SIFAT-SIFAT UKURAN HAUSDORFF PADA HIMPUNAN CANTOR

SKRIPSI

OLEH
GHOUTSAH KHOLIDAH
NIM. 19610029

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2023

SIFAT-SIFAT UKURAN HAUSDORFF PADA HIMPUNAN CANTOR

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar sarjana Matematika (S. Mat)

Oleh
Ghoutsah Kholidah
NIM. 19610029

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2023

SIFAT-SIFAT UKURAN HAUSDORFF PADA HIMPUNAN CANTOR

SKRIPSI

Oleh:
Ghoutsah Kholidah
NIM. 19610029

Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 11 Desember 2023

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc.	Juhari, M.Si.
NIP. 19471129 200012 2 005	NIP. 19840209 202321 1 010

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc.
NIP. 19471129 200012 2 005

SIFAT-SIFAT UKURAN HAUSDORFF PADA HIMPUNAN CANTOR

SKRIPSI

Oleh:
Ghoutsah Kholidah
NIM. 19610029

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)
Tanggal 22 Desember 2023

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D.	....
Anggota Penguji 1	: Dian Maharani, M.Si	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc.	....
Anggota Penguji 3	: Juhari M.Si.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc.
NIP. 19471129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Ghoutsah Kholidah
NIM	: 19610029
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Sifat-Sifat Ukuran Hausdorff pada Himpunan Cantor

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudin hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatam tersebut.

Malang, 22 Desember 2023

Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL 10000 9FA5FALX020185956

Ghoutsah Kholidah

NIM. 19610029

MOTO

“Ridho Allah SWT bergantung dari ridho kedua orang tua dan murka Allah SWT bergantung dari kemurkaan orang tua.”

(HR. Tirmidzi, Hakim, Ibnu Hibban).

PERSEMBAHAN

الرحيم الرحمن الله بسم

Dengan rasa syukur kepada Allah SWT, penulis persembahkan skripsi ini kepada: Abah Ghozali, Ibu Cholis Indasah, yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, mendukung dan menyemangati penulis dengan tulus, serta untuk ketujuh kakak Muddawamah Dzikria, Khusnul Khotimah, Khuriyatur Romdliyah, Maslihatul Aliyah, Ziyadatur Rohmah, Lathifah Nabilah, Hamdan Nur Badik, dan adik Fatimah Azzahroh yang selalu menantikan kelulusan S1 penulis.

KATA PENGANTAR

Assalaamu'alaikum Warrahmatullaahi Wabarakaatuh

Alhamdulillaahirobbil'alamiin, penulis ucapkan kepada Allah SWT atas rahmat dan pertolongan-Nya, sehingga penyusunan proposal skripsi yang berjudul "Sifat-sifat Ukuran Hausdorff pada Himpunan Cantor" ini dapat terselesaikan dengan baik. Sholawat serta salam kami haturkan kepada Nabi Besar Muhammad SAW yang telah memberikan uswatun hasanah kepada kita dalam menjalankan kehidupan ini. Semoga kita tergolong orang-orang yang beriman dan mendapatkan syafaatnya di hari akhir kelak, Aamiin.

Penulis sadar bahwa terdapat beberapa pihak yang membantu dalam proses penyelesaian proposal skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si. selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd. M. Sc. selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim sekaligus dosen pembimbing I yang berkenan membimbing penulis dalam penyusunan penelitian skripsi dari awal hingga akhir penulisan.
4. Juhari, M. Si. selaku dosen pembimbing II yang berkenan membimbing penulis dalam kepenulisan dan kajian topik Al-Qur'an pada penyusunan penelitian skripsi ini.
5. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah memberikan dukungan dan saran pada penyusunan proposal skripsi ini.
6. Abah Ghozali dan Ibu Cholis Indasah serta seluruh keluarga yang telah mendo'akan sekaligus memberi dukungan kepada penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini.
7. Seluruh mahasiswa angkatan 2019 Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim

yang telah berproses bersama selama penulis menempuh Pendidikan di Universitas ini.

8. Pihak-pihak lain yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Berkah dan ridlo dari Allah-lah penyusunan proposal skripsi ini dapat terselesaikan. Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis dengan rendah hati memohon saran dan kritik yang membangun dari pembaca. Penulis juga berharap semoga penelitian ini dapat bermanfaat untuk penelitian selanjutnya dan mohon maaf atas segala kekurangan.

Wassalaamu'alaikum Warrahmatullaahi Wabarakaatuh

Malang, 22 Desember 2023

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli
m	: Ukuran
m^*	: Ukuran luar Lebesgue
$\mathcal{H}_\delta^s(E)$	: Ukuran Hausdorff E
$\mathcal{J}$	: Himpunan Lebesgue
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real
$\mathbb{Z}$	: Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{C}$	: Bilangan cacah
C	: Himpunan Cantor
$\mathbb{R}^n$	: Bilangan Real n
inf	: Batas bawah terbesar
sup	: Batas atas terkecil
$[a, b]$	: Interval tutup a ke b
2^k	: Banyaknya *basic* interval tahap k
3^{-k}	: Ukuran *basic* interval tahap k
$\mathcal{H}^{s_0}(C)$	: Ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor dimensi s_0
I_k	: *Basic* interval tahap k
$\lvert I_k \rvert$	: Ukuran *basic* interval
I_j^l	: *Basic* interval tahap j di I yang ujung kirinya berimpit dengan ujung kiri di I
I_j^r	: *Basic* interval tahap j di I yang ujung kanannya berimpit dengan ujung kanan di I
$\lvert E_0 \rvert^{s_0}$	: Ukuran himpunan Cantor pada tahap awal
l_m	: *Basic* interval tahap m ketika $m < n < +\infty$
$\lvert U \rvert$	: Diameter U
$\alpha = \{U_i\}$	: *Cover* pada himpunan Cantor
s_0	: Dimensi Hausdorff pada himpunan Cantor
F_k	: Kelas seluruh himpunan *basic* interval tahap k
F	: jaring pada C
N	: Kelas jaring E

ABSTRAK

Kholidah, Ghoutsah. 2023. **Ukuran Hausdorff pada Himpunan Cantor**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Elly Susanti, S.Si. M. Pd. (II) Juhari, M.Si.

