SIFAT-SIFAT RUANG SEMINORMA-2

SKRIPSI

OLEH
CAHYA RAMADHANI AZHAR
NIM. 19610041

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

SIFAT-SIFAT RUANG SEMINORMA-2

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Cahya Ramadhani Azhar
NIM. 19610041

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

SIFAT-SIFAT RUANG SEMINORMA-2

SKRIPSI

Oleh
Cahya Ramadhani Azhar
NIM. 19610041

Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 22 Desember 2023

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Hairur Rahman, M.Si.	Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

SIFAT-SIFAT RUANG SEMINORMA-2

SKRIPSI

Oleh
Cahya Ramadhani Azhar
NIM. 19610041

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 27 Desember 2023

Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc.	....
Anggota Penguji 1	: Intan Nisfulaila, M.Si	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.	....
Anggota Penguji 3	: Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Cahya Ramadhani Azhar
NIM	:	19610041
Program Studi	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Sifat-Sifat Ruang Seminorma-2

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 Desember 2023

Cahya Ramadhani Azhar
NIM. 19610041

MOTO

“Berjalanlah lebih jauh. Di sana tidak pernah sesak.”
-Anonim-

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Seluruh keluarga penulis, khususnya kedua orang tua tersayang Ayah Hariyanto dan Almarhumah Ibu Asih yang tidak pernah lelah mendoakan dan memberikan segala dukungan baik secara spiritual maupun material untuk kelancaran dalam penulisan skripsi ini, serta tak lupa senantiasa memberikan motivasi, nasihat serta arahan dalam pengerjaan skripsi ini. Serta, adik-adik dari penulis, Chintya Dwi Azhar dan Chica Adinda Putri Azhar yang selalu memotivasi penulis agar selalu mengerjakan skripsi ini, juga tak lupa adik terkecil dari penulis yakni Setu Azhar yang InshaaAllah telah di surga-Nya. Penulis sangat menyayangi kalian semua. Diri saya sendiri, terimakasih karena tidak pernah lelah dengan setiap kegagalan yang datang, yang tidak menyerah menghadapi setiap hambatan dan ketidakpastian, yang selalu bekerja keras menyelesaikan meski terlihat mustahil, dan yang pasti berusaha tetap berjalan walaupun jalan tidak selalu mulus. Terimakasih karena tidak pantang menyerah.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur selalu kita panjatkan kepada Allah yang memberikan taufik, rahmat serta hidayat-Nya, sehingga peneliti berkesempatan menyelesaikan skripsi dengan judul "Sifat-Sifat Ruang Seminorma-2", sebagai syarat memperoleh gelar Program Strata-1 bidang matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. *Sholawat* dan salam tentunya selalu peneliti curahkan kepada Rasulullah SAW, yang telah membawa kita ke *addinul islam.*

Proses penyusunan penelitian ini tidak terlepas dari masukan serta arahan dari beberapa pihak yang telah membantu. Atas dasar hal tersebut peneliti mengucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang selalu mengarahkan serta senantiasa mendukung sehingga terselesaikannya penelitian ini.
5. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si., selaku dosen pembimbing II yang juga tidak pernah lelah selalu memberikan pemahaman kepada peneliti terkait integrasi keislaman.
6. Ibu Intan Nisfulaila, M.Si. selaku anggota penguji 1 dalam ujian skripsi yang telah memberikan saran serta arahan yang bermanfaat bagi peneliti.
7. Seluruh dosen pengajar yang telah membantu serta memberikan ilmu.
8. Keluarga inti hingga keluarga besar peneliti yang tidak lelah memberikan dukungan sehingga peneliti selalu bersemangat dalam mengerjakan penelitian ini.

9. Teman-teman seperjuangan yang tidak pernah lelah selalu berbagi kebaikan hingga semangat diantaranya, Thalya Ayunda Salsabela, Ike Diah Ayu Pratiwi dan Nanda Az-zahratun Nafisa.
10. Teman-teman dari KKM-DR~*Vacation* 2021-2022, teman-teman kelompok PKL BKP-SDM Kota Malang 2022, teman-teman seperbimbingan dan sekonsorsium analisis angkatan 2019 serta teman-teman yang keseharian berlalu-lalang, yang dengan bertemu dengan kalian semua membuat peneliti seperti me-*recharge* semangat yang ada di diri ini.
11. Seluruh mahasiswa matematika angkatan 2019 yang selalu mengajak untuk bersama-sama segera menyelesaikan skripsi.

Peneliti menyadari bahwasanya penelitian ini banyak kekurangan, maka dari itu peneliti berharap adanya saran serta kritik yang membangun agar penelitian selanjutnya dapat semakin baik. Peneliti berharap penelitian yang dihasilkan nantinya bermanfaat bagi para pembaca.

Malang, 27 Desember 2023

Peneliti

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\forall$	: Untuk setiap
$\exists$	: Terdapat
$\ni$	: Sedemikian sehingga
$\in$	: Elemen dari himpunan
$\notin$	: Bukan elemen dari himpunan
$\geq$	: Lebih dari atau sama dengan
$\leq$	: Kurang dari atau sama dengan
α	: Alpha
β	: Beta
γ	: Gamma
λ	: Lambda
$\Leftrightarrow$	: Jika dan hanya jika
$\Rightarrow$	: Pembuktian ke kanan
$\Leftarrow$	: Pembuktian ke kiri
$\subseteq$	: Himpunan bagian
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan riil
$\mathbb{C}$	: Himpunan bilangan kompleks
$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli
$\mathbb{Q}$	: Himpunan bilangan rasional
$\sum$	: Notasi Sigma (jumlah dari serangkaian bilangan)
$\lvert\cdot\rvert$	: Nilai mutlak
$d(\cdot,\cdot)$	: Metrik
$(\cdot,\cdot)$	: Hasil kali dalam
$\langle\cdot,\cdot \mid \cdot\rangle$	: Hasil kali dalam-2
$\lVert\cdot\rVert$	: Norma
$\lVert\cdot,\cdot\rVert$	: Norma-2
$p(\cdot)$	: Seminorma
$p(\cdot,\cdot)$	: Seminorma-2

ABSTRAK

Azhar, Cahya Ramadhani. 2023. **Sifat-Sifat Ruang Seminorma-2.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.

Kata Kunci: Hasil kali dalam-2, Norma-2, Seminorma-2

Misalkan X merupakan ruang vektor dengan dimensi lebih besar dari 1 dan $p: X \times X \to \mathbb{R}$. Fungsi p disebut seminorma-2 pada X jika memenuhi aksioma-aksioma pada ruang seminorma-2. Penelitian sebelumnya yang telah dilakukan oleh Malceski, dkk (2014) memaparkan bahwa terdapat salah satu contoh fungsi, yang memenuhi aksioma pada seminorma-2 dan dipaparkan lemma-lemma serta teorema-teorema pada ruang seminorma-2. Tujuan dari penelitian ini ialah membuktikan pemaparan yang dilakukan oleh Malceski, dkk. secara lebih rinci. Langkah pertama yakni dengan membuktikan bahwa contoh fungsi tersebut memenuhi definisi seminorma-2. Selanjutnya, pembuktian bahwa pada ruang seminorma-2 berlaku enam sifat. Berdasarkan pembuktian tersebut diperoleh bahwa contoh fungsi tersebut memenuhi aksioma pada seminorma-2 serta pada ruang seminorma-2 berlaku enam sifat. Penelitian ini diharapkan mampu menambah wawasan serta pengetahuan pembaca terkait seminorma-2, dan pada penelitian selanjutnya dapat diteliti pada ruang yang lain, seperti ruang seminorma-n dan ruang banach-2.

ABSTRACT

Azhar, Cahya Ramadhani. 2023. **The Properties of 2-Seminorm Space.** Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Tecnology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Ari Kusumastuti., M.Pd., M.Si.

Keywords: 2-Inner Product, 2-Norm, 2-Seminorm

Let X be a vector space with a dimension greater than 1, and $p: X \times X \to \mathbb{R}$. The function p is called a 2-seminorm on X if it satisfies the axioms of 2-seminorm space. Previous research conducted by Malceski et al. (2014) explains that there is an example of a function that satisfies the axioms of 2-seminorm and presents lemmas and theorems in the 2-seminorm space. The aim of this research is to prove the exposition made by Malceski et al. in more detail. The first step is to prove that the example function satisfies the definition of 2-seminorm. Next, to prove that six properties hold in the 2-seminorm space. Based on these proofs, it is concluded that the example function satisfies the axioms of 2-seminorm and the 2-seminorm space has six properties. This research is expected to enhance the understanding and knowledge of readers regarding 2-seminorm, and future research can explore other spaces, such as n-seminorm space and 2-banach space.

مستخلص البحث

أزهر، جهيا رمضاني. ٢٠٢٣. خصائص الفضاء شبه المعياري -٢. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا بجامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف الأول: د. خير الرحمن، الماجستير. المشرف الثاني: آري كوسوماستوتي، الماجستيرة.

الكلمات الرئيسية: المنتج في -٢، المعيار-٢، شبه المعيار -٢.

لنفترض أن X فضاء متجه بأبعاد أكبر من ١ و $p: X \times X \to \mathbb{R}.$ تسمى وظيفة p شبه المعياري -٢ على X إذا كانت تفي بالبديهيات الموجودة في الفضاء شبه المعياري -٢. أوضحت الأبحاث السابقة التي أجراها مالجسكي والأخرون (٢٠١٤) أن هناك مثالا واحدا على الوظيفة، التي تلبي البديهيات في شبه المعياري -٢ ويتم تقديمها البراهين اللميات والنظريات في الفضاء شبه المعياري -٢. الهدف من هذا البحث هو إثبات التعرض الذي قام به مالجسكي والأخرون بمزيد من التفصيل. الخطوة الأولى هي إثبات أن مثال الوظيفة يفي بتعريف شبه المعياري -٢. علاوة على ذلك، ثبت أنه في الفضاء شبه المعياري -٢ تنطبق ٦ خصائص. بناء على هذا الاثبات، تم الحصول على أن مثال الوظيفة يفي بالبديهية في شبه المعياري -٢ وفي الفضاء شبه المعياري -٢ تنطبق ٦ خصائص. من المتوقع أن يكون هذا البحث قادرا على زيادة رؤية القارئ ومعرفته المتعلقة بشبه المعياري -٢، وفي الأبحاث المستقبلية يمكن فحصها في مساحات أخرى، مثل الفضاء شبه المعياري -ن، والفضاء باناخ -٢.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis merupakan salah satu bidang yang dipelajari dalam ilmu matematika. Analisis tidak hanya didefinisikan sebagai suatu penyelidikan atau penelitian, tetapi juga merupakan suatu tindakan terencana dengan menggunakan pemikiran secara kritis sehingga dapat ditarik kesimpulan dari apa yang dikaji (Dewanto, 2022). Bidang analisis terbagi menjadi beberapa materi pembelajaran diantaranya analisis riil, teori ukuran, topologi, hingga analisis fungsional. Analisis fungsional merupakan materi penting pada analisis yang di dalamnya terdapat materi dasar analisis, seperti ruang bernorma dan ruang hasil kali dalam.

Sebelum mempelajari ruang bernorma dan ruang hasil kali dalam, terdapat materi dasar sebelum masuk ke kedua ruang tersebut, yakni ruang vektor. Ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ merupakan himpunan takkosong V yang dilengkapi dengan dua fungsi, yakni fungsi yang memetakan V x V ke V dan fungsi yang memetakan $\mathbb{F}$ x V ke V, dinotasikan oleh $x + y$ dan αx, untuk setiap α, $\beta \in \mathbb{F}$ dan $x, y, z \in V$ (Rynne & Youngson, 2008). Pada sebuah ruang vektor, himpunan vektor terdiri dari objek-objek yang disebut sebagai vektor.

Setelah memahami materi terkait ruang vektor, barulah mempelajari materi terkait ruang hasil kali dalam dan ruang bernorma. Pada ruang hasil kali dalam dapat didefinisikan norma menggunakan hasil kali dalamnya. Misal X adalah ruang vektor atas $\mathbb{F}$ maka fungsi $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ disebut norma apabila memenuhi aksioma-aksioma pada ruang bernorma (Rynne &

Youngson, 2008). Sedangkan, misalkan X merupakan ruang vektor riil maka fungsi $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ merupakan hasil kali dalam pada X apabila memenuhi aksioma-aksioma pada ruang hasil kali dalam (Rynne & Youngson, 2008).

Terdapat perumuman dari ruang bernorma, yaitu ruang seminorma. Dalam hal ini ruang bernorma memiliki sifat $\|x\| \geq 0$ jika dan hanya jika $x = 0$, sedangkan ruang seminorma tidak memiliki sifat demikian (Rynne & Youngson, 2008). Sehingga ruang seminorma merupakan perumuman dari ruang norma atau dengan kata lain ruang bernorma memiliki sifat yang lebih spesifik dari ruang seminorma. Misalkan X merupakan ruang vektor $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$, fungsi $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan seminorma pada X jika terpenuhinya dua aksioma pada ruang seminorma (Rynne & Youngson, 2008).

