SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN KLEIN GORDON

SKRIPSI

Oleh
Aulia Rohmah
NIM. 17610100

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN KLEIN GORDON

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

OLEH
AULIA ROHMAH
NIM. 17610100

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN KLEIN GORDON

SKRIPSI

Oleh
Aulia Rohmah
NIM. 17610100

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Malang, 30 Desember 2023

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Ari Kusumastuti, M.Pd. M.Si.	Erna Herawati, M.Pd.
NIP.19770521 200501 2 004	NIP. 19760723 202321 2 006

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN KLEIN GORDON

SKRIPSI

Oleh
Aulia Rohmah
NIM. 17610100

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal, 30 Desember 2023

Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Anggota Penguji I	: Juhari, M.Si	....
Anggota Penguji II	: Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si	....
Anggota Penguji III	: Erna Herawati, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Aulia Rohmah

NIM : 17610100

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Solusi Analitik Persamaan Klein Gordon

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan data pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 Desember 2023
Yang membuat pernyataan,

Aulia Rohmah
NIM. 17610100

MOTO

"Dare to live the life you have dreamed for yourself. Go forward and make your dreams come true"

(Ralph Ivaldo Emerson)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahi Robbil'alamin, dengan mengucap syukur kepada Allah Swt., penulis mempersembahkan skripsi ini untuk Bapak Ali Mas Udi dan Ibu Soekesi, serta adik Sirojul yang senantiasa mendo'akan penulis pada setiap doanya, menberikan kasih sayang, semangat, dan nasihat, serta memberikan arti kesabaran dan rasa syukur dalam kehidupan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji dan syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Pengasih dan Penyayang atas rahmat dan hidayah Allah Swt. Sholawat tetap tersampaikan kepada Nabi Muhammad saw. dan berharap mendapat syafaat yang mempermudah urusan karena bisa menyelamatkan dari segala mara bahaya, membersihkan segala bentuk kejahatan, terangkat derajat yang lebih tinggi, dan kehidupan yang lebih mulia. Penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Solusi Analitik Persamaan Klein Gordon". Judul ini ditulis atas dasar ketertarikan penulis pada penerapan matematika dalam kehidupan nyata. Penelitian ini akan mengkaji tentang bagaimana menyelesaikan persamaan Klein Gordon secara analitik.

Selama proses penulisan skripsi ini, penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak akan terwujud tanpa pengarahan dan bimbingan dari berbagai pihak. Maka penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang membantu dan penghargaan yang tinggi kepada :

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. M. Nafie Jauhari, M.Si., selaku dosen wali yang telah memberi arahan dan bimbingan.
5. Dr. Usman Pagalay, M.Si., selaku dosen ketua penguji yang telah memberikan arahan, nasihat, motivasi dan pengalaman berharga kepada penulis.
6. Juhari, M.Si., selaku dosen anggota penguji I yang telah memberikan arahan, nasihat, motivasi dan pengalaman berharga kepada penulis.
7. Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si., selaku dosen penguji II sekaligus pembimbing I yang telah memberikan arahan, nasihat, motivasi dan pengalaman berharga kepada penulis.

8. Erna Herawati, M.Pd., selaku dosen penguji III sekaligus pembimbing II yang telah memberikan arahan, nasihat dan berbagi ilmu kepada penulis.
9. Seluruh dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
10. Kedua orang tua yang selalu memberikan motivasi, memenuhi kebutuhan finansial, dan doanya untuk kelancaran selama melaksanakan sampai menyusun skripsi ini.
11. Seluruh teman-teman mahasiswa matematika angkatan 2017 yang secara langsung maupun tidak langsung memberikan masukan-masukan selama penulis melaksanakan skripsi maupun selama menyusun skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca sebagai referensi, wawasan yang lebih untuk memandu penelitian selanjutnya dan bukan hanya skripsi yang menumpuk di rak perpustakaan.

Wassalamualaikum warahmatullahi wabarakatuh

Malang, 30 Desember 2023

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Rohmah, Aulia, 2023. **Solusi Analitik Persamaan Klein Gordon.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Ari Kusumastuti M.Pd., M.Si., (2) Erna Herawati M.Pd.

Kata Kunci : Solusi Analitik, Metode *d'alembert*, Metode Pemisahan Variabel

Persamaan *Klein Gordon* merupakan persamaan diferensial parsial linier orde dua tipe hiperbolik. Persamaan ini merupakan salah satu persamaan gelombang relasi dispersif karena kecepatan gelombang bergantung terhadap frekuensi sirkular. Penelitian ini membahas penyelesaian analitik pada persamaan *Klein Gordon* menggunakan dua metode dengan nilai awal $u(x,t) = \sin(x) + 1$ dan syarat batas homogen. Metode *d'alembert* merupakan metode yang berbentuk solusi khusus dengan membuat variabel bebas baru, kemudian variabel bebas tersebut diturunkan dan mensubstitusikan nilai awal sehingga diperoleh persamaan khusus dari persamaan *Klein Gordon*. Metode pemisahan variabel merupakan metode yang memisahkan variabel x dan t dengan memisalkan $u(x,t) = F(x)$ dan $G(t)$, mensubstitusikan syarat batas, kecepatan awal dan memperoleh solusi yang dapat dikatakan sebagai nilai eigen. Selanjutnya dengan menggunakan deret Fourier untuk menentukan d_n yang terdapat pada nilai eigen. Solusi analitik persamaan *Klein Gordon* menghasilkan bentuk penyelesaian *d'alembert* lebih sederhana sedangkan pemisahan variabel lebih kompleks dan kedua simulasi gelombang merambat ke arah kanan.

ABSTRACT

Rohmah, Aulia, 2023. **Analytical Solution of the Klein Gordon Equation**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisors: (1) Ari Kusumastuti M.Pd., M.Si., (2) Erna Herawati M.Pd.

Keywords: Analitycal Solutions, d'alembert Method, Separation Variable Method

The Klein Gordon equation is a second-order linear partial differential equation of hyperbolic type. This equation is one of the relation dispersive wave equations because the wave speed depends on the circular frequency. This research discusses analytical solution of the Klein Gordon equation using two methods with initial values $u(x,t) = \sin(x) + 1$ and homogeneous boundary conditions. The d'alembert method is a method that takes the form of a special solution by creating a new independent variable, then lowering the independent variable and substituting the initial value to obtain a special equation from the Klein Gordon equation. The variable separation method is a method that separates the variables x and t by assuming $u(x,t) = F(x)$ dan $G(t)$, substituting boundary conditions, initial velocity and obtaining a solution which can be said to be eigenvalues. Next, use the Fourier series to determine d_n contained in the eigenvalues. The analytical solution of the Klein Gordon equation produces a simpler d'alembert solution form, while the separation of variables is more complicated and the simulation of both wave simulations propagate to the right.

مستخلص البحث

رحمه ،الأوليا . ٢٠٢٣. **حلول التحليل لمعادلة كلاين جوردون.** البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرفة: (١) أري كوسوماستوتي، الماجستيرة (٢) إيرناهيراواتي، الماجستيرة

الكلمات المفتاحية : الحلول التحليلية، طريقة دالمبرت، طريقة فصل المتغير.

معادلة كلاين جوردون هي معادلة تفاضلية جزئية خطية من الدرجة الثانية من النوع الزائدي. هذه المعادلة هي إحدى المعادلات الموجي علاقةالتشتت لأن سرعة الموجة تعتمد على التردد الدائري. تصف معادلة كلاين جوردون بالموجات التي ذات الأطوال الموجية التي تنتقل بسرعات مختلفة وفقا لمنحنيات التشتت ولها شروط الحدود المتجانسة. يناقش هذا البحث الحلول التحليلية لمعادلة كلاين جوردون باستخدام طريقتين مع القيم الأولية $u(x,t) = \sin(x) + 1$ والشروط الحدودية المتجانسة. طريقة دالمبرت هي طريقة تأخذ شكل الحل الخاص عن طريق إنشاء متغير مستقل جديد، ثم تخفيض المتغير المستقل واستبدال القيمة الأولية للحصول على معادلة خاصة من معادلة كلاين جوردون. طريقة فصل المتغير هي طريقة تفصل بين المتغيرات x و t بافتراض $u(x,t) = F(x)$ و $G(t)$ ، واستبدال الشروط الحدودية، والسرعة الأولية والحصول على الحل والتي يمكن القول بأنها قيمة ذاتية. بعد ذلك، استخدم سلسلة فورييه لتحديد d_n الموجودة في القيم الذاتية. ينتج الحلول التحليلي لمعادلة كلاين جوردون عن حل دالمبيرت أبسط، وبينما يكون فصل المتغيرات أكثر تعقيداً و تنتشر كلا المحاكاة الموجية إلى اليمين.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan Klein Gordon sering ditemukan pada teori mekanika kuantum, relativitas fisika, fenomena gelombang dispersif, plasma fisika, dan sains fisika. Persamaan Klein Gordon merupakan persamaan mekanika kuantum relativistik dalam fisika partikel, dimana sebuah partikel tersebut bergerak pada nol putaran yang diterapkan dalam medan elektromagnetik. Pembentukan persamaan ini dari hubungan energi relativitas khusus antara energi dan momentum yang mendekati kecepatan cahaya dengan menerapkan postulat operator energi, operator momentum dan massa diam partikel. Selanjutnya melakukan penurunan persamaan dengan menggunakan persamaan energi dan momentum 4-vektor relativistik dari sebuah partikel. Menurut teori massa diam, operator energi adalah sebuah komponen yang bergerak ke nol. Oleh karena itu, untuk mendapatkan solusi tak nol operator energi selalu bekerja pada kondisi di bawah persamaan gelombang.

Secara matematis, bentuk teori kuantum persamaan Klein Gordon harus diubah menjadi model matematika. Dalam pembentukan model matematika menggunakan aljabar matematika sehingga diperoleh persamaan Klein Gordon. Dengan terbentuknya model matematika persamaan Klein Gordon dapat mempermudah penyelesaian solusi analitik. Persamaan Klein Gordon adalah persamaan diferensial parsial orde dua dengan variabel bebas u dan variabel terikat x dan t. Hal ini membuat para peneliti tertarik menggunakan persamaan Klein Gordon untuk mencari solusi analitik pada penelitiannya.

Penemuan solusi persamaan Klein Gordon secara analitik di bidang sains telah banyak diaplikasikan dengan berbagai metode yang berbeda. Untuk memperoleh solusi analitik persamaan Klein Gordon, peneliti menggunakan dua cara yaitu mencari masalah nilai awal dan masalah nilai batas. Namun tidak semua peneliti mencari dua masalah sekaligus, tetapi hanya mencari masalah nilai awal saja atau masalah nilai batas saja. Hal ini menyebabkan munculnya perbedaan setiap langkah metode yang digunakan untuk menyelesaikan solusi analitik. Umumnya, untuk mencari solusi analitik tidaklah mudah maka harus dicari pula masalah nilai awal dan masalah nilai batas pada persamaan Klein Gordon.

