KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL MENGGUNAKAN KETAKSAMAAN YOUNG PADA RUANG MORREY

SKRIPSI

OLEH
NI'MATUL AZIZAH
NIM. 19610022

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL MENGGUNAKAN KETAKSAMAAN YOUNG PADA RUANG MORREY

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat.)

Oleh:
NI'MATUL AZIZAH
NIM. 19610022

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL MENGGUNAKAN KETAKSAMAAN YOUNG PADA RUANG MORREY

SKRIPSI

Oleh:
Ni'matul Azizah
NIM. 19610022

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Malang, 22 Desember 2023

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Hairur Rahman, M.Si	Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL MENGGUNAKAN KETAKSAMAAN YOUNG PADA RUANG MORREY

SKRIPSI

Oleh
Ni'matul Azizah
NIM. 19610022

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat.)
Tanggal 27 Desember 2023

Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc.,	....
Anggota Penguji 1	: Dian Maharani, M.Si.,	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.,	....
Anggota Penguji 3	: Evawati Alisah, M.Pd.,	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya bertanda tangan dibawah ini

Nama	:	Ni'matul Azizah
NIM	:	19610022
Program Studi	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Keterbatasan Operator Integral Fraksional Menggunakan Ketaksamaan Young pada Ruang Morrey

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka di halaman terakhir. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 Desember 2023

Ni'matul Azizah
NIM. 19610022

MOTO

"Dan bersabarlah kamu, janji Allah adalah PASTI."

-Q.S. Ar Rum: 60

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmaanirrahiim

Alhamdulillahi robbil aalamiin, segala puji bagi Allah

yang memberikan kekuatan dan pertolongan dalam melewati segala proses.

Dengan segenap hati skripsi ini dipersembahkan untuk:

Seluruh keluarga terkhusus Ayah Suharto dan Ibu Nur Saidah yang memberikan kesempatan bagi penulis untuk memilih jalan perjuangan selama ini. Mendukung setiap langkah dan keputusan penulis hingga dapat menyelesaikan tugas akhir dengan doa – doa dan harapan yang selalu dilangitkan. Untuk diriku yang terus berusaha tidak menyerah dan mengakui bahwa rencana Allah selalu lebih indah, dan tak ada daya kekuatan tanpa kasih sayang Allah yang begitu luas memberikan penulis kesempatan untuk selalu memperbaiki diri setiap harinya melalui proses menyelesaikan tugas akhir.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas berkat rahmat, nikmat, hidayah, dan karuniaNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian dengan judul "Keterbatasan Operator Integral Fraksional Menggunakan Ketaksamaan Young pada Ruang Morrey" Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Baginda Nabi Muhammad SAW yang telah membawakan kabar gembira yakni agama islam sebagai jalan keselamatan dan kebahagiaan dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir skripsi ini tidak akan dapat terselesaikan dengan usaha penulis itu sendiri, namun banyak yang sangat berperan dalam proses pengerjaan hingga penulis dapat menyelesaikan penelitian ini. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan dan ketulusan hari, izinkanlah penulis menghaturkan banyak ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si., selaku pembimbing I yang bersedia membimbing dan meluangkan waktu untuk membantu penulis dalam memahami topik penelitian, serta memberikan pengalaman berharga untuk tidak berputus asa.
5. Evawati Alisah, M.Pd., selaku pembimbing II yang selalu memberikan semangat untuk terus menyelesaikan penelitian dan motivasi untuk mempersiapkan diri setelah lulus.
6. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si., selaku dosen wali, orang tua, sahabat, motivator yang senantiasa memberikan semangat dan dukungan serta memberikan banyak pengalaman dalam menjalani proses di perkuliahan.
7. Seluruh dosen Program Studi Matematika yang dengan ikhlas memberikan ilmu selama perkuliahan. Semoga ilmu yang disampaikan dapat bermanfaat dan menjadi amal jariyah.

8. Kedua orang tua, ayah Suharto yang selalu memberikan dukungan terhadap pilihan yang diambil oleh penulis selama berproses sebagai mahasiswa. serta ibu Nur Saidah yang tidak pernah berhenti mendoakan penulis agar selalu dilancarkan dalam perjalanan menyelesaikan penelitian ini.
9. Kakak penulis, Muhammad Ansori, Iin Mas'ula, Zainul Abidin, dan Shofi. Serta adik Lailatul Ummairah dan keponakan (Hasby, Farah, dan Fikri) yang menjadi semangat penulis untuk menjalani proses penelitian.
10. Seluruh anggota Soulmath terkhusus Ahliha, Eliya, dan Cahya yang selalu menjadi mendampingi dalam mengerjakan tugas akhir meski tidak secara langsung.
11. Seluruh anggota Komunitas LIMIT (Literasi Matematika) terima kasih telah melanjutkan mimpi membangun program studi dengan mengembangkan lingkungan yang positif untuk berproses.
12. Seluruh pihak yang terlibat yang tidak bisa disebutkan satu per satu.

Penulis menyadari jika masih banyak terdapat kekurangan dalam penelitian ini, sehingga jika ada kritik, masukan maupun saran akan menjadi pembelajaran bagi penulis. Dan diharapkan penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi masyarakat dalam menambah khazanah keilmuan dalam bidang analisis *insyaAllah, Amin Ya Rabbal Alamin.*

Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 27 Desember 2023

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

T	: Operator
$C[a,b]$	: Ruang Fungsi
I_α	: Integral Fraksional
L^q	: Ruang Lebesgue
L^p	: Ruang Lebesgue
λ	: Ukuran lambda
$\mathbb{R}$	: Bilangan real
$\mathbb{R}^n$	: Ruang Euclid
$\mathbb{C}$	: Bilangan Kompak
c	: Bilangan
T_x	: Operator fungsi x
k	: Fungsi kernel
f'	: Turunan fungsi
$f * g$	: Konvolusi fungsi
L^s	: Ruang Lebesgue
C	: Bilangan
μ	: Ukuran
H_α	: Operator integral Fraksional
$L^{p,\lambda}$	: Ruang Morrey
$L^{q,\lambda}$	: Ruang Morrey
$L^{s,\lambda}$	: Ruang Morrey
α	: Dimensi
r	: Jari – jari
e	: Pusat bola
$B(e,r)$	: Bola

ABSTRAK

Azizah, Ni'matul. 2023. **Keterbatasan Operator Integral Fraksional Menggunakan Ketaksamaan Young pada Ruang Morrey**. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Kata kunci: Operator integral fraksional, Ketaksamaan Young, Ruang Morrey

Keterbatasan operator integral fraksional atau Riesz Potensial telah dibuktikan dengan beragam teorema ketaksamaan. Penelitian terbaru dilakukan oleh Saba Mahmood di tahun 2022 sebagai rujukan utama telah membuktikan keterbatasan di ruang Lebesgue menggunakan ketaksamaan Young. Selanjutnya, dalam penelitian ini akan dibuktikan dengan cara yang sama pada ruang Morrey. Metode yang digunakan untuk membuktikan sifat keterbatasan operator integral fraksional menggunakan ketaksamaan Young adalah kajian teori terkait penelitian sebelumnya dan dikontruksi sebagai penelitian yang berisi teori-teori dari berbagai sumber terkait. Hasil dari penelitian ini ditunjukkan sifat keterbatasan operator integral fraksional menggunakan ketaksamaan Young pada ruang Morrey. Kedepannya penilitian ini dapat menambah khazanah keilmuan di bidang analisis.

ABSTRACT

Azizah, Ni'matul. 2023. **The Boundedness of Fractional Integral Operator with Young's Inequality in Morrey Space**. Thesis. Departement of Methematics. Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Advisors: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Keywords: Integral fractional operator, Young's inequality, Morrey Space

The boundedness of the fractional integral operator or Riesz Potential have been proven by various inequality theorems. The latest research conducted by Saba Mahmood in 2022 as the main reference has proven the boundedness in the Lebesgue space using Young's inequality. Furthermore, in this research it will be proven in the same way in Morrey space. The method used to prove the bounded nature of fractional integral operators using Young's inequality is a theoretical study related to previous research and is constructed as research containing theories from various related sources. The results of this research have shown the boundedness of the fractional integral operator using Young's inequality in Morrey space. In the future, this research can add to the body of knowledge in the field of analysis.

مستخلص البحث

العزيزة، نعمة. ٢٠٢٣. قيود عوامل التكامل بالكسور الجزئية باستخدام متباينة $Young$ في مساحة $Morrey$. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا بجامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف الأول: د. خير الرحمن، الماجستير. المشرفة الثاني: إيفواتي أليساه، الماجستيرة.

الكلمات الرئيسية: عامل تكامل بكسور جزئية، متباينة ي $Young$ ، فضاء $Morrey$.

تم إثبات قيود عوامل التكامل بالكسور الجزئية أو إمكانات $Riesz$ من خلال نظريات انعدام الأمن المختلفة. أثبتت الأبحاث الحديثة التي أجرتها سبا محمود في عام ٢٠٢٢ كمرجع رئيسي قيودا في مساحة $Lebesgue$ باستخدام متباينة $Young$. علاوة على ذلك، في هذا البحث سيتم إثباتها بنفس الطريقة في مساحة موري. الطريقة المستخدمة لإثبات طبيعة قيود عوامل التكامل بالكسور الجزئية باستخدام متباينة $Young$ هي دراسة للنظريات المتعلقة بالأبحاث السابقة والتي تم إنشاؤها كبحث يحتوي على نظريات من مصادر مختلفة ذات صلة. أظهرت نتائج هذا البحث طبيعة قيود عوامل التكامل بالكسور الجزئية باستخدام متباينة $Young$ في فضاء $Morrey$,. في المستقبل، يمكن لهذا البحث إضافة كنوز علمية في مجال التحليل.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Operator pada umumnya dikenal sebagai suatu pemetaan atau fungsi pada pada ruang vektor. Pada bidang kalkulus fungsi diidentikkan dengan bilangan real dan bilangan yang bernilai real atau R. Sedangkan pada analisis fungsional akan dibahas suatu operator dalam ruang umum seperti ruang metrik dan ruang vektor. Pada dasar terminologi pengertian teori operator mendefinisikan suatu T dikatakan sebuah operator dari X ke Y dengan notasi $T: X \to Y$ yang artinya bahwa T adalah operator dengan domain X dan range di Y yang kemudian disebut operator linear (Hutson, 2005).