Pada dasarnya norma merupakan suatu seminorma yang memiliki sifat tambahan. Norma sendiri dapat didefinisikan menjadi metrik, yakni *distance* atau jarak. Sebagaimana jarak yang telah dipaparkan, terdapat jarak antara manusia dengan Khaliq-nya. Jarak antara mahluk dengan Tuhan nya didefinisikan sebagai suatu ketaqwaan yang artinya setiap manusia memiliki ketaqwaan yang tidak selalu sama. Jadi jarak antara setiap mahluk dengan Tuhan nya juga tidak selalu sama, tergantung ketaqwaan setiap masing-masing individu. Pada dasarnya, taqwa ialah perilaku serta usaha untuk melaksanakan perintah Allah dan menjauhi larangan-Nya. Serta, memiliki rasa takut kepada Allah. Taqwa bukan hanya aktifitas fisik, namun juga mencangkup isi hati, kebersihan hati dan niat. Perintah terkait taqwa juga dipaparkan pada QS. Al-Baqarah 2:21 yang artinya

"Hai manusia, beribadahlah kepada Rabb-mu Yang telah menciptakanmu dan orang-orang yang sebelummu, agar kamu bertakwa."

Berdasarkan ayat tersebut, Imam Jalaluddin Al-Mahalli dan Imam Jalaluddin As-Suyuti menafsirkan pada kitab tafsirnya sebagai berikut. (Hai manusia!) maksutnya warga Mekah, (sembahlah olehmu) dengan bertauhid atau mengesakan (Tuhanmu yang telah menciptakanmu) padahal sebelum itu, kamu dalam keadaan tiada, (dan) diciptakan-Nya pula (orang-orang yang sebelum kamu, agar kamu bertaqwa) artinya terpelihara dari siksa dan azab-Nya yakni dengan jalan beribadah kepada-Nya. Pada asalnya la-‘alla mengungkapkan harapan, tetapi pada firman Allah menyatakan kepastian. (Al-Mahalli & As-Suyuti, 1990)

Pada bab seminorma, terdapat istilah seminorma-2. Seminorma-2 merupakan analogi 2 dimensi dari suatu seminorma. Sebagaimana dengan seminorma yang memiliki aksioma-aksioma yang tidak jauh berbeda dengan norma, seminorma-2 juga memiliki aksioma-aksioma yang tidak jauh berbeda dengan norma-2. Misalkan X merupakan ruang vektor dengan dimensi lebih besar dari 1 dan $p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, maka fungsi p disebut seminorma-2 pada X jika memenuhi aksioma-aksioma pada seminorma-2 dan (X, p) merupakan ruang seminorma-2 (Malceski, dkk., 2014).

Pada penelitian sebelumnya, Malceski, dkk (2014) menulis penelitian yang berjudul “2-Semi Norms and 2-Semi Inner Product”. Dalam penelitian tersebut, telah dijelaskan sifat-sifat dari seminorma-2. Namun pada penelitian tersebut tidak dipaparkan secara detail. Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, penulis melanjutkan pembuktian-pembuktian yang belum lengkap terkait seminorma-2 dan sifat-sifat dari ruang seminorma-2. Sehingga penelitian ini berjudul “Sifat-Sifat Ruang Seminorma-2”.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah, bagaimana bukti bahwa contoh fungsi $p: X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $p\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) = \sqrt{\langle (a_1, b_1), (a_1, b_1) | (a_2, b_2) \rangle}$ untuk setiap $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X_1 \times X_2$ merupakan seminorma-2. Serta, apa saja sifat-sifat yang berlaku pada ruang seminorma-2?

1.3 Tujuan Penelitian

Untuk menunjukan bukti bahwa contoh fungsi $p: X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $p\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) = \sqrt{\langle (a_1, b_1), (a_1, b_1) | (a_2, b_2) \rangle}$ untuk setiap $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X_1 \times X_2$ merupakan seminorma-2. Serta, menunjukan sifat-sifat yang berlaku pada ruang seminorma-2.

1.4 Manfaat Penelitian

1. Manfaat bagi peneliti

   Penelitian ini menambah pemahaman mengenai topik yang dipilih serta menjadikannya sebagai sarana pengembangan pengetahuan.

2. Manfaat bagi instansi

   Penelitian ini dapat dijadikan bacaan serta menjadikannya referensi tambahan bagi program studi.

3. Manfaat bagi pembaca

   Sebagai informasi tambahan, *insight*, referensi dan wawasan mengenai ruang seminorma-2.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini yakni:

1. Ruang yang dikaji yakni pada ruang seminorma-2.
2. Kajian integrasi hanya dilandaskan pada Al-Qur’an.

1.6 Definisi Istilah

Guna menghindari pendefinisian secara ganda, peneliti memaparkan pembatasan istilah sebagaimana berikut:

1. Himpunan

   Himpunan adalah koleksi objek yang memiliki karakteristik tertentu yang jelas. Banyaknya elemen berbeda dari suatu himpunan disebut kardinalitas himpunan, yang dinotasikan dengan $n(\ldots)$ atau $|\ldots|$ (Usman, 2017).

2. Himpunan Bagian

   Misalkan A dan B himpunan. Jika untuk setiap $x \in A$, berlaku $x \in B$ (dengan kata lain, $x \in A \Rightarrow x \in B$), maka kita katakan A adalah himpunan bagian dari B yang dilambangkan dengan $A \subseteq B$.

   (Usman, 2017)

3. Matriks

   Misalkan A matriks bujur sangkar berordo $n \times n$, matriks A dinotasikan sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

4. Determinan

Determinan matriks A dengan A merupakan matriks persegi berordo $n \times n$ dinotasikan dengan $det(A)$ atau $|A|$ yang ditunjukan sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$|A| = \left(a_{11}.a_{22}.\cdots.a_{nn} + \cdots + a_{1n}.a_{21}.a_{n(n-1)}\right) - (a_{1n}.a_{2(n-1)}.\cdots a_{n1} + \cdots + a_{nn}.a_{(n-1)1}.a_{1(n-1)})$$

(Dewanto, 2022).

5. Kombinasi Linier

Suatu vektor w disebut sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$w = k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \cdots + k_nu_n$$

Di mana $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ merupakan skalar.

6. Bebas Linier

Diberikan himpunan tak kosong $S = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ dengan $v_i \in V$ untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$, himpunan S dikatakan bebas linier jika dan hanya jika koefisien $k_1, k_2, \ldots, k_n$ yang memenuhi persamaan vektor

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n = 0$$

dengan $v_1, v_2, \ldots v_n \in \mathbb{R}$, adalah $k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots k_n = 0$. Jika terdapat suatu i dengan $v_i \neq 0$, maka S merupakan himpunan bergantung linier (Anton dan Rorres, 2013).

BAB II

KAJIAN TEORI

Analisis merupakan bidang matematika yang tergolong abstrak. Diperlukan konsentrasi yang tinggi ketika mempelajari bidang ini. Terdapat pembelajaran pada analisis salah satunya adalah ruang seminorma-2.

2.1 Teori Pendukung

Pada subbab ini berisi dasar-dasar teori sebelum mengkaji ruang seminorma-2.

2.1.1 Lapangan (*Field*)

Lapangan adalah sistem bilangan riil dengan operasi penjumlahan dan perkalian

1. $a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$
3. Terdapat $0 \in \mathbb{R} \ni a + 0 = a$
4. Terdapat $-a \in \mathbb{R} \ni a + (-a) = 0$
5. $a. b = b. a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$
6. $(a. b). c = a. (b. c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$
7. Terdapat $1 \in \mathbb{R} \ni a. 1 = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$
8. Terdapat $\frac{1}{a} \in \mathbb{R} \ni a. \left(\frac{1}{a}\right) = 1 = \left(\frac{1}{a}\right). a$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$

(Anton dan Rorres, 2004)

Terdapat beberapa contoh dari lapangan diantaranya, $\mathbb{Q}$ (bilangan rasional), $\mathbb{R}$ (bilangan riil) dan $\mathbb{C}$ (bilangan kompleks). Berikut salah satunya pada bilangan kompleks yang telah di paparkan oleh Dewanto (2022) sebagaimana berikut.

Contoh 2.1

Misalkan $x, y, z \in \mathbb{C}$ dengan $x = a_1 + b_1 i, y = a_2 + b_2 i, z = a_3 + b_3 i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$. Tunjukkan $\mathbb{C}$ adalah lapangan.

Penyelesaian:

1. Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{C}$ dengan $x = a_1 + b_1 i, y = a_2 + b_2 i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

   Akan ditunjukkan $x + y = y + x$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{C}$

   $$\begin{aligned} x + y &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \\ &= (a_2 + b_2 i) + (a_1 + b_1 i) \\ &= y + x \end{aligned}$$

2. Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{C}$, dengan $x = a_1 + b_1 i , y = a_2 + b_2 i, z = a_3 + b_3 i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

   Akan ditunjukkan $(x + y) + z = x + (y + z)$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{C}$

   $$\begin{aligned} x + (y + z) &= ((a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)) + (a_3 + b_3 i) \\ &= ((a_1 + a_2 + b_1 i + b_2 i)) + (a_3 + b_3 i) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + b_1 i + b_2 i + b_3 i) \\ &= (a_1 + (a_2 + a_3) + b_1 i + (b_2 i + b_3 i)) \\ &= (a_1 + b_1 i) + ((a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i)) \\ &= x + (y + z) \end{aligned}$$

3. Ambil sebarang $x \in \mathbb{C}$, dengan $x = a_1 + b_1 i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

   Akan ditunjukkan $\exists 0 \in \mathbb{C} \ni x + 0 = x$ untuk semua $x \in \mathbb{C}$

Pilih $0 = (0 + 0i) \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
x + 0 &= (a_1 + b_1 i) + (0 + 0i) \\
&= (a_1 + 0 + b_1 i + 0i) \\
&= (a_1 + b_1 i) \\
&= x
\end{aligned}
$$

4. Ambil sebarang $x \in \mathbb{C}$, dengan $x = a_1 + b_1 i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

   Akan ditunjukkan $\exists -x \in \mathbb{C} \ni x + (-x) = 0$ untuk semua $x \in \mathbb{C}$

   Pilih $-x = (-a_1 - b_1 i) \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
x + (-x) &= (a_1 + b_1 i) + (-a_1 - b_1 i) \\
&= (a_1 + (-a_1) + b_1 i + (-b_1 i)) \\
&= (0 + 0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

5. Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{C}$, dengan $x = a_1 + b_1 i$, $y = a_2 + b_2 i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$. Akan ditunjukkan $x.y = y.x$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$
\begin{aligned}
x.y &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\
&= a_1.a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 i.b_2 i \\
&= a_2.a_1 + a_2 b_1 i + a_1 b_2 i + b_2 i.b_1 i \\
&= (a_2 + b_2 i)(a_1 + b_1 i) \\
&= y.x
\end{aligned}
$$

6. Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{C}$, dengan $x = a_1 + b_1 i$, $y = a_2 + b_2 i$, $z = a_3 + b_3 i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

   Akan ditunjukkan $(x.y).z = x.(y.z)$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{C}$

$(x.y).z \quad = ((a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i))(a_3 + b_3 i)$

$= (a_1.a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 i.b_2 i)(a_3 + b_3 i)$

$= (a_1.a_2.a_3 + a_1.a_2 b_3 i + a_1 a_3 b_2 i + a_1 b_2 i\, b_3 i +$

$a_2 a_3 b_1 i + a_2 b_1 i\, b_3 i + a_3 b_1 i.b_2 i + b_1 i.b_2 i\, b_3 i)$

$= ((a_1 + b_1 i)(a_2.a_3 + a_2 b_3 i + a_3 b_2 i + b_2 i.b_3 i))$

$= x.(y.z)$

7. Ambil sebarang $x \in \mathbb{C}$, dengan $x = a_1 + b_1 i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

   Akan ditunjukkan $\exists 1 \in \mathbb{C} \ni x.1 = x = 1.x$ untuk setiap $x \in \mathbb{C}$

   Pilih $1 = (1 + 0i) \in \mathbb{C}$

   $x.1 \quad = (a_1 + b_1 i)(1 + 0i)$

   $= (a_1.1 + a_1.0i + b_1 i.1 + b_1 i.0i)$

   $= (a_1 + b_1 i)$

   $= x$

8. Ambil sebarang $x \in \mathbb{C}$, dengan $x = a_1 + b_1 i$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

   Akan ditunjukkan $\exists 1a \in \mathbb{C} \ni x.(1\,x) = 1 = (1\,x).x$, untuk setiap $x \in \mathbb{C}$

   $x.(1\,x) \quad = a_1 + b_1 i.(1\,a_1 + b_1 i)$

   $= a_1 + b_1 i\, a_1 + b_1 i$

   $= 1$

2.1.2 Ruang Vektor

Sebelum mempelajari terkait ruang seminorma, ruang vektor merupakan ruang yang dipelajari terlebih dahulu. Ruang vektor didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1

Ruang vektor (*vector space*) atas lapangan F merupakan himpunan tak kosong X yang memiliki fungsi dari $X \times X$ ke X dan fungsi dari $F \times X$ ke X, yang masing-masing dinotasikan dengan $x + y$ dan αx, untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in F$, sedemikian sehingga untuk setiap $\alpha, \beta \in F$ dan $x, y, z \in X$ berlaku:

1. $x + y = y + x$ (komutatif penjumlahan)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asosiatif penjumlahan)
3. Terdapat elemen $0 \in X$, sedemikian sehingga berlaku $x + 0 = x$ (identitas penjumlahan)
4. Terdapat elemen $-x \in X$, sehingga berlaku $x + (-x) = 0$ (invers penjumlahan)
5. $1x = x$ (invers perkalian)
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (asosiatif perkalian)
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ dan $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (distributif perkalian)

X merupakan ruang vektor riil dan ruang vektor kompleks apabila $F = \mathbb{R}$ dan $F = \mathbb{C}$, sehingga elemen F adalah skalar dan elemen X adalah vektor. Untuk operasi $x + y$ disebut operasi penjumlahan vektor, sedangkan operasi αx disebut operasi perkalian skalar (Rynne dan Youngson, 2008).