Gelombang merupakan rambatan energi getaran yang merambat melalui medium atau tanpa melalui medium (Halliday, 2010). Gelombang dibagi menjadi dua gelombang yaitu gelombang mekanik dan gelombang elektomagnetik. Gelombang mekanik adalah gelombang yang berjalan melalui medium, seperti gelombang air dan gelombang bunyi. Sedangkan gelombang elektromagnetik adalah gelombang yang merambat tanpa medium seperti gelombang sinar matahari dan gelombang radio. Sebagaimana sesuai dengan firman Allah Swt. yang tertulis dalam potongan surat Hud ayat 42 sebagai berikut :

وَهِيَ تَجْرِي بِهِمْ فِي مَوْجٍ كَالْجِبَالِ وَنَادَىٰ نُوحٌ ابْنَهُ وَكَانَ فِي مَعْزِلٍ يَا بُنَيَّ ارْكَبْ
مَعَنَا وَلَا تَكُنْ مَعَ الْكَافِرِينَ ﴿٤٢﴾

"Dan bahtera itu berlayar membawa mereka dalam gelombang laksana gunung. Dan Nuh memanggil anaknya, sedang anak itu berada di tempat yang jauh terpencil: "Hai anakku, naiklah (ke kapal) bersama kami dan janganlah kamu berada bersama orang-orang yang kafir".

Dalam ayat ini, menurut tafsir Al-Maraghi (1984) menjelaskan bahwa atas izin dan kekuasaan Allah Swt. bahtera atau perahu yang membawa penumpang dalam keadaan gelombang yang sangat tinggi hingga daratan dan pegunungan tidak terlihat oleh penumpang yang berada di kapal, gelombang pada lautan seperti lembah yang sangat dalam dan bukit yang menjulang tinggi, namun semua penumpang dalam perahu tersebut sampai dengan selamat. Oleh karena itu, penulis ingin menyelesaikan masalah solusi analitik dengan menerapkan dua metode solusi penyelesain analitik pada persamaan Klein Gordon. Sesuai dengan ayat tersebut, maka persamaan linier Klein Gordon dapat ditemukan hasil analitik dengan berbagai penyelesaian.

Menurut Shiralashetti pada tahun 2016 yang membahas tentang solusi numerik persamaan Klein Gordon dengan metode gelombang Haar. Dari penelitian tersebut, peneliti tertarik memecahkan persamaan Klein Gordon dengan metode gelombang Haar yang dibandingkan dengan metode beda hingga. Hasil penelitian menunjukkan keakuratan skema dan solusi yang tepat pada metode gelombang Haar untuk menyelesaikan persamaan Klein Gordon.

Pada tahun 2017, Ismi Ratih Nabiyah menerapkan deret pada Klein Gordon nonlinier yang diselesaikan dengan metode homotopi. Selanjutnya menghitung secara manual orde tiga, orde lima, dan orde enam dengan bantuan *software Mathematica 7*. Hasilnya menunjukkan bahwa solusi yang diperoleh dengan orde yang lebih tinggi akan lebih akurat dan efisien.

Pada skripsi ini dibahas solusi analitik pada persamaan Klein Gordon yang merujuk pada artikel Usman M.A. dan Shittu M.T. (2019). Solusi analitik pada persamaan Klein Gordon mencari masalah nilai awal dan masalah nilai batas. Masalah nilai awal menggunakan *d'alembert solution* dan masalah nilai batas menggunakan pemisahan variabel.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana solusi analitik pada persamaan Klein Gordon?
2. Bagaimana simulasi dari solusi analitik pada persamaan Klein Gordon?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan dalam penelitian ini adalah

1. Menyelesaikan solusi analitik pada persamaan Klein Gordon.
2. Menyelesaikan simulasi dari solusi analitik pada persamaan Klein Gordon.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian, maka manfaat dalam penelitian ini adalah

1. Memperoleh solusi analitik pada persamaan Klein Gordon.
2. Memperoleh simulasi dari solusi analitik pada persamaan Klein Gordon.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini yaitu :

1. Persamaan Klein Gordon berdasarkan (Usman, dkk, 2019).

$$u_{tt} - u_{xx} + u = 0$$

   Dengan interval $0 \leq x \leq 1$ dan $t > 0$.

2. Kondisi awal dan kondisi batas pada persamaan berdasarkan (Usman,dkk, 2019).

$$u(x,0) = \sin x + 1, \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0, \qquad t > 0$$

1.6 Definisi Istilah

Dalam penelitian ini terdapat beberapa istilah yang digunakan, yaitu :

1. Persamaan diferensial Parsial

    Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan diferensial yang menggunakan turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas (Ross, 2010).

2. Persamaan Klein Gordon

    Persamaan Klein Gordon adalah persamaan diferensial parsial orde dua dengan variabel bebas u dan variabel terikat x dan t. Persamaan Klein Gordon merupakan persamaan yang diterapkan pada dispersif gelombang dalam teori matematika.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika yang memiliki fungsi satu atau lebih variabel dan menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dalam berbagai orde turunan. Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan yang memuat satu atau lebih turunan parsial dengan dua atau lebih variabel bebas. Untuk penurunan parsial sebuah fungsi dua variabel atau lebih diubah nilainya sebagian terlebih dahulu dan harus diturunkan secara bertahap. variabel bebas pada persamaan diferensial parsial dimisalkan x dan t. Sebuah fungsi persamaan dapat ditulis $u(x,t,\dots)$. Turunan persamaan diferensial parsial dapat ditulis $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$. Hal ini dapat ditulis sebagai berikut

$$F\big(x,t,u(x,t),u_x(x,t),u_t(x,t)\big) = F(x,t,u,u_x,u_t) = 0$$

Selain itu terdapat turunan kedua pada persamaan dengan peubah bebas x dan t. Dapat ditulis sebagai

$$F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{tt}) = 0$$

Persamaan diferensial parsial berdasarkan kelineearannya dibagi menjadi dua kelompok yaitu persamaan diferensial linier dan persamaan diferensial nonlinier. Persamaan diferensial parsial linier merupakan turunan suatu fungsi yang berderajat atau berpangkat satu. kemudian persamaan diferensial parsial nonlinier adalah persamaan diferensial yang turunannya memiliki pangkat lebih dari satu. Untuk dapat membedakan persamaan diferensial parsial linier dan nonlinier. Berikut contoh persamaan diferensial parsial

1. $u_x + u_t = 0$ (PDP linier)
2. $u_x + uu_t = 0$ (PDP nonlinier)
3. $u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$ (PDP nonlinier)

Selanjutnya dalam sifat kelinieran persamaan diferensial ditulis $Lu = 0$, dimana L sebagai operator. Jika terdapat fungsi lain, Lv, v sebagai fungsi baru dan turunan parsial $L = \partial/\partial x$ sebagai operator maka v parsial ditulis v_x (Strauss, 2007).

2.2 Persamaan Klein Gordon sebagai Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan Klein Gordon adalah persamaan yang menggambarkan keadaan suatu partikel yang bergerak periodik dalam keadaan tertentu (Nabiyah, 2017). Persamaan Klein Gordon ditemukan pada tahun 1927 oleh seorang fisikawan bernama Oskar Klein dan Walter Gordon. Persamaan Klein Gordon adalah persamaan mekanika kuantum relativistik dengan gerakan partikel elementer yang bergerak sesuai kecepatan cahaya tetapi syarat kontinuitasnya tidak terpenuhi karena suku waktu pada persamaan Klein Gordon merupakan orde kedua (Ficek, 2016). Berdasarkan Erich Zauderer, persamaan Klein Gordon diterapkan dalam persamaan diferensial dispersif. Pembuktian persamaan Klein Gordon termasuk dispersif dengan mencari solusi penyebaran gelombang komplek (*wave train complex*). Langkah pertama, mengansumsikan solusi persamaan diferensial parsial berbentuk $u(x,t) = \cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t) = e^{i(kx - \omega t)}$. Kedua, mencari turunan kedua terhadap x dan t. Setelah itu, memasukkan ke dalam persamaan Klein Gordon dan menghasilkan kecepatan (k) bergantung frekuensi sirkular

(ω).oleh karena itu, persamaan Klein Gordon disebut juga persamaan dispersif (menyebar). Persamaan Klein Gordon merupakan persamaan matematika yang mempunyai satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) dan turunan fungsinya terhadap satu atau lebih variabel. Persamaan Klein Gordon dalam bentuk persamaan diferensial parsial linier yaitu

$$u_{tt} + \alpha u_{xx} + \emptyset(u) = \eta(x,t)$$

Dengan kondisi awal :

$$u(x,0) = f_1(x), u_t(x,0) = f_2(x), 0 \leq x < 1$$

kondisi batas :

$$y(0,t) = g_1(t), u(1,t) = g_2(t), t > 0$$

dimana u adalah fungsi gelombang dari x dan t, $\eta(x,t)$ adalah fungsi analitik yang diketahui, $\emptyset(u)$ adalah fungsi linier, dan $\alpha, f_1(x), f_2(x), g_1(t), g_2(t)$ adalah bilangan riil (Shiralashetti, 2016).

Menurut klasifikasi persamaan diferensial parsial (PDP), persamaan Klein Gordon termasuk tipe hiperbolik dan dikenal sebagai persamaan Poisson. Karena berdasarkan nilai diskriminasi (b^2-4ac) menyatakan persamaan ini memiliki nilai kurang dari nol dengan b sama dengan nol. Persamaan ini sering digunakan untuk memodelkan hasil aproksimasi dari persamaan diferensial linier dan nonlinier dua dimensi. Persamaan ini memerlukan nilai batas di setiap titik batas. Nilai batas dapat berupa nilai u atau turunan u di setiap batas.

Pada model persamaan Klein Gordon terdapat variabel x sebagai jarak dan t adalah waktu. Persamaan diatas menjelaskan x dan t sebagai variabel bebas dan u sebagai variabel tak bebas dan pangkat tertinggi dari turunan pada persamaan diferensial disebut orde atau tingkat persamaan diferensial parsial.

2.3 Metode Pemisahan Variabel

Salah satu metode yang digunakan pada persamaan diferensial biasa dan parsial, dimana persamaan tersebut dikalikan atau dibagi dengan persamaan yang dapat memisahkan variabel. Sehingga di setiap ruas terdapat persamaan dengan variabel yang berbeda.

2.3.1 Kondisi Awal dan Kondisi Batas

Untuk mencari satu solusi atau lebih dari suatu persamaan diferensial parsial pasti membutuhkan kondisi awal dan kondisi batas. Kondisi awal adalah sebuah keadaan yang melibatkan satu atau lebih fungsi yang tidak diketahui turunan-turunannya dalam persamaan yang memenuhi syarat awal yang diberikan. Kondisi batas adalah suatu syarat yang harus dipenuhi pada batas-batas domain terkait dengan ruang (Humi, 1992).

Terdapat tiga jenis kondisi batas yang penting yaitu :

1. Kondisi Dirichlet, jika diketahui u nilai dari solusi pada batas domain
2. Kondisi Neumann, jika ditentukan nilai turunan $\frac{\partial u}{\partial m} = u_m$ dari solusi pada batas domain
3. Kondisi Robin, jika diketahui nilai solusi dan turunan pada batas domain. seperti $\frac{\partial u}{\partial m} + au$, dengan a adalah sebuah fungsi yang bergantung pada variabel yang sama dengan u

Contoh kondisi batas pada domain $0 \leq x < l$:

1. Kondisi Dirichlet, $u(0,t) = f(t)$ dan $u(1,t) = g(t)$
2. Kondisi Neumann, $\frac{\partial}{\partial m}u(0,t) = p(t)$dan $\frac{\partial}{\partial m}u(l,t) = q(t)$

3. Kondisi Robin, $\frac{\partial}{\partial m}u(0,t) + au(0,t) = r(t)$

   $\frac{\partial}{\partial m}u(l,t) + au(l,t) = s(t)$

Selanjutnya masalah mencari solusi dari suatu persamaan diferensial yang memenuhi kondisi batas disebut masalah nilai batas.