Pada operator linear juga memiliki contoh penerapan yang memenuhi salah satunya adalah mengenai integral. Dalam buku Kreyzig dijelaskan suatu operator linear T dari $C[a, b]$ injektif terhadap dirinya sendiri. Selain itu juga dijelaskan mengenai keterbatasan operator linear yang menggunakan norm didalamnya. Berdasarkan hasil dari keterbatasan tersebut, diberikan contoh dari operator integral yang berkaitan dengan fungsi kernel dari suatu operator dalam membuktikan keterbatasannya(Kreyzig, 1978). Sehubungan dengan hal tersebut penelitian ini akan mengangkat topik salah satu operator integral yang sudah dikaji sejak tahun 1920 oleh Hardy Littlewood, yaitu operator integral fraksional atau riesz potensial(Gunawan & Sihwaningrum, 2009).

Operator integral fraksional dinotasikan sebagai I_α pertama kali dibuktikan terbatas di ruang L^p ke L^q. Jika mengikuti definisi operator maka dapat dituliskan sebagai $I_\alpha f: L^p \to L^q$. Beberapa penelitian yang dilakukan menggunakan ketaksamaan dan ruang yang berbeda – beda. Di tahun 1930 pengembangan ketaksamaan baru oleh Sobolev untuk menyempurnakan hasil Hardy Littlewood di tahun 1920 untuk membuktikan keterbatasan operator integral fraksional terbatas di ruang Lebesgue menggunakan ketaksamaan yang dinamakan ketaksamaan Hardy Littlewood Sobolev(Gunawan & Sihwaningrum, 2009).

Tidak hanya itu, perumuman ruang Lebesgue menjadi ruang Morrrey yang dilakukan oleh C. Morrey juga menjadikan perluasan topik baru mengenai operator integral fraksional semakin bertambah. Seperti ketaksamaan Spanne yang membuktikan operator integral fraksional terbatas dari $L^{p,\lambda}$ ke $L^{q,\lambda q/p}$ untuk $1 < p < \frac{n}{p}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, 0 \leq \lambda < n.$ Kemudian dibuktikan lagi oleh penelitian Adam – Chiarenza Frasca menggunakan syarat yang berbeda (Gunawan & Nakai, 2004).

Menyambung kembali mengenai kernel yang ada pada operator integral sebelumnya, hal tersebut juga berlaku pada operator integral fraksional. Menggunakan fungsi kernel tersebut suatu operator integral fraksional dapat melakukan konvolusi fungsi kernel dan fungsi biasa. Jika dikatakan fungsi kernel adalah f dan g juga fungsi yang keduanya terdefinisi di $\mathbb{R}$, maka didapatkan konvolusi dari f dan g akan dilambangkan menjadi $f * g$. Konvolusi fungsi ini akan identik dengan suatu ketaksamaan yang juga dapat digunakan sebagai pembuktian keterbatasan operator integral fraksional (Mehmood et al., 2022).

Pada tahun 2022, Saba, dkk menjelaskan dan membuktikan bahwa dari konvolusi fungsi dapat dibentuk suatu ketaksamaan Young dengan kasus yang disederhanakan. Hal itu bertujuan untuk membuktikan keterbatasan Bessel Riesz di ruang Lebesgue (Mehmood et al., 2021). Meskipun pada artikel yang diterbitkan menggunakan Bessel Riesz, penulis akan mencobakan bagaimana penerapan yang dapat dilakukan di Riesz Potensial atau operator integral fraksional. Hal ini memungkinkan untuk dilakukan, dengan hanya menyesuaikan kernel dan syarat batas.

Beberapa sifat keterbatasan operator integral fraksional yang dijelaskan oleh Saba dalam artikelnya adalah sifat khusus dengan mencobakan syarat ruang Lebesgue $q = 1$, dan $s = p$ untuk suatu bilangan di ruang fungsi $1 < p, q, s < \infty$ (Mehmood et al., 2021). Selanjutnya untuk membuktikan keterbatasan di ruang Morrey diperlukan syarat keanggotan menjadi fungsi pada ruang tersebut, yang kemudian akan dibuktikan keberlakuannya menggunakan ketaksamaan Young. Dalam pembuktiannya, Saba menggunakan ketaksamaan Holder diawal untuk dapat memisahkan dual dari ruang Lebesgue. Sifat terakhir dari pembuktian yang dilakukan adalah preposisi yang didapatkan dari pembuktian yang sudah dilakukan di ruang Lebesgue dengan $1 < p < \infty$.

Membahas mengenai keterbatasan operator, ada beberapa kondisi yang ditentukan untuk dapat membuktikan bahwa keterbatasan suatu ruang, dalam hal ini ruang Morrey. Sama halnya mengingatkan manusia bahwa tidak ada suatu hal pun yang tidak memiliki batasan. Segala hal di dunia ini ada aturan yang mengikat dan memiliki batasan agar semesta dapat berjalan dengan teratur, seperti firman Allah dalam QS. Ar- Rahman: 33

يٰمَعْشَرَ الْجِنِّ وَالْاِنْسِ اِنِ اسْتَطَعْتُمْ اَنْ تَنْفُذُوْا مِنْ اَقْطَارِ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ فَانْفُذُوْاۗ لَا تَنْفُذُوْنَ اِلَّا بِسُلْطٰنٍۚ – ٣٣

(Kementrian Agama RI, 2019).

Artinya: *"Wahai golongan jin dan manusia! Jika kamu sanggup menembus (melintasi) penjuru langit dan bumi, maka tembuslah. Kamu tidak akan mampu menembusnya kecuali dengan kekuatan (dari Allah)." (QS. Ar-Rahman: 33)*

Ayat tersebut menerangkan bahwa tidak ada jin dan manusia yang dapat melewati batas kemampuan yang ditentukan kecuali atas kekuatan dari Allah. Quraish Shihab dalam bukunya menyebutkan bahwa ayat ini mengarah pada keterbatasan makhluk Allah dalam mengetahui keilmuan yang Allah miliki. Bahkan dalam ayat yang lain, Allah memperingati manusia untuk tidak melewati batas dalam mempertanyakan hal yang sudah menjadi ketentuan Allah.

Segala sesuatu yang ada di dunia ini memiliki keterbatasan, termasuk pada topik yang akan dibahas yaitu operator integral fraksional. Berdasarkan fakta tersebut, para peneliti akhirnya secara bertahap untuk menguji coba sampai manakah operator tersebut terbatas di berbagai ruang. Semua pembuktian yang dilakukan pada keterbatasan operator tidak terlepas pada definisi awal operator linear yang kurang dari sama dengan suatu bilangan real, hal ini menunjukkan bahwa manusia tidak akan pernah sampai batas tersebut sampai mencoba dengan usaha semaksimal mungkin untuk mencapainya. Apabila peneliti sebelumnya telah pembuktian keterbatasan operator integral fraksional pada ruang homogen dan ketaksamaan yang sama, maka penelitian ini akan berfokus pada penjabaran pembuktian keterbatasan operator integral fraksional menggunakan ketaksamaan Young. Salah satu upayanya adalah menerapkan perintah Allah untuk selalu berusaha maksimal dalam belajar ilmu Allah.

1.2 Rumusan Masalah

Dalam penelitian ini permasalahan yang akan dibahas adalah: Bagaimana pembuktian sifat keterbatasan operator integral fraksional $I_\alpha f$ menggunakan ketaksamaan Young pada ruang Morrey ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui bagaimana membuktikan sifat keterbatasan operator integral fraksional $I_\alpha f$ menggunakan ketaksamaan Young pada ruang Morrey.

1.4 Manfaat Penelitian

1. Manfaat bagi peneliti

   Peneliti dapat mempelajari lebih dalam mengenai materi perkuliahan yang mendukung penelitian ini antara lain analisis real, analisis fungsional, teori operator, dan teori integral yang sebelumnya belum dipahami dengan baik.

2. Manfaat bagi instansi

   Peminatan bidang analisis dapat dikatakan sangat jarang, sehingga dengan adanya penelitian ini akan menambah khazanah penelitian di bidang analisis dalam Program Studi Matematika.

3. Manfaat bagi pembaca

   Penelitian ini memberikan tambahan referensi untuk penjelasan keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Morrey menggunakan ketaksamaan Young.

1.5 Batasan Masalah

Pada penelitian ini berfokus pada fungsi yang bernilai real, terukur, dan terintegral di $\mathbb{R}^n$. Dan untuk pembuktiannya menggunakan metode ketaksamaan Young's.

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Sebelum melanjutkan penelitian, akan dijelaskan beberapa materi pendukung yang berisikan definisi - definisi dan teorema – teorema yang berkaitan dengan topik yang akan dijelaskan pada Bab Pembahasan.

2.1.1 Ruang Vektor

Ruang vektor akan menjadi dasar teori pada penelitian ini, karena elemen yang terdapat pada ruang vektor dapat berupa ruang, barisan, bilangan, maupun fungsi yang dapat dilakukan penjumlahan dan perkalian dengan suatu skalar. Definisi mengenai ruang vektor akan digeneralisasikan dengan lapangan L. Pada analisis fungsional, L dapat menjadi suatu ruang bernilai $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$.

Definisi 2.1 Ruang Vektor

Suatu himpunan tak kosong X dengan dua operasi $+$ dan . dikatakan suatu ruang vektor atas lapangan L bila memenuhi 10 aksioma berikut, yakni untuk setiap vektor $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ dan untuk setiap skalar $\alpha, \beta \in L$

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in X$
2. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$
3. $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$
4. $\exists!\, \boldsymbol{0} \in X$, sehingga $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$
5. $\exists! -\boldsymbol{x} \in X$, sehingga $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
6. $\alpha\boldsymbol{x} \in X$
7. $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$
8. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$

9. $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$

10. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

(Kreyzig, 1978).