Contoh 2.2

Misal $C_0(\mathbb{R}) = \left\{f \in C(\mathbb{R}) | \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\right\}$

Tunjukan bahwa $C_0(\mathbb{R})$ merupakan ruang vektor.

Penyelesaian:

Akan ditunjukan bahwa $C_0(\mathbb{R})$ adalah ruang vektor. Ambil sembarang $f, g, h \in C_0(\mathbb{R})$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Maka, akan ditunjukan bahwa $C_0(\mathbb{R})$ memenuhi sifat-sifat ruang vektor.

1. Akan ditunjukan bahwa $\lim_{x\to\infty}(f+g)(x) = \lim_{x\to\infty}(g+f)(x)$.

   Karena $f, g \in C_0(\mathbb{R})$, maka $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ dan $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

   Berdasarkan sifat penjumlahan limit,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(f+g)(x) &= \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)\\ &= \lim_{x\to\infty} g(x) + \lim_{x\to\infty} f(x)\\ &= \lim_{x\to\infty}(g+f)(x)\end{aligned}$$

2. Akan ditunjukan bahwa $\lim_{x\to\infty}\big((f+g)+h\big)(x) = \lim_{x\to\infty}(f+(g+h))(x)$

   Karena $f, g, h \in C_0(\mathbb{R})$, maka $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ dan $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$. Berdasarkan sifat penjumlahan limit,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\big((f+g)+h\big)(x) &= \lim_{x\to\infty}(f+g)(x) + \lim_{x\to\infty} h(x)\\ &= \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x) + \lim_{x\to\infty} h(x)\\ &= \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty}(g+h)(x)\\ &= \lim_{x\to\infty}(f+(g+h))(x)\end{aligned}$$

3. Akan ditunjukan bahwa $\exists 0 \in C_0(\mathbb{R})$ sedemikian sehingga $\lim_{x\to\infty} f(x) + 0 = 0 + \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

   Misalkan $f, l \in C_0(\mathbb{R})$ sedemikian sehingga $\lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} l(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Akibatnya, $\lim_{x\to\infty} l(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Sedemikian sehingga $\lim_{x\to\infty} f(x) + 0 = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

4. Akan ditunjukan bahwa untuk setiap $f \in C_0(\mathbb{R})$ terdapat $(-f) \in C_0(\mathbb{R})$ sedemikian sehingga $\lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty}(-f(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

5. Akan ditunjukan bahwa untuk setiap $f \in C_0(\mathbb{R})$ berlaku $1 \cdot \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

   Berdasarkan sifat perkalian skalar dengan $\alpha = 1$, diperoleh identitas $1 \cdot \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$

6. Akan ditunjukan bahwa untuk setiap $f \in C_0(\mathbb{R})$ berlaku $\lim_{x\to\infty}\big(\alpha(\beta f)\big)(x) = (\alpha\beta)\lim_{x\to\infty} f(x)$.

   Perhatikan bahwa

   $$\lim_{x\to\infty}\big(\alpha(\beta f)\big)(x) = \lim_{x\to\infty}(\alpha\beta)f(x) = (\alpha\beta)\lim_{x\to\infty} f(x)$$

7. Akan ditunjukan bahwa untuk setiap $f \in C_0(\mathbb{R})$ berlaku $\lim_{x\to\infty}\big((\alpha + \beta)f\big)(x) = \alpha\lim_{x\to\infty} f(x) + \beta\lim_{x\to\infty} f(x)$.

   Perhatikan bahwa

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\big((\alpha+\beta)f\big)(x) &= \lim_{x\to\infty}(\alpha+\beta)f(x) \\ &= (\alpha+\beta)\lim_{x\to\infty} f(x)\end{aligned}$$

$$= \alpha \lim_{x\to\infty} f(x) + \beta \lim_{x\to\infty} f(x)$$

Dikarenakan semua sifat pada ruang vektor terpenuhi, maka $C_0(\mathbb{R})$ adalah ruang vektor. ■

Definisi 2.2

Misalkan W adalah himpunan bagian tak kosong dari suatu ruang vektor V dan W disebut sub ruang vektor dari V apabila memenuhi syarat-syarat berikut ini

1. Untuk setiap $a, b \in W$, maka $a + b \in W$
2. Untuk setiap $a \in W$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka $\alpha a \in W$

(Rainarli & Dewi, 2011)

2.1.3 Ruang Metrik

Ruang metrik merupakan himpunan berbagai titik yang setiap titik tersebut memiliki jarak satu sama lain (Fitria, 2012). Ruang metrik didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.3

Fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut metrik pada himpunan takkosong X jika untuk setiap $x, y, z \in X$ apabila memenuhi syarat-syarat sebagaimana berikut.

1. $d(x,y) \geq 0$;
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $d(x,y) = d(y,x)$;
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Pertidaksamaan Segitiga)

Pasangan terurut ruang vektor X dengan metrik d atau dituliskan (X, d) disebut sebagai ruang metrik. (Rynne dan Youngson, 2008).

Contoh 2.3

Diketahui ruang metrik $(X, d) = (\mathbb{R}, d)$ dengan $d(f, g) = |f - g|$, untuk setiap $f, g, h \in \mathbb{R}$. Tunjukan bahwa (X, d) adalah ruang metrik.

Penyelesaian:

1. Akan ditunjukan bahwa $d(f, g) \geq 0$

   $d(f, g) \in \mathbb{R}, d(f, g) < \infty, d(f, g) \geq 0$ (sifat nilai mutlak)

   Terbukti bahwa $d(f, g) \geq 0$.

2. Akan ditunjukan bahwa $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$

   $(\Rightarrow)$ Diketahui $d(f, g) = 0$

   $$|g - f| = 0$$
   $$g - f = 0$$
   $$f = g$$

   $(\Leftarrow)$ Diketahui $f = g$

   $$\begin{aligned} d(f, g) &= d(f, f) \\ &= |f - f| \\ &= |0| \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Terbukti bahwa $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$

3. Akan ditunjukan bahwa $d(f, g) = d(g, f)$

   Perhatikan bahwa

   $$d(f, g) = |g - f|$$

$= |f - g|$ (sifat nilai mutlak)

$= d(g, f)$

Terbukti bahwa $d(f, g) = d(g, f)$

4. Akan dibuktikan bahwa $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$

$d(f, h) \quad = |h - f|$

$= |h - g + g - f|$

$\leq |h - g| + |g - f|$

$= |g - f| + |h - g|$ (sifat komutatif)

$= d(f, g) + d(g, h)$

$d(f, h) \quad \leq \ d(f, g) + d(g, h)$

Terbukti bahwa $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$

Berdasarkan pembuktian di atas, dapat disimpulkan bahwa d adalah metrik di $\mathbb{R}$ dan $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik. ■

2.1.4 Ruang Hasil Kali Dalam

Ruang hasil kali dalam dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.4

Misalkan X merupakan ruang vektor riil. Fungsi $(\cdot,\cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ merupakan hasil kali dalam pada X apabila memenuhi:

1. $(x, x) \geq 0$
2. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $(\alpha x + \beta y,\ z) = \ \alpha(x, z) + \beta(y, z)$
4. $(x, y) = (y, x)$ (Rynne dan Youngson, 2008).

Ruang vektor riil atau kompleks pada X yang dilengkapi hasil kali dalam $(X, (\cdot,\cdot))$ dikatakan sebagai ruang hasil kali dalam (Rynne dan Youngson, 2008).

Contoh 2.4

Misal $x = (x_1,\ x_2),\ y = (y_1,\ y_2)$ adalah vektor-vektor pada $\mathbb{R}^2$. Tunjukan bahwa $(x, y)\ =\ x_1 y_1 + x_2 y_2$ adalah hasil kali dalam.

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa (x, y) memenuhi keempat aksioma ruang hasil kali dalam.

1. $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$

   $= y_1 x_1 + y_2 x_1$

   $= (y, x)$

2. Jika $u = (u_1, u_2)$, maka

   $(x + y, u) = (x_1 + y_1)u_1 + (x_2 + y_2)u_2$

   $= x_1 u_1 + y_1 u_1 + x_2 u_2 + y_2 u_2$

   $= (x_1 u_1 + x_2 u_2) + (y_1 u_1 + y_2 u_2)$

   $= (x, u) + (y, u)$

3. $(kx, y) = kx_1 y_1 + kx_2 y_2$

   $= k(y_1 x_1 + y_2 x_1)$

   $= k(x, y)$

4. $(y, y) = y_1 y_1 + y_2 y_2$

   $= {y_1}^2 + {y_2}^2$

   ≥ 0

   dan

   $(y, y) = {y_1}^2 + {y_2}^2$ jika dan hanya jika $y_1 = y_2 = 0$ atau $y = 0$

Berdasarkan pembuktian di atas, maka dapat disimpulkan bahwa $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ adalah ruang hasil kali dalam. ∎

2.1.5 Ruang Hasil Kali Dalam-2

Suatu ruang dikatakan sebagai ruang hasil kali dalam-2 apabila definisi berikut terpenuhi.

Definisi 2.5

Misalkan X merupakan ruang vektor berdimensi lebih besar dari 1 pada lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$). Jika terdapat pemetaan $\langle \cdot, \cdot \mid \cdot \rangle : X \times X \times X \to \mathbb{F}$ yang memenuhi kondisi berikut:

1. $\langle a, a|b \rangle \geq 0$ untuk setiap $a, b \in X$ dan $\langle a, a|b \rangle = 0$ jika dan hanya jika a dan b bergantung linier;
2. $\langle a, b|c \rangle = \langle b, a|c \rangle$, untuk setiap $a, b, c \in X$;
3. $\langle a, a|b \rangle = \langle b, b|a \rangle$, untuk setiap $a, b \in X$;
4. $\langle \alpha a, b|c \rangle = \alpha \langle a, b|c \rangle$, untuk setiap $a, b, c \in X$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{F}$;
5. $\langle a + a_1, b|c \rangle = \langle a, b|c \rangle + \langle a_1, b|c \rangle$, untuk setiap $a, a_1 b, c \in X$.

Maka pemetaan $\langle \cdot, \cdot \mid \cdot \rangle$ disebut hasil kali dalam-2 pada X dan pasangan $(X, \langle \cdot, \cdot \mid \cdot \rangle)$ disebut ruang hasil kali dalam-2 (Dastourian & Janfada, 2018).

2.1.6 Ruang Bernorma

Definisi ruang bernorma diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.6

Misal X adalah ruang vektor atas $\mathbb{F}$. Fungsi $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ disebut norma apabila memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. $\|x\| \geq 0$,
2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$,
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Rynne dan Youngson, 2008).

Ruang vektor bernorma (ruang bernorma) merupakan vektor X yang dilengkapi dengan suatu norma atau dapat ditulis $(X, \|\cdot\|\ )$ (Rynne dan Youngson, 2008).

Contoh 2.5

Misal $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Tunjukan bahwa fungsi berikut merupakan norma.

$\|x\| = |x_1| + |x_2|$.

Penyelesaian:

Akan dibuktikan $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ merupakan norma.

1. Ambil sebarang $x \in X$, maka berdasarkan definisi fungsi $\|x\|$,

   $\|x\| \geq 0$ (berdasarkan sifat nilai mutlak)

   Terpenuhi $\|x\| \geq 0$.

2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

   Bukti:

   $(\Rightarrow) \|x\| \quad = |x_1| + |x_2|$

   $0 \quad = |x_1| + |x_2|$

   $|x_1| = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$

   $|x_2| = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$

   Sehingga diperoleh bahwa $x = 0$

   $(\Leftarrow)\ \|x\| \quad = |x_1| + |x_2|$

   $\|x\| \quad = |0| + |0|$

$\|x\| \quad = 0 + 0$

$\|x\| \quad = 0$

Sehingga diperoleh bahwa $\|x\| = 0$

Berdasarkan bukti dua arah, maka terpenuhi bahwa $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

Bukti:

$\|\alpha x\| \quad = (|\alpha x|_1 + |\alpha x|_2)$

$= |\alpha||x_1| + |\alpha||x_2|$

$= |\alpha|(|x_1| + |x_2|)$

$= |\alpha|\|x\|$

Terpenuhi bahwa $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Bukti:

Ambil sembarang $x, y \in \mathbb{R}^2$ dengan $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ dengan $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, maka

$\|x + y\| \quad = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2|$

$\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|$

$= (|x_1| + |y_1|) + (|x_2| + |y_2|)$

$= \|x\| + \|y\|$

Terpenuhi bahwa $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dikarenakan seluruh aksioma pada definisi 2.5 terpenuhi, maka terbukti bahwa $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ merupakan norma.

Terdapat kaitan antara hasil kali dalam dengan norma sebagaimana yang dipaparkan pada definisi 2.7 berikut.

Definisi 2.7

Untuk ruang hasil kali dalam $(X, (\cdot,\cdot))$ didefinisikan fungsi $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ pada X sebagaimana berikut

$$\|a\| = (a, a)^{1/2}$$

untuk setiap $a \in X$ (Debnath dan Mikusinski, 2003).