2.3.2 Fungsi Eigen dan Nilai Eigen

Masalah nilai eigen. Persamaan matrik berbentuk

$$Ax = \lambda x$$

Memiliki solusi $x = 0$ pada setiap nilai di λ. λ disebut nilai eigen dan solusi tak nol disebut vektor eigen. Misalkan persamaan diferensial orde dua berbentuk

$$y'' + \lambda y = 0$$

Dengan kondisi batas $y(0) = 0, y(\pi) = 0$. Maka nilai λ disebut nilai eigen dan solusi nontrivial disebut fungsi eigen. Untuk mempermudah penyelesaian persamaan diferensial orde dua dengan membuat pemisalan $\lambda = \mu^2$, maka terdapat tiga kasus diantaranya :

1. Jika $\lambda > 0$ maka $\lambda = \mu^2$

   atau dapat ditulis

$$y'' + \mu^2 y = 0$$

Dengan persamaan karakteristik yaitu $r^2 + \mu^2 = 0$ dimana akar $r = \pm i\mu$ maka solusi umumnya adalah

$$y = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$$

Dengan catatan bahwa μ adalah tak nol dan bilangan positif. Maka diperoleh kondisi batas $c_2 \sin \mu\pi = 0$. Untuk mencari solusi nontrivial dengan memberikan syarat $c_2 \neq 0$ dan $\sin \mu\pi = 0$ dan mencari nilai μ. Fungsi sinus mempunyai nilai nol pada setiap kelipatan bilangan bulat π, jadi μ adalah bilangan bulat (positif). Nilai λ yang bersesuaian adalah kuadrat dari bilangan bulat positif, jadi kami telah menentukannya. Contoh nilai eigen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9, \dots, \lambda_n = n^2 \dots$. Maka fungsi eigen $c_1 = 0$ dan fungsi perkalian $\sin nx$ dengan $n = 1,2,3, \dots$. dan konstanta c_2 tidak pernah ditentukan. Begitu juga fungsi eigennya ditentukan hanya sampai konstanta perkalian sembarang. Selanjutnya konstanta perkalian menjadi satu dan fungsi eigennya menjadi $y_1(x) = \sin x\,, y_2(x) = \sin 2x\,, y_3(x) = \sin nx\,, \dots$ disebut fungsi eigen.

2. Jika $\lambda = 0$ maka $\lambda = 0$

   atau dapat ditulis

$$y'' = 0$$

   solusi umumnya adalah

$$y = c_1 x + c_2$$

   Kondisi batas yang diperoleh yaitu $c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$. Jika solusi $y = 0$ maka $\lambda = 0$ bukan merupakan nilai eigen.

3. Jika $\lambda < 0$ maka $\lambda = -\mu^2$

   atau dapat ditulis

$$y'' = 0$$

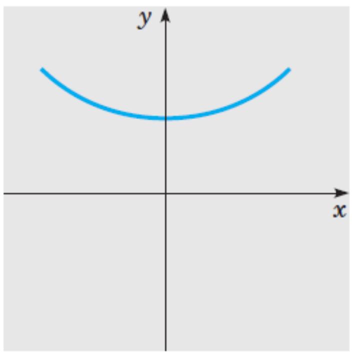
   Dengan akar karakteristik $r^2 - \mu^2 = 0$ dimana akar $r = \pm\mu$ maka solusi umumnya adalah

$$y = c_1 \cosh \mu x + c_2 \sinh \mu x$$

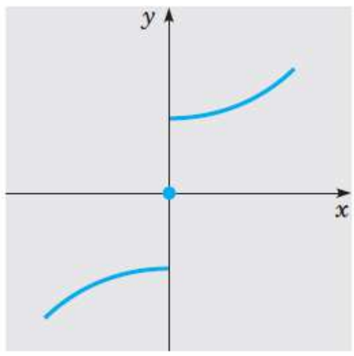
Mempunyai fungsi hiperbolik $\cosh \mu x$ dan $\sinh \mu x$, daripada fungsi eksponensial fungsi $exp(\mu x)$ dan $exp(-\mu x)$, sebagai himpunan solusi dasar untuk kenyamanan dalam menerapkan kondisi batas. Kondisi batas yang diperoleh adalah $c_1 = 0$ dan $c_2 = \sinh \mu\pi = 0$. Karena $\mu = 0$, maka $sinh\ \mu\pi = 0$ dan oleh karena itu $c_2 = 0$. Akibatnya, $y = 0$ dan tidak ada solusi nontrivial untuk $\lambda < 0$. Dengan kata lain, tidak memiliki nilai eigen negatif (DiPrima, 2009).

2.3.3 Fungsi Ganjil dan Fungsi Genap

Sebelum melihat contoh deret Fourier lebih lanjut, ada baiknya kita membedakan dua kelas fungsi yang rumus Euler–Fouriernya dapat disederhanakan. Fungsi genap dan ganjil yang secara geometris memiliki ciri dan sifat simetri terhadap sumbu y dan titik asal.



Gambar 1. 1 Fungsi Genap



Gambar 1. 2 Fungsi Ganjil

Secara analitik, f adalah fungsi genap jika domainnya memuat titik $-x$ setiap kali memuat titik x, dan jika

$$f(-x) = f(x)$$

setiap x dalam domain f . Demikian pula, f adalah fungsi ganjil jika domainnya berisi $-x$ setiap kali memuat x, dan jika

$$f(-x) = -f(x)$$

untuk setiap x di domain f .

Sifat-sifat dasar fungsi genap dan ganjil antara lain sebagai berikut:

1. Penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian dari dua fungsi genap memperoleh hasil fungsi genap.
2. Penjumlahan dan pengurangan dua fungsi ganjil adalah fungsi ganjil. Perkalian dan pembagian dari dua ganjil menghasilkan fungsi genap.
3. Penjumlahan dan pengurangan fungsi ganjil dan fungsi genap menghasilkan fungsi tidak genap dan fungsi tidak ganjil. Perkalian dan pembagian dari dua fungsi ganjil dan fungsi genap adalah fungsi ganjil.

Misalnya, jika f_1 dan f_2 ganjil, dan jika $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$, maka

$$g(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = -f_1(x) - f_2(x)$$

$$= -[f_1(x) + f_2(x)] = -g(x)$$

jadi $f_1 + f_2$ merupakan fungsi ganjil juga. Demikian pula jika $h(x) = f_1(x)f_2(x)$, maka

$$h(-x) = f_1(-x)f_2(-x) = [-f_1(x)][-f_2(x)] = f_1(x)f_2(x)$$

$$= h(x)$$

agar $f_1 f_2$ genap.

4. Jika f merupakan fungsi genap, maka

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$$

5. Jika f merupakan fungsi ganjil, maka

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$$

Sifat-sifat ini secara intuitif jelas dari penafsiran integral dalam kaitannya dengan luas di bawah kurva, dan juga langsung mengikuti definisinya. Misalnya, jika f genap, maka

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx$$

Membiarkan $x = -s$ pada suku pertama di ruas kanan

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = -\int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$$

Bukti properti yang bersesuaian untuk fungsi ganjil serupa.

Fungsi genap dan ganjil sangat penting dalam penerapan deret Fourier karena deret Fouriernya mempunyai bentuk khusus, yang sering muncul dalam soal fisika.

2.3.4 Deret Fourier

Deret Fourier adalah suatu deret tak hingga yang mengandung unsur trigonometri, suku-suku sinus dan cosinus yang digunakan untuk mempresentasikan fungsi-fungsi periodik secara umum. Deret fourier juga biasanya juga dipakai untuk membantu dalam penyelesaian persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Definisi 2.1 Jika f fungsi kontinu pada interval $-L < x < L$ dengan periode $2L$. Maka deret Fourier dari $f(x)$ dinyatakan

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Dengan koefisien

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Definisi 2.2 Misalkan fungsi f terdefinisi pada $(-L, L)$ dan f merupakan fungsi genap maka deret Fourier dari f pada $(-L, L)$ disebut Fourier cosinus dan f pada $(-L, L)$ dan f pada $(-L, L)$ maka bentuk deret Fourier menjadi :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Dengan koefisien

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = 0$$

disebut deret Fourier cosinus

Definisi 2.3 Jika fungsi f terdefinisi pada $(-L, L)$ dari f merupakan fungsi ganjil maka deret Fourier dari f pada $(-L, L)$ disebut deret Fourier sinus dari f pada $(-L, L)$ maka bentuk deret Fourier menjadi:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Dengan koefisien

$a_n = 0$

$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$ disebut deret Fourier sinus.

2.4 Pemecahan Kesulitan dalam Islam

Islam sebagai agama yang diberkahi mendominasi seluruh aktivitas umat muslim. Namun, setiap aktivitas yang dijalankan oleh umat muslim tidak selamanya selalu berjalan dengan lancar. Maksudnya dalam beberapa hal akan ditemui permasalahan yang menunda keberhasilan atau kesuksesan terhadap suatu pencapaian seperti masalah kecil atau besar. Sebagai agama kepercayaan umat muslim, Islam telah mengatur bagaimana cara menyelesaikan suatu permasalahan dengan berserah kepada Allah Swt. dan berusaha sesuai kemampuan umat-Nya. Diharapkan juga menyakinkan diri bahwa setiap kesulitan pasti menemukan kemudahan dan solusi yang diperoleh dengan cara ini akan bermanfaat bagi lingkungan sesuai ketentuan Al-qur'an dan Al-Hadits.

Solusi dalam menyelesaikan suatu permasalahan telah banyak diatur dalam Al-Qur'an dan Hadits. Salah satunya adalah melakukan cara yang mudah untuk menyelesaikan kesulitan dalam sebuah masalah. Sebagaimana firman Allah Swt. dalam surah Al-Insyirah ayat 5-6

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا﴿٦﴾

"(5) Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, (6) Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan".

Menurut tafsir Al-Qurthubi (2009) “Sekali-kali tidaklah satu kesulitan dapat mengalahkan dua kemudahan.” Abu Ubaidah bin Jarrah menulis surah kepada khalifah Umar bin Khattab ra., didalam surah tersebut dia menyebutkan pasukan Romawi, dan apa yang ditakutkan dari mereka, lantas khalifah Umar bin Khattab ra. pun membalas suralnya Amma ba'd, sesungguhnya walaupun suatu kesulitan menimpa seorang mukmin, Allah Ta'ala akan menjadikan setelahnya kelonggaran, dan sesungguhnya sekali-kali tidaklah satu kesulitan dapat mengalahkan dua kemudahan.