Contoh 2.1.1

Diberikan suatu vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{y} = (y_1\ , y_2), \boldsymbol{z} = (z_1, z_2), \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$ dan $\alpha, \beta \in L$**.** Tunjukkan bahwa $\mathbb{R}^2$ adalah ruang vektor atas lapangan L.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{R}^2$ memenuhi sifat – sifat ruang vektor

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$

2. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2) = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$

3. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = [(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] + (z_1, z_2) = (x_1, x_2) + [(y_1, y_2) + (z_1, z_2)] = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$

4. $\exists!\, \boldsymbol{0} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, sehingga

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} &= (0,0) + (x_1, x_2) = (x_1, x_2) + (0,0) \\ &= (x_1, x_2) \end{aligned}$$

5. $\exists! - \boldsymbol{x} = (-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$, sehingga

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) &= (x_1, x_2) + (-x_1, -x_1) \\ &= (-x_1, -x_1) + (x_1, x_2) \\ &= (0,0) \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

6. $\alpha(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

7. $$\begin{aligned} \alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= \alpha\big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big) \\ &= \alpha(x_1, x_2) + \alpha(y_1, y_2) \\ &= \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

8. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x} = (\alpha+\beta)(x_1, x_2)$

$= \alpha(x_1, x_2) + \beta(x_1, x_2)$

$= \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$

9. $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = \alpha\big(\beta(x_1, x_2)\big)$

$= (\alpha\beta)(x_1, x_2)$

$= (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$

10. $1\boldsymbol{x} = 1(x_1, x_2) = (x_1, x_2) = \boldsymbol{x}$

2.1.2 Ruang Metrik

Definisi 2.2 Ruang Metrik

Sebuah ruang metrik adalah suatu pasangan (X, d), di mana X adalah sebuah himpunan dan d adalah sebuah metrik di X (atau jarak fungsi di X), sehingga suatu fungsi didefinisikan di $X \times X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ didapatkan aksioma sebagai berikut:

(M1) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > 0$

(M2) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

(M3) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

(M4) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$ (Ketaksamaan segitiga)

(Kreyzig, 1978)

Contoh 2.2.1

Diberikan $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x - y|$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ adalah ruang metrik.

(M1) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > 0$

$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 + y_2|$ keduanya positif

(M2) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0, \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

Akan dibuktikan $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0, \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$$

$$|x_1 - y_1| \geq 0, x_1 = y_1$$

$$|x_2 - y_2| \geq 0, x_2 = y_2$$

Sehingga didapatkan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

Selanjutnya akan dibuktikan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Rightarrow d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$,

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 + y_2|$

$= 0 + 0$

$= 0$

Terbukti

(M3) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

Ambil sembarang $x, y \in \mathbb{R}^2$

$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 + y_2|$

$= |-1(y_1 - x_1)| + |-1(y_2 - x_2)|$

$= d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

(M4) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$

Ambil sembarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$

$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

$= |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2|$

$\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|$

$\leq |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| + |z_1 - y_1| + |z_2 - y_2|$

$\leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$

Sehingga didapatkan $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 + y_2|$ $(\mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}, d)$ merupakan ruang metrik.

2.1.3 Ruang Bernorma

Definisi 2.3 Ruang Bernorma

Diberikan suatu ruang vektor X didefinisikan $\|.\| : X \rightarrow \mathbb{R}$. Suatu nilai di vektor $x \in X$ dinotasikan dengan $\|x\|$ yang memenuhi

(N1) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$

(N2) $\|\boldsymbol{x}\| = 0, x = 0$

(N3) $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$

(N4) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

sehingga $(X. \|.\|)$ dikatakan sebagai ruang bernorma.

Contoh 2.3.1

$\mathbb{R}^n$, $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

a. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x|$

b. $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x|^2\right)^{1/2}$

c. $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x|^p\right)^{1/p}$

d. $\|x\|_\infty = \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^n{}_1$

Ruang fungsi $C[a, b]$

$C[a, b] = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\ fungsi\ kontinu\}$, suatu $f \in C[a, b]$

a. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(y)| dy$

b. $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(y)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

c. $\|f\|_\infty = \sup\{|f(y)|,\ f \in [a, b]\}$

(Kreyzig, 1978)

Contoh 2.3.2

Untuk setiap $x, y \in X$ dan skalar α. Suatu norm di X mendefinisikan metrik d di X yang didapatkan dengan

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|x - y\|, \qquad (x, y \in X)$$

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa norm di atas adalah metrik.

(M1) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|x - y\| \geq 0$

(M2) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|x - y\| = 0,$

$\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M3) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = -1\|y - x\| = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

(M4) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \|x - z\| + \|y - z\|$

Ruang bernorma tersebut dinotasikan dengan $(X, \|\cdot\|)$ (Kreyzig, 1978). Dari metrik yang diinduksi norm, akan dihasilkan bola – bola terbuka yang dinotasikan sebagai $e \in X, r > 0$ didapatkan $B(e, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|e - x\| < r\}$.

2.1.4 Ruang Lebesgue

Definisi 2.4 Ruang Lebesgue

Ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang vektor yang beranggotakan semua fungsi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ untuk $1 \leq p < \infty$ didefinisikan sebagai

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty$$

Sedangkan untuk $p = \infty$, anggotanya adalah semua fungsi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ didefinisikan

$$\|f: L^\infty\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty$$

Ketika ditambahkan norm untuk $1 \leq p < \infty$ maka bisa dituliskan sebagai berikut

$$\|f : L^p\| \ := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

(Fefferman, 2005)

Konsep penting yang perlu dipahami kemudian adalah dual index ke p (untuk $1 \leq p \leq \infty,$). Sering dinotasikan sebagai p' , tapi kemudian dinotasikan dengan q pada penelitian ini.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(Lieb & Loss, 2001)

2.1.5 Ruang Morrey

Ruang Morrey merupakan bentuk perumunan dari Ruang Lebesgue dengan menambahkan ukuran λ. Ruang Morrey didefinisikan sebagai berikut;

Definisi 2.5 Ruang Morrey

Untuk $1 \leq p < \infty$ dan $0 \leq \lambda \leq n$, ruang Morrey $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ dengan $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ didefinisikan oleh

$$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \middle| \left\| f : L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \right\| < \infty \right\}$$

Dengan norm

$$\left\| f : L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \right\| = \sup_{B = B(e,r)} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_B \ |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$|B(e,r)|$ menyatakan bola buka di $\mathbb{R}^n$ yang berpusat di $e \in \mathbb{R}^n$ dan berjari-jari di r. Untuk setiap bola $B = B(e,r)$ berdimensi n didapatkan fakta $|B| \leq Cr^n$ di mana n adalah dimensi tetap dan C adalah konstanta yang tidak bergantung pada e dan r. Ruang Morrey identik dengan perluasan ruang Lebesgue untuk kasus $L^{p,0} = L^p$ dan $L^{p,n} = L^\infty$. Ruang Morrey pertama kali dikenalkan oleh C.B

Morrey untuk mempelajari perilaku solusi pada persamaan differensial parsial (Sihwaningrum et al., 2020).

2.1.6 Operator Linear

Suatu pemetaan pada ruang vektor disebut dengan operator. Menariknya adalah dalam operator tetap mempertahankan 2 operasi aljabar pada ruang vektor. Sehingga operator linear didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.6 Operator Linear

Sebuah operator linear T adalah sebuah pemetaan sedemikian sehingga

a Domain $D(T)$ dari T adalah sebuah ruang vektor dan range $R(T)$ juga ruang vektor atas pada lapangan yang sama.

b Untuk setiap $x, y \in D(T)$ dan skalar α

$$T(x+y) = T_x + T_y$$

$$T(\alpha x) = \alpha T_x$$

Operator linear dapat dituliskan sebagai berikut

$$T : X \to Y$$

Contoh 2.6.1

a. Operator Identitas

Suatu operator identitas $I_x : X \to X$ didefinisikan dengan $I_x x = x$ untuk setiap $x \in X.$ Dapat dituliskan I untuk I_x; sehingga $I_x = x$

b. Operator Nol

Suatu operator nol $0 : X \to Y$ didefinisikan dengan $0x = 0$ untuk setiap $x \in X$

c. Turunan

Misalkan X adalah ruang vektor untuk semua polinomial di $[a, b]$ didefinisikan operator linear T di X dengan

$$T_x(t) = x'(t)$$

Untuk setiap $x \in X$.

d. Integral

Sebuah operator linear T dari $C[a, b]$ didefinisikan sebagai berikut

$$T_x(t) \int_a^t x(\tau)d\tau \qquad t \in [a, b]$$

(Kreyzig, 1978)

2.1.7 Keterbatasan Operator

Definisi 2.7 Keterbatasan Operator Linear

Misalkan X dan Y adalah ruang norm dan $T : D(T) \rightarrow Y$ adalah sebuah operator linear, di mana $D(T) \subset X$. Operator dikatakan terbatas jika terdapat sebuah bilangan real c sedemikian sehingga untuk setiap $x \in D(T)$,

$$||T_x|| \leq c||x||$$

Ketika dilakukan pembagian, sehingga kemungkinan kecil bahwa $x \in D(T)$ bukan nol

$$\frac{||T_x||}{||x||} \leq c, \qquad x \neq 0$$

Dengan begitu terlihat bahwa c setidaknya lebih besar dari supremum $D(T) - \{0\}$. Sedangkan untuk menjawabnya adalah penggunan supremum yang dituliskan sebagai $||T||$adalah

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|T_x\|}{\|x\|}$$

$\|T\|$ dikatakan sebagai norm dari operator T, jika $D(T) = \{0\}$. didefinisikan $\|T\| = 0$ dari sini didapatkan $T = 0$, ketika $T.0 = 0$. Catat bahwa sebelumnya $c = \|T\|$, maka

$$\|T_x\| \leq \|T\|\|x\|$$

Untuk menguatkan kondisi norm di atas, maka ditambahkan Lemma berikut (Kreyzig, 1978)

Lemma 2.7.1

Misalkan T adalah operator linear terbatas seperti yang didefinisikan sebelumnya, maka

a. Sebuah rumus alternatif untuk norm T adalah

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\|$$

b. Norm didefinisikan sebagai $\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$, memenuhi syarat ruang bernorma

Bukti:

a. Tuliskan $\|x\| = a$ dan himpunan $y = \left(\frac{1}{q}\right) x$, di mana $x \neq 0$. Kemudian $\|y\| = \frac{\|x\|}{a} = 1$, dan saat T adalah linear didapatkan

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{1}{a} \|Tx\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \left\| T\left(\frac{1}{a} x\right) \right\| = \sup_{\substack{y \in D(T) \\ \|y\|=1}} \|Ty\|$$

Jika $x = y$, maka didapatkan hasil yang sebelumnya.

b. (N1) terbukti, jika $\|0\| = 0$, maka $\|T\| = 0$ dari $Tx = 0$ utuk setiap $x \in D(T)$ sehingga $T = 0$. Sedangkan (N2) jelas. Sedangkan (N3) didapatkan dari

$$\sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha|\|Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|, x \in D(T)$$