Contoh 2.6

Diketahui ruang hasil kali dalam X dengan x dan y merupakan vektor, di mana $x = (1,0), y = (2,1) \in X$ dan hasil kali dalam $(x, y) = 3x_1y_1 + 5x_2y_2$ untuk $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$. Tentukan norma dari vektor x dan vektor y.

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{(x, x)} \\ &= \sqrt{(3.1.1 + 5.0.0)} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \|y\| &= \sqrt{(y, y)} \\ &= \sqrt{(3.2.2 + 5.1.1)} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

Kemudian, Gunawan, dkk (2005) dalam Insani (2022) memaparkan sebagaimana berikut,

Teorema 2.1

Diberikan X ruang hasil kali dalam atas lapangan $\mathbb{R}$. Untuk setiap $x, y \in X$, $\|x, y\|$ didefinisikan sebagai berikut

$$\|x, y\| = \begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{vmatrix}^{1/2}$$

merupakan norma-2.

Bukti:

Untuk membuktikan sifat 1), 2), dan 3) cukup dengan menggunakan Teorema 2.1 dan diperoleh solusi trivial, dan untuk sifat 4) dibuktikan dengan menggunakan ketaksamaan segitiga dan teorema 2.1. Sehingga, pemetaan $\|x, y\|$ merupakan norma-2.

Teorema 2.2 Ketaksamaan Segitiga

$|x + y| \leq |x| + |y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ (Usman, 2017).

Bukti:

Kita tahu bahwa $-|x| \leq x \leq |x|$ dan $-|y| \leq y \leq |y|$ sehingga

$$(-|x|) + (-|y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

Dikarenakan untuk setiap $c \geq 0$, berlaku $|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$. Maka berlaku $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Definisi 2.8

Misalkan $u > 1$. Kemudian bentuk diskrit dan integral dari ketaksamaan Minkowski diberikan dengan

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^u\right)^{1/u} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^u\right)^{1/u} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^u\right)^{1/u}$$

Untuk barisan a_i dan b_i dan

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^u dt\right)^{1/u} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^u dt\right)^{1/u} + \left(\int_a^b |g(t)|^u dt\right)^{1/u}$$

Untuk fungsi kontinu f dan g di $[a,b]$ (Hutnik, 2000).

Lemma 2.1

Untuk $1 \leq p < \infty$ dan setiap $a, b > 0$

$$\inf_{0<t<1}[t^{1-p}a^p + (1-t)^{1-p}b^p] = (a+b)^p$$

(Maligranda, 1995)

Bukti:

Misalkan, untuk setiap $0 < t < 1$, fungsi f didefinisikan sebagai berikut

$$f(t) = t^{1-p}a^p + (1-t)^{1-p}b^p$$

Maka turunan dari f' memenuhi

$$f'(t) = (1-p)t^{-p}a^p - (1-p)(1-t)^{-p}b^p = 0$$

hanya saat $t = t_1 = \frac{a}{a+b}$. Jika,

$$f''(t) = (1-p)(-p){t_1}^{-p-1}a^p - (1-p)(-p)(1-t_1)^{-p-1}b^p > 0$$

Hal tersebut menunjukan bahwa f memiliki lokal minimum pada $t_1 = \frac{a}{a+b}$, yang artinya

$$f(t_1) = f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{1-p} a^p + \left(1-\left(\frac{a}{a+b}\right)\right)^{1-p} b^p$$

$$= \left(\frac{a}{a+b}\right)^{1-p} a^p + \left(\frac{b}{a+b}\right)^{1-p} b^p$$

$$= (a+b)^p$$

lokal minimum pada fungsi f sama dengan global minimum karena f kontinu pada $(0,1)$ dan $\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{t\to 1^-} g(t) = +\infty$

Preposisi 2.1

Ketaksamaan Minkowski Klasik dinyatakan dengan:

misalkan $1 \le p < \infty$. Jika $x, y \in L^p(\mu)$ maka $x + y \in L^p$ dan

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

(Maligranda, 1995).

Bukti:

Dengan menggunakan ketaksamaan pada Lemma 2.1, yakni

$$t^{1-p}a^p + (1-t)^{1-p}b^p \ge (a+b)^p$$

Kita menemukan untuk setiap , $0 < t < 1$,

$$\|x+y\|_p^p = \int_\Omega |x(s)+y(s)|^p d\mu(s)$$

$$\le \int_\Omega (|x(s)|+|y(s)|)^p d\mu(s)$$

$$\le \int_\Omega t^{1-p}|x(s)|^p + (1-t)^{1-p}|y(s)|^p d\mu(s)$$

$$= t^{1-p}\int_\Omega |x(s)|^p d\mu(s) + (1-t)^{1-p}\int_\Omega |y(s)|^p d\mu(s)$$

$$= t^{1-p}\|x\|_p + (1-t)^{1-p}\|y\|_p$$

Dengan infimum atas $0 < t < 1$ dan menggunakan lemma 2.1, diperoleh

$$\|x+y\|_p^p \le \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)^p$$

2.1.7 Ruang Bernorma-2

Gahler (1964) dalam Kundu, dkk (2019) mendefinisikan ruang bernorma-2 sebagaimana Definisi 2.9 berikut.

Definisi 2.9

Misalkan X ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$ dimensi lebih besar atau sama dengan 2. Suatu fungsi $\|\cdot,\cdot\|: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut norma-2 pada X jika memenuhi:

1. $\|x, y\| \geq 0$, untuk setiap $x, y \in X \times X$ dan $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika himpunan $\{x, y\}$ bergantung linier;
2. $\|x, y\| = \|y, x\|$, untuk setiap $x, y \in X \times X$;
3. $\|\alpha x, y\| = |\alpha|\|x, y\|$, untuk setiap $x, y \in X \times X$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$, untuk setiap $x, y, z \in X \times X$

Pasangan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ disebut ruang bernorma-2.

Berikut keterkaitan antara norma-2 dengan hasil kali dalam-2, yang juga merupakan analogi dari Definisi 2.6.

Definisi 2.10

Untuk ruang hasil kali dalam-2 $(X, \langle\cdot,\cdot \mid \cdot\rangle)$ didefinisikan fungsi $\|\cdot,\cdot\|: X \times X \to \mathbb{R}$ sebagai berikut

$$\|a, b\| = \langle a, a|b\rangle^{1/2}$$

untuk setiap $a, b \in X$ (Dastourian & Janfada, 2018).

Contoh 2.8

Diketahui x dan y merupakan vektor di $\mathbb{R}^2$ dengan $x = (1,0)$ dan $y = (2,1)$. Perhatikan bahwa $(\mathbb{R}^2, (\cdot,\cdot))$ merupakan ruang hasil kali dalam dengan hasil kali dalamnya didefinisikan oleh:

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2, \text{ untuk setiap } x, y \in \mathbb{R}^2$$

dengan $(\mathbb{R}^2, \|\cdot,\cdot\|)$ merupakan ruang norma-2.

Perhatikan bahwa $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot \mid \cdot\rangle)$ merupakan ruang hasil kali dalam-2 dengan hasil kali dalam-2 yang didefinisikan sebagai:

$$\langle x, x|y\rangle = \begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{vmatrix}$$

Tentukan $\|x, y\|$.

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\|x, y\| &= \langle x, x|y\rangle^{1/2} && \text{(Definisi 2.8)} \\
&= \begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{vmatrix}^{1/2} && \text{(Diketahui)} \\
&= \begin{vmatrix} (x_1{}^2 + x_2{}^2) & (x_1y_1 + x_2y_2) \\ (y_1x_1 + y_2x_2) & (y_1{}^2 + y_2{}^2) \end{vmatrix}^{1/2} \\
&= \begin{vmatrix} (1^2 + 0^2) & (1.2 + 0.1) \\ (2.1 + 1.0) & (2^2 + 1^2) \end{vmatrix}^{1/2} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}^{1/2} \\
&= (5 - 4)^{1/2} \\
&= 1^{1/2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

2.1.8 Ruang Seminorma

Ruang seminorma memiliki sifat-sifat yang hampir serupa dengan ruang bernorma. Ruang seminorma didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.11

Misalkan X merupakan ruang vektor riil atau kompleks. Fungsi $p: X \to \mathbb{R}$ dikatakan seminorma pada X jika terpenuhinya aksioma-aksioma berikut (Rynne dan Youngson, 2008).

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y), x, y \in X$
2. $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x), x \in X\,, \alpha \in \mathbb{F}$.

Contoh 2.9

Tunjukan bahwa $p(x) = \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right|$ merupakan seminorma pada ruang vektor $\mathbb{C}$ untuk semua barisan $x = (x_n)$, $\forall x, y \in X$.

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa $p(x)$ merupakan ruang seminorma.

1. Akan dibuktikan bahwa $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

   Misal $x = (x_n)$ dan $y = (y_n)$

   Maka diperoleh,

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \left|\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n)\right| \\ &= \left|\lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n\right| \\ &\leq \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right| + \left|\lim_{n\to\infty} y_n\right| \\ &= p(x) + p(y) \end{aligned}$$

2. Akan dibuktikan bahwa $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$

Perhatikan bahwa $x = (x_n)$ maka $\alpha x = (\alpha x_n)$

Sedemikian sehingga

$$p(\alpha x) = \left|\lim_{n\to\infty} \alpha x_n\right|$$

$$= \left|\alpha \lim_{n\to\infty} x_n\right|$$

$$= \alpha \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right|$$

$$= \alpha\, p(x)$$

Sehingga terbukti bahwa $p(x)$ merupakan ruang seminorma.

2.1.9 Ruang Seminorma-2

Ruang seminorma-2 juga merupakan suatu ruang yang memiliki sifat-sifat yang hampir serupa dengan sifat-sifat pada ruang bernorma-2. Berikut definisi dari ruang seminorma-2.

Definisi 2.12

Misalkan X merupakan ruang vektor dengan dimensi lebih besar dari 1 dan

$p: X \times X \to \mathbb{R}$. Fungsi p disebut seminorma-2 pada X jika memenuhi:

1. Jika $a, b \in X$ bergantung linier maka $p(a, b) = 0$,
2. $p(a, b) = p(b, a)$, untuk setiap $a, b \in X$,
3. $p(\alpha a, b) = |\alpha| p(a, b)$, untuk setiap $a, b \in X$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$,
4. $p(a + b, c) \leq p(a, c) + p(b, c)$, untuk setiap $a, b, c \in X$.

Pasangan (X, p) disebut ruang seminorma-2 (Malceski & Malceski, 1997).

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an

Pada bab 1 telah dipaparkan bahwa tingkat ketaqwaan setiap mahluk dengan Tuhan-nya dapat didefinisikan sebagai jarak dengan Tuhan-Nya. Jika tingkat ketaqwaan nya semakin tinggi, maka semakin dekat pula ia dengan Sang Khaliq. Namun, tidak terdapat cara khusus untuk mengukur tingkat ketaqwaan setiap individu, karena ketaqwaan bersifat internal. Sehingga, hanya individu itu sendiri yang benar-benar mengetahui tingkat ketaqwaan dirinya sendiri secara mendalam. Hal tersebut dapat dilakukan dengan introspeksi diri, evaluasi diri, bertaubat dan memperbaiki diri di hadapan Allah.

Ciri-ciri dari individu yang bertaqwa tercermin dari perilaku dan tindakan sehari-hari. Ketaqwaan seseorang juga terlihat dari cara seseorang tersebut berinteraksi dengan sesama. Berikut beberapa ciri-ciri/kriteria orang yang bertaqwa yang disebutkan didalam Al Qur'an,

a. Ali Imran Ayat 76, Barangsiapa menepati janjinya, maka Tuhan menyukai orang-orang yang bertaqwa.
b. Al Maidah Ayat 8, Tegakkanlah keadilan, karena adil itu lebih dekat kepada taqwa.
c. Al Baqarah ayat 273, Kalau kamu memaafkan, maaf itu lebih dekat kepada taqwa.
d. At Taubah ayat 7, Selama mereka bersifat lurus kepadamu, hendaklah kamu bersikap teguh hati (istiqamah) kepada mereka, sesungguhnya Tuhan itu menyukai orang-orang yang taqwa.

e. Ali Imran ayat 200, Hai orang-orang yang beriman, bersabarlah kamu, dan kuatkanlah kesabaranmu dan tetap bersiap siaga, dan bertaqwalah kepada Allah, supaya kamu beruntung.

(Kartini, 2012)

Kemudian, terdapat efek atau dampak bagi seseorang yang telah bertaqwa kepada Allah. Dampak dari taqwa telah di jelaskan pada Q.S At-Thalaq ayat 2 dan ayat 4. Berikut arti dari kedua ayat tersebut,

Q.S At-Thalaq ayat 2

"Barang siapa bertakwa kepada Allah niscaya dia akan mengadakan baginya jalan keluar."

Q.S At-Thalaq ayat 4

"Dan barang siapa yang bertakwa kepada Allah, niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya."

