 \quad (2.64)$$

$$G_{22} = r^2 e^{-2\beta} \left( \alpha'' - \alpha' \beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} \right) = 0 \quad (2.65)$$

$$G_{33} = r^2 e^{-2\beta} \left[ \alpha'' - \alpha' \beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} \right] \sin^2 \theta = 0 \quad (2.66)$$

Geometri ruang-waktu harus tereduksi menjadi ruang-waktu Minkowski untuk jarak yang sangat jauh dari massa sumber karena disebabkan oleh pengaruh gravitasi yang semakin melemah. Maka dari itu, dengan mempertimbangkan syarat asimtotik unsur  $r \gg$  maka  $g \rightarrow \eta$ , persamaan di atas memberikan  $\beta = -\alpha$ . Disubstitusikan ke dalam persamaan di atas menjadi (Gautama, 2018) :

$$2\alpha' e^{2\alpha} r + e^{2\alpha} = 1 \quad (2.67)$$

Karena  $e^{2\alpha} + 2\alpha' e^{2\alpha} r = \frac{\partial}{\partial r} (r e^{2\alpha})$ , maka (Gautama, 2018) :

$$r e^{2\alpha} = \int dr = r - r_s \quad (2.68)$$

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{r_s}{r}$$

Dimana  $r_s$  adalah sebuah tetapan integrasi berdimensi panjang yang belum diketahui nilainya dengan mensubstitusikan  $\beta = -\alpha$  dan  $e^{2\alpha}$  pada persamaan di atas, akan diperoleh bentuk (Gautama, 2018) :

$$ds^2 \equiv c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.69)$$

Persamaan (2.69) di atas dikenal sebagai metrik Schwarzschild yang memberikan geometri ruang di sekitar ruang masif simetri bola. Meskipun pada daerah terluar nilai tensor energi momentumnya sama dengan nol atau vakum, namun terdapat induksi medan gravitasi dari sumber melengkung ruang di sekelilingnya. Dalam limit medan lemah, persamaan medan Einstein dapat

didekati dengan metrik Minkowski dan akan memenuhi persamaan gravitasi Newton, menggunakan pendekatan pesturbasi orde pertama (Gautama, 2018) :

$$g_{00} \cong \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \quad (2.70)$$

Dengan  $\Phi = -\frac{2GM}{c^2}$  adalah potensial gravitasi Newton. Dengan membandingkan kedua persamaan tersebut akan diperoleh nilai dari kuantitas  $r_s$  (Gautama, 2018) :

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.71)$$

Untuk menyelesaikan solusi dari persamaan medan vakum dapat dilakukan tanpa harus mensubstitusikan nilai  $R_{\mu\nu}$  dan  $\mathcal{R}$ . Pada persamaan di atas menunjukkan bahwa tensor Ricci bernilai nol pada ruang vakum  $T_{\mu\nu} = 0$ , jadi hanya perlu memilih persamaan-persamaan dari syarat  $R_{\mu\nu} = 0$  untuk dapat mengetahui nilai  $e^{2\alpha}$  dan  $e^{2\beta}$ . Untuk daerah eksterior digunakan  $R_{00}$ ,  $R_{11}$ , dan  $R_{22}$ .

$$e^{2(\alpha-\beta)} \left[ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \right] = 0 \quad (2.72)$$

$$-\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} + \alpha'\beta' = 0 \quad (2.73)$$

$$-e^{-2\beta}(\alpha'r - \beta'r + 1) + 1 = 0 \quad (2.74)$$

Persamaan (2.73) dijumlahkan dengan persamaan (2.75) menjadi,

$$\frac{2}{r}(\alpha' + \beta') = 0 \rightarrow \beta' = -\alpha' \quad (2.75)$$

Persamaan (2.68) dan (2.69) dapat disederhanakan menjadi,

$$e^{2\alpha}(2\alpha'r + 1) - 1 = 0 \quad (2.76)$$

Diperoleh hasil yang sama dengan persamaan (2.67) , sehingga diperoleh kembali hasil dari  $e^{2\alpha} = 1 - \frac{r_s}{r}$  . Pada persamaan-persamaan di atas, tanda aksen memiliki arti turunan/derivatif ke  $r$ . Pada akhirnya dihasilkan persamaan dari metrik Schwarzschild yang dituliskan sebagai berikut (Anugraha, 2005) :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.77)$$

Solusi persamaan (2.77) tersebut bisa disebut dengan solusi Schwarzschild. Solusi Schwarzschild merupakan solusi dari persamaan medan Einstein di ruang vakum. Maknanya, solusi tersebut akan berlaku jika hanya di luar sumber gravitasi. Untuk sumber gravitasi berbentuk bola dengan radius  $R$ , solusinya hanya berlaku untuk  $r > R$ . Oleh karena itu, solusi Schwarzschild harus disesuaikan dengan beberapa solusi interior  $r = R$  untuk menggambarkan medan gravitasi baik di dalam maupun di luar sumber gravitasi (Anugraha, 2005).

## 2.5 Persamaan Umum Klein-Gordon

Persamaan gelombang yang pernah dikemukakan oleh Erwin Schrodinger ternyata hanya berlaku untuk partikel non relativistik saja. Schrodinger sempat berusaha menyempurnakan persamaan tersebut, namun tidak membuahkan hasil. Oleh karena itu, pada tahun 1926 dilakukan modifikasi persamaan Schrodinger untuk menjadi persamaan yang lebih sederhana dengan menggunakan konsep momentum dan energi relativistik yang dilakukan oleh Oskar Klein dan Walter Gordon yang kemudian kita kenal sebagai persamaan Klein-Gordon. Persamaan gelombang Schrodinger dimodifikasi dengan menggabungkan teori medan kuantum dan teori relativitas khusus menjadi persamaan yang relevan untuk kasus relativistik ( $v \approx c$ ) (Romadani, 2023). Persamaan Klein-Gordon juga bisa disebut sebagai persamaan Schrodinger versi relativistik. Persamaan Klein-Gordon

digunakan untuk menggambarkan persamaan medan untuk partikel dengan spin-0 (Saadatmand, 2017).

Menurut (Humaidi, Simbolon, Ong, & Afrida, 2016) fungsi gelombang, rapat probabilitas, dan tingkat-tingkat energi elektron merupakan solusi dari persamaan Klein-Gordon. (Sutopo, 2005) berpendapat bahwa fungsi gelombang  $\phi(x, t)$  pada persamaan Schrodinger dapat digunakan untuk mengetahui nilai dalam berbagai besaran. Fungsi gelombang Schrodinger dalam keadaan relativistik dapat dituliskan sebagai (Sutopo, 2005) :

$$i\hbar \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r, t) \right] \phi(x, t) \quad (2.78)$$

Partikel skalar merupakan persamaan gelombang untuk sebuah partikel spin-0 yang memiliki satu komponen, yaitu  $\psi$ . Persamaan ini diperoleh dengan mengganti operator diferensial untuk  $E$  dan  $p$  ke dalam standar model kuantum (Ryder, 1985). Menurut Plank, energi adalah  $E = hf$  dan konstanta Plank adalah  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ . Sehingga persamaannya dapat ditulis menjadi (Sugiyono, 2016) :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{E^2}{\hbar^2} \phi \quad (2.79)$$

Jika fungsi gelombang  $\phi$  di atas diturunkan secara parsial sebanyak dua kali terhadap ruang tiga dimensi, maka menjadi :

$$\nabla^2 \phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = -\frac{E^2}{\hbar^2} \phi = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \phi \quad (2.80)$$

Gagasan de Broglie menyatakan bahwa panjang gelombang  $= \frac{h}{p}$ , sehingga persamaan tersebut menjadi (Sugiyono, 2016) :

$$\nabla^2 \phi = -\frac{p^2}{\hbar^2} \phi \quad (2.81)$$

Fungsi gelombang tersebut mengandung gagasan dari teori kuantum dan teori klasik pada kondisi relativistik menjadi energi total relativistik partikel bebas bermassa  $m$  dengan fungsi gelombang  $\phi$  yang diperoleh (Ryder, 1985) :

$$E^2\phi = (p^2c^2 + m^2c^4)\phi \quad (2.82)$$

Kemudian masing-masing ruas persamaan dikerjakan pada sembarang fungsi gelombang  $\phi(x, t)$  sehingga akan diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$-\hbar^2 \frac{1}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \phi = \left( -\hbar^2 \frac{1}{\phi} \nabla^2 c^2 + m^2 c^4 \right) \phi \quad (2.83)$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (-\hbar^2 \nabla^2 c^2 + m^2 c^4) \phi \quad (2.84)$$

Persamaan (2.84) dibagi dengan kuadrat kecepatan cahaya dan diperoleh,

$$-\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + (\hbar^2 \nabla^2 - m^2 c^2) \phi = 0 \quad (2.85)$$

Jika diuraikan akan menjadi,

$$-\hbar^2 \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi - m^2 c^2 \phi = 0 \quad (2.86)$$

Persamaan di atas menggunakan operator D'Alembert :

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.87)$$

Kemudian, persamaan (2.86) dikalikan dengan  $\frac{1}{\hbar^2 c^2}$  dengan  $\hbar = c = 1$ , maka persamaan tersebut akan menjadi :

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0 \quad (2.88)$$

$$\nabla^2 \left( \square - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0 \quad (2.89)$$

Dengan  $k = \frac{mc}{\hbar}$  maka menjadi,

$$(\square - k^2)\phi = 0 \quad (2.90)$$

Persamaan (2.90) di atas merupakan persamaan yang biasa kita sebut sebagai persamaan Klein-Gordon. Solusi untuk persamaan Klein-Gordon mengandung istilah energi positif dan juga energi negatif untuk partikel bebas. Persamaan Klein-Gordon dapat menjelaskan pergerakan elektron saat mengelilingi atom dalam lintasan tertentu (Naiggolan, 2012).

## BAB III

### SOLUSI PERSAMAAN KLEIN-GORDON-SCHWARZSCHILD

#### 3.1 Modifikasi Persamaan Klein-Gordon Dalam Ruang-Waktu Datar Ke Ruang-Waktu Melengkung

Persamaan Klein-Gordon merupakan persamaan diferensial parsial yang menggambarkan partikel bermassa dan tak berputar dengan spin-0 dalam konteks mekanika kuantum relativitas. Untuk merumuskan persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung diperlukan bantuan metrik di lubang hitam, yaitu dengan menggunakan metrik Schwarzschild (yang menggambarkan medan gravitasi sekitar objek dengan massa yang besar seperti bintang atau lubang hitam). Oleh karena itu, diperlukan modifikasi untuk persamaan Klein-Gordon dengan menggabungkan persamaan tersebut dengan prinsip-prinsip teori relativitas umum (Gautama, 2018).

Berdasarkan persamaan (2.90) telah dihasilkan persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu Minkowski (datar) sebagai berikut :

$$\square \psi - m^2 \psi = 0$$

Dengan  $\square$  adalah operator d'Alembertian kovarian, yang merupakan hasil kali dari turunan kovarian dan turunan kontravarian (Naiggolan, 2012) :

$$\square = \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \psi \quad (3.1)$$

Untuk memodifikasi persamaan Klein-Gordon dari ruang-waktu datar ke ruang-waktu melengkung (dalam konteks relativitas umum atau teori gravitasi Einstein), perlu memasukkan efek kelengkungan ruang-waktu akibat keberadaan massa dan energi. Efek ini dijelaskan oleh persamaan medan Einstein.

Koordinat ruang-waktu yang didefinisikan oleh metrik ruang-waktu dapat menggambarkan geometri ruang-waktu di sekitar objek bermassa dan berenergi.

Koordinat ruang-waktu sferis simetris adalah salah satu sistem koordinat yang digunakan dalam fisika relativitas khusus dan relativitas umum untuk menggambarkan ruang-waktu di sekitar objek yang memiliki simetri bola atau sferis. Simetri bola ini berarti bahwa sifat fisik dari sistem tidak bergantung pada arah tertentu dalam ruang, tetapi hanya bergantung pada jarak radial dari pusat sistem. Koordinat ruang-waktu dalam teori relativitas umum dapat bervariasi tergantung pada situasi. Untuk menggambarkan koordinat ruang-waktu sferis simetris, dituliskan dengan metrik ruang-waktu dengan bentuk umum sebagai berikut (Anugraha, 2005) :

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.2)$$

Dimana  $d\Omega^2$  adalah elemen sudut untuk koordinat bola. Koordinat ini membantu dalam memahami bagaimana benda-benda tersebut akan mempengaruhi ruang-waktu di sekitarnya. Dalam konteks koordinat sferis simetris, dimana sistem memiliki simetri bola, elemen metrik ini akan mengalami penyederhanaan yang nantinya dapat berpengaruh kepada komponen ruang dan waktu. Dalam koordinat ruang-waktu sferis terdapat tiga koordinat utama yaitu koordinat radius ( $r$ ), koordinat zenit ( $\theta$ ), dan koordinat azimuth ( $\phi$ ) (Anugraha, 2005).

Dari persamaan (3.2) di atas terdapat komponen yang memiliki peran masing-masing dalam mengontrol atau mempengaruhi ruang-waktu. Komponen  $g_{tt}$  ini mengontrol bagaimana waktu diperlakukan dalam sistem koordinat ini. Jika bernilai negatif, ini menunjukkan bahwa waktu adalah bagian dari konsep “jarak” dalam ruang-waktu. Dalam koordinat sferis simetris, elemen metrik ini sering kali diubah sedemikian rupa sehingga bergantung pada koordinat radial  $r$  dan waktu  $t$ . Ini menggambarkan pengaruh massa dan energi pada laju waktu di berbagai jarak

dari pusat sistem. Untuk komponen  $g_{rr}$  ini mengontrol bagaimana jarak radial  $r$  dalam sistem koordinat. Ini nantinya mencerminkan bagaimana geometri ruang berubah seiring perubahan jarak radial dari pusat sistem. Terdapat juga komponen sudut yang mengontrol bagaimana elemen sudut polar  $\theta$  dan sudut azimuth  $\phi$  diperlakukan dalam koordinat sferis simetris. Dalam situasi sferis simetris, biasanya menunjukkan bagaimana area pada sudut polar dan sudut azimuth bergantung pada jarak radial (Saadatmand, 2017).

Modifikasi persamaan Klein-Gordon dari ruang-waktu datar ke ruang-waktu melengkung adalah langkah penting dalam teori relativitas umum Einstein. Dalam teori relativitas umum, gravitasi diinterpretasikan sebagai hasil lengkungan ruang-waktu oleh massa dan energi. Dalam konteks ini, persamaan Klein-Gordon yang awalnya digunakan untuk menggambarkan partikel bermassa dalam ruang-waktu datar harus disesuaikan agar bisa mengakomodasi lengkungan ruang-waktu yang terjadi di sekitar benda bermassa. Modifikasi utama dalam persamaan ini terletak pada penggantian turunan biasa dengan turunan kovarian, yang memperhitungkan efek kelengkungan ruang-waktu. Dalam persamaan Klein-Gordon di ruang-waktu melengkung, simbol  $\nabla$  digunakan untuk menyimbolkan turunan kovarian, yang memungkinkan partikel untuk bergerak di sepanjang garis geodesik, yaitu lintasan terpendek dalam ruang-waktu melengkung (Hartle, 2003).

Pentingnya modifikasi ini terletak pada kemampuan persamaan Klein-Gordon yang diperbarui untuk menjelaskan bagaimana partikel bermassa berinteraksi dengan gravitasi, sehingga memberikan landasan teoritis bagi konsep-konsep seperti lubang hitam dan relativitas umum. Hal ini juga memungkinkan untuk

memahami fenomena-fenomena astrofisika yang melibatkan kondisi ekstrem di dekat benda bermassa besar.

### 3.1.1 Metrik Schwarzschild

Dalam koordinat bola atau sferis, metrik Schwarzschild dapat dituliskan seperti pada persamaan (2.77) :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Di sini,  $ds^2$  adalah elemen jarak dalam ruang-waktu,  $t$  adalah waktu koordinat,  $r$  adalah jarak radial dari pusat massa,  $\theta$  adalah sudut polar,  $\phi$  adalah sudut azimuthal,  $G$  adalah konstanta gravitasi Newton,  $M$  adalah massa objek yang menghasilkan metrik ini (dalam hal ini adalah massa lubang hitam), dan  $c$  adalah kecepatan cahaya (Anugraha, 2005).

Penting untuk diingat bahwa metrik Schwarzschild menggambarkan efek gravitasi dari objek bermassa besar pada ruang-waktu di sekitarnya. Salah satu ciri penting dari metrik ini adalah adanya "*horizon peristiwa*" yang merupakan jarak terdekat dari lubang hitam yang tidak dapat ditembus oleh cahaya atau objek apapun. Horizon peristiwa terletak pada  $r = \frac{2GM}{c^2}$  dan ini adalah batas di mana efek gravitasi sangat kuat sehingga tidak ada objek atau sinyal yang dapat melintasinya ke luar. Metrik Schwarzschild telah menjadi inti dalam memahami sifat-sifat lubang hitam, seperti horizon peristiwa, singularitas di pusat lubang hitam, dan efek gravitasi di sekitar objek bermassa besar (Carroll, 2004).

#### 3.1.1.1 Simbol Christoffel Dari Metrik Schwarzschild

Dalam teori relativitas umum, simbol Christoffel adalah komponen dari koneksi metrik. Koneksi ini adalah konsep dalam geometri diferensial yang

digunakan untuk menggambarkan bagaimana ruang-waktu melengkung berinteraksi dengan massa dan energi dalam kerangka teori gravitasi Einstein. Simbol Christoffel sering kali ditulis sebagai  $\Gamma$  (*gamma*) dengan indeks atas dan bawah yang menghubungkan perubahan basis koordinat lokal yang melibatkan perubahan dalam ruang-waktu melengkung. Secara formal, Simbol Christoffel didefinisikan sebagai:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left( \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\lambda}} \right)$$

Dalam konteks metrik Schwarzschild, simbol Christoffel pertama adalah konsep dalam geometri diferensial yang menghubungkan turunan kovarian dari metrik ruang dan waktu. Untuk menghitung simbol Christoffel dari metrik Schwarzschild, diperlukan perhitungan turunan parsial dari metrik tersebut terhadap masing-masing koordinat. Turunan parsial merupakan konsep dasar dalam kalkulus yang mengukur perubahan suatu fungsi terhadap perubahan variabel-variabel independen yang membentuk fungsi tersebut. Berikut ini turunan parsial dari metrik Schwarzschild terhadap koordinat ruang-waktu  $(t, r, \theta, \phi)$  yang hasilnya tidak sama dengan nol adalah :

$$\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right) = \frac{2GM}{c^2 r^2} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \right) = \frac{2GM}{c^2 r^2 \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^2} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (r^2) = 2r \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin^2 \theta) = 2r \sin^2 \theta \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \sin^2 \theta) = 2r^2 \sin \theta \cos \theta \quad (3.7)$$

Kemudian, dari turunan parsial komponen metrik Schwarzschild di atas, dapat dihitung simbol Christoffel pertama ( $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ ), untuk simbol Christoffel yang nilainya tidak sama dengan nol yaitu :

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} g^{rr} \left( \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left( \frac{GM}{c^2 r^2} \right) \quad (3.8)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} g^{rr} \left( \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) = \frac{GM}{c^2 r^2 \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} \left( \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) (2r) \\ &= \frac{c^2 r - 2GM}{c^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{1}{2} g^{rr} \left( \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} \right) = \left( \frac{c^2 r - 2GM}{c^2} \right) \sin^2 \theta \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left( \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} \right) = \sin \theta \cos \theta \quad (3.12)$$

Turunan parsial dan simbol Christoffel ini sendiri nantinya akan saling berkaitan. Bisa dikatakan jika turunan parsial mewakili perubahan komponen metrik dengan perubahan koordinat. Sedangkan simbol Christoffel digunakan untuk menggambarkan hubungan antara perubahan tersebut dan juga efek kelengkungan ruang-waktu pada lintasan partikel. Simbol Christoffel ini merujuk pada simbol-simbol yang didefinisikan oleh persamaan geodesik dalam teori relativitas umum.

Persamaan geodesik adalah persamaan diferensial yang menggambarkan lintasan partikel bebas yang mengikuti jalur terpendek

(geodesik) dalam ruang-waktu lengkung. Dalam konteks metrik Schwarzschild, simbol Christoffel digunakan untuk menghitung turunan kovarian dari empat koordinat dalam ruang-waktu terhadap parameter jalur, biasanya berupa parameter afinitas yang memetakan lintasan geodesik (Carroll, 2004).