Ayat tersebut menjelaskan bahwa setiap kesulitan yang terjadi pasti memiliki jalan keluar. Untuk melepaskan kesulitan itu, harus memiliki sikap sabar, kelapangan hati dan jangan berputus asa. Dengan memiliki kesabaran yang luas, umat muslim bisa menghadapiumanya dengan tenang, bertindak benar dan tidak tergesa-gesa. Untuk meringankan beban kesulitan harus mempunyai sikap lapang dada agar kuat dan tekun menjalaninya. Selain itu, pantang menyerah ketika menghadapi masalah dan tetap berdoa dan berusaha kepada Allah Swt. Seperti halnya dalam penelitian ini, saat mendapatkan langkah yang sulit dalam proses menyelesaikan masalah maka yakin pasti akan ada kemudahan dalam melakukan langkah selanjutnya. Begitu juga diriwayatkan dalam hadits yang berbunyi (Lukman, 2018)

عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ رَضِيَ اللهُ عَنْهُ قَالَ: قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ: مَنْ نَفَّسَ عَنْ مُؤْمِنٍ كُرْبَةً مِنْ كُرَبِ اَلدُّنْيَا, نَفَّسَ اَللَّهُ عَنْهُ كُرْبَةً مِنْ كُرَبٍ يَوْمَ الْقِيَامَةِ, وَمَنْ يَسَّرَ عَلَى مُعْسِرٍ, يَسَّرَ اللَّهُ عَلَيْهِ فِي اَلدُّنْيَا

وَالآخِرَةِ,وَمَنْ سَتَرَ مُسْلِمًا ,سَتَرَهُ اَللّه فِي اَلدُّنْيَا وَالآخِرَةِ,وَاَللّه فِي عَوْنِ اَلْعَبْدِ مَاكَانَ اَلْعَبْدُ فِي عَوْنِ أَخِيه.

(رَوَاهُ مُسْلِمٌ)

"Dari Abu Hurairah, Nabi bersabda : Barangsiapa yang meringankan beban seorang Muslim dari beban dunia, maka Allah Swt. akan meringankan sebagian bebannya di hari kiamat. Dan barangsiapa yang memberikan kemudahan kepada seorang yang sedang susah maka Allah Swt. akan memberikan kemudahan untuknya di dunia dan di akhirat, dan barangsiapa yang menutupi (aibnya) di dunia dan di akhirat. Allah Swt. akan senantiasa melidungi atau membantu hamba-Nya selama hamba melindungi saudaranya" (H.R. Muslim).

Maksud dari hadits tersebut menerangkan bahwa dianjurkan bagi umat muslim untuk meringankan beban orang lain dengan saling tolong menolong, berbicara yang baik dan menutup keburukan dari informasi yang diperoleh melalui penglihatan dan pendengaran. Maka Allah Swt. akan memberi kemudahan dan meringankan dosa di akhirat kelak.

Surat Arrad ayat 11 merupakan surat tentang kemampuan menyelesaikan masalah sendiri dengan bersungguh-sungguh dan mendapat petunjuk dari Allah Swt., berikut topik dalam surat lain mengenai penyelesaian masalah

لَهُ مُعَقِّبَٰتٌ مِنْ بَيْنِ يَدَيْهِ وَمِنْ خَلْفِهِ يَحْفَظُونَهُ مِنْ أَمْرِ اللَّهِۗ إِنَّ اللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُوا مَا بِأَنْفُسِهِمْۗ

وَإِذَا أَرَادَ اللَّهُ بِقَوْمٍ سُوءًا فَلَا مَرَدَّ لَهُۚ وَمَا لَهُمْ مِنْ دُونِهِ مِنْ وَالٍ ﴿١١﴾

"*Baginya (manusia) ada malaikat-malaikat yang selalu menjaganya bergiliran, dari depan dan belakangnya. Mereka menjaganya atas perintah Allah. Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum sebelum mereka mengubah keadaan diri mereka sendiri. Dan apabila Allah menghendaki keburukan terhadap suatu kaum, maka tak ada yang dapat menolaknya dan tidak ada pelindung bagi mereka selain Dia."*

Menurut tafsir Thabari (2007), Allah Swt. berfirman "Sesungguhnya Allah Swt. tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri". Maksud dari perkataan tersebut Allah Swt. tidak akan memberi solusi pada keadaan umat muslim yang sedang kesulitan sebelum mereka sendiri yang mau berusaha untuk merubahnya.

Seperti halnya telah dijelaskan pada tafsir Al-Qurthubi (2009) dalam sebuah perang Uhud, sebagaimana Allah Swt. mengubah pasukan Uhud yang awalnya kalah karena mereka sering berbuat kesalahan dalam peperangan, tetapi mereka berusaha bangkit mencoba untuk memperbaiki kesalahan dengan taktik yang cerdik. Akhirnya pasukan Uhud berhasil memenangkan perang Uhud tersebut atas usaha mereka sendiri. Begitu juga kasus bunuh diri yang terjadi pada 15 desember 2023 (CNN Indonesia), korban merasa depresi karena tidak ada rasa ketakutan kepada Allah Swt. dan memiliki keimanan yang lemah. Peristiwa tersebut didukung juga oleh fasilitas kehidupan sekarang yang tersedia secara instan seperti pesan makanan secara *online*, jasa pengiriman barang yang datang langsung ke tempat tujuan dan meminta kiriman uang kepada orang tua secara langsung jika tidak dikirim akan mengancam melakukan hal yang buruk. Akibatnya kaum muda sekarang kurang mandiri, hanya bergantung kepada teknologi yang canggih, kurang bersosialisasi kepada orang lain dan kurang berusaha keras untuk mendapatkan barang atau keperluan sehari-hari. Oleh karena itu, sebagai kaum muda seharusnya meningkatkan usaha diri baik lahiriyah dan batiniyah dengan mendekatkan diri kepada Allah Swt., tidak kecenderungan terhadap teknologi jika mampu membeli barang atau makanan sendiri, dan membiasakan hidup mandiri.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan jenis penelitian kualitatif dengan menggunakan metode studi pustaka. Bentuk dari penelitian kualititatif yaitu dilakukan analisis persamaan Klein Gordon dengan menggunakan metode *d'alembert* dan metode pemisahan variabel. Selanjutnya dilakukan analisis secara analitik dengan memberikan syarat awal dan syarat batas dari artikel Usman dan Shittu (2019) untuk menampilkan simulasi solusi analitik dengan kondisi awal $u(x,0) = \sin(x) + 1$ dan $u_t(x,0) = 0$ dan kondisi batas $u(0,t) = 0$ dan $u(1,t) = 0$.

3.2 Tahapan Penelitian

Tahapan yang dilakukan dalam penelitian sebagai berikut :

1. Menyelesaikan masalah nilai awal persamaan Klein Gordon dengan langkah-langkah sebagai berikut
   a. Melakukan prosedur faktorisasi operator pada ruas kiri persamaan Klein Gordon.
   b. Membuat pemisalan $(u_t + u_x) = 0$ pada faktorisasi operator diferensial parsial.
   c. Memasukkan kondisi awal $u(x,0) = f(x)$ dan memisalkan τ pada kondisi awal $u(x,0) = u(\tau,0) = f(\tau)$.
   d. Mengintegralkan kurva-kurva karakteristik pada semua komponen dari faktorisasi operator.
   e. Melakukan pemisalan $(u_t - u_x) = v$ pada faktorisasi operator diferensial parsial.

f. Memasukkan kondisi awal $u(x,0) = f(x)$ dan kecepatan awal $u_t(x,0) = g(x)$.

g. Mengintegralkan kurva-kurva karakteristik pada semua komponen dari faktorisasi operator dan memperoleh penyelesaian masalah nilai awal persamaan Klein Gordon.

2. Menyelesaikan masalah nilai batas persamaan Klein Gordon dengan langkah-langkah sebagai berikut

   a. Menggunakan metode pemisahan variabel $u(x,t) = F(x)G(t)$

   b. Mendapatkan pemisalan $u(x,t) = F(x)G(t)$ untuk menentukan k yang sesuai dengan memisalkan $k = 0, k < 0$, dan $k > 0$.

   c. Mencari nilai eigen dan fungsi eigen dari solusi $F(x)$ dengan memasukkan kondisi batas $u(0,t) = F(0) = 0$ dan $u(1,t) = F(1) = 0$.

   d. Mencari nilai eigen dan fungsi eigen dari solusi $G(t)$ dengan memasukkan kecepatan awal $u_t(x,0) = G'(0) = 0$ dan kondisi batas $u(1,t) = G(1) = 0$.

   e. Melakukan Subsitusi fungsi eigen $F(x)$ dan $G(t)$ terhadap pemisalan $u(x,t) = F(x)G(t)$.

   f. Menentukan koefisien d_n dengan deret fourier sinus pada $u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t)$ dan mensubstitusikan syarat awal $f(x) = \sin(x) + 1$.

   g. Melakukan bentuk kombinasi linier dari koefisien d_n dan mensubstitusikan nilai d_n, F_n, dan G_n ke dalam $u_n(x,t) = d_n F_n(x) G_n(t)$ dan memperoleh penyelesaian masalah nilai batas persamaan Klein Gordon.

3. Mensimulasikan masalah nilai awal dan masalah nilai batas persamaan Klein Gordon dengan menambahkan kondisi awal dan kondisi batas yang ditentukan dalam artikel referensi utama.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Solusi Analitik Persamaan Klein Gordon

4.1.1 Penyelesaian Masalah Nilai Awal

Persamaan Klein Gordon merupakan persamaan diferensial parsial (PDP) linier yang akan diselesaikan dengan solusi *d'alembert*. Untuk menentukan masalah nilai awal pada persamaan gelombang membutuhkan kondisi awal sebagai berikut

$$u_{tt} - u_{xx} + u = 0 \tag{4.1}$$

Kondisi awal menyatakan $t = 0$, sehingga nilai awalnya sebagai berikut

$$u(x,0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \tag{4.2}$$

Persamaan (4.1) dibentuk ke dalam persamaan diferensial parsial (PDP) orde dua, menjadi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0 \tag{4.3}$$

Persamaan diferensial parsial orde dua diubah menjadi persamaan diferensial parsial orde satu. Selanjutnya melakukan prosedur faktorisasi operator pada ruas kiri persamaan (4.3) dan fungsi u dipindah ke ruas kanan, dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = -u(x,t) \tag{4.4}$$

Misalkan

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = v(x,t) \tag{4.5}$$

Akibatnya persamaan (4.4) menjadi

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}=-u(x,t) \tag{4.6}$$

Dari persamaan (4.5) dan (4.6) menghasilkan sistem persamaan diferensial orde satu yaitu :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)=v(x,t) \\ \frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}=-u(x,t) \end{cases}$$

Asumsikan fungsi τ pada kondisi awal $u(x,0)=f(x)$ menjadi

$$\left.\begin{matrix} x_0=\tau \\ t=0 \end{matrix}\right\} v_0=v(\tau,0)=f(\tau) \tag{4.7}$$