Seorang pemimpin dunia, Mahatma Gandi, telah mengalami kehidupan yang berat pada masanya. Ia pernah berkata bahwa "kalau tidaklah karena kepercayaan, sudah lama saya hancur" (Kartini, 2012). Sehingga, dengan kata lain agama merupakan hal yang sangat diperlukan. Persoalan-persoalan dunia dapat dipecahkan dengan adanya agama. Sebagaimana janji Allah pada Q.S At-Thalaq ayat 2 dan 4 tersebut bahwa dengan kita bertaqwa maka selalu terdapat jalan keluar dan urusan dipermudah. Dengan demikian, jika dirasa belum menemukan solusi dari suatu persoalan dunia, mungkin ketaqwaan dari individu tersebut perlu di tambah.

2.3 Kajian Sifat-Sifat pada Ruang Seminorma-2

Berikut contoh fungsi seminorma-2 yakni $p: X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$p\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) = \sqrt{\langle (a_1, b_1), (a_1, b_1) | (a_2, b_2) \rangle}$$

untuk setiap $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X_1 \times X_2$ memenuhi kondisi *1)* sampai *4)* definisi seminorma-2 (Malceski, dkk., 2014).

Malceski, dkk., (2014) juga telah memaparkan beberapa lemma dan teorema yang memenuhi ruang seminorma-2 sebagaimana berikut,

Lemma 2.3.1

Misalkan (X, p) adalah ruang seminorma-2. Maka,

$p(a, b) = p(a + \lambda b, b)$, untuk setiap $a, b \in X$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$

Lemma 2.3.2

Misalkan (X, p) adalah ruang seminorma-2. Maka,

$p(\alpha a + \beta b, \gamma a + \delta b) = |\alpha\delta - \beta\gamma| p(a, b)$ untuk setiap $a, b \in X$ dan $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

Lemma 2.3.3

Misalkan (X, p) adalah ruang seminorma-2. Maka, untuk setiap $\alpha \in X$ fungsi $p_1(x) = p(x, a)$, untuk setiap $x \in X$ merupakan seminorma pada X.

Teorema 2.3.1

Misalkan (X, p) adalah ruang seminorma-2. Maka,

$|p(a, c) - p(b, c)| \leq p(a - b, c)$, untuk setiap $a, b, c \in X$

Teorema 2.3.2

Misalkan (X, p) adalah ruang seminorma-2. Maka,

$p(a, b) \geq 0$, untuk setiap $a, b \in X$

Teorema 2.3.3

Misalkan (X, p) adalah ruang seminorma-2. Maka, untuk setiap $a \in X$ himpunan $\{x | p(x, a) = 0\}$ merupakan subruang dari X.

Contoh 2.3.2

Misalkan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ merupakan ruang norma-2, $1 \leq \alpha < \infty$ dan $l^{\alpha}(X)$ menunjukan himpunan semua barisan $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}, a_i \in L, i = 1,2,3, \ldots$ sedemikian sehingga

$$p(a,b) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i, b_i\|^{\alpha}\right)^{1/\alpha} < \infty$$

untuk setiap $a, b \in l^{\alpha}(X)$. p merupakan seminorma-2 namun bukan norma-2.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur. Penelitian ini dilakukan diantaranya yakni pengumpulan data kepustakaan, analisis topik melalui pembacaan dan pemahaman, dan pengolahan bahan penelitian. Pengumpulan data kapustakaan dapat dilakukan diantaranya dengan mengumpulkan buku, jurnal serta artikel agar informasi yang diperoleh semakin lengkap.

3.2 Pra Penelitian

Tahapan pertama yang perlu dilakukan ialah dengan mengumpulkan sumber-sumber yang relevan dengan topik. Berikut penelitian terdahulu yang dipergunakan pada penelitian ini diantaranya: Malceski, dkk (2014) yang berjudul "2-Semi Norm and 2-Semi Inner Product" dan Malcheski, dkk. (1997) yang berjudul "n-Seminormed Space". Penelitian yang berjudul "2-Semi Norm and 2-Semi Inner Product" dijadikan acuan utama oleh peneliti. Terdapat penelitian lain yang digunakan peneliti sebagai pedoman dalam tata cara membuktikan yakni, Insani (2022).

3.3 Tahapan Penelitian

Langkah-langkah yang dapat dilakukan untuk membuktikan sifat-sifat ruang seminorma-2 adalah sebagai berikut:

1. Memaparkan definisi seminorma-2.

2. Memaparkan seminorma-2 yang didefinisikan dalam bentuk pre-hilbert-2.
3. Membuktikan pemetaan $p\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big)$ memenuhi definisi seminorma-2.
4. Membuktikan lemma-lemma dan teorema-teorema yang memenuhi pada ruang seminorma-2 menggunakan penjelasan pada kajian teori.
5. Membuktikan bahwa terdapat contoh seminorma-2 yang bukan merupakan norma-2.
6. Mengkaji penerapan integrasi topik dengan Al-Qur’an.

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dipaparkan definisi terkait seminorma-2, diantaranya hasil kali dalam, hasil kali dalam-2, norma-2, kaitan antara norma-2 dan hasil kali dalam-2 dan teorema yang terlibat. Kemudian, dilakukan pembuktian bahwa contoh fungsi $p: X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ di mana X merupakan ruang vektor yang didefinisikan oleh $p\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) = \sqrt{\langle (a_1, b_1), (a_1, b_1) | (a_2, b_2) \rangle}$ untuk setiap $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X_1 \times X_2$ memenuhi kondisi *1)* sampai *4)* definisi seminorma-2, di mana $\langle \cdot, \cdot \mid \cdot \rangle$ merupakan hasil kali dalam-2. Selanjutnya, dibuktikan sifat-sifat yang berlaku pada ruang seminorma-2. Dan, terakhir dipaparkan contoh seminorma-2 yang bukan norma-2.

Definisi 4.1

Misalkan X merupakan ruang vektor riil. Fungsi $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ merupakan hasil kali dalam pada X apabila memenuhi:

1. $(x, x) \geq 0$
2. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $(\alpha x + \beta y,\ z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$
4. $(x, y) = (y, x)$ (Rynne dan Youngson, 2008).

Ruang vektor riil atau kompleks pada X yang dilengkapi hasil kali dalam $(X, (\cdot,\cdot))$ dikatakan sebagai ruang hasil kali dalam (Rynne dan Youngson, 2008).

Definisi 4.2

Misalkan X merupakan ruang vektor berdimensi lebih besar dari 1 pada lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$). Jika terdapat pemetaan $\langle \cdot,\cdot \mid \cdot \rangle : X \times X \times X \rightarrow \mathbb{F}$ yang memenuhi kondisi berikut:

1. $\langle a, a|b \rangle \geq 0$ untuk setiap $a, b \in X$ dan $\langle a, a|b \rangle = 0$ jika dan hanya jika a dan b bergantung linier;
2. $\langle a, b|c \rangle = \langle b, a|c \rangle$, untuk setiap $a, b, c \in X$;
3. $\langle a, a|b \rangle = \langle b, b|a \rangle$, untuk setiap $a, b \in X$;
4. $\langle \alpha a, b|c \rangle = \alpha \langle a, b|c \rangle$, untuk setiap $a, b, c \in X$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{F}$;
5. $\langle a + a_1, b|c \rangle = \langle a, b|c \rangle + \langle a_1, b|c \rangle$, untuk setiap $a, a_1 b, c \in X$.

Maka pemetaan $\langle \cdot,\cdot \mid \cdot \rangle$ disebut hasil kali dalam-2 pada X dan pasangan $(X, \langle \cdot,\cdot \mid \cdot \rangle)$ disebut ruang hasil kali dalam-2 (Dastourian & Janfada, 2018).

Gahler (1964) dalam Kundu, dkk (2019) mendefinisikan ruang bernorma-2 sebagaimana Definisi berikut.

Definisi 4.3

Misalkan X ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$ dimensi lebih besar atau sama dengan 2. Suatu fungsi $\|\cdot,\cdot\| : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ disebut norma-2 pada X jika memenuhi:

1. $\|x, y\| \geq 0$, untuk setiap $x, y \in X \times X$ dan $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika himpunan $\{x, y\}$ bergantung linier;
2. $\|x, y\| = \|y, x\|$, untuk setiap $x, y \in X \times X$;
3. $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|$, untuk setiap $x, y \in X \times X$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$, untuk setiap $x, y, z \in X \times X$

Pasangan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ disebut ruang bernorma-2.

Definisi 4.4

Untuk ruang hasil kali dalam-2 $(X, \langle \cdot,\cdot \mid \cdot \rangle)$ didefinisikan fungsi $\|\cdot,\cdot\|: X \times X \to \mathbb{R}$ sebagai berikut

$$\|a, b\| = \langle a, a|b \rangle^{1/2}$$

untuk setiap $a, b \in X$ (Dastourian & Janfada, 2018).

4.1 Seminorma-2

Malceski, dkk., (2014) menjelaskan terkait seminorma-2 sebagaimana berikut. Jika $(X_1, (\cdot,\cdot)_1)$ dan $(X_2, (\cdot,\cdot)_2)$ merupakan ruang hasil kali dalam, maka

$$\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) = (a_1, a_2)_1 + (b_1, b_2)_2$$

untuk setiap $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X_1 \times X_2$ mendefinisikan hasil kali dalam, maka $X_1 \times X_2$ adalah ruang hasil kali dalam, yaitu ruang norma dengan norma yang didefinisikan oleh

$$\|(a, b)\| = \sqrt{(a_1, a_2)_1 + (b_1, b_2)_2}, \text{ untuk setiap } (a, b) \in X_1 \times X_2$$

Tapi, jika $(X_1, (\cdot,\cdot \mid \cdot)_1)$ dan $(X_2, (\cdot,\cdot \mid \cdot)_2)$ merupakan ruang hasil kali dalam-2, maka

$$\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) | (a_3, b_3) \rangle = (a_1, a_2|a_3)_1 + (b_1, b_2|b_3)_2 \qquad (4.1)$$

untuk setiap $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in X_1 \times X_2$, namun tidak mendefinisikan hasil kali dalam-2 pada $X_1 \times X_2$. Mudah diperiksa bahwa fungsi (4.1) mendefinisikan fungsi real pada $(X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2)$ yang memenuhi aksioma 2), 3), 4) dan 5) pada hasil kali dalam-2, namun tidak terpenuhi pada aksioma 1), yakni $\{a, b\}$ bergantung linear jika dan hanya jika $\langle a, a|b \rangle = 0$. Berikut buktinya:

Perhatikan bahwa jika (a_1, b_1) dan (a_2, b_2) bergantung linear maka $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$(a_1, b_1) = \alpha(a_2, b_2) = (\alpha a_2, \alpha b_2)$$

artinya $a_1 = \alpha a_2$, $b_1 = \alpha b_2$ yakni a_1 dan a_2 bergantung linear pada X_1, dan b_1 dan b_2 bergantung linear pada X_2. Maka,

$$\begin{aligned}
\langle (a_1, b_1), (a_1, b_1) | (a_2, b_2) \rangle &= (a_1, a_1 | a_2) + (b_1, b_1 | b_2) \\
&= \|a_1, a_2\|^2 + \|b_1, b_2\|^2 \\
&= \left(\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) \end{vmatrix}^{1/2} \right)^2 \\
&\quad + \left(\begin{vmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, b_2) \\ (b_2, b_1) & (b_2, b_2) \end{vmatrix}^{1/2} \right)^2 \\
&= \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, b_2) \\ (b_2, b_1) & (b_2, b_2) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (\alpha a_2, \alpha a_2) & (\alpha a_2, a_2) \\ (a_2, \alpha a_2) & (a_2, a_2) \end{vmatrix} + \\
&\quad \begin{vmatrix} (\alpha b_2, \alpha b_2) & (\alpha b_2, b_2) \\ (b_2, \alpha b_2) & (b_2, b_2) \end{vmatrix} \\
&= \big((\alpha a_2, \alpha a_2)(a_2, a_2) - (\alpha a_2, a_2)(a_2, \alpha a_2) \big) \\
&\quad + \big((\alpha b_2, \alpha b_2)(b_2, b_2) - (\alpha b_2, b_2)(b_2, \alpha b_2) \big) \\
&= \big(\alpha^2 (a_2, a_2)(a_2, a_2) - \alpha^2 (a_2, a_2)(a_2, a_2) \big) \\
&\quad + (\alpha^2 (b_2, b_2)(b_2, b_2) - \alpha^2 (b_2, b_2)(b_2, b_2)) \\
&= (0 - 0) + (0 - 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Namun untuk vektor (a, b) dan $(a, 2b)$, di mana $\alpha = 2$, merupakan vektor bebas linear di $X_1 \times X_2$. Berdasarkan vektor (a, b) dan $(a, 2b)$, diperoleh kombinasi linier sebagaimana berikut

$$\big(k_1(a, b)\big) + \big(k_2(a, 2b)\big) = (0,0)$$

$$(k_1 a, k_1 b) + (k_2 a, 2k_2 b\ ) = (0{,}0)$$

Berdasarkan kedua persamaan tersebut diperoleh solusi trivial, yakni $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ maka bebas linier.