### 3.1.1.2 Turunan Kovarian dan Turunan Kontravarian Dari Metrik Schwarzschild

Ketika simbol Christoffel dikaitkan dengan turunan kovarian, maka akan terdapat pembahasan lebih dalam mengenai konsep teori relativitas umum. Turunan kovarian adalah konsep yang terkait dengan perubahan suatu tensor saat berpindah dari satu titik ke titik lain dalam ruang-waktu melengkung. Bentuk umumnya :

$$\nabla_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\psi - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi$$

Turunan kovarian mempertimbangkan efek perubahan koordinat dan efek gravitasi dalam perhitungannya. Dalam teori relativitas umum, dikatakan jika turunan kovarian dari suatu tensor dengan menggunakan simbol Christoffel menggambarkan bagaimana tensor ini nantinya akan berubah saat berpindah dalam ruang-waktu melengkung. Menghitung turunan kovarian adalah langkah awal untuk menentukan perumusan persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung. Berikut ini turunan kovariannya :

$$\nabla_t\psi = \partial_t\psi - \Gamma_{t\beta}^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi = \frac{GM}{c^2r^2} \quad (3.13)$$

$$\nabla_r\psi = \partial_r\psi - \Gamma_{r\beta}^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi = -\frac{GM}{c^2r^2} \quad (3.14)$$

$$\nabla_{\theta}\psi = \partial_{\theta}\psi - \Gamma_{\theta\beta}^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi = \sin\theta \cos\theta \quad (3.15)$$

$$\nabla_{\phi}\psi = \partial_{\phi}\psi - \Gamma_{\phi\beta}^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad (3.16)$$

Dalam persamaan Klein-Gordon, yang merupakan persamaan gelombang relativistik, yang menggambarkan partikel bermassa dengan spin-0, turunan kovarian diperlukan untuk memperhitungkan kelengkungan ruang-waktu dalam perhitungan turunan ruang dan waktu dari gelombang partikel ini. Dalam formulasi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung, turunan kovarian digunakan untuk menggantikan turunan biasa dalam persamaan gelombang Klein-Gordon dalam ruang-waktu datar yang memungkinkan untuk memasukkan efek kelengkungan ruang-waktu yang dihasilkan oleh massa dan energi ke dalam persamaan, menghasilkan prediksi gerakan partikel yang lebih akurat dalam kerangka relativitas umum.

Sedangkan untuk turunan kontravarian, merupakan turunan yang merujuk pada perubahan nilai objek tersebut dalam arah yang diukur dalam koordinat kontravarian. Turunan ini memungkinkan untuk memahami bagaimana suatu objek nantinya akan berubah dalam ruang kontravarian saat bergerak dalam permukaan ruang. Dalam persamaan Klein-Gordon, turunan kontravarian diperlukan untuk menghitung variasi atau perubahan nilai gelombang partikel terhadap perubahan posisi atau momentumnya dalam ruang-waktu melengkung. Bentuk umum turunan kontravarian adalah :

$$\nabla^{\mu}\psi = g^{\alpha\beta}\nabla_{\mu}\psi$$

Dalam persamaan diferensial dan analisis tensor, turunan kontravarian didefinisikan dengan menggunakan basis dual dari ruang vektor. Basis dual adalah himpunan fungsi-fungsi linier yang memetakan setiap elemen dalam ruang ke bidang bilangan kompleks atau ruang lainnya. Turunan kontravarian

kemudian dihitung dengan cara melibatkan turunan parsial terhadap masing-masing variabel independen dan menggunakan aturan rantai untuk mendapatkan hasil akhir.

Secara intuitif, turunan kontravarian dapat dipahami sebagai perubahan tingkat cepat atau sensitivitas suatu fungsi terhadap perubahan infinitesimal dalam variabel independennya. Ini membantu dalam memahami bagaimana suatu sistem berubah sehubungan dengan faktor-faktor apa saja yang mempengaruhinya. Jika metrik Schwarzschild di substitusikan ke dalamnya, maka akan diperoleh hasil turunan kontravarian sebagai berikut :

$$\nabla^t \psi = g^{tt} \nabla_t \psi = -\frac{GM}{c^2 r^2 - 2GMr} \quad (3.17)$$

$$\nabla^r \psi = g^{rr} \nabla_r \psi = \frac{2G^2 M^2 - c^2 GM r^2}{c^4 r^4} \quad (3.18)$$

$$\nabla^\theta \psi = g^{\theta\theta} \nabla_\theta \psi = \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \quad (3.19)$$

$$\nabla^\phi \psi = g^{\phi\phi} \nabla_\phi \psi = -\frac{1}{r^2 \sin \theta \cos \theta} \quad (3.20)$$

Untuk menerapkannya pada ruang-waktu melengkung Schwarzschild di sekitar lubang hitam yang tidak berotasi (berputar) dan tanpa muatan listrik (lubang hitam Schwarzschild), kita harus menggunakan metrik Schwarzschild untuk menghitung tensor metrik dan komponen-komponennya. Turunan kontravarian kemudian diterapkan dengan mempertimbangkan transformasi koordinat antara sistem koordinat lokal dan sistem koordinat global dalam ruang-waktu melengkung. Ini akan memberikan bentuk baru dari operator laplacian serta penggunaan aturan rantai untuk mendapatkan hasil akhirnya.

### 3.1.2 Operator D'Alembertian dalam Ruang-Waktu Melengkung

Operator d'Alembertian merupakan operator diferensial kedua yang umumnya digunakan dalam konteks fisika, terutama dalam teori gelombang dan relativitas. Operator ini juga dikenal sebagai "*Box Operator*" karena notasinya yang sering menggunakan kotak ( $\square$ ). Operator d'Alembertian didefinisikan sebagai jumlah dari laplacian ruang dan laplacian waktu dari suatu fungsi dalam ruang-waktu 4 dimensi (dimana berupa 3 dimensi ruang dan 1 dimensi waktu) (Lizardo, 2019).

Secara matematis, operator d'Alembertian ( $\square$ ) dari suatu fungsi  $\psi(x, y, z, t)$  di ruang-waktu datar adalah (Naiggolan, 2012) :

$$\square \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (3.21)$$

Atau, jika dibuat lebih kompleks persamaannya menjadi :

$$\square \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi \quad (3.22)$$

Disini,  $t$  adalah koordinat waktu, dan  $x, y, z$  adalah koordinat ruang datar (Naiggolan, 2012).

Dalam relativitas umum, ruang-waktu tidak lagi dianggap datar, melainkan melengkung oleh massa dan energi yang hadir di dalamnya. Dalam kerangka relativitas umum, metrik tensor  $g_{\mu\nu}$  digunakan untuk menggambarkan geometri dari ruang-waktu melengkung. Dalam ruang-waktu melengkung, koordinat pada ruang-waktu datar yang awalnya  $\psi(t, x, y, z)$  harus diubah ke koordinat bola yaitu  $\psi(t, r, \theta, \phi)$ , sehingga menjadi

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \quad (3.23)$$

Operator d'Alembertian dalam ruang-waktu melengkung memiliki bentuk yang lebih kompleks, bentuk umumnya yaitu :

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_{\nu} \psi) \quad (3.24)$$

Disini,  $g_{\mu\nu}$  merupakan tensor metrik,  $\sqrt{-g}$  merupakan akar kuadrat dari determinan tensor metrik,  $\partial_{\mu}$  adalah turunan parsial terhadap koordinat ruang-waktu, dan  $g^{\mu\nu}$  adalah invers dari tensor metrik atau metrik kontravarian (Lizardo, 2019).

Dalam kasus khusus dimana gravitasi diabaikan (misalnya, ketika berada dalam kondisi yang mendekati vakum atau dalam kondisi dengan gaya gravitasi yang sangat lemah), maka tensor metrik  $g_{\mu\nu}$  dapat dianggap mendekati metrik Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  yang mewakili ruang-waktu datar dalam relativitas khusus. Dalam hal ini, bentuk operator d'Alembertian dalam ruang-waktu melengkung akan mendekati bentuk operator d'Alembertian dalam ruang-waktu datar. Namun, dalam kasus umum ketika gravitasi memainkan peran penting, geometri ruang-waktu melengkung tidak dapat diabaikan. Dalam teori relativitas umum, konsep operator d'Alembertian tetap relevan untuk menggambarkan fenomena gelombang dan interaksi dalam kerangka geometri melengkung yang dijelaskan oleh tensor metrik. Oleh karena itu, operator d'Alembertian dalam ruang-waktu datar dan dalam ruang-waktu melengkung saling berkaitan melalui pemahaman yang lebih luas tentang geometri, massa, dan energi dalam ruang-waktu.

Untuk menurunkan perumusan persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung dengan menggunakan metrik Schwarzschild, perlu

disubstitusikan komponen metrik Schwarzschild ke dalam operator d'Alembertian dalam ruang-waktu melengkung, sehingga diperoleh :

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right) \partial^\mu - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \partial^\nu \right) \quad (3.25)$$

Disini, komponen metrik  $g^{\mu\nu}$  digantikan dengan komponen metrik Schwarzschild yang mempertimbangkan efek geometri dari medan gravitasi.

Dari persamaan (3.25) di atas, kemudian dihitung turunan parsial pertama dan kedua dari persamaan tersebut, hingga diperoleh turunan terhadap  $\partial_\mu$  adalah:

$$\square = - \left( \frac{2GM}{c^2 r^2} \right) g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right) \partial_\nu \right) \quad (3.26)$$

Persamaan (3.26) di atas merupakan bentuk akhir dari operator d'Alembertian kovarian yang nantinya akan di substitusikan ke dalam persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung. Sehingga persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung dengan koordinat metrik Schwarzschild bentuknya akan berubah menjadi :

$$\left[ - \left( \frac{2GM}{c^2 r^2} \right) g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right) \partial_\nu \right) \right] \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0 \quad (3.27)$$

Penerapan operator d'Alembertian dalam ruang-waktu melengkung memiliki banyak implikasi fisika yang menarik. Salah satu implikasi terpenting adalah prediksi gelombang gravitasi. Operator d'Alembertian dalam ruang-waktu melengkung adalah konsep penting dalam teori relativitas umum yang digunakan untuk menggambarkan perilaku gelombang dan gangguan dalam konteks ruang-waktu yang melengkung akibat dari massa dan energi. Operator ini memainkan peran kunci dalam memahami fenomena seperti gelombang

gravitasi dan perilaku partikel dalam gravitasi yang kuat. Menurut teori relativitas umum, benda-benda besar seperti sistem bintang biner yang berputar dapat menyebabkan gangguan dalam struktur ruang-waktu yang merambat sebagai gelombang gravitasi (Gary, 2021). Operator d'Alembertian memungkinkan kita untuk menggambarkan bagaimana gelombang gravitasi ini merambat melalui ruang-waktu. Selain itu, operator d'Alembertian juga digunakan dalam konteks lain dalam teori relativitas, seperti persamaan geodesik yang menggambarkan lintasan partikel dalam ruang-waktu melengkung.

### 3.1.3 Persamaan Klein-Gordon dalam Ruang-Waktu Melengkung

Untuk memodifikasi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu datar menjadi ruang-waktu melengkung, perlu memasukkan efek gravitasi dari metrik Schwarzschild. Dalam metrik Schwarzschild, komponen metrik kontravarian yang relevan dan determinan matriknya adalah :

$$g^{tt} = -\frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \quad (3.28)$$

$$g^{rr} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \quad (3.29)$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \quad (3.30)$$

$$g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (3.31)$$

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta \quad (3.32)$$

Kemudian, operator turunan disubstitusikan ke dalam  $g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ , sehingga menjadi :

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\psi &= -\frac{1}{\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)}\partial_t\partial_t\psi + \left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)\partial_r\partial_r\psi \\
&+ \frac{1}{r^2}\partial_\theta\partial_\theta\psi + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi\partial_\phi\psi
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Selanjutnya, operator persamaan di substitusikan ke persamaan (3.33), sehingga diperoleh hasil :

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)}\partial_t\partial_t\psi - \left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)\partial_r\partial_r\psi \\
&+ \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Dengan mensubstitusikan komponen-komponen metrik Schwarzschild yang telah diketahui sebelumnya,

$$\begin{aligned}
-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right) &= g_{tt} \\
\frac{1}{\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)} &= g_{rr}
\end{aligned}$$

Dan operator total momentum sudut,

$$L^2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

Maka diperoleh hasil persamaan akhir yang lebih sederhana yaitu berupa :

$$\frac{1}{g_{tt}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{g_{rr}}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{L^2}{r^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0 \tag{3.35}$$

Persamaan (3.35) ini adalah bentuk akhir dari perumusan persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung dengan menggunakan metrik Schwarzschild. Pada dasarnya, persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung mempertimbangkan efek lengkungan ruang-waktu dengan menggantikan operator Laplace spasial ( $\nabla^2$ ) dalam persamaan Klein-Gordon.

Persamaan ini menggambarkan bagaimana partikel dengan massa bermuatan berinteraksi dengan medan gravitasi yang dihasilkan oleh objek bermassa dalam kerangka relativistik. Solusi dari persamaan ini pada langkah selanjutnya, akan memberikan informasi tentang perilaku partikel dalam medan gravitasi yang kuat di sekitar lubang hitam.

### 3.2 Solusi Persamaan Klein-Gordon Dalam Ruang-Waktu Melengkung Schwarzschild

Persamaan Klein-Gordon dimodifikasi untuk memperhitungkan pengaruh medan gravitasi dengan memasukkan komponen metrik Schwarzschild, yaitu  $g_{tt}$  dan  $g_{rr}$ , ke dalam persamaan. Komponen  $g_{tt}$  dan  $g_{rr}$  dari metrik Schwarzschild menggambarkan pengaruh medan gravitasi pada waktu dan ruang radial.  $g_{tt}$  mencakup perubahan dalam waktu (dilatasi waktu gravitasi), sementara  $g_{rr}$  mencakup perubahan dalam jarak radial. Dengan  $\hbar = c = 1$ , maka persamaan Klein-Gordon yang telah termodifikasi pada persamaan (3.35) menjadi :

$$\left[ \frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{g_{rr}} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{r^2} + m^2 \right] \psi = 0$$

Untuk memudahkan pemisahan variabel, maka dapat memasukkan kembali operator total momentum sudut berupa,

$$L^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Sehingga persamaan (3.35) menjadi :

$$\left[ \frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{g_{rr}} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) + m^2 \right] \psi = 0 \quad (3.36)$$

Dari persamaan (3.36) yang merupakan turunan pertama dan kedua terhadap ruang (radial) dari persamaan Klein-Gordon yang telah termodifikasi dalam

ruang-waktu melengkung tersebut, dapat diketahui bagaimana medan gravitasi mempengaruhi percepatan partikel dalam ruang-waktu melengkung yang mencakup efek perubahan jarak radial. Turunan kedua terhadap waktu menggambarkan bagaimana perubahan dalam waktu lokal partikel dipengaruhi oleh medan gravitasi (Philippe & Ma, 2022).

### 3.2.1 Pemisahan Variabel

Selanjutnya, dilakukan pemisahan variabel pada persamaan Klein-Gordon yang sudah dimodifikasi dalam ruang-waktu melengkung. Pemisahan variabel ini dilakukan dengan mengganti  $\psi(t, r, \theta, \phi) = T(t)R_l(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$  pada persamaan berikut, sehingga :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2 R} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{g_{rr}} \frac{\partial R}{\partial r} \right) \\ + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{Y \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] \\ + m^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

#### 3.2.1.1 Pemisahan Variabel Waktu ( $t$ )

Kemudian dilakukan pemisahan variabel masing-masing untuk bagian waktu dan ruang. Untuk yang pertama yaitu pemisahan variabel bagian waktu, yaitu :

$$\frac{1}{T(t)} \left( \frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) T(t) = -E^2 \quad (3.38)$$

Dimana  $E$  adalah energi total partikel yang menghasilkan persamaan diferensial waktu sebagai berikut :

$$\frac{1}{T} \frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -E^2$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -E^2 g_{tt} T \quad (3.39)$$

Diasumsikan jika :

$$T = e^{i\omega t}$$

Dimana  $\omega$  adalah frekuensi angular. Kemudian persamaan asumsi disubstitusikan ke dalam persamaan diferensial, sehingga :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{i\omega t}) = -E g_{tt} e^{i\omega t}$$

$$(i\omega)^2 e^{i\omega t} = -E g_{tt} e^{i\omega t}$$

$$\omega^2 = -E g_{tt}$$

$$\omega^2 = -E g_{tt}$$

$$\omega = -\sqrt{E g_{tt}}$$

Sehingga, solusi umum untuk  $T(t)$  adalah :

$$T(t) = A e^{-i\sqrt{E g_{tt}} t} \quad (3.40)$$

Solusi waktu mencerminkan bagaimana fungsi gelombang akan berfluktuasi dengan waktu. Solusi ini merupakan komponen yang menggambarkan pergerakan partikel dan osilasi gelombang seiring perubahan waktu. Dalam konteks Schwarzschild, medan gravitasi yang kuat dapat memengaruhi bagaimana frekuensi partikel berkaitan dengan jarak radial dari objek bermassa kuat seperti lubang hitam. Dengan kata lain, efek gravitasi Schwarzschild mengubah perilaku gelombang seiring berjalannya waktu. Dalam situasi ini, perubahan frekuensi partikel dapat mencerminkan efek pergeseran merah (*redshift*) atau *blueshift*, tergantung pada apakah partikel tersebut mendekati atau menjauhi objek berat tersebut (Rebekah, Chabysheva, & Hiller, 2017).

### 3.2.1.2 Pemisahan Variabel Sudut ( $\theta, \phi$ )

Langkah selanjutnya yaitu pemisahan variabel sudut ( $\theta, \phi$ ) dengan menggunakan pemisalan  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  dengan “*separation constant*” atau konstanta separasi berupa  $l(l + 1)$ , sehingga (Griffith, 2005) :

$$\frac{1}{Y_{lm}} \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\phi^2} \right] = -l(l + 1) \quad (3.41)$$

Persamaan (3.41) menentukan ketergantungan  $\psi$  pada  $\theta$  dan  $\phi$  yang dikalikan dengan  $Y \sin^2 \theta$ , menjadi (Griffith, 2005) :

$$\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\phi^2} = -l(l + 1) \sin^2\theta Y_{lm} \quad (3.42)$$

Persamaan (3.42) dapat dipisahkan menjadi dua persamaan yang masing-masing hanya bergantung terhadap satu variabel yaitu  $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ , menjadi (Griffith, 2005) :

$$\left\{ \frac{1}{\Theta} \left[ \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\Theta}{\partial\theta} \right) \right] + l(l + 1) \sin^2\theta \right\} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = 0 \quad (3.43)$$

Suku pertama merupakan fungsi dari  $\theta$  dan suku kedua merupakan fungsi dari  $\phi$ , sehingga masing-masing suku harus konstanta. Konstanta disini dimisalkan  $m^2$  (Griffith, 2005). Oleh karena itu, jika persamaan (3.43) dijabarkan masing-masing akan menjadi :

$$\frac{1}{\Theta} \left[ \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\Theta}{\partial\theta} \right) \right] + l(l + 1) \sin^2\theta = m^2 \quad (3.44)$$

Dan,

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = -m^2 \quad (3.45)$$

Kemudian dapat dicari solusi umum dari masing-masing variabel di atas. Untuk yang pertama yaitu menentukan solusi umum untuk variabel  $\Theta$

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta = 0 \quad (3.46)$$

Diasumsikan bahwa solusi  $\Theta(\theta)$  dapat ditulis dalam bentuk :

$$\Theta(\theta) = \sin^m \theta \chi(\theta) \quad (3.47)$$

Di sini,  $m$  adalah parameter yang akan ditentukan nantinya dan  $\chi(\theta)$  adalah fungsi yang akan dicari. Dengan mensubstitusikan asumsi akan membantu dalam mempermudah persamaan diferensial harmonik bola. Selanjutnya yaitu menghitung turunan pertama dan kedua dari  $\Theta(\theta)$  menggunakan substitusi ini, yaitu :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} &= \sin^m \theta \frac{d^2 \chi(\theta)}{d\theta^2} + 2m \sin^{m-1} \theta \cos \theta \frac{d\chi(\theta)}{d\theta} \\ &\quad - m(m-1) \sin^{m-2} \theta \cos^2 \theta \chi(\theta) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Kemudian turunan pertama dan kedua dari  $\Theta(\theta)$  ini disubstitusikan ke dalam persamaan harmonik bola yang telah ada, menjadi :

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\chi(\theta)}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \sin^2 \theta \chi(\theta) = 0 \quad (3.49)$$

Sehingga diperoleh persamaan yang hanya bergantung pada  $\chi(\theta)$ . Solusi dari  $\chi(\theta)$  akan memberikan kontribusi utama dalam menemukan solusi umum untuk  $\Theta(\theta)$  dari persamaan harmonik bola. Untuk mencari solusinya, dapat menggunakan metode perubahan variabel dengan :

$$x = \cos \theta \quad (3.50)$$

Jadi,

$$\sin^2 \theta = 1 - x^2 \quad (3.51)$$

Turunan  $\frac{d\chi(\theta)}{d\theta}$  juga dapat diganti dengan variabel  $x$ . Untuk itu, dapat digunakan aturan rantai sebagai berikut :

$$\frac{d\chi}{d\theta} = -\sqrt{1-x^2} \frac{d\chi}{dx} \quad (3.52)$$

Menggunakan substitusi persamaan di atas, maka persamaan (3.49) akan berubah menjadi :

$$-\frac{d}{dx} \left( \sqrt{1-x^2} \frac{d\chi}{dx} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \sqrt{1-x^2} \chi = 0 \quad (3.53)$$

Sehingga diperoleh persamaan diferensial orde dua baru dalam variabel  $x$ , yaitu :

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d\chi}{dx} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] (1-x^2) \chi = 0 \quad (3.54)$$

Persamaan diferensial di atas merupakan persamaan asosiasi Legendre yang dikenal memiliki solusi dalam bentuk polinomial asosiasi Legendre  $P_l^m(x)$ . Sehingga, solusi umum untuk variabel  $\theta$  adalah :

$$\Theta(\theta) = B P_l^m(\cos \theta) \quad (3.55)$$

Dimana  $P_l^m$  merupakan fungsi asosiasi Legendre, yang didefinisikan sebagai :

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \left( \frac{d}{dx} \right)^{|m|} P_l(x) \quad (3.56)$$

Dan  $P_l(x)$  adalah polinomial Legendre yang didefinisikan dari rumus Rodrigues,

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left( \frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \quad (3.57)$$

Sedangkan untuk variabel  $\phi$  solusi umumnya yaitu :

$$\Phi(\phi) = C e^{im\phi} \quad (3.58)$$

Sebenarnya untuk variabel  $\Phi$  ini solusinya ada dua, yaitu  $e^{im\phi}$  dan  $e^{-im\phi}$ . Namun, pada titik ini, kita mencari alternatif akhir dengan

memperbolehkan  $m$  untuk memiliki nilai negatif. Mungkin ada juga sebuah faktor konstan yang terlibat, tetapi sebaliknya kita akan mengabsorbsinya ke dalam perhitungan.