Kata Kunci: Ukuran Hausdorff, Himpunan Cantor, Sifat-sifatnya, Interval, *Cover*

Penelitian ini membahas ukuran Hausdorff pada Himpunan Cantor. Himpunan Cantor merupakan salah satu contoh fraktal yang terdiri dari himpunan bilangan real yang memiliki dimensi $s_0 = {}^3\log 2$. Tujuan penelitian ini untuk membuktikan sifat-sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor. Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah kajian pustaka, karena penelitian ini mengkaji dan merekonstruksi penelitian sebelumnya. Berdasarkan Lemma 4.1 Ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor disimbolkan dengan $\mathcal{H}^{s_0}(C)$. Sifat-sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor, yaitu: (i) Ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor bernilai kurang dari sama dengan 1, (ii) Ukuran dari *basic* interval tahap k sama dengan menjumlahkan masing-masing interval tahap m untuk $m > k$, sehingga diperoleh banyak interval setiap tahapnya bernilai 2^{-k}, (iii) Penjumlahan ukuran *cover* dari *basic* interval memiliki nilai yang sama dengan interval awal dari himpunan Cantor, yaitu 1, (iv) Ukuran Hausdorff dari kelas *cover* himpunan Cantor memiliki nilai yang sama dengan ukuran interval awal dari himpunan Cantor, (v) Penjumlahan dari ukuran interval σ yang merupakan anggota kelas subset buka $\mathbb{R}$ memiliki nilai kurang dari sama dengan ukuran subset buka $\mathbb{R}$, (vi) Ukuran Hausdorff dari himpunan Cantor memiliki nilai yang sama dengan ukuran Hausdorff dari kelas *cover* himpunan Cantor, yaitu 1. Semua sifat-sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor telah dibuktikan pada penelitian ini. Penelitian ini memberikan pemahaman terkait himpunan Cantor, sekaligus memperkaya rujukan terkait teori ukuran Hausdorff dan pengaplikasiannya pada himpunan fraktal.

ABSTRACT

Kholidah, Ghoutsah. 2023. **Hausdorff Measures on Cantor Sets**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Dr. Elly Susanti, S.Sc. M. Pd. (II) Juhari, M.Sc.

Keywords: Hausdorff measure, Cantor set, Their Properties, Interval, Cover

This research discusses the measure of Hausdorff in the Cantor set. The Cantor set is one example of a fractal consisting of a set of real numbers that have dimensions $s_0 = {}^3\log 2$. This research aimed to prove the properties of the Hausdorff measure in the Cantor set. The research method used in this study is a literature review, because this study examines and reconstructs previous research. Based on Lemma 4.1, the Hausdorff measure on the Cantor set is defined by $\mathcal{H}^{s_0}(C)$. The properties of the Hausdorff measure on the Cantor set, are: (i) The Hausdorff measure on the Cantor set is less than equal to 1, (ii) The measure of the *basic* stage k interval is equal to summing each stage interval for $m > k$, so that many intervals are obtained each stage value 2^{-k}, (iii) The sum of the cover measures of the basic interval has the same value as the initial interval of the Cantor set, which is 1, (iv) The Hausdorff measure of the Cantor set class cover has a value equal to the initial interval measure of the Cantor set, (v) The sum of the interval measures σ that are members of the class open subset $\mathbb{R}$ has a value less than equal to the size of the open subset $\mathbb{R}$, (vi) The Hausdorff measure of the Cantor set has the same value as the Hausdorff measure of the Cantor set class cover, which is 1. All the properties of the Hausdorff measure in the Cantor set have been proven in this research. This research provides an understanding of the Cantor set, as well as encreasing references related to Hausdorff measure theory and its application to fractal sets.

مستخلص البحث

ةديلاخ ةثوغ. ٢٠٢٣. **مقياس فـرودسواه (Hausdorff) على مجموعة روتناك (Cantor)**. يعماجلا ثحبلا.
قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جنلاام ةيموكحلا ةيملاسلاا ميهاربا كلام انلاوم ةعماج.
فـرشملا: (١) روتكدلا. يتناسوس يليا، الماجستير (٢) جوهري، الماجستير.

الكلمات ةيسيئرلا: قياس فـرودسواه (Hausdorff)، مجموعة روتناك (Cantor)، امهصئاصخ، ءاطغلا ،ينمزلا لصافلا

تناقش هذه الدراسة على سايقم فـرودسواه (Hausdorff) في مجموعة روتناك (Cantor). مجموعة روتناك (Cantor) هي ىدحا نم الأمثلة على كسورية تتكون من مجموعة من الأعداد الحقيقية التي لها أبعاد $\log 2\ ^{3} = s_0$. تهدف هذه الدراسة إلى إثبات خصائص مقياس فـرودسواه (Hausdorff) في مجموعة روتناك (Cantor). طريقة البحث المستخدمة في هذه الدراسة هي مراجعة الأدبيات ، لأن هذه الدراسة تدرس وتعيد بناء الأبحاث السابقة. على Lemma 4.1 يرمز إلى مقياس فـرودسواه (Hausdorff) على مجموعة روتناك (Cantor) بقياس يعتمد $\mathcal{H}^{s_0}(C)$. خصائص قياس فـرودسواه (Hausdorff) على مجموعة روتناك (Cantor)، وهي: (١) مقياس فـرودسواه (Hausdorff) على مجموعة روتناك (Cantor) أقل من يساوي 1، (٢) حجم فترة المرحلة الأساسية يساوي جمع كل فترة مرحلة ل$m > k$، بحيث يتم الحصول على العديد من الفواصل الزمنية لكل مرحلةذات قيمة 2^{-k}، (٣) مجموع أحجام *غطاء* الفاصل الزمني *الأساسي* له نفس قيمة الفاصل الزمني الأولي لمجموعة روتناك (Cantor)، وهو 1، (٤) مقياس فـرودسواه (Hausdorff) لفئة مجموعة روتناك (Cantor) له قيمة مساوية لقياس الفاصل الزمني الأولي لمجموعة روتناك (Cantor)، (٥) مجموع أحجام الفاصل الزمني σ التي هي أعضاء في فئة المجموعة الفرعية المفتوحة $\mathbb{R}$ له قيمة أقل من مساوية لحجم المجموعة الفرعية المفتوحة $\mathbb{R}$، (٦) مقياس فـرودسواه (Hausdorff) لمجموعة Cantor له نفس قيمة مقياس فـرودسواه (Hausdorff) لفئة مجموعة روتناك (Cantor)، وهي 1 .تم إثبات جميع خصائص مقياس فـرودسواه (Hausdorff) في مجموعة روتناك (Cantor) في هذه الدراسة. يوفر هذا البحث فهما لمجموعة روتناك (Cantor)، بالإضافة إلى إثراء المراجع المتعلقة بنظرية قياس فـرودسواه (Hausdorff) وتطبيقها على مجموعات الفركتلات.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fraktal sering ditemukan dalam kehidupan sehari hari. Terdapat banyak kejadian alam yang dapat diimplementasikan dengan fraktal. Salah satu contoh fraktal yang dapat dihitung dengan dimensi fraktal adalah himpunan pertiga tengah Cantor atau disebut himpunan Cantor.