Maka persamaan (4.6) memperoleh kurva karakteristik

$$\frac{dt}{ds}=1, \frac{dx}{ds}=1, \frac{dv}{ds}=-u \tag{4.8}$$

Mengintegralkan semua komponen pada persamaan (4.8)

$$\int dt=\int ds\,, \qquad t=s \tag{4.9}$$

$$\int dx=\int ds\,, \qquad x=s \tag{4.10}$$

$$\int dv=\int -u\,ds, \qquad v=\int_{s=0}^{s}(-u)\,ds \tag{4.11}$$

Berdasarkan persamaan (4.6), misalkan $x_1=s$ dimana $t=s$ maka

$$x_1=t \tag{4.12}$$

Sehingga memperoleh

$$x=x_0+x_1$$

$$\Leftrightarrow x=\tau+t$$

$$\Leftrightarrow \tau = x - t \tag{4.13}$$

Begitu juga dengan v dengan memisalkan $v_0 = f(\tau)$ dan $v_1 = -u$ maka

$$v = v_0 + v_1$$

$$\Leftrightarrow v = f(\tau) + \int_{s=0}^{s} (-u) ds$$

$$\Leftrightarrow v = f(x-t) + \int_{s=0}^{s} (-u)\, ds \tag{4.14}$$

Kondisi awal pada persamaan (4.7) dapat ditulis menjadi

$$v(\tau, 0) = v(x-t, 0) = f(\tau) \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(\tau, 0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x-t, 0) = g(\tau)$$

Selanjutnya misalkan $f(x), g(x)$ adalah fungsi sembarang, menggabungkan kondisi awal persamaan (4.15) ke dalam persamaan (4.5) menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = v(x,t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = g(\tau) - f'(\tau)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = g(x-t) - f'(x-t) \tag{4.16}$$

Maka persamaan (4.16), dibentuk kurva karakteristik

$$\frac{dt}{ds} = 1, \frac{dx}{ds} = -1, \frac{du}{ds} = v(x,t) \tag{4.17}$$

Mengintegralkan semua komponen pada persamaan (4.17)

$$\int dt = \int 1\, ds, \qquad t = s \tag{4.18}$$

$$\int dx = \int -1\, ds, \qquad x = -s \tag{4.19}$$

$$\int du = \int v(x,t)\, ds, \qquad u_1 = \int_{s=0}^{s} \big(g(x-t) - f'(x-t)\big)\, ds \tag{4.20}$$

Berdasarkan persamaan (4.5), misalkan $x_2 = -s$ dimana $t = s$ maka

$$x_2 = -s \text{ atau } \; x_2 = -t \tag{4.21}$$

Sehingga memperoleh

$$x = x_0 + x_2$$

$$\Leftrightarrow x = \tau + (-t) \tag{4.22}$$

$$\Leftrightarrow \tau = x + t \tag{4.23}$$

Begitu juga dengan u, misalkan $u_0 = f(\tau)$ dan substitusikan persamaan (4.23) ke dalam persamaan (4.20) maka

$$u = u_0 + u_1$$

$$\Leftrightarrow u = f(\tau) + \int g(x-t) - f'(x-t)\, dt$$

$$\Leftrightarrow u = f(x+t) + \int g(x-t) - f'(x-t)\, dt \tag{4.24}$$

Substitusikan persamaan (4.22) ke dalam persamaan (4.24) dan $u_1 = \int g(x-t) - f'(x-t)\, ds$ pada $(x-t)$ diubah menjadi

$$x - t = (\tau - t) - t = \tau - 2t \tag{4.25}$$

Sehingga persamaan (4.25) menjadi

$$u = f(x+t) + \int g(\tau - 2t) - f'(\tau - 2t)\, ds \tag{4.26}$$

Jika diasumsikan $\lambda = \tau - 2t$, mengakibatkan $\frac{d\lambda}{ds} = -2$. Maka $ds = -\frac{d\lambda}{2}$. Sehingga persamaan (4.27) menjadi

$$u = f(x+t) + \int_{x+t}^{x-t} g(\lambda) - f'(\lambda) \left(-\frac{d\lambda}{2}\right) \tag{4.27}$$

Dengan menjabarkan persamaan (4.27) didapatkan

$$u = f(x+t) - \frac{1}{2}G(\lambda)\Big|_{x+t}^{x-t} + \frac{1}{2}f(\lambda)\Big|_{x+t}^{x-t} d\lambda \qquad (4.28)$$

Dengan menjabarkan (4.28)

$$u = f(x+t) - \tfrac{1}{2}\big(G(x-t) - G(x+t)\big) + \tfrac{1}{2}\big(f(x-t) - f(x+t)\big) \qquad (4.29)$$

$$u = f(x+t) - \tfrac{1}{2}G(x-t) + \tfrac{1}{2}G(x+t) + \tfrac{1}{2}f(x-t) - \tfrac{1}{2}f(x+t) \qquad (4.30)$$

$$u(x,t) = \left(\tfrac{1}{2}f(x-t) - \tfrac{1}{2}G(x-t)\right) + \left(\tfrac{1}{2}f(x+t) + \tfrac{1}{2}G(x+t)\right) \qquad (4.31)$$

Persamaan (4.31) adalah solusi masalah nilai awal persamaan Klein Gordon.

4.1.2 Penyelesaian Masalah Nilai Batas

Untuk menentukan masalah nilai batas pada persamaan Klein Gordon (4.1), persamaan Klein Gordon diubah ke dalam bentuk pemisahan variabel yaitu

$$u(x,t) = F(x)G(t) \qquad (4.32)$$

$$u_t(x,t) = F(x)G'(t) \qquad u_x(x,t) = F'(x)G(t)$$

$$u_{tt}(x,t) = F(x)G''(t) \qquad u_{xx}(x,t) = F''(x)G(t) \qquad (4.33)$$

Kondisi awal pada persamaan Klein Gordon yaitu

$$u(x,0) = F(x)G(0) = 0 \text{ dan } u_t(x,0) = F(x)G'(t) = 0 \qquad (4.34)$$

Syarat batasnya adalah

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0 \text{ dan } u(1,t) = F(1)G(t) = 0 \qquad (4.35)$$

Mensubstitusikan persamaan (4.32) dan (4.33) pada persamaan (4.1) menjadi

$$F(x)G''(t) - F''(x)G(t) + F(x)G(t) = 0 \qquad (4.36)$$

Ruas kiri persamaan (4.36) dibagi dengan $F(x)G(t)$ memperoleh

$$\frac{G''(t)}{G(t)} - \frac{F''(x)}{F(x)} + 1 = 0$$

Atau

$$\frac{G''(t)}{G(t)} + 1 = \frac{F''(x)}{F(x)} \tag{4.37}$$

Kedua ruas persamaan (4.37) harus bernilai sama untuk fungsi terhadap x dan t. Jika tidak sama, variabel bebas x tetap dan variabel t bervariasi mengakibatkan pelanggaran kesetaraan. Oleh karena itu, kedua ruas persamaan dimisalkan konstanta pemisah $-k$ untuk memperoleh hasil yang lebih mudah menjadi

$$\frac{F''(x) - F(x)}{F(x)} = -k \qquad\qquad \frac{G''(t)}{G(t)} = -k$$

$$F''(x) - F(x) = -kF(x) \qquad\qquad G''(t) + kG(t) = 0 \tag{4.39}$$

$$F''(x) + (k-1)F(x) = 0 \tag{4.38}$$

Persamaan (4.38) ditulis kembali

$$F''(x) + (k-1)F(x) = 0 \tag{4.40}$$

persamaan (4.40) disebut sebagai persamaan diferensial linier homogen orde dua dengan koefisien konstanta dan persamaan karakteristiknya setara dengan persamaan kuadrat yang dinyatakan sebagai berikut

$$m^2 + (k-1) = 0 \tag{4.41}$$

Selanjutnya menyelesaikan akar-akar karakteristik pada persamaan (4.41). Terdapat tiga kemungkinan akar-akar karakteristik nilai m, dimana kasus 1 dan kasus 2 menyatakan trivial (Lampiran 9) yaitu

Kasus 3. Karena $k = \alpha^2 > 0$, maka $m_{1,2}$ adalah akar-akar komplek atau imajiner dan diperoleh persamaan karakteristik $m^2 + (\sqrt{k-1})^2 = 0$ dimana $m = \pm i\sqrt{k-1}$. Maka solusi umum persamaan (4.41) sebagai berikut

$$F(x) = D_1 e^{-i\sqrt{k-1}} + D_2 e^{i\sqrt{k-1}} \tag{4.42}$$

Dengan menggunakan rumus euler

$$e^{-i\sqrt{k-1}} = \cos x\sqrt{k-1} - i\ sin\ x\sqrt{k-1} \tag{4.43}$$

$$e^{i\sqrt{k-1}} = \cos x\sqrt{k-1} + i\ sin\ x\sqrt{k-1}$$

Substitusikan $e^{-i\sqrt{k-1}}$ dan $e^{i\sqrt{k-1}}$ ke persamaan (4.42) diperoleh

$$\begin{aligned} F(x) = D_1\left(\cos x\sqrt{k-1} - i\ sin\ x\sqrt{k-1}\right) \\ + D_2\left(\cos x\sqrt{k-1} + i\ sin\ x\sqrt{k-1}\right) \end{aligned} \tag{4.44}$$

Persamaan (4.44) dijabarkan

$$F(x) = (D_1 + D_2)\cos x\sqrt{k-1} + i(D_1 - D_2)\sin x\sqrt{k-1} \tag{4.45}$$

Misalkan

$D_1 + D_2 = d_1$

$i(D_1 - D_2) = d_2$

Maka persamaan (4.49) ditulis kembali menjadi

$$F(x) = d_1 \cos x\sqrt{k-1} + d_2 \sin x\sqrt{k-1} \tag{4.46}$$

Dengan memperhatikan syarat batas $0 \leq x \leq 1$, diperoleh

$$\begin{aligned} F(0) &= d_1 \cos x\sqrt{k-1} + d_2 \sin x\sqrt{k-1} = 0 \\ &= d_1 \cos(0)\sqrt{k-1} + d_2 \sin(0)\sqrt{k-1} = 0 \\ &= d_1(1) + d_2(0)\sqrt{k-1} = 0 \\ &= d_1 = 0 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Substitusikan persamaan (4.47) ke persamaan (4.46) dan syarat batas persamaan (4.35) yang diketahui diperoleh

$$F(1) = d_1 \cos x\sqrt{k-1} + d_2 \sin x\sqrt{k-1} = 0$$

$$= d_1 \cos(1)\sqrt{k-1} + d_2 \sin(1)\sqrt{k-1} = 0$$

$$= 0 + d_2 \sin(1)\sqrt{k-1} = 0$$

$$= d_2 \sin(1)\sqrt{k-1} = 0 \tag{4.48}$$

Dari persamaan (4.48) diperoleh

$$d_2 = 0 \text{ atau } \sin(1)\sqrt{k-1} = 0 \tag{4.49}$$

Selanjutnya jika $d_2 \neq 0$ maka $\sin(1)\sqrt{k-1} = 0$ atau dapat ditulis sebagai berikut

$$\left((1)\sqrt{k-1}\right) = \arcsin(0)$$

$$\left(\sqrt{k-1}\right) = n\pi$$

$$k-1 = (n\pi)^2$$

diperoleh $k = (n\pi)^2 + 1, n \; \forall \; n = 0,1,2, \ldots$ karena

$$F(x) = d_2 \sin x\sqrt{k-1} \tag{4.50}$$

Substitusi k ke dalam persamaan (4.50) menjadi

$$F(x) = d_2 \sin x\sqrt{(n\pi)^2 + 1 - 1}$$

$$= d_2 \sin x\sqrt{(n\pi)^2} \tag{4.51}$$

Persamaan (4.51) disebut nilai eigen. Sehingga solusi persamaan (4.51) adalah

$$F_n(x) = d_n \sin(n\pi)\, x \tag{4.52}$$

Sedangkan $F(x)$ tidak identik dengan nol dan kasus ini dikatakan nontrivial. Selanjutnya menyelesaikan variabel bebas t, maka persamaan (4.39) ditulis kembali

$$G''(t) + kG(t) = 0 \tag{4.53}$$

Sebelumnya telah diketahui $k = (n\pi)^2 + 1$, maka persamaan karakteristik yang setara dengan (4.53) dinyatakan sebagai berikut

$$m^2 + \left((n\pi)^2 + 1\right) = 0 \tag{4.54}$$

Akar karakteristik dari persamaan (4.54)

$$m_{1,2} = \pm\left(i\sqrt{(n\pi)^2 + 1}\right) \tag{4.55}$$

Selanjutnya menyelesaikan akar-akar karakteristik pada persamaan diferensial linier homogen orde dua dengan koefisien konstanta. Terdapat tiga kemungkinan akar-akar nilai m, dimana kasus 1 dan kasus 2 memperoleh hasil trivial (Lampiran 10). Telah diketahui kecepatan awal $u_t(x,0) = F(x)G'(0) = 0$, maka kasus 3 mensubstitusikan kecepatan awal sebagai berikut