Faktor konstanta di depan diserap menjadi  $\Theta$  dimana  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Untuk menyelesaikan solusi ini membutuhkan  $\Theta(\phi + 2\pi) = \Theta(\phi)$ , sehingga nilai  $m$  harus bilangan bulat ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Solusi fungsi sudut  $Y_{lm}$  dirumuskan seperti pada tabel berikut :

Tabel 3.1 Fungsi Harmonik Bola  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  (Griffith, 2005)

$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$	$Y_2^{\pm 2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$
$Y_1^0 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \theta$	$Y_2^{\pm 1} = \mp \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$
$Y_1^{\pm 1} = \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \theta e^{\pm i\phi}$	$Y_2^0 = \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} (3 \cos^2 \theta - 1)$
$Y_2^0 = \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} (3 \cos^2 \theta - 1)$	

Dari tabel 3.1 di atas, diperoleh fungsi gelombang sudut yang dinormalisasi, yang disebut dengan harmonik bola, yaitu :

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta) \quad (3.59)$$

### 3.2.1.3 Pemisahan Variabel Radial ( $r$ )

Setelah berhasil memisahkan variabel untuk bagian waktu dan sudut, selanjutnya yaitu dilakukan pemisahan variabel radial  $R_l(r)$ . Pemisahan variabel radial ini nantinya akan menghasilkan persamaan Schrodinger radial terpisah, seperti berikut :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) - \frac{1}{g_{rr}} \left( \frac{L^2}{r^2} + m^2 - E^2 \right) R_l(r) = 0 \quad (3.60)$$

Kemudian, menggunakan parameter  $u_l$  yang didefinisikan sebagai  $u_l = r R_l(r)$  dan digunakan parameter untuk  $L^2 = l(l+1)$  untuk menyederhanakannya menjadi bentuk yang lebih kompleks, maka pemisahan variabel untuk bagian radial menjadi :

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u_l}{dr^2} - \left[ \frac{g'_{rr}}{r g_{rr}} + \frac{1}{2} \frac{g''_{rr}}{g_{rr}} - \frac{3}{4} \left( \frac{g'_{rr}}{g_{rr}} \right)^2 \right] u_l + \frac{l(l+1)}{r^2} g_{rr} u_l \\ + m^2 g_{rr} u_l = \frac{E^2 g_{rr}}{g_{tt}} u_l \end{aligned} \quad (3.61)$$

Dengan,

$$g'_{rr} = \frac{d}{dr} \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} = -\frac{2GM}{r^2} \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-2} \quad (3.62)$$

Jika kita misalkan untuk  $\frac{2GM}{c^2} = r_s$ , maka :

$$g_{tt} = -\left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \quad (3.63)$$

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \quad (3.64)$$

Sehingga :

$$g'_{rr} = -\frac{r_s}{(r - r_s)^2} \quad (3.65)$$

Dan

$$g''_{rr} = \frac{2r_s}{(r - r_s)^3} \quad (3.66)$$

Substitusi hasil-hasil dari  $g'_{rr}$  dan  $g''_{rr}$ , sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{aligned}
-\frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{1}{4} \frac{r_s^2}{r^2 (r - r_s)^2} u_l + \frac{l(l+1)}{r^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} u_l + \frac{m^2}{1 - \frac{r_s}{r}} u_l \\
= \frac{E^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Membagi persamaan (3.67) dengan  $m$  untuk mengubah  $m^2$  menjadi :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{1}{4m} \frac{r_s^2}{r^2 (r - r_s)^2} u_l + \frac{l(l+1)}{r^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} \frac{1}{m} u_l \\
- \frac{1}{m \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} u_l = \frac{E^2}{m \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Membagi persamaan (3.68) dengan 2 untuk mengubah beberapa faktor menjadi  $\frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{1}{8m} \frac{r_s^2}{r^2 (r - r_s)^2} u_l + \frac{l(l+1)}{8mr^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} u_l \\
- \frac{1}{2m \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} u_l = \frac{E^2}{2m \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Dengan mensubstitusikan  $E^2 = m^2 + 2m\Delta E + \Delta E^2$  ke dalam persamaan, maka kombinasi dari kedua suku sebanding dengan  $m^2$ , dan pembagian  $2m$  menghasilkan :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{1}{4} \frac{r_s^2}{2mr^2 (r - r_s)^2} u_l + \frac{l(l+1)}{2mr^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} u_l \\
- \frac{mr_s}{2r} \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l = \frac{\Delta E + \frac{\Delta E^2}{2m}}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Kemudian, suku-suku yang memiliki faktor  $\frac{1}{2mr^2}$  digabungkan :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2mr^2} u_l - \frac{1}{4} \frac{r_s^2}{2mr^2(r-r_s)^2} u_l \\
& - \frac{mr_s}{2r} \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l = \frac{\Delta E + \Delta E^2}{2m \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Kita anggap bahwa  $\Delta E$  adalah konstanta. Jadi  $\Delta E$  dan  $\frac{\Delta E^2}{2m \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2}$  bisa

digabungkan menjadi satu :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2mr^2} u_l - \frac{1}{4} \frac{r_s^2}{2mr^2(r-r_s)^2} u_l \\
& - \frac{mr_s}{2r} \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l = \Delta E_{baru} u_l
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Disini,  $\Delta E_{baru}$  adalah konstanta yang menggabungkan  $\Delta E$  dan  $\frac{\Delta E^2}{2m \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2}$ . Selanjutnya, menggabungkan suku yang memiliki faktor  $\frac{1}{r}$  dan  $r_s$  :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2mr^2} u_l - \frac{1}{4} \frac{r_s^2}{2mr^2(r-r_s)^2} u_l \\
& - \frac{r_s}{2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} \frac{1}{r} u_l = \Delta E_{baru} u_l
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Jika dilihat pada persamaan (3.73), terdapat  $r_s$  yang merupakan radius Schwarzschild yang didefinisikan sebagai  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ . Dimana  $G$  adalah konstanta gravitasi,  $M$  adalah massa Schwarzschild, dan  $c$  adalah kecepatan cahaya. Selain itu, juga terdapat  $m$  yang merupakan massa partikel. Kita tahu bahwa  $G$  dan  $c$  adalah konstanta, maka dapat digabungkan menjadi :

$$\frac{2G}{c^2} = \frac{1}{c^2} \cdot 2G = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{2GM}{c^2} = \frac{r_s}{c^2} \tag{3.74}$$

Kemudian,  $r_s$  dan  $c^2$  dalam suku yang mengandung  $r_s$  dapat digabungkan agar menjadi  $\frac{r_s}{c^2}$ :

$$-\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2mr^2} u_l - \frac{GMm}{r} u_l = \Delta E u_l \quad (3.75)$$

Variabel  $r$  dapat diubah menjadi variabel baru yaitu  $\zeta$ , dimana  $\zeta$  ini dapat didefinisikan sebagai  $\zeta = \frac{r_s}{r}$ ,

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \Rightarrow r = \frac{r_s}{\zeta} \quad (3.76)$$

Turunan pertama :

$$dr = -\frac{r_s}{\zeta^2} d\zeta \quad (3.77)$$

Turunan kedua :

$$d^2 r = \frac{2r_s}{\zeta^3} d\zeta \quad (3.78)$$

Kemudian, transformasi ini akan diterapkan pada turunan kedua terhadap  $r$  dalam persamaan (3.75), sehingga :

$$-\frac{1}{2m} \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{d\zeta}{dr} \frac{d}{d\zeta} u_l \right) + \frac{l(l+1)}{2m} \frac{1}{r^2} u_l - \frac{GMm}{r} u_l = \Delta E u_l \quad (3.79)$$

Digunakan hasil perhitungan sebelumnya untuk menggantikan  $\frac{dr}{d\zeta}$  dan  $\frac{d^2 r}{d\zeta^2}$ :

$$\frac{1}{2m} \frac{r_s}{\zeta^2} \frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} + \frac{l(l+1)}{2m} \frac{1}{r^2} u_l - \frac{GMm}{r} u_l = \Delta E u_l \quad (3.80)$$

Persamaan (3.80) di atas kemudian dibagi dengan  $GMm$  untuk mendapatkan bentuk yang diinginkan yaitu :

$$\frac{1}{2m} \frac{r_s}{GMm} \frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} + \frac{l(l+1)}{2m} \frac{1}{GMm r^2} u_l - \frac{1}{r} u_l = \Delta E u_l \quad (3.81)$$

Jika diperhatikan,  $\frac{r_s}{GMm}$  adalah suatu konstanta (yang biasanya dinotasikan sebagai  $\zeta_s$ ) dan  $\frac{1}{GMm}$  adalah konstanta (yang biasanya dinotasikan sebagai  $\epsilon$ ). Selain itu,  $\frac{1}{r} = \frac{\zeta}{r_s}$ . Sehingga :

$$-\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} - \left( \frac{\zeta_s + l(l+1)\epsilon - \frac{2m\zeta}{r_s} \frac{1}{\zeta^2}}{2m} \right) u_l = \Delta E u_l \quad (3.82)$$

Persamaan pada suku satu disederhanakan, sehingga menjadi :

$$\frac{r_s}{2mc^2} + \frac{l(l+1)}{2GMm} - \frac{\zeta}{r_s} = \Delta E u_l \quad (3.83)$$

Selanjutnya, suku satu pada persamaan utama bisa diganti dengan hasil penyederhanaan suku satu yang telah disederhanakan sebelumnya yaitu persamaan (3.83), menjadi :

$$-\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} - \left( \frac{r_s}{2mc^2 \zeta^2} + \frac{l(l+1)}{2GMm \zeta^2} - \frac{1}{r_s \zeta} \right) u_l = \Delta E u_l \quad (3.84)$$

Kemudian, digunakan hubungan  $\frac{r_s}{c^2} = \zeta_s$  dan  $\epsilon = \frac{1}{GMm}$  serta menggantikan  $\zeta$  ke dalam persamaan, sehingga persamaan (3.84) akan berubah menjadi :

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} - \left[ \frac{g'_{rr}}{\zeta g_{rr}} + \frac{1}{2} \frac{g''_{rr}}{g_{rr}} - \frac{3}{4} \left( \frac{g'_{rr}}{g_{rr}} \right)^2 \right] u_l + \frac{l(l+1)}{\zeta^2} g_{rr} u_l \\ + m^2 g_{rr} \left( 1 - \frac{1}{g_{tt}} \right) u_l = \left( \epsilon + \frac{1}{8} \zeta_s \epsilon^2 \right) \frac{g_{rr}}{g_{tt}} u_l \end{aligned} \quad (3.85)$$

Sehubungan dengan adanya  $\zeta$ , selanjutnya persamaan (3.85) kembali di sederhanakan agar menjadi bentuk yang lebih kompleks yang nantinya dapat

diselesaikan dengan metode numerik, Kemudian,  $\left[ \frac{g'_{rr}}{\zeta g_{rr}} + \frac{1}{2} \frac{g''_{rr}}{g_{rr}} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{3}{4} \left( \frac{g'_{rr}}{g_{rr}} \right)^2 \right]$

pada persamaan di atas dapat digantikan dengan  $\frac{1}{4} \frac{\zeta_s^2}{(\zeta - \zeta_s)^2}$ , untuk komponen  $g_{rr}$  dan  $g_{00}$  dapat dimasukkan dan untuk  $\zeta_s$  dapat digantikan dengan  $\frac{\zeta_s}{\zeta}$  sehingga menjadi :

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} + \frac{l(l+1)}{\zeta^2} \left(1 + \frac{\zeta_s}{\zeta}\right) u_l - \frac{2}{\zeta} \left(1 + \frac{2\zeta_s}{\zeta}\right) u_l \\ = \left(\epsilon \left(1 + \frac{2\zeta_s}{\zeta}\right) + \frac{1}{8} \zeta_s \epsilon^2\right) u_l \end{aligned} \quad (3.86)$$

Persamaan di atas kemudian dapat digabungkan dengan menggunakan :

$$-\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} + V_s(\zeta) u_l = \epsilon u_l \quad (3.87)$$

Dengan potensial  $V_s(\zeta)$  adalah :

$$V_s(\zeta) = \zeta_s \left[ \frac{l(l+1)}{\zeta^3} - \frac{4}{\zeta^2} + \frac{1}{n^2} \frac{2}{\zeta} - \frac{1}{8} \frac{1}{n^4} \right] \quad (3.88)$$

Potensial  $V_s(\zeta)$  tersebut dapat disubstitusikan ke dalam persamaan Klein-Gordon, sehingga persamaan (3.87) akan berubah menjadi :

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} + \frac{l(l+1)}{\zeta^2} u_l - \frac{2}{\zeta} u_l \\ + \zeta_s \left[ \frac{l(l+1)}{\zeta^3} - \frac{4}{\zeta^2} + \frac{1}{n^2} \frac{2}{\zeta} - \frac{1}{8} \frac{1}{n^4} \right] u_l \\ = \epsilon u_l \end{aligned} \quad (3.89)$$

Jika  $\zeta_s \left[ \frac{l(l+1)}{\zeta^3} - \frac{4}{\zeta^2} + \frac{1}{n^2} \frac{2}{\zeta} - \frac{1}{8} \frac{1}{n^4} \right]$  pada persamaan (3.89) di atas didefinisikan sebagai potensial  $V_s(\zeta)$  seperti pada persamaan (3.88), maka persamaan radial pada persamaan (3.87) akan berubah menjadi :

$$-\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} + \frac{l(l+1)}{\zeta^2} u_l - \frac{2}{\zeta} u_l + V_s(\zeta) u_l = \epsilon u_l \quad (3.90)$$

Persamaan (3.90) di atas adalah persamaan radial yang merupakan bagian dari persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild. Dimana  $u_l$  adalah fungsi gelombang radial tergantung pada variabel  $\zeta$  yang mewakili jarak radial dari pusat potensial,  $l$  adalah bilangan kuantum orbital angular,  $\epsilon$  adalah energi total partikel, dan  $V_s(\zeta)$  adalah potensial. Persamaan ini memberikan deskripsi matematis dari perilaku partikel dalam potensial partikel boson. Bagian pertama dari persamaan mencerminkan kinetika partikel, sedangkan bagian kedua mewakili efek potensial  $V_s(\zeta)$ . Solusi dari persamaan ini memberikan informasi mengenai struktur energi dan distribusi probabilitas partikel dalam sistem tersebut. Persamaan ini adalah persamaan diferensial yang harus dipecahkan secara numerik untuk memperoleh solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild. Persamaan ini dapat diselesaikan dengan cara numerik menggunakan metode integral Runge-Kutta dengan menggunakan kondisi batas terikat, dimana fungsi gelombang harus nol saat jarak partikel ke massa pusat mencapai nilai tertentu.

Perubahan energi potensial dalam persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild yang dihasilkan oleh  $V_s(\zeta)$  menggambarkan pengaruh medan gravitasi Schwarzschild terhadap partikel. Variabel  $\zeta$  yang mempresentasikan jarak dari pusat massa Schwarzschild berfungsi sebagai parameter yang menentukan bentuk dan tingkat energi potensial partikel. Berdasarkan hasil ini, dapat dilihat perbedaan bentuk dan kedalaman potensial untuk berbagai nilai  $l$ . Potensial ini mencerminkan

bagaimana medan gravitasi Schwarzschild mempengaruhi pergerakan partikel dengan momentum sudut  $l$ .

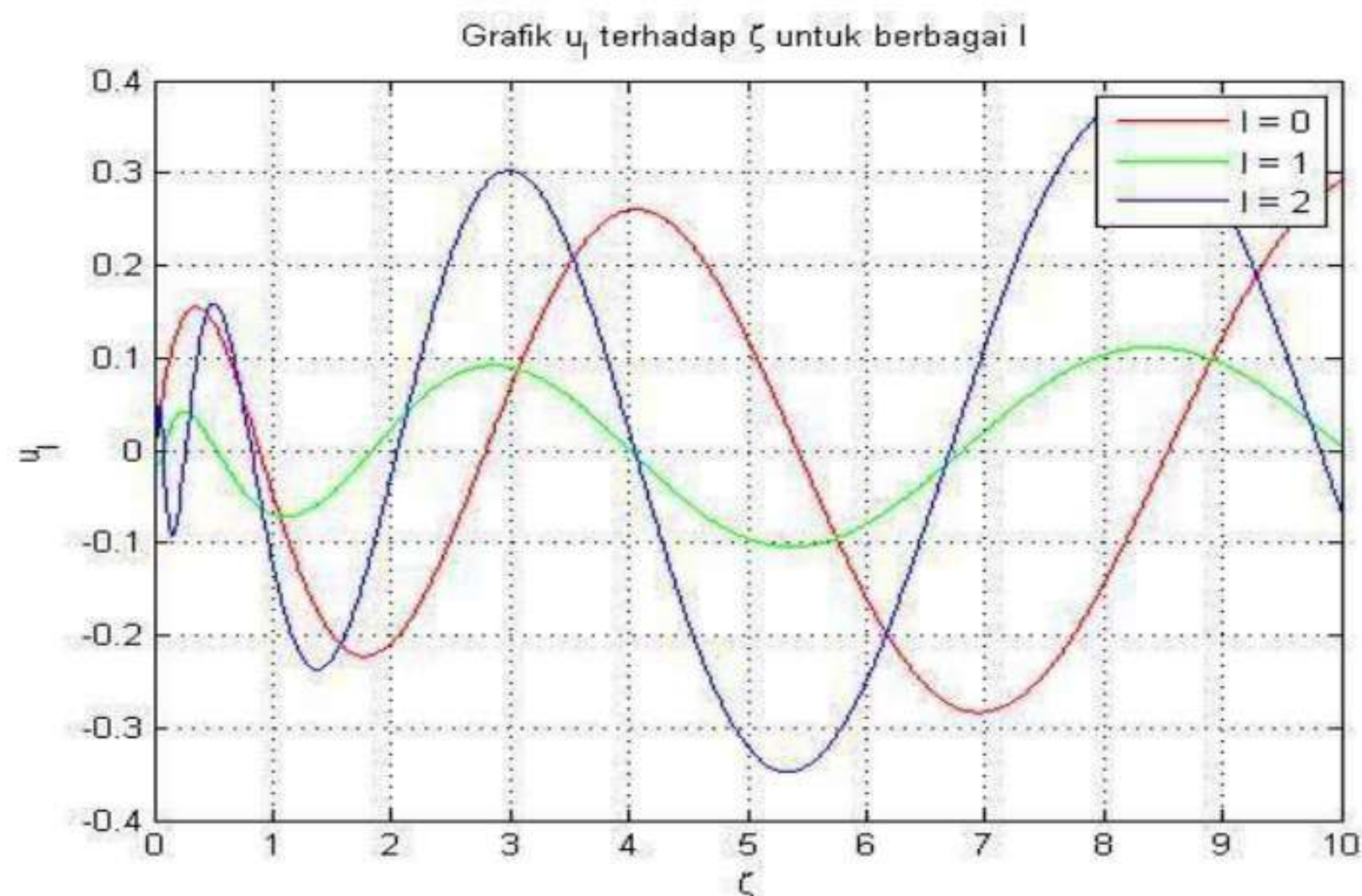
Hasil numerik dari fungsi radial dari persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild ditunjukkan pada tabel 3.2 dan diplot dalam grafik pada gambar 3.1 dengan  $R_l = \sqrt{g_{rr}} \frac{u_l}{r}$ ,  $a = \frac{1}{GMm^2}$ ,  $\zeta = \frac{r}{a}$ ,  $\zeta_0 = \frac{r_0}{a}$ ,  $\zeta_s = \frac{r_s}{a} = 2(GMm)^2$ ,  $\epsilon = -\frac{1}{n^2}$ . Untuk elektron terikat pada struktur gravitasi, nilai  $GMm = 3,2 \times 10^{-42}$  dan  $r = 2 \times 10^{-83}$ . Jika diplot menggunakan aplikasi **Matlab R2008b versi 7.7.0**, maka hasilnya akan menjadi :

Tabel 3.2 Hasil numerik dari persamaan radial untuk  $l = 0$ ,  $l = 1$ , dan  $l = 2$

$\zeta$	$u_l$		
	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$
0.1	0	0	0
1.01	-0.0502	-0.0694	-0.1280
2.01	-0.2069	0.0250	-0.0194
3.01	0.0704	0.0898	0.3027
4.01	0.2599	-0.0002	0.0178
5.01	0.1180	-0.0955	-0.3219
6.01	-0.1621	-0.0793	-0.2463
7.01	-0.2828	0.0219	0.1181
8.01	-0.1410	0.1035	0.3673
9.01	0.1253	0.0931	0.2700
10	0.2903	0.0050	-0.0646

Berdasarkan tabel 3.2 di atas, dapat dilihat bagaimana fungsi gelombang direpresentasikan oleh  $u_l$ . Nilai  $l$  sebagai momentum sudut

berperan penting dalam menentukan sifat orbital partikel. Berdasarkan hasil ini, diperoleh perbedaan perilaku orbital untuk  $l = 0$ ,  $l = 1$  dan  $l = 2$ . Momentum sudut yang berbeda menghasilkan bentuk orbit yang berbeda. Partikel dengan  $l$  yang lebih besar cenderung memiliki orbit yang lebih ekstensif dan kompleks, sementara partikel dengan  $l$  yang lebih kecil memiliki orbit yang lebih terkonsentrasi. Dalam konteks relativitas umum, hal ini menggambarkan bagaimana medan gravitasi mempengaruhi gerak partikel tergantung pada momentum sudutnya. Untuk  $l = 0$ , nilai  $u_l$  cenderung tetap sepanjang  $\zeta$ , ini menunjukkan sifat stabilitas gelombang dengan simetri radial. Sedangkan untuk  $l = 1$  dan  $l = 2$ , nilai  $u_l$  mengalami fluktuasi yang lebih besar, ini menunjukkan pengaruh momentum sudut terhadap bentuk gelombang.



