EKSISTENSI UKURAN HAAR

SKRIPSI

OLEH
M. YUSUF ARI PUTRA
NIM. 19610024

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

EKSISTENSI UKURAN HAAR

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat.)

Oleh
M. Yusuf Ari Putra
NIM. 19610024

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

EKSISTENSI UKURAN HAAR

SKRIPSI

Oleh
M. Yusuf Ari Putra
NIM. 19610024

Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 13 Desember 2023

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Elly Susanti, M.Sc.	Evawati Alisah, M.Pd.
NIP. 19741129 200012 2 005	NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

EKSISTENSI UKURAN HAAR

SKRIPSI

Oleh
M. Yusuf Ari Putra
NIM. 19610024

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 27 Desember 2023

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.	....
Anggota Penguji 1	: Dian Maharani, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Elly Susanti, M.Sc.	....
Anggota Penguji 3	: Evawati Alisah, M.Pd.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

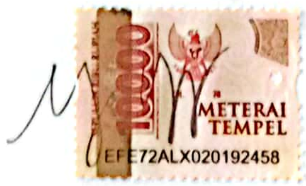
Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	M. Yusuf Ari Putra
NIM	:	19610024
Program Studi	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Eksistensi Ukuran Haar

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 Desember 2023

Yang membuat pernyataan,



M. Yusuf Ari Putra

NIM. 19610024

HALAMAN MOTO

"Manusia itu siapa? Manusia itu orang ketika baik saja salah, apalagi pas salah”

(K.H. Ahmad Bahauddin Nursalim)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim, dengan mengucap syukur kepada Allah Swt. skripsi ini peneliti persembahkan untuk ibu saya Arin Narni, ayah saya Moch. Arifin, serta adik saya M. Rifqi Nur Aziz yang senantiasa memberikan dukungan kepada peneliti baik moril maupun materiil bagi peneliti. Dengan kasih sayang, doa, dan motivasi yang tak pernah surut, mereka menjadi tiang kuat dan inspirasi bagi peneliti dalam perjalanan panjang penelitian ini

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur kita panjatkan kepada Allah SWT. yang telah memberikan limpahan rahmat-Nya kepada penulis, sehingga dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul "Eksistensi Ukuran Haar". Skripsi ini merupakan salah satu syarat penting dalam menempuh program sarjana di Fakultas Sains dan Teknologi di Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang. Penulis merasa sangat bersyukur karena telah diberikan kesempatan untuk menyelesaikan pendidikan tinggi dan menghasilkan karya ilmiah yang bermanfaat bagi masyarakat.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis berusaha untuk menggali lebih dalam mengenai konsep eksistensi ukuran Haar dalam grup kompak lokal. Dengan bantuan Allah SWT. dan dukungan dari keluarga, dosen pembimbing, dan rekan-rekan sejawat, penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Semoga hasil dari penulisan ini dapat memberikan manfaat dan kontribusi yang positif bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi di Indonesia dan dunia.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari peran banyak pihak-pihak lain yang secara langsung maupun tidak langsung terlibat dan sudi untuk memberikan bantuan, dukungan, dan ilmu serta bimbingannya. Oleh sebab itu, penulis ucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus dosen pembimbing I yang selalu memberikan bimbingan, semangat, motivasi, nasihat, ilmu dan arahan kepada penulis.
4. Evawati Alisah, M.Pd., selaku dosen pembimbing II yang membimbing, mengarahkan, menasehati dan memberi semangat kepada penulis.
5. Ari Kusumastuti, M.Si., selaku Dosen Wali yang telah memberikan motivasi, dukungan dan semangat kepada penulis.

6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Orang tua dan seluruh keluarga penulis yang telah memberikan do'a, dukungan, materi, semangat, motivasi, kasih dan sayang kepada penulis.
8. Seluruh teman-teman penulis yang telah terlibat baik secara langsung maupun tidak langsung dalam membantu menyelesaikan penyusunan skripsi ini.

Penulis berharap bahwa hasil dari penulisan skripsi ini dapat memberikan manfaat dan inspirasi bagi pembaca. Semoga penelitian yang telah dilakukan dapat menjadi sumbangsih bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, khususnya dalam bidang ukuran Haar. Namun, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna dan masih memiliki banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis dengan senang hati menerima saran dan kritik yang bersifat membangun untuk perbaikan penulisan selanjutnya. Semua saran dan kritik yang membangun sangat dihargai dan akan sangat membantu dalam perbaikan penulisan selanjutnya. Setiap masukan yang diberikan akan menjadi dorongan bagi penulis untuk terus meningkatkan kemampuan dan memperbaiki kelemahan yang ada. Dengan demikian, diharapkan karya-karya mendatang dapat memberikan kontribusi yang lebih berarti dan bermanfaat bagi ilmu pengetahuan dan teknologi. Terima kasih atas perhatian dan pengertiannya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullah Wabarakatuhu

Malang, 27 Desember 2023

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Beberapa simbol yang digunakan pada skripsi ini memiliki arti sebagaimana berikut ini:

τ	: Topologi
μ	: Ukuran Haar
μ^*	: Ukuran Luar
$M\mu^*$	: Kumpulan semua subhimpunan μ^*-terukur
λ	: Ukuran Lebesgue
$\overline{A}$	: Closure atau irisan dari semua himpunan tertutup
A^o	: Interior atau gabungan dari semua himpunan terbuka
$\mathcal{B}$	: Basis pada Topologi
$\mathcal{S}$	: Subbasis pada Topologi
$(G,*)$	: Grup dengan operasi biner
$\#(K:V)$	: Bilangan bulat terkecil n
e	: Elemen Identitas
$\mathbb{R}$	: Himpunan Bilangan Real
inf	: Batas bawah terbesar
sup	: Batas atas terkecil
I_k	: Interval dari himpunan K
$g \circ f$	: Pemetaan komposisi
π_j	: Proyeksi pemetaan dengan indeks j
$\mathcal{B}(G)$	: Borel aljabar σ
Q_i	: Himpunan kuadrat yang saling bersinggungan yang meliputi A

ABSTRAK

Putra, M. Yusuf Ari. 2023. **Eksistensi Ukuran Haar.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Kata Kunci: Grup Kompak Lokal, Ukuran Haar, Ukuran Lebesgue, Invarian translasi, Reguler

Ukuran Lebesgue λ adalah ukuran yang sering digunakan pada $\mathbb{R}^n$. Ukuran Lebesgue memiliki beberapa sifat, diantaranya invarian translasi $\lambda(A+x) = \lambda(A)$ dan regular $\lambda(A) = inf\{\,\Sigma|Q_i|: A \subseteq \cup Q_i\}$. Pada pengaturan lebih umum dari $\mathbb{R}^n$, seperti grup kompak lokal terdapat ukuran yang memiliki sifat yang mirip dengan ukuran Lebesgue, yaitu ukuran Haar μ. Ukuran Haar dikatakan invarian translasi jika dapat mentranslasi himpunan pada grup $\mu(xA) = \mu(A)$ dan dikatakan reguler jika terbatas pada subhimpunan Borel $\mu^*(A) = inf\{\mu^*(U): A \subseteq U \; dan \; U \in \mathcal{U}\}$. Penelitian ini bertujuan untuk membuktikan pada grup kompak lokal terdapat ukuran Haar. Langkah pertama untuk membuktikan eksistensi ukuran Haar tersebut adalah dengan membuktikan kekompakan subset dalam grup. Selanjutnya membuktikan Lemma untuk mendapatkan batas fungsi dari ukuran Haar. Selanjutnya menurunkan sifat dari fungsi tersebut. Selanjutnya menggunakan subset tersebut untuk membangun ukuran luar μ^* sebagai batas ukuran Haar. Berdasarkan pembuktian tersebut diperoleh bahwa pada grup kompak lokal G terdapat ukuran Haar μ yang memiliki sifat invarian translasi dan reguler.

ABSTRACT

Putra, M. Yusuf Ari. 2023. **The Existence of Haar Measure**. Undergraduate Thesis. Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Keywords: Locally Compact Group, Haar Measure, Lebesgue Measure, Translation Invariance, Regular.

The Lebesgue measure λ is commonly used in $\mathbb{R}^n$. The Lebesgue measure has several properties, including translation invariance $\lambda(A+x) = \lambda(A)$ and regularity $\lambda(A) = inf\{\, \Sigma|Q_i| : A \subseteq \cup Q_i\}$. In a more general setting of $\mathbb{R}^n$, such as locally compact groups, there exists a measure with properties similar to the Lebesgue measure, known as the Haar measure μ. The Haar measure is said to be translation invariant if it can translate sets in the group $\mu(xA) = \mu(A)$, and it is said to be regular if it is bounded on Borel subsets $\mu^*(A) = inf\{\mu^*(U) : A \subseteq U$ and $U \in \mathcal{U}\}$. This research aims to prove the existence of the Haar measure in locally compact groups. The first step to prove the existence of the Haar measure is to establish the compactness of subsets within the group. Then, Lemma is proven to obtain the limit of the Haar measure function. The properties of the function are derived subsequently. The obtained subset is then used to construct the outer measure μ^* as the limit of the Haar measure. Based on the proof, it is concluded that there exists a Haar measure μ in locally compact group G with translation invariance and regularity properties.

مستخلص البحث

بوترا، محمد. يوسف آري. ٢٠٢٣. **كينونة قياس هار**. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية، مالانج. المشرف الأول: د. إيلي سوسانتي، الماجستير. المشرف الثاني: إيفاواتي أليسة، الماجستير.

الكالكلمات الرئيسية: مجموعة مدمجة محلية، قياس هار، قياس لوبيغ، التنقل الثبات، قياسي

قياس لوبيغ λ يُستخدم عادة في $\mathbb{R}^n$. يتمتع قياس لوبيغ بعدة خصائص، بما في ذلك التنقل الثبات $\lambda(A + x) = \lambda(A)$ والقياسي $\lambda(A) = inf\{ \Sigma|Q_i |: A \subseteq \cup Q_i\}$. في سياق أعم لـ $\mathbb{R}^n$، مثل المجموعات المدمجة المحلية، يوجد قياس يتمتع بخصائص مماثلة لقياس لوبيغ، يُعرف بقياس هار μ. يقال عن قياس هار التنقل الثبات إذا استطاع نقل المجموعات في المجموعة $\mu(xA) = \mu(A)$، ويقال عنه قياسي إذا كان محدودًا على مجموعات بوريل $\mu^*(A) = inf\{\mu^*(U): A \subseteq U \text{ و } U \in \mathcal{U}\}$. هدف هذا البحث إلى إثبات وجود قياس هار في المجموعات المدمجة المحلية. الخطوة الأولى لإثبات وجود قياس هار هي تأكيد اندماج النماذج داخل المجموعة. ثم يُثبت اللمة للحصول على حد الدالة قياس هار. يتم استنتاج خصائص الدالة بعد ذلك. يُستخدم النموذج المحصل عليه لإنشاء القياس الخارجي μ^* كحد لقياس هار. استنادًا إلى الدليل، يُستنتج أن هناك قياس هار μ في المجموعة المدمجة المحلية G بخصائص التنقل الثبات والقياسي.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori ukuran adalah konsep fundamental dalam matematika, terutama dalam analisis riil dan geometri. Ada beberapa jenis ukuran yang telah dikembangkan oleh para matematikawan, dan salah satunya adalah ukuran Lebesgue. Ukuran Lebesgue adalah ukuran yang umum digunakan dalam matematika untuk mengukur ruang pada dimensi n. Pengembangan ukuran Lebesgue dimulai pada awal abad ke-20 oleh seorang matematikawan asal Perancis bernama Henri Lebesgue. Ukuran Lebesgue λ memiliki sifat invarian translasi, yaitu $\lambda(A + x) = \lambda(A)$, untuk setiap himpunan Borel A dan vektor translasi x pada $\mathbb{R}^n$. Sifat ini memungkinkan untuk memperkirakan ukuran suatu subhimpunan Borel menggunakan perpindahan himpunan tersebut tanpa mengubah ukurannya. Selain itu ukuran Lebesgue λ juga memiliki sifat reguler yang menyebabkan λ terbatas pada himpunan kompak. Dalam arti lain, untuk setiap subhimpunan Borel A yang terletak di dalam $\mathbb{R}^n$, $\lambda(A)$ terdefinisi dan dapat dihitung dengan rumus berikut:

$$\lambda(A) = inf\{ \sum |Q_i| : A \subseteq \bigcup Q_i \}$$

di mana Q_i adalah himpunan-himpunan kuadrat yang saling bersinggungan yang meliputi A, dan $|Q_i|$ mewakili volume dari masing-masing kuadrat Q_i. Himpunan kuadrat adalah kumpulan objek geometris dua dimensi yang membentuk bentuk persegi dengan empat sisi yang panjangnya sama dan sudut-sudutnya siku-siku. (Stein & Shakarchi, 2007).

Ukuran Lebesgue pada $\mathbb{R}^n$ memainkan peran penting dalam mengukur himpunan geometris pada dimensi tertentu. Meskipun sifat invarian translasi dari ukuran Lebesgue hanya berlaku pada himpunan tertentu yang bersifat translasi-invarian, namun ini tidak berlaku pada struktur grup. Pada pengaturan yang lebih umum dari $\mathbb{R}^n$, seperti pada grup kompak lokal, terdapat sebuah konsep pengukuran yang analog dengan ukuran Lebesgue yang dikenal sebagai ukuran Haar. Dalam setiap grup dengan topologi kompak lokal atau biasa disebut grup kompak lokal, ukuran Haar merupakan sebuah ukuran Borel reguler yang unik, yang memiliki sifat invarian pada translasi yang dihasilkan oleh operasi grup. Untuk setiap grup kompak lokal G, terdapat sebuah ukuran Haar μ yang merupakan ukuran Borel reguler tak negatif pada G, memenuhi:

$$\mu(xA) = \mu(A)$$

untuk setiap himpunan Borel A dan elemen $x \in G$ (Folland, 2016).

Ukuran Haar merupakan generalisasi dari ukuran Lebesgue yang diterapkan pada grup. Ukuran Haar memiliki sifat invarian translasi pada himpunan Borel pada suatu grup, misalnya grup kompak lokal, sehingga pengukuran ruang pada himpunan Borel di grup dapat dilakukan dengan tanpa mengubah ukuran aslinya. Selain itu, ukuran Haar juga memiliki sifat reguler yang mirip dengan ukuran Lebesgue, yaitu terbatas pada himpunan kompak (Folland, 2016). Ukuran Haar sangat berguna dalam berbagai bidang matematika, seperti teori grup, analisis harmonik, dan teori bilangan.

Terkait dengan hal tersebut, pada penelitian ini akan diulas mengenai definisi-definisi ukuran Haar dan sifat-sifatnya. Misalkan G adalah grup topologi kompak lokal dengan elemen identitas e. Ukuran Haar pada G adalah sebuah fungsi

$\mu: \mathcal{B}(G) \to [0, \infty]$ yang didefinisikan pada himpunan-himpunan Borel G, di mana $\mathcal{B}(G)$ merupakan σ-aljabar Borel pada G, dan memenuhi sifat-sifat berikut:

1). Tak negatif: Untuk setiap himpunan Borel $A \in G$, $\mu(A) \geq 0$.

2). Normalisasi: Ukuran Haar dari himpunan kosong $\emptyset$ adalah 0, yaitu

$$\mu(\emptyset) = 0.$$

3). Sub-Additivitas: Untuk setiap urutan himpunan Borel $\{A_n\}$ yang saling lepas di G, yaitu $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$, maka $\mu(\cup_n A_n) \leq \Sigma_n \mu(A_n)$.

4). Invarian terhadap pergeseran: Untuk setiap elemen $x \in G$ dan setiap himpunan Borel $A \in G$, $\mu(xA) = \mu(A)$, di mana $xA = \{xa: a \in A\}$ adalah hasil dari menggeser A oleh elemen g.

Kaitan antara ukuran Haar dengan konsep ukuran dalam Islam juga telah dibahas oleh para ahli matematika dan ahli agama. Dalam pandangan Islam, konsep ukuran matematika mencerminkan sebagian kecil dari kebijaksanaan Allah dalam menentukan takdir (qada') dan mengatur segala yang terjadi (qadar). Qadha' dan qadar dapat diartikan sebagai kehendak Allah SWT. yang mengatur dan menentukan segala sesuatu, termasuk ukuran dan dimensi dari benda-benda di alam semesta. Dalam Al-Quran, Allah SWT. berfirman dalam surat Al-Qamar ayat 49 (Kemenag, 2019):

"Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu sesuai dengan ukuran".

Ayat ini menunjukkan bahwa Allah SWT. adalah pencipta yang Maha Kuasa dan Maha Tahu tentang segala sesuatu, termasuk ukuran dan dimensi dari benda-benda di alam semesta. Dalam konteks ini, ukuran Haar dapat dianggap sebagai salah satu bentuk pengukuran yang diberikan oleh Allah SWT. untuk membantu manusia memahami dan memperkirakan ukuran dan dimensi dari benda-

benda di alam semesta. Ukuran Haar memiliki sifat invarian translasi yang mirip dengan konsep qadha' dan qadar, yang menunjukkan kekuasaan Allah SWT. dalam mengatur dan menentukan segala sesuatu. Oleh karena itu, pemahaman tentang konsep ukuran dan pengukuran dalam matematika juga dapat membantu manusia untuk lebih menghargai kekuasaan Allah SWT. dan keajaiban alam semesta yang diciptakan-Nya. Pada ayat tersebut Allah SWT. mengisyaratkan bahwa segalanya telah diciptakan sesuai ukuran. Ukuran di sini yaitu sesuai dengan ketentuan yang dibuat Allah SWT. Jadi kita harus selalu bersyukur atas segala nikmat yang Allah SWT. berikan karena sudah sesuai dengan apa yang kita butuh kan.