Kasus 3. Karena $k = \alpha^2 > 0$, maka $m_{1,2}$ adalah akar-akar komplek atau imajiner. Maka solusi umum persamaan (4.54) sebagai berikut

$$G(t) = d_1 \cos t\,(\sqrt{(n\pi)^2 + 1}) + d_2 \sin t\,(\sqrt{(n\pi)^2 + 1})$$

$$G'(t) = -d_1 \sin t\,(\sqrt{(n\pi)^2 + 1}) + d_2 \cos t\,(\sqrt{(n\pi)^2 + 1}) = 0 \tag{4.56}$$

Mensubstitusikan $G'(0) = 0$ dari persamaan (4.56), diperoleh

$$\begin{aligned} G'(0) &= -d_1 \sin(0)\,(\sqrt{(n\pi)^2 + 1}) + d_2 \cos(0)\,(\sqrt{(n\pi)^2 + 1}) = 0 \\ &= -d_1(0) + d_2(1) = 0 \\ &= d_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Karena $d_2 = 0$ pada $G'(0) = 0$, selanjutnya mencari hasil dari $G(t)$ dengan mensubstitusikan syarat batas menjadi

$$\begin{aligned} G(1) &= d_1 \cos t\,(\sqrt{(n\pi)^2 + 1}) + d_2 \sin t\,(\sqrt{(n\pi)^2 + 1}) \\ &= d_1 \cos(1)\,(\sqrt{(n\pi)^2 + 1}) + 0 \\ &= d_1 \cos(\sqrt{(n\pi)^2 + 1}) \end{aligned} \tag{4.58}$$

Persamaan (4.58) disebut nilai eigen dari $G(t)$. Sehingga didapatkan solusi persamaan (4.58) adalah

$$G_n(t) \quad = d_n \cos t\,(\sqrt{(n\pi)^2+1}) \tag{4.59}$$

Setelah didapatkan nilai eigen dan fungsi eigen dari $F(x)$ dan $G(t)$, langkah selanjutnya mencari koefisien dari u_n. Untuk menentukan u_n maka menggunakan pemisalan $u(x,t) = F(x)G(t)$. Sehingga u_n sebagai berikut

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= d_n \sin(n\pi x)\, d_n \cos\left(\sqrt{(n\pi t)^2+t}\right) \\ &= d_n d_n \sin(n\pi x) \cos\left(\sqrt{(n\pi t)^2+t}\right) \end{aligned} \tag{4.60}$$

Misalkan $d_n d_n = d_n$. Selanjutnya menentukan koefisien d_n dengan deret fourier, karena kondisi awal $f(x) = \sin(x) + 1$ merupakan fungsi ganjil maka menggunakan deret fourier sinus yaitu

$$d_n = 2\int_0^1 f(x) \sin(n\pi x)\, dx$$

Sumber masalah ini adalah membentuk kombinasi linier dari fungsi persamaan (4.61) dan koefisien d_n dari kondisi awal $u(x,0) = 0$ persamaan (4.61). Pada masalah yang telah dicari sebelumnya memiliki banyak fungsi tak terbatas, jadi kombinasi linier umum dari masalah yang dicari adalah fungsi tak terbatas. Selanjutnya mensubstitusikan nilai d_n (4.58) ke dalam $u_n(x,t) = d_n F_n(x) G_n(t)$, dimana $F_n(x)$ adalah (4.52) dan $G_n(t)$ adalah (4.59) menjadi

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= d_n F_n(x) G_n(t) \\ &= \left(2\int_0^1 f(x) \sin(n\pi x)\, dx\right) * \sin(n\pi x) \\ &\quad * \cos\left(\sqrt{(n\pi t)^2+t}\right) \end{aligned} \tag{4.61}$$

Persamaan (4.61) merupakan solusi masalah nilai batas dari persamaan Klein Gordon dengan $0 \leq x \leq 1$ dan $t > 0$.

4.2 Simulasi Solusi Analitik Persamaan Klein Gordon

Solusi analitik dari penelitian ini adalah solusi masalah nilai awal dan masalah nilai batas. Kedua solusi yang diperoleh pada persamaan Klein Gordon dengan menggunakan metode *d'alembert* dan metode pemisahan variabel disimulasikan menggunakan program maple.

4.2.1 Simulasi Masalah Nilai Awal

Simulasi masalah nilai awal persamaan Klein Gordon dengan mensubstitusikan syarat awal $u(x,0) = f(x) = \sin x + 1$ yaitu

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}G(x-t) + \frac{1}{2}G(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t) + \frac{1}{2}f(x+t)$$

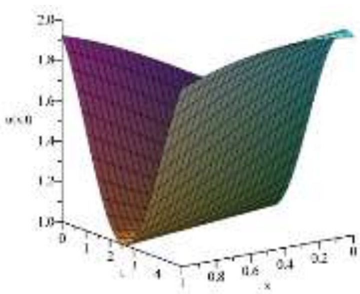
$$u(x,0) = 0 + 0 + \frac{1}{2}f(x-t) + \frac{1}{2}f(x+t)$$

$$u(x,0) = \frac{1}{2}(\sin(x-t) + 1) + \frac{1}{2}(\sin(x+t) + 1)$$

$$u(x,0) = \frac{1}{2}(\sin(x-t)) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sin(x+t)) + \frac{1}{2}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sin(x-t) + \frac{1}{2}\sin(x+t) + 1 \qquad (4.62)$$

Dari persamaan (4.62) adalah solusi analitik dari masalah nilai awal persamaan Klein Gordon yang dapat disimulasikan sebagai berikut



Gambar 1. 3 Grafik Masalah Nilai Awal

Grafik masalah nilai awal persamaan Klein Gordon menunjukkan bahwa gelombang merambat ke arah kanan pada $0 < t < 5$ dan $0 < x < 1$. Gelombang membentuk bukit bernilai positif dan lembah bernilai negatif.

4.2.2 Simulasi Masalah Nilai Batas

Simulasi masalah nilai batas dari persamaan Klein Gordon dengan mensubstitusikan kondisi awal $f(x) = \sin(x) + 1$ yaitu

$$u_n(x,t) = \left(2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx\right) * \sin(n\pi x) * \cos\left(\sqrt{(n\pi t)^2 + t}\right)$$

$$= \left(2\int_0^1 (\sin(x) + 1)\sin(n\pi x)\,dx\right) * \sin(n\pi x) * \cos\left(\sqrt{(n\pi t)^2 + t}\right)$$

$$u_n(x,t) = \frac{-2n^2\pi^2\cos(n\pi)\sin(1) + 2\cos(n\pi)\,n^2\pi^2}{n\pi(n^2\pi^2 - 1)}$$

$$\frac{-2n\pi\sin(n\pi)\cos(1) - 2n^2\pi^2 - 2\cos(n\pi) + 2}{n\pi(n^2\pi^2 - 1)} * \sin(n\pi x)$$

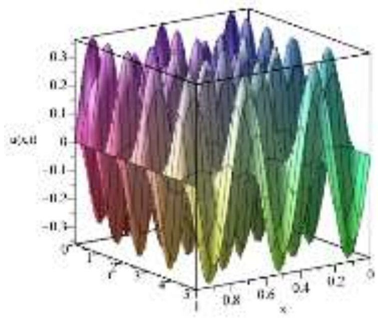
$$* \cos\left(\sqrt{(n\pi t)^2 + t}\right)$$

$$u(x,t) = \frac{-2(5^2)\pi^2\cos(5\pi)\sin(1) + 2\cos(5\pi)(5^2)\pi^2}{5\pi(5^2\pi^2 - 1)} \tag{4.63}$$

$$-2(5)\pi\sin(5\pi)\cos(1) - 2(5^2)\pi^2 - 2\cos(5\pi) + 2$$

$$* \sin(5\pi x) * \cos\left(\sqrt{(5\pi t)^2 + t}\right)$$

Dari persamaan (4.63) adalah solusi analitik dari masalah nilai batas persamaan Klein Gordon yang dapat disimulasikan dengan parameter $0 < x < 1, 0 < t < 5$ dan $n = 5$ (Hisyam, 2021).



Gambar 1. 4 Grafik Masalah Nilai Batas

Grafik masalah nilai batas persamaan Klein Gordon menunjukkan bahwa gelombang merambat ke arah kanan pada $0 < t < 5$ dan $0 < x < 1$. Gelombang bergerak dengan frekuensi sama di $0 < x < 1$ dan amplitudo yang berubah. Sehingga membentuk bukit bernilai positif dan lembah bernilai negatif.

4.3 Penyelesaian Solusi Analitik Dalam Nilai-Nilai Islam

Islam adalah agama yang memberi petunjuk bagi makhluk-Nya atas setiap ketentuan yang diciptakan. Petunjuk yang diberikan berupa menyelesaikan sesuatu masalah tanpa kendala apapun dan telah diatur cara menyelesaikan suatu permasalahan dengan baik. Sebagaimana dijelaskan dalam surat Al-Fussilat ayat 34.

Ayat tersebut menjelaskan tentang ketika seseorang terlibat dalam suatu permasalahan, berusahalah untuk menyelesaikan dengan cara yang baik. Cara yang baik yaitu dengan selalu berusaha, sabar dalam menjalani proses untuk menemukan solusi, tenang menghadapi setiap keadaan, berpikir positif dan tidak emosi agar memperoleh petunjuk yang baik dan benar karena dikhawatirkan akan menimbulkan masalah lain. Sebagai umat muslim yang beriman, berusahalah untuk menjaga lisan agar tidak menyingggung perasaan orang lain.

Menurut HR. Al Bukhari berkata, Qatadah meriwayatkan, dia berkata: Saya bertanya kepada Anas ra., "Apakah para Sahabat Rasulullah saw. melakukan jabat tangan?" jinas ra. menjawab, "Ya."

Begitu juga dalam persamaan Klein Gordon, dimana hal tersebut digunakan untuk menemukan solusi analitik dan solusi yang diperoleh menjadi lebih mudah diselesaikan dengan menemukan masalah nilai awal dan masalah nilai akhir. Persamaan Klein Gordon merupakan persamaan yang mengilustrasikan sebuah partikel yang bergerak secara periodik dalam situasi tertentu. Persamaan Klein Gordon merupakan persamaan matematika yang mempunyai satu atau lebih fungsi (peubah tak terbalas) dan turunan fungsinya terhadap satu atau lebih variabel.