Gambar 3.1 Solusi radial persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild untuk  $l = 0$ ,  $l = 1$ , dan  $l = 2$

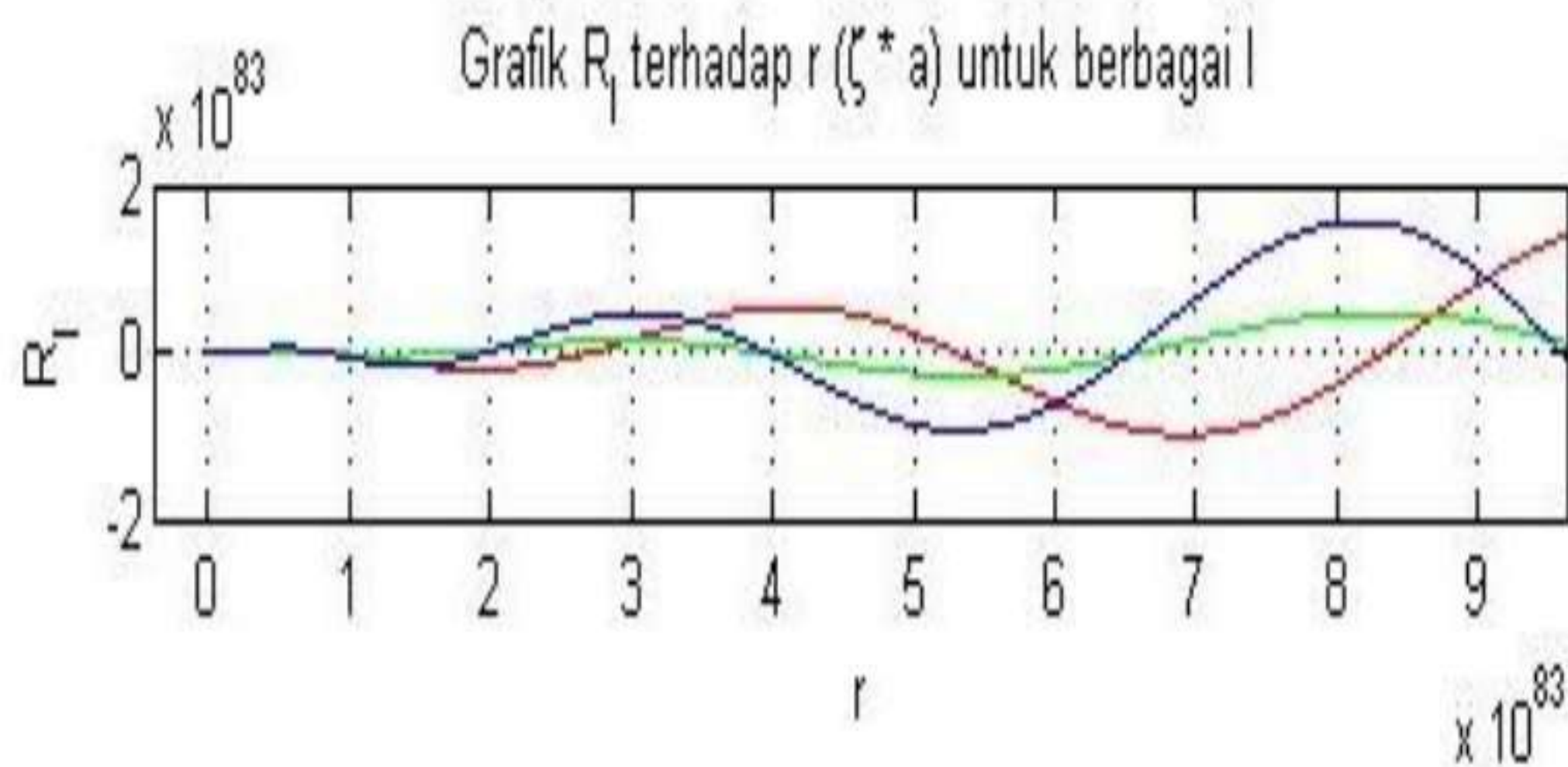
Berdasarkan plot grafik yang diperoleh seperti pada gambar 3.1, grafik  $u_l$  terhadap  $\zeta$  menggambarkan perilaku gelombang partikel dalam medan gravitasi Schwarzschild. Nilai-nilai  $u_l$  untuk berbagai  $l$  mencerminkan fungsi

gelombang partikel dalam ruang-waktu melengkung. Berdasarkan hasil ini, dapat diamati bagaimana medan gravitasi Schwarzschild mempengaruhi distribusi probabilitas partikel dalam berbagai kondisi orbital.

Grafik pertama pada gambar 3.1 memvisualisasikan solusi gelombang radial terhadap parameter  $\zeta$  untuk berbagai nilai  $l$ . Grafik ini memberikan gambaran intuitif tentang kompleksitas pola gelombang dan perubahan strukturnya seiring dengan peningkatan  $l$ . Efek momentum sudut dapat dilihat dalam fluktuasi yang lebih besar dalam gelombang.

Tabel 3.3 Hasil Numerik fungsi radial  $R_l$  dan  $r$  dengan variasi  $l = 0$ ,  $l = 1$ , dan  $l = 2$

$r$	$R_l$		
	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$
0.0965	0.0408	0.0557	-0.0233
0.0986	-0.0253	-0.0350	-0.0646
0.1196	-0.0279	0.0251	-0.0194
0.1293	0.0105	0.0135	0.0455
0.1391	0.0521	-0.0308	0.0356
0.1489	0.0295	-0.0239	-0.0806
0.1586	-0.0487	-0.0238	-0.0739
0.1648	-0.0991	0.0767	0.0414
0.1782	-0.0564	0.0414	0.0147
0.1879	0.0564	0.0419	0.0121
0.1976	0.0145	0.0248	-0.0323



Gambar 3.2 Perbandingan Fungsi Radial  $R_l(r)$  dengan  $r$

Sedangkan grafik kedua pada gambar 3.2, membandingkan fungsi radial  $R_l$  terhadap  $r$  untuk setiap  $l$ . Perbandingan ini memberikan informasi tentang bagaimana medan gravitasi Schwarzschild memengaruhi perubahan skala jarak dalam solusi gelombang. Hasil menunjukkan bahwa, meskipun gelombang mengalami fluktuasi, faktor skala  $R_l$  mendekati 1, menandakan bahwa efek relativitas umum pada skala jarak tidak signifikan dalam kasus ini.

Analisis fisis dari hasil ini memberikan pemahaman mendalam tentang sifat-sifat gelombang dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild. Perubahan dalam gelombang mencerminkan kompleksitas interaksi antara momentum sudut, parameter gravitasi, dan medan gravitasi yang dihasilkan oleh massa besar seperti lubang hitam. Analisis ini memberikan kontribusi pada pemahaman kita tentang bagaimana relativitas umum memengaruhi sifat-sifat gelombang dalam konteks gravitasi yang ekstrem.

### 3.2.2 Solusi Akhir

Hasil penggabungan pemisahan variabel dari persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung ini menghasilkan solusi yang menggambarkan

gelombang partikel dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild secara menyeluruh, memungkinkan pemahaman mendalam tentang interaksi partikel dengan medan gravitasi ekstrem yang dihasilkan oleh massa besar, seperti lubang hitam. Berikut solusi akhirnya setelah digabungkan :

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = A e^{-i \sqrt{E g_{tt} t}} \cdot R_l \cdot \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\theta) \quad (3.91)$$

Melihat hasil solusi untuk persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild di atas, dapat dianalisis dengan lebih mendalam untuk memahami pola orbit, perubahan energi potensial, dan karakteristik gelombang partikel. Dengan mempertimbangkan efek relativitas umum pada pergerakan partikel dalam medan gravitasi Schwarzschild, dapat diidentifikasi fenomena unik yang muncul dari teori gravitasi Einstein.

Meskipun solusi yang dihasilkan menggunakan persamaan Klein-Gordon tidak secara langsung merepresentasikan orbit partikel, namun dapat diamati perubahan posisi partikel sepanjang parameter  $\zeta$ . Efek lenturan cahaya (*gravitational lensing*) dan perubahan lintasan partikel dapat diperhatikan, yaitu menggambarkan pengaruh medan gravitasi ekstrem pada pergerakan partikel.

Faktor skala  $R_l$  dalam solusi persamaan (3.91) memberikan informasi tentang perubahan skala jarak dalam gelombang. Dengan mengaitkan ini dengan energi potensial partikel, maka dapat diamati bagaimana medan gravitasi Schwarzschild memodifikasi potensial partikel, dengan adanya fluktuasi dalam faktor skala menunjukkan variasi energi potensial partikel seiring dengan perubahan parameter  $\zeta$  dan momentum sudut  $l$ . Solusi gelombang partikel dalam

ruang-waktu melengkung Schwarzschild dapat diinterpretasikan sebagai superposisi dari berbagai mode gelombang dengan momentum sudut  $l$ . Fluktuasi dalam gelombang untuk  $l > 0$  menunjukkan adanya komponen momentum sudut yang berkontribusi pada karakteristik gelombang. Dalam konteks partikel subatomik atau gelombang skalar yang melibatkan medan, fluktuasi ini dapat mencerminkan efek relativistik pada skala energi tinggi.

Efek relativitas umum pada solusi ini tercermin dalam interaksi antara momentum sudut, parameter gravitasi, dan medan gravitasi yang sangat kuat. Fluktuasi dalam gelombang dan perubahan skala jarak menggambarkan bagaimana partikel atau gelombang bersifat elastis terhadap medan gravitasi yang mengubah geometri ruang-waktu. Efek gravitasi pada energi potensial partikel juga menegaskan bahwa medan gravitasi Schwarzschild tidak hanya memengaruhi lintasan, tetapi juga properti energi partikel itu sendiri.

## BAB IV

### PEMBAHASAN

#### 4.1 Perbandingan dengan Persamaan Klein-Gordon dalam Ruang-Waktu Datar

Solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu datar adalah representasi matematis dari perilaku partikel berskala kuantum dalam kerangka kerja relativitas khusus. Persamaan Klein-Gordon adalah persamaan gelombang relativistik yang digunakan untuk menggambarkan partikel-partikel dengan massa dan momentum. Dalam ruang-waktu Minkowski (datar), persamaan Klein-Gordon yang dinyatakan dalam bentuk operator d'Alembertian adalah (Griffith, 2005) :

$$[\square - m^2]\psi = 0$$

Solusi ini dinyatakan dalam bentuk operator d'Alembertian yang digunakan untuk menggambarkan fungsi gelombang dalam ruang dan waktu. Solusi ini digunakan untuk menggambarkan partikel bermassa dan tak berputar dengan spin-0 dalam ruang-waktu datar Minkowski (Gautama, 2018). Sedangkan dalam ruang-waktu melengkung (Schwarzschild) operator d'Alembert diganti dengan mensubstitusikan turunan kovarian dan kontravarian dari metrik Schwarzschild ke dalamnya, sehingga persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild memiliki bentuk :

$$\left[ \frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{g_{rr}} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) + m^2 \right] \psi = 0$$

di mana  $g_{tt}$  dan  $g_{rr}$  adalah komponen metrik Schwarzschild yang memperhitungkan distorsi ruang-waktu akibat keberadaan massa. Persamaan ini mencakup efek relativitas umum dan menggambarkan bagaimana partikel bermassa berinteraksi dengan medan gravitasi yang dihasilkan oleh massa pusat.

Perbandingan antara kedua persamaan ini menyoroti perbedaan pendekatan dalam memodelkan partikel bermassa dalam konteks ruang-waktu datar dan ruang-waktu melengkung Schwarzschild, di mana faktor-faktor gravitasi memainkan peran penting dalam perubahan dinamika partikel tersebut.

Metode pemisahan variabel dapat digunakan untuk menemukan solusi persamaan Klein-Gordon di ruang-waktu datar. Metode ini membagi fungsi gelombang menjadi fungsi ruang dan waktu. Solusi persamaan Klein-Gordon di ruang-waktu datar dalam kasus partikel bebas dapat digambarkan sebagai kombinasi fungsi kosinus dan sinus dengan frekuensi tertentu. Solusi persamaan Klein-Gordon di ruang-waktu datar untuk partikel terikat dapat digambarkan sebagai kombinasi fungsi sinus dan kosinus dengan frekuensi diskrit. Selain itu, transformasi Fourier dapat digunakan untuk menemukan solusi persamaan Klein-Gordon di ruang-waktu datar. Dengan menggunakan transformasi Fourier, fungsi gelombang dapat dibagi menjadi sejumlah gelombang sinusoidal dengan frekuensi yang berbeda. Solusi persamaan Klein-Gordon di ruang-waktu datar dalam kasus partikel bebas dapat digambarkan sebagai kombinasi dari gelombang sinusoidal dengan frekuensi kontinu (Lizardo, 2019).

Gelombang elektromagnetik juga dapat digambarkan dengan solusi persamaan Klein-Gordon di ruang-waktu datar. Solusi persamaan Maxwell, sistem persamaan diferensial parsial yang menggambarkan medan listrik dan medan magnetik, dapat diwakili sebagai kombinasi gelombang sinusoidal dengan frekuensi tertentu yang memenuhi persamaan d'Alembert. Dalam fisika partikel, solusi persamaan Klein-Gordon di ruang-waktu datar digunakan untuk menggambarkan partikel bermassa dan tak berputar dengan spin-0, seperti meson

dan boson. Dalam teori medan kuantum, solusi persamaan Klein-Gordon di ruang-waktu datar juga digunakan untuk menggambarkan medan skalar, seperti medan Higgs dalam Model Standar fisika partikel. Dalam fisika statistik, solusi persamaan Klein-Gordon di ruang-waktu datar juga digunakan untuk menggambarkan fenomena fisika pada suhu rendah, seperti superkonduktivitas dan superfluiditas, dan dalam fisika kosmologi. Solusi persamaan Klein-Gordon di ruang-waktu datar juga digunakan untuk menggambarkan evolusi alam semesta pada skala besar. Dalam penelitian, solusi persamaan Klein-Gordon di ruang-waktu datar digunakan untuk mempelajari berbagai fenomena fisika, seperti partikel bermassa dan tak berputar dengan spin-0, medan skalar, dan gelombang elektromagnetik. Solusi persamaan Klein-Gordon di ruang-waktu datar juga digunakan untuk mengembangkan teori medan kuantum dan teori kosmologi (Timothy Clifton, 2012).

Solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu datar dan ruang-waktu melengkung memiliki beberapa perbedaan, di antaranya :

**Solusi Persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu datar** (Gautama, 2018) :

1. Ruang-Waktu Datar (Minkowski) : Solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu datar didasarkan pada kerangka kerja relativitas khusus di mana ruang-waktu dianggap datar dan homogen. Ini adalah aproksimasi yang baik dalam kasus kecepatan rendah dan medan gravitasi yang lemah.
2. Turunan Biasa : Dalam ruang-waktu datar, persamaan ini menggunakan turunan biasa terhadap waktu dan ruang, seperti  $\frac{\partial}{\partial t}$  dan  $\nabla^2$ .

3. Energi dan Momentum Klasik : Partikel dengan massa  $m$  dalam ruang-waktu datar memiliki energi dan momentum seperti yang dijelaskan dalam mekanika klasik.
4. Laju Propagasi Konstan : Solusi ini menggambarkan partikel dengan laju propagasi konstan yang tidak dipengaruhi oleh medan gravitasi.

**Solusi Persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung** (Lizardo, 2019) :

1. Ruang-Waktu Melengkung Schwarzschild : Solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild didasarkan pada relativitas umum, yang memodelkan medan gravitasi yang dihasilkan oleh benda bermassa tunggal di pusatnya, seperti lubang hitam Schwarzschild. Ruang-waktu melengkung mengikuti metrik Schwarzschild.
2. Turunan Kovarian : Dalam ruang-waktu melengkung, persamaan ini menggunakan turunan kovarian sesuai dengan metrik Schwarzschild, seperti  $\frac{\partial}{\partial t}$  dan  $\frac{\partial}{\partial r}$  yang memperhitungkan efek gravitasi.
3. Energi dan Momentum Relativistik : Partikel dengan massa  $m$  dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild memiliki energi dan momentum yang dijelaskan oleh kerangka kerja relativitas umum, yang mencakup pergeseran merah gravitasi dan perubahan laju waktu gravitasi.
4. Pengaruh Gravitasi yang Kuat : Solusi ini menggambarkan bagaimana medan gravitasi yang kuat mengubah perilaku partikel berskala kuantum.

Dalam rangkaian solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild, kita memperhitungkan pengaruh gravitasi yang signifikan, sementara dalam ruang-waktu datar, efek gravitasi diabaikan. Ini

menunjukkan pentingnya relativitas umum dalam menggambarkan perilaku partikel dalam medan gravitasi yang kuat seperti yang terjadi di sekitar objek berat seperti lubang hitam Schwarzschild. Solusi ini memungkinkan kita untuk memahami perubahan perilaku partikel berskala kuantum dalam konteks relativitas umum dan dalam lingkungan yang sangat ekstrem seperti di dekat lubang hitam.

Dari perbandingan di atas, dapat disimpulkan bahwa solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu Minkowski dan persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild memiliki perbedaan yang signifikan. Solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu Minkowski yang dinyatakan dalam bentuk operator d'Alembert digunakan untuk menggambarkan partikel bermassa dan tak berputar dengan spin-0 dalam ruang-waktu datar Minkowski, sedangkan persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild digunakan untuk menggambarkan partikel bermassa dan tak berputar dengan spin-0 dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild yang menggambarkan medan gravitasi sekitar objek dengan massa seperti bintang atau lubang hitam.

#### 4.2 Integrasi Dalam Al Qur'an

Al Qur'an mengajak orang-orang untuk mempertimbangkan bagaimana Allah SWT menciptakan alam semesta dan mengangkat berbagai ide yang terkait dengan ilmu fisika. Hal ini tertuang dalam Surah Al-Qamar [54]: 49, yang berbunyi :

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya : “*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*”.

Ayat ini ini menyinggung fenomena alam, fenomena alam yang dimaksud disini yaitu berupa air yang diturunkan dari langit. Air memiliki sifat mengalir dan bergerak mengikuti kontur permukaan bumi. Persamaan Klein-Gordon digunakan untuk mendeskripsikan gerak partikel subatomik seperti boson dalam ruang waktu relatif Einstein. Partikel bergerak mengikuti kontur atau kelengkungan ruang waktu akibat pengaruh medan gravitasi. Air yang diturunkan dari langit kemudian mengalir di permukaan bumi memiliki kesamaan prinsip geraknya dengan partikel subatomik dalam ruang waktu melengkung akibat gravitasi. Keduanya sama-sama bergerak mengikuti kontur ruang waktunya. Ruang waktu dalam teori relativitas umum Einstein dilengkungkan atau dimetrikkan oleh kehadiran massa seperti benda angkasa, planet, bahkan partikel subatomik. Semakin besar massanya, semakin kuat kelengkungan ruang waktunya. Partikel subatomik kemudian bergerak mengikuti kelengkungan ruang waktu ini, yang secara matematis dijelaskan oleh persamaan Klein-Gordon relativistik. Demikian pula air mengalir mengikuti kelengkungan medan gravitasi bumi. Ayat ini juga mengingatkan kita bahwa setiap entitas memiliki akhir hidupnya. Ini mengingatkan kita pada konsep dalam fisika tentang siklus kehidupan bintang, di mana bintang lahir, berkembang, dan akhirnya mati. Bahkan alam semesta sendiri diyakini memiliki batas dan akhirnya (Sani, 2014).

Namun, yang paling menarik adalah pernyataan bahwa pada suatu hari akan datang segala sesuatu dengan membawa bukti-bukti yang nyata. Dalam konteks fisika, hal ini dapat dihubungkan dengan bukti-bukti eksperimental yang ditemukan melalui penelitian ilmiah. Ilmuwan dan fisikawan melakukan eksperimen untuk mendapatkan pemahaman yang lebih dalam tentang alam

semesta, dan bukti-bukti ini adalah landasan bagi pemahaman kita tentang fisika modern. Hal ini juga bisa diartikan sebagai penghargaan terhadap konsep hukum alam atau hukum fisika. Hukum-hukum ini adalah bukti yang nyata tentang bagaimana alam semesta berfungsi, dan mereka dapat diamati dan diukur. Oleh karena itu, ayat ini mengingatkan kita tentang pentingnya penelitian ilmiah dalam memahami alam semesta dan menghormati hukum-hukum alam yang ada.

Terakhir, ayat ini menunjukkan bahwa pemahaman yang lebih dalam tentang alam semesta dapat membantu kita memahami kebesaran Allah SWT sebagai pencipta yang bijaksana dan kuasa. Ini sejalan dengan konsep bahwa pengetahuan dan ilmu pengetahuan adalah jendela untuk mengagumi dan memahami penciptaan Allah SWT dengan lebih baik. Dalam kesimpulan, ayat ini mengajak kita untuk memadukan pemahaman agama dan ilmu pengetahuan, menghormati kebijaksanaan pencipta, dan merenungkan keajaiban alam semesta yang terungkap melalui ilmu fisika.