Penelitian berjudul "*A New Treatment of the Haar Integral"* yang dilakukan oleh Bredon (1963) memberikan bukti bahwa terdapat ukuran Haar pada setiap grup kompak lokal dengan topologi yang dapat dihitung dan tidak bergantung pada aksioma, dan dengan penyederhanaan berjudul "*A Simplified Constructive Proof of the Existence and Uniqueness of Haar Measure"* oleh Alfsen (1963). Oleh karena itu, penulis berminat untuk meneruskan penelitian dengan mengevaluasi dan menyempurnakan perhitungan, sehingga penelitian tersebut dapat menjadi lebih jelas dan bermanfaat sebagai acuan untuk penelitian-penelitian mendatang.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pembahasan dari latar belakang tersebut, rumusan masalah yaitu "Apa definisi ukuran Haar pada grup kompak lokal dan apa saja sifat-sifatnya?"

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan penelitian adalah untuk membahas definisi ukuran Haar pada grup kompak lokal dan sifat-sifatnya.

1.4 Manfaat Penelitian

Bagi pembaca manfaat dari penelitian ini adalah dapat memberikan pengetahuan tambahan yang berharga, khususnya bagi mereka yang memiliki minat dalam bidang teori ukuran dan matematika murni.

Bagi peneliti di bidang matematika, penelitian ini dapat memberikan sumbangan yang berarti dalam pengembangan bidang teori ukuran dan matematika murni. Hasil penelitian ini dapat menjadi referensi bagi peneliti lain yang ingin melakukan penelitian lebih lanjut tentang topik ini.

Bagi universitas dan instansi terkait, hasil penelitian ini juga dapat memberikan manfaat yang memiliki program pendidikan matematika. Pemahaman yang lebih luas tentang teori ukuran, khususnya eksistensi ukuran Haar, dapat membantu mahasiswa dan dosen untuk memperkaya pembelajaran dan pengajaran di bidang matematika, serta meningkatkan kualitas pendidikan matematika yang diberikan oleh universitas dan instansi terkait.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, penulis memiliki fokus khusus pada definisi Ukuran Haar yang terdapat pada Grup Kompak Lokal dan sifat-sifatnya yaitu sifat invarian translasi dan keterbatasannya.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Ruang Topologi

Ruang topologi adalah himpunan yang dilengkapi dengan struktur topologi, yang terdiri dari koleksi himpunan-himpunan terbuka yang memenuhi sifat-sifat tertentu, seperti tertutup terhadap gabungan dan irisan, serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu seperti kelengkapan dan selimut (James Munkres, 2000). Setelah diketahui pengertian dari topologi dan ruang topologi, selanjutnya akan ditinjau definisi dasar dan teorema dari topologi yang diperlukan untuk keseluruhan pembahasan skripsi ini.

Definisi 2.1 (Topologi)

Misalkan X adalah sembarang himpunan tak kosong, dan τ adalah koleksi yang berisikan subhimpunan dari X. Maka τ disebut topologi pada himpunan X, jika memenuhi:

1. X dan $\emptyset$ termuat di dalam τ,
2. Gabungan sembarang anggota dari subhimpunan di τ terdapat di τ, dan
3. Irisan berhingga anggota dari subhimpunan di τ terdapat di τ juga.

Maka pasangan (X, τ) disebut ruang topologi (Julaeha, 2015). Himpunan buka adalah semua anggota-anggota τ. Jika komplemen suatu himpunan adalah himpunan buka, maka himpunan tersebut merupakan himpunan tutup. Misalkan U adalah subhimpunan dari X, kemudian U disebut himpunan buka jika U termuat di dalam τ, dan U disebut himpunan tutup jika, komplemen U atau U^c termuat di dalam τ. Jika U adalah himpunan buka di dalam X dan memuat anggota x dari X, maka U disebut persekitaran buka dari x. Jika topologi τ dari ruang topologi (X, τ) adalah memenuhi syarat yang telah disebutkan tadi, maka kedepannya akan sering digunakan istilah X adalah ruang topologi. Kemudian, jika U adalah himpunan buka atau himpunan tutup di dalam X dan X adalah ruang topologi yang telah memenuhi syarat tadi, maka kedepannya akan sering digunakan istilah U adalah himpunan buka atau tutup.

Untuk memudahkan dalam memahami tentang ruang topologi akan diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh. 2.1

Misalkan $X = \{a, b\}$ dan $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$. Buktikan bahwa (X, τ) adalah ruang topologi.

Bukti.

1. $X, \emptyset \in \tau$
2. $X \cup \emptyset = X$ $\quad \emptyset \cup \{b\} = \{b\}$ $\quad X \cup \{a\} \cup \{b\} = X$
   $X \cup \{a\} = X$ $\quad \{a\} \cup \{b\} = X$ $\quad \emptyset \cup \{a\} \cup \{b\} = X$
   $X \cup \{b\} = X$ $\quad X \cup \emptyset \cup \{a\} = X$ $\quad X \cup \emptyset \cup \{a\} \cup \{b\} = X$
   $\emptyset \cup \{a\} = \{a\}$ $\quad X \cup \emptyset \cup \{b\} = X$
3. $X \cap \emptyset = \emptyset$ $\quad \emptyset \cap \{b\} = \emptyset$ $\quad X \cap \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$
   $X \cap \{a\} = \{a\}$ $\quad \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$ $\quad \emptyset \cap \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$
   $X \cap \{b\} = \{b\}$ $\quad X \cap \emptyset \cap \{a\} = \emptyset$ $\quad X \cap \emptyset \cap \{a\} \cap \{b\} = \emptyset$
   $\emptyset \cap \{a\} = \emptyset$ $\quad X \cap \emptyset \cap \{b\} = \emptyset$

Maka (X, τ) disebut ruang topologi.

Selanjutnya, berdasarkan definisi dari ruang topologi dan hukum De Morgan, akan di buktikan bahwa hukum De Morgan berlaku untuk ruang topologi.

Remark 2.2.

Mengikuti definisi tentang topologi dan hukum De morgan bahwa gabungan sembarang dan irisan berhingga dari himpunan buka adalah himpunan buka, dan gabungan berhingga dan irisan sembarang dari himpunan tutup adalah himpunan tutup (Lundgren, 2019).

Contoh 2.2.

Buktikan bahwa gabungan gabungan sembarang dan irisan berhingga dari himpunan buka adalah himpunan buka, dan gabungan berhingga dan irisan sembarang dari himpunan tutup adalah himpunan tutup.

Bukti.

Berdasarkan contoh 2.1, misal U adalah himpunan buka, maka pada topologi τ, himpunan $X, \emptyset, \{a\}, \{b\}$ adalah himpunan buka. Hukum De Morgan yaitu $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ dan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Misal $A = \{a\}$ dan $B = \{b\}$ maka

$$(A \cap B)^c = \left(\{a\} \cap \{b\}\right)^c = (\emptyset)^c = X, A^c \cup B^c = \{b\} \cup \{a\} = \{b, a\} = X.$$

$$(A \cup B)^c = \left(\{a\} \cup \{b\}\right)^c = \{a, b\}^c = \emptyset, A^c \cup B^c = A^c \cap B^c = \{b\} \cap \{a\} = \emptyset.$$

Terbukti bahwa hukum De Morgan berlaku pada ruang topologi.

Selanjutnya akan di bahas tentang himpunan tutup terkecil yang memuat himpunan tertentu dan himpunan buka terbesar yang termuat di dalam himpunan tertentu. Yang akan dibahas pada definisi 2.3 dan 2.4 berikut ini:

Definisi 2.3 (Selimut/*closure*)

Misal (X, τ) adalah ruang topologi, dan A adalah subhimpunan dari (X, τ). selimut (*closure*) dari A adalah irisan dari semua subhimpunan tutup yang memuat A dan dilambangkan dengan $\overline{A}$ (Julaeha, 2015).

Definisi 2.4 (Interior)

Misal (X, τ) adalah ruang topologi, dan A adalah subhimpunan dari (X, τ). Interior dari A adalah gabungan dari semua subhimpunan buka dari (X, τ) yang termuat di dalam A, dan dilambangkan dengan $Int(A)$ atau A^o (James Munkres, 2000).

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa subhimpunan A dari himpunan (X, τ) adalah subhimpunan tutup jika merupakan selimut (*closure*) dan subhimpunan buka jika merupakan interior.

Remark 2.5.

Himpunan A adalah subhimpunan tutup pada (X, τ) jika dan hanya jika $A = \overline{A}$, dan himpunan buka pada (X, τ) jika dan hanya jika $A = A^o$ (Lundgren, 2019).

Contoh 2.3.

Misal $X = \{1,2,3\}$ dan $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{3\}\}$. Buktikan bahwa Himpunan A adalah subhimpunan tutup pada (X, τ) jika dan hanya jika $A = \overline{A}$, dan subhimpunan buka pada (X, τ) jika dan hanya jika $A = A^o$.

Bukti.

Misal $A = \{1,2\}$. Selimut dari A atau $\overline{A}$ adalah semua irisan himpunan tutup yang memuat $A = \{1,2\}$ yaitu $\{1,2\} \cap X = \{1,2\}$. Maka $A = \overline{A}$.

Interior dari A atau A^o adalah gabungan dari semua subhimpunan buka yang termuat di $A = \{1,2\}$ yaitu $\{1\} \cup \{1,2\} = \{1,2\}$. Maka $A = A^o$. Maka terbukti bahwa Himpunan A adalah subhimpunan tutup pada (X, τ) jika dan hanya jika $A = \overline{A}$, dan subhimpunan buka pada (X, τ) jika dan hanya jika $A = A^o$.

Selanjutnya, akan di definisikan suatu ruang yang menjadi syarat ukuran Haar itu terpenuhi dan terdefinisi, yaitu ruang di mana ada pasangan titik berbeda yang terpisah di dalamnya. Berikut adalah definisinya:

Definisi 2.6 (Ruang Topologi Hausdorff)

Suatu ruang topologi (X, τ) disebut ruang Hausdorff jika untuk setiap pasangan dari jarak titik-titik x dan y di X, terdapat himpunan buka U dan V sedemikian sehingga $x \in U, y \in V$, dan $U \cap V = \emptyset$ (Julaeha, 2015).

Sering kali terdapat kesulitan untuk menentukan semua himpunan di dalam suatu topologi, maka untuk mengatasinya dapat di hasilkan topologi melalui koleksi terkecil dari suatu himpunan atau biasa disebut basis dan sub basis, yang akan di definisikan sebagai berikut:

Definisi 2.7 (Basis untuk topologi)

Jika X adalah himpunan, basis untuk topologi pada X adalah koleksi $\mathcal{B}$ dari subhimpunan di X sedemikian sehingga:

1. Untuk setiap $x \in X$, ada setidaknya satu anggota basis B memuat x,
2. Jika x terletak di irisan dari dua anggota basis B_1 dan B_2, ada anggota basis B_3 yang memuat x sedemikian sehingga $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Jika $\mathcal{B}$ memenuhi dua kondisi tersebut, maka didefinisikan topologi τ dihasilkan oleh $\mathcal{B}$ sebagai berikut: subhimpunan U dari X disebut himpunan buka di X (yaitu, merupakan anggota dari τ) jika untuk setiap $x \in U$, terdapat anggota basis $B \in \mathcal{B}$ sehingga $x \in B$ dan $B \subset U$ (James Munkres, 2000).

Definisi 2.8 (Subbasis untuk topologi)

Subbasis $\mathcal{S}$ untuk topologi di X adalah koleksi dari subhimpunan di X yang gabungannya sama dengan X. Topologi yang dihasilkan oleh subbasis $\mathcal{S}$ didefinisikan sebagai koleksi τ dari semua gabungan dari irisan berhingga dari anggota di $\mathcal{S}$ (James Munkres, 2000).

Remark 2.9.

Untuk mengecek topologi yang dihasilkan oleh basis $\mathcal{B}$ atau subbasis $\mathcal{S}$ adalah topologi adalah cukup mudah. Perlu diperhatikan bahwa koleksi dari semua irisan berhingga dari anggota di $\mathcal{S}$ membentuk sebuah basis. Dapat diartikan bahwa setiap subbasis menghasilkan basis (Lundgren, 2019).

Contoh 2.4.

Misal $X = \{1,2,3\}$, dan $\tau = \big\{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\big\}$. Buktikan bahwa subbasis menghasilkan basis.

Bukti.

Maka subbasis dari X yaitu $\mathcal{S} = \{X, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \emptyset\}$

Maka Irisan berhingga dari anggota $\mathcal{S}$ yaitu:

$$\mathcal{B} = \big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \emptyset\big\}$$

Gabungan dari anggota $\mathcal{B}$ yaitu:

$$U = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

Karena $U \in \tau$, maka $\mathcal{B}$ merupakan basis, dan $\mathcal{S}$ merupakan subbasis.

Selanjutnya akan dibahas tentang ruang topologi hasil kali (*product)* , yaitu jika ruang topologi adalah hasil kali dari dua ruang topologi, maka topologi biasa yang digunakan untuk menjadikan ruang topologi hasil kali adalah dihasilkan oleh basis. Berikut adalah definisinya:

Definisi 2.10. (Hasil kali (*product)* topologi $X \times Y$)

Misal X dan Y adalah ruang topologi. Hasil kali (*product)* topologi pada $X \times Y$ adalah topologi yang memiliki basis yaitu koleksi $\mathcal{B}$ dari semua himpunan dari bentuk $U \times V$, di mana U adalah himpunan buka di X dan V himpunan buka di Y (James Munkres, 2000).

Ketika membahas hasil kali dari dua ruang topologi, dapat didefinisikan topologi hasil kali dengan cara yang sama dengan definisi tadi. Namun, definisi topologi dalam istilah subbasis lebih utama. Meskipun untuk definisi basis atau subbasis dalam hasil kali yang berhingga akan menghasilkan topologi yang sama, namun untuk subbasis memiliki keunggulan yaitu beberapa hasil dalam konteks hasil kali yang berhingga dapat diperluas ke konteks hasil kali tidak berhingga. Berikut adalah dua definisi tersebut:

Definisi 2.11. (Proyeksi pemetaan)

Misal $\{X_i\}_{i=I}$ adalah koleksi sembarang dari ruang topologi, dan X adalah hasil kalinya *(product)*. Fungsi $\pi_j : X \to X_j$ didefinisikan dengan

$$\pi_j((x_i)_{i=I} = x_j$$

Disebut proyeksi pemetaan dengan indeks j (James Munkres, 2000).

Definisi 2.12 (Hasil kali topologi X)

Misal $\{X_i\}_{i=I}$ adalah koleksi sembarang dari ruang topologi, dan X adalah hasil kalinya (*product*). Hasil kali *(product)* topologi di X adalah topologi yang dihasilkan oleh subbasis yang mengandung semua himpunan dari $\pi_i^{-1}(U_i)$ di mana U_i adalah terbuka di X_i (James Munkres, 2000).

Sekarang ketika membahas hasil kali dari ruang topologi, kedepannya akan diterima bahwa hasil perkalian dari dua ruang topologi adalah hasil kali *(product)* topologi. Kemudian, akan di bahas fungsi antara ruang topologi. Konsep kontinuitas dari analisis di generalkan dalam definisi berikut:

Definisi 2.13 (Fungsi Kontinu)

Misal X dan Y adalah ruang topologi. Suatu fungsi $f : X \rightarrow Y$ dikatakan kontinu jika, untuk setiap himpunan terbuka V dari Y, himpunan $f^{-1}(V)$ adalah himpunan buka di X (James Munkres, 2000).

Setelah didefinisikan tentang fungsi kontinu, selanjutnya akan dibuktikan semua fungsi konstan adalah kontinu. oleh karena itu untuk proyeksi pemetaan π dan komposisi dari fungsi kontinu adalah juga kontinu.

Remark 2.14.

Semua fungsi konstan adalah kontinu. Maka, proyeksi pemetaan π dan komposisi dari fungsi kontinu adalah kontinu.

Contoh 2.5.

Buktikan bahwa fungsi konstan, proyeksi pemetaan dan komposisi fungsi adalah kontinu.

Bukti.

Fungsi konstan :

Misal fungsi $f: X \to Y$, didefinisikan $f(x) = 5$, untuk setiap $x \in X$. Fungsi ini adalah konstan karena hasil nya akan selalu 5 dengan nilai x apapun. Maka fungsi ini memenuhi sifat kontinuitas.

Untuk proyeksi pemetaan :

$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2,3\}\}$ di $X = \{1,2,3\}$ dan $\tau_2 = \{Y, \emptyset, \{4\}\}$ di $Y = \{4,5\}$.

Hasil kali topologi $\tau = \left\{ \begin{matrix} X \times Y, \emptyset, \{(1,4)\}, \{(2,4), (3,4)\}, \{(1,4), (1,5)\}, \\ \{(2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}, \{(1,5)\}, \{(2,5), (3,5)\} \end{matrix} \right\}$

Proyeksi pemetaan $\pi_x: X \times Y \to X$

$$\pi_x^{-1}\{X\} = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\} = X \times Y \in \tau$$

$$\pi_x^{-1}\{\emptyset\} = \emptyset \in \tau \text{ dan } \pi_x^{-1}\{1\} = \{(1,4), (1,5)\} \in \tau$$

$$\pi_x^{-1}\{2,3\} = \{(2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\} \in \tau$$

Untuk fungsi komposisi :

Misal $f: X \to Y$ dan $g: Y \to Z$ adalah fungsi kontinu. Komposisi pemetaan $g \circ f: X \to Z$ adalah kontinu. Misal U adalah terbuka di Z. Karena $g: Y \to Z$ adalah kontinu, $g^{-1}(U)$ adalah terbuka di Y. Kemudian $f: X \to Y$ adalah kontinu dan $g^{-1}(U)$ adalah terbuka di Y, $f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right)$ adalah terbuka di X. Diketahui $f^{-1}\left(g^{-1}(U)\right) = (g \circ f)^{-1}(U)$, kemudian, $(g \circ f)^{-1}(U)$ adalah terbuka di X. Oleh karena itu $g \circ f$ adalah kontinu.