Dalam ajaran Islam kita diajarkan untuk berserah diri kepada Allah Swt. setelah menemukan akar permasalahan dari setiap permasalahan yang dihadapi. Sebagai makhluk ciptaan Allah Swt., jika belum mendapatkan solusi dari sebuah permasalahan yang sedang terjadi agar selalu ingat untuk terus bersabar disertai doa agar Allah Swt. memberikan petunjuk untuk memecahkan masalah dan dapat hasil yang baik.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan penelitian dari persamaan Klein Gordon dapat disimpulkan sebagai berikut :

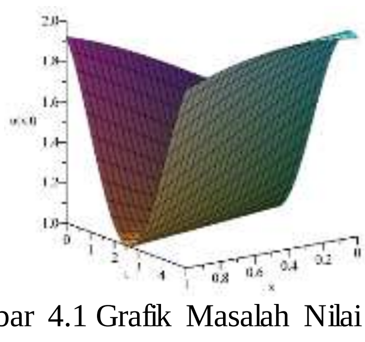
1. Solusi analitik persamaan Klein Gordon
   a. Solusi masalah nilai awal dengan metode *d'alembert* pada kondisi awal $u(x,0) = f(x) = \sin(x) + 1$ dan $u_t(x,0) = g(x) = 0$, diperoleh

   $u(x,t) = \frac{1}{2}(sin(x-t)) + \frac{1}{2}(sin(x+t)) + 1$

   b. Solusi analitik masalah nilai batas metode pemisahan variabel dengan memisahkan variabel $F(x)$ dan $G(t)$ pada kondisi awal $u(x,0) = f(x) = \sin(x) + 1$ dan $u_t(x,0) = g(x) = 0$ dan kondisi batas $u(0,t) = F(0)G(t) = 0$ dan $u(1,t) = F(1)G(t) = 0$

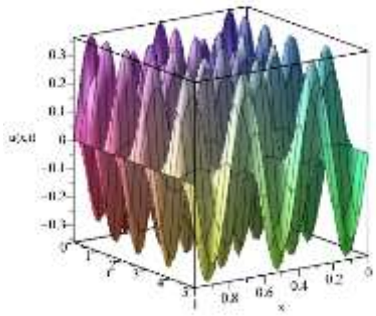
   $$u_n(x,t) = \left(2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx\right) * \sin(n\pi x) * \cos\left(\sqrt{(n\pi t)^2 + t}\right)$$

2. Simulasi solusi analitik persamaan Klein Gordon
   a. Simulasi persamaan Klein Gordon menggunakan metode *d'alembert* dengan $0 \leq x \leq 1$ dan $0 < t < 5$ menghasilkan

   Gambar 4.1 Grafik Masalah Nilai Awal

   b. Simulasi persamaan Klein Gordon menggunakan metode pemisahan variabel dengan $0 \leq x \leq 1$, $0 < t < 5$ dan $n = 5$



Gambar 4.2 Grafik Masalah Nilai Batas

5.2 Saran

Saran penelitian selanjutnya adalah melakukan penelitian tentang penyelesaian analitik persamaan Klein Gordon menggunakan metode yang berbeda dari penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Maraghi, A. (1984). *Terjemah Tafsir Al-Maraghi 2*. Semarang: CV. Toha Putra.

Al-Qurthubi, I. (2009). *Tafsir Al-Qur'an Jilid 15*. (M. M. Mukti, Penerj.) Jakarta: Pustaka Azzam.

Ath-Thabari, I. J. (2007). *Tafsir Ath-Thabari Jilid 15*. Jakarta: Pustaka Azzam.

DiPrima, W. E. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (9 ed.). United Statesof America: John Wiley & Sons.

Dr. Lukman Arake, L. M. (2020). *Hadis-Hadis Politik dan Pemerintah.* D.I.Yogyakarta: Lintas Nalar.

Ficek, Z. (2016). *Quantum Physichs for Beginners.* Perancis: Pan Stanford Publishers.

Halliday, R. d. (2010). *Fisika Dasar* (7 ed.). Jakarta: ERLANGGA.

Hisyam Ihsan, S. S. (2021, Oktober). Solusi Persamaan Burgers Inviscid dengan Metode Pemisahan Variabel. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics, 4*, 88-94. Diambil kembali dari http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Humi, M. d. (1992). *Boundary Value Problem and Partial Differential Equation.* Boston: PWS-KENT Publising Company.

Katsir, I. (2005). *Tafsir Ibnu Katsir Jilid I.* (M. A. E.M, Penerj.) Bogor: Pustaka Imam Syafi'i Penebar Sunnah.

Ledder, G. (2005). *Differential Equation : A Modelling Approach.* New York: Mc Graw Hill.

Nabiyah, I. R. (2017). *Penyelesaian Persamaan Klein Gordon Menggunakan Metode Homotopi.* Indonesia: Jurnal As-Salam.

Nainggolan, R. D. (2012). Penerapan Persamaan Klein-Gordon Untuk Menentukan Tingkat Energi dari Atom Pion. *Skripsi Tidak diterbitkan*.

S. C. Shiralashetti, L. M. (2016). Haar Wavelet Method for The Numerical Solution of Klein Gordon Equations. *Asian-European Journal of Mathematics, 9*. Diambil kembali dari https://www.worldscientific.com

S. Ikram, S. S. (2021). Approximations to linear Klein–Gordon Equations using Haar wavelet. *Ain Shams Engineering Journal, 12*, 3987-3995. Diambil kembali dari https://www.sciencedirect.com

Stephen A. Ross, R. W. (2010). *Corporate Finance* (9 ed.). Mc. Graw-Hill Companies.

Strauss, W. A. (2007). *Partial Differential Equations An Introduction* (2nd ed.). New York: John Wiley and Sons, Ltd.

Usman M.A, S. M. (2019). Analytical Solution of The Linear and Nonlinear Klein Gordon Equations. *Journal of Engineering and Technology*, 30-38. Diambil kembali dari https://www.laujct.com

Zauderer, E. (2006). *Partial Differential Equations of Applied Mathematics.* (3, Penyunt.) New York: A John Wiley & Sons. Inc.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Script Maple Metode *d'alembert*

```
restart; with(plots);
u := proc (x, t) options operator, arrow; (1/2)*sin(x-t)+(1/2)(sin(x+t))+1 end proc;
plot3d(u(x, t), x = 0 .. 1, t = 0 .. 5, labels = ["x", "t", "u(x,t)"]);
```

Lampiran 2 Script Maple Metode Pemisahan Variabel

```
Restart:
with(PDEtools):
u(0, t) = 0; u(1, t) = 0; u(x, 0) = sin(x)+1; Diff(u(x, 0), t) = 0;
u := proc (x, t) options operator, arrow; 2*(int(f(x)*sin(n*Pi*x), x = 0 .. 1))*sin(n*Pi*x)*cos(sqrt(n^2*Pi^2*t+t)) end proc
u1 := subs(f(x) = sin(x)+1, u(x, t)); u2 := subs(n = 5, u1); u3 := simplify(u2);
with(plots); plot3d(u2, x = 0 .. 1, t = 0 .. 5, labels = ["x", "t", "u(x,t)"])
```

Lampiran 3 Pembuktian Solusi *d'alembert* jika $\boldsymbol{u(x,0) = f(x)}$

Dari $u(x,t)$ dimana $t = 0$

$$u(x,0) = -\tfrac{1}{2}G(x-0) + \tfrac{1}{2}G(x+0) + \tfrac{1}{2}f(x-0) + \tfrac{1}{2}f(x+0)$$

$$u(x,0) = -\frac{1}{2}G(x) + \frac{1}{2}G(x) + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x)$$

$$u(x,0) = f(x)$$

Lampiran 4 Pembuktian masalah nilai awal penurunan $\boldsymbol{u(x,t)}$ terhadap $\boldsymbol{t}$ dan $\boldsymbol{x}$

Turunan pertama dan kedua $u(x,t)$ terhadap t

$$u = -\frac{1}{2}G(x-t) + \frac{1}{2}G(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t) + \frac{1}{2}f(x+t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(-1)\tfrac{1}{2}g(x-t) + \tfrac{1}{2}g(x+t) + (-1)\tfrac{1}{2}f'(x-t) + \tfrac{1}{2}f'(x+t)$$

$$= \frac{1}{2}g(x-t) + \frac{1}{2}g(x+t) - \frac{1}{2}f'(x-t) + \frac{1}{2}f'(x+t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (-1)\tfrac{1}{2}g'(x-t) + \tfrac{1}{2}g'(x+t) - (-1)\tfrac{1}{2}f''(x-t) + \tfrac{1}{2}f''(x+t)$$

$$= -\tfrac{1}{2}g'(x-t) + \tfrac{1}{2}g'(x+t) + \tfrac{1}{2}f''(x-t) + \tfrac{1}{2}f''(x+t)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t=0} = -\frac{1}{2}g'(x) + \frac{1}{2}g'(x) + \frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{2}f''(x)$$
$$= f''(x)$$

Turunan pertama dan kedua $u(x,t)$ terhadap x

$$u = -\frac{1}{2}G(x-t) + \frac{1}{2}G(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t) + \frac{1}{2}f(x+t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = (-1)\frac{1}{2}g(x-t) + \frac{1}{2}g(x+t) + \frac{1}{2}f'(x-t) + \frac{1}{2}f'(x+t)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (-1)\frac{1}{2}g(x-t) + \frac{1}{2}g(x+t) + \frac{1}{2}f''(x-t) + \frac{1}{2}f''(x+t)$$
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{t=0} = (-1)\frac{1}{2}g(x-t) + \frac{1}{2}g(x+t) + \frac{1}{2}f''(x-t) + \frac{1}{2}f''(x+t)$$
$$= f''(x)$$

Lampiran 5 Pembuktian kondisi batas solusi analitik

Diketahui Solusi masalah nilai batas Persamaan Klein Gordon

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2n^2\pi^2\cos(n\pi)\sin(1) + 2\cos(n\pi)\,n^2\pi^2 - 2n\pi\sin(n\pi)\cos(1)}{n\pi\,(n^2\pi^2-1)} \frac{-2n^2\pi^2 - 2\cos(n\pi) + 2}{n\pi(n^2\pi^2-1)}\sin(n\pi x)\cos\left(\sqrt{(n\pi t)^2 + t}\right)$$

- Untuk $u(0,t) = 0$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2n^2\pi^2\cos(n\pi)\sin(1) + 2\cos(n\pi)\,n^2\pi^2 - 2n\pi\sin(n\pi)\cos(1)}{n\pi\,(n^2\pi^2-1)} \frac{-2n^2\pi^2 - 2\cos(n\pi) + 2}{n\pi(n^2\pi^2-1)}\sin(n\pi(0))\cos\left(\sqrt{(n\pi t)^2 + t}\right) = 0$$

Terbukti benar $u(0,t) = 0$

- Untuk $u(1,t) = 0$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2n^2\pi^2\cos(n\pi)\sin(1) + 2\cos(n\pi)\,n^2\pi^2 - 2n\pi\sin(n\pi)\cos(1)}{n\pi\,(n^2\pi^2-1)} \frac{-2n^2\pi^2 - 2\cos(n\pi) + 2}{n\pi(n^2\pi^2-1)}\sin(n\pi(1))\cos\left(\sqrt{(n\pi t)^2 + t}\right) = 0$$