Seruan kepada manusia untuk memperhatikan tanda-tanda kebesaran Allah SWT juga tertuang dalam QS. Al Fushshilat [41] : 53,

سُنُرِيهِمْ ءَايَاتِنَا فِي الْأَفَاقِ وَفِي أَنْفُسِهِمْ حَتَّىٰ يَتَبَيَّنَ لَهُمْ أَنَّهُ الْحَقُّ ۗ أَوَلَمْ يَكْفِ بِرَبِّكَ  
 أَنَّهُ عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ شَهِيدٌ ﴿٥٣﴾

Artinya : “Kami akan memperlihatkan kepada mereka tanda-tanda (kekuasaan) Kami di segala wilayah bumi dan pada diri mereka sendiri, hingga jelas bagi mereka bahwa Al Quran itu adalah benar. Tiadakah cukup bahwa Sesungguhnya Tuhanmu menjadi saksi atas segala sesuatu?”.

Dalam kata-kata "tanda-tanda (kekuasaan) Allah SWT" tersirat sifat dan perilaku seluruh ciptaan Nya dengan berbagai proses dan gejalanya. Adapun yang terkandung dalam pengertian "ufuk", selain yang berlaku sebagai dimensi ruang

juga termasuk dalam makna dimensi-dimensi. Salah satu hukum fisika yang relevan adalah Hukum Gravitasi. Hukum ini menyatakan bahwa setiap benda dengan massa akan saling menarik dengan gaya gravitasi berdasarkan massa mereka dan jarak di antara mereka. Hukum ini memungkinkan kita untuk memahami bagaimana benda-benda langit, seperti planet dan bintang, bergerak dalam tata surya kita. Bintang dan planet yang terlihat secara kasatmata hanyalah manifestasi kumpulan dan kombinasi partikel dasar pembentuk materi yang berinteraksi melalui gaya fundamental alam. Partikel fundamental inilah yang dijelaskan perilakunya oleh persamaan Klein-Gordon relativistik.

Persamaan Klein-Gordon adalah formulasi matematika dalam fisika teori yang menjelaskan perilaku partikel subatomik dasar penyusun materi semesta seperti kuark dan boson dalam medan gravitasi. Partikel-partikel ini berinteraksi dan bergerak dalam ruang waktu relativitas Einstein yang melengkung, baik skala makroskopik berupa galaksi maupun skala mikroskopik berupa partikel subatomik. Keduanya tunduk dan patuh terhadap hukum alam ciptaan Sang Pencipta. Dengan menyingkap hukum alam inilah ilmuwan modern menemukan formulasi matematis seperti persamaan Klein-Gordon.

Persamaan Klein-Gordon secara matematis mampu menggambarkan perilaku partikel materi dasar di alam semesta dalam interaksinya dengan medan gravitasi yang melengkungkan geometri ruang dan waktu. Ini adalah manifestasi keagungan hukum alam ciptaan Allah. Dari galaksi hingga partikel elementernya semua terikat hukum yang sama yakni hukum Allah, Sang Maha Pencipta. Tidak ada yang mampu menyimpang dari aturan yang telah ditetapkan-Nya. Meski partikel subatomik jauh tak terjangkau penglihatan, namun hal ini masih bisa

dipelajari melalui persamaan-persamaan fisika seperti Klein-Gordon. Jadi, secara keseluruhan, ayat-ayat ini mengajak kita untuk memperhatikan dan mempelajari alam semesta, termasuk fenomena fisika, sebagai cara untuk lebih mendekatkan diri kepada Allah dan menghargai kebesaran-Nya (Romlah, 2011).

### **4.3 Studi Kasus**

Persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild merupakan salah satu studi kasus dalam fisika teoretis yang bertujuan untuk mempelajari sifat-sifat partikel bermassa dan tak berputar dengan spin-0 dalam konteks relativitas umum. Persamaan Klein-Gordon awalnya diterapkan pada ruang-waktu datar, di mana partikel dianggap bergerak dalam ruang dan waktu yang homogen dan isotropik. Namun, dalam konteks relativitas umum, ruang dan waktu tidak lagi homogen dan isotropik, melainkan melengkung karena adanya medan gravitasi. Oleh karena itu, perlu dilakukan modifikasi pada persamaan Klein-Gordon agar dapat diterapkan pada ruang-waktu melengkung (Hernani, 2021).

Untuk mempelajari sifat-sifat solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild, dapat dilakukan studi kasus dengan menggunakan metrik simetri bola. Metrik simetri bola digunakan untuk menggambarkan medan gravitasi sekitar objek dengan massa yang besar seperti bintang atau lubang hitam. Dalam studi kasus ini, solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild dengan menggunakan metrik simetri bola dapat dinyatakan dalam bentuk serangkaian fungsi radial dan fungsi angular. Studi kasus ini menggunakan metode numerik untuk menghitung solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild dengan

menggunakan metrik simetri bola. Metode numerik digunakan untuk menghitung solusi persamaan Klein-Gordon yang memiliki bentuk yang kompleks dan sulit untuk dinyatakan dalam bentuk tertentu.

Solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild dapat membantu kita memahami bagaimana medan gravitasi ekstrem, seperti yang dihasilkan oleh lubang hitam, mempengaruhi perilaku partikel-partikel subatom. Pertimbangan ini sangat penting dalam teori relativitas umum Einstein. Salah satu studi kasus yang menarik adalah menganalisis bagaimana partikel dengan massa nol berperilaku saat mendekati horison peristiwa lubang hitam Schwarzschild.

Ketika memeriksa solusi persamaan Klein-Gordon untuk partikel massa nol dalam koordinat Schwarzschild, ditemukan bahwa energi partikel ini secara efektif digantikan oleh momentum yang semakin besar saat mereka mendekati horison peristiwa. Ini menunjukkan bahwa partikel yang mendekati lubang hitam akan memiliki energi yang cukup besar sehingga mereka cenderung bergerak menuju horison peristiwa dan akhirnya jatuh ke dalam lubang hitam. Namun, di sekitar horison peristiwa, partikel juga akan mengalami efek merah (redshift) yang signifikan, menyebabkan panjang gelombang mereka terpanjang secara drastis (Ryder, 1985).

Selain itu, studi kasus ini juga memberikan wawasan tentang efek tunnel kuantum yang sangat menarik dalam konteks relativitas umum. Terlepas dari momentum besar partikel ini, mereka masih memiliki probabilitas kecil untuk "*tunnel*" keluar dari horison peristiwa, meskipun secara klasiknya mereka akan tertangkap oleh gravitasi lubang hitam. Ini merupakan contoh konkret dari

interaksi antara teori relativitas umum dan mekanika kuantum. Namun, penting untuk diingat bahwa solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild hanya memberikan model teoretis dan idealisasi. Dalam situasi nyata, berbagai faktor seperti interaksi elektromagnetik dan efek kuantum lainnya dapat mempengaruhi perilaku partikel-partikel tersebut dalam medan gravitasi lubang hitam dengan cara yang lebih kompleks.

Hasil studi kasus menunjukkan bahwa solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild dengan menggunakan metrik simetri bola memiliki sifat-sifat yang berbeda dengan solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu Minkowski. Solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild memiliki sifat-sifat yang dipengaruhi oleh medan gravitasi. Dalam kesimpulannya, studi kasus mengenai persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild dengan menggunakan metrik simetri bola dapat memberikan informasi yang lebih detail tentang sifat-sifat solusi persamaan Klein-Gordon dalam konteks relativitas umum. Studi kasus ini dapat digunakan untuk mempelajari berbagai fenomena fisika dalam konteks relativitas umum, seperti efek lensa gravitasi dan radiasi gravitasi, serta dapat digunakan untuk mengembangkan teori medan kuantum dan teori kosmologi seperti radiasi Hawking.

## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari penelitian ini, maka dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung diperoleh dari memodifikasi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu datar dengan menggunakan metrik Schwarzschild untuk menggambarkan medan gravitasi sekitar objek dengan massa kuat seperti lubang hitam. Dari hasil modifikasi ini, diperoleh persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung sebagai berikut :

$$\frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{g_{rr}} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{r^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

Pada dasarnya, persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung mempertimbangkan efek lengkungan ruang-waktu dengan menggantikan operator Laplace spasial ( $\nabla^2$ ) dalam persamaan Klein-Gordon. Persamaan ini menggambarkan bagaimana partikel dengan massa bermuatan berinteraksi dengan medan gravitasi yang dihasilkan oleh objek bermassa dalam kerangka relativistik.

2. Solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung Schwarzschild adalah :

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = A e^{-i\sqrt{E} g_{tt} t} \cdot R_l \cdot \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

Efek relativitas umum pada solusi ini tercermin dalam interaksi antara momentum sudut, parameter gravitasi, dan medan gravitasi yang sangat kuat.

Fluktuasi dalam gelombang dan perubahan skala jarak menggambarkan bagaimana partikel atau gelombang bersifat elastis terhadap medan gravitasi yang mengubah geometri ruang-waktu. Efek gravitasi pada energi potensial partikel juga menegaskan bahwa medan gravitasi Schwarzschild tidak hanya memengaruhi lintasan, tetapi juga properti energi partikel itu sendiri.

## **5.2 Saran**

Penelitian mengenai solusi persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung ini dilakukan untuk mengetahui pengaruh gravitasi terhadap perubahan ruang-waktu dalam konteks lubang hitam Schwarzschild. Penulis berharap penelitian ini dapat dikembangkan lagi ke depannya dengan memberikan variasi baru ke dalam persamaan yang telah penulis teliti. Pengembangan penelitian selanjutnya bisa menambahkan variasi seperti efek rotasi atau juga energi casimir. Selain itu, penelitian mengenai persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung juga dapat dikembangkan lagi di konteks lubang hitam yang berbeda dan lebih kompleks, seperti lubang hitam Kerr, Kerr-Newman, Reissner-Nordstrom, Robertson-Walker ataupun lubang hitam yang lain.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anugraha, R. (2005). *Pengantar Teori Relativitas dan Kosmologi*. Yogyakarta: UGM Press.
- Carroll, S. M. (2004). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Pearson Education.
- Colosi, D. a. (2019). The Vacuum as a Lagrangian Subspace. *arXiv:1903.08250v2[hep-th]*.
- Elizalde, E. (1987). Series Solutions for the Klein-Gordon equation in Schwarzschild Space-time. *Physical Review*, D36,1269.
- Elizalde, E. (1988). Exact Solutions of the Massive Klein-Gordon-Schwarzschild Equation. *Physical Review*, D37,2127.
- Gary, N. (2021). Modified General Relativity and Quantum Theory in Curved Spacetime. *arXiv:1909.03845v5[gr-qc]*.
- Gautama, S. E. (2018). *Pengantar Teori Relativitas Umum dan Kosmologi* . Penerbit Online: Paradoks Softbook Publisher.
- Griffith, J. (2005). *Introduction To Quantum Mechanics Second Edition*. United States of America: Pearson Prentice Hall.
- Hartle, J. B. (2003). *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Pearson Education.
- Hernani, I. (2021). Studi Persamaan Klein-Gordon dalam Struktur Ruang-Waktu Schwarzschild. *Skripsi. Tidak Diterbitkan*, Malang : UIN Malang.
- Humaidi, S., Simbolon, T., Ong, R., & Afrida, N. W. (2016). Analisis dan Visualisasi Persamaan Klein-Gordon pada Elektron dalam Sumur Potensial dengan Menggunakan Program Mathematic 10. *SNF 2016-TPN-19, Vol.5*.
- Irawan, A. (2016). Kajian Waktu Kerr-Newman dalam Gravitasi Einstein. Surabaya : Jurusan Fisika ITS.
- Konopla, A. R. (2018). Axisymmetric Black Holes allowing for Separation of Variables in the Klein-Gordon and Hamiltonian-Jacobi Equation. *ArXiv:1801.07195v3[gr-qc]*.
- Krane, K. (1992). *Fisika Modern*. Jakarta: UI Press.
- Lizardo, A. (2019). Solusi Persamaan Klein-Gordon di Dalam Ruang-Waktu Robertson-Walker. *Skripsi.Tidak diterbitkan*, Universitas Sriwijaya : Sumatera Selatan.

- Mulyono, A. (2006). *Fisika dan Al Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.
- Naiggolan, R. D. (2012). *Penerapan Persamaan Klein-Gordon untuk Menentukan Tingkat Energi Atom Pion*. Medan: Universitas Sumatra Utara.
- Philippe, G. L., & Ma, Y. (2022). Nonlinier Stability of Self-gravitating Massive Fields, A wave-Klein-Gordon Model. *arXiv:2212.07463v1[gr-qc]*.
- Purwanto, A. (2015). *Ayat-ayat Semesta*. Bandung: Mizan.
- Rebekah, D. L., Chabysheva, S., & Hiller, J. R. (2017). Klein-Gordon Equation in Curved Space-time. *arXiv:1711.00735*.
- Romadani, A. (2023). Solution of Klein-Gordon Equation in F(R) Theory of Gravity. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Fisika Al-Biruni*, Volume 12, Number 1, 31-41.
- Romlah. (2011). *Ayat-Ayat Al Qur'an dan Fisika*. Bandar Lampung: Harakindo Publishing.
- Ryder, L. H. (1985). *Quantum Field Theory 1st ed*. Cambridge: Univ. of Cambridge.
- Saadatmand, D. d. (2017). Soliton-Potential Interaction in the Nonlinear Klein-Gordon Model. *ArXiv:1107.1340v4[nlin.PS]*.
- Sani, R. A. (2014). *Sains Berbasis Al Qur'an*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Sporea, C. A. (2014). Notes on f(R) Theories of Gravity. *arXiv:1403.3852v1*, 4.
- Sugiyono, V. (2016). *Mekanika Kuantum "Indra Keenam untuk Menjelajahi Dunia Atom yang Tak Kasat Mata"*. Yogyakarta: CAPS (Center of Academic Publishing Service).
- Sutopo. (2005). *Pengantar Fisika Kuantum*. Malang: UM Press.
- Timothy Clifton, P. G. (2012). Modified Gravity and Cosmology. *Cosmology and Nongalactic Astrophysics (astro-ph.CO)*.
- Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley & Sons.
- Wospakrik, H. (1987). *Berkenalan dengan Teori Kerelatifan Umum dan Biografi Albert Einstein*. Bandung: ITB.

## LAMPIRAN

### Lampiran A. Solusi Schwarzschild

Bentuk umum dari metrik ruang waktu adalah :

$$ds^2 = e^{2\alpha(r,t)} dt^2 - e^{2\beta(r,t)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (\text{A.1})$$

Berdasarkan bentuk metrik di atas, dapat dituliskan tensor kovarian ruang waktu simetri bola adalah :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\beta(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Dengan determinan metriknya :

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = -e^{2(\alpha+\beta)} r^4 \sin^2 \theta \quad (\text{A.3})$$

Untuk tensor kontravariannya,

$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2\alpha(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\beta(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Selanjutnya bisa dicari simbol Christoffel dari metrik di atas. Definisi dari simbol Christoffel itu sendiri adalah :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right) \quad (\text{A.5})$$

Karena metrik yang digunakan berupa metrik diagonal, maka simbol Christoffel akan bernilai jika komponen indeksnya  $\alpha = \beta$ , maka persamaan di atas dapat diubah menjadi :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \left( \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right) \quad (\text{A.6})$$

Nilai dari simbol Christoffel yang tidak nol diperoleh dengan beberapa syarat di bawah ini :

1. Suku pertama dalam kurung tidak nol jika  $\nu \neq \mu = \alpha$
2. Suku kedua dalam kurung tidak nol jika  $\mu \neq \nu = \alpha$
3. Suku ketiga dalam kurung tidak nol jika  $\alpha \neq \mu = \nu$
4. Ketika  $\alpha = \mu = \nu$

Syarat pertama dan kedua diperoleh karena adanya sifat simetri dari simbol Christoffel yang dituliskan dalam hubungan :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} \quad (\text{A.7})$$

Maka untuk nilai dari simbol Christoffel adalah :

Untuk  $\nu \neq \mu = \alpha$  dan simetrinya  $\neq \nu = \alpha$  , maka  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\mu\mu} \partial_{\nu} g_{\mu\mu}$

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} = \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \partial_r e^{2\alpha} = \alpha' \quad (\text{A.8})$$

$$\Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \partial_{\theta} e^{2\alpha} = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\Gamma_{03}^0 = \Gamma_{30}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} = \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \partial_{\phi} e^{2\alpha} = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} = \frac{1}{2} e^{-2\beta} \partial_t e^{2\beta} = \dot{\beta} \quad (\text{A.11})$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} e^{-2\beta} \partial_{\theta} e^{2\beta} = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} = \frac{1}{2} e^{-2\beta} \partial_{\phi} e^{2\beta} = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\Gamma_{20}^2 = \Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} = \frac{1}{2} r^{-2} \partial_t r^2 = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2} r^{-2} \partial_r r^2 = \frac{1}{r} \quad (\text{A.15})$$

$$\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} = \frac{1}{2} r^{-2} \partial_{\phi} r^2 = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\Gamma_{30}^3 = \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} = \frac{1}{2} r^{-2} \sin^{-2} \theta \partial_t (r^2 \sin^2 \theta) = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = \frac{1}{2} r^{-2} \sin^{-2} \theta \partial_r (r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{r} \quad (\text{A.18})$$

$$\Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} r^{-2} \sin^{-2} \theta \partial_{\theta} (r^2 \sin^2 \theta) = \cot \theta \quad (\text{A.19})$$

Untuk  $\alpha \neq \mu = \nu$ , maka  $\Gamma_{\mu\mu}^{\alpha} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\alpha}\partial_{\alpha}g_{\mu\mu}$

$$\Gamma_{11}^0 = -\frac{1}{2}g^{00}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} = -\frac{1}{2}e^{-2\alpha}\partial_t e^{2\beta} = \dot{\beta}e^{2(\beta-\alpha)} \quad (\text{A.20})$$

$$\Gamma_{22}^0 = -\frac{1}{2}g^{00}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} = -\frac{1}{2}e^{-2\alpha}\partial_t r^2 = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\Gamma_{33}^0 = -\frac{1}{2}g^{00}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} = -\frac{1}{2}e^{-2\alpha}\partial_t(r^2 \sin^2 \theta) = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\Gamma_{00}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}e^{-2\beta}\partial_r e^{2\alpha} = \alpha' e^{2(\alpha-\beta)} \quad (\text{A.23})$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}e^{-2\beta}\partial_r r^2 = -re^{-2\beta} \quad (\text{A.24})$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}e^{-2\beta}\partial_r(r^2 \sin^2 \theta) = -r\sin^2 \theta e^{-2\beta} \quad (\text{A.25})$$

$$\Gamma_{00}^2 = -\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}r^{-2}\partial_{\theta} e^{2\alpha} = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}r^{-2}\partial_{\theta} e^{2\beta} = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}r^{-2}\partial_{\theta}(r^2 \sin^2 \theta) = -\sin \theta \cos \theta \quad (\text{A.28})$$

$$\Gamma_{00}^3 = -\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} = -\frac{1}{2}r^{-2}\sin^{-2} \theta \partial_{\phi} e^{2\alpha} = 0 \quad (\text{A.29})$$

$$\Gamma_{11}^3 = -\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} = -\frac{1}{2}r^{-2}\sin^{-2} \theta \partial_{\phi} e^{2\beta} = 0 \quad (\text{A.30})$$

$$\Gamma_{22}^3 = -\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} = -\frac{1}{2}r^{-2}\sin^{-2} \theta \partial_{\phi} r^2 = 0 \quad (\text{A.31})$$

Untuk  $\alpha = \mu = \nu$ , maka  $\Gamma_{\mu\mu}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\mu}\partial_{\mu}g_{\mu\mu}$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}e^{-2\alpha}\partial_t e^{2\alpha} = \dot{\alpha} \quad (\text{A.32})$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}e^{-2\beta}\partial_r e^{2\beta} = \beta' \quad (\text{A.33})$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = \frac{1}{2}r^{-2}\partial_{\theta} r^2 = 0 \quad (\text{A.34})$$

$$\Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} = \frac{1}{2}r^{-2}\sin^{-2} \theta \partial_{\phi}(r^2 \sin^2 \theta) = 0 \quad (\text{A.35})$$

Setelah diperoleh nilai dari simbol Christoffel yang hasilnya tidak sama dengan nol, dapat dicari nilai tensor Riccinya dengan menggunakan persamaan :

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta}\Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} \quad (\text{A.36})$$

Dengan menggunakan sifat kesimetriannya diperoleh nilai tensor Ricci adalah :