Setelah dibuktikan bahwa suatu fungsi dikatakan kontinu jika, untuk setiap subhimpunan buka V dari Y, inversnya adalah subhimpunan buka juga. Kemudian akan di perlukan penamaan khusus pada fungsi bijeksi, jika untuk fungsi tersebut dan inversnya adalah kontinu. berikut adalah definisinya:

Definisi 2.15. (Homeomorfisma)

Misal X dan Y adalah ruang topologi, dan $f: X \to Y$ adalah bijeksi. Jika fungsi f dan fungsi invers $f^{-1}: Y \to X$ adalah kontinu, maka f disebut homeomorfisma (James Munkres, 2000).

Homomorfisma memiliki peran penting di dalam bidang topologi, karena sifat-sifat topologi dipertahankan di dalam pemetaannya. Salah satu dari sifat topologi ini akan sering digunakan untuk membuktikan eksistensi ukuran haar, berikut adalah definisinya:

Definisi 2.16. (Himpunan Kompak)

Misal (X, τ) adalah ruang topologi, dan A adalah subhimpunan dari (X, τ). Cover buka dari A adalah koleksi $\mathcal{A}$ dari subhimpunan buka sedemikian sehingga $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Jika setiap cover buka $\mathcal{A}$ memiliki subcover berhingga dari A, maka himpunan A disebut kompak (James Munkres, 2000).

Kemudian ada sifat lain yang juga digunakan untuk membuktikan eksistensi ukuran Haar, berikut adalah definisi dan contoh pembuktiannya:

Definisi 2.17. (Ruang Topologi Kompak Lokal)

Misal (X, τ) adalah ruang topologi. Maka (X, τ) disebut kompak lokal jika setiap titik dari (X, τ) memiliki persekitaran yang selimut *(closure)* nya adalah kompak (Rudin, 1997).

Remark 2.18.

Setiap ruang kompak adalah kompak lokal, tetapi kebalikannya belum tentu berlaku (Lundgren, 2019).

Contoh 2.6.

Buktikan bahwa Setiap ruang kompak adalah kompak lokal, tetapi kebalikannya belum tentu berlaku.

Bukti.

Misal X adalah ruang kompak, dan $\{A_\alpha: \alpha = I\}$ adalah cover buka dari X. Karena X adalah kompak, maka ada subcover berhingga $\{A_{\alpha i}: i = 1,2,3, \dots , n\}$ sedemikian sehingga $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha i}$. Kemudian $x \in X$ maka $x = \bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha i}$. Kemudian $x \in A_{\alpha i}$ untuk beberapa $i = 1,2,3, \dots , n$. Karena, $A_{\alpha i} \subseteq \overline{A_{\alpha i}}$ maka $x \in A_{\alpha i} \subseteq \overline{A_{\alpha i}}$. Karena $\overline{A_{\alpha i}}$ adalah subhimpunan tertutup dari X, maka $\overline{A_{\alpha i}}$ adalah kompak. Bisa disimpulkan X adalah kompak lokal. Kebalikannya yaitu setiap ruang kompak lokal adalah belum tentu kompak. Misal $\mathbb{R}$ adalah kompak lokal tetapi bukan kompak.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa sifat kekompakan tetap dipertahankan pada pemetaan kontinu, oleh karena itu sifat kekompakan tersebut tetap dipertahankan pada homomorfisma. Berikut pembuktiannya:

Proposisi 2.19. (Subhimpunan kompak)

Misal X dan Y adalah ruang topologi, dan fungsi $f: X \to Y$ adalah fungsi kontinu. jika K adalah subhimpunan kompak dari X, maka $f(K)$ adalah subhimpunan kompak dari Y.

Bukti.

Misal $\mathcal{A}$ adalah koleksi dari subhimpunan buka di Y yang merupakan cover dari $f(K)$. Karena f adalah kontinu, maka koleksi $\{f^{-1}(A) \in \mathcal{P}(X): A \in \mathcal{A}\}$ adalah cover buka dari K. Diketahui K adalah kompak, maka ada koleksi berhingga $\{f^{-1}(A_1), \dots, f^{-1}(A_n)\}$ yang merupakan cover dari K. Maka koleksi berhingga $\{A_1, \dots, A_n\}$ merupakan cover dari $f(K)$.

Remark 2.20.

Mengikuti proposisi 2.19, jika K adalah kompak dan $f: K \to \mathbb{R}$ adalah kontinu, maka f adalah terbatas (Lundgren, 2019).

Contoh 2.7.

Buktikan bahwa jika K adalah kompak dan $f: K \to \mathbb{R}$ adalah kontinu, maka f adalah terbatas.

Bukti.

Misal K adalah kompak, maka K adalah terbatas dan tertutup. Oleh karena itu, $f(K)$ yaitu pemetaan f pada himpunan K juga terbatas *(bounded).* Misal M adalah batas atas dari $f(K)$, maka setiap nilai $f(x)$ untuk $x \in K$ tidak lebih dari M. Akan ditunjukkan f memiliki batas bawah. Misal sebaliknya, f tidak memiliki batas bawah, maka setiap bilangan bulat positif n, ada anggota x_n di K sedemikian sehingga $f(x_n) < -n$. Karena K adalah terbatas, dapat dipilih subbarisan konvergen x_{n_k} dari x_n yang konvergen ke titik x_0 di K, karena setiap barisan di dalam himpunan kompak memiliki subbarisan yang konvergen.

Karena f adalah kontinu, maka $f(x_{n_k})$ adalah konvergen ke $f(x_0)$ ketika k menuju ke takhingga. Namun, berdasarkan asumsi di awal $(f\left(x_{n_k}\right) < -n_k$, adalah bertentangan dengan kekonvergenan. Oleh karena itu, asumsi f tidak memiliki batas bawah adalah salah, sehingga f adalah fungsi terbatas.

Setelah dibuktikan tentang fungsi kontinu yang memetakan himpunan kompak, maka dapat disimpulkan ketika ingin membuktikan suatu himpunan adalah kompak, tentu langsung dibuktikan bahwa setiap cover buka dari himpunan tersebut memiliki subcover yang berhingga. Namun, ada metode lain untuk membuktikan kekompakan suatu himpunan, berikut adalah definisi dan proposisinya:

Definisi 2.21. (Sifat irisan berhingga)

Misal X adalah himpunan. Koleksi $\mathcal{C}$ dari subhimpunan di X disebut memiliki sifat irisan berhingga jika setiap subkoleksi berhingga $\{C_1, \dots, C_n\}$ dari $\mathcal{C}$, irisan $C_1, \dots, C_n$ adalah tak kosong (James Munkres, 2000).

Proposisi 2.22

Misalkan (X, τ) adalah ruang topologi. Maka X adalah kompak jika dan hanya jika untuk setiap koleksi $\mathcal{C}$ dari subhimpunan tutup di X memiliki sifat irisan berhingga, irisan $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ dari semua anggota dari $\mathcal{C}$ adalah $\emptyset$ (James Munkres, 2000).

Bukti.

Misal X adalah kompak, dan $\mathcal{C}$ adalah koleksi subhimpunan tertutup dari X yang memiliki sifat irisan berhingga. Kontradiksinya, anggap $\cap\, \mathcal{C} = \emptyset$. Berdasarkan hukum De Morgan, koleksi $\{C^c \in \mathcal{P}(X): C \in \mathcal{C}\}$ adalah cover buka dari X. Karena X adalah kompak, ada subcover berhingga $\{C_1^c, \dots , C_n^c\}$ dari koleksi ini yang merupakan cover dari K. Berdasarkan hukum De Morgan lagi, $C_1 \cap \dots \cap C_n = \emptyset$, mengkontradiksi sifat irisan berhingga dari $\mathcal{C}$. Untuk kebalikannya yaitu untuk setiap koleksi $\mathcal{C}$, irisannya tidak mungkin kosong, maka X adalah kompak.

Metode tersebut yang akan diterapkan dalam pembuktian Teorema Tychonoff, untuk sekarang sebelum pembuktian Teorema Tychonoff dibutuhkan dua lemma. Berikut adalah dua Lemma tersebut.

Lemma 2.23.

Misal X adalah himpunan, dan $\mathcal{A}$ adalah koleksi dari subhimpunan dari X yang memiliki sifat irisan berhingga. Maka terdapat koleksi $\mathcal{D}$ dari subhimpunan dari X sedemikian sehingga $\mathcal{D}$ memuat $\mathcal{A}$, dan memiliki sifat irisan berhingga, serta tidak ada koleksi dari subhimpunan dari X yang memuat $\mathcal{D}$ dan memiliki sifat irisan berhingga. Dapat dikatakan koleksi $\mathcal{D}$ adalah maksimal dengan mengacu pada sifat irisan berhingga (James Munkres, 2000).

Bukti.

Misal $\mathbb{A}$ adalah kumpulan yang terdiri dari semua koleksi $\mathcal{B}$ dari subhimpunan X sedemikian sehingga $\mathcal{B}$ memiliki sifat irisan berhingga dan $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Karena $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$, kumpulan $\mathbb{A}$ adalah tak kosong. Selain itu, inklusi himpunan yang tepat, dinotasikan dengan $\subset$, adalah urutan parsial yang ketat pada $\mathbb{A}$. Oleh karena itu, dipertimbangkan himpunan terurut parsial $(\mathbb{A}, \subset)$ dan menunjukkan bahwa setiap subkumpulan dari $\mathbb{A}$ yang terurut linier oleh $\subset$ memiliki batas atas di dalam $\mathbb{A}$. Kemudian dari Lemma Zorn, dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{A}$ memiliki anggota maksimal $\mathcal{D}$.

Sekarang, misal $\mathbb{B}$ adalah subkumpulan dari $\mathbb{A}$ yang terurut linier oleh $\subset$, dan $\mathcal{C} = \bigcup \mathbb{B}$. Maka $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ untuk semua $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$, maka $\mathcal{C}$ adalah batas atas dari $\mathbb{B}$. Untuk membuktikan bahwa $\mathcal{C} \in \mathbb{A}$, akan ditunjukkan bahwa $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ dan $\mathcal{C}$ memiliki sifat irisan berhingga. Karena $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ untuk semua $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$, maka $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$. Untuk menunjukkan $\mathcal{C}$ memiliki sifat irisan berhingga, misal $C_1, \dots, C_n$ adalah anggota dari $\mathcal{C}$. Karena $\mathcal{C}$ adalah gabungan dari $\mathbb{B}$, maka untuk setiap indeks i, ada anggota $\mathcal{B}_i \in \mathbb{B}$ sedemikian sehingga $C_i \in \mathcal{B}_i$. Kumpulan $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n\}$ adalah termuat di dalam $\mathbb{B}$, maka terurut linier oleh $\subset$, dan karena berhingga, maka memiliki anggota terbesar $\mathcal{B}_k$ untuk beberapa $1 \leq k \leq n$. Kemudian $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{B}_k$, dan karena $\mathcal{B}_k$ memiliki sifat irisan berhingga, maka irisan dari himpunan $C_1, \dots, C_n$ adalah tak kosong.

Lemma 2.24.

Misal X adalah himpunan, dan $\mathcal{D}$ adalah koleksi dari subhimpunan dari X yang maksimal dengan mengacu pada sifat irisan berhingga. Maka:

1. Setiap irisan berhingga dari anggota dari $\mathcal{D}$ merupakan anggota dari $\mathcal{D}$.
2. Jika A adalah subhimpunan dari X yang berpotongan dengan setiap anggota dari $\mathcal{D}$, maka A anggota dari $\mathcal{D}$ (James Munkres, 2000).

Bukti.

Misal B adalah irisan dari sejumlah himpunan di dalam $\mathcal{D}$, dan $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{B\}$ maka $B \in \mathcal{E}$. Akan ditunjukkan $\mathcal{E}$ memiliki sifat irisan berhingga, dengan mengikuti dari kelengkapan maksimal dari $\mathcal{D}$ bahwa $\mathcal{E} = \mathcal{D}$. Dipertimbangkan subkoleksi berhingga $\mathcal{F}$ dari $\mathcal{E}$. Jika $B \notin \mathcal{F}$, maka $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$, karena di dalam kasusnya $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$ dan $\mathcal{D}$ memiliki sifat irisan berhingga. Jika $B \in \mathcal{F}$, maka

$$\bigcap \mathcal{F} = D_1 \cap \dots \cap D_n \cap B$$

Untuk beberapa $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D}$. Karena B hanya irisan berhingga dari anggota di dalam $\mathcal{D}$, maka $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ berdasarkan sifat irisan berhingga $\mathcal{D}$. Oleh karena itu $\mathcal{E}$ memiliki sifat irisan terbatas.

Serupa dengan yang sebelumnya, misal diberikan subhimpunan A dari X dengan irisan semua anggota dari $\mathcal{D}$, misal $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{A\}$. Akan ditunjukkan lagi bahwa $\mathcal{E}$ memiliki sifat irisan berhingga, dengan mengikuti $\mathcal{E} = \mathcal{D}$. Dipertimbangkan subkoleksi berhingga $\mathcal{G}$ dari $\mathcal{E}$. Jika $A \notin \mathcal{G}$, maka $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$, karena $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}$. Jika $A \in \mathcal{G}$, maka

$$\bigcap \mathcal{G} = D_1 \cap \dots \cap D_n \cap A$$

Untuk beberapa $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D}$. Akan tetapi berdasarkan asumsi di awal bahwa A beririsan dengan semua anggota di dalam $\mathcal{D}$, maka $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Oleh karena itu $\mathcal{E}$ memiliki sifat irisan terbatas.

Selanjutnya, akan dibuktikan Teorema Tychonoff yang akan di gunakan untuk membuktikan eksistensi Ukuran Haar. Berikut adalah pembuktiannya:

Teorema 2.25 (Teorema Tychonoff)

Sembarang hasil kali *(product)* dari ruang kompak adalah kompak di dalam hasil kali *(product)* topologi (James Munkres, 2000).

Bukti.

Misal $\{X_i\}_{i\in I}$ adalah koleksi sembarang dari ruang topologi kompak, misal X adalah hasil kalinya *(product)*, dan $\mathcal{A}$ adalah koleksi dari subhimpunan X yang memiliki sifat irisan berhingga. Irisannya yaitu

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{A} \neq \emptyset$$

berdasarkan proposisi 2.22 maka X adalah kompak. Berdasarkan Lemma 2.23, dapat dipilih koleksi $\mathcal{D}$ dari subhimpunan X sedemikian sehingga $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ dan $\mathcal{D}$ adalah sifat irisan berhingga maksimal. Karena $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$, akan ditunjukkan bahwa irisan

$$\bigcap_{D\in\mathcal{D}} \overline{D} \neq \emptyset$$

Sekarang, diberikan indeks $i \in I$, misal $\pi_i : X \to X_i$ adalah proyeksi pemetaan dan dipertimbangkan koleksi $\{\pi_i(D) \in \mathcal{P}(X_i) : D \in \mathcal{D}\}$. Karena $\mathcal{D}$ memiliki sifat irisan berhingga. Karena semua himpunan X_i adalah kompak, proposisi 2.22 mengimplikasikan bahwa ada, untuk setiap $i \in I$, pilih titik $x_i \in X_i$ sedemikian sehingga

$$x_i \in \bigcap_{D\in\mathcal{D}} \overline{\pi_i(D)}.$$

Dari pilihan itu misal $x = (x_i)_{i\in I}$, adalah titik dalam X. Akan ditunjukkan bahwa $x \in \overline{D}$ untuk semua $D \in \mathcal{D}$, maka $\bigcap_{D\in\mathcal{D}} \overline{D}$ adalah tak kosong.

Pertama, ditunjukkan bahwa jika U_j adalah persekitaran $x_j \in X_j$ dan $\pi_j^{-1}(U_j)$ adalah sembarang anggota subbasis untuk hasil kali *(product)* topologi di dalam X yang memuat x, maka $\pi_j^{-1}(U_j)$ beririsan dengan setiap himpunan di dalam $\mathcal{D}$. Karena $x_j \in \overline{\pi_j(D)}$ berdasarkan definisi, U_j beririsan $\pi_j(D)$ di dalam beberapa titik $\pi_j(y)$, di mana $y \in D$. Maka $y \in \pi_j^{-1}(U_j) \cap D$. Mengikuti bagian (2) dari Lemma 2.24, menyatakan bahwa setiap anggota subbasis yang memuat x adalah di dalam $\mathcal{D}$. Maka dari bagian (1) dari Lemma 2.24, setiap anggota basis yang memuat x adalah di dalam $\mathcal{D}$. Karena $\mathcal{D}$ memiliki sifat irisan berhingga, maka setiap anggota basis yang diinduksi dan memuat x beririsan dengan setiap anggota dari $\mathcal{D}$. Oleh karena itu $x \in \overline{D}$ untuk setiap $D \in \mathcal{D}$.