Dan (N4) didapatkan dengan

$$\sup_{\|x\|=1} \|(T_1 + T_2)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x + T_2 x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2 x\|,$$

$$x \in D(T)$$

(Kreyzig, 1978)

2.1.8 Operator integral

Salah satu contoh dari operator linear adalah operator integral dengan definisi berikut;

Definisi 2.8 Operator Integral

Didefinisikan sebuah operator integral $T: C[0,1] \to [0,1]$ dengan

$$y = Tx$$

di mana

$$y(t) = \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

k dikatakan sebagai fungsi kernel T dan diasumsikan kontinu dan tertutup di $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ di $t\tau$, di mana $\mathbb{R} = [0,1]$ ini adalah operator linear. Untuk membuktikan T terbatas, ingat bahwa kekontinuan k di bola tertutup berimplikasi bahwa k terbatas, jika $|k(t,\tau)| \leq k_0$ untuk $(t,\tau) \in G$ dengan k_0 adalah bilangan real, maka

$$|x(t)| \leq \underset{t \in \mathbb{R}}{\text{maks}} |x(t)| = \|x\|$$

Sehingga,

$$\|y\| = \|Tx\| = \underset{t\in\mathbb{R}}{\text{maks}} \left| \int_0^1 k(t,\tau)x(t)d\tau \right|$$

$$\leq \underset{t\in\mathbb{R}}{\text{maks}} \int_0^1 |k(t,\tau)|\,|x(\tau)|\,d\tau$$

$$\leq k_0\|x\|$$

Hasilnya $\|Tx\| \leq k_0\|x\|$, dengan $k_0 = c$. Sehingga T terbatas.

(Kreyzig, 1978)

2.1.9 Operator Integral Fraksional

Definisi 2.9 Operator Integral Fraksional

Misalkan f adalah fungsi terukur bernilai real di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, dan $0 < \alpha < n$. Integral fraksional dari f dari order α didefinisikan dengan

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \;\; x \in \mathbb{R}^n$$

apabila terdapat suatu integral. Untuk f bervariasi, pemetaan didefinisikan dengan $I_\alpha : f \to I_\alpha f$, yaitu suatu konvolusi operator dengan kernel $|x|^{\alpha-n}$ dikatakan sebagai operator integral fraksional dengan order α (Evans & Gariepy, 1992).

Sebagai implementasi definisi di atas, dapat disederhanakan dengan contoh operator di $\mathbb{R}$. Suatu fungsi kontinu f terdefinisi di interval $[a,b] \in \mathbb{R}$ memenuhi

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t), \;\; x,y \in [a,b]$$

Biasanya, setelah didapatkan nilai dan integral di y, suatu rumus lapangan ``didapatkan

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x) - f(y)|dy \leq \int_a^b |f'|, \;\; x \in [a,b]$$

Sehingga,

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x) - f(y)|dy \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x) - f(y)|dy$$

diperoleh keataksamaan

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)dy \right| \leq \int_a^b |f'\ |, \quad x \in [a, b]$$

dari proses diatas dapat dilihat bahwa terjadi konvolusi pada operator integral fraksional.

(Wheeden & Zygmund, 2015)

2.1.10 Ketaksamaan Young

Sebelum membahas mengenai ketaksamaan Young, akan dijelaskan terkait konvolusi fungsi yang menjadi definisi awal terbentuknya ketaksamaan Young.

Definisi 2.10 Konvolusi Fungsi

Untuk beberapa fungsi terukur $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dan $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, konvolusi dua fungsi $(f * g)(x)$ didefinisikan

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy,\ x \in \mathbb{R}^n$$

apabila terdapat suatu integral didalamnya (Wheeden & Zygmund, 2015).

Dari definisi sebelumnya, didapatkan beberapa teori salah satunya adalah sebagai berikut;

Teorema 2.11 Konvolusi Fungsi

Misalkan $1 \leq p \leq \infty, f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dan $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sehingga $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\|f * g\| \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

Bukti:

Misalkan bahwa $1 < p \leq \infty$, adalah ketika $p = 1$, dibuktikan hasil dari f dan g adalah nonnegatif. Kemudian $f * g$ nonnegatif dan terukur di $\mathbb{R}^n$ jika $p = \infty$.

$$(f * g)(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_\infty g(x-y)dy = \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)dy = \|f\|_\infty \|g\|_1$$

Untuk itu dinyatakan $\|f * g\| \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$. Jika $1 < p < \infty$, dituliskan

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[f(y) g(x-y)^{\frac{1}{p}} \right] g(x-y)^{1/p'} dy, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Menggunakan Ketaksamaan Holder dengan eksponen p dan p'

$$(f * g)(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^p g(x-y)\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)dy \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= (f^p * g)(x)^{1/p} \|g\|^{\frac{1}{p'}}{}_1$$

Sehingga didapatkan

$$\|f * g\|_p^p \leq \|f\|_p^p \|g\|_1^{1+(p/p')} = \|f\|_p^p \|g\|_1^p$$

Terbukti jika f dan g adalah nonnegatif dan $f * g$ nonnegatif dan terukur di $\mathbb{R}^n$ jika $p = \infty$ (Wheeden & Zygmund, 2015).

Teorema 2.11 Ketaksamaan Young

Misalkan p dan q memenuhi $1 \leq p, q \leq \infty$ dan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, dan misalkan s didefinisikan dengan $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Jika $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dan $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, sehingga $f * g \in L^s(\mathbb{R}^n)$ dan

$$\|f * g\|_s \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Perhatikan bahwa ketika $q = 1$, akan membentuk sesuai dengan teorema konvolusi sebelumnya.

(Mehmood et al., 2022)

2.2 Usaha Maksimal Manusia dalam Keterbatasan

Manusia diberikan stimulus untuk dapat dapat berpikir secara logika. Secara etimologi logika adalah salah satu pertimbangan akal pikiran yang diutarakan lewat kata dan dinyatakan dalam bahasa. Menurut Aristoteles logika adalah ajaran berpikir secara ilmiah membicarakan bentuk pikiran itu sendiri dan hukum-hukum yang menguasai pikiran. Dari sini juga suatu ilmu pengetahuan manusia juga berkembang.

Dalam islam, orang yang berilmu memiliki derajat yang tinggi seperti pada Q.S Al Mujadillah: 11

يٰٓاَيُّهَا الَّذِيْنَ اٰمَنُوْٓا اِذَا قِيْلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوْا فِى الْمَجٰلِسِ فَافْسَحُوْا يَفْسَحِ اللّٰهُ لَكُمْۚ وَاِذَا قِيْلَ انْشُزُوْا فَانْشُزُوْا

يَرْفَعِ اللّٰهُ الَّذِيْنَ اٰمَنُوْا مِنْكُمْۙ وَالَّذِيْنَ اُوْتُوا الْعِلْمَ دَرَجٰتٍۗ وَاللّٰهُ بِمَا تَعْمَلُوْنَ خَبِيْرٌ

(Kementrian Agama RI, 2019).

Artinya:

11. *Wahai orang-orang yang beriman, apabila dikatakan kepadamu "Berilah kelapangan di dalam majelis-majelis," lapangkanlah, niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Apabila dikatakan, "Berdirilah," (kamu) berdirilah. Allah niscaya akan mengangkat orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu beberapa derajat. Allah Maha Teliti terhadap apa yang kamu kerjakan.*

Zubdatut Tafsir Min Fathil Qadir menjelaskan ayat di atas bahwa Allah akan mengangkat derajat orang yang berilmu di antara kalian dengan kemuliaan di dunia dan di akhirat. Maka barangsiapa yang beriman dan memiliki ilmu, maka Allah akan mengangkat derajatnya dengan keimanannya itu dan mengangkat derajatnya dengan ilmunya pula (As Syaukani, 2008).

Ketinggian keilmuan disandarkan dengan ketinggian Allah sesuai dengan yang diungkap dalam Q.S Al-Baqarah: 216 dan Q.S Ali Imran: 167

...وَاللّٰهُ يَعْلَمُ وَاَنْتُمْ لَا تَعْلَمُوْنَ

(Kementrian Agama RI, 2019).

Artinya : *"Allah mengetahui, sedang kamu tidak mengetahui"*

وَاللّٰهُ اَعْلَمُ بِمَا يَكْتُمُوْنَۚ

Artinya : *"Dan Allah lebih mengetahui apa yang mereka sembunyikan."*

Dari kedua ayat di atas, menjelaskan bahwa ketinggian ilmu Allah akan selalu melebihi keilmuan yang diberikan kepada manusia. Akan selalu ada hal yang tidak akan diketahui manusia dalam mempelajari ilmu yang ada di dunia, sehingga ilmu pengetahuan akan berkembang sepanjang waktu. Salah satu rahasia ilmu Allah yang disebutkan adalah pertanyaan orang – orang israil tentang ruh, sehingga Allah pun menegaskan dalam Q.S Al-Isra': 85

(Kementrian Agama RI, 2019).

وَيَسْـَٔلُوْنَكَ عَنِ الرُّوْحِۗ قُلِ الرُّوْحُ مِنْ اَمْرِ رَبِّيْ وَمَآ اُوْتِيْتُمْ مِّنَ الْعِلْمِ اِلَّا قَلِيْلًا

Artinya : *" Dan mereka bertanya kepadamu (Muhammad) tentang ruh. Katakanlah, "Ruh itu termasuk urusan Tuhanku, sedangkan* ***kamu diberi pengetahuan hanya sedikit.****"*

Berdasarkan tafsir as-Saadi oleh Syaikh Abdurrahman bin Nashir as-Sa'di, ayat ini mengandung cara untuk membumkam orang-orang yang suka bertanya - tanya tentang permasalahan yang dimaksudkan melainkan menentang. Sehingga dalam konteks pembahasan keterbatasan yang ada pada operator integral fraksional membuktikan bahwa ketetapan Allah dalam membatasi setiap hal yang ada di dunia agar manusia terus berusaha memperbaiki diri. Selain itu penggunaan operator maksimal dalam pembuktian keterbatasan operator juga menggambarkan bahwa usaha maksimal dari manusia mengembangkan diri hingga mencapai batasnya. Salah satu dari pembuktian keterbatasan operator integral fraksional adalah Ketaksamaan Young yang nantinya akan dibahas dalam penelitian ini.