Himpunan Cantor adalah fraktal yang memiliki interval [0,1], kemudian membaginya menjadi 3 sub interval yang sama panjang, sehingga dari 3 sub interval tersebut dihilangkan bagian tengahnya (sub interval buka). Himpunan Cantor berisi irisan dari himpunan-himpunan interval tutup dari transformasi yang tak hingga banyaknya (Aliyah & Manuharawati, 2013). Oleh karena itu, pada penelitian ini penulis akan menjelaskan lebih lanjut beberapa sifat intrinsik dari himpunan Cantor menggunakan ukuran Hausdorff.

Ukuran Hausdorff adalah metrik yang digunakan untuk mengukur kompleksitas himpunan. Hal ini berguna untuk mengukur sejauh mana suatu himpunan menyerupai himpunan berdimensi dalam ruang Euclidean. Sangat sulit untuk menghitung ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor. Salah seorang tokoh yang melakukan penelitian untuk membuktikan sifat-sifat ukuran Hausdorff adalah Minghua Wang. Penelitian tersebut dipublikasikan pada tahun 2016. Penelitian yang dilakukan Minghua Wang tersebut sesuai dengan ayat Al-Qur’an mengenai persoalan yang menetapkan kerasulan Nabi Muhammad S.A.W dan menjelaskan bahwa Al-Qur'an adalah kalam Allah. Lebih tepatnya ayat tersebut terdapat pada surat An-Najm ayat 9 yang artinya:

"Maka jadilah ia dekat (sejarak) dua ujung busur panah atau lebih dekat (lagi). (Q.S. An-Najm/53:9)"

Setiap frasa pada ayat tersebut memiliki penafsiran masing-masing. Pada frasa "Maka jadilah ia," artinya jarak dekat antara Jibril dengan Muhammad, "(sejarak) dua ujung busur panah," artinya seukuran antara dua ujung busur panah, "atau lebih dekat (lagi)," artinya lebih dekat dari dua ujung busur panah. Ini menunjukkan sempurnanya penyampaian risalah kepada Rasulullah dilakukan secara langsung, tidak ada perantara antara Rasulullah dengan malaikat Jibril.

Ayat tersebut sama halnya dengan sifat-sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor yang akan dibuktikan pada penelitian ini. Dimana ukuran dari himpunan Cantor $[0,1]$ akan dibuktikan menggunakan rumus Hausdorff. Pada penelitian sebelumnya, telah dibahas oleh Minghua Wang pada makalahnya yang berjudul *"Some Remarks on the Hausdorff Measure of the Cantor Set"*. Sifat-sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor yang akan dibuktikan pada penelitian ini, yaitu: (i) Ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor bernilai kurang dari sama dengan 1, (ii) Ukuran dari *basic* interval tahap k sama dengan menjumlahkan masing-masing interval tahap m untuk $m > k$, sehingga diperoleh banyak interval setiap tahapnya bernilai 2^{-k}, (iii) Penjumlahan ukuran *cover* dari *basic* interval memiliki nilai yang sama dengan interval awal dari himpunan Cantor, yaitu 1, (iv) Ukuran Hausdorff dari kelas *cover* himpunan Cantor memiliki nilai yang sama dengan ukuran interval awal dari himpunan Cantor, (v) Penjumlahan dari ukuran interval σ yang merupakan anggota kelas subset buka $\mathbb{R}$ memiliki nilai kurang dari sama dengan ukuran subset buka $\mathbb{R}$, (vi) Ukuran Hausdorff dari himpunan Cantor memiliki nilai yang sama dengan ukuran Hausdorff dari kelas *cover* himpunan

Cantor, yaitu 1. Beberapa sifat dalam jurnal tersebut memberikan landasan yang kuat pada penelitian ini. Penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian tersebut dengan mengkaji dan melengkapi pembuktiannya sehingga menjadi penelitian yang lebih mudah dipahami serta dapat menjadi rujukan untuk penelitian-penelitian di masa yang akan datang.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, permasalahan yang akan dibahas pada penelitian ini adalah bagaimana pembuktian sifat-sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk membuktikan sifat-sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor.

1.4 Manfaat Penelitian

Diharapkan penelitian ini dapat bermanfaat bagi:

1. Penulis

   Penulis mendapatkan pengetahuan terkait ukuran Hausdorff yang mempelajari teori ukuran serta bagaimana konstruksi dari himpunan Cantor. Selain itu, dalam meyelesaikan penelitian skripsi ini penulis memperoleh pencapaian yang membanggakan dan memberikan kepuasan pada diri penulis. Ini dapat meningkatkan rasa percaya diri dan rasa prestasi yang dapat memengaruhi hal positif dalam kehidupan sehari-hari.

2. Pembaca

   Penelitian skripsi tentang ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor mungkin tidak memiliki manfaat langsung dalam kehidupan sehari-hari bagi banyak orang. Namun, ada beberapa manfaat dalam berbagai bidang matematika seperti teori himpunan, analisis kompleks, dan ilmu komputer, di mana konsep ukuran Hausdorff dapat digunakan untuk mengukur dan menganalisis berbagai jenis data. Pada penelitian ini, ukuran Hausdorff berperan penting dalam teori fraktal, yang mempelajari objek-objek geometri yang tidak mematuhi konsep dimensi Euclidean, seperti pada himpunan Cantor yang memiliki nilai dimensi berupa pecahan. Selain itu, pembaca juga dapat menambah pengetahuan bahwa ukuran Hausdorff berkaitan erat dengan geometri fraktal sehingga pembuktiannya menggunakan konsep deret geometri dan limit.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini berguna untuk membatasi hal-hal yang dirasa tidak perlu dibahas serta membatasi ruang lingkup penelitian sehingga membuat penelitian menjadi fokus dan terarah. Beberapa batasan masalah yang digunakan adalah penelitian ini akan fokus pada pengukuran Hausdorff dengan menggunakan objek himpunan Cantor yang bernilai $s_0 = {}^3\log 2$ dan penelitian ini memfokuskan pada sifat ukuran Hausdorff pada iterasi himpunan Cantor, seperti pada interval, *cover* dan panjang dari himpunan Cantor yang ditentukan oleh ukuran Hausdorff.