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{\alpha 0}^\alpha + \Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha 0}^\beta \Gamma_{0\beta}^\alpha \\
&= [\partial_0 \Gamma_{00}^0 + \partial_1 \Gamma_{00}^1] - [\partial_0 \Gamma_{00}^0 + \partial_0 \Gamma_{10}^1] + \\
&\quad [\Gamma_{00}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{10}^1) + \Gamma_{00}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3)] - \\
&\quad [(\Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{01}^0) + (\Gamma_{10}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{01}^1)] \\
&= [\ddot{\alpha} + \alpha'' e^{2(\alpha-\beta)} + 2\alpha'(\alpha' - \beta') e^{2(\alpha-\beta)}] - [(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta})] + \\
&\quad \left[ \dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} + \alpha'^2 e^{2(\alpha-\beta)} + \alpha'\beta' e^{2(\alpha-\beta)} + \frac{\alpha'}{r} e^{2(\alpha-\beta)} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\alpha'}{r} e^{2(\alpha-\beta)} \right] - [\dot{\alpha}^2 + \alpha'^2 e^{2(\alpha-\beta)} + \alpha'^2 + \dot{\beta}^2] \\
&= (\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2) + e^{2(\alpha-\beta)} \left[ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \right] \tag{A.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{01} &= \partial_\alpha \Gamma_{01}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{\alpha 1}^\alpha + \Gamma_{01}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha 1}^\beta \Gamma_{0\beta}^\alpha \\
&= [\partial_0 \Gamma_{01}^0 + \partial_1 \Gamma_{01}^1] - [\partial_0 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3)] + \\
&\quad [\Gamma_{01}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{10}^1) + \Gamma_{01}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3)] - \\
&\quad [(\Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^0) + (\Gamma_{11}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{01}^1)] \\
&= \dot{\beta} \left( \alpha' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) - \dot{\beta} e^{2(\alpha-\beta)} \alpha' \dot{\beta} e^{2(\alpha-\beta)} \\
&= \frac{2\dot{\beta}}{r} \tag{A.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{02} = R_{20} &= \partial_\alpha \Gamma_{02}^\alpha - \partial_2 \Gamma_{\alpha 0}^\alpha + \Gamma_{02}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^\beta \Gamma_{\beta 2}^\alpha \\
&= -\partial_2 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{10}^1) \\
&= -\partial_\theta (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \\
&= 0 \tag{A.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{03} = R_{30} &= \partial_\alpha \Gamma_{03}^\alpha - \partial_3 \Gamma_{\alpha 3}^\alpha + \Gamma_{03}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^\beta \Gamma_{\beta 3}^\alpha \\
&= -\partial_3 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{10}^1) \\
&= -\partial_\phi (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \tag{A.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 \\
R_{11} &= \partial_\alpha \Gamma_{11}^\alpha - \partial_1 \Gamma_{\alpha 1}^\alpha + \Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha 1}^\beta \Gamma_{1\beta}^\alpha \\
&= [\partial_0 \Gamma_{11}^0 + \partial_1 \Gamma_{11}^1] - [\partial_1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3)] + \\
&\quad [\Gamma_{11}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{10}^1) + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3)] - \\
&\quad [(\Gamma_{01}^0 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^0) + (\Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1) + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{13}^3] \\
&= [\ddot{\beta} e^{2(\alpha-\beta)} + 2\dot{\beta}(\dot{\beta} - \dot{\alpha})e^{2(\alpha-\beta)} + \beta''] - \left[ \alpha'' + \beta'' - \frac{2}{r^2} \right] \\
&\quad + \left[ \dot{\beta} e^{2(\alpha-\beta)} (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) + \beta' \left( \alpha' + \beta' - \frac{2}{r} \right) \right] \\
&\quad - [\alpha'^2 + 2\dot{\beta}^2 e^{2(\alpha-\beta)} + \beta'^2 + 2/r^2] \\
&= -e^{2(\alpha-\beta)} (\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2) + \left[ -\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\beta'}{r} + \alpha'\beta' \right] \tag{A.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{12} &= R_{21} = \partial_\alpha \Gamma_{12}^\alpha - \partial_2 \Gamma_{\alpha 1}^\alpha + \Gamma_{12}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^\beta \Gamma_{\beta 2}^\alpha \\
&= \partial_2 \Gamma_{12}^2 - \partial_2 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{32}^3 \\
&= \partial_\theta \frac{1}{r} - \partial_\theta \left( \beta' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \cot \theta - \frac{1}{r} \cot \theta \\
&= 0 \tag{A.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{13} &= R_{31} = \partial_\alpha \Gamma_{13}^\alpha - \partial_3 \Gamma_{\alpha 1}^\alpha + \Gamma_{13}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^\beta \Gamma_{\beta 3}^\alpha \\
&= \partial_3 \Gamma_{13}^3 - \partial_3 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) \\
&= \partial_\phi \frac{1}{r} - \partial_\phi \left( \alpha' + \beta' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) \\
&= 0 \tag{A.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_\alpha \Gamma_{22}^\alpha - \partial_2 \Gamma_{\alpha 2}^\alpha + \Gamma_{22}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha 2}^\beta \Gamma_{2\beta}^\alpha \\
&= \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{32}^3 + [\Gamma_{22}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3)] - \\
&\quad [\Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{23}^3] \\
&= -e^{-2\beta} (\alpha'r - \beta'r + 1) + 1 \tag{A.44}
\end{aligned}$$

$$R_{23} = R_{32} = \partial_\alpha \Gamma_{23}^\alpha - \partial_3 \Gamma_{\alpha 2}^\alpha + \Gamma_{23}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^\beta \Gamma_{\beta 3}^\alpha$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_3 \Gamma_{23}^3 - \partial_3 \Gamma_{32}^3 \\
&= \partial_\phi \cot \theta - \partial_\phi \cot \theta \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.45}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_\alpha \Gamma_{33}^\alpha - \partial_3 \Gamma_{\alpha 3}^\alpha + \Gamma_{33}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha 3}^\beta \Gamma_{3\beta}^\alpha \\
&= [\partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2] - [0] + \\
&\quad [\Gamma_{33}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3] - \\
&\quad [\Gamma_{13}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{31}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3] \\
&= -\sin^2 \theta e^{-2\beta} (\alpha' r - \beta' r + 1) + \sin^2 \theta \\
&= \sin^2 \theta R_{22}
\end{aligned} \tag{A.46}$$

Berdasarkan nilai tensor Ricci yang telah diperoleh di atas, dapat ditentukan skalar Riccinya, yaitu :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
&= e^{-2\alpha} R_{00} - e^{-2\beta} R_{11} - \frac{1}{r^2} \left( R_{22} + \frac{\sin^2 \theta R_{22}}{\sin^2 \theta} \right) \\
&= e^{-2\alpha} \left[ (\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2) + e^{2(\alpha-\beta)} \left( \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \right) \right] - \\
&\quad e^{-2\beta} \left[ -e^{2(\alpha-\beta)} (\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2) + \left( -\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} + \alpha'\beta' \right) \right] \\
&\quad - \frac{2}{r^2} [e^{-2\beta} (\alpha' r - \beta' r + 1) + 1] \\
&= 2e^{-2\beta} \left[ \alpha'' - \alpha'\beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{2}{r^2} + \\
&\quad 2e^{2(\alpha-\beta)} (\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2)
\end{aligned} \tag{A.47}$$

Dengan menerapkan syarat statis pada persamaan, suku yang diturunkan terhadap waktu akan dihilangkan, maka nilai tensor Ricci dan skalar Riccinya menjadi :

$$R_{00} = e^{2(\alpha-\beta)} \left[ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \right] \quad (\text{A.48})$$

$$R_{11} = -\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} + \alpha'\beta' \quad (\text{A.49})$$

$$R_{22} = -e^{-2\beta}(\alpha'r - \beta'r + 1) + 1 \quad (\text{A.50})$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22} \quad (\text{A.51})$$

$$\mathcal{R} = 2e^{-2\beta} \left[ \alpha'' - \alpha'\beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{2}{r^2} \quad (\text{A.52})$$

Hasil yang diperoleh di atas selanjutnya akan disubstitusikan ke dalam persamaan medan Einstein dan hasilnya menjadi :

$$\begin{aligned} G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} \\ &= e^{2(\alpha-\beta)} \left[ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \right] \\ &\quad - \frac{e^{2\alpha}}{2} \left[ 2e^{-2\beta} \left( \alpha'' - \alpha'\beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{2}{r^2} \right] \\ &= \frac{2\beta' e^{2(\alpha-\beta)}}{r} - \frac{e^{2(\alpha-\beta)}}{r^2} + \frac{e^{2\alpha}}{r^2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

$$\begin{aligned} G_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} \\ &= -\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} + \alpha'\beta' - \\ &\quad - \frac{e^{2\beta}}{2} 2e^{-2\beta} \left[ \alpha'' - \alpha'\beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{2}{r^2} \\ &= \frac{2\alpha'}{r} - \frac{e^{2\beta}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

$$\begin{aligned} G_{22} &= R_{22} - \frac{1}{2}Rg_{22} \\ &= -e^{-2\beta}(\alpha'r - \beta'r + 1) + 1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{r^2}{2} 2e^{-2\beta} \left[ \alpha'' - \alpha' \beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{2}{r^2} \\
& = r^2 e^{-2\beta} \left( \alpha'' - \alpha' \beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} \right) \\
& = 0
\end{aligned} \tag{A.55}$$

$$\begin{aligned}
G_{33} &= R_{33} - \frac{1}{2} R g_{33} \\
&= G_{22} \sin^2 \theta \\
&= r^2 e^{-2\beta} \left[ \alpha'' - \alpha' \beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} \right] \sin^2 \theta \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.56}$$

Dengan mempertimbangkan syarat asimtotik unsur  $r \gg$  maka  $g \rightarrow \eta$ , persamaan di atas memberikan  $\beta = -\alpha$ . Disubstitusikan ke dalam persamaan di atas menjadi :

$$2\alpha' e^{2\alpha} r + e^{2\alpha} = 1 \tag{A.57}$$

Karena  $e^{2\alpha} + 2\alpha' e^{2\alpha} r = \frac{\partial}{\partial r} (r e^{2\alpha})$ , maka :

$$\begin{aligned}
r e^{2\alpha} &= \int dr = r - r_s \\
e^{2\alpha} &= 1 - \frac{r_s}{r}
\end{aligned} \tag{A.58}$$

Dimana  $r_s$  adalah sebuah tetapan integrasi berdimensi panjang yang belum diketahui nilainya dengan mensubstitusikan  $\beta = -\alpha$  dan  $e^{2\alpha}$  pada persamaan di atas, akan diperoleh :

$$ds^2 \equiv c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{A.59}$$

Menggunakan pendekatan pesturbasi orde pertama :

$$g_{00} \cong \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \tag{A.60}$$

Dengan  $\Phi = -\frac{2GM}{c^2}$  adalah potensial gravitasi Newton. Dengan membandingkan kedua persamaan tersebut akan diperoleh nilai dari kuantitas  $r_s$  :

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (\text{A.61})$$

Untuk menyelesaikan solusi dari persamaan medan vakum dapat dilakukan tanpa harus mensubstitusikan nilai  $R_{\mu\nu}$  dan  $\mathcal{R}$ . Pada persamaan di atas menunjukkan bahwa tensor Ricci bernilai nol pada ruang vakum  $T_{\mu\nu} = 0$ , jadi hanya perlu memilih persamaan-persamaan dari syarat  $R_{\mu\nu} = 0$  untuk dapat mengetahui nilai  $e^{2\alpha}$  dan  $e^{2\beta}$ . Untuk daerah eksterior digunakan  $R_{00}$ ,  $R_{11}$ , dan  $R_{22}$ .

$$e^{2(\alpha-\beta)} \left[ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \right] = 0 \quad (\text{A.62})$$

$$-\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} + \alpha'\beta' = 0 \quad (\text{A.63})$$

$$-e^{-2\beta}(\alpha'r - \beta'r + 1) + 1 = 0 \quad (\text{A.64})$$

Persamaan (A.62) dijumlahkan dengan persamaan (A.64) menjadi,

$$\frac{2}{r}(\alpha' + \beta') = 0 \rightarrow \beta' = -\alpha' \quad (\text{A.65})$$

Persamaan (A.57) dan (A.58) dapat disederhanakan menjadi,

$$e^{2\alpha}(2\alpha'r + 1) - 1 = 0 \quad (\text{A.66})$$

Diperoleh hasil yang sama, sehingga diperoleh kembali hasil dari  $e^{2\alpha} = 1 - \frac{r_s}{r}$ .

Pada persamaan-persamaan di atas, tanda aksen memiliki arti turunan/derivatif ke  $r$ . Sehingga dihasilkan solusi Schwarzschild :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (\text{A.67})$$

## Lampiran B. Simbol Christoffel Untuk Kasus Lubang Hitam Schwarzschild

Secara formal, Simbol Christoffel didefinisikan sebagai:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left( \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\lambda}} \right) \quad (\text{B.1})$$

Dalam koordinat bola, metrik Schwarzschild dapat dituliskan seperti berikut :

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Berikut ini turunan parsial dari metrik Schwarzschild terhadap koordinat ruang-waktu  $(t, r, \theta, \phi)$  :

a.) Turunan parsial terhadap koordinat waktu  $t$  :

Untuk menghitung  $\frac{\partial g_{tt}}{\partial t}$ , elemen  $g_{tt}$  dari metrik Schwarzschild adalah  $g_{tt} = - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)$  :

$$\frac{\partial g_{tt}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right) = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial g_{rr}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \right) = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (r^2) = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \sin^2 \theta) = 0 \quad (\text{B.5})$$

b.) Turunan parsial terhadap koordinat  $r$  :

Untuk menghitung  $\frac{\partial g_{rr}}{\partial r}$ , elemen  $g_{rr}$  dari metrik Schwarzschild adalah  $g_{rr} = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1}$  :

$$\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right)$$

$$\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^0 \left(-\frac{2GM}{c^2 r^2}\right) \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} = \frac{2GM}{c^2 r^2}$$

$$\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \right)$$

$$\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-2} \left(-\frac{2GM}{c^2 r^2}\right)$$

$$\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} = \frac{2GM}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (r^2) = 2r \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin^2 \theta) = 2r \sin^2 \theta \quad (\text{B.9})$$

c.) Turunan parsial terhadap koordinat  $\theta$  :

Untuk menghitung  $\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta}$ , elemen  $g_{\theta\theta}$  dari metrik Schwarzschild adalah  $g_{\theta\theta} = r^2$ ,

maka :

$$\frac{\partial g_{tt}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \right) = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial g_{rr}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \right) = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2) = 2r \frac{\partial r}{\partial \theta} = 2r \frac{\partial}{\partial \theta} (r) = 2r \cdot 0 = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \sin^2 \theta) = 2r^2 \sin \theta \cos \theta \quad (\text{B.13})$$

d.) Turunan Parsial terhadap koordinat  $\phi$  :

Untuk menghitung  $\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \phi}$ , elemen  $g_{\phi\phi}$  dari metrik Schwarzschild adalah  $g_{\phi\phi} =$

$r^2 \sin^2 \theta$ , maka :

$$\frac{\partial g_{tt}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right) = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial g_{rr}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \right) = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} (r^2) = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} (r^2 \sin^2 \theta)$$

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \phi} = 2r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \phi} = 2r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \phi} (\theta)$$

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \phi} = 2r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot 0$$

$$\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{B.17})$$

Kemudian, dari turunan parsial komponen metrik Schwarzschild di atas, dapat dihitung simbol Christoffel pertama ( $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ ) sebagai berikut :

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2} g^{tt} \left( \frac{\partial g_{tt}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \left( - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \right) (0) = 0 \quad (\text{B.18})$$

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{1}{2} g^{tt} \left( \frac{\partial g_{rr}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \left( - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \right) (0) = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = \frac{1}{2} g^{tt} \left( \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \left( - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \right) (0) = 0 \quad (\text{B.20})$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^t = \frac{1}{2} g^{tt} \left( \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \left( - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \right) (0) = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} g^{rr} \left( \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left( \frac{2GM}{c^2 r^2} \right) = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left( \frac{GM}{c^2 r^2} \right) \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} \left( \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left( \frac{2GM}{c^2 r^2 \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^2} \right) \\ &= \frac{GM}{c^2 r^2 \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} g^{rr} \left( \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) (2r) = \frac{c^2 r - 2GM}{c^2} \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^r &= \frac{1}{2} g^{rr} \left( \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) (2r \sin^2 \theta) \\ &= \left( \frac{c^2 r - 2GM}{c^2} \right) \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\Gamma_{tt}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left( \frac{\partial g_{tt}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2} \right) (0) = 0 \quad (\text{B.26})$$

$$\Gamma_{rr}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left( \frac{\partial g_{rr}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2} \right) (0) = 0 \quad (\text{B.27})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left( \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2} \right) (0) = 0 \quad (\text{B.28})$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left( \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2} \right) (2r^2 \sin \theta \cos \theta) = \sin \theta \cos \theta \quad (\text{B.29})$$

$$\Gamma_{tt}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left( \frac{\partial g_{tt}}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) (0) = 0 \quad (\text{B.30})$$

$$\Gamma_{rr}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left( \frac{\partial g_{rr}}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) (0) = 0 \quad (\text{B.31})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left( \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) (0) = 0 \quad (\text{B.32})$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \left( \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) (0) = 0 \quad (\text{B.33})$$

**Lampiran C. Turunan Kovarian dan Kontravarian Untuk Kasus Lubang Hitam Schwarzschild**

Bentuk umum turunan kovarian adalah :

$$\nabla_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\psi - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi \quad (\text{C.1})$$

Jika metrik Schwarzschild di substitusikan ke dalamnya, maka :

Untuk  $\mu = t$

$$\begin{aligned} \nabla_t\psi &= \partial_t\psi - \Gamma_{t\beta}^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi \\ &= \partial_t\psi - \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) \left(\frac{GM}{c^2r^2}\right) \partial_t\psi \\ &= \frac{GM}{c^2r^2} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Untuk  $\mu = r$

$$\begin{aligned} \nabla_r\psi &= \partial_r\psi - \Gamma_{r\beta}^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi \\ &= \partial_r\psi - \frac{GM}{c^2r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)} \partial_r\psi \\ &= -\frac{GM}{c^2r^2} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Untuk  $\mu = \theta$

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta}\psi &= \partial_{\theta}\psi - \Gamma_{\theta\beta}^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi \\ &= \partial_{\theta}\psi - \frac{c^2r - 2GM}{c^2} \partial_{\theta}\psi \\ &= \sin\theta \cos\theta \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Untuk  $\mu = \phi$

$$\begin{aligned}
\nabla_\phi \psi &= \partial_\phi \psi - \Gamma_{\phi\beta}^\alpha \partial_\alpha \psi \\
&= \partial_\phi \psi - \left( \frac{c^2 r - 2GM}{c^2} \right) \sin^3 \theta \cos \theta \partial_\phi \psi \\
&= -\frac{\sin \theta}{\cos \theta}
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Bentuk umum turunan kontravarian adalah :

$$\nabla^\mu \psi = g^{\alpha\beta} \nabla_\mu \psi \tag{C.6}$$

Jika metrik Schwarzschild di substitusikan ke dalamnya, maka :

Untuk  $\mu = t$

$$\begin{aligned}
\nabla^t \psi &= g^{tt} \nabla_t \psi \\
&= -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left( \partial_t \psi - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{GM}{c^2 r^2}\right) \partial_t \psi \right) \\
&= -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \frac{GM}{c^2 r^2} \\
&= -\frac{GM}{c^2 r^2 - 2GM r}
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Untuk  $\mu = r$

$$\begin{aligned}
\nabla^r \psi &= g^{rr} \nabla_r \psi \\
&= \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left( \partial_r \psi - \frac{GM}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \partial_r \psi \right) \\
&= \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left( -\frac{GM}{c^2 r^2} \right) \\
&= \frac{2G^2 M^2 - c^2 GM r^2}{c^4 r^4}
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Untuk  $\mu = \theta$

$$\nabla^\theta \psi = g^{\theta\theta} \nabla_\theta \psi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^2} \left( \partial_\theta \psi - \frac{c^2 r - 2GM}{c^2} \partial_\theta \psi \right) \\
&= \frac{1}{r^2} \sin \theta \cos \theta \\
&= \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2}
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Untuk  $\mu = \phi$

$$\begin{aligned}
\nabla^\phi \psi &= g^{\phi\phi} \nabla_\phi \psi \\
&= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \partial_\phi \psi - \left( \frac{c^2 r - 2GM}{c^2} \right) \sin^3 \theta \cos \theta \partial_\phi \psi \right) \\
&= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \\
&= -\frac{1}{r^2 \sin \theta \cos \theta}
\end{aligned} \tag{C.10}$$

## Lampiran D. Persamaan Klein-Gordon dalam Ruang-Waktu Melengkung

Operator d'Alembertian dalam ruang-waktu melengkung memiliki bentuk yang lebih kompleks, bentuk umumnya yaitu :

$$\square^2 \psi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi) \quad (\text{D.1})$$

Jika komponen metrik Schwarzschild disubstitusikan ke dalam operator d'Alembertian dalam ruang-waktu melengkung, maka diperoleh :

$$\begin{aligned} \square^2 &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \\ \square^2 &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right) \partial^\mu - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \partial^\nu \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right) g^{\mu\nu} \partial_\nu - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \partial^\nu \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right) g^{\mu\nu} \partial_\nu \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right) \partial_\nu \right) \\ &\quad - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \partial^\nu \\ &= \partial_\mu \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) g^{\mu\nu} \right) \partial_\nu \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right) \partial_\nu \right) \\ &\quad - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \partial^\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\partial_\mu \left( \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) g^{\mu\nu} \partial_\nu - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \partial_\mu (g^{\mu\nu}) \partial_\nu \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right) \partial_\nu \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \partial^\nu \right) \\
&= - \left( \frac{2GM}{c^2 r^2} \right) g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \partial_\mu (g^{\mu\nu}) \partial_\nu \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right) \partial_\nu \right) \\
&= - \left( \frac{2GM}{c^2 r^2} \right) g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right) \partial_\nu \right) \tag{D.2}
\end{aligned}$$

Sehingga persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu melengkung dengan koordinat metrik Schwarzschild menjadi :

$$\begin{aligned}
&\left[ - \left( \frac{2GM}{c^2 r^2} \right) g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right) \partial_\nu \right) \right] \psi \\
&\quad - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0 \tag{D.3}
\end{aligned}$$