2.3 Keterbatasan Operator Integral Fraksional pada Morrey Klasik Menggunakan Ketaksamaan Young

Pada penelitian ini, operator integral fraksional $H_\alpha : (0, \infty) \to (0, \infty)$, dengan mengikuti definisi

$$H_\alpha(|x|) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}, \qquad 0 < \alpha < n$$

Selanjutnya, akan didefinisikan fungsi yang berada pada ruang Morrey

Definisi 4.1 Ruang Morrey

Untuk $1 \leq p < \infty$, dan ukuran $0 < \lambda < n$ ruang Morrey $L^{p,\lambda} := L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai ruang semua fungsi $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\|f : L^{p,\lambda}\| := \sup_{B=B(e,r)} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(e,r)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} < \infty$$

di mana, $B(e, r)$ menyatakan bola buka yang berpusat di $e \in \mathbb{R}^n$ dan berjari-jari di $r > 0$.

Berdasarkan definisi konvolusi pada definisi 2.10, didapatkan suatu konvolusi pada operator integral fraksional dengan diberikan $H_\alpha : (0, \infty) \to (0, \infty)$, dan $H_\alpha : f \to I_\alpha f$ sehingga didapatkan

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x - y|) f(y) dy$$

Definisi 2.3.2 Konvolusi Fungsi

Untuk beberapa fungsi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dan $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, didefinisikan

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy,\ x \in \mathbb{R}^n$$

anggaplah $f * g$ adalah sebagai implementasi pada H_α. Sehingga hasil di atas dapat dituliskan sebagai berikut;

Torema 2.3.1 (Ketaksamaan Young's)

Jika $f \in L^p$ dan $H_\alpha \in L^q$, maka terdapat $C_{p,q,s} > 0$ sedemikian sehingga

$$\|I_\alpha f: L^s\| \leq C\|H_\alpha: L^q\|\|f: L^p\|, \qquad \frac{1}{s} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1$$

Teorema 2.3.2 ***(Special Case)***

Asumsikan $p, q, s \in [1, \infty]$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

Jika $f \in L^p$ dan $g \in L^p$, kemudian $f * g$ terdapat di mana – mana dan termasuk L^s sehingga

$$\|f * g\|_s \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Menggunakan kasus spesial teorema Young's terjadi ketika $q = 1$, sehingga $s = p$ dan teorema menjadi

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

Bukti pada Teorema 2.1 dan teorema yang akan dibuktikan adalah sebagai berikut

Teorema 2.3.2

Terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $f \in L^1(\mu)$

$$\|I_\alpha f: L^p(\mu)\| \leq C\|H_\alpha(|x|): L^p(\mu)\|\|f: L^1(\mu)\|, 1 \leq p < \frac{n}{n-\alpha}$$

Akan dibuktikan untuk memperoleh keterbatasan yang akan dibuktikan pada bab pembahasan

$$\|I_\alpha f: L^p\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |H_\alpha(|x-y|)f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leq \|I_\alpha f: L^p\|$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x-y|)f(y)d\mu(y)\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|H_\alpha(|x-y|)|f(y)|\right|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} d\mu(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |H_\alpha(|x-y|)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C\|H_\alpha(|x|): L^p(\mu)\| \|f: L^1(\mu)\|$$

(Mehmood et al., 2022)

Operator integral fraksional akan dibuktikan terbatas di ruang Morrey menggunakan pembuktian cara ketaksamaan Young.

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode penelitian kualitatif. Penelitian kualitatif dapat diartikan sebagai metode yang tingkat perkembangan dan kematangan masing-masing metode ditentukan juga oleh bidang keilmuan yang memiliki sejarah perkembangannya. Berkaitan dengan penelitian ini, penulis mencoba untuk mengembangkan pembuktian melalui penjabaran setiap langkah yang dilakukan untuk membuktikan topik yang diambil. Tentunya dengan kajian penelitian yang sudah dilakukan sebelumnya. Salah satu ciri dari penelitian kualitatif menurut Sugiyono, adalah verifikasi dengan mengadakan analisis sejak awal penelitian dan dianalisa untuk mencapai hasil yang memadai (Sugiyono, 2014). Hal tersebut sesuai dengan materi yang dikaji dalam Bab 2, di mana keseluruhan dari teori yang disebutkan akan dibuktikan dengan teorema yang akan dibahas pada Bab Pembahasan.

3.2 Pra Penelitian

Pada pra penelitian diawali dengan melakukan beberapa persiapan dengan mencari beberapa literatur berupa buku, artikel, jurnal, dan referensi lainnya yang berkaitan dengan topik yang diangkat. Selanjutnya melakukan pengajuan topik beserta dengan pembimbing yang sesuai dengan topik yang akan diteliti sehingga penelitian ini dapat dilaksanakan sesuai dengan arahan pembimbing yang sudah ditentukan oleh program studi.

3.3 Tahapan Penelitian

Adapun tahapan untuk mencapai tujuan penelitian adalah sebagai berikut.

1. Studi Literatur.

2. Mengidentifikasi keanggotaan fungsi di ruang Morrey.
3. Mengidentifikasi konvolusi fungsi pada operator integral fraksional.
4. Membentuk ketaksamaan Young berdasarkan konvolusi fungsi.
5. Membuktikan keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Morrey.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Keanggotaan Fungsi di Ruang Morrey

Pada penelitian ini, operator integral fraksional $H_\alpha : (0,\infty) \to (0,\infty)$, dengan mengikuti definisi

$$H_\alpha(|x|) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}, \qquad 0 < \alpha < n$$

Selanjutnya, akan didefinisikan fungsi yang berada pada ruang Morrey

Definisi 4.1 Ruang Morrey

Untuk $1 \leq p < \infty$, dan ukuran $0 < \lambda < n$ ruang Morrey $L^{p,\lambda} := L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai ruang semua fungsi $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\|f : L^{p,\lambda}\| := \sup_{B=B(e,r)} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(e,r)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} < \infty$$

di mana, $B(e,r)$ menyatakan bola buka yang berpusat di $e \in \mathbb{R}^n$ dan berjari-jari di $r > 0$.

Berdasarkan definisi konvolusi pada definisi 2.10, didapatkan suatu konvolusi pada operator integral fraksional dengan diberikan $H_\alpha : (0,\infty) \to (0,\infty)$, dan pemetaan $H_\alpha : f \to I_\alpha f$ sehingga didapatkan

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x-y|) f(y) dy$$

Definisi 4.2 *(Growth Condition)*

Misalkan μ adalah sebarang ukuran di $\mathbb{R}^n$. Didefinisikan $\mu \in (GC)$, jika dan hanya jika terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga

$$\mu\big(B(e,r)\big) \leq Cr^n$$

untuk setiap bola terbuka $B(e,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x-e| < r\}$ di $\mathbb{R}^n$. Selanjutnya seluruh ruang yang dijelaskan kedapannya akan dikenakan ukuran μ antara lain $L^1(\mu)$, $L^p(\mu)$, dan $L^{p,\lambda}(\mu)$.

Lemma 4.3

Untuk menunjukkan bahwa kernel dari operator integral fraksional adalah bagian dari ruang Lebesgue adalah jika $\mu(B(e,r)) \sim r^n$, maka didapatkan

$$\int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x|)d\mu(x) < \infty$$

Di mana

$$H_\alpha(|x|) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$$

Bukti:

Misalkan

$$\int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x|)d\mu(x) = \int_{|x|<R} H_\alpha(|x|)d\mu(x) + \int_{|x|\geq R} H_\alpha(|x|)d\mu(x) \qquad (1)$$

dengan menyederhanakan

$$\int_{|x|<R} H_\alpha(|x|)d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-k-1}R\leq|x|<2^k R} H_\alpha(|x|)d\mu(x)$$

$$\sim \sum_{k=-\infty}^{-1} (2^k R)^{n-\alpha} \int_{|x|<2^{k+1}R} H_\alpha(|x|)d\mu(x) \leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} (2^k R)^{\alpha-n} \mu\left(n_{2^{k+1}R}(x)\right)$$

$$= C_1 \sum_{k=1}^{\infty} (2^k R)^{\alpha} \leq C_1 R^\alpha < \infty$$

dan

$$\int_{|x|\geq R} H_\alpha(|x|)d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k R \leq |x| < 2^{k+1} R} H_\alpha(|x|)d\mu(x)$$

$$= C_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k R)^{n-\alpha}} \leq C_2 \sum_{k=0}^{\infty} (2^k R)^{\alpha-n} = C_2 R^{\alpha-n} < \infty \, nbcdqa$$

untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$, dan $R > 0$ persamaan (1) diimplikasikan sebagai berikut

$$\int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x|)d\mu(x) = C(R^\alpha + R^{\alpha-n})$$

terdapat suatu bilangan $C > 0$ sedemikian sehingga

$$\int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x|)d\mu(x) < C$$

dituliskan suatu fungsi H_α

$$\|H_\alpha : L^1(\mu)\| = \int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x|)d\mu(x) \leq C, \quad \Rightarrow H_\alpha \in L^1(\mu)$$

untuk $1 \leq p < \infty$, didefinisikan $H_\alpha \in L^p(\mu)$, jika dan hanya jika

$$\|H_\alpha : L^p\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |H_\alpha(|x|)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

kemudian untuk $1 \leq p < \infty$, dengan $0 \leq \lambda < n$ didefinisikan $H_\alpha \in L^{p,\lambda}$, mengikuti (1) jika dan hanya jika

$$\left\|H_\alpha : L^{p,\lambda}\right\| = \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |H_\alpha(|x|)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

berdasarkan definisi di atas, didapatkan

$$\left\|H_\alpha : L^{p,\lambda}(\mu)\right\| < \infty \iff 1 \leq p < \frac{n}{n-\alpha}$$

sehingga untuk menyelidiki keanggotaannya adalah sebagai berikut

Teorema 4.4

Untuk setiap $R > 0$ didapatkan

$$\left\|H_\alpha : L^{p,\lambda}(\mu)\right\|^p \sim \sum_{k\in Z} \frac{1}{r^\lambda} \frac{1}{(2^k R)^{(\alpha-n)p}}, \quad 1 \le p < \frac{n}{n-\alpha}$$

Bukti:

Untuk setiap $R > 0$ didapatkan,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{r^\lambda} |H_\alpha(|x|)|^p d\mu(x) = \int_{0\le|x|} \frac{1}{r^\lambda} |H_\alpha(|x|)|^p d\mu(\mu)$$

$$= \sum_{k\in Z} \int_{2^k R \le |x| < 2^{k+1} R} \sim \sum_{k\in Z} \frac{1}{r^\lambda} \frac{1}{(2^k R)^{(\alpha-n)p}} \int_{2^k R \le |x| < 2^{k+1} R} d\mu(x)$$

$$\sim \sum_{k\in Z} \frac{1}{r^\lambda} \frac{1}{(2^k R)^{(\alpha-n)p}}$$

4.2 Konvolusi Fungsi dan Keterbatasan Operator Integral Fraksional di Ruang Morrey

Untuk membentuk ketaksamaan Young sebagai ketaksamaan yang menunjukkan operator integral fraksional terbatas di ruang Morrey, dibutuhkan konvolusi sebagai berikut.