2.1.2 Aljabar-σ

Suatu aljabar-σ pada himpunan X adalah koleksi subhimpunan pada himpunan X yang mengandung $\emptyset$ dan X, dan tertutup pada komplemen, gabungan terbatas, gabungan terhitung, dan irisan terhitung (Hunter, 2011). Sebuah aljabar-σ memiliki peran untuk memberikan struktur matematis pada suatu himpunan yang memungkinkan adanya pengukuran, sehingga suatu himpunan dapat memenuhi syarat terukur. Berikut adalah definisinya:

Definisi 2.26. (Ruang terukur)

Aljabar-σ dari himpunan X adalah koleksi $\mathcal{A}$ dari subhimpunan dari X sedemikian sehingga:

1. $X, \emptyset \in \mathcal{A}$;
2. Jika $A \in \mathcal{A}$, maka $A^c \in \mathcal{A}$;
3. Jika $A_i \in \mathcal{A}$ untuk $i \in \mathbb{N}$ maka

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Jika bagian (3) berlaku untuk koleksi berhingga, maka $\mathcal{A}$ disebut aljabar-σ di X. Jika $\mathcal{A}$ adalah aljabar-σ di X, maka pasangan terurut $(X, \mathcal{A})$ disebut ruang terukur (Hunter, 2011).

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa syarat pada definisi tersebut dapat di hapus atau diganti dengan cara lain dan irisan sembarang kumpulan aljabar-σ adalah aljabar-σ, namun gabungan dari kumpulan aljabar-σ belum tentu berhasil menjadi aljabar-σ. Berikut adalah dua pembuktian tersebut:

Remark 2.27.

Syarat pada definisi di atas dapat dihapus atau diganti dengan cara lain,
misal bagian (1) dan (2) menyiratkan bahwa bagian (3) (Lundgren, 2019).

Contoh 2.8.

Misal $X = \{1,2\}$ dan $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Buktikan bahwa cara pada definisi 2.26 dapat dihapus atau diganti.

Bukti.

Misal A adalah subhimpunan dari X, anggota dari A adalah $\{1\}$. Untuk Bagian (1) $X, \emptyset \in \mathcal{A}$ terbukti, karena anggota dari $\mathcal{A}$ adalah $X, \emptyset, \{1\}, \{2\}$. Kemudian bagian (2) $A = \{1\} \in \mathcal{A}$, maka $A^c = \{2\} \in \mathcal{A}$. Maka bagian (1) dan (2) menyiratkan bahwa gabungan semua subhimpunan dari X yaitu $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. Begitu pula irisan semua subhimpunan dari X yaitu $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$. Terbukti bahwa bagian (1) dan (2) menyiratkan bagian (3).

Remark 2.28.

Irisan dari sembarang kumpulan dari aljabar-σ adalah aljabar-σ, tetapi gabungan dari kumpulan dari aljabar-σ kemungkinan bisa gagal menjadi aljabar-σ (Lundgren, 2019).

Contoh 2.9.

Buktikan bahwa gabungan dari kumpulan dari aljabar-σ adalah gagal menjadi aljabar-σ.

Bukti.

Misal aljabar-σ Borel pada $\mathbb{R}$, yang memuat semua himpunan Borel, dan aljabar-σ semua himpunan dalam $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, yaitu kumpulan himpunan kuasa dari himpunan bilangan real. Jika digabungkan kedua aljabar-σ ini, hasilnya tidak akan memenuhi sifat-sifat aljabar-σ. Penggabungan ini akan berisi semua himpunan dalam $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, termasuk himpunan-himpunan yang mungkin tidak terukur atau tidak memenuhi sifat-sifat aljabar-σ. Jadi, penggabungan tersebut bukanlah aljabar-σ.

Selanjutnya, akan didefinisikan materi yang berkaitan dengan pembuktian sebelumnya dan selimut (*closure*) pada himpunan di dalam topologi. Misalnya ada irisan sembarang dari aljabar-σ adalah aljabar-σ, maka dapat dibentuk aljabar-σ terkecil, kalau dalam hal inklusi, yaitu aljabar-σ yang memuat koleksi tertentu dari himpunan. Berikut adalah definisinya:

Definisi 2.29. (aljabar-σ dibangun oleh koleksi)

Misal X adalah himpunan, dan $\mathcal{C}$ adalah koleksi dari subhimpunan dari X. Aljabar-σ terkecil yang memuat $\mathcal{C}$ disebut σ-aljabar yang dihasilkan oleh $\mathcal{C}$, dan disimbolkan $\sigma(\mathcal{C})$ (Hunter, 2011).

Selanjutnya, ketika akan mengukur suatu himpunan, alangkah baiknya dengan cara membangun aljabar-σ. Ini adalah definisi yang akan digunakan untuk membuktikan eksistensi ukuran Haar, yaitu membangun aljabar-σ dengan himpunan buka dari ruang topologi. Berikut adalah definisi dan pembuktiannya:

Definisi 2.30. (Aljabar-σ Borel)

Misal (X, τ) adalah ruang topologi. Aljabar-σ Borel

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau)$$

adalah aljabar-σ yang dihasilkan oleh koleksi τ dari subhimpunan buka di X. Anggota dari $\mathcal{B}(X)$ disebut subhimpunan Borel dari X (Hunter, 2011).

Remark 2.31.

Koleksi yang berbeda dari himpunan dapat membangun aljabar-σ yang sama. Misalnya, dari bagian (2) definisi 2.26, himpunan buka dari ruang topologi menghasilkan aljabar-σ yang sama dengan himpunan tutup (Lundgren, 2019).

Contoh 2.10.

Buktikan bahwa himpunan buka dan tutup menghasilkan aljabar-σ yang sama.

Bukti.

Misal $X = \{1,2\}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ dan $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$. Untuk anggota himpunan buka U adalah $\emptyset, X, \{1\}$ dan anggota himpunan tutup U^c adalah $X, \emptyset, \{2\}$. Gabungan dan irisan himpunan buka masing-masing menghasilkan X dan $\emptyset$, kemudian gabungan dan irisan himpunan tutup masing-masing menghasilkan $\emptyset$ dan X juga. Maka terbukti bahwa himpunan buka dan tutup menghasilkan aljabar-σ yang sama.

Setelah membahas tentang aljabar-σ, sekarang akan di bahas tentang ukuran. Ukuran yaitu fungsi yang bertujuan untuk mengukur suatu himpunan dan menjadi objek utama dalam teori ukuran. Dalam konteks ini, akan didefinisikan ukuran dengan batasan perhatian pada yang tak negatif. Berikut adalah definisinya:

Definisi 2.32. (Ruang ukuran)

Ukuran μ pada ruang terukur $(X, \mathcal{A})$ adalah fungsi

$$\mu: \mathcal{A} \to [0, \infty]$$

Sedemikian sehingga:

1. $\mu(\emptyset) = 0$; dan
2. Jika $\{A_i \in \mathcal{A}: i \in \mathbb{N})$ adalah koleksi terhitung *(countable)* yang terpisah dari himpunan di $\mathcal{A}$, maka

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Fungsi yang memenuhi bagian (2) disebut terhitung additif *(countably additive)*. Ukuran Borel di dalam X adalah ukuran yang memiliki domain yaitu $\mathcal{B}(X)$. Jika $(X, \mathcal{A})$ adalah ruang terukur dan μ adalah ukuran di dalam $\mathcal{A}$, maka ketiganya terurut $(X, \mathcal{A}, \mu)$ disebut ruang ukuran (Hunter, 2011).

Jika $(X, \mathcal{A})$ adalah ruang terukur dan μ adalah ukuran di koleksi $\mathcal{A}$, kedepannya akan digunakan istilah μ adalah ukuran di X ketika aljabar-σnya adalah sembarang atau jelas dari konteksnya. Selanjutnya akan didefinisikan jenis dari ukuran, yaitu sifat yang berlaku pada ukuran tersebut. Berikut adalah definisinya:

Definisi 2.33. (Teratur / *Regular*)

Misal (X, τ) adalah ruang topologi Hausdorff, dan $\mathcal{A}$ adalah aljabar-σ pada (X, τ) sedemikian sehingga $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$. Ukuran μ pada $\mathcal{A}$ disebut teratur (*regular)* jika berlaku :

1. $\mu(K) < \infty$ untuk semua himpunan kompak K dari X.
2. $\mu(A) = \inf\{\mu(U): U$ adalah himpunan buka dan $A \subset U\}$, untuk semua $A \in \mathcal{A}$, dan disebut teratur luar (*outer regular*), dan
3. $\mu(A) = \sup\{\mu(K): K$ adalah himpunan kompak dan $K \subset A\}$, untuk semua subhimpunan buka A dari X, dan disebut teratur dalam *(inner regular*) (Rudin, 1997).

Salah satu sifat dari ukuran Haar yaitu teratur *(regular).* Maka definisi tersebut yang akan digunakan untuk membuktikan eksistensi ukuran Haar. Selanjutnya, akan ditinjau cara untuk membangun ukuran pada suatu himpunan X. Yang mana cara ini akan di gunakan untuk membangun ukuran Haar. Cara ini yaitu dengan mendefinisikan fungsi pada himpunan kuasa dari X dengan sifat tertentu. Berikut adalah definisi dan pembuktiannya:

Definisi 2.34. (Ukuran luar)

Ukuran luar μ^* pada himpunan X adalah fungsi

$$\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$$

sedemikian sehingga:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$,
2. Jika $A \subset B \subset X$, maka $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, fungsi ini disebut monoton dan

3. Jika $\{A_i \subset X : i \in \mathbb{N}\}$ adalah koleksi terhitung *(countable)* dari subhimpunan dari X, maka

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Fungsi ini disebut terhitung subadditif *(countably subadditive)* (Hunter, 2011).

Remark 2.35.

Konsep ukuran dan ukuran luar adalah berbeda. Kecuali jika memilih himpunan kuasa sebagai aljabar-σ, maka ukuran akan gagal menjadi ukuran luar. Sebaliknya ukuran luar bisa gagal menjadi penjumlahan terhitung *(countably subadditive)*, dan gagal menjadi ukuran.

Contoh 2.11.

Buktikan bahwa ukuran gagal menjadi ukuran luar μ^*.

Bukti.

Misal ketika akan mengukur panjang himpunan bilangan bulat ($\mathbb{Z}$) pada garis bilangan riil menggunakan ukuran luar, hasilnya mendekati tak hingga, karena butuh interval tak terbatas untuk memuat $\mathbb{Z}$. Bisa dinyatakan dengan $\mu^*(\mathbb{Z}) = \infty$. Akan tetapi, ketika menggunakan konsep ukuran (misal ukuran Lebesgue) dan aljabar-σ yang tepat (misal aljabar-σ Borel), ukuran himpunan bilangan bulat ($\mathbb{Z}$) akan menghasilkan nilai nol, karena $\mathbb{Z}$ adalah himpunan hitung yang memiliki "panjang" nol dalam ukuran Lebesgue. Bisa dinyatakan dengan $\lambda(\mathbb{Z}) = 0$.

Ketika sebuah ukuran luar telah dihasilkan, selanjutnya untuk memperoleh suatu ukuran dapat dilakukan dengan membatasi ukuran luar tersebut ke dalam suatu aljabar-σ. Kemudian aljabar-σ tersebut yaitu koleksi dari semua himpunan yang membagi setiap subhimpunan dari X, dengan cara yang sedemikian rupa sehingga ukuran dari setiap bagian mengacu pada μ^*. Berikut adalah definisi dan pembuktiannya:

Definisi 2.36. (Ukuran luar terukur)

Misal μ^* adalah ukuran luar pada himpunan X. Subhimpunan $B \subset X$ disebut μ^*-terukur, jika

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

Berlaku untuk setiap subhimpunan $A \subset X$ (Hunter, 2011).

Remark 2.37.

Untuk menunjukkan himpunan B adalah μ^*-terukur, hanya perlu menunjukkan ketidaksamaannya yaitu

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

Berlaku untuk semua subhimpunan A dari X sedemikian sehingga $\mu^*(A) < \infty$ (Lundgren, 2019).

Contoh 2.12.

Buktikan bahwa himpunan B adalah μ^*-terukur.

Bukti.

Misal $X = \{1,2,3,4,5\}, B = \{2,3,4\}$ dan $A = \{1,2,3\}$. Dekomposisi himpunan A menjadi bagian yang berada di dalam B dan di luar B:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) = (\{2,3\}) \cup (\{1\})$$

Menggunakan sifat subadditivitas μ^* maka $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$. Dapat disimpulkan bahwa $\mu^*(A) \geq \mu^*(\{2,3\}) + \mu^*(\{1\})$ atau $\mu^*(A) \geq 2 + 1$

Maka terbukti bahwa $\mu^*(A) < \infty$. Karena $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, kebalikannya ketaksamaan berlaku juga berdasarkan sifat subadditif dari μ^*. Oleh karena itu, jika $\mu^*(A) = \infty$, maka ketaksamaan tersebut berlaku dengan jelas (*trivial)*.

Setelah dibuktikan bahwa subhimpunan B adalah μ^*-terukur dari X, selanjutnya akan di buktikan bahwa koleksi dari subhimpunan μ^*-terukur adalah aljabar-σ, dan batas dari μ^* ke aljabar-σ adalah ukuran. berikut adalah pembuktiannya:

Proposisi 2.38. (Batas Ukuran Luar).

Misal X adalah himpunan, dan μ^* adalah ukuran luar di dalam X. Maka untuk setiap subhimpunan B dari X yang memenuhi $\mu^*(B) = 0$ atau $\mu^*(B^c) = 0$ adalah μ^*-terukur.

Bukti.

Asumsikan $\mu^*(B) = 0$ dan A adalah subhimpunan dari X. Karena μ^* adalah monoton dan tak negatif, diperoleh

$$\mu^*(A \cap B) = 0.$$

Demikian juga, karena μ^* adalah monoton, diperoleh

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B^c) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

Proposisi ini pembuktiannya mengikuti remark 2.37. kemudian untuk bukti dari $\mu^*(B^c) = 0$ adalah sebagai berikut.

Misal $\mu^*(B^c) = 0$ dan A adalah subhimpunan dari X. Karena μ^* adalah monoton dan nonnegatif, diperoleh

$$\mu^*(A \cap B^c) = 0.$$

Demikian juga, karena μ^* adalah monoton, diperoleh

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c).$$

Teorema 2.39. (Koleksi semua ukuran luar terukur)

Misalkan X adalah himpunan, kemudian μ^* adalah ukuran luar pada X, dan $\mathcal{M}_{\mu^*}$ adalah koleksi dari semua subhimpunan μ^*-terukur dari X.

(1) $\mathcal{M}_{\mu^*}$ adalah aljabar-σ pada X.

(2) Pembatasan dari μ^* ke $\mathcal{M}_{\mu^*}$ adalah ukuran pada $\mathcal{M}_{\mu^*}$ (Hunter, 2011).

Bukti.

Dimulai dengan menunjukkan bahwa $\mathcal{M}_{\mu^*}$ adalah aljabar-σ pada X. Karena $\mu^*(\emptyset) = 0$, berdasarkan proposisi 2.38 menyiratkan bahwa $X \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. Perlu diingat bahwa subhimpunan B dari X adalah μ^*-terukur jika

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) \qquad (2.1)$$

Berlaku untuk semua subhimpunan A dari X. Misal B adalah himpunan μ^*-terukur. Karena $B = (B^c)^c$, maka persamaan (2.1) menyimpulkan bahwa B^c adalah μ^*-terukur, jadi $\mathcal{M}_{\mu^*}$ adalah tertutup pada komplemen.

Sekarang, misal B_1 dan B_2 adalah subhimpunan μ^*-terukur dari X, dan A adalah subhimpunan dari X. Karena B_1 adalah μ^*-terukur, persamaan (2.1) menyiratkan bahwa

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c).$$

Kemudian, mengganti A dengan $A \cap (B_1 \cup B_2)$ di dalam persamaan (2.1), diperoleh

$$
\begin{aligned}
\mu^*\big(A \cap (B_1 \cup B_2)\big) \quad &= \mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1) + \mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1^c) \\
&= \mu^*\Big(A \cap \big((B_1 \cap B_1) \cup (B_2 \cap B_1)\big)\Big) \\
&\quad + \mu^*\Big(A \cap \big((B_1 \cap B_1^c) \cup (B_2 \cap B_1^c)\big)\Big) \\
&= \mu^*\Big(A \cap \big(B_1 \cup (B_1 \cap B_2)\big)\Big) + \mu^*\Big(A \cap \big(\emptyset \cup (B_2 \cap B_1^c)\big)\Big) \\
&= \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2)
\end{aligned}
$$

Dengan cara yang sama, karena B_2 adalah μ^*- terukur, ganti A dengan $A \cap B_1^c$ di dalam persamaan (2.1) diberikan

$$\mu^*(A \cap B_1^c) = \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2^c).$$

Kombinasi ketiga persamaan di atas dan menggunakan $(B_1 \cup B_2)^c = B_1^c \cap B_2^c$.

$$
\begin{aligned}
&\mu^*\big(A \cap (B_1 \cup B_2)\big) + \mu^*(A \cap (B_1 \cup B_2)^c) \\
&\quad = \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2) + \mu^*(A \cap B_1^c \cap B_2^c) \\
&\quad = \mu^*(A \cap B_1) + \mu^*(A \cap B_1^c) = \mu^*(A).
\end{aligned}
$$

Karena A adalah sembarang, maka $B_1 \cup B_2$ adalah μ^*-terukur. Mengikuti induksi pada gabungan menyiratkan bahwa $\mathcal{M}_{\mu^*}$ adalah σ-aljabar di dalam X.

Selanjutnya, anggap $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ adalah koleksi terhitung *(countable)* dari subhimpunan μ^*-terukur yang terpisah dari X. Akan ditunjukkan dengan induksi bahwa

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*\left(A \cap \bigcap_{i=1}^{n} B_i^c\right) \qquad (2.2)$$

Berlaku untuk semua subhimpunan A dari X dan semua bilangan positif n. Jika $n = 1$, maka persamaan (2.2) hanya menyatakan bahwa B_1 adalah μ^*-terukur. Sekarang, misal persamaan (2.2) berlaku untuk n yang sama untuk beberapa $k \geq$

1. Himpunan dalam barisan adalah terpisah, jadi dengan mengganti A dengan $A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i^c\right)$ di dalam persamaan (2.1), maka μ^*-terukur dari B_{k+1} yaitu

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(A \cap \bigcap_{i=1}^{k} B_i^c\right) &= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i^c\right) \cap B_{k+1}\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i^c\right) \cap B_{k+1}^c\right) \\
&= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right)^c \cap B_{k+1}\right) + \mu^*\left(A \cap \bigcap_{i=1}^{k+1} B_i^c\right) \\
&= \mu^*(A \cap B_{k+1}) + \mu^*\left(A \cap \bigcap_{i=1}^{k+1} B_i^c\right)
\end{aligned}$$

Substitusikan yang di atas ke dalam persamaan (2.2) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \sum_{i=1}^{k} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*\left(A \cap \bigcap_{i=1}^{k} B_i^c\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*(A \cap B_{k+1}) + \mu^*\left(A \cap \bigcap_{i=1}^{k+1} B_i^c\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*\left(A \cap \bigcap_{i=1}^{k+1} B_i^c\right).
\end{aligned}$$

Ini berarti induksi telah selesai, jadi persamaan (2.2) berlaku untuk semua bilangan n. Perlu diingat juga, karena μ^* adalah monoton, diperoleh

$$\mu^*\left(A \cap \bigcap_{i=1}^{n} B_i^c\right) \geq \mu^*\left(A \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^c\right)$$

Dengan menerapkan ketaksamaan ini ke persamaan (2.2) dan menggunakan $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)^c$ diperoleh

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)^C\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)^C\right)$$

Karena ini berlaku untuk semua bilangan positif n, diperoleh

$$\mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)^C\right) \qquad (2.3)$$

Sekarang, untuk persamaan (2.3) dan terhitung *(countable)* subadditivitas dari μ^* menyiratkan bahwa

$$\begin{aligned} \mu^*(A) \quad & \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap B_i) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)^C\right) \\ & \geq \mu^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)^C\right) \\ & \geq \mu^*\left(\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \cup \left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)^C\right)\right) \qquad = \mu^*(A) \end{aligned}$$

Dengan demikian, untuk setiap ketaksamaan di dalam perhitungan di atas yang sebenarnya adalah suatu kesamaan. Secara khusus, menyiratkan bahwa

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)^C\right)$$

Untuk semua subhimpunan A dari X, sehingga $\cup_{i=1}^{\infty} B_i$ adalah μ^*-terukur. Maka $\mathcal{M}_{\mu^*}$ adalah tertutup pada formasi gabungan dari koleksi himpunan terpisah. Karena gabungan sembarang koleksi $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ dari himpunan di $\mathcal{M}_{\mu^*}$ adalah sama ke gabungan koleksi himpunan terpisah di dalam $\mathcal{M}_{\mu^*}$, misal gabungan dari himpunan $B_1, B_1^c \cap B_2, \dots, B_1^c \cap B_2^c \cap \dots \cap B_{n-1}^c \cap B_n, \dots$, Maka aljabar-$\sigma$ $\mathcal{M}_{\mu^*}$

adalah tertutup pada formasi gabungan terhitung *(countable)*. Dengan ini diperoleh bukti bahwa $\mathcal{M}_{\mu^*}$ adalah aljabar-σ.

Kemudian untuk menunjukkan bahwa batasan dari μ^* ke $\mathcal{M}_{\mu^*}$ adalah sebuah ukuran, perlu menunjukkan bahwa $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ adalah terhitung *(countably)* aditif. Anggaplah $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ adalah koleksi dari himpunan terpisah di dalam $\mathcal{M}_{\mu^*}$. Dengan mengganti A dengan $\cup_{i=1}^{\infty} B_i$ di dalam persamaan (2.3), maka diperoleh

$$\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \cap B_i\right) + \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)^C\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}(B_i) + \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}(B_i).$$

Sebaliknya ketaksamaan dapat disimpulkan dari sifat subaditif nya μ^*. Oleh karena itu $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ adalah terhitung *(countably)* aditif.

Selanjutnya, salah satu penerapan dari ukuran adalah teori integrasi. Berikut adalah definisi dari fungsi yang dapat di integrasikan:

Definisi 2.40. (Terukur Borel)

Misal $(X, \mathcal{A})$ dan $(Y, \mathcal{B})$ adalah ruang terukur. Fungsi $f: X \to Y$ adalah terukur dengan mengacu ke $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ jika $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ untuk semua $B \in \mathcal{B}$. Fungsi yang terukur dengan mengacu ke $\mathcal{B}(X)$ dan $\mathcal{B}(Y)$ disebut terukur Borel (Hunter, 2011).

Selanjutnya, akan di buktikan dua proposisi yang berhubungan dengan keterukuran dari suatu fungsi di dalam konteks yang berbeda, yang nanti akan digunakan untuk membuktikan eksistensi ukuran Haar. Berikut adalah pembuktiannya:

Proposisi 2.41. (Fungsi terukur Borel)

Misal $(X, \mathcal{A})$ dan $(Y, \mathcal{B})$ adalah ruang terukur, dan $\mathcal{B}_0$ adalah koleksi dari subhimpunan dari Y sedemikian sehingga $\sigma(\mathcal{B}_0) = \mathcal{B}$. Maka fungsi $f: X \to Y$ adalah terukur dengan mengacu ke $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ jika dan hanya jika $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ untuk semua $B \in \mathcal{B}_0$ (Hunter, 2011).

Bukti.

Anggaplah f adalah terukur dengan mengacu ke $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$. Karena $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$, maka diperoleh $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ untuk semua $B \in \mathcal{B}_0$. Sebaliknya, anggaplah $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ untuk semua $B \in \mathcal{B}_0$. Misal $\mathcal{F}$ adalah koleksi semua subhimpunan B dari Y sedemikian sehingga $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Persamaannya yaitu $f^{-1}(Y) = X$, $f^{-1}(B^c) = \left(F^{-1}(B)\right)^c$, dan

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$$

Semua persamaan tersebut menyiratkan bahwa $\mathcal{F}$ adalah σ-aljabar di dalam Y. Karena $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{F}$ dan $\sigma(\mathcal{B}_0)$ adalah σ-aljabar terkecil yang memuat $\mathcal{B}_0$, maka diperoleh $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$. Oleh karena itu f adalah terukur dengan mengacu ke $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$.

Proposisi 2.42.

Misal X dan Y adalah ruang topologi Hausdorff, dan $f: X \to Y$ adalah fungsi kontinu. maka f adalah terukur Borel (Hunter, 2011).

Bukti.

Kekontinuan f menyiratkan bahwa jika U adalah subhimpunan buka dari Y, maka $f^{-1}(U)$ adalah subhimpunan Borel dari X. Karena koleksi subhimpunan buka dari Y menghasilkan $\mathcal{B}(Y)$, maka keterukuran Borel dari f mengikuti proposisi 2.41.

2.1.3 Grup Kompak Lokal

Grup adalah objek aljabar paling sederhana. Grup itu sendiri adalah suatu himpunan dengan operasi biner yang memiliki struktur sangat simetris. Kesimpulannya yaitu, grup adalah struktur aljabar untuk mencari tahu kesimetrisan beberapa ruang geometris (Matsumura, 2010). Setelah dibahas sedikit tentang grup, akan dilanjutkan dengan grup topologi. Grup topologi merupakan aljabar yang diberikan struktur topologi. Umumnya, akan dibahas grup sembarang, kemudian akan dibatasi pada grup topologi yang topologinya kompak lokal dan Hausdorff, yang disebut grup kompak lokal. Pada struktur itu, akan dibuktikan bahwa ukuran Haar ada. Secara umum hasil yang berlaku untuk grup topologi juga berlaku untuk grup kompak lokal. Berikut adalah definisinya:

Definisi 2.43. (Grup)

Misal G adalah himpunan, dan $*: G \times G \to G$ adalah fungsi. Pasangan terurut $(G,*)$ disebut Grup, dan fungsi $*$ disebut operasi grup, jika berlaku:

1. (Tertutup) $a * b \in G, \forall a, b \in G$,
2. (Assosiatif) $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$,
3. (Identitas) terdapat anggota e di dalam G, yang disebut elemen identitas, sedemikian sehingga $a * e = e * a = a, \forall a \in G$, dan
4. (Invers) $\forall a \in G$, ada $a^{-1} \in G$, disebut invers dari a, sedemikian sehingga $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$.

Kemudian, jika $a * b = b * a, \forall a, b \in G$, maka G disebut komutatif (Matsumura, 2010).

Misal diberikan subinterval $[a, b]$ dari $\mathbb{R}$, kemudian di bayangkan interval tersebut ditranslasi sejauh x ke kanan atau kiri, hingga mendapatkan subinterval baru $[a - x, b - x]$ atau $[a + x, b + x]$. Translasi tersebut adalah translasi yang tidak berubah di dalam ukuran Lebesgue. Konsep tersebut akan digeneralisasi ke definisi berikut ini. Konsepnya adalah translasi subhimpunan B dari grup G dengan sejumlah a ke kiri atau kanan dengan menggunakan operasi grup pada kiri atau kanan dari B. Juga ada konsep invers B dengan menggunakan pemetaan $b \mapsto b^{-1}$. Berikut adalah definisi dan pembuktiannya:

Definisi 2.44. (Translasi di dalam Grup)

Misal $(G,*)$ adalah grup, $a \in G$, dan $A, B \subset G$. Di definisikan himpunan-himpunan berikut:

1. $aB = \{ab \in G : b \in B\}$.
2. $Ba = \{ba \in G : b \in B\}$.
3. $AB = \{ab \in G : a \in A, b \in B\}$.
4. $A^{-1} = \{a^{-1} \in G : a \in A\}$.

Kemudian, jika $A = A^{-1}$, maka A disebut simetris (Folland, 2016).

Remark 2.45.

Berdasarkan definisi 2.44 terkadang akan disebut pemetaan $x \mapsto xa$ dan $x \mapsto ax$ sebagai translasi oleh a.

Contoh 2.13.

Misal $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup bilangan bulat dengan operasi grup yaitu penjumlahan. Buktikan bahwa pemetaan $x \mapsto xa$ dan $x \mapsto ax$ adalah translasi oleh a.

Bukti.

Misal $a = 3$. Untuk $x \in \mathbb{Z}$, pemetaan $x \mapsto xa$ yaitu $x \mapsto x + a$. Maka pemetaan $x \mapsto xa \in \mathbb{Z}$ yaitu $x \mapsto x + a \in \mathbb{Z}$. Terbukti bahwa pemetaan tersebut adalah translasi oleh a.

Selanjutnya, akan didefinisikan struktur yang akan digunakan, yaitu grup topologi dan grup kompak lokal. Grup topologi ini memiliki sifat aljabar dari grup, dan juga membahas tentang himpunan buka dan himpunan kompak serta pemetaan kontinu. berikut adalah definisinya:

Definisi 2.46. (Grup Kompak Lokal)

Misal G adalah grup dan ruang topologi. Jika fungsi $x \mapsto x^{-1}$ adalah kontinu di topologi pada G, dan operasi grup $(x, y) \mapsto xy$ adalah kontinu di hasil kali (*product)* topologi pada $G \times G$, maka himpunan G beserta struktur terkait disebut grup topologi. Grup topologi yang memiliki ruang topologi yang Hausdorff dan kompak lokal disebut Grup kompak lokal (Folland, 2016).

Contoh 2.14.

Beberapa contoh dari grup kompak lokal

1. Setiap grup G dengan topologi diskrit.
2. Himpunan $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^n, \mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}^n$ dengan topologi pada penjumlahan.

3. Himpunan $\mathbb{R} - \{0\}$ dengan topologi yang diwarisi sebagai subruang dari $\mathbb{R}$ pada perkalian.

Selanjutnya, akan diketahui mengapa operasi grup dan pemetaan invers harus kontinu. Namun, sebelum membuktikan sifat dari grup topologi diperlukan definisi dan proposisi dari topologi. Berikut adalah definisi dan proposisinya:

Definisi 2.47. (Basis Koleksi Persekitaran)

Misal (X, τ) adalah ruang topologi, dan $x \in X$. Koleksi $\mathcal{U}$ dari subhimpunan dari (X, τ) disebut basis *(base)* untuk koleksi dari persekitaran dari x jika berlaku:

1. Setiap anggota dari $\mathcal{U}$ adalah persekitaran buka dari x, dan
2. Untuk setiap persekitaran buka V dari x terdapat himpunan U di $\mathcal{U}$ sedemikian sehingga $U \subseteq V$ (James Munkres, 2000).

Proposisi 2.48.

Misal A, X dan Y adalah ruang topologi, dan $f: A \to X \times Y$ adalah fungsi yang didefinisikan oleh

$$f(a) = \big(f_1(a), f_2(a)\big)$$

Maka f adalah kontinu jika dan hanya jika fungsi $f_1: A \to X$ dan $f_2: A \to Y$ adalah kontinu (James Munkres, 2000).

Bukti.

Misal $\pi_1: X \times Y \to X$ dan $\pi_2: X \times Y \to Y$ adalah proyeksi onto faktor pertama dan kedua. Perlu diingat bahwa pemetaan ini adalah kontinu, dan untuk setiap $a \in A$ diperoleh $f_1(a) = \pi_1\big(f(a)\big)$ dan $f_2(a) = \pi_2\big(f(a)\big)$. Sekarang, anggap fungsi f

adalah kontinu. karena $f_1 = \pi_1 \circ f$ dan $f_2 = \pi_2 \circ f$, fungsi f_1 dan f_2 adalah komposisi dari fungsi kontinu, oleh karena itu juga bersifat kontinu.

Sebaliknya, anggaplah f_1 dan f_2 adalah kontinu. Cukup ditunjukkan bahwa, untuk setiap anggota basis $U \times V$ untuk topologi $X \times Y$, pemetaan invers $f^{-1}(U \times V)$ adalah buka. Ini karena pemetaan invers bersifat komutatif dengan gabungan dan gabungan sembarang dari himpunan buka adalah bersifat terbuka. Misal $a \in X \times Y$. Berdasarkan definisi, $a \in f^{-1}(U \times V)$ jika dan hanya jika $f(a) \in U \times V$, yaitu jika dan hanya jika $f_1(a) \in U$ dan $f_2(a) \in V$. Diperoleh

$$f^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V).$$

Karena himpunan $f^{-1}(U)$ dan $f^{-1}(V)$ adalah terbuka, maka hasil dari irisan bersifat terbuka juga.

Selanjutnya, akan dibuktikan tiga proposisi tentang grup topologi. Untuk proposisi pertama dan kedua sebagian besar akan digunakan untuk membuktikan proposisi ketiga. Kemudian untuk proposisi ketiga atau terakhir akan langsung digunakan untuk membuktikan eksistensi ukuran Haar. Berikut adalah pembuktiannya:

Proposisi 2.49. (Homomorfisma)

Misal G adalah grup topologi, dan $a \in G$.

1. Fungsi $x \mapsto ax, x \mapsto xa$ dan $x \mapsto x^{-1}$ adalah homomorfisma dari G onto G.
2. Jika $\mathcal{U}$ adalah basis untuk koleksi dari persekitaran e, maka koleksi $\{aU \in \mathcal{P}(G): U \in \mathcal{U}\}$ dan $\{Ua \in \mathcal{P}(G): U \in \mathcal{U}\}$ adalah basis untuk koleksi dari persekitaran a.

3. Jika K dan L adalah subhimpunan kompak dari G, maka himpunan aK, Ka, KL dan K^{-1} adalah kompak (Folland, 2016).

Bukti.

Fungsi $x \mapsto (a, x)$ adalah kontinu berdasarkan proposisi 2.48, dan operasi grup $(a, x) \mapsto ax$ adalah kontinu berdasarkan definisi dari G, maka komposisi $x \mapsto ax$ adalah kontinu. Dengan argumen yang sama, Fungsi $x \mapsto (a^{-1}, x)$ dan $(a^{-1}, x) \mapsto a^{-1}x$ adalah kontinu, maka fungsi invers $x \mapsto a^{-1}x$, yang merupakan hasil dari komposisi dari dua pemetaan tersebut, adalah kontinu. Oleh karena itu $x \mapsto ax$ adalah homomorfisma. Kemudian, fungsi $x \mapsto x^{-1}$, merupakan invers, adalah kontinu berdasarkan definisi G dan oleh karena itu fungsi ini juga homomorfisma.

Sekarang, Misal $\mathcal{U}$ adalah basis untuk koleksi dari persekitaran e, dan $U \in \mathcal{U}$. Karena $ae = a$ dan $ae \in aU$, maka himpunan aU adalah persekitaran buka dari a. Oleh karena itu, anggap V adalah persekitaran buka dari a. Karena $a^{-1}a = e$, himpunan $a^{-1}V$ adalah persekitaran buka dari e. Tetapi kemudian ada persekitaran buka $U \in \mathcal{U}$ dari e sedemikian sehingga $U \subseteq a^{-1}V$. Karena himpunan inklusi dipertahankan pada translasi, maka $aU \subseteq aa^{-1}V = V$. Karena koleksi $\{aU \in \mathcal{P}(G): U \in \mathcal{U}\}$ adalah basis untuk koleksi dari persekitaran a.

Terakhir, Misal K dan L adalah subhimpunan kompak dari G. Karena operasi grup $(x, y) \mapsto xy$ dan fungsi $x \mapsto ax, x \mapsto xa$ dan $x \mapsto x^{-1}$ adalah kontinu, maka himpunan KL, aK, Ka dan K^{-1} adalah kompak berdasarkan proposisi 2.19. Kemudian, hasil kali *(product)* $K \times L$ adalah kompak berdasarkan teorema 2.25 (Teorema Tychonoff).

Proposisi 2.50. (Persekitaran terbuka simetris)

Misal G adalah grup topologi, dan U adalah persekitaran buka e.

1. Terdapat persekitaran buka V dari e sedemikian sehingga $VV \subseteq U$.

2. Terdapat persekitaran buka simetris V dari e sedemikian sehingga $V \subseteq U$ (Folland, 2016).

Bukti.

Misal $W = \{(x, y) \in G \times G: xy \in U\}$. Karena operasi grup $(x, y) \mapsto xy$ adalah kontinu, W adalah persekitaran buka dari (e, e). Topologi dari $G \times G$ kemudian ada anggota basis $V_1 \times V_2$ sedemikian sehingga $V_1 \times V_2 \subseteq W$, dan himpunan V_1 dan V_2 harus menjadi persekitaran buka dari e. Himpunan $V = V_1 \cap V_2$ adalah persekitaran buka dari e yang memenuhi $VV \subseteq U$.

Sekarang, Jika U adalah persekitaran buka dari e, maka U^{-1} juga persekitaran buka dari e, karena pemetaan $x \mapsto x^{-1}$ adalah kontinu. Himpunan $V = U \cap U^{-1}$ adalah persekitaran buka simetris dari e yang termuat di dalam U.

Proposisi 2.51.

Misalkan G adalah grup topologi, K adalah subhimpunan kompak dari G, dan U adalah subhimpunan buka dari G sedemikian sehingga $K \subseteq U$. Maka terdapat persekitaran buka V_R dan V_L dari elemen identitas e sedemikian sehingga $KV_R \subseteq U$ dan $V_L K \subseteq U$.

Bukti.

Misal $x \in K$. Karena $K \subseteq U$, himpunan $x^{-1}U$ adalah persekitaran buka dari e. Berdasarkan bagian (2) dari proposisi 2.50, ada persekitaran buka W_x dari e sedemikian sehingga $W_x \subseteq x^{-1}U$. Ketika mentranslasi dengan x, terlihat bahwa

$xW_x \subseteq U$. Kemudian, menggunakan bagian (1) dari proposisi 2.50 ke himpunan W_x terlihat bahwa ada persekitaran buka V_x dari e sedemikian sehingga $V_xV_x \subseteq W_x$. Sekarang dipilih untuk setiap $x \in K$. koleksi $\{xV_x\}_{x\in K}$ adalah cover buka dari K dan, karena K adalah kompak, ada koleksi berhingga $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ dari titik di dalam K sedemikian sehingga koleksi $\{x_1V_{x_1}, \dots, x_nV_{x_n}\}$ adalah cover dari K. Misal $V_R = \cap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Sekarang, jika $y \in K$, untuk beberapa indeks i sedemikian sehingga $y \in x_iV_{x_i}$. Artinya, untuk semua indeks i, diperoleh

$$yV_R \subseteq x_iV_{x_i}V_{x_i} \subseteq x_iW_{x_i} \subseteq U.$$

Karena y adalah sembarang anggota dari K, maka berikutnya dengan mengambil gabungan dari semua yV_R, dapat disimpulkan bahwa $KV_R \subseteq U$. Kemudian untuk V_L caranya sama dengan V_R, yaitu misal $V_L = \cap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Sekarang, jika $y \in K$, untuk beberapa indeks i sedemikian sehingga $y \in V_{x_i}x_i$. Artinya, untuk semua indeks i, diperoleh

$$V_Ly \subseteq V_{x_i}x_iV_{x_i} \subseteq W_{x_i}x_i \subseteq U.$$

Karena y adalah sembarang anggota dari K, maka berikutnya dengan mengambil gabungan dari semua V_Ly, dapat disimpulkan bahwa $V_LK \subseteq U$.

2.2 Kajian Integrasi ukuran Haar Dengan Al-Quran

Pada analisis real terdapat hal menarik yang dapat dikaji karena penerapan dari konsep tersebut yang sangat banyak dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam disiplin ilmu-ilmu yang lainnya. Hal tersebut salah satunya adalah tentang eksistensi ukuran Haar. Allah SWT. berfirman dalam Al-Qur’an surah Al-Qamar ayat 49 (Kemenag, 2019):

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنٰهُ بِقَدَرٍ ٤٩

Artinya: "Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu sesuai dengan ukuran". (QS. Al-Qamar: 49)

Mengutip dari Tafsir Kementrian Agama Republik Indonesia (Kemenag, 2023), bahwa apa yang terjadi pada semua makhluk telah ditetapkan oleh Allah Swt. Sungguh, Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran, yaitu suatu sistem dan ketentuan yang telah ditetapkan. Menurut Tafsir Al-Muyassar (Arabia, 2023b) adalah Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu dalam takaran yang telah Kami takdirkan dan Kami tetapkan, ilmu Kami telah mendahuluinya dan Kami menulisnya di Lauhul Mahfuzh. Menurut Tafsir Al-Wajiz / Syaikh Prof. Dr. Wahbah az-Zuhaili, pakar fiqih dan tafsir negeri Suriah (Wajiz, 2023) yaitu Sesungguhnya kami menciptakan setiap sesuatu itu dengan ukuran yang sesuai dengan yang telah diketahui dan tertulis di lauhil mahfudz sebelum ada penciptaannya.

Aturan-aturan dalam ukuran memungkinkan kita untuk bersama-sama memahami makna ukuran tersebut, mengingat bahwa persepsi ukuran dapat bervariasi antara individu. Namun Allah SWT. telah membuat ukuran tersebut serapi-rapinya, Allah SWT. berfirman dalam Al-Qur'an surah Al-Furqan ayat 2 (Kemenag, 2019) yang berbunyi:

ۨالَّذِيْ لَهٗ مُلْكُ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَّلَمْ يَكُنْ لَّهٗ شَرِيْكٌ فِى الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهٗ تَقْدِيْرًا ٢

Artinya: "(Yaitu Zat) yang milik-Nya lah kerajaan langit dan bumi, (Dia) tidak mempunyai anak, dan tidak ada satu sekutu pun dalam kekuasaan(-Nya). Dia telah menciptakan segala sesuatu, lalu menetapkan ukuran-ukurannya dengan tepat" (Q.S Al-Furqon: 2).

Menurut Tafsir Ibnu Katsir (Katsir, 2023) artinya Dia (Allah SWT) menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya. Segala sesuatu selain Dia adalah makhluk lagi dimiliki, sedangkan Dialah Yang Menciptakan segala sesuatu, Yang Menguasai, Yang Memiliki dan Tuhannya, segala sesuatu berada di bawah kekuasaan-Nya, diatur oleh-Nya, tunduk kepada-Nya dan kepada takdir-Nya. Menurut Tafsir Al-Muyassar / Kementerian Agama Saudi Arabia (Arabia, 2023a) yaitu Yang memiliki kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mengambil anak, dan Dia tidak mengambil sekutu dalam kerajaan-Nya, dan Dia-lah Yang menciptakan segala sesuatu dan menyempurnakannya sesuai dengan bentuk ciptaan yang tepat dengan tuntutan hikmah-Nya tanpa adanya kekurangan dan kekeliruan.

Dalam konsep ukuran Haar pada grup kompak lokal, kita memahami bahwa setiap subhimpunan di dalam grup tersebut dapat diukur dengan ukuran yang tepat dan konsisten. Konsep ini mencerminkan prinsip yang terkandung dalam Al-Qur'an, di mana segala sesuatu yang telah diciptakan Allah SWT. juga ditetapkan dengan ukuran yang tepat sesuai kehendak-Nya. Surah Al-Furqan (25:2) mengajarkan pentingnya mengakui dan mensyukuri nikmat-nikmat yang diberikan kepada kita, termasuk pemahaman, kesehatan, dan kemampuan berkomunikasi. Dengan menggunakan ukuran yang tepat, baik dalam konteks matematika seperti ukuran Haar maupun dalam penghargaan terhadap nikmat-nikmat yang diberikan Allah, kita dapat memahami dan menghargai dengan lebih baik ukuran dan makna yang ada dalam penciptaan-Nya.

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Penelitian ini di susun berdasarkan beberapa teori pendukung terkait eksistensi ukuran Haar kiri pada grup kompak lokal. Dimulai dengan pembuktian definisi dari *Integral Haar* oleh Glen E. Bredon. Berikut rujukan yang dipakai pada penelitian ini terkait Eksistensi Ukuran Haar pada Grup Kompak Lokal.

2.3.1 Invarian kanan Integral Haar

Misal G adalah grup kompak lokal. Jika f adalah fungsi bernilai real pada G, maka selimut *(closure)* himpunan dari titik $x \in G$ sedemikian sehingga $f(x) \neq 0$ adalah dukungan *(support)* dari f dan dinotasikan dengan $spt(f)$. Misal L adalah fungsi kontinu bernilai real pada G dengan dukungan *(support)* adalah kompak, dan L^+ adalah subhimpunan dari L yang terdiri dari fungsi tak negatif. untuk setiap fungsi f di dalam G dan setiap anggota $y \in G$ dimisalkan $R_y(f)$ menyatakan fungsi dengan $R_y(f)(x) = f(xy)$. Untuk catatan $R_y(R_z(f)) = R_{yz}(f)$.

Definisi 2.1.

Invarian kanan integral pada G adalah fungsi bernilai real I terdefinisi pada L sedemikian sehingga:

1. $I(f + g) = I(f) + I(g)$,
2. $I(af) = aI(f)$, untuk a adalah bilangan real,
3. $f \in L^+$ dan $f \neq 0$ menyiratkan bahwa $I(f) > 0$,
4. $I\left(R_y(f)\right) = I(f)$ untuk semua $y \in G$ dan $f \in L$ (Bredon, 1963).

Sebagai catatan jika I hanya terdefinisi pada L^+ memenuhi kondisi (dengan positif di dalam bagian (2)), maka fungsi I dapat diperluas ke invarian kanan integral di dalam satu atau hanya satu cara. Pada pembuktian ini dibatasi pada fungsi di dalam L^+ dan untuk semua penjumlahan di dalam pembuktian ini bersifat berhingga.

Selanjutnya akan didefinisikan bahwa invarian kanan integral terbukti ada. Berikut adalah definisi dan teoremanya:

Definisi 2.2.

Misal $g \in L^+, g \neq 0$. Untuk $f \in L^+$ misal

$$I_g(f) = \sup\{s|sg \leq f\} = \inf\{s|sg \geq f\}.$$

Teorema 2.3. (Eksistensi)

I_g adalah invarian kanan integral (Bredon, 1963).

Bukti.

Untuk membuktikannya, hanya perlu menunjukkan sifat additif. Menggunakan definisi $I_g(f) = \inf\{s|sg \geq f\}$, terlihat jika $sg \geq f_1$ dan $tg \geq f_2$, maka $(s+t)g \geq f_1 + f_2$, dan oleh karena itu $s + t \geq I_g(f_1 + f_2)$. Kesimpulannya adalah $I_g(f_1) + I_g(f_2) \geq I_g(f_1 + f_2)$.

Untuk ketaksamaan sebaliknya yaitu dengan cara yang sama menggunakan definisi $I_g(f) = \sup\{s|sg \leq f\}$, terlihat bahwa jika $sg \leq f_1$ dan $tg \leq f_2$, maka $(s+t)g \leq f_1 + f_2$, oleh karena itu $s + t \leq I_g(f_1 + f_2)$. Kesimpulannya adalah $I_g(f_1) + I_g(f_2) \leq I_g(f_1 + f_2)$.

Selanjutnya adalah bukti konstruktif yang disederhanakan mengenai eksistensi ukuran Haar oleh E. M. Alfsen. Berikut adalah rujukan yang dipakai untuk penelitian ini terkait eksistensi ukuran Haar.

2.3.2 Konstruksi yang disederhanakan mengenai Eksistensi Ukuran Haar

Dalam kelanjutannya, G akan menjadi grup kompak lokal sembarang, akan tetapi tetap, dan L akan menjadi kumpulan fungsi bernilai real yang kontinu dengan dukungan *(support)* adalah kompak pada G. Untuk setiap anggota V dari kumpulan persekitaran $\mathcal{V}$ dari elemen identitas e, simbol L_V menyatakan kumpulan dari semua $f \in L$ yang hilang dari V. untuk setiap $f \in L$ fungsi konjugat f^* didefinisikan dengan $f^*(x) = f(x^{-1})$. Untuk setiap $f \in L$ dan $s \in G$, translasi kiri dan kanan f_s dan f^s, didefinisikan dengan $f_s(x) = f(s^{-1})x)$ dan $f^s(x) = f(xs)$.

Berdasarkan sifat kompak lokal, jika $f, \varphi \in L^+$ dan $\varphi \neq 0$, maka terdapat anggota $s_1, \dots, s_n \in G$ dan bilangan positif $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sedemikian sehingga

(1.1) $$f \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_{s_i}.$$

Kemudian di definisikan

(1.2) $$\left(\overline{f : \varphi}\right) = \inf\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,|\, f \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_{s_i}\},$$

(1.3) $$\left(\underline{f : \varphi}\right) = \sup\{ \sum_{j=1}^{m} \beta_j \,\Big|\, \sum_{j=1}^{m} \beta_i \varphi_{s_j} \leq f\}.$$

Perlu dicatat bahwa untuk setiap $f \in L^+, f \neq 0$, memiliki $\left(\overline{f : \varphi}\right) > 0$, dan terdapat $V \in \mathcal{V}$ sedemikian sehingga $\left(\underline{f : \varphi}\right) > 0$ setiap kali $\varphi \in L_V^+$.

Kemudian ada beberapa sifat standar untuk pembuktian nantinya:

(1.4) $$f \leq g \Rightarrow \left(\overline{f : \varphi}\right) \leq (\overline{g : \varphi}),$$

(1.5) $\left(\overline{f:\varphi}\right) \leq \left(\overline{f:\psi}\right)(\overline{\psi:\varphi}),$

(1.6) $\left(\overline{f_s:\varphi}\right) = \left(\overline{f:\varphi}\right),$

(1.7) $\left(\overline{\alpha f:\varphi}\right) = \alpha\left(\overline{f:\varphi}\right),$

(1.8) $\left(\overline{\sum_{i=1}^{n} f_i:\varphi}\right) \leq \sum_{i=1}^{n}(\overline{f_i:\varphi})$ (Alfsen, 1963).

Pernyataan ganda tersebut juga berlaku untuk fungsi $(f,\varphi) \rightarrow \underline{(f:\varphi)}$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur. Teknik pengumpulan materinya diperoleh dengan studi pustaka yang berkaitan dengan topik penelitian. Cara untuk mendapatkannya yaitu dengan menghimpun materi-materi yang sesuai dengan penelitian yakni dari buku, jurnal maupun artikel agar diperoleh materi yang lengkap dan terperinci.

3.2 Pra Penelitian

Berikut adalah tahapan yang dilakukan sebelum melakukan penelitian:

1. Mengumpulkan sumber-sumber bacaan atau *paper*-*paper* yang diperlukan terkait dengan topik yang akan dibahas sebagai titik acuan penelitian.
2. Menentukan rumusan masalah, tujuan, dan manfaat dari penelitian yang akan dilakukan.
3. Membuat latar belakang dan memahami setiap konsep dasar pada penelitian ini.

3.3 Tahapan Penelitian

Berikut adalah tahapan-tahapan pada penelitian ini:

1. Mempelajari jurnal yang dipaparkan tentang "*The Existence and Uniqueness of the Haar Measure*".

2. Memaparkan definisi-definisi terkait yakni definisi ruang topologi, ruang topologi Hausdorff, hasil kali topologi, fungsi kontinu, homomorfisma, himpunan kompak, σ-aljabar, Borel σ-aljabar, reguler, ukuran luar dan batasannya, fungsi terukur Borel, grup kompak lokal, basis koleksi persekitaran, fungsi pendukung, dan ukuran Haar.
3. Menentukan dan mengkaji ayat-ayat Al-Qur'an atau hadis yang berkaitan dengan topik penelitian yang diambil.
4. Membuktikan eksistensi ukuran Haar pada grup kompak lokal dengan menjelaskan alur pembuktiannya.
5. Membuktikan sifat turunan fungsi melalui Lemma.
6. Mendefinisikan limit fungsi.
7. Membuktikan sifat turunan limit fungsi melalui Lemma.
8. Membangun ukuran luar menggunakan limit fungsi.
9. Membuktikan bahwa ukuran luar terbatas pada grup kompak lokal.
10. Menjelaskan sifat lain dari ukuran sehingga terbukti ukuran tersebut adalah ukuran Haar.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Ukuran Haar pada Grup Kompak Lokal

Pada pembahasan skripsi ini akan dibuktikan teorema utama yaitu, eksistensi ukuran Haar pada setiap grup kompak lokal, dimulai dengan definisi ukuran Haar dan contoh ukuran Haar tersebut. Selanjutnya, akan didefinisikan ukuran Haar. Umumnya memiliki sifat-sifat yang sama seperti ukuran Lebesgue, tetapi dalam konteks yang lebih umum dari grup kompak lokal. Berikut adalah definisi dan pembuktiannya.

Definisi 4.1. (Ukuran Haar Kiri)

Misal G adalah grup kompak lokal dan μ adalah ukuran Borel reguler bukan nol di dalam G. Maka μ disebut ukuran Haar kiri jika, μ memenuhi invarian pada translasi kiri, bisa diartikan bahwa $\mu(xA) = \mu(A)$ berlaku $\forall x \in G$ dan $\forall A \in \mathcal{B}(G)$.

Remark 4.2.

Jika $x \in G$ dan A adalah subhimpunan Borel dari G, maka xA dan Ax adalah subhimpunan Borel dari G. Oleh karena itu $\mu(xA)$ dan $\mu(Ax)$ terdefinisi. Buktikan $\mu(xA)$ dan $\mu(Ax)$ terdefinisi.

Bukti.

Misal G adalah grup kompak lokal dan A adalah subhimpunan Borel dari G. Jika A adalah subhimpunan Borel, maka A termasuk dalam Borel aljabar-σ di G. Pertimbangkan fungsi translatif oleh anggota x. Untuk fungsi $f: G \to G$ sebagai $f(a) = xa$. Fungsi ini adalah pemetaan bijektif dan homeomorfisma, sehingga menginduksi transformasi pada Borel aljabar-σ. Oleh karena itu, $xA = f^{-1}(A)$ juga termasuk di Borel aljabar-σ. Demikian pula untuk, Ax juga termasuk di Borel aljabar-σ. Oleh karena itu terbukti bahwa $\mu(xA)$ dan $\mu(Ax)$ terdefinisi.

Contoh 4.3. (Ukuran Haar)

Beberapa contoh ukuran yang merupakan ukuran Haar kiri dan kanan.

1. Ukuran Lebesgue λ pada $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{R}^n$ pada operasi penjumlahan.
2. Ukuran terhitung pada semua grup G dalam topologi diskrit.

Selanjutnya, akan difokuskan pada ukuran Haar kiri. Kemudian akan dibuktikan empat proposisi. Untuk proposisi kedua hanya untuk membuktikan proposisi ketiga. Dan untuk proposisi yang lainnya langsung digunakan untuk pembuktian utama. Berikut adalah proposisinya:

Proposisi 4.4. (Subhimpunan kompak dari subhimpunan buka)

Misal X adalah ruang topologi Hausdorff, K, L adalah subhimpunan kompak yang terpisah dari X, maka ada subhimpunan buka yang terpisah U dan V dari X sedemikian sehingga $K \subseteq U$ dan $L \subseteq V$.

Bukti.

Jika salah satu atau keduanya dari himpunan K dan L adalah kosong, maka menggunakan $\emptyset$ sebagai himpunan buka. Anggaplah keduanya adalah himpunan tak kosong. Pada kasus pertama di mana K memuat hanya satu anggota x. Karena X adalah Hausdorff, ada untuk setiap $y \in L$, pasangan himpunan buka yang terpisah U_y dan V_y sedemikian sehingga $x \in U_y$ dan $y \in V_y$. Karena L adalah kompak, ada barisan berhingga $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ dari titik di dalam L sedemikian sehingga koleksi $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$ adalah cover dari L. Himpunan $U = \cap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ dan $V = \cup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ adalah himpunan yang diinginkan.

Sekarang, dipertimbangkan untuk kasus di mana K memiliki lebih dari satu anggota. Berdasarkan pembuktian di atas, ada untuk setiap $x \in K,$ himpunan buka yang terpisah U_x dan V_x sedemikian sehingga $x \in U_x$ dan $L \subseteq V_x$. Karena K adalah kompak, ada barisan berhingga $\{x_i\}_{i=1}^{k}$ dari anggota di dalam K sedemikian sehingga koleksi $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_k}\}$ adalah cover dari K. Himpunan $U = \cup_{i=1}^{k} U_{x_i}$ dan $V = \cap_{i=1}^{k} V_{x_i}$ memenuhi syarat tersebut.

Proposisi 4.5. (Closure kompak dari persekitaran buka)

Misal X adalah ruang topologi kompak lokal Hausdorff, $x \in X$, dan U adalah persekitaran buka dari x. Maka ada persekitaran buka V dari x yang memiliki selimut *(closure)* adalah kompak dan memenuhi $\overline{V} \subseteq U$.

Bukti.

Karena X adalah kompak lokal, ada persekitaran buka W dari x yang memiliki selimut *(closure*) adalah kompak. Jika W tidak termuat di dalam U, maka dapat mengganti W dengan $W \cap U$, jadi mulai sekarang diasumsikan bahwa $W \subseteq U.$ Di sisi lain, di dalam kasus $\overline{W}$ mungkin juga tidak termuat di dalam U. Kemudian dipertimbangkan himpunan $\{x\}$ dan $\overline{W} - W$, yang keduanya adalah kompak dan terpisah. Berdasarkan proposisi 4.4, ada subhimpunan buka yang terpisah V_1 dan V_2 sedemikian sehingga $\{x\} \subseteq V_1$ dan $\overline{W} - W \subseteq V_2$. Himpunan $V_1 \cap W$ adalah persekitaran buka dari x di mana selimut *(closure)* nya adalah kompak dan memenuhi $\overline{V_1 \cap W} \subseteq W \subseteq U$.

Proposisi 4.6. (Subhimpunan kompak dari subhimpunan buka)

Misal X adalah ruang topologi kompak lokal Hausdorff, K adalah subhimpunan kompak dari X, dan U adalah subhimpunan buka dari X sedemikian sehingga $K \subseteq U$. Maka ada subhimpunan buka V dari X yang memiliki selimut *(closure*) adalah kompak dan memenuhi $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Bukti.

Berdasarkan proposisi 4.5 menyiratkan bahwa setiap titik $x \in K$ memiliki persekitaran buka V_x yang memiliki selimut (*closure*) adalah kompak dan termuat di dalam U. Karena K adalah kompak, ada koleksi berhingga $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$ dari persekitaran tersebut yang menjadi cover dari K. Misal $V = \cup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Karena $\overline{V_{x_i}} \subseteq U$ untuk semua indeks i dan selimut (*closure*) adalah bersifat distributif terhadap gabungan, maka V adalah himpunan yang memenuhi syarat dan sifat yang diinginkan.

Proposisi 4.7. (Subhimpunan kompak dari subhimpunan buka terpisah)

Misal X adalah ruang topologi kompak lokal Hausdorff, K adalah subhimpunan kompak dari X, dan U_1, U_2 adalah subhimpunan buka dari X sedemikian sehingga $K \subseteq U_1 \cup U_2$. Maka ada himpunan kompak K_1 dan K_2 sedemikian sehingga $K = K_1 \cup K_2, K_1 \subseteq U_1$ dan $K_2 \subseteq U_2$.

Bukti.

Misal $L_1 = K - U_1$ dan $L_2 = K - U_2$. Maka L_1 dan L_2 adalah kompak dan terpisah, jadi berdasarkan proposisi 4.4 ada himpunan buka terpisah V_1 dan V_2 sedemikian sehingga $L_1 \subseteq V_1$ dan $L_2 \subseteq V_2$. Jika didefinisikan $K_1 = K - V_1$ dan $K_2 = K - V_2$, maka K_1 dan K_2 adalah kompak, termuat di dalam U_1 dan U_2 masing-masing dan memenuhi $K = K_1 \cup K_2$.

Selanjutnya akan dimulai pembuktian teorema utama, dengan strategi konstruksi yang akan dijelaskan selama pembuktian. Sebagai catatan, pembuktian ini memerlukan beberapa sifat dari fungsi yang akan dikonstruksi. Bukti-bukti dari sifat-sifat tersebut akan dibuktikan pada dua Lemma yang terpisah. Berikut adalah pembuktian teorema utama dan dua Lemma tersebut:

Teorema 4.8 (Ukuran Haar Kiri pada Grup Kompak Lokal)

Misal G adalah grup kompak lokal. Maka ada ukuran Haar kiri pada G.

Bukti.

Misal K adalah subhimpunan kompak dari G, dan V adalah subhimpunan dari G yang mempunyai interior yaitu V^o yang tak kosong. Maka cover buka dari K adalah $xV = \{xV^o : x \in G\}$. Karena K adalah himpunan kompak, maka ada koleksi berhingga $\{x_i\}_{i=1}^n \in G$ sedemikian sehingga $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i V^o \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i V$. Kemudian misal $\#(K:V)$ adalah bilangan bulat positif terkecil n sehingga koleksi $\{x_i\}_{i=1}^n$ terbukti ada. Maka $\#(K:V) = 0$ jika dan hanya jika $K = \emptyset$, karena tidak ada himpunan V yang menutupi himpunan kompak K.

Sekarang, misal K_0 subhimpunan kompak dari G, yang mempunyai interior yang tak kosong, yang ditetapkan untuk pembuktian seterusnya. Selanjutnya akan di ukur sembarang subhimpunan kompak K dari G dengan menghitung rasio $\#(K{:}\,U)/\ \#(K_0 : U)$ untuk setiap persekitaran buka U dari elemen identitas e, dan kemudian mencari limit rasio ketika persekitaran U semakin mengecil. Setelah di dapatkan limit rasio tersebut, kemudian akan di bangun ukuran luar μ^* di dalam G. Terakhir, di tunjukkan ukuran Haar kiri yaitu terbatas pada μ^* ke $\mathcal{B}(G)$.

Sifat fungsi h_U

Akan dimulai pembuktian yang telah dijelaskan secara singkat tadi. Misal $\mathcal{C}$ adalah koleksi semua subhimpunan kompak dari G, dan $\mathcal{U}$ adalah koleksi semua persekitaran buka dari elemen identitas e. Kemudian, untuk setiap $U \in \mathcal{U}$ didefinisikan sebuah fungsi $h_U : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$h_U(K) = \frac{(K{:}\,U)}{(K_0{:}\,U)}.$$

Sebelum dilanjutkan pembuktiannya, perlu diturunkan beberapa sifat dari fungsi h_U , yang akan dilakukan menggunakan lemma berikut ini:

Lemma 4.9 Misal $U \in \mathcal{U}$, misal $K, K_1, K_2 \in \mathcal{C}$, dan $x \in G$.

(1) $0 \leq h_U(K) \leq (K{:}\,K_0)$.

(2) $h_U(K_0) = 1$.

(3) $h_U(xK) = h_U(K)$.

(4) Jika $K_1 \subseteq K_2$, maka $h_U(K_1) \leq h_U(K_2)$.

(5) $h_U(K_1 \cup K_2) \leq h_U(K_1) + h_U(K_2)$.

(6) Jika $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \emptyset$, maka $h_U\,(K_1 \cup K_2) = h_U(K_1) + h_U\,(K_2)$.

Bukti.

Dimulai dengan mengamati asumsi bahwa jika $\{x_i\}_{i=1}^m$ dan $\{y_j\}_{j=1}^n$ adalah koleksi anggota di dalam G sedemikian sehingga $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} x_i K_0$ dan $K_0 \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} y_j U$, maka $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} x_i y_j U$. Asumsi tersebut menyiratkan bahwa

$$\#(\mathrm{K}: \mathrm{U}) \leq \#(\mathrm{K}: \mathrm{K}_0)\#(\mathrm{K}_0 : \mathrm{U})$$

artinya mengimplikasikan bahwa jumlah elemen dalam K terhadap U tidak lebih besar dari hasil perkalian antara jumlah elemen dalam K terhadap K_0 dengan jumlah elemen dalam K_0 terhadap U. Maka ini setara dengan bagian (1) yaitu $0 \leq h_U(K) \leq (K: K_0)$. Mengikuti langsung dari definisi fungsi h_U yaitu $h_U(K) = \frac{(K: U)}{(K_0: U)}$ maka pada bagian (2) yaitu $h_U(K_0) = \frac{(K_0: U)}{(K_0: U)} = 1$, karena K diganti K_0 maka hasil rasionya adalah 1.

Untuk bagian (3) karena K adalah kompak, maka K memiliki cover buka. Jika cover buka tersebut berhingga maka kemudian untuk setiap himpunan yang di dalam cover K akan di translasi oleh x sehingga diperoleh cover buka dari xK yang jumlah himpunannya sama dengan jumlah himpunan K. Yang kemudian dapat di simbolkan $h_U(xK) = h_U(K)$. Untuk bagian (4) sudah jelas karena jika $K_1 \subseteq K_2$, maka untuk nilai fungsi $h_U(K_1) \leq h_U(K_2)$. Untuk bagian (5),

$$h_U(K_1 \cup K_2) \leq h_U(K_1) + h_U(K_2)$$

juga sudah jelas karena nilai fungsi gabungan lebih kecil atau sama dengan nilai fungsi yang di jumlahkan.

Terakhir untuk membuktikan bagian (6) ini mengikuti bagian (5) yaitu

$$h_U\ (K_1 \cup K_2) \leq h_U(K_1) + h_U\ (K_2)$$

sehingga cukup ditunjukkan bahwa

$$\#(K_1 \cup K_2 : U) \geq \#(K_1 : U) + \#(K_2 : U)$$

Ketika $K_1 U^{-1} \cap K_2 U^{-1} = \emptyset$. Misalkan $K_1 U^{-1} \cap K_2 U^{-1} = \emptyset$ dan $\{x_i\}_{i=1}^{n} \in G$ sehingga $n = (K_1 \cup K_2 : U)$ dan $K_1 \cup K_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} x_i U$. Kemudian setiap himpunan $x_i U$ memiliki irisan tidak kosong dengan paling banyak satu dari K_1 dan K_2. Jika ini tidak terjadi, akibatnya $x_i \in K_1 U^{-1} \cap K_2 U^{-1}$ yang akan menjadi kontradiksi. Oleh karena itu dapat dibagi koleksi $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ menjadi dua koleksi, misalnya $\{y_i\}_{i=1}^{j}$ dan $\{z_i\}_{i=1}^{k}$, sedemikian sehingga $K_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{j} y_i U$ dan $K_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} z_i U$. Maka hasilnya

$$\#(K_1 : U) + \#(K_2 : U) \leq j + k = n = \#(K_1 \cup K_2 : U).$$

Limit rasio fungsi h_U

Sekarang beralih ke limit rasio $\#(K: U)/\#(K_0 : U)$, yaitu fungsi h_U. Alurnya adalah dengan membangun ruang hasil kali yang berisi semua fungsi h_U, dan kemudian menggunakan argumen kekompakan untuk mendapatkan limit fungsi. Dimulai dengan ruang hasil kali. Untuk setiap $K \in \mathcal{C}$, misal I_K adalah interval tertutup $[0, \#(K: K_0)]$ di dalam $\mathbb{R}$, dan

$$X = \prod_{K \in \mathcal{C}} I_K$$

adalah hasil kalinya. Bagian (1) dari Lemma 4.9 yaitu $0 \leq h_U(K) \leq \#(K: K0)$ menyiratkan bahwa $h_U(K) \subseteq I_K$, $\forall K \in \mathcal{C}$, selanjutnya tersirat bahwa $h_U \in X$, $\forall U \in \mathcal{U}$. Selanjutnya, karena setiap interval I_K kompak berdasarkan teorema tychonoff yaitu sembarang hasil kali dari himpunan kompak adalah kompak di dalam hasil kali topologi, maka X adalah kompak.

Limit fungsi h_U

Sekarang akan di alihkan ke limit fungsi. Berdasarkan definisi, koleksi $\mathcal{U}$ dari subhimpunan dari X adalah basis koleksi dari persekitaran x jika berlaku: setiap anggota dari $\mathcal{U}$ adalah persekitaran buka dari x, dan untuk setiap persekitaran buka

V dari x terdapat himpunan U di dalam $\mathcal{U}$ sedemikian sehingga $U \subseteq V$. Maka untuk setiap persekitaran terbuka V dari e, misal $S(V)$ adalah closure di dalam X dari himpunan $\{h_U \in X: U \in \mathcal{U},\ U \subseteq V\}$. Closure dari V adalah irisan semua subhimpunan tutup dari X yang memuat V juga. Jika $V_1, \cdots, V_n \in \mathcal{U}$ dan $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$, maka $h_V \in \bigcap_{i=1}^{n} S(V_i)$. Kemudian karena himpunan $V_1, \cdots, V_n$ adalah sembarang, ini menyiratkan bahwa himpunan $\{S(V)\}_{V \in \mathcal{U}}$ memiliki sifat irisan berhingga. Maka $\{S(V)\}_{V \in \mathcal{U}} \neq \emptyset$.

Misal $\bigcap V = \emptyset$, berarti tidak ada himpunan tutup dari V yang ada dalam irisan berhingga. Dengan hukum De morgan untuk mengubah koleksi tersebut menjadi koleksi cover buka, koleksi $\{V^c \in \mathcal{P}(X): V \in \mathcal{U}\}$ adalah cover buka dari X. Maka $\bigcup V^c$ adalah cover buka dari X. Karena X adalah himpunan kompak, maka terdapat subcover berhingga $\{V_1^c, \dots, V_n^c\}$ dari koleksi ini yang merupakan cover nya X. Artinya, dapat ditemukan himpunan tutup berhingga yang diambil irisan dari koleksi V, yang meng cover X. Kemudian dengan hukum De morgan, $V_1 \cap \dots \cap V_n = \emptyset$, kontradiksi dengan sifat irisan berhingga dari V. Ini menyiratkan bahwa $\bigcap_{V \in U} S(V)$ tidak kosong. Oleh karena itu, dapat dipilih anggota h_0 dari irisan ini, yang akan menjadi limit fungsi h_U.

Sifat fungsi h_o

Sebelum membangun ukuran luar dari h_o, pertama harus diturunkan beberapa sifat dari fungsi ini. Berikut Lemma dari sifat fungsi h_o.

Lemma 4.10 Misal $K, K_1, K_2 \in \mathcal{C}$, dan misal $x \in G$.

(1) $0 \leq h_o(K)$.

(2) $h_o(\emptyset) = 0$.

(3) $h_o(K_0) = 1$.

(4) $h_o(xK) = h_o(K)$.

(5) Jika $K_1 \subseteq K_2$, maka $h_o(K_1) \leq h_o(K_2)$.

(6) $h_o(K_1 \cup K_2) \leq h_o(K_1) + h_o(K_2)$.

(7) Jika $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, maka $h_o(K_1 \cup K_2) = h_o(K_1) + h_o(K_2)$.

Bukti.

Untuk pembuktian dimulai dengan bagian (6), mengikuti definisi X adalah kompak dan topologinya maka proyeksi dari X ke $\mathbb{R}$ didefinisikan oleh $h \mapsto h(K)$ adalah kontinu untuk setiap $K \in \mathcal{C}$. Menyiratkan bahwa, untuk setiap $K_1, K_2 \in \mathcal{C}$, untuk pemetaan dari X ke $\mathbb{R}$ didefinisikan dengan

$$h \mapsto h(K_1) + h(K_2) - h(K_1 \cup K_2) \tag{4.1}$$

Adalah kontinu juga. Jika dilihat kembali pada bagian (5) dari Lemma 4.9 menyatakan bahwa pemetaan ini adalah tak negatif di setiap $h_U \in X$, dan juga tak negatif di setiap titik di dalam himpunan $S(V)$. Maka secara khusus, pemetaan ini juga tak negatif di h_o. Maka ketaksamaan di dalam bagian (6) terbukti. Kemudian untuk bagian (1) terbukti bahwa $h_o(K)$ adalah tak negatif, dan untuk bagian (2) sampai (5) menggunakan argumen yang sama dengan yang berlaku di bagian (6) sebelumnya. Kemudian bagian (7). Misalkan $K_1, K_2 \in \mathcal{C}$ adalah terpisah. Berdasarkan proposisi 4.4, terdapat himpunan buka yang terpisah U_1 dan U_2 sehingga $K_1 \subseteq U_1$ dan $K_2 \subseteq U_2$, dan berdasarkan proposisi 2.52, terdapat persekitaran buka V_1 dan V_2 dari e sedemikian sehingga $K_1V_1 \subseteq U_1$ dan $K_2V_2 \subseteq U_2$. Misal $V = V_1 \cap V_2$. Kemudian K_1V dan K_2V adalah terpisah, jadi bagian (6) dari

Lemma 4.9 menyiratkan bahwa, untuk setiap $U \in \mathcal{U}$ yang memenuhi $U \subseteq V^{-1}$, maka diperoleh

$$h_U(K_1 \cup K_2) = h_U(K_1) + h_U(K_2).$$

Akibatnya, pemetaan yang didefinisikan dengan (4.1) menghilang pada setiap anggota dari $S(V^{-1})$. Karena $h_0 \in S(V^{-1})$, bagian (7) terbukti.

Ukuran Luar Haar

Setelah di turunkan sifat fungsi hU dan h_0 maka dapat dibangun ukuran luar Haar di G. Pertama mendefinisikan fungsi $\mu^* : \mathcal{U} \to [0, \infty]$ dengan

$$\mu^*(U) = sup\{h_o(K) : K \subseteq U, K \in \mathcal{C}\}, \tag{4.2}$$

yang kemudian diperluas ke semua subhimpunan A dari G dengan

$$\mu^*(A) = inf\{\mu^*(U): A \subseteq U, U \in \mathcal{U}\}. \tag{4.3}$$

Dari Lemma 4.4, jelas bahwa μ^* tidak negatif, monoton, dan $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Kemudian masih perlu menunjukkan bahwa ukuran luar μ^* adalah terhitung berhingga (*countably subadditive)*. Pada persamaan (4.3) di atas, sudah cukup untuk menunjukkan bahwa sifat ini berlaku untuk semua $U \in \mathcal{U}$. Misal $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ adalah koleksi berhingga dari himpunan buka dari G, dan K adalah subhimpunan kompak dari G sedemikian sehingga $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Karena gabungan dari $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ adalah cover buka dari himpunan kompak K, maka ada bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Kemudian, berdasarkan proposisi 4.7 dan beberapa induksi langsung dari gabungan tersebut, maka ada subhimpunan kompak $K_1, \dots, K_n$ dari G sedemikian sehingga, untuk semua indeks i, $K_i \subseteq U_i$ dan $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Kemudian bagian (6) dari Lemma 4.10 dan persamaan (4.2) menyiratkan bahwa

$$h_o(K) \leq \sum_{i=1}^{n} h_o(K_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i).$$

Karena K adalah sembarang subhimpunan kompak dari $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, kemudian aplikasi lain dari persamaan (4.2) menunjukkan bahwa μ^* adalah terhiung berhingga (*countably subadditive),* dan oleh karena itu μ^* adalah ukuran luar di dalam G.

Subhimpunan Borel dari G adalah μ^*-terukur

Sekarang akan di tunjukkan bahwa untuk setiap subhimpunan Borel dari G adalah μ^*-terukur. Pada bagian (1) Teorema 2.39, koleksi dari himpunan μ^*-terukur adalah σ-aljabar di dalam G, dan σ-aljabar Borel adalah σ-aljabar terkecil yang memuat semua himpunan buka dari G. Oleh karena itu, cukup dengan menunjukkan bahwa jika U dan V adalah subhimpunan buka dari G sedemikian sehingga $\mu^*(V) < \infty$, maka

$$\mu^*(V) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c).$$

Misal $\varepsilon > 0$, dan pilih subhimpunan kompak K dari $V \cap U$ sedemikian sehingga

$$h_o(K) > \mu^*(V \cap U) - \varepsilon,$$

dan kemudian pilih subhimpunan kompak L dari $V \cap K^c$ sedemikian sehingga

$$h_0(L) > \mu^*(V \cap K^c) - \varepsilon.$$

Maka K dan L adalah terpisah, dan karena $V \cap U^c \subseteq V \cap K^c$, berdasarkan bagian (5) dari Lemma 4.10 menyiratkan bahwa

$$h_0(L) > \mu^*(V \cap U^c) - \varepsilon.$$

Berdasarkan ketaksamaan tersebut dan bagian (7) dari Lemma 4.10 menyimpulkan bahwa

$$h_o(K \cup L) = h_o(K) + h_o(L) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) - 2\varepsilon.$$

Karena ε adalah sembarang dan $h_o(K \cup L) \leq \mu^*(V)$, maka μ^*-terukur dari subhimpunan Borel dari G terbukti. Akibatnya, $\mathcal{B}(G)$ adalah termuat di dalam σ-aljabar dari himpunan μ^*-terukur, dan batas dari μ^* ke $\mathcal{B}(G)$ adalah ukuran di dalam G, berdasarkan bagian (2) dari Teorema 2.39. untuk kedepannya ukuran luar μ^* akan disebut ukuran μ.

μ^* adalah regular

Sekarang akan ditunjukkan bahwa ukuran μ adalah teratur (*regular)*. Jika U adalah himpunan buka dan K adalah himpunan kompak sedemikian sehingga $K \subseteq U$, maka $h_o(K) \leq \mu(U)$. Berdasarkan asumsi tersebut dan persamaan (4.3) menyimpulkan bahwa

$$h_o(K) \leq \mu(K). \tag{4.4}$$

Selanjutnya, jika U juga memiliki closure kompak $\overline{U}$, berdasarkan Proposisi 4.6 maka

$$h_o(L) \leq h_o(\overline{U})$$

untuk setiap subhimpunan kompak L dari U, jadi

$$\mu(K) \leq \mu(U) \leq h_o\big(\overline{U}\big).$$

Oleh karena itu, ukuran μ adalah berhingga pada subhimpunan kompak G. Jadi μ adalah ukuran Haar kiri. Dengan beberapa sifatnya yaitu

1. Keteraturan luar *(outer regularity)* adalah pada persamaan (4.3) yaitu

$$\mu^*(A) = inf\{\mu^*(U): A \subseteq U \; dan \; U \in \mathcal{U}\}.$$

2. Keteraturan dalam *(inner regularity)* adalah pada persamaan (4.2) dan (4.4)

$$\mu^*(U) = sup\{h_o(K) : K \subseteq U \; dan \; K \in \mathcal{C}\}, \text{ dan } h_0(K) \leq \mu(K).$$

3. Tak negatif adalah pada bagian (1) dari Lemma 4.10

$$0 \leq h_0(K)$$

4. Invarian translasi adalah pada bagian (4) dari Lemma 4.10

$$h_0(xK) = h_0(K).$$

4.2 Kajian Integrasi Dengan Hasil Penelitian

Penelitian ini menunjukkan bahwa ukuran Haar itu adalah menghitung ukuran dari subhimpunan Borel di dalam grup G. Berkaitan dengan aspek perhitungan, di temukan keterkaitan dengan prinsip-prinsip yang terkandung di dalam Al-Qur'an, yang menegaskan bahwa Allah Swt. memiliki sifat perhitungan yang sangat cepat. Keselarasan tampaknya terjadi antara dimensi kompleks matematika dengan prinsip-prinsip keagamaan, dengan penelitian ini berusaha untuk meresapi dan menilai seluruh kerangka pemikiran tersebut. Penelitian ini mencerminkan bagaimana ilmu pengetahuan dan spiritualitas dapat saling melengkapi, membawa pemahaman yang lebih dalam tentang keagungan Tuhan dan rumitnya struktur matematika yang terdapat dalam alam semesta.

Ukuran Haar ini juga menyinggung tentang batas, di dalam Al-Qur'an juga ada yang membahas tentang batas. Di antara batas di dalam Al-Qur'an yaitu ajal (batas waktu), ajal seseorang telah di tetapkan oleh Allah Swt. dan tidak akan tertukar satu sama lain. Ketika di kaitkan dengan matematika, kehidupan seseorang ini seperti interval tutup yaitu misalnya $[0, n]$. Untuk nilai 0 itu bisa diibaratkan ketika manusia lahir, dan n itu adalah rahasia Allah Swt. yaitu ajal (batas waktu) tadi.

Sifat invarian translasi dari ukuran Haar, yang menunjukkan bahwa ukuran tersebut tetap tidak berubah meskipun mengalami pergeseran sebanyak apapun, mencerminkan sebuah paralel dengan prinsip yang terungkap dalam Al-Qur'an. Al-Qur'an mengajarkan bahwa Allah Swt. menciptakan segala sesuatu dengan penuh ketentuan dan proporsionalitas, sehingga ketika segala ciptaan-Nya mengalami perubahan posisi atau pergeseran, ukurannya tetap utuh dan tidak mengalami perubahan. Analogi ini menegaskan kekonsistenan dan kekekalan dalam penciptaan Allah, sejalan dengan prinsip matematika bahwa ukuran Haar tetap konstan meskipun mengalami translasi atau perpindahan. Dengan demikian, terdapat keterkaitan antara sifat-sifat matematika dan konsep-konsep keagamaan yang memperkuat pemahaman tentang keberlanjutan dan keutuhan ciptaan-Nya.

BAB V

KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan dari pembahasan skripsi ini adalah dibuktikannya eksistensi ukuran Haar pada grup kompak lokal dengan menemukan ukuran Haar kiri yang memenuhi semua sifat yang diinginkan. Ukuran Haar kiri μ yang ditemukan dalam penelitian ini terbukti bukan nol dan memiliki sifat invarian translasi, artinya ukurannya tetap tidak berubah ketika dilakukan translasi terhadap himpunan. Selain itu, ukuran μ juga terbatas $\mathcal{B}(G)$, yang berarti ukurannya berhingga pada himpunan-himpunan yang memiliki karakteristik kompak. Selanjutnya, μ juga terbukti teratur luar dan dalam, yang berarti ukuran ini dapat dihitung dari luar atau dari dalam himpunan dengan hasil yang konsisten. Dengan demikian, melalui bukti yang ada, dapat disimpulkan bahwa ukuran μ memenuhi semua kriteria untuk menjadi ukuran Haar pada grup kompak lokal yang telah diteliti.

5.2 Saran

Sebagai saran, perlu dilanjutkan penelitian ini dengan eksplorasi mendalam terhadap aplikasi dan implikasi eksistensi ukuran Haar pada grup kompak lokal. Penelitian lebih lanjut dapat melibatkan analisis properti matematis ukuran Haar, termasuk sifat invarian tambahan, perluasan ke grup-grup non-kompak, dan penerapan dalam konteks analisis harmonik, teori probabilitas, serta topologi grup.

DAFTAR PUSTAKA

Alfsen, E. M. (1963). A Simplified Constructive Proof of the Existence and Uniqueness of Haar Measure. In *Mathematica Scandinavica* (Vol. 12, pp. 106–116). https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10675

Arabia, K. S. (2023a). *Tafsir Al-Furqon*. https://tafsirweb.com/6258-surat-al-furqan-ayat-2.html

Arabia, K. S. (2023b). *Tafsir Al Muyassar*. https://tafsirweb.com/10287-surat-al-qamar-ayat-49.html

Bredon, G. E. (1963). A new treatment of the Haar integral. In *Michigan Mathematical Journal* (Vol. 10, Issue 4, pp. 365–373). https://doi.org/10.1307/mmj/1028998972

Folland, G. B. (2016). A course in abstract harmonic analysis, second edition. *A Course in Abstract Harmonic Analysis, Second Edition*, 1–299.

Hunter, J. (2011). *Measure Theory (Lecture notes)*. https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/measure_theory/measure_notes.pdf

James Munkres. (2000). *Topology, 2_E (2000, Prentic Hall _ Pearson)*.

Julaeha, S. (2015). Pengantar Topologi (Edisi Pertama). *Matematika Sains 2012 UIN SGD*.

Katsir, I. (2023). *Tafsir Ibnu Katsir Al-Furqon*. https://tafsir.learn-quran.co/id/surat-25-al-furqan/ayat-2

Kemenag. (2019). *Qur'an Kemenag*. https://quran.kemenag.go.id/

Kemenag. (2023). *Tafsir Al-Qamar*. https://quranhadits.com/quran/54-al-qamar/al-qamar-ayat-49/#tafsir-ringkas-kemenag

Lundgren, S. (2019). *The existence and uniqueness of Haar systems*. 141–155. https://doi.org/10.1090/surv/241/06

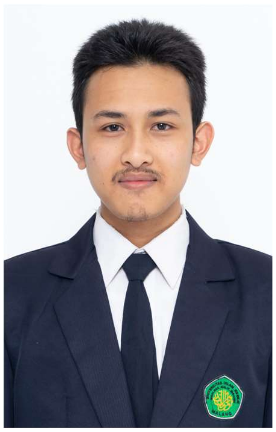
Matsumura, T. (2010). Introduction to topology. *Introduction to Topology*, 1–63. https://doi.org/10.2307/2323055

Rudin, W. (1997). *Real and Complex Analysis*. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0697-2_2

Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2007). *Measure theory, integration, Hilbert spaces*.

Wajiz, A. (2023). *Tafsir Al Wajiz*. https://tafsirweb.com/10287-surat-al-qamar-ayat-49.html

RIWAYAT HIDUP



M. Yusuf Ari Putra, lahir di Bojonegoro pada tanggal 29 Oktober 2000. Teman-teman biasa menyapanya Aik, nama itu telah dipakai sejak kecil. Tinggal di Desa Klampok, Kecamatan Kapas, Kabupaten Bojonegoro. Anak pertama dari 2 bersaudara. Putra dari pasangan Bapak Moch. Arifin dan Ibu Arin Narni. Pendidikan yang ditempuh yaitu RA Al-Huda Mojodeso pada tahun 2005 sampai 2007, kemudian melanjutkan sekolah dasar di MI Islamiyah Mojodeso pada tahun 2007 sampai 2013. Kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTsN 1 Bojonegoro pada tahun 2013 sampai 2016. Setelah lulus pada tahun 2016 melanjutkan pendidikan menengah atas di MAN 1 Bojonegoro dan lulus pada tahun 2019. Selanjutnya menempuh pendidikan tinggi di Program Studi Matematika , Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalus SNMPTN.

Selama menempuh pendidikan tinggi, peneliti mengikuti Unit Kegiatan Mahasiswa Hai'ah Tahfidz Qur'an pada semester 1, Kopma PB (Padang Bulan) pada semester 5 sebagai anggota kader dan Al-Farazi pada semester 7. Setelah 1 tahun sebagai anggota kader, peneliti mengikuti program magang di Kopma PB selama 3 periode (yang setiap periode sekitar 2-3 bulan). Kemudian pada semester 7 bekerja di salah satu Cafe untuk mencari pengalaman. Harapan dari peneliti ketika nanti lulus yaitu bisa berguna bagi diri sendiri maupun orang lain dan mengamalkan ilmu juga pengalaman yang didapat ketika menempuh pendidikan perkuliahan maupun di luar perkuliahahan. Penulis dapat dihubungi melalui *e-mail* :myusufariputra9b@gmail.com

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : M. Yusuf Ari Putra
NIM : 19610024
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Eksistensi Ukuran Haar
Pembimbing I : Dr. Elly Susanti, M.Sc.
Pembimbing II : Evawati Alisah, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	6 Februari 2023	Konsultasi Bab I	1.
2.	20 Februari 2023	ACC Bab I	2.
3.	2 Maret 2023	Konsultasi Bab II dan III	3.
4.	13 Maret 2023	ACC Bab II dan III	4.
5.	27 Maret 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	3 April 2023	ACC Kajian Agama Bab I dan II	6.
7.	17 April 2023	ACC Seminar Proposal	7.
8.	15 Mei 2023	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	8.
9.	23 Mei 2023	Konsultasi Bab IV dan V	9.
10.	29 Mei 2023	ACC Bab IV dan V	10.
11.	2 Juni 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	11.
12.	5 Juni 2023	ACC Kajian Agama Bab IV	12.
13.	13 Juni 2023	ACC Seminar Hasil	13.
14.	2 Oktober 2023	ACC Revisi Seminar Hasil Bab I-V	14.
15.	15 Oktober 2023	ACC Revisi Seminar Hasil Kajian Agama	15.
16.	13 Desember 2023	ACC Sidang Skripsi	16.

17.	20 Desember 2023	ACC Kajian Agama	17.
18.	27 Desember 2023	ACC Keseluruhan	18.

Malang, 27 Desember 2023
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005