Terbukti benar $u(1,t) = 0$

- Untuk $u_t(x,0) = 0$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2\pi^2 \cos(n\pi)\sin(1) + 2\cos(n\pi)\, n^2\pi^2 - 2n\pi \sin(n\pi)\cos(1)}{n\pi(n^2\pi^2 - 1)}$$

$$\frac{-2n^2\pi^2 - 2\cos(n\pi) + 2}{n\pi(n^2\pi^2 - 1)} \sin(n\pi(1)) \sin\left(\sqrt{(n\pi t)^2 + t}\right) = 0$$

Terbukti benar $u_t(x,0) = 0$

Lampiran 6 Pembuktian masalah nilai batas penurunan $u(x,t)$ terhadap t dan x

Turunan pertama dan kedua $u(x,t)$ terhadap t

$$u = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + 1}\right)t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + 1}\sin\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + 1}\right)t$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + 1}\right)\cos\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + 1}\right)t$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{t=0} = -\frac{2}{L^3}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + 1}\right)$$

$$\cos\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + 1}\right)(0)$$

$$= G''(t)$$

Turunan pertama dan kedua $u(x,t)$ terhadap x

$$u = \frac{2}{L}\int_0^L (x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + 1}\right)t$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)n\pi\cos\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + 1}\right)t$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2}{L^3}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)n^2\pi^2\cos\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + 1}\right)t$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{t=0} = -\frac{2}{L^3}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi(0)}{L}\right)dx \sin\left(\frac{n\pi(0)}{L}\right)n^2\pi^2$$

$$\cos\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + 1}\right)t$$

$$= F''(x)$$

Sehingga persamaan Klein Gordon $u_{tt} - u_{xx} + u = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + 1\right)\cos\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + 1}\right)t -$$

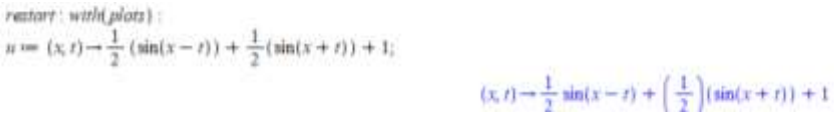
$$\left(-\frac{2}{L^3}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)n^2\pi^2\cos\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + 1}\right)t\right) +$$

$$\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + 1}\right)t = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + 1}\right)t +$$

$$\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + 1}\right)t = 0$$

Lampiran 7 Perhitungan metode *d'alembert* dengan Maple



Lampiran 8 Perhitungan metode pemisahan variabel dengan Maple

Lampiran 9 Perhitungan solusi pemisahan variabel dari variabel $F(x)$

Kasus 1. Jika $k = \alpha^2 = 0$, maka $m_1 = m_2$ dengan $m_{1,2} \in \mathbb{R}$, mengakibatkan solusi umum (4.41)

$$F(x) = d_1 x + d_2 \tag{4.64}$$

Dengan memperhatikan syarat batas $0 \leq x \leq 1$. Sehingga diperoleh

$$F(0) = d_1 x + d_2 = 0$$

$$= d_1 0 + d_2 = 0$$

$$= d_2 = 0 \tag{4.65}$$

Substitusikan persamaan (4.65) ke persamaan (4.64) dan syarat batas persamaan (4.35) yang diketahui, diperoleh

$$F(1) = d_1 x + d_2 = 0$$

$$= d_1(1) + 0 = 0$$

$$= d_1 = 0 \tag{4.66}$$

Oleh karena itu, persamaan (4.65) dan (4.66) memperoleh jika $k = 0$ maka $d_1 = d_2 = 0$ artinya $F(x)$ identik dengan nol dan kasus ini dikatakan trivial.

Kasus 2. Jika $k = -\alpha^2 < 0$ maka $m_{1,2}$ adalah akar-akar real yang berbeda, mengakibatkan solusi umum pada persamaan (4.35) yaitu

$$F(x) = d_1 \cosh x\sqrt{k-1} + d_2 \sinh x\sqrt{k-1} \tag{4.67}$$

Dengan memperhatikan syarat batas $0 \leq x \leq 1$, diperoleh

$$F(0) = d_1 \cosh x\sqrt{k-1} + d_2 \sinh x\sqrt{k-1} = 0$$

$$= d_1 \cosh(0)\sqrt{k-1} + d_2 \sinh(0)\sqrt{k-1} = 0$$

$$= d_1 = 0 \tag{4.68}$$

Substitusikan persamaan (4.68) ke persamaan (4.67) dan syarat batas persamaan (4.35) yang diketahui, diperoleh

$$F(1) = d_1 \cosh x\sqrt{k-1} + d_2 \sinh x\sqrt{k-1} = 0$$

$$= d_2 \sinh(1)\sqrt{k-1} = 0 \tag{4.69}$$

Dari persamaan (4.69) diperoleh dua kesimpulan yaitu $d_2 = 0$ atau $\sinh(1)\sqrt{k-1} = 0$. jika $d_2 \neq 0$ maka

$$\sinh(1)\sqrt{k-1} = 0$$

$$\frac{e^{x\sqrt{k-1}} - e^{-x\sqrt{k-1}}}{2} = 0 \tag{4.70}$$

Sehingga didapatkan $\sqrt{k-1}$ yang memenuhi $\sqrt{k-1} = 0$, sedangkan konstanta k harus bernilai positif, sehingga tidak ada $x\sqrt{k-1}$ positif yang memenuhi persamaan tersebut. Oleh karena itu, persamaan (4.68) dan (4.69) pada $G(t)$ dikatakan trivial karena identik dengan nol.

Lampiran 10 Perhitungan solusi pemisahan variabel dari variabel $G(t)$

Kasus 1. Jika $k = \alpha^2 = 0$, maka $m_1 = m_2$ dengan $m_{1,2} \in \mathbb{R}$, mengakibatkan solusi umum (4.54)

$$G(t) = d_1 t + d_2 \tag{4.71}$$

Dengan memperhatikan syarat batas $0 \leq x \leq 1$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} G(0) &= d_1 t + d_2 = 0 \\ &= d_1 0 + d_2 = 0 \\ &= d_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.72}$$

Substitusikan persamaan (4.72) ke persamaan (4.71) dan syarat batas persamaan (4.35) yang diketahui, diperoleh

$$\begin{aligned} G(1) &= d_1 t + d_2 = 0 \\ &= d_1(1) + 0 = 0 \\ &= d_1 = 0 \end{aligned} \tag{4.73}$$

Oleh karena itu, persamaan (4.72) dan (4.73) memperoleh jika $k = 0$ maka $d_1 = d_2 = 0$ artinya $G(t)$ identik dengan nol dan kasus ini dikatakan trivial.

Kasus 2. Jika $k = -\alpha^2 < 0$ maka $m_{1,2}$ adalah akar-akar real yang berbeda, mengakibatkan solusi umum pada persamaan (4.54) yaitu

$$G(t) \ = d_1 \cosh t\sqrt{(n\pi)^2 + 1} + d_2 \sinh t\sqrt{(n\pi)^2 + 1} \qquad (4.74)$$

Dengan memperhatikan syarat batas $0 \leq x \leq 1$, diperoleh

$$G(0) \ = d_1 \cosh t\sqrt{(n\pi)^2 + 1} + d_2 \sinh t\sqrt{(n\pi)^2 + 1} = 0$$

$$= d_1 \cosh(0)\sqrt{(n\pi)^2 + 1} + d_2 \sinh(0)\sqrt{(n\pi)^2 + 1} = 0$$

$$= d_1 = 0 \qquad (4.75)$$

Substitusikan persamaan (4.75) ke persamaan (4.74) dan syarat batas persamaan (4.35) yang diketahui, diperoleh

$$G(1) \ = d_1 \cosh t\sqrt{(n\pi)^2 + 1} + d_2 \sinh t\sqrt{(n\pi)^2 + 1} = 0$$

$$= d_2 \sinh(1)\sqrt{(n\pi)^2 + 1} = 0 \qquad (4.76)$$

Persamaan (4.76) diperoleh dua kesimpulan yaitu $d_2 = 0$ atau $\sinh(1)\sqrt{(n\pi)^2 + 1} = 0$. jika $d_2 \neq 0$ maka

$$\sinh(1)\sqrt{(n\pi)^2 + 1} = 0$$

$$\frac{e^{x\sqrt{(n\pi)^2+1}} - e^{-x\sqrt{(n\pi)^2+1}}}{2} = 0 \qquad (4.77)$$

Sehingga didapatkan $\sqrt{(n\pi)^2 + 1}$ yang memenuhi $\sqrt{(n\pi)^2 + 1} = 0$, sedangkan konstanta $\sqrt{(n\pi)^2 + 1}$ harus bernilai positif, sehingga tidak ada $t\sqrt{(n\pi)^2 + 1}$ positif yang memenuhi persamaan tersebut. Oleh karena itu, persamaan (4.75) dan (4.76) pada $G(t)$ identik dengan nol dan kasus ini dikatakan trivial.

RIWAYAT HIDUP

Aulia Rohmah, lahir di Bojonegoro pada tanggal 30 Desember 1998, bisa dipanggil Aulia. Bertempat tinggal di Panjunan, Kec. Kalitidu, Kabupaten Bojonegoro, Jawa Timur. Anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Ali Mas Udi dan Ibu Soekesi. Pendidikan yang pernah ditempuh yaitu Taman Kanak-kanak Muslimat NU pada tahun 2003-2005, kemudian melanjutkan di SDN Panjunan II pada tahun 2005-2011. Setelah itu, melanjutkan pendidikan pada tingkat menengah pertama di SMP Plus Al-Fatimah pada 2011-2014. Lalu melanjutkan pendidikan pada tingkat menengah atas di SMA Plus Al-Fatimah pada tahun 2014-2017. Pada tahun 2017 melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil program studi Matematika.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Aulia Rohmah
NIM : 17610100
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Solusi Analitik Persamaan Klein Gordon
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	24 Oktober 2022	Konsultasi Judul dan Bab I	1.
2.	25 Oktober 2022	Konsultasi Revisi Bab I	2.
3.	14 November 2022	Konsultasi Bab II dan III	3.
4.	9 Desember 2022	Konsultasi Revisi Bab II dan III	4.
5.	9 Desember 2022	Konsultasi Kajian Agama	5.
6.	10 Desember 2022	Konsultasi Revisi Kajian Agama	6.
7.	10 Desember 2022	ACC Seminar Proposal	7.
8.	22 September 2023	Konsultasi Kajian Agama	8.
9.	29 September 2023	Konsultasi Revisi Kajian Agama	9.
10.	5 Oktober 2023	Konsultasi Bab IV dan V	10.
11.	23 Oktober 2023	Konsultasi Revisi Bab IV dan V	11.
12.	23 Oktober 2023	ACC Seminar Hasil	12.
13.	28 November 2023	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	13.
14.	18 Desember 2023	Konsultasi Kajian Agama	14.
15.	22 Desember 2023	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	15.
16.	30 Desember 2023	ACC Keseluruhan	16.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

Malang, 30 Desember 2023
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005