Definisi 2.3.2 Konvolusi Fungsi

Untuk beberapa fungsi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dan $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, didefinisikan

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y) dy, \; x \in \mathbb{R}^n$$

anggap $f * g$ adalah sebagai implementasi pada H_α. Sehingga hasil di atas dapat dituliskan sebagai berikut;

Torema 2.3.1 (Ketaksamaan Young's)

Jika $f \in L^p$ dan $H_\alpha \in L^q$, maka terdapat $C_{p,q,s} > 0$ sedemikian sehingga

$$\|I_\alpha f : L^s\| \le C\|H_\alpha : L^q\| \|f : L^p\|, \qquad \frac{1}{s} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1$$

Teorema 2.3.2 ***(Special Case)***

Asumsikan $p, q, s \in [1, \infty]$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

Jika $f \in L^p$ dan $g \in L^p$, kemudian $f * g$ terdapat di mana – mana dan termasuk L^S sehingga

$$\|f * g\|_s \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Menggunakan kasus spesial teorema Young's terjadi ketika $q = 1$, sehingga $s = p$ dan teorema menjadi

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

Bukti dapat dilihat di Teorema 2.1

Selanjutnya, ketaksamaan Young pada teorema 2.3.1 akan dibuktikan oleh teorema berikut.

Teorema 4.4

Terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $f \in L^1(\mu)$

$$\left\| I_\alpha f : L^{p,\lambda}(\mu) \right\| \leq C \left\| H_\alpha(|x|) : L^{p,\lambda}(\mu) \right\| \|f : L^1(\mu)\|, 1 \leq p < \frac{n}{n - \alpha}$$

Bukti:

$$\|I_\alpha f : L^p(\mu)\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \left(\mu\big(B(e, r)\big)^{\frac{\lambda}{n}} \right) \left\| I_\alpha f : L^{p,\lambda}(\mu) \right\|$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{r^\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x - y|) f(y) d\mu(y) \right|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \left| H_\alpha(|x - y|) |f(y)| \right|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |H_\alpha(|x-y|)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C \left\| H_\alpha(|x|) \colon L^{p,\lambda}(\mu) \right\| \| f \colon L^1(\mu) \|$$

Teorema 4.5

Diberikan $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, $1 \leq p < \frac{n}{n-\alpha}$, dan $0 < \lambda < n$. Jika untuk beberapa $C_1 > 0, \mu\big(B(e,r)\big) < Cr^n$, $f \in L^{p,\lambda}(\mu)$, dan $H_\alpha \in L^{q,\lambda}(\mu)$, maka terdapat suatu $C_2 > 0$ sedemikian sehingga

$$\left\| I_\alpha f \colon L^{s,\lambda}(\mu) \right\| \leq C_2 \left\| H_\alpha(|x|) \colon L^{q,\lambda}(\mu) \right\| \left\| f \colon L^{p,\lambda}(\mu) \right\|$$

Bukti:

Dalam membuktikan mengikuti

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

menggunakan ketaksamaan Holder, kemudian untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$, dengan p' dan q' didapatkan

$$|I_\alpha f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{\frac{p}{s}} H_\alpha(|x-y|)^{\frac{q}{s}} |f(y)|^{\frac{1-p}{s}} H_\alpha(|x-y|)^{\frac{1-q}{s}} d\mu(y)$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x-y|)^q |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{\left(\frac{1-p}{s}\right)q'} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{q'}}$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x-y|)^{\left(\frac{1-q}{s}\right)p'} d\mu(y) \right)^{1/p'}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x-y|)^q |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \, d\mu(y) \right)^{\frac{1}{q'}}$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x-y|)^q d\mu(y) \right)^{1/p'}$$

lakukan perluasan dengan suatu ukuran λ

$$\left(\frac{1}{(\mu(B(e,r))^{\frac{\lambda}{n}}}\int_{B(e,r)}|f(y)|^p\ d\mu(y)\right)^{1/p} \leq C_1\|f:L^{p,\lambda}(\mu)\|$$

disisi lain, didapatkan

$$\int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x-y|)^q d\mu(y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2^k R)^{(n-\alpha)q}} \int_{2^k R\leq|x-y|<2^{k+1}R} d\mu(y)$$

menggunakan ukuran $\mu(B(e,r)) \leq C_1 r^n$, kemudian

$$\int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha\,(|x-y|)^q d\mu(y) \leq C_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2^k R)^{(n-\alpha)q}} \sim \|H_\alpha(|x-y|)|: L^q(\mu)|\|^q$$

diperluas dengan suatu ukuran λ sehingga didapatkan suatu norm

$$\|H_\alpha: L^q(\mu)\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |H_\alpha(|x-y|)|^q\, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}} \leq (\mu(B(e,r))^{\frac{\lambda}{n}}\|H_\alpha: L^{q,\lambda}(\mu)\|$$

didapatkan hasil

$$\left(\frac{1}{(\mu(B(e,r))^{\frac{\lambda}{n}}}\int_{B(e,r)}|H_\alpha(|x-y|)|^q\ d\mu(y)\right)^{1/q} \leq C_1\|H_\alpha: L^{q,\lambda}(\mu)\|$$

sehingga, untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$, akan didapatkan

$$|I_\alpha f(x)| \leq C_1\|f: L^{p,\lambda}(\mu)\|^{\frac{p}{q'}}\|H_\alpha(|x|): L^{q,\lambda}(\mu)\|^{\frac{q}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x-y|)^q|f(y)|^p d\mu(y)\right)^{1/s}$$

atau dapat dituliskan

$$|I_\alpha f(x)|^s \leq C_1\|f: L^{p,\lambda}(\mu)\|^{\frac{sp}{q'}}\|H_\alpha(|x|): L^{q,\lambda}(\mu)\|^{\frac{sq}{p'}}\int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x-y|)^q|f(y)|^p d\mu(y)$$

Mari dibuktikan sisi yang lain menggunakan ketaksamaan Young sebelumnya

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x-y|)^q|f(y)|^p d\mu(y)\right)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x-y|)^q dx\right)|f(y)|^p d\mu(y)$$

didapatkan hasil dengan menambahkan perluasan dengan ukuran λ

$$\|H_\alpha(|x|): L^q(\mu)\|^q \|f: L^p\|^p \leq (\mu(B(e,r))^{\frac{\lambda}{n}} \left\|H_\alpha(|x|): L^{q,\lambda}(\mu)\right\|^q \left\|f: L^{p,\lambda}\right\|^p$$

atau dapat dituliskan

$$\|H_\alpha(|x|): L^q(\mu)\|^q \|f: L^p\|^p \leq C_1 \left\|H_\alpha(|x|): L^{q,\lambda}(\mu)\right\|^q \left\|f: L^{p,\lambda}\right\|^p$$

maka didapatkan hasil akhirnya adalah

$$\left\|I_\alpha f: L^{s,\lambda}(\mu)\right\|^s \leq C_2 \left\|H_\alpha(|x|): L^{q,\lambda}(\mu)\right\|^{\frac{q+sq}{p'}} \left\|f: L^{p,\lambda}(\mu)\right\|^{\frac{p+sp}{q'}}$$

atau

$$\left\|I_\alpha f: L^{s,\lambda}(\mu)\right\| \leq C_2 \left\|H_\alpha(|x|): L^{q,\lambda}(\mu)\right\| \left\|f: L^{p,\lambda}(\mu)\right\|$$

Sesuai dengan yang didapatkan menggunakan akibat dari hasil Teorema 2 sebelumnya dengan menambahkan semua syarat kasus khusus $q = 1$ dan $p = s$ didapatkan akibat berikut

Akibat 4.6

Apabila dimiliki $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, $1 < p < \frac{n}{n-\alpha}$ Misalkan $q = 1$, sehingga $s = p$. Jika suatu $C_1 > 0, \mu(B(e,r)) \leq C_1 r^n, f \in L^{p,\lambda}(\mu)$, dan $H_\alpha \in L^1(\mu)$, kemudian terdapat suatu $C_2 > 0$ sedemikian sehingga hasilnya dapat dituliskan sebagai berikut

$$\left\|I_\alpha f: L^{s,\lambda}(\mu)\right\| \leq C_2 \|H_\alpha(|x|): L^1(\mu)\| \left\|f: L^{p,\lambda}(\mu)\right\|$$

Contoh 4.7

Didefinisikan $B_0 = \{x \in R, \|x\| < 1\}$

Tunjukkan apakah $f\chi_{B_0}(x)$ terbatas di ruang Morrey dengan konvolusi fungsi $H_\alpha * f \Rightarrow I_\alpha f$

Penyelesaian

$B_0 = \{x \in R, \|x\| < 1\}$

$$f\chi_{B_0}(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_0 \\ 0, & x \notin B_0 \end{cases}$$

Akan dibuktikan: $H_\alpha * f \ \Rightarrow \ I_\alpha f$ terbatas

Ditunjukkan bahwa $H_\alpha \in L^1$ dan $f \in L^{p,\lambda}$, $I_\alpha f \in L^{p,\lambda}$, sehingga didapatkan pemetaan ruang $L^1 \times L^{p,\lambda} \to L^{p,\lambda}$

Bukti:

Langkah pertama akan ditunjukkan

- $f \in L^{p,\lambda}, \|f\|_{p,\lambda} < \infty$

  Buktikan ketika $0 < \lambda < n$, untuk $\lambda = 0$

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x)\big)^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{B_0} \big(f(x)\big)^p \, dx + \int_{B_0^c} \big(f(x)\big)^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{B_0} 1^p \, dx + \int_{B_0^c} 0^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{B_0} 1^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = |B_0|^{\frac{1}{p}}$$

$$= C^{1/p} < \infty$$

  Selanjutnya akan dibuktikan pada $0 < \lambda < n$

$$\|f\|_{p,\lambda} = \sup_{B_0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B_0} \big(f(x)\big)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{B_0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B_0} C^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{B_0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B_0} C^p |B_0| \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{B_0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B_0} C_1 \right)^{\frac{1}{p}} ; C_1 = C^p |B_0|$$

$$= \sup_{B_0} \frac{C_2}{r^\lambda}$$

Sehingga didapatkan bahwa $\|f\|_{p,\lambda} = \sup_{B_0} \frac{C_2}{r^\lambda} < \infty$