Sehingga, berdasarkan kedua vektor tersebut kita mempunyai

$$\begin{aligned}
\langle (a,b),(a,b)|(a,2b)\rangle &= (a,a|a) + (b,b|2b) \\
&= \|a,a\|^2 + \|b,2b\|^2 \\
&= \left(\begin{vmatrix} (a,a) & (a,a) \\ (a,a) & (a,a) \end{vmatrix}^{1/2}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} (b,b) & (b,2b) \\ (2b,b) & (2b,2b) \end{vmatrix}^{1/2}\right)^2 \\
&= \begin{vmatrix} (a,a) & (a,a) \\ (a,a) & (a,a) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (b,b) & (b,2b) \\ (2b,b) & (2b,2b) \end{vmatrix} \\
&= \big((a,a)(a,a) - (a,a)(a,a)\big) \\
&\quad + \big((b,b)(2b,2b) - (b,2b)(2b,b)\big) \\
&= 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Tapi, vektor (a,b) dan $(a,2b)$ tidak bergantung linier. Jadi aksioma 1) pada definisi hasil kali dalam-2 tidak berlaku.

Hal tersebut menyiratkan bahwa fungsi (4.1) juga tidak mendefinisikan norma-2 pada $X_1 \times X_2$, namun untuk definisi 2.10 berlaku pada ruang hasil kali dalam-2 $(X_1, (\cdot,\cdot)_1)$ dan $(X_2, (\cdot,\cdot)_2)$.

Contoh 4.1

Fungsi $p: X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$p\big((a_1,b_1),(a_2,b_2)\big) = \sqrt{\langle (a_1,b_1),(a_1,b_1)|(a_2,b_2)\rangle}$$

untuk setiap $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in X_1 \times X_2$ memenuhi kondisi 1) sampai 4) definisi seminorma-2, di mana $\langle \cdot,\cdot \mid \cdot \rangle$ merupakan hasil kali dalam-2 (Malcheski, 2014).

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa pemetaan pada Contoh 4.1 memenuhi kondisi 1) sampai 4) definisi seminorma-2.

1. Jika $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X_1 \times X_2$ bergantung linear di mana $(a_1, b_1) \in X_1$ dan $(a_2, b_2) \in X_2$, maka akan dibuktikan bahwa $p\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) = 0$.

   Jika $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X_1 \times X_2$ bergantung linear, diperoleh $(a_1, b_1) = \alpha(a_2, b_2) = (\alpha a_2, \alpha b_2)$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, maka perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
p\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) &= \sqrt{\langle (a_1, b_1), (a_1, b_1) | (a_2, b_2)\rangle} \\
&= \langle (a_1, b_1), (a_1, b_1) | (a_2, b_2)\rangle^{1/2} \\
&= \begin{vmatrix} \big((\alpha a_2, \alpha b_2), (\alpha a_2, \alpha b_2)\big) & \big((\alpha a_2, \alpha b_2), (a_2, b_2)\big) \\ \big((a_2, b_2), (\alpha a_2, \alpha b_2)\big) & \big((a_2, b_2), (a_2, b_2)\big) \end{vmatrix}^{1/2}
\end{aligned}
$$

Karena untuk setiap

$(\alpha a, \alpha b) = \alpha(a, \alpha b) = \alpha(\alpha b, a) = \alpha . \alpha(b, a) = \alpha^2\,(a, b)$, maka

$$
\begin{aligned}
p\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) &= \begin{vmatrix} \big(\alpha^2(a_2, b_2), \alpha^2(a_2, b_2)\big) & \big(\alpha^2(a_2, b_2), (a_2, b_2)\big) \\ \big((a_2, b_2), \alpha^2(a_2, b_2)\big) & \big((a_2, b_2), (a_2, b_2)\big) \end{vmatrix}^{1/2} \\
&= \Big(\big(\alpha^2(a_2, b_2), \alpha^2(a_2, b_2)\big)\big((a_2, b_2), (a_2, b_2)\big) \\
&\quad - \big(\alpha^2(a_2, b_2), (a_2, b_2)\big)\big((a_2, b_2), \alpha^2(a_2, b_2)\big)\Big)^{1/2} \\
&= (0)^{1/2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

2. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X_1 \times X_2$ di mana $(a_1, b_1) \in X_1$ dan $(a_2, b_2) \in X_2$, berlaku $p\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) = p\big((a_2, b_2), (a_1, b_1)\big)$.

   Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
p\big((a_1,b_1),(a_2,b_2)\big) &= \sqrt{\langle (a_1,b_1),(a_1,b_1)|(a_2,b_2)\rangle} \\
&= \langle (a_1,b_1),(a_1,b_1)|(a_2,b_2)\rangle^{1/2} \\
&= \begin{vmatrix} \big((a_1,b_1),(a_1,b_1)\big) & \big((a_1,b_1),(a_2,b_2)\big) \\ \big((a_2,b_2),(a_1,b_1)\big) & \big((a_2,b_2),(a_2,b_2)\big) \end{vmatrix}^{1/2} \\
&= \begin{pmatrix} \big((a_1,b_1),(a_1,b_1)\big)\big((a_2,b_2),(a_2,b_2)\big) \\ -\big((a_1,b_1),(a_2,b_2)\big)\big((a_2,b_2),(a_1,b_1)\big) \end{pmatrix}^{1/2} \\
&= \begin{pmatrix} \big((a_2,b_2),(a_2,b_2)\big)\big((a_1,b_1),(a_1,b_1)\big) \\ -\big((a_2,b_2),(a_1,b_1)\big)\big((a_1,b_1),(a_2,b_2)\big) \end{pmatrix}^{1/2} \\
&= \begin{vmatrix} \big((a_2,b_2),(a_2,b_2)\big) & \big((a_2,b_2),(a_1,b_1)\big) \\ \big((a_1,b_1),(a_2,b_2)\big) & \big((a_1,b_1),(a_1,b_1)\big) \end{vmatrix}^{1/2} \\
&= \langle (a_2,b_2),(a_2,b_2)|(a_1,b_1)\rangle^{1/2} \\
&= \sqrt{\langle (a_2,b_2),(a_2,b_2)|(a_1,b_1)\rangle} \\
&= p\big((a_2,b_2),(a_1,b_1)\big)
\end{aligned}
$$

3. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in X_1 \times X_2$ di mana $(a_1,b_1) \in X_1$ dan $(a_2,b_2) \in X_2$, dan $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku

   $p\big(\alpha(a_1,b_1),(a_2,b_2)\big) = |\alpha| p\big((a_1,b_1),(a_2,b_2)\big)$.

   Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
p\big(\alpha(a_1,b_1),(a_2,b_2)\big) &= \sqrt{\langle \alpha(a_1,b_1),\alpha(a_1,b_1)|(a_2,b_2)\rangle} \\
&= \langle \alpha(a_1,b_1),\alpha(a_1,b_1)|(a_2,b_2)\rangle^{1/2} \\
&= \begin{vmatrix} \big(\alpha(a_1,b_1),\alpha(a_1,b_1)\big) & \big(\alpha(a_1,b_1),(a_2,b_2)\big) \\ \big((a_2,b_2),\alpha(a_1,b_1)\big) & \big((a_2,b_2),(a_2,b_2)\big) \end{vmatrix}^{1/2} \\
&= \begin{pmatrix} \big(\alpha(a_1,b_1),\alpha(a_1,b_1)\big)\big((a_2,b_2),(a_2,b_2)\big) \\ -\big(\alpha(a_1,b_1),(a_2,b_2)\big)\big((a_2,b_2),\alpha(a_1,b_1)\big) \end{pmatrix}^{1/2}
\end{aligned}
$$

Karena untuk setiap

$(\alpha a, \alpha b) = \alpha(a, \alpha b) = \alpha(\alpha b, a) = \alpha . \alpha(b, a) = \alpha^2\ (a, b)$, maka

$$
\begin{aligned}
p\big(\alpha(a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) &= \begin{pmatrix} \alpha^2\big((a_1, b_1), (a_1, b_1)\big)\big((a_2, b_2), (a_2, b_2)\big) \\ -\alpha^2\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big)\big((a_2, b_2), (a_1, b_1)\big) \end{pmatrix}^{1/2} \\
&= \left(\alpha^2 \begin{pmatrix} \big((a_1, b_1), (a_1, b_1)\big)\big((a_2, b_2), (a_2, b_2)\big) \\ -\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big)\big((a_2, b_2), (a_1, b_1)\big) \end{pmatrix}\right)^{1/2} \\
&= |\alpha| \begin{pmatrix} \big((a_1, b_1), (a_1, b_1)\big)\big((a_2, b_2), (a_2, b_2)\big) \\ -\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big)\big((a_2, b_2), (a_1, b_1)\big) \end{pmatrix}^{1/2} \\
&= |\alpha| \begin{vmatrix} \big((a_1, b_1), (a_1, b_1)\big) & \big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) \\ \big((a_2, b_2), (a_1, b_1)\big) & \big((a_2, b_2), (a_2, b_2)\big) \end{vmatrix}^{1/2} \\
&= |\alpha| \langle (a_1, b_1), (a_1, b_1) | (a_2, b_2) \rangle^{1/2} \\
&= |\alpha| \sqrt{\langle (a_1, b_1), (a_1, b_1) | (a_2, b_2) \rangle} \\
&= |\alpha| p\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big)
\end{aligned}
$$

4. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in X_1 \times X_2$ di mana $(a_1, b_1) \in X_1$ dan $(a_2, b_2) \in X_2$, berlaku

$$
\begin{aligned}
& p\Big(\big((a_1, b_1) + (a_2, b_2)\big), (a_3, b_3)\Big) \\
& \qquad \leq p\big((a_1, b_1), (a_3, b_3)\big) + p\big((a_2, b_2), (a_3, b_3)\big)
\end{aligned}
$$

Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
& p\Big(\big((a_1, b_1) + (a_2, b_2)\big), (a_3, b_3)\Big) \\
= \ & p\Big(\ (a_3, b_3), \big((a_1, b_1) + (a_2, b_2)\big)\Big) \\
= \ & \sqrt{\langle (a_3, b_3), (a_3, b_3) | \big((a_1, b_1) + (a_2, b_2)\big) \rangle}
\end{aligned}
$$

$$= \quad \langle (a_3,b_3),(a_3,b_3)|\big((a_1,b_1)+(a_2,b_2)\big)\rangle^{1/2}$$

$$= \quad \begin{vmatrix} \big((a_3,b_3),(a_3,b_3)\big) & \big((a_3,b_3),(a_1,b_1)\big) \\ \big((a_1,b_1)(a_3,b_3)+(a_2,b_2)(a_3,b_3)\big) & \big((a_1,b_1),(a_1,b_1)+(a_2,b_2),(a_2,b_2)\big) \end{vmatrix}^{1/2}$$

$$= \quad \begin{pmatrix} \big((a_3,b_3),(a_3,b_3)\big)\big((a_1,b_1),(a_1,b_1)+(a_2,b_2),(a_2,b_2)\big) \\ -\big((a_3,b_3),(a_1,b_1)\big)\big((a_1,b_1)(a_3,b_3)+(a_2,b_2)(a_3,b_3)\big) \end{pmatrix}^{1/2}$$

$$= \quad \begin{pmatrix} \big((a_3,b_3),(a_3,b_3)\big)\big((a_1,b_1),(a_1,b_1)\big)+\big((a_3,b_3),(a_3,b_3)\big)\big((a_2,b_2),(a_2,b_2)\big) \\ -\big((a_3,b_3),(a_1,b_1)\big)\big((a_1,b_1)(a_3,b_3)\big)-\big((a_3,b_3),(a_1,b_1)\big)\big((a_2,b_2)(a_3,b_3)\big) \end{pmatrix}^{1/2}$$

$$= \quad \begin{pmatrix} \big((a_3,b_3),(a_3,b_3)\big)\big((a_1,b_1),(a_1,b_1)\big)-\big((a_3,b_3),(a_1,b_1)\big)\big((a_1,b_1)(a_3,b_3)\big) \\ +\big((a_3,b_3),(a_3,b_3)\big)\big((a_2,b_2),(a_2,b_2)\big)-\big((a_3,b_3),(a_1,b_1)\big)\big((a_2,b_2)(a_3,b_3)\big) \end{pmatrix}^{1/2}$$

Maka dengan menggunakan ketaksamaan segitiga , diperoleh

$$\leq \quad \begin{pmatrix} \big((a_3,b_3),(a_3,b_3)\big)\big((a_1,b_1),(a_1,b_1)\big) \\ -\big((a_3,b_3),(a_1,b_1)\big)\big((a_1,b_1)(a_3,b_3)\big) \end{pmatrix}^{1/2}$$

$$+ \begin{pmatrix} \big((a_3,b_3),(a_3,b_3)\big)\big((a_2,b_2),(a_2,b_2)\big) \\ -\big((a_3,b_3),(a_1,b_1)\big)\big((a_2,b_2)(a_3,b_3)\big) \end{pmatrix}^{1/2}$$

$$= \quad \begin{vmatrix} \big((a_3,b_3),(a_3,b_3)\big) & \big((a_3,b_3),(a_1,b_1)\big) \\ \big((a_1,b_1)(a_3,b_3)\big) & \big((a_1,b_1),(a_1,b_1)\big) \end{vmatrix}^{1/2}$$

$$+ \begin{vmatrix} \big((a_3,b_3),(a_3,b_3)\big) & \big((a_3,b_3),(a_1,b_1)\big) \\ \big((a_2,b_2)(a_3,b_3)\big) & \big((a_2,b_2),(a_2,b_2)\big) \end{vmatrix}^{1/2}$$

$$= \quad \langle (a_3,b_3),(a_3,b_3)|(a_1,b_1)\rangle^{1/2} + \langle (a_3,b_3),(a_3,b_3)|(a_2,b_2)\rangle^{1/2}$$

$$= \quad \sqrt{\langle (a_3,b_3),(a_3,b_3)|(a_1,b_1)\rangle} + \sqrt{\langle (a_3,b_3),(a_3,b_3)|(a_2,b_2)\rangle}$$

$$= \quad p\big((a_3,b_3),(a_1,b_1)\big) + p\big((a_3,b_3),(a_2,b_2)\big)$$

$$= \quad p\big((a_1,b_1),(a_3,b_3)\big) + p\big((a_2,b_2),(a_3,b_3)\big)$$

Sehingga terpenuhi bahwa,

$$p\Big(\big((a_1,b_1)+(a_2,b_2)\big),(a_3,b_3)\Big) \leq p\big((a_1,b_1),(a_3,b_3)\big) + p\big((a_2,b_2),(a_3,b_3)\big).$$

Dengan demikian $p\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big)$ merupakan seminorma-2 karena memenuhi pada semua aksioma seminorma-2 ■.