Selain itu, batasan masalah dalam penelitian skripsi ini secara umum akan dibahas berkaitan dengan ukuran Hausdorff. Karena dimensi Hausdorff dalam penelitian ini berguna untuk menemukan hasil akurat dari ukuran Hausdorff dan nilai dimensi hausdorff berperan penting untuk pembuktian sifat-sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor, maka dari itu, dimensi Hausdorff dalam penelitian ini tidak dijelaskan secara meluas, hanya secara umumnya saja. Sedangkan fraktal yang dipakai sebagai objek pada penelitian ini adalah fraktal pada himpunan Cantor saja. Fraktal jenis lainnya, seperti Kurva Von Koch dan debu Cantor tidak dibahas dalam penelitian ini.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Denumerable dan Terbilang (Countable)

Kardinalitas adalah alat untuk mengukur ukuran suatu himpunan dengan cara menghitung banyaknya elemen dalam himpunan tersebut. Misal kardinalitas A disimbolkan dengan $|A|$. Himpunan A dikatakan ekuivalen dengan himpunan B, dinotasikan dengan $A \sim B$, jika terdapat suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ yang bijektif.

Suatu himpunan dikatakan berhingga (*finite)* jika dan hanya jika himpunan tersebut kosong atau ekuivalen dengan himpunan $\{1.2.3.,,,.n\}$ untuk sebarang n bilangan bulat positif, sebaliknya disebut bilangan tak hingga *(infinite)*.

Dua himpunan berhingga dikatakan ekuivalen jika dan hanya jika kedua himpunan tersebut mempunyai elemen yang banyaknya sama.

Misal $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan bulat positif $\{1,2,3, \ldots\}$. Himpunan X disebut denumerable dan mempunyai kardinal $\aleph_0$ jika dan hanya jika ekuivalen dengan $\mathbb{N}$. Suatu himpunan disebut terbilang jika dan hanya jika himpunan tersebut berhingga atau denumerable.

Jika A ekuivalen dengan B, maka dapat dikatakan bahwa A dan B mempunyai bilangan kardinalitasnya yang sama. Dapat disimbolkan dengan $|A| = |B|$. Jadi $|A| = |B|$ jika dan hanya jika $A \sim B$. Jika $A < B$, maka dapat dikatakan bahwa A mempunyai kardinalitas lebih kecil dari B atau kardinalitas B lebih besar dari A (Wahyudin, 1987).

Definisi 2.1

Suatu himpunan dikatakan terbilang apabila diberikan dua himpunan A dan B. Himpunan A memiliki kardinalitas yang sama dengan himpunan B. Jika terdapat fungsi bijektif f dari A ke B, maka dinotasikan dengan

$$|A| = |B|$$

Selanjutnya, suatu himpunan dikatakan tak terbilang apabila kardinalitas dari A kurang dari atau sama dengan kardinalitas B. Jika terdapat f injektif dari A ke B, maka dinotasikan dengan

$$|A| \leq |B|$$

Secara sederhana, definisi ini mengatakan bahwa jika seluruh anggota A dapat dipasangkan satu-satu dengan anggota B, maka himpunan A dan B memiliki ukuran yang sama (Davidson, 2010).

Definisi 2.2

1. Himpunan A dikatakan *denumerable*, jika terdapat fungsi bijektif dari bilangan asli $\mathbb{N}$ ke A.
2. Himpunan A dikatakan terbilang jika berhingga atau *denumerable*.
3. Himpunan A dikatakan tak terbilang apabila tak hingga dan non-denumerable.

Himpunan A terbilang jika setiap elemen A dapat dinotasikan dengan $a_1, a_2, \ldots$ atau terdapat fungsi bijektif f dari A ke $\mathbb{N}$.

Contoh 2.1

Diberikan $\mathbb{N} = \{1,2,3, \ldots\}$ dan $E = \{2,4,6, \ldots\}$. Terdapat fungsi bijektif $f: \mathbb{N} \to E$ yang didefinisikan oleh $f(x) = 2x$, maka $\mathbb{N}$ ekuivalen dengan E.

2.1.2 Ukuran Lebesgue

Subbab selanjutnya yang akan dijelaskan pada penelitian ini adalah ukuran Lebesgue, dimana kedepannya akan sangat penting dalam mendefinisikan ukuran Hausdorff. Sebelum mendefinisikan ukuran Lebesgue, pertama-tama penulis perlu memperkenalkan konsep ukuran sebagai berikut.

Definisi 2.3

Misal $S \subset \mathbb{R}^n$ adalah suatu ukuran yang disimbolkan dengan m pada S melalui fungsi $m: S \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ yang memenuhi kondisi berikut (Helmberg, 2009):

1. $m(\emptyset) = 0$
2. $m(A) \leq m(B)$ jika $A \subset B$
3. $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m|A|$, dimana $\{A_i \in \mathbb{R}^n : i \in I\}$ adalah koleksi himpunan terbilang.

Definisi 2.4

Misalkan $S \subset \mathbb{R}^n$. *Cover* δ dari S didefinisikan dengan $\{U_i \in \mathbb{R}^n : i \in I\}$, koleksi terbatas atau himpunan terbilang di mana $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ dan $0 \leq |U_i| \leq \delta$.

Selanjutnya, ukuran Lebesgue dilambangkan dengan m (Royden & Fitzpatrick, 2010).

Koleksi himpunan terukur Lebesgue adalah aljabar$-\sigma$ di mana memuat seluruh himpunan buka dan seluruh himpunan tutup. Fungsi himpunan m memiliki 3 sifat berikut.