- $H_\alpha \in L^1$, $\|H_\alpha\|_1 < C$

$$H_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^n} H_\alpha(|x|)\, dx$$

$$= \int_{\|x\|<1} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dx$$

$$= \int_{\|x\|<1} |x-y|^{\alpha-n}\ dx$$

$$= \int_{\|x\|<1} |x|^{\alpha-n}\ dx \int_{\|x\|<1} |y|^{\alpha-n}\ dx$$

$$= C - |y|^{\alpha-n} |B|$$

$$= C - C_1\, |y|^{\alpha-n}$$

Karena $\|y\| \geq 0$ dan $\alpha - n < 0$ maka

$$\|H_\alpha\|_1 \leq C - C_1 |y|^{\alpha-n}$$

Terbukti $\|H_\alpha\|_1 \leq C$

- $I_\alpha f \in L^{p,\lambda} \Leftrightarrow \left\| I_\alpha f : L^{p,\lambda} \right\| < \infty$

$$\left\| I_\alpha f : L^{p,\lambda} \right\| = \sup_B \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_B \ (H_\alpha * f)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Buktikan $I_\alpha f(y) < \infty$

$$I_\alpha f(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{|x-y|^{n-\alpha}} dx$$

$$= \int_{B_0} \frac{f(x)}{|x-y|^{n-\alpha}} dx + \int_{B_0^C} \frac{f(x)}{|x-y|^{n-\alpha}} dx$$

$$= \int_{B_0} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dx + \int_{B_0^C} \frac{0}{|x-y|^{n-\alpha}} dx$$

$$= \int_{B_0} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dx$$

$$= \int_{\|x\|<1} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dx$$

Misal $|x| = t \Rightarrow dx = dt$

Jika $y = 0$, maka

$$I_\alpha f(0) = C \int_0^1 t^{n-1} t^{\alpha-n} \, dt$$

$$= C \int_0^1 t^{\alpha-1} \, dt$$

$$= Ct^\alpha$$

$$= C < \infty$$

Karena $I_\alpha f(y) < \infty$ untuk $y = 0$, maka

$$\|I_\alpha f\|_{p,\lambda} = \sup_{B_0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B_0} |H_\alpha f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{B_0}\left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B_0} C^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{B_0}\left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B_0} C^p|B_0|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{B_0}\left(\frac{1}{r^\lambda}\int_{B_0} C_1\right)^{\frac{1}{p}}, ; C_1 = C^p|B_0|$$

$$= \sup_{B_0}\frac{C_2}{r^\lambda}$$

Sehingga didapatkan hasil

$$\|I_\alpha f\|_{p,\lambda} = \sup_{B_0}\frac{C_2}{r^\lambda} < \infty$$

Dari contoh di atas, terlihat bahwa pemetaan operator integral fraksional terbatas $L^1 \times L^{p,\lambda} \to L^{p,\lambda}$.

4.3 Integrasi Keterbatasan Operator Integral Fraksional dengan Cara Menanggapi Keterbatasan sebagai Manusia Bersyukur

Dalam penciptaan manusia, Allah sudah memberikan informasi dalam Al-Quran secara lengkap mengenai bagaimana proses diciptakan, sifat-sifat apa yang dilekatkan kepada manusia. Salah satu sifatnya adalah terbatas. Manusia memiliki keterbatasan untuk memahami keseluruhan penciptaan yang Allah lakukan. Segala hal yang diberikan pengetahuan yang dimiliki manusia semata-mata adalah pemberian dari Allah. Juga Allah yang memberikan batasan atas apa yang ia ketahui seperti dalam surat Al – Isra': 85
(Kementrian Agama RI, 2019).

وَيَسْـَٔلُوْنَكَ عَنِ الرُّوْحِۗ قُلِ الرُّوْحُ مِنْ اَمْرِ رَبِّيْ وَمَآ اُوْتِيْتُمْ مِّنَ الْعِلْمِ اِلَّا قَلِيْلًا

Artinya : *“ Dan mereka bertanya kepadamu (Muhammad) tentang ruh. Katakanlah, “Ruh itu termasuk urusan Tuhanku,* ***sedangkan kamu diberi pengetahuan hanya sedikit****.”*

Jika berbicara keterbatasan, banyak sekali yang menganggap bahwa keterbatasan dapat menjadi alasan untuk tidak berusaha karena tidak ada fasilitas yang mendukung untuk mencapai sesuatu. Berapa banyak yang ditemui bagaimana keterbatasan adalah cara Allah untuk menguji manusia untuk terus berjuang dalam hidupnya. Seperti pada Q.S. Al Baqarah: 216

كُتِبَ عَلَيْكُمُ الْقِتَالُ وَهُوَ كُرْهٌ لَّكُمْۚ وَعَسٰٓى اَنْ تَكْرَهُوْا شَيْـًٔا وَّهُوَ خَيْرٌ لَّكُمْۚ وَعَسٰٓى اَنْ تُحِبُّوْا شَيْـًٔا وَّهُوَ شَرٌّ لَّكُمْۗ وَاللّٰهُ يَعْلَمُ وَاَنْتُمْ لَا تَعْلَمُوْنَ

(Kementrian Agama RI, 2019).

Artinya : *“Diwajibkan atas kamu berperang, padahal itu tidak menyenangkan bagimu. Tetapi bolejh jadi kamu tidak menyenangi sesuatu, padahal itu baik bagimu, dan boleh jadi jika kamu menyukai sesuatu, padahal itu tidak baik bagimu.* ***Allah mengetahui, sedang kamu tidak mengetahui****.”*

Betapa Allah menegaskan bagaimana pengetahuan yang Allah miliki begitu luas dan tidak akan pernah dicapai oleh manusia. Menurut tafsir Al – Muyassar, ayat ini menerangkan bagaimana Allah memberikan perintah untuk memerangi orang kafir dengan dalam hal ini orang-orang yang ingin menjatuhkan islam. Secara naluriah, perang sendiri adalah perkaran yang tidak disukai, lantaran berat dan penuh ancaman. Namun, terkadang pada saat membenci suatu perkara, padahal itu baik kedepannya. Sebaliknya pada saat menyukai sesuatu sedang itu buruk bagi manusia di kemudian hari. Begitulah Allah mengatur takdir bagi hambanya.

Selain keterbatasan dalam mengetahui takdir Allah, manusia juga memiliki keterbatasan dalam mengetahui keilmuan Allah yang begitu luas, seperti pada Q.S surat Ar Rahman: 32

يٰمَعْشَرَ الْجِنِّ وَالْاِنْسِ اِنِ اسْتَطَعْتُمْ اَنْ تَنْفُذُوْا مِنْ اَقْطَارِ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ فَانْفُذُوْاۗ لَا تَنْفُذُوْنَ اِلَّا
بِسُلْطٰنٍۚ – ٣٣

(Kementrian Agama RI, 2019)

Artinya: *"Wahai golongan jin dan manusia! Jika kamu sanggup menembus (melintasi) penjuru langit dan bumi, maka tembuslah.* ***Kamu tidak akan mampu menembusnya kecuali dengan kekuatan (dari Allah)****." (QS. Ar-Rahman: 33)*

Berdasarkan tafsir yang dikemukakan oleh Quraish Shihab, ayat ini merujuk pada perkembangan keilmuan dan teknologi yang semakin berkembang dari masa-ke masa. Sampai saat ini terbukti betapa besarnya upaya dan tenaga yang dibutuhkan untuk menembus lingkup gravitasi bumi, perjalanan luar angkasa, hingga upaya menembus langit dan bumi yang mustahil untuk dilakukan oleh jin maupun manusia. Namun, apakah manusia diminta menerima saja atas apa yang telah Allah berikan? Tentu tidak. Allah tetap memberikan kedaulatan bagi manusia untuk menjadikan dirinya sebagai versi terbaik dan mengeksplorasi ciptaanNya. Hingga Allah menurunkan ayat bagi manusia untuk berjuang mengubah nasibnya pada Q.S Ar Ra'du: 11

لَهُۥ مُعَقِّبَٰتٌ مِّنۢ بَيْنِ يَدَيْهِ وَمِنْ خَلْفِهِۦ يَحْفَظُونَهُۥ مِنْ أَمْرِ ٱللَّهِۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُوا۟ مَا
بِأَنفُسِهِمْۗ وَإِذَآ أَرَادَ ٱللَّهُ بِقَوْمٍ سُوٓءًا فَلَا مَرَدَّ لَهُۥۚ وَمَا لَهُم مِّن دُونِهِۦ مِن وَالٍ

(Kementrian Agama RI, 2019).

Artinya: *"Bagi manusia ada malaikat-malaikat yang selalu mengikutinya bergiliran, di muka dan dibelakangnya, mereka menjaganya atas peruintah Allah.* ***Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan suatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada mereka sendiri.*** *Dan apabila Allah menghendaki keburukan terhadap sesuatu kaum, maka tak ada yang dapat menolaknya; dan sekali-kali tidak ada pelindung bagi mereka selain Dia." (QS. Ar-Rahman: 33)*

Ayat ini menunjukkan bahwa keterbatasan sebelumnya semata-mata untuk menjadikan manusia dapat lebih memaksimalkan usaha dan berlomba-lomba untuk selalu memperbaiki diri dalam mencapai versi terbaiknya. Karena tidak ada manusia yang beriman tidak diuji dengan apa yang ia senangi sebagaimana pada Q.S Al-Anbiyaa:35. Suatu bilangan yang menjadi syarat keterbatasan pada suatu operator dapat diibaratkan sebagai suatu kemungkinan kebaikan dari ruang yang sama, karena ketika melewati suatu ruang baru (dunia) dibutuhkan kematian sebelum ruang akhirat. Ruang akhirat inilah yang harus dipersiapkan.