Ruang seminorma-2 merupakan ruang norma-2 jika berlaku sifat berikut, jika $\boldsymbol{p(a, b) = 0}$ maka $\boldsymbol{a, b \in X}$ bergantung linier. Dengan demikian, norma-2 memiliki sifat yang lebih spesifik dari seminorma-2. Pada tahun 1997, Risto Malceksi dan Aleksa Malchesi mendefinisikan ruang seminorma-2 sebagai berikut.

Definisi 4.5

Misalkan X merupakan ruang vektor dengan dimensi lebih besar dari 1 dan $p: X \times X \to \mathbb{R}$. Fungsi p disebut seminorma-2 pada X jika memenuhi:

1. Jika $a, b \in X$ bergantung linier maka $p(a, b) = 0$,
2. $p(a, b) = p(b, a)$, untuk setiap $a, b \in X$,
3. $p(\alpha a, b) = |\alpha| p(a, b)$, untuk setiap $a, b \in X$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$,
4. $p(a + b, c) \leq p(a, c) + p(b, c)$, untuk setiap $a, b, c \in X$.

Pasangan (X, p) disebut ruang seminorma-2 (Malceski & Malcheski, 1997).

4.2 Sifat-Sifat Ruang Seminorma-2

Malceski, dkk., (2014) juga telah memaparkan beberapa lemma dan teorema yang terpenuhi pada ruang seminorma-2, berikut penjabarannya.

Lemma 4.1

Misalkan (X, p) adalah ruang seminorma-2. Maka,

$p(a, b) = p(a + \lambda b, b)$, untuk setiap $a, b \in X$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$

Bukti:

Perhatikan bahwa untuk setiap $a, b \in X$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$, berlaku

$p(a+\lambda b, b) \leq p(a,b) + p(\lambda b, b) = p(a,b) + |\lambda| p(b,b)$ (1)

Di sisi lain

$$\begin{aligned} p(a,b) &= p(a+\lambda b-\lambda b, b) \\ &\leq p(a+\lambda b, b) + p(-\lambda b, b) \\ &= p(a+\lambda b, b) + |-\lambda| p(b,b) \\ &= p(a+\lambda b, b) + |\lambda| p(b,b) \qquad (2) \end{aligned}$$

Berdasarkan ketaksamaan (1) dan (2) diperoleh $p(a,b) = p(a+\lambda b, b)$ ■

Lemma 4.2

Misalkan (X,p) adalah ruang seminorma-2. Maka,

$p(\alpha a+\beta b, \gamma a+\delta b) = |\alpha\delta - \beta\gamma| p(a,b)$ untuk setiap $a,b \in X$ dan $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$.

Bukti:

Perhatikan bahwa untuk setiap $a,b \in X$ dan $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\begin{aligned} p(\alpha a+\beta b, \gamma a+\delta b) &\leq p(\alpha a+\beta b, \gamma a) + p(\alpha a+\beta b, \delta b) \\ &\leq p(\alpha a, \gamma a) + p(\beta b, \gamma a) + p(\alpha a, \delta b) + p(\beta b, \delta b) \\ &= |\alpha\gamma| p(a,a) + |\beta\gamma| p(b,a) + \\ &\quad |\alpha\delta|\, p(a,b) + |\beta\delta|\, p(b,b) \\ &= |\beta\gamma| p(b,a) + |\alpha\delta|\, p(a,b) \\ &= |\alpha\delta|\, p(a,b) + |-\beta\gamma| p(b,a) \\ &= |\alpha\delta - \beta\gamma| p(a,b) \end{aligned}$$

Sehingga $p(\alpha a+\beta b, \gamma a+\delta b) \leq |\alpha\delta - \beta\gamma| p(a,b)$ untuk setiap $a,b \in X$ dan $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$. Dengan demikian $p(\alpha a+\beta b, \gamma a+\delta b) = |\alpha\delta - \beta\gamma| p(a,b)$ otomatis terpenuhi ■.

Lemma 4.3

Misalkan (X, p) adalah ruang seminorma-2. Maka, untuk setiap $\alpha \in X$ fungsi $p_1(x) = p(x, a)$, untuk setiap $x \in X$ merupakan seminorma pada X.

Bukti:

Misalkan $\alpha \in X$ dan fungsi $p_1: X \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $p_1(x) = p(x, a)$ untuk setiap $x \in X$ merupakan seminorma pada X.

Akan dibuktikan bahwa $p_1(x)$ memenuhi aksioma pada seminorma.

a. Perhatikan bahwa, untuk setiap $a, x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned} p_1(\alpha x) &= p(\alpha x, a) \\ &= |\alpha| p(x, a) \\ &= |\alpha| p_1(x) \end{aligned}$$

b. Perhatikan bahwa, untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$\begin{aligned} p_1(x + y) &= p(x + y, a) \\ &\leq p(x, a) + p(y, a) \\ &= p_1(x) + p_1(y) \end{aligned}$$

Dengan demikian, $p_1(x)$ merupakan seminorma pada X ■

Teorema 4.1

Misalkan (X, p) adalah ruang seminorma-2. Maka,

$|p(a, c) - p(b, c)| \leq p(a - b, c)$, untuk setiap $a, b, c \in X$

Bukti:

Perhatikan bahwa $p(a, c) = p(a - b + b, c) \leq p(a - b, c) + p(b, c)$

sehingga

$$p(a, c) - p(b, c) \leq p(a - b, c)$$

Demikian pula

$$p(b,c) - p(a,c) \leq p(b-a,c)$$

Di mana $p(a-b,c) = p(b-a,c)$ ■

Teorema 4.2

Misalkan (X,p) adalah ruang seminorma-2. Maka,

$p(a,b) \geq 0$, untuk setiap $a,b \in X$

Bukti:

Perhatikan bahwa untuk setiap $a,b \in X$, $|p(a,b)|$ selalu lebih besar atau sama dengan 0, atau dapat dituliskan

$$|p(a,b)| \geq 0$$

Di mana $|p(a,b)|$ selalu kurang dari atau sama dengan bilangan positif apapun, sehingga

$$p(a,b) \geq |p(a,b)| \geq 0 \text{ ■}$$

Teorema 4.3

Misalkan (X,p) adalah ruang seminorma-2. Maka, untuk setiap $a \in X$ himpunan $\{x|p(x,a) = 0\}$ merupakan subruang dari X.

Bukti:

Misalkan $x,y,a \in X$ dan $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, untuk menunjukan bahwa $0 \in \{x|p(x,a) = 0\}$ akan ditunjukan bahwa $p(0,a) = 0$. Karena p adalah seminorma-2 maka $p(0,a) \geq 0$ untuk setiap $a \in X$ dan $p(0,a) = 0$ otomatis terpenuhi. Misalkan x dan y adalah anggota dari himpunan, artinya $p(x,a) = p(y,a) = 0$. Maka diperoleh,

1. Untuk setiap $x, y \in X$, berlaku

$$\begin{aligned} p(x+y,a) &\leq p(x,a)+p(y,a) \\ &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga tertutup terhadap operasi penjumlahan.

2. Untuk setiap $x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\begin{aligned} p(\alpha x,a) &= |\alpha| p(x,a) \\ &= |\alpha|.0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga tertutup terhadap operasi perkalian scalar.

Dengan demikian himpunan $\{x | p(x,a) = 0\}$ merupakan subruang pada X ■

Berdasarkan penjabaran diatas, diberikan contoh dari seminorma-2.

Contoh 4.2

Misalkan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ merupakan ruang norma-2, $1 \leq \alpha < \infty$ dan $l^{\alpha}(X)$ menunjukan himpunan semua barisan $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}, a_i \in X, i = 1,2,3, \ldots$ sedemikian sehingga

$$p(a,b) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i, b_i\|^{\alpha} \right)^{1/\alpha} < \infty$$

untuk setiap $a, b \in l^{\alpha}(X)$. Tunjukan bahwa p merupakan seminorma-2 dan bukan norma-2 pada $l^{\alpha}(X)$.

Penyelesaian:

Akan ditunjukan bahwa p memenuhi aksioma-aksioma pada seminorma-2.

1. Akan dibuktikan jika $a, b \in X$ bergantung linear, maka $p(a,b) = 0$

Jika $a, b \in X$ bergantung linear, artinya dapat ditulis $a = kb$ di mana $k \in \mathbb{R}$.

Maka diperoleh,

$$\begin{aligned}
p(a,b) &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i, b_i\|^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|kb_i, b_i\|^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\begin{vmatrix} (kb_i, kb_i) & (kb_i, b_i) \\ (b_i, kb_i) & (b_i, b_i) \end{vmatrix}^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left((kb_i, kb_i)(b_i, b_i) - (kb_i, b_i)(b_i, kb_i)\right)^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(k^2(b_i, b_i)(b_i, b_i) - k^2(b_i, b_i)(b_i, b_i)\right)^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(0^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \\
&= 0
\end{aligned}$$

2. Perhatikan bahwa untuk setiap $a, b \in X$, berlaku

$$\begin{aligned}
p(a,b) &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i, b_i\|^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\begin{vmatrix} (a_i, a_i) & (a_i, b_i) \\ (b_i, a_i) & (b_i, b_i) \end{vmatrix}^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left((a_i, a_i)(b_i, b_i) - (a_i, b_i)(b_i, a_i)\right)^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left((b_i,b_i)(a_i,a_i)-(b_i,a_i)(a_i,b_i)\right)^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\begin{vmatrix}(b_i,b_i) & (b_i,a_i)\\ (a_i,b_i) & (a_i,a_i)\end{vmatrix}^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty}\|b_i,a_i\|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

$$= p(b,a)$$

3. Perhatikan bahwa $a,b \in X$ dan $k \in \mathbb{R}$, berlaku

$$p(ka,b) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\|ka_i,b_i\|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\begin{vmatrix}(ka_i,ka_i) & (ka_i,b_i)\\ (b_i,ka_i) & (b_i,b_i)\end{vmatrix}^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left((ka_i,ka_i)(b_i,b_i)-(ka_i,b_i)(b_i,ka_i)\right)^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(k^2(a_i,a_i)(b_i,b_i)-k^2(a_i,b_i)(b_i,a_i)\right)^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(k\left(\left((a_i,a_i)(b_i,b_i)-(a_i,b_i)(b_i,a_i)\right)\right)^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

$$= \left(|k^{\alpha}|\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left((a_i,a_i)(b_i,b_i)-(a_i,b_i)(b_i,a_i)\right)^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

$$= |k^{\alpha}|^{1/\alpha}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left((a_i,a_i)(b_i,b_i)-(a_i,b_i)(b_i,a_i)\right)^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

$$= |k| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\begin{vmatrix} (a_i, a_i) & (a_i, b_i) \\ (b_i, a_i) & (b_i, b_i) \end{vmatrix}^{1/2} \right)^{\alpha} \right)^{1/\alpha}$$

$$= |k| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i, b_i\|^{\alpha} \right)^{1/\alpha}$$

$$= |k| p(a, b)$$

4. Akan ditunjukan bahwa $p(a + b, c) \leq p(a, c) + p(b, c)$

Perhatikan bahwa

$$p(a + b, c) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i + b_i, c_i\|^{\alpha} \right)^{1/\alpha}$$

dengan menggunakan ketaksamaan minkowski, diperoleh

$$\begin{aligned} p(a + b, c) &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i + b_i, c_i\|^{\alpha} \right)^{1/\alpha} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i, c_i\|^{\alpha} + \|b_i, c_i\|^{\alpha} \right)^{1/\alpha} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i, c_i\|^{\alpha} \right)^{1/\alpha} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|b_i, c_i\|^{\alpha} \right)^{1/\alpha} \\ &= p(a, c) + p(b, c) \end{aligned}$$

Karena p memenuhi seluruh aksioma pada seminorma-2, maka p merupakan seminorma-2 pada $l^{\alpha}(X)$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa p bukan merupakan norma-2 pada $l^{\alpha}(X)$.

Akan ditunjukan, jika $p(a, a') = 0$ maka $\{a, a'\}$ tidak bergantung linier atau bebas linier.