1. **Ukuran interval adalah panjang interval tersebut.**

   Setiap interval tak kosong I merupakan ukuran Lebesgue

$$m|I| = \ell|I|$$

2. Ukuran translasi invarian.

Jika E terukur Lebesgue dan y merupakan sebarang bilangan di E, maka translasi E oleh y yaitu $E + y = \{x + y | x \in E\}$ disebut terukur Lebesgue

$$m|E + y| = m|E|$$

3. Ukuran penjumlahan terbilang pada gabungan himpunan-himpunan disjoin.

Jika $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ merupakan koleksi disjoin terbilang pada himpunan terukur Lebesgue, maka

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m|E_k|$$

Konstruksi untuk menentukan definisi himpunan terukur Lebesgue ini memiliki dua tahapan. Pertama-tama, membuat fungsi himpunan yang disebut ukuran luar dan disimbolkan dengan m^* yang mendefinisikan sebarang himpunan atau himpunan khusus untuk sebarang interval seperti tiga sifat fungsi himpunan yang telah disebutkan.

Tahap kedua dalam konstruksi himpunan terukur Lebesgue yaitu menunjukkan himpunan terukur Lebesgue merupakan aljabar$-\sigma$ yang berisi himpunan terbuka dan tertutup. Kemudian memberikan batas fungsi himpunan m^* ke koleksi himpunan terukur Lebesgue yang dinotasikan m dan menunjukkan bahwa m merupakan penjumlahan terbilang.

Selanjutnya, ukuran luar Lebesgue dimisalkan dengan I yang menjadi interval tak kosong pada bilangan real. Ukuran dari I disimbolkan dengan $|I_k|$. $|I_k|$ menuju ∞ jika I tak terbatas. Misal A merupakan suatu himpunan pada bilangan real, perhatikan koleksi terbilang $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ adalah interval terbatas yang meng-*cover*

A didefinisikan sebagai koleksi $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Karena ukuran A berupa bilangan positif dan setiap penjumlahannya didefinisikan secara unik pada suku barisan, maka ukuran luar pada A yang disimbolkan dengan $m^*(A)$ adalah infimum dari seluruh penjumlahan ukuran $|I_k|$ yang dituliskan sebagai berikut.

$$m^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \,|A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\}$$

Menurut definisi ukuran luar yaitu $m^*(\emptyset) = 0$ dan karena sebarang *cover* pada himpunan B juga merupakan *cover* sebarang himpunan bagian B maka ukuran luar bersifat *monoton* dalam arti bahwa

$$jika\ A \subseteq B, maka\ m^*(A) \leq m^*(A)$$

Contoh 2.2

Himpunan terbilang memiliki ukuran luar nol. Misal $\mathbb{C}$ menjadi himpunan cacah yang terbilang dan didefinisikan $\mathbb{C} = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$. Misal $\varepsilon > 0$ untuk setiap bilangan asli k, didefinisikan $I_k = \left(c_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, c_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$. Koleksi terbilang pada interval buka disimbolkan dengan $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$. Oleh karena itu,

$$0 \leq m(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

Pertidaksamaan ini berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, jadi $m^*(A) = 0$

2.1.3 Topologi Ruang Hausdorff

Pada subbab ini, akan dijelaskan definisi topologi ruang Hausdorff. Namun, sebelum mendefinisikan ruang Hausdorff, perlu diketahui definisi dari ruang topologi.

Definisi 2.5

Topologi digunakan dalam cabang matematika dan keluarga himpunan untuk menjelaskan tentang himpunan-himpunan buka. Beberapa sifat dari ruang topologi

X bergantung pada himpunan-himpunan buka dalam ruang topologi tersebut. Suatu topologi pada himpunan X adalah suatu koleksi τ yang memuat himpunan-himpunan bagian dari X yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\emptyset$ dan X termasuk dalam τ;
2. Gabungan tak hingga dari himpunan elemen-elemen dalam τ adalah elemen τ;
3. Irisan berhingga dari himpunan elemen dalam τ adalah elemen τ.

Dalam konsep topologi juga dikenal istilah *cover*. Diberikan B adalah suatu himpunan. Suatu koleksi $\mathcal{A}$ disebut *cover* dari B jika B dimuat dalam gabungan semua himpunan dari $\mathcal{A}$. *Subcover* dari $\mathcal{A}$ untuk B adalah subkoleksi dari $\mathcal{A}$ yang juga merupakan *cover* dari B.

Selanjutnya, ruang Hausdorff adalah ruang dimana setiap dua buah elemen yang berbeda dapat dipisahkan oleh dua buah persekitaran yang disjoin (Tomasoa et al., 2015). Berikut merupakan definisi dari ruang Hausdorff

Definisi 2.6

Diberikan ruang topologi (X, τ). Ruang X dikatakan ruang Hausdorff jika dan hanya jika untuk setiap pasangan $x, y \in X$ ada persekitaran $U, V \subset X$ sedemikian sehingga $x \in U, y \in V$ dan $U \cap V = \emptyset$.

Berikut beberapa contoh ruang topologi yang merupakan ruang Hausdorff.

Contoh 2.3

Diberikan ruang topologi (X, τ), dengan $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = 2^X$. Ruang topologi X adalah ruang Hausdorff, karena untuk setiap $x, y \in X$ terdapat $U =$

$\{x\}, V = \{y\} \subset X$ sedemikian sehingga $x \in U, y \in V$ dan $U \cap V = \emptyset$. Maka terbukti bahwa X merupakan ruang Hausdorff.

2.1.4 Kekompakkan pada Ruang Hausdorff

Pada subbab ini akan dibahas sifat kekompakkan pada ruang Hausdorff. Sebelumnya akan didefinisikan terlebih dahulu definisi dari kekompakkan.

Definisi 2.7

Misal (X, d) ruang metrik, $K \subset X$ dan A merupakan himpunan indeks serta G_α himpunan terbuka dalam X untuk suatu $\alpha \in X$. Keluarga himpunan terbuka $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ disebut *cover* terbuka (*open cover*) untuk K jika $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Hal ini berarti jika $x \in K$, maka terdapat $\alpha \in A$, sehingga $x \in G_\alpha$.

Jika $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in A\}$ suatu *cover* terbuka untuk $K, \mathcal{A} \subset \mathcal{G}$, dan $\mathcal{A}$ masih merupakan *cover* terbuka untuk K, maka $\mathcal{A}$ disebut *cover* terbuka dari $\mathcal{G}$.