Memahami tentang keterbatasan, banyak sekali ayat Al-Quran yang menerangkan mengenai manusia yang telah melewati batas, larangan melewati batas, hingga hukuman bagi mereka yang melewati batas. Lalu Apa yang dimaksud melewati batas? Berdasarkan surat Az zumar ayat 53 diterangkan apabila salah satu sifat manusia adalah melewati batas. Batas dalam hal ini adalah aturan yang Allah berikan berupa amar ma'ruf nahi mungkar di mana keduanya adalah cara untuk mengindari perbuatan dosa. Allah memerintahkan untuk selalu berbuat kebaikan dan mencegah diri dari keburukan. Secara tidak langsung Allah memberikan batas bagi manusia untuk berjuang sekuat tenaga untuk selalu berada pada koridor jalan tuhan yang sudah digariskan. Akan tetapi dalam ayat tersebut juga bahwa manusia tidak seharusnya berputus asa terhadap rahmat Allah, meskipun kesalahan yang ia lakukan sangat jauh dari aturan Allah. Karena Allah membuka kesempatan untuk siapapun untuk kembali kepadaNya.

Allah juga memberikan ketetapan tugas utama bagi manusia adalah penghambaan yang dilakukan dengan mencontoh nabi muhammad. Ibadah juga memiliki tingkatan yang berbeda sampai pada tingkat tertingginya adalah beribadah karena rasa syukur seperti kisah Rasulullah ketika ditanya oleh Aisyah mengapa dia tetap beribadah hingga kaki beliau bengkak padahal Allah sudah menjamin surga baginya. Jawaban Rasulullah adalah "Wahai Aisyah, Bukankah seharusnya aku harus menjadi hamba yang bersyukur."

Belajar dari Rasulullah untuk senantiasa menjadikan syukur sebagai kunci utama untuk memotivasi dalam berjuang menjadi versi terbaik ditengah keterbatasan, setidaknya ada tiga hal yang dapat dilakukan.

a. Memanfaatkan waktu sebaik mungkin

   Ada tiga hal didunia ini yang tidak dapat diulang kembali, yaitu waktu, ucapan, dan kesempatan. Banyak manusia yang merasa merugi karena tidak memanfaatkan waktu yang Allah berikan sebaik mungkin. Bahkan di antara mereka tidak sadar dengan waktu yang mereka sia-siakan. Seperti dalam Q.S Al Ashr: 1-3 dijelaskan bagaimana semua manusia itu adalah orang yang merugi kecuali orang – orang yang beriman dan beramal saleh.

b. Berlomba - lomba dalam kebaikan

   Selanjutnya adalah bagaimana manusia sebagai hamba yang bersyukur memaksimalkan kesehatan dan kelapangan yang Allah anugrahkan untuk terus mengejar kebaikan. Dimulai dari hal yang bisa dilakukan dilingkungan sekitar atau dari hal terkecil menjadi kebermanfaatan untuk menambah nilai diri menjadi lebih baik setiap harinya.

c. Berusaha bersungguh – sungguh dalam memperbaiki diri

   Sebagaimana Q.S Ar – Ra'du: 11 Allah telah senantiasa memberikan manusia kebebasan untuk membuat pilihan dalam menentukan arah hidup yang ingin dicapai. Allah telah memberikan manusia akal dan pikiran untuk membuat tekad perubahan yang ingin dituju. Namun dengan semua itu Allah juga sangat mencintai hambanya sehingga bagaimanapun manusia melakukan kesalahan selalu ada pintu pengampunan yang Allah buka selagi manusia tidak berputus asa dari rahmatNya.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembuktian keterbatasan operator integral fraksional yang dilakukan menggunakan ketaksamaan Young dengan kasus spesial di mana $q = 1$ dan $p = s$, dihasilkan bahwa suatu operator integral fraksional terbatas pada ruang Morrey dengan $1 < p < \infty$, dan ukuran $0 < \lambda < n.$ Selanjutnya diberikan contoh dan dibuktikan dengan cara yang sama, didapatkan bahwa operator intergral fraksional dengan $1 \leq p < \frac{n}{n-\alpha}, 0 \leq \lambda < n$, juga terbatas di ruang Morrey.

Dari proses membuktikan keterbatasan yang terjadi pada suatu operator integral fraksional dapat diintegrasikan pada keterbatasan manusia dalam hal pengetahuan. Namun bukan berarti keterbatasan menjadi alasan untuk tidak berusaha menjadi versi terbaik sebagai hamba yang bersyukur.

5.2 Saran

Penelitian yang dilakukan penulis adalah memperluas penelitian Saba terhadap keterbatasan Bessel-Riesz pada ruang Lebesgue. Namun penulis menggunakan operator integral fraksional atau Riesz Potensial dengan cara yang sama dan di ruang yang berbeda yaitu ruang Morrey. Kedepannya bisa dilakukan di operator yang berbeda, menggunakan ketaksamaan atau pada ruang yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

As Syaukani, M. A. I. (2008). *Tafsir Fathul Qadir (terjemah) Jilid 2* (2nd ed.). Pustaka Azzam.

Evans, L. C., & Gariepy, R. F. (1992). *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press.

Fefferman, R. (2005). *Maximal Functions in Analysis*. 10.

Gunawan, H., & Nakai, E. (2004). On generalized fractional integral operators Boundedness of integral operators on Morrey spaces. In *Scientiae Mathematicae Japonicae Online* (Vol. 10). https://www.researchgate.net/publication/268245183

Gunawan, H., & Sihwaningrum, I. (2009). Fractional Integral Operator on Lebesgue and Morrey Space. *Proceedings of IICMA*, *31*(10), 26–33.

Hutson, V. (2005). *Application of Functional Analysis and Operator Theory*. ELSEVIER.

Kementrian Agama RI. (2019). *Quran Kemenag*. Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Qur'an.

Kreyzig, E. (1978). Introductory Functional Analysis with Applications. In *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* (Vol. 46, Issue 1). https://doi.org/10.1002/zamm.19660460126

Lieb, E. H., & Loss, M. (2001). *Analysis Second Edition* (Vol. 14).

Mehmood, S., Eridani, E., & Fatmawati, F. (2022). A Note about Young's Inequality with Different Measures. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, *2022*. https://doi.org/10.1155/2022/4672957

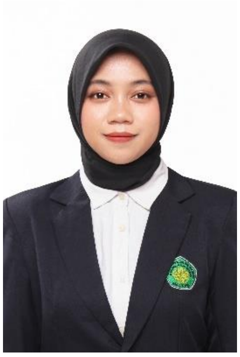
Mehmood, S., Eridani, & Fatmawati. (2021). Morrey spaces and boundedness of bessel-riesz operators. *AIP Conference Proceedings*, *2329*(June 2022). https://doi.org/10.1063/5.0042530

Sihwaningrum, I., Maryani, S., & Gunawan, H. (2020). Extension of Hardy–Littlewood–Sobolev Inequalities for Riesz Potentials on Hypergroups. *Mediterranean Journal of Mathematics*, *17*(6). https://doi.org/10.1007/s00009-020-01645-w

Sugiyono. (2014). *Memahami Penelitian Kualitatif*.

Wheeden, R. L., & Zygmund, A. (2015). Measure and integral: An introduction to real analysis, second edition. In *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis, Second Edition*. https://doi.org/10.1201/b18361

RIWAYAT HIDUP



Ni’matul Azizah, lebih dikenal dengan Ni’mah. Dilahirkan di Malang, 21 Mei 2001 sebagai anak ketiga dari pasangan Suharto dan Nur Saidah. Pendidikan dasar diperoleh melalui TKM Sunan Kalijogo dan dilanjutkan di SDN Sukodono 04 yang lulus di tahun 2013. Pada tahun yang sama, penulis melanjutkan di SMPN 1 Dampit hingga tahun 2016. Pada kelas 2 SMP penulis memutuskan mengikuti pendidikan pondok pesantren di Yayasan Nasruddin selama 2 tahun. Selanjutnya penulis mendaftarkan diri sebagai pelajar MAN 1 Kabupaten Malang dan belajar di pondok pesantren Baitul Karim di tahun 2016-2019. Setelah lulus dari MAN, penulis mendapatkan kesempatan diterima sebagai peserta SNMPTN di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama perkuliahan, penulis aktif dalam berorganisasi seperti terdaftar sebagai anggota HMJ 2020 di bidang Penerbitan dan Jurnalistik, dan diamanahkan sebagai Ketua Divisi di bidang yang sama pada tahun selanjutnya. Selain itu, penulis juga merupakan Co-Founder dari Komunitas Literasi Matematika (LIMIT) di tahun 2021 yang bertujuan untuk menghimpun mahasiswa matematika yang memiliki minat di bidang jurnalistik dan menunjang dokumentasi kegiatan yang dilaksanakan oleh civitas Program Studi Matematika. Menjadi anggota Senat Mahasiswa Fakultas Sains dan Teknologi dan membidangi Komisi Hukum dan Advokasi (2022), serta menjadi relawan pengajar dari Komunitas Belajar Al – Quran Braille Malang dari tahun 2022 dan akan terus berlanjut. Apabila ada pertanyaan, saran, dan kritik mengenai penelitian ini, dapat menghubungi penulis melalui email: azizah131418@gmail.com.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ni'matul Azizah
NIM : 19610022
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Keterbatasan Operator Integral Fraksional Menggunakan Ketaksamaan Young Pada Ruang Morrey
Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si.
Pembimbing II : Evawati Alisah, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	13 Januari 2023	Konsultasi Topik dan Data	1.
2.	7 Februari 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	18 Februari 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	20 Maret 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	23 Maret 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	17 April 2023	ACC Bab I, II, dan III	6.
7.	6 Juni 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	7 Juni 2023	ACC Kajian Agama Bab I dan II	8.
9.	8 Juni 2023	ACC Seminar Proposal	9.
10.	27 Juni 2023	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	10.
11.	27 Juli 2023	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	8 Agustus 2023	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	12 Agustus 2023	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	16 Agustus 2023	Konsultasi Bab IV dan V	14.
15.	12 September 2023	ACC Bab IV dan V	15.

16.	13 September 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	16.
17.	16 Oktober 2023	ACC Kajian Agama Bab IV	17.
18.	29 Oktober 2023	ACC Seminar Hasil	18.
19.	20 November 2023	ACC Seminar Hasil lanjutan	19.
20.	27 November 2023	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	20.
21.	13 Desember 2023	ACC Sidang Skripsi	21.
22.	25 Desember 2023	ACC Keseluruhan	22.

Malang, 25 Desember 2023
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005