Dalam metrik Schwarzschild, komponen metrik yang relevan dan determinan matriknya adalah :

$$g^{tt} = - \frac{1}{\left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} \tag{D.4}$$

$$g^{rr} = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \tag{D.5}$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \tag{D.6}$$

$$g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \tag{D.7}$$

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\left(-\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)\right) \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \cdot r^2 \cdot r^2 \sin^2 \theta}$$

$$\sqrt{-g} = \sqrt{r^4 \sin^2 \theta}$$

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta \tag{D.8}$$

Kemudian, operator turunan pada persamaan (D.4) – (D.7) disubstitusikan ke dalam  $g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ , sehingga menjadi :

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \psi = -\frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \partial_t \partial_t \psi + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \partial_r \partial_r \psi + \frac{1}{r^2} \partial_\theta \partial_\theta \psi$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi \partial_\phi \psi \tag{D.9}$$

Selanjutnya, operator persamaan (D.8) dan (D.9) ini di substitusikan ke persamaan (D.3),

$$\left[ -\left(\frac{2GM}{c^2 r^2}\right) g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left( \sqrt{-g} \left( -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \right) \partial_\nu \right) \right] \psi$$

$$- \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

$$- \left(\frac{2GM}{c^2 r^2}\right) \left( -\frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \partial_t \partial_t \psi + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \partial_r \partial_r \psi + \frac{1}{r^2} \partial_\theta \partial_\theta \psi \right)$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi \partial_\phi \psi$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_t \left( r^2 \sin \theta \left( -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \right) \partial_t \right) \psi$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_r \left( r^2 \sin \theta \left( -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \right) \partial_r \right) \psi$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta \left( r^2 \sin \theta \left( -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \right) \partial_\theta \right) \psi$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\phi \left( r^2 \sin \theta \left( - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \right) \partial_\phi \right) \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0 \\
& - \frac{1}{\left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} \partial_t \partial_t \psi + \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \partial_r \partial_r \psi \\
& + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \right) \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0 \\
& - \frac{1}{\left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} \partial_t \partial_t \psi - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \partial_r \partial_r \psi \\
& + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \right) \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Dengan mensubstitusikan komponen-komponen metrik Schwarzschild yang telah diketahui sebelumnya,

$$- \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) = g_{tt}$$

$$\frac{1}{\left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} = g_{rr}$$

Dan operator total momentum sudut,

$$L^2 = \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2$$

Maka diperoleh hasil persamaan :

$$\frac{1}{g_{tt}} \partial_t \partial_t \psi - g_{rr} \partial_r \partial_r \psi + \frac{1}{r^2} L^2 \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0 \tag{D.11}$$

$$\frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{g_{rr}} \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi + \frac{L^2}{r^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0 \tag{D.12}$$

**Lampiran E. Pemisahan Variabel Persamaan Klein-Gordon dalam Ruang-Waktu Melengkung**

Persamaan Klein-Gordon yang telah termodifikasi :

$$\frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{g_{rr}} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{r^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0 \quad (\text{E.1})$$

Dengan  $c = \hbar = 1$ , maka persamaan (1) akan berubah menjadi :

$$\frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{g_{rr}} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{r^2} + m^2 \psi = 0 \quad (\text{E.2})$$

$$\left[ \frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{g_{rr}} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{r^2} + m^2 \right] \psi = 0 \quad (\text{E.3})$$

Selanjutnya dilakukan pemisahan variabel pada persamaan Klein-Gordon yang sudah dimodifikasi di atas. Pemisahan variabel ini dilakukan dengan mengganti  $\psi(t, r, \theta, \phi) = T(t)R_l(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$  pada persamaan berikut, sehingga :

$$\left[ \frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{g_{rr}} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{r^2} + m^2 \right] T(t)R_l(r)Y_{lm}(\theta, \phi) = 0 \quad (\text{E.4})$$

Dengan mengembalikan nilai operator momentum sudut  $L^2$  pada persamaan (E.4) ke bentuk sebelumnya, sehingga menjadi :

$$\left[ \frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{g_{rr}} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + m^2 \right] T(t)R_l(r)Y_{lm}(\theta, \phi) = 0$$

$$\left[ \frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{g_{rr}} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right. \\ \left. + m^2 \right] T(t) R_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi) = 0$$

$$\frac{1}{T} \frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2 R} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{g_{rr}} \frac{\partial R}{\partial r} \right) \\ + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{Y \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] + m^2 \quad (E.5) \\ = 0$$

**Pemisahan Variabel Waktu ( $t$ ) :**

$$\frac{1}{T(t)} \left( \frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) T(t) = \text{konstanta} \quad (E.6)$$

Konstanta ini dapat diganti dengan  $-E^2$  agar persamaan memiliki solusi yang dapat diterima, dimana  $E$  adalah energi total partikel, ini menghasilkan persamaan diferensial waktu sebagai berikut :

$$\frac{1}{T} \frac{1}{g_{tt}} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -E^2 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -E^2 g_{tt} T$$

Diasumsikan jika :

$$T = e^{i\omega t}$$

Dimana  $\omega$  adalah frekuensi angular. Kemudian persamaan asumsi disubstitusikan ke dalam persamaan diferensial, sehingga :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(e^{i\omega t}) = -E g_{tt} e^{i\omega t}$$

$$(i\omega)^2 e^{i\omega t} = -E g_{tt} e^{i\omega t}$$

$$\omega^2 = -E g_{tt}$$

$$\omega^2 = -E g_{tt}$$

$$\omega = -\sqrt{E g_{tt}}$$

Sehingga, solusi umum untuk  $T(t)$  adalah :

$$T(t) = A e^{-i\sqrt{E g_{tt}} t} \quad (\text{E.7})$$

**Pemisahan Variabel Radial  $R_l(r)$  :**

Pemisahan variabel radial menghasilkan persamaan Schrodinger radial terpisah,

$$\frac{1}{R_l(r)} \left( -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{r^2} + m^2 \right) R_l(r) = 0$$

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{r^2} + m^2 = E^2$$

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) + \left( \frac{L^2}{r^2} + m^2 - E^2 \right) R_l(r) = 0 \quad (\text{E.8})$$

Persamaan di atas ditulis ulang ke dalam bentuk yang lebih umum menjadi :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) - \frac{1}{g_{rr}} \left( \frac{L^2}{r^2} + m^2 - E^2 \right) R_l(r) = 0 \quad (\text{E.9})$$

Jika digabungkan dengan pemisahan variabel waktu, dan digunakan parameter untuk  $L^2 = l(l+1)$ , maka bentuk umumnya akan menjadi :

$$-\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = g_{00} \left[ -\frac{1}{r^2 R_l} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} + m^2 \right] \equiv E^2 \quad (\text{E.10})$$

Kemudian, menggunakan parameter  $u_l$  yang didefinisikan sebagai  $u_l = r R_l(r)$  untuk menyederhanakannya menjadi bentuk yang lebih kompleks, maka pemisahan variabel untuk bagian radial menjadi :

$$\begin{aligned}
-\frac{d^2 u_l}{dr^2} - \left[ \frac{g'_{rr}}{r g_{rr}} + \frac{1}{2} \frac{g''_{rr}}{g_{rr}} - \frac{3}{4} \left( \frac{g'_{rr}}{g_{rr}} \right)^2 \right] u_l + \frac{l(l+1)}{r^2} g_{rr} u_l \\
+ m^2 g_{rr} u_l = \frac{E^2 g_{rr}}{g_{tt}} u_l
\end{aligned} \tag{E.11}$$

Dengan,

$$g'_{rr} = \frac{d}{dr} \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} = -\frac{2GM}{r^2} \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-2} \tag{E.12}$$

Jika kita misalkan untuk  $\frac{2GM}{c^2} = r_s$ , maka :

$$g_{tt} = -\left( 1 - \frac{r_s}{r} \right) \tag{E.13}$$

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \tag{E.14}$$

Sehingga :

$$g'_{rr} = -\frac{r_s}{(r - r_s)^2} \tag{E.15}$$

Dan

$$g''_{rr} = \frac{2r_s}{(r - r_s)^3} \tag{E.16}$$

Substitusi hasil-hasil dari  $g'_{rr}$  dan  $g''_{rr}$  :

$$\begin{aligned}
-\frac{d^2 u_l}{dr^2} - \left[ -\frac{\frac{r_s}{(r - r_s)^2}}{r \frac{1}{\left( 1 - \frac{r_s}{r} \right)}} + \frac{1}{2} \frac{\frac{2r_s}{(r - r_s)^3}}{\frac{1}{\left( 1 - \frac{r_s}{r} \right)}} - \frac{3}{4} \left( \frac{\frac{r_s}{(r - r_s)^2}}{\frac{1}{\left( 1 - \frac{r_s}{r} \right)}} \right)^2 \right] u_l \\
+ \frac{l(l+1)}{r^2} \frac{1}{\left( 1 - \frac{r_s}{r} \right)} u_l + m^2 \frac{1}{\left( 1 - \frac{r_s}{r} \right)} u_l \\
= \frac{E^2 \frac{1}{\left( 1 - \frac{r_s}{r} \right)}}{-\left( 1 - \frac{r_s}{r} \right)} u_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{1 - \frac{r_s}{r}}{2r^2} u_l - \frac{3}{4} \left( \frac{1 - \frac{r_s}{r}}{r \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} \right)^2 u_l + \frac{l(l+1)}{r^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} u_l \\
& \quad + m^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} u_l = \frac{E^2}{1 - \frac{r_s}{r}} u_l \\
& -\frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{r - r_s}{r^3} u_l - \frac{3}{4} \left( \frac{r - r_s}{r^2} \right)^2 u_l + \frac{l(l+1)}{r^2} \frac{1}{r - r_s} u_l \\
& \quad + \frac{m^2}{r - r_s} u_l = \frac{E^2}{r - r_s} u_l \\
& -\frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{1}{4} \frac{r_s^2}{r^2 (r - r_s)^2} u_l + \frac{l(l+1)}{r^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} u_l + \frac{m^2}{1 - \frac{r_s}{r}} u_l \\
& \quad = \frac{E^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l
\end{aligned} \tag{E.17}$$

Membagi persamaan (E.17) dengan  $m$  untuk mengubah  $m^2$  menjadi :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{1}{4m} \frac{r_s^2}{r^2 (r - r_s)^2} u_l + \frac{l(l+1)}{r^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} \frac{1}{m} u_l - \frac{1}{m \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} u_l \\
& \quad = \frac{E^2}{m \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l
\end{aligned} \tag{E.18}$$

Membagi persamaan (E.18) dengan 2 untuk mengubah beberapa faktor menjadi  $\frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{1}{8m} \frac{r_s^2}{r^2 (r - r_s)^2} u_l + \frac{l(l+1)}{8mr^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} u_l \\
& \quad - \frac{1}{2m \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} u_l = \frac{E^2}{2m \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l
\end{aligned} \tag{E.19}$$

Dengan mensubstitusikan  $E^2 = m^2 + 2m\Delta E + \Delta E^2$  ke dalam persamaan, maka kombinasi dari kedua suku sebanding dengan  $m^2$ , dan pembagian  $2m$  menghasilkan :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{1}{8m} \frac{r_s^2}{2mr^2(r-r_s)^2} u_l + \frac{l(l+1)}{8mr^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} u_l \\
& - \frac{mr_s}{2mr \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l = \frac{\Delta E + \Delta E^2}{2m \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l
\end{aligned} \tag{E.20}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{1}{4} \frac{r_s^2}{2mr^2(r-r_s)^2} u_l + \frac{l(l+1)}{2mr^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} u_l \\
& - \frac{mr_s}{2r \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l = \frac{\Delta E + \frac{\Delta E^2}{2m}}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l
\end{aligned} \tag{E.21}$$

Kemudian, suku-suku yang memiliki faktor  $\frac{1}{2mr^2}$  digabungkan :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2mr^2} u_l - \frac{1}{4} \frac{r_s^2}{2mr^2(r-r_s)^2} u_l - \frac{mr_s}{2r \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l \\
& = \frac{\Delta E + \Delta E^2}{2m \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l
\end{aligned} \tag{E.22}$$

Kita anggap bahwa  $\Delta E$  adalah konstanta. Jadi  $\Delta E$  dan  $\frac{\Delta E^2}{2m \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2}$  bisa digabungkan

menjadi satu :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2mr^2} u_l - \frac{1}{4} \frac{r_s^2}{2mr^2(r-r_s)^2} u_l - \frac{mr_s}{2r \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} u_l \\
& = \Delta E_{baru} u_l
\end{aligned} \tag{E.23}$$

Disini,  $\Delta E_{baru}$  adalah konstanta yang menggabungkan  $\Delta E$  dan  $\frac{\Delta E^2}{2m \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2}$ .

Selanjutnya, menggabungkan suku yang memiliki faktor  $\frac{1}{r}$  dan  $r_s$  :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2mr^2} u_l - \frac{1}{4} \frac{r_s^2}{2mr^2(r-r_s)^2} u_l - \frac{mr_s}{2r} \frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2} u_l \\
& = \Delta E_{baru} u_l \\
& -\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2mr^2} u_l - \frac{1}{4} \frac{r_s^2}{2mr^2(r-r_s)^2} u_l - \frac{r_s}{2\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2} \frac{1}{r} u_l \\
& = \Delta E_{baru} u_l
\end{aligned} \tag{E.24}$$

Pada persamaan di atas, terdapat  $r_s$  yang merupakan radius Schwarzschild yang didefinisikan sebagai  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ . Dimana  $G$  adalah konstanta gravitasi,  $M$  adalah massa Schwarzschild, dan  $c$  adalah kecepatan cahaya. Selain itu, juga terdapat  $m$  yang merupakan massa partikel. Kita tahu bahwa  $G$  dan  $c$  adalah konstanta, maka dapat digabungkan menjadi :

$$\frac{2G}{c^2} = \frac{1}{c^2} \cdot 2G = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{2GM}{c^2} = \frac{r_s}{c^2} \tag{E.25}$$

Kemudian,  $r_s$  dan  $c^2$  dalam suku yang mengandung  $r_s$  dapat digabungkan agar menjadi  $\frac{r_s}{c^2}$  :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2mr^2} u_l - \frac{1}{4} \frac{r_s^2}{2mr^2(r-r_s)^2} u_l - \frac{r_s}{2\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2} \frac{1}{r} u_l \\
& = \Delta E_{baru} u_l \\
& -\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2mr^2} u_l - \frac{1}{4} \frac{r_s^2}{2mr^2(r-r_s)^2} u_l - \frac{r_s}{c^2\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2} \frac{1}{r} u_l \\
& = \Delta E_{baru} u_l \\
& -\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2mr^2} u_l - \frac{1}{4} \frac{r_s^2}{2mr^2(r-r_s)^2} u_l - \frac{r_s}{c^2} \frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2} \frac{1}{r} u_l \\
& = \Delta E_{baru} u_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2mr^2} u_l - \frac{GMm}{r} u_l &= \Delta E_{\text{baru}} u_l \\
-\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2mr^2} u_l - \frac{GMm}{r} u_l &= \Delta E u_l
\end{aligned} \tag{E.26}$$

Variabel  $r$  dapat dirubah menjadi variabel baru yaitu  $\zeta$ , dimana  $\zeta$  ini dapat didefinisikan sebagai  $\zeta = \frac{r_s}{r}$ ,

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \Rightarrow r = \frac{r_s}{\zeta} \tag{E.27}$$

Turunan pertama terhadap :

$$dr = -\frac{r_s}{\zeta^2} d\zeta \tag{E.28}$$

Turunan kedua terhadap :

$$d^2 r = \frac{2r_s}{\zeta^3} d\zeta \tag{E.29}$$

Kemudian, transformasi ini akan diterapkan pada turunan kedua terhadap  $r$  dalam persamaan (E.26), sehingga :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2m} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{2mr^2} u_l - \frac{GMm}{r} u_l &= \Delta E u_l \\
-\frac{1}{2m} \frac{d}{dr} \left( \frac{d}{dr} u_l \right) + \frac{l(l+1)}{2m} \frac{1}{r^2} u_l - \frac{GMm}{r} u_l &= \Delta E u_l \\
-\frac{1}{2m} \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{d\zeta}{dr} \frac{d}{d\zeta} u_l \right) + \frac{l(l+1)}{2m} \frac{1}{r^2} u_l - \frac{GMm}{r} u_l &= \Delta E u_l
\end{aligned} \tag{E.30}$$

Digunakan hasil perhitungan sebelumnya untuk menggantikan  $\frac{dr}{d\zeta}$  dan  $\frac{d^2 r}{d\zeta^2}$  :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2m} \frac{d}{d\zeta} \left( \left( -\frac{r_s}{\zeta^2} \right) \frac{d}{d\zeta} u_l \right) + \frac{l(l+1)}{2m} \frac{1}{r^2} u_l - \frac{GMm}{r} u_l &= \Delta E u_l \\
\frac{1}{2m} \frac{r_s}{\zeta^2} \frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} + \frac{l(l+1)}{2m} \frac{1}{r^2} u_l - \frac{GMm}{r} u_l &= \Delta E u_l
\end{aligned} \tag{E.31}$$

Persamaan (E.31) di atas kemudian dibagi dengan  $GMm$  untuk mendapatkan bentuk yang diinginkan :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \frac{r_s}{GMm} \frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} + \frac{l(l+1)}{2m} \frac{1}{GMm} \frac{1}{r^2} u_l - \frac{GMm}{GMm} \frac{1}{r} u_l &= \Delta E u_l \\ \frac{1}{2m} \frac{r_s}{GMm} \frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} + \frac{l(l+1)}{2m} \frac{1}{GMm} \frac{1}{r^2} u_l - \frac{1}{r} u_l &= \Delta E u_l \end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

Jika diperhatikan,  $\frac{r_s}{GMm}$  adalah suatu konstanta (yang biasanya dinotasikan sebagai  $\zeta_s$ ) dan  $\frac{1}{GMm}$  adalah konstanta (yang biasanya dinotasikan sebagai  $\epsilon$ ). Selain itu,

$\frac{1}{r} = \frac{\zeta}{r_s}$ . Sehingga :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \zeta_s \frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} + \frac{l(l+1)}{2m} \epsilon \frac{1}{\zeta^2} u_l - \frac{\zeta}{r_s} u_l &= \Delta E u_l \\ -\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} - \left( \frac{\zeta_s}{2m} \frac{1}{\zeta^2} + \frac{l(l+1)\epsilon}{2m} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{\zeta}{r_s} \right) u_l &= \Delta E u_l \\ -\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} - \left( \frac{(\zeta_s + l(l+1)\epsilon)}{2m} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{\zeta}{r_s} \right) u_l &= \Delta E u_l \\ -\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} - \left( \frac{\zeta_s + l(l+1)\epsilon - \frac{2m\zeta}{r_s}}{2m} \frac{1}{\zeta^2} \right) u_l &= \Delta E u_l \end{aligned} \quad (\text{E.33})$$

Penyederhanaan suku satu :

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_s + l(l+1)\epsilon - \frac{2m\zeta}{r_s}}{2m} \\ \frac{\zeta_s}{2m} + \frac{l(l+1)\epsilon}{2m} - \frac{\zeta}{r_s} \\ \frac{r_s}{2mc^2} + \frac{l(l+1)}{2m} \frac{1}{GMm} - \frac{\zeta}{r_s} \\ \frac{r_s}{2mc^2} + \frac{l(l+1)}{2GMm} - \frac{\zeta}{r_s} \end{aligned} \quad (\text{E.34})$$

Selanjutnya suku satu pada persamaan utama bisa diganti dengan hasil penyederhanaan suku satu yang telah disederhanakan sebelumnya yaitu persamaan (E.34), menjadi :

$$-\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} - \left( \frac{r_s}{2mc^2} + \frac{l(l+1)}{2GMm} - \frac{\zeta}{r_s} \right) \frac{1}{\zeta^2} u_l = \Delta E u_l$$

$$-\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} - \left( \frac{r_s}{2mc^2 \zeta^2} + \frac{l(l+1)}{2GMm \zeta^2} - \frac{1}{r_s \zeta} \right) u_l = \Delta E u_l \quad (\text{E.35})$$

Kemudian digunakan hubungan  $\frac{r_s}{c^2} = \zeta_s$  dan  $\epsilon = \frac{1}{GMm}$  serta menggantikan  $\zeta$  ke dalam persamaan, sehingga persamaan (E.35) akan berubah menjadi :

$$-\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} - \left[ \frac{g'_{rr}}{\zeta g_{rr}} + \frac{1}{2} \frac{g''_{rr}}{g_{rr}} - \frac{3}{4} \left( \frac{g'_{rr}}{g_{rr}} \right)^2 \right] u_l + \frac{l(l+1)}{\zeta^2} g_{rr} u_l$$

$$+ m^2 g_{rr} \left( 1 - \frac{1}{g_{00}} \right) u_l = \left( \epsilon + \frac{1}{8} \zeta_s \epsilon^2 \right) \frac{g_{rr}}{g_{00}} u_l \quad (\text{E.36})$$