Jika $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^{\alpha}(X)$, maka terdapat $a' = \{\frac{a_i}{i}\}_{i=1}^{\infty} \in l^{\alpha}(X)$ dan berlaku

$$
\begin{aligned}
p(a,a') &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left\| a_i, \frac{a_i}{i} \right\|^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\begin{vmatrix} (a_i, a_i) & \left(a_i, \frac{a_i}{i}\right) \\ \left(\frac{a_i}{i}, a_i\right) & \left(\frac{a_i}{i}, \frac{a_i}{i}\right) \end{vmatrix}^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left((a_i, a_i)\left(\frac{a_i}{i}, \frac{a_i}{i}\right) - \left(a_i, \frac{a_i}{i}\right)\left(\frac{a_i}{i}, a_i\right)\right)^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\left((a_i, a_i)(a_i, a_i) - (a_i, a_i)(a_i, a_i)\right)^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i}(0)^{1/2}\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa himpunan $\{a, a'\}$ tidak bergantung linear di $l^{\alpha}(X)$.

Berdasarkan $\{a, a'\}$ yang artinya $a = \{a_1, a_2, \ldots\}$ dan $a' = \left\{\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \ldots\right\}$, maka diperoleh kombinasi linier sebagai berikut

$$k_1(a_1, a_2, \ldots) + k_2\left(\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \ldots\right) = (0,0)$$

$$(k_1 a_1, k_1 a_2, \ldots) + \left(k_2\frac{a_1}{1}, k_2\frac{a_2}{2}, \ldots\right) = (0,0)$$

Sehingga diperoleh solusi trivial yakni $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$ sehingga bebas linier ■.

4.3 Kajian Penerapan Integrasi Topik dengan Al-Quran

Taqwa merupakan puncak dari ibadah, seseorang belum dianggap bertaqwa jika belum melaksanakan ibadah kepada Allah. Langkah awal sebelum menjadi pribadi yang bertaqwa ialah dengan melaksanakan perintah-Nya dan menjauhi larangan-Nya. Imam Ahmad meriwayatkan dari al-Harits al-Asy'ari, bahwa Nabi Muhammad Saw pernah bersabda:

"Sesungguhnya Allah SWT telah memerintahkan Yahya bin Zakaria a.s dengan lima perkara yang harus ia amalkan. Dan memerintahkan Bani Israil agar mereka mengamalkannya, namun (Yahya bin Zakaria) hampir saja lamban melaksanakannya. Maka 'Isa a.s berkata kepadanya: 'Sesungguhnya engkau telah diperintahkan dengan lima perkara agar engkau mengamalkannya dan memerintahkan Bani Israil mengamalkannya, apakah engkau sendiri menyampaikannya atau aku yang menyampaikannya?" Kemudian Yahya berkata: 'Hai saudaraku, sesungguhnya aku takut jika engkau mendahuluiku, aku akan diadzab atau aku ditenggelamkan ke dalam bumi'. Setelah itu Yahya bin Zakaria mengumpulkan Bani Israil di Baitul Maqdis sehingga mereka memenuhi masjid, lalu ia duduk di tempat yang tinggi, kemudian memuji dan mengagungkan Allah, dan selanjutnya ia berkata: 'Sesungguhnya Allah telah memerintahkan kepadaku lima perkara, yang harus aku amalkan dan aku perintahkan kalian untuk mengamalkannya; pertama , hendaklah kalian beribadah kepada Allah dan tidak menyekutukan-Nya dengan sesuatu apa pun, karena sesungguhnya perumpamaan hal itu sama seperti seseorang yang membeli seorang budak dari hartanya yang murni dengan uang perak atau emas. Kemudian orang itu menyuruh budak itu bekerja namun budak itu menyerahkan penghasilannya kepada selain tuannya. Siapakah di antara kalian yang menginginkan budaknya berbuat demikian? Dan sesungguhnya Allah telah menciptakan kalian dan memberi rizki kepada kalian. Karenanya, beribadahlah kepada Allah dan janganlah kalian menyekutukan-Nya dengan sesuatu apa pun. Allah juga memerintahkan agar kalian mengerjakan shalat, karena sesungguhya Allah mengarahkan wajah-Nya ke wajah hamba-Nya selama ia tidak berpaling. Sebab itu, jika kalian mengerjakan shalat, janganlah memalingkan wajah. Dia juga memerintahkan kalian untuk berpuasa, sesungguhnya perumpamaan hal itu sama seperti seseorang yang membawa tempat minyak kesturi berada di tengah-tengah kelompok orang yang semuanya mencium aroma kesturi. Sesungguhnya bau mulut orang yang berpuasa itu lebih harum dari pada bau minyak kesturi. Allah juga memerintahkan kalian untuk bersedekah, sesungguhnya perumpamaan hal itu seperti seseorang yang ditawan oleh musuh, lalu mereka mengikat kedua tangannya pada lehernya, untuk selanjutnya dibawa ke depan guna dipenggal kepalanya. Kemudian orang itu berkata kepada mereka, 'Apakah kalian mengizinkan aku menebus diriku ini dari kalian.' Maka orang itu pun menebus dirinya dengan segala harta miliknya, sehingga ia berhasil membebaskan dirinya. Allah juga memerintahkan kalian untuk memperbanyak dzikir kepada-Nya, karena perumpamaan hal itu seperti seseorang yang dikejar

oleh musuh dengan melacak jejak kakinya, lalu ia mendatangi sebuah benteng yang terjaga ketat, kemudian ia berlindung di dalamnya. Dan sesungguhnya seorang hamba itu lebih terlindungi dari syaitan jika ia senantiasa berdzikir kepada Allah." (Ghoffar, Mu'thi, & Al-Atsari, Tafsir Ibnu Katsir Jilid 1, 2004)

Berdasarkan hadist tersebut, 5 perkara yang harus diamalkan diantaranya, beribadah kepada Allah dan tidak menyekutukan-Nya, sholat, berpuasa, bersedekah dan berdzikir kepada-Nya.

Kemudian, cara menjadi pribadi bertaqwa menurut Al-Qur'an dapat dilakukan dengan cara mengikuti kriteria seseorang yang bertaqwa, sebagaimana yang telah dijelaskan di bab 2 diantara nya ialah

a. Menepati janjinya, berdasarkan Ali Imran Ayat 76.
b. Menegakkan keadilan, berdasarkan Al Maidah Ayat 8.
c. Pemaaf, berdasarkan Al Baqarah ayat 273.
d. Teguh hati (istiqomah), berdasarkan At Taubah ayat 7
e. Bersabar, berdasarkan Ali Imran ayat 200

(Kartini, 2012)

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pemaparan pada bab pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa salah satu contoh fungsi berikut, yakni fungsi $p: X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$p\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big) = \sqrt{\langle (a_1, b_1), (a_1, b_1) | (a_2, b_2) \rangle}$$

untuk setiap $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in X_1 \times X_2$ memenuhi definisi seminorma-2. Serta, pada ruang seminorma-2 berlaku sifat sebagai berikut.

Misalkan (X, p) adalah ruang seminorma-2. Maka berlaku,

1. $p(a, b) = p(a + \lambda b, b)$, untuk setiap $a, b \in X$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$
2. $p(\alpha a + \beta b, \gamma a + \delta b) = |\alpha\delta - \beta\gamma| p(a, b)$ untuk setiap $a, b \in X$ dan $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$
3. Untuk setiap $\alpha \in X$ fungsi $p_1(x) = p(x, a)$, untuk setiap $x \in X$ merupakan seminorma pada X.
4. $|p(a, c) - p(b, c)| \leq p(a - b, c)$, untuk setiap $a, b, c \in X$
5. $p(a, b) \geq 0$, untuk setiap $a, b \in X$
6. Untuk setiap $a \in X$ himpunan $\{x | p(x, a) = 0\}$ merupakan subruang dari X.

5.2 Saran

Pada penelitian ini, penulis berfokus pada ruang seminorma-2. Kepada penelitian selanjutnya, peneliti menyarankan untuk mengembangkan ruang seminorma-2 ke ruang yang lain, misalnya ruang banach-2 atau yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. Rorres, C. 2013. *Elementary Linear Algebra Aplication Version* 11^{th} *Edition*. United States: John Wiley and Sons.

Al-Mahalli, I. J., & As-Suyuti, I. J. (1990). *Tafsir Jalalain.* Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Dastourian, B., & Janfada, M. (2018). Atomic Systems in 2-inner Product Spaces. *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*.

Debnath, L., & Mikusinski, P. (2003). *Introduction to Hilbert Spaces with Applications.* San Diego: Academic Press.

Dewanto, M. (2022). Ortogonalitas-G di Ruang Norm-n. *Skripsi*.

Fitria, I. (2012). Kajian Ortogonalitas Diminnie dan Roberts pada Ruang Bernorma (n-1) dengan n>=2. *Skripsi*.

Ghoffar, M. A., Mu'thi, A., & Al-Atsari, A. I. (2004). *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 1*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Hutnik, J.E. (2000). Some Integral Inequalities of Holder and Minkowski. *Mathematic Subject Classication.*

Insani, K. R. (2022). Ortogonalitas-D pada Norm-2 Baku. *Skripsi*.

Kartini, H. A. (2012). Taqwa Penyelamat Ummat . *Al-'Ulum Vol.52 No.2*, 26-35.

Kundu, A., T.Bag, & Nazmul, S. (2019). On Metrizability and Normability of 2-Normed Spaces. *Mathemtical Sciences*.

Malcheski, A., & Malcheski, R. (1997). n-Seminormed Space.

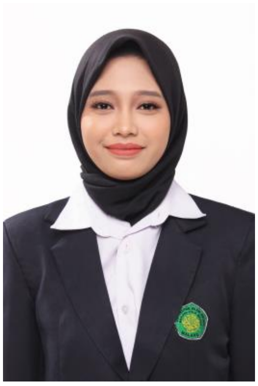
Malcheski, S., Anevska, K., & Malceski, R. (2014). 2-Semi Norm and 2-Semi Inner Product. *International Journal of Mathematical Analysis*.

Maligranda, L. (1995). A Simple Proof of the Holder and the Minkowski Inequality. Mathematical Association of America.

Rainarli, E., & Dewi, K. E. (2011). *Diktat Perkuliahan Edisi 1 Aljabar Linear dan Matriks.* Bandung: Universitas Komputer Indonesia.

Usman, M. A. (2017). *Shahih Bukhari Muslim* . Jakarta: PT Elex Media Kompitindo.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Cahya Ramadhani Azhar, yang biasa dipanggil Cahya atau Yaya, merupakan putri pertama dari Bapak Hariyanto dan Ibu Asih. Ia merupakan empat bersaudara dan memiliki tiga adik yang menggemaskan. Ia dilahirkan di Batam, 01 Desember 2000. Saat ini, ia tinggal di daerah perdesaan di kabupaten Blitar, tepatnya Desa Kalipucung, Sanankulon, Blitar.

Penulis memulai pendidikannya di TK Al-Hidayah yang berada di desa tempat penulis tinggal, yakni Desa Kalipucung dan lulus pada tahun 2007. Selanjutnya penulis menempuh pendidikan dasar di SDN Kalipucung 02 dan lulus pada tahun 2013. Kemudian penulis melanjutkan sekolah menengah pertama di SMPN 01 Sanankulon dan lulus pada tahun 2016. Setelah itu ia melanjutkan sekolah menengah akhir di MAN Kota Blitar yang sekarang berganti nama menjadi MAN 01 Kota Blitar dan lulus pada tahun 2019. Perjalanan menempuh pendidikan yang cukup panjang hingga penulis menginjak bangku kuliah dan melanjutkan di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama bersekolah, penulis bukan merupakan anak yang cukup aktif dalam kegiatan-kegiatan yang ada di sekolah maupun di kampus. Sekali atau dua kali, peneliti mengikuti beberapa kepanitiaan dan volunteer selama menjadi mahasiswa. Dan semasa di sekolah, peneliti pernah menjadi pengurus OSIS.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Cahya Ramadhani Azhar
NIM	: 19610041
Fakultas / Program Studi	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	: Sifat-Sifat Ruang Seminorma-2
Pembimbing I	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.
Pembimbing II	: Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	10 Januari 2023	Konsultasi Materi Dasar Topik	1.
2.	18 Januari 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	01 Februari 2023	Revisi Bab I, II, dan III	3.
4.	13 Februari 2023	Konsultasi Kajian Agama	4.
5.	22 Februari 2023	Revisi Kajian Agama	5.
6.	10 Maret 2023	ACC Pembimbing I untuk Seminar Proposal	6.
7.	14 Maret 2023	ACC Pembimbing II untuk Seminar Proposal	7.
8.	19 Mei 2023	Konsultasi revisi Bab I, II, dan III dan konsultasi Bab IV	8.
9.	22 Mei 2023	Konsultasi Bab IV	9.
10.	6 Juni 2023	ACC Pembimbing I untuk Seminar Hasil	10.
11.	12 Juni 2023	ACC Pembimbing II untuk seminar Hasil	11.
12.	26 Juni 2023	Konsultasi revisi BAB I, II, III dan IV	12.
13.	13 September 2023	Konsultasi Revisi BAB IV	13.
14.	20 September 2023	Konsultasi Revisi BAB IV	14.
15.	26 Oktober 2023	Revisi Format dan Penulisan	15.
16.	9 November 2023	Konsultasi BAB IV	16.

17.	23 November 2023	Konsultasi Keseluruhan	17.
18.	11 Desember 2023	ACC Dosen Pembimbing 1 untuk Sidang Skripsi	18.
19.	16 Desember 2023	Konsultasi Integrasi Al-Qur'an Keseluruhan	19.
20.	18 Desember 2023	ACC Dosen Pembimbing II untuk Sidang Skripsi	20.
21.	27 Desember 2021	ACC Keseluruhan	21.

Malang, 27 Desember 2023
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005