Contoh 2.4

Diberikan himpunan buka $K = (0,1)$ dan keluarga himpunan terbuka $\mathcal{G}_1 = (0, n): n = \{1,2,3,4,5\}, \mathcal{G}_2 = \{(0, n): n \in \mathbb{N}\}$ dan $\mathcal{G}_3 = \{(0, r): r \in \mathbb{Q}^+\}$. Selidikilah apakah $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ dan $\mathcal{G}_3$ merupakan *cover* terbuka untuk K? Selidiki pula mana yang merupakan *cover* terbuka bagian dari yang lain!

Bukti:

Perhatikan bahwa $(1,3) \subset (0,5) = \bigcup_{n=1}^{5} (0, n)$, hal ini berarti $\mathcal{G}_1$ merupakan *cover* terbuka untuk K.

Perhatikan bahwa $(1,3) \subset (0, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (0, n)$, hal ini berarti $\mathcal{G}_2$ merupakan *cover* terbuka untuk K.

Perhatikan bahwa $(1,3) \subset (0,5) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^+}^{5} (0,r)$, hal ini berarti $\mathcal{G}_3$ merupakan *cover* terbuka untuk K.

Jika diperhatikan lebih lanjut, maka diperoleh hubungan $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_3$ dan $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_3$. Dengan demikian $\mathcal{G}_1$ merupakan *subcover* terbuka dari $\mathcal{G}_2$ dan $\mathcal{G}_3$, serta $\mathcal{G}_2$ merupakan *subcover* terbuka dari $\mathcal{G}_3$.

Selanjutnya, berikut akan dijelaskan suatu ruang dikatakan kompak dan beberapa sifat yang dipenuhi oleh sebuah ruang yang kompak.

Definisi 2.8

Sebuah ruang X dikatakan ruang yang kompak jika dan hanya jika setiap *cover* buka dari X mempunyai sebuah *subcover* hingga (Tomasoa et al., 2015).

Teorema 2.1

Misalkan X merupakan ruang Hausdorff.

1. Jika $K \subseteq X$ kompak dan $p \in X \backslash K$, maka terdapat himpunan terbuka $U, V \subseteq X$ dengan $U \cap V = \emptyset$ sedemikian sehingga $K \subset U$ dan $p \in V$.
2. Setiap himpunan bagian kompak $K \subseteq X$ tertutup.

Bukti:

1. Misalkan $a \in K$, karena $p \notin K, p \neq a$ dan X ruang Hausdorff, maka berdasarkan Definisi 2.6 terdapat himpunan terbuka disjoin U_a dan V_p dari X sedemikian sehingga $a \in U_a$ dan $p \in V_p$. Oleh karena itu $K \subset F = \{U_a | a \in K\}$ dimana F adalah *cover* terbuka dari K. Diketahui K kompak maka F memiliki *cover* bagian berhingga dari K. Dengan kata lain, terdapat bilangan berhingga yaitu $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ sedemikian sehingga K termuat dalam gabungan

$$U = U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n}$$

Disisi lain, misalkan

$$V = V_{p_1} \cap \ldots \cap V_{p_n}$$

Maka U dan V merupakan himpunan terbuka dari X sedemikian sehingga $K \subset U$ dan $p \in V$. Selanjutnya akan ditunjukan U dan V disjoin. Diketahui $U_{a_i} \cap V_{p_i} = \emptyset$. Secara tidak langsung, hal ini menyatakan bahwa $U_{a_i} \cap V = \emptyset$. Berdasarkan hukum distributif, maka

$$\begin{aligned} U \cap V &= \left(U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n}\right) \cap V \\ &= \left(U_{a_1} \cap V\right) \cup \ldots \cup \left(U_{a_n} \cap V\right) \\ &= \emptyset \cup \ldots \cup \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $K \subset U, p \in V$ dan $U \cap V = \emptyset$.

2. Diketahui K himpunan kompak dari ruang Hausdorff X, maka berdasarkan Teorema 2.1 poin 1, terdapat himpunan terbuka U dan V di X sedemikian sehingga $K \subset U, p \in V$ dan $U \cap V = \emptyset$. Karena $K \cap V = \emptyset$ dan $p \in V \subset (X \backslash K)$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $X \backslash K$ terbuka. Karena $p \in V \subset (X \backslash K)$ maka $(X \backslash K) = \cup \{V_p | p \in X \backslash K\}$. Diketahui V_p himpunan terbuka, maka $X \backslash K$ merupakan himpunan terbuka. Dengan kata lain K himpunan tertutup.

Akibat 2.1

Setiap himpuanan K yang kompak pada ruang Hausdorff X adalah tertutup.

Bukti:

Untuk setiap $p \in X \backslash K$, berdasarkan Teorema 2.1 terdapat himpunan-himpunan buka U dan V yang *disjoint* dari X sedemikian sehingga $K \subset U$ dan $p \in V$.

Selanjutnya diperoleh $V \subset X \backslash U \subset X \backslash K$. Karena untuk setiap $p \in X \backslash K$, ada persekitaran V sedemikian sehingga $p \in V \subset X \backslash K$. Dengan demikian, $X \backslash K$ buka dan K tutup (Yundari et al., 2019).

2.1.5 Himpunan Cantor

Salah satau jenis fraktal yang akan dibahas pada penelitian ini adalah himpunan Cantor. Proses pembentukan himpunan Cantor dimulai dari interval tutup $[0,1]$ dan membaginya menjadi tiga sub interval yang ukurannya sama besar (Aliyah & Manuharawati, 2013). Perhatikan interval tertutup dan terbatas $E_0 = [0, 1]$. Langkah pertama dalam membangun himpunan Cantor adalah untuk membagi E_0 menjadi tiga interval dengan panjang yang sama $\frac{1}{3}$ dan menghapus interval tengah yaitu, menghapus interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ dari interval $[0, 1]$ untuk memperoleh himpunan tertutup E_1, yang merupakan gabungan dari dua selang tertutup yang disjoin dengan masing-masing panjangnya sebagai berikut.

$$E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

Kemudian mengulangi "penghapusan sepertiga tengah terbuka" ini pada masing-masing dari dua interval di E_1 hingga didapatkan himpunan tertutup E_2, yang merupakan gabungan dari 2^2 interval tertutup, masing-masing dengan panjang 3^{-2}:

$$E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

Selanjutnya, mengulangi penghapusan sepertiga tengah ini pada masing-masing dari empat interval di E_2 untuk mendapatkan himpunan tertutup E_3 yang merupakan gabungan dari 2^3 interval tertutup dengan masing-masing panjangnya

3^{-3}. Kemudian, dilanjutkan operasi penghapusan berkali-kali ini untuk mendapatkan koleksi himpunan *countable* $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$. Koleksi $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ memiliki dua sifat berikut (Pierce, 2014):

1. $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ merupakan barisan menurun pada himpunan tertutup
$$E_0 \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$$
2. Untuk setiap k, E_k merupakan gabungan disjoin pada 2^k interval terbatas tertutup dan masing-masing interval tersebut memiliki panjang $\frac{1}{3^k}$.

Jadi, ukuran E_k adalah $\left(\frac{2}{3}\right)^k$; dapat ditulis

$$m(E_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

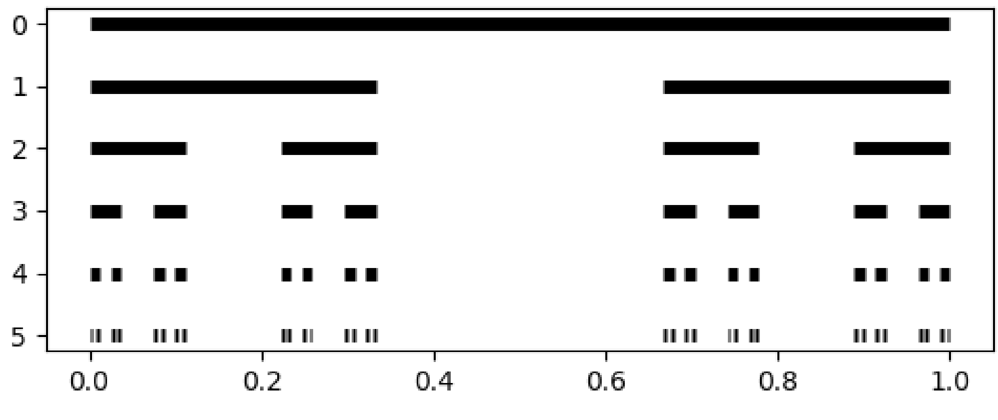
Hal ini akan dijelaskan lebih lanjut pada Proposisi 2.1. Menurut definisi, himpunan Cantor merupakan subset C pada $\mathbb{R}$ yaitu

$$C = E_0 \cap E_1 \cap E_2 \cap \dots$$

Dapat ditulis irisan disini sebagai definisi himpunan Cantor C, yaitu

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$$

Berikut merupakan hasil konstruksi dari himpunan Cantor untuk $k = 5$



Gambar 2.1 Himpunan Cantor

Proposisi 2.1

Himpunan Cantor C adalah tertutup, himpunan tak terbilang pada ukuran nol.

Bukti:

Irisan pada sembarang koleksi himpunan tertutup adalah tertutup. Oleh karena itu C tertutup. Untuk setiap himpunan tertutup itu terukur sehingga setiap E_k dan C sendiri adalah terukur.

$$m(E_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

Menggunakan kemonotonan ukuran, karena $m(C) \leq m(E_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$ untuk semua k, $m(C) = 0$.

2.1.6 Dimensi Fraktal

Fraktal berasal dari Bahasa Latin *frangere* yang berarti terpecah menjadi bagian-bagian yang tidak beraturan. Dari beberapa definisi, fraktal adalah setiap bagian kecil dari suatu fraktal yang dapat dipandang sebagai replikasi skala kecil dari keseluruhan bentuk. Fraktal berbeda dengan gambar-gambar klasik sederhana atau geometri Euclid, seperti bujur sangkar, lingkaran, bola, dsb. Fraktal dapat digunakan untuk menjelaskan banyak obyek yang bentuknya tak beraturan atau bentuk alam yang secara spasial tak seragam, seperti bentuk pantai (Sahid, 1997).

Karakterisitik matematis yang berkaitan dengan fraktal adalah dimensi fraktal. Dimensi fraktal digunakan untuk membandingakan pola fraktal yang nilainya selalu pecahan. Dimensi $\mathbb{R}^1$ berupa garis lurus, $\mathbb{R}^2$ berupa luas daerah permukaan dan $\mathbb{R}^3$ berupa ruang atau volume. Pola fraktal yang akan dihitung dimensinya memiliki tahapan yang disimbolkan dengan N, maka

$$N = \mathbb{R}^s$$

di mana s adalah suatu dimensi fraktal. Sehingga,

$$\log(N) = \log(\mathbb{R}^s)$$

$$\log(N) = s\log(\mathbb{R})$$

$$s = \frac{\log(N)}{\log(\mathbb{R})}$$

2.1.7 Ukuran Hausdorff

Pada subbab 2.1.7 ini akan menjelaskan tentang ukuran Hausdorff. Sebelum menentukan ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor, alangkah baiknya mengenal definisi dari ukuran Haussdorff terlebih dahulu.

Jika E ada di $\mathbb{R}^n$ dan $s > 0$, maka untuk sembarang $\delta > 0$,

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = inf\left\{\sum_{i-1}^{\infty} |U_i| : \{U_i\}\, merupakan\ cover - \delta\ pada\ E\right\}$$

Pada dasarnya, ukuran Hausdorff adalah bilangan terkecil dari penjumlahan diameter terkecil yang kurang dari δ yang dapat menutupi E (Ellis, 2017).

Oleh karena itu, dengan mempertimbangkan setiap δ pada E, kami mencoba untuk meminimalkan penjumlahan dari diameter dengan meminimalkan ukuran s. Kemudian saat s semakin kecil, maka ukuran Hausdorff E juga akan semakin kecil. Tetapi ketika δ menjadi lebih kecil, jumlah *cover* E juga menurun. Ini intuitif. Namun, infimum $\mathcal{H}^s(E)$ tidak menurun. Ini tidak begitu intuitif. Pertimbangkan himpunan $\mathbb{N}$. Infimum dari himpunan $\mathbb{N}$ adalah 1. Ambil satu bilangan di $\mathbb{N}$ tetapi tidak disebutkan bilangan yang mana. Apa yang bisa dikatakan tentang infimum? Apakah sama atau lebih tinggi? padahal infimum tidak menurun. Hal ini sama terjadi dengan jumlah *cover* E yang valid saat δ berkurang. Kembali ke teori ukuran, seperti halnya $\delta \to 0$ dan infimum dari $\mathcal{H}_\delta^s(E)$ meningkat (adalah tidak menurun), maka

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

Persamaan ini disebut ukuran Hausdorff dimensi$-s$ pada E. Ditemukan limitnya untuk mengekstrak δ dalam mendapatkan ukuran Hausdorff umum untuk membantu menemukan s. Setiap himpunan E (di mana $E \subset \mathbb{R}^n$) memiliki ukuran Hausdorff dan memiliki batas, biasanya nol atau ∞. Ukuran Hausdorff sulit dihitung. Namun, dapat dilakukan dengan hasil yang mendekati persamaan universal pada bilangan bulat, himpunan bagian berdimensi paling kecil dari $\mathbb{R}^n$.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an

Pada subbab 2.2 ini, akan dibahas bagaimana Al-Qur'an menjelaskan mengenai sifat-sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor yang sesuai dengan kalam Allah pada Q.S Al-Maryam ayat 94 yang artinya:

Dia (Allah) benar-benar telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti (Q.S Al-Maryam/19:94)

Surat ini dinamakan surat Maryam karena mengandung kisah Maryam, ibu Nabi Isa a.s yang serba ajaib, yaitu melahirkan puteranya, sedangkan ia belum dicampuri oleh seorang laki-laki pun. Pada ayat ini menjelaskan bahwa manusia akan kembali pada Allah dan Allah benar-benar telah mengetahui mereka dengan rinci, bagaimana kepribadian, kejiwaan, perbuatan, dan perkataan mereka secara lahir maupun batin. Allaah juga akan memeriksa dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti sehingga tidak ada satu pun yang terlewat. Kemudian Allah menjelaskan bahwa semua amal dan takwa mereka itu telah tercatat dalam kitab yang amat teliti dan terperinci tidak seorang pun terluput dalam catatan itu, semua amal perbuatan mereka baik yang kecil maupun yang besar. Semua ucapan mereka yang nyata dan tersembunyi telah ditulis dan diperhitungkan secermat-cermatnya dan mereka semua menunggu balasan apa yang akan diterimanya.

Hikmah yang dapat diambil dari arti Q.S Al-Maryam ayat 94 adalah Allah akan memperhitungkan segala sesuatu yang manusia lakukan di bumi sesuai dengan amal baik dan buruknya dengan perhitungan yang teliti dan tidak tertinggal amalnya satu pun. Amal kebaikan yang bisa dilakukan umat muslim sangat banyak. Bahkan, sulit jika harus dihitung menggunakan angka. Misalnya tersenyum atau tidak menunjukkan muka masam saat bertemu sesama muslim sudah dapat dihitung kebaikan. Saling tolong menolong, saling berbagi dan masih banyak lagi. Dari sekian banyak amalan yang ada di dunia, shalat merupakan amal pertama kali yang akan dihisab. Hal ini sebagaimana bunyi hadist shahih tentang hari perhitungan amal berikut bahwa Abu Hurairah radhiyallahu ‘anhu berkata, Rasulullah SAW bersabda,

” Sesungguhnya amal seorang hamba yang pertama kali dihisab pada hari kiamat adalah shalatnya. Apabila shalatnya baik, sungguh ia telah beruntung dan berhasil. Namun, jika shalatnya rusak, sungguh ia telah gagal dan rugi. Jika ada suatu kekurangan dalam shalat wajibnya, maka Allah Azza wa Jalla berfirman, ‘Lihatlah apakah hamba-Ku memiliki shalat sunnah sehinga bisa disempurnakanlah kekurangan yang ada pada shalat wajibnya. Kemudian seluruh amalnya diberlakukan demikian pula.” (Hadits riwayat At-Tirmidzi)

Sama halnya dengan penelitian skripsi ini yang membuktikan sifat-sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor dengan cara mengkaji teori yang berkaitan erat dengan ukuran Hausdorff dan himpunan Cantor. Kemudian, meneliti perhitungan yang terlewat dan merekonstruksi rujukan yang dipakai pada penelitian ini. Sehingga penelitian mengenai ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor ini menjadi penelitian yang lebih lengkap. Sedangkan rujukan utama yang dipakai penulis berjudulkan *“Some Remarks on the Hausdorff of Cantor Sets”* peneliti asal China, karya Minghua Wang. Dalam jurnal tersebut menjelaskan mengenai beberapa sifat ukuran hausdorff pada himpunan Cantor yang lebih rincinya akan disebutkan pada Subbab 2.3 berikut.

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Sekarang, dimulai dengan mendefinisikan konsep ukuran Hausdorff yang ditemukan oleh Felix Hausdorff matematikawan hebat dari Jerman. Berikut rujukan yang dipakai penulis mengenai ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor.

2.3.1 Ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor

Untuk mengetehaui apa saja sifat-sifat dari ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor, perlu diketahui terlebih dahulu definisi dari ukuran Hausdorff sebagai berikut.

Definisi 2.9

Misal U menjadi subset tak kosong pada $\mathbb{R}^n$ yang dinotasikan dengan $|U|$ (dibaca diameter U). Misal $E \subset \bigcup_i U_i$ dan $0 < |U| \leq \delta$ untuk setiap i, dikatakan bahwa $\{U_i\}$ merupakan *cover* δ pada E. Misal E menjadi subset $\mathbb{R}^n$ dan s menjadikan bilangan *non-negative* untuk $\delta > 0$, hal ini didefinisikan sebagai berikut

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

Infimum disini merupakan keselurahan (yang terbilang) *cover* δ $\{U_i\}$ pada E disebut ukuran Hausdorff dimensi s di E. Sedangkan ukuran Hausdorff dimensi s didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E)$$

Definisi 2.10

Misal kelas N pada himpunan disebut jaring E. Jika untuk sebarang $x \in E$ dan $\varepsilon > 0$, terdapat $A \in N$ sedemikian sehingga $x \in A$ dan $|A| \leq \varepsilon$. Ukuran jaring dimensi s pada E yang ditentukan oleh *net* N dan dinotasikan dengan $\mathcal{H}^s_N(E)$ didefinisikan dengan cara yang serupa dengan ukuran dimensi s pada E, tetapi menggunakan kelas N yang terbatas pada himpunan *cover*. Dapat dikatakan bahwa jaring N_1 ekuivalen secara lengkap dengan jaring N_2 pada himpunan E dan simbol s jika $\mathcal{H}^s_{N_1}(E) = \mathcal{H}^s_{N_2}(E)$. Hal ini dapat diketahui bahwa kelas seluruh himpunan ekuivalen secara lengkap dengan kelas dari