Sehubungan dengan adanya  $\zeta$ , selanjutnya persamaan (E.36) kembali di sederhanakan agar menjadi bentuk yang lebih kompleks yang nantinya dapat diselesaikan dengan metode numerik,

$$-\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} - \left[ \frac{g'_{rr}}{\zeta g_{rr}} + \frac{1}{2} \frac{g''_{rr}}{g_{rr}} - \frac{3}{4} \left( \frac{g'_{rr}}{g_{rr}} \right)^2 \right] u_l + \frac{l(l+1)}{\zeta^2} g_{rr} u_l$$

$$+ m^2 g_{rr} \left( 1 - \frac{1}{g_{00}} \right) u_l = \left( \epsilon + \frac{1}{8} \zeta_s \epsilon^2 \right) \frac{g_{rr}}{g_{00}} u_l$$

$$-\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} - \left[ \frac{g'_{rr}}{\zeta^2 g_{rr}} + \frac{1}{2} \frac{g''_{rr}}{g_{rr}} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{3}{4} \left( \frac{g'_{rr}}{g_{rr}} \right)^2 \frac{1}{\zeta^2} \right] u_l + \frac{l(l+1)g_{rr}}{\zeta^2} u_l$$

$$+ m^2 g_{rr} \left( 1 - \frac{1}{g_{00}} \right) \frac{1}{\zeta^2} u_l = \left( \epsilon + \frac{1}{8} \zeta_s \epsilon^2 \right) \frac{g_{rr}}{g_{00}} \frac{1}{\zeta^2} u_l$$

$$-\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} - \frac{1}{\zeta^2} \left[ \frac{g'_{rr}}{\zeta g_{rr}} + \frac{1}{2} \frac{g''_{rr}}{g_{rr}} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{3}{4} \left( \frac{g'_{rr}}{g_{rr}} \right)^2 \right] u_l + \frac{l(l+1)g_{rr}}{\zeta^2} u_l$$

$$+ m^2 g_{rr} \left( 1 - \frac{1}{g_{00}} \right) \frac{1}{\zeta^2} u_l = \left( \epsilon + \frac{1}{8} \zeta_s \epsilon^2 \right) \frac{g_{rr}}{g_{00}} \frac{1}{\zeta^2} u_l$$

Kemudian,  $\left[ \frac{g'_{rr}}{\zeta g_{rr}} + \frac{1}{2} \frac{g''_{rr}}{g_{rr}} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{3}{4} \left( \frac{g'_{rr}}{g_{rr}} \right)^2 \right]$  dapat digantikan dengan  $\frac{1}{4} \frac{\zeta_s^2}{(\zeta - \zeta_s)^2}$  sehingga menjadi :

$$-\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} - \frac{1}{\zeta^2} \frac{1}{4} \frac{\zeta_s^2}{(\zeta - \zeta_s)^2} u_l + \frac{l(l+1)g_{rr}}{\zeta^2} u_l$$

$$+ m^2 g_{rr} \left( 1 - \frac{1}{g_{00}} \right) \frac{1}{\zeta^2} u_l = \left( \epsilon + \frac{1}{8} \zeta_s \epsilon^2 \right) \frac{g_{rr}}{g_{00}} \frac{1}{\zeta^2} u_l$$

Komponen  $g_{rr}$  dan  $g_{00}$  dapat dimasukkan dan untuk  $\zeta_s$  dapat digantikan dengan  $\frac{\zeta_s}{\zeta}$  sehingga :

$$-\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} - \frac{1}{4} \frac{\zeta_s^2}{\zeta^2 (\zeta - \zeta_s)^2} u_l + \frac{l(l+1)g_{rr}}{\zeta^2} u_l + \frac{m^2}{\zeta^2} g_{rr} \left( 1 - \frac{1}{g_{00}} \right) u_l$$

$$= \left( \epsilon + \frac{1}{8} \frac{\zeta_s \epsilon^2}{\zeta^2} \right) \frac{g_{rr}}{g_{00}} u_l$$

$$-\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} - \frac{1}{4} \frac{\zeta_s^2}{\zeta^2 (\zeta - \zeta_s)^2} u_l + \frac{l(l+1)}{\zeta^2} \frac{1}{\left( 1 - \frac{\zeta_s}{\zeta} \right)} u_l$$

$$+ \frac{m^2}{\zeta^2} \frac{1}{\left( 1 - \frac{\zeta_s}{\zeta} \right)} \left( 1 - \frac{1}{\left( 1 - \frac{\zeta_s}{\zeta} \right)} \right) u_l$$

$$= \left( \epsilon + \frac{1}{8} \frac{\zeta_s \epsilon^2}{\zeta^2} \right) \frac{1}{\left( 1 - \frac{\zeta_s}{\zeta} \right)} \frac{1}{\left( 1 - \frac{\zeta_s}{\zeta} \right)} u_l$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} - \frac{1}{4} \frac{\zeta_s^2}{\zeta^2 (\zeta - \zeta_s)^2} u_l + \frac{l(l+1)}{\zeta^2 \left(1 - \frac{\zeta_s}{\zeta}\right)} u_l + \frac{2}{\zeta} \frac{1}{\left(1 - \frac{\zeta_s}{\zeta}\right)^2} u_l \\
& = \epsilon + \frac{1}{8} \frac{\zeta_s \epsilon^2}{\left(1 - \frac{\zeta_s}{\zeta}\right)^2} u_l \\
& -\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} + \frac{l(l+1)}{\zeta^2} \left(1 + \frac{\zeta_s}{\zeta}\right) u_l - \frac{2}{\zeta} \left(1 + \frac{2\zeta_s}{\zeta}\right) u_l \\
& = \left( \epsilon \left(1 + \frac{2\zeta_s}{\zeta}\right) + \frac{1}{8} \zeta_s \epsilon^2 \right) u_l
\end{aligned} \tag{E.37}$$

Persamaan Klein-Gordon dapat digabungkan dengan menggunakan :

$$-\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} + V_s(\zeta) u_l = \epsilon u_l \tag{E.38}$$

Dengan potensial,

$$V_s(\zeta) = \zeta_s \left[ \frac{l(l+1)}{\zeta^3} - \frac{4}{\zeta^2} + \frac{1}{n^2} \frac{2}{\zeta} - \frac{1}{8} \frac{1}{n^4} \right] \tag{E.39}$$

Potensial  $V_s(\zeta)$  tersebut dapat disubstitusikan ke dalam persamaan Klein-Gordon, sehingga persamaan (E.38) akan berubah menjadi :

$$\begin{aligned}
& -\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} + \frac{l(l+1)}{\zeta^2} \left(1 + \frac{\zeta_s}{\zeta}\right) u_l - \frac{2}{\zeta} \left(1 + \frac{2\zeta_s}{\zeta}\right) u_l \\
& + \zeta_s \left[ \frac{l(l+1)}{\zeta^3} - \frac{4}{\zeta^2} + \frac{1}{n^2} \frac{2}{\zeta} - \frac{1}{8} \frac{1}{n^4} \right] u_l = \epsilon u_l \\
& -\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} + \left( \frac{l(l+1)}{\zeta^2} \left(1 + \frac{\zeta_s}{\zeta}\right) - \frac{2}{\zeta} \left(1 + \frac{2\zeta_s}{\zeta}\right) \right. \\
& \left. + \zeta_s \left[ \frac{l(l+1)}{\zeta^3} - \frac{4}{\zeta^2} + \frac{1}{n^2} \frac{2}{\zeta} - \frac{1}{8} \frac{1}{n^4} \right] \right) u_l = \epsilon u_l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} + \left( \frac{l(l+1)}{\zeta^2} - \frac{2}{\zeta} + \frac{l(l+1)\zeta_s}{\zeta^2} - \frac{22\zeta_s}{\zeta} \right. \\
& \quad \left. + \zeta_s \left[ \frac{l(l+1)}{\zeta^3} - \frac{4}{\zeta^2} + \frac{12}{n^2\zeta} - \frac{11}{8n^4} \right] \right) u_l = \epsilon u_l \\
& -\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} + \left( \frac{l(l+1)}{\zeta^2} - \frac{2}{\zeta} + \frac{l(l+1)}{\zeta^3} \zeta_s - \frac{4\zeta_s}{\zeta^2} \right. \\
& \quad \left. + \zeta_s \left[ \frac{l(l+1)}{\zeta^3} - \frac{4}{\zeta^2} + \frac{12}{n^2\zeta} - \frac{11}{8n^4} \right] \right) u_l = \epsilon u_l \\
& -\frac{d^2 u_l}{d\zeta^2} + \left( \left( \frac{l(l+1)}{\zeta^2} \right) - \frac{2}{\zeta} + \zeta_s \left[ \frac{l(l+1)}{\zeta^3} - \frac{4}{\zeta^2} + \frac{12}{n^2\zeta} - \frac{11}{8n^4} \right] \right) u_l \\
& \quad = \epsilon u_l \\
& -\frac{d^2 u_l}{\zeta^2} + \frac{l(l+1)}{\zeta^2} u_l - \frac{2}{\zeta} u_l + \zeta_s \left[ \frac{l(l+1)}{\zeta^3} - \frac{4}{\zeta^2} + \frac{12}{n^2\zeta} - \frac{11}{8n^4} \right] u_l \\
& \quad = \epsilon u_l \tag{E.40}
\end{aligned}$$

Jika  $\zeta_s \left[ \frac{l(l+1)}{\zeta^3} - \frac{4}{\zeta^2} + \frac{12}{n^2\zeta} - \frac{11}{8n^4} \right]$  pada persamaan (E.40) di atas didefinisikan sebagai potensial  $V_s(\zeta)$  seperti pada persamaan (E.39), maka persamaan (E.38) akan berubah menjadi :

$$-\frac{d^2 u_l}{\zeta^2} + \frac{l(l+1)}{\zeta^2} u_l - \frac{2}{\zeta} u_l + V_s(\zeta) u_l = \epsilon u_l \tag{E.41}$$

### Pemisahan Variabel Sudut $Y_{lm}(\theta, \phi)$

Langkah selanjutnya yaitu pemisahan variabel sudut  $(\theta, \phi)$  dengan menggunakan pemisalan  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  dengan “separation constant” berupa  $(l+1)$  :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Y_{lm}} \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\phi^2} \right] = -l(l+1) \\
& \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\phi^2} = -l(l+1) \sin^2\theta Y_{lm} \tag{E.42}
\end{aligned}$$

Persamaan (E.42) dapat dipisahkan menjadi dua persamaan yang masing-masing hanya bergantung terhadap satu variabel yaitu  $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ ,

$$\left\{ \frac{1}{\Theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta \right\} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (\text{E.43})$$

Oleh karena itu, jika persamaan (E.43) dijabarkan masing-masing akan menjadi :

$$\frac{1}{\Theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2 \quad (\text{E.44})$$

Dan,

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -m^2 \quad (\text{E.45})$$

Kemudian dapat dicari solusi umum dari masing-masing variabel di atas. Untuk yang pertama yaitu menentukan solusi umum untuk variabel  $\Theta$

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta = 0 \quad (\text{E.46})$$

Diasumsikan bahwa solusi  $\Theta(\theta)$  dapat ditulis dalam bentuk :

$$\Theta(\theta) = \sin^m \theta \chi(\theta) \quad (\text{E.47})$$

Selanjutnya yaitu menghitung turunan pertama dan kedua dari  $\Theta(\theta)$  menggunakan substitusi ini, yaitu :

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} (\sin^m \theta \chi(\theta)) \\ \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} &= \sin^m \theta \frac{d\chi(\theta)}{d\theta} + m \sin^{m-1} \theta \cos \theta \chi(\theta) \\ \frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta} \left( \sin^m \theta \frac{d\chi(\theta)}{d\theta} + m \sin^{m-1} \theta \cos \theta \chi(\theta) \right) \\ \frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} &= \sin^m \theta \frac{d^2\chi(\theta)}{d\theta^2} + 2m \sin^{m-1} \theta \cos \theta \frac{d\chi(\theta)}{d\theta} \\ &\quad - m(m-1) \sin^{m-2} \theta \cos^2 \theta \chi(\theta) \end{aligned} \quad (\text{E.48})$$

Kemudian turunan pertama dan kedua dari  $\Theta(\theta)$  ini disubstitusikan ke dalam persamaan harmonik bola yang telah ada, menjadi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) &= 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \left( \sin^m \theta \frac{d\chi(\theta)}{d\theta} + m \sin^{m-1} \theta \cos \theta \chi(\theta) \right) \right) \\ + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] (\sin^m \theta \chi(\theta)) &= 0 \\ \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\chi(\theta)}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \sin^2 \theta \chi(\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.49})$$

Untuk mencari solusinya, dapat menggunakan metode perubahan variabel dengan:

$$x = \cos \theta \quad (\text{E.50})$$

Jadi,

$$\sin^2 \theta = 1 - x^2 \quad (\text{E.51})$$

Turunan  $\frac{d\chi(\theta)}{d\theta}$  juga dapat diganti dengan variabel  $x$ . Untuk itu, dapat digunakan aturan rantai sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{d\theta} &= \frac{d\chi}{dx} \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{d\chi}{d\theta} &= -\sin \theta \frac{d\chi}{dx} \\ \frac{d\chi}{d\theta} &= -\sqrt{1-x^2} \frac{d\chi}{dx} \end{aligned} \quad (\text{E.52})$$

Menggunakan substitusi persamaan di atas, maka persamaan (E.49) akan berubah menjadi :

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\chi(\theta)}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \sin^2 \theta \chi(\theta) = 0$$

$$-\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\frac{d\chi}{dx}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\sqrt{1-x^2}\chi = 0 \quad (\text{E.53})$$

Sehingga diperoleh persamaan diferensial orde dua baru dalam variabel  $x$ , yaitu :

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\chi}{dx}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right](1-x^2)\chi = 0 \quad (\text{E.54})$$

Sehingga, solusi umum untuk variabel  $\theta$  adalah :

$$\Theta(\theta) = BP_l^m(\cos \theta) \quad (\text{E.55})$$

Dimana  $P_l^m$  merupakan fungsi asosiasi Legendre, yang didefinisikan sebagai :

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|} P_l(x) \quad (\text{E.56})$$

Dan  $P_l(x)$  adalah polinomial Legendre yang didefinisikan dari rumus Rodrigues,

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2 - 1)^l \quad (\text{E.57})$$

Sedangkan untuk variabel  $\phi$  yaitu :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} &= -m^2 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} &= -m^2 \Phi \end{aligned} \quad (\text{E.58})$$

Sehingga diperoleh solusi umumnya yaitu :

$$\Phi(\phi) = Ce^{im\phi} \quad (\text{E.59})$$

Fungsi gelombang sudut yang dinormalisasi disebut dengan harmonik bola, yaitu :

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \epsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta) \quad (\text{E.60})$$

## Lampiran F. Metode Numerik

```
% Parameter
n = 2; % Nilai n sesuai dengan \epsilon = -1/n^2
G_M_m = 3.2e-42; % Nilai G*M*m
r = 2e-83; % Nilai r

% Nilai r_s, r_0, dan a
r_s = 2 * (G_M_m)^2;
r_0 = 0.1;
a = 1 / (G_M_m)^2;

% Menghitung nilai zeta, zeta_s, dan zeta_0
zeta = r / a;
zeta_s = r_s / a;
zeta_0 = r_0 / a;

% Fungsi potensial V_s
V_s = @(zeta, l) zeta_s * (1 * (1 + 1) / zeta^3 - 4 / zeta^2
    + 1 / n^2) - 2 / zeta - 1 / 8 - 1 / n^4;

% Fungsi faktor skala R_l
R_l = @(zeta, r_s, l, u_l) sqrt(1 - r_s/zeta) * zeta .* u_l
    / r;

% Domain \zeta
zeta_start = zeta_0;
zeta_end = 10;

% Ukuran langkah
delta_zeta = 0.01;

% Inisialisasi solusi
u_l_0 = 0;
du_l_0 = 1;

% Inisialisasi array untuk menyimpan hasil
zeta_values = [];
u_l_values = [];
R_l_values = [];
r_values = [];

% Iterasi untuk berbagai nilai l
for l = [0, 1, 2]
    zeta = zeta_start;
    u_l = u_l_0;
    du_l = du_l_0;

    while zeta < zeta_end

        zeta_values = [zeta_values, zeta];
        u_l_values = [u_l_values, u_l];
```

```

R_l_values = [R_l_values, R_l(zeta, r_s, l, u_l)];
r_values = [r_values, zeta * a];

% Metode Runge-Kutta
k1 = delta_zeta * du_l;
l1 = delta_zeta * (-1 * (1 + 1) / zeta^2 * u_l - 2 /
    zeta * u_l + V_s(zeta, l) * u_l - 1 / n^2 *
    u_l);
k2 = delta_zeta * (du_l + 0.5 * l1);
l2 = delta_zeta * (-1 * (1 + 1) / (zeta + 0.5 *
    delta_zeta)^2 * (u_l + 0.5 * k1) - 2 / (zeta +
    0.5 * delta_zeta) * (u_l + 0.5 * k1) + V_s(zeta
    + 0.5 * delta_zeta, l) * (u_l + 0.5 * k1) - 1 /
    n^2 * (u_l + 0.5 * k1));
k3 = delta_zeta * (du_l + 0.5 * l2);
l3 = delta_zeta * (-1 * (1 + 1) / (zeta + 0.5 *
    delta_zeta)^2 * (u_l + 0.5 * k2) - 2 / (zeta +
    0.5 * delta_zeta) * (u_l + 0.5 * k2) + V_s(zeta
    + 0.5 * delta_zeta, l) * (u_l + 0.5 * k2) - 1 /
    n^2 * (u_l + 0.5 * k2));
k4 = delta_zeta * (du_l + l3);
l4 = delta_zeta * (-1 * (1 + 1) / (zeta +
    delta_zeta)^2 * (u_l + k3) - 2 / (zeta +
    delta_zeta) * (u_l + k3) + V_s(zeta +
    delta_zeta, l) * (u_l + k3) - 1 / n^2 * (u_l +
    k3));

% Update nilai u_l dan turunannya
u_l = u_l + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6;
du_l = du_l + (l1 + 2 * l2 + 2 * l3 + l4) / 6;

% Perbarui nilai zeta
zeta = zeta + delta_zeta;
end
end

% Membuat grafik
figure;
subplot(3, 1, 1);
plot(zeta_values(1:length(zeta_values)/3),
    u_l_values(1:length(u_l_values)/3), 'r', 'DisplayName',
    'l = 0');
hold on;
plot(zeta_values(length(zeta_values)/3+1:2*length(zeta_value
s)/3),
    u_l_values(length(u_l_values)/3+1:2*length(u_l_values)/
3), 'g', 'DisplayName', 'l = 1');
plot(zeta_values(2*length(zeta_values)/3+1:end),
    u_l_values(2*length(u_l_values)/3+1:end), 'b',
'DisplayName', 'l = 2');
xlabel('\zeta');
ylabel('u_l');

```

```
legend;
grid on;
title('Grafik  $u_l$  terhadap  $\zeta$  untuk berbagai  $l$ ');

subplot(3, 1, 2);
plot(r_values(1:length(zeta_values)/3),
     R_l_values(1:length(R_l_values)/3), 'r', 'DisplayName',
     'l = 0');
hold on;
plot(r_values(length(zeta_values)/3+1:2*length(zeta_values)/
3),
     R_l_values(length(R_l_values)/3+1:2*length(R_l_values)/
3), 'g', 'DisplayName', 'l = 1');
plot(r_values(2*length(zeta_values)/3+1:end),
     R_l_values(2*length(R_l_values)/3+1:end), 'b',
     'DisplayName', 'l = 2');
xlabel('r');
ylabel('R_l');
legend;
grid on;
title('Grafik  $R_l$  terhadap  $r$  untuk berbagai  $l$ ');
```

KEMENTERIAN AGAMA  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG

Jalan Gajayana Nomor 50, Telepon (0341)551354, Fax. (0341) 572533  
Website: <http://www.uin-malang.ac.id> Email: [info@uin-malang.ac.id](mailto:info@uin-malang.ac.id)

JURNAL BIMBINGAN SKRIPSI/TESIS/DISERTASI

IDENTITAS MAHASISWA

NIM  
Nama  
Fakultas  
Jurusan  
Dosen Pembimbing 1  
Dosen Pembimbing 2  
Judul Skripsi/Tesis/Disertasi

: 19640061  
: NINDIA DWI PUSVITASARI  
: SAINS DAN TEKNOLOGI  
: FISIKA  
: ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc  
: Dr. H. AGUS Mulyono, S.Pd., M.Kes  
: SOLUSI PERSAMAAN KLEIN-GORDON DALAM RUANG-WAKTU MELENGKUNG

IDENTITAS BIMBINGAN

No	Tanggal Bimbingan	Nama Pembimbing	Deskripsi Proses Bimbingan	Tahun Akademik	Status
1	15 Maret 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Bimbingan Pengajuan Judul	Genap 2022/2023	Sudah Dikoreksi
2	22 Maret 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Bimbingan Bab I, II, dan III	Genap 2022/2023	Sudah Dikoreksi
3	05 April 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Bimbingan Bab I, II, dan III ACC	Genap 2022/2023	Sudah Dikoreksi
4	24 Agustus 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Bimbingan Hasil Perhitungan	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
5	08 September 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Bimbingan Bab IV	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
6	01 Desember 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Bimbingan Bab IV ACC	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
7	04 Desember 2023	Dr. H. AGUS Mulyono, S.Pd., M.Kes	Bimbingan Integrasi	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
8	05 Desember 2023	Dr. H. AGUS Mulyono, S.Pd., M.Kes	Revisi Integrasi dan ACC	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
9	15 Desember 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Revisi Hasil dan ACC	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
10	20 Desember 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Revisi Akhir	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
11	22 Desember 2023	Dr. H. AGUS Mulyono, S.Pd., M.Kes	Bimbingan dan Tanda Tangan	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
12	27 Desember 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Bimbingan dan Tanda Tangan	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi

Telah disetujui  
Untuk mengajukan ujian Skripsi/Tesis/Desertasi

Dosen Pembimbing 2



Dr. H. AGUS Mulyono, S.Pd., M.Kes



Malang, 28 Desember 2023

Dosen Pembimbing 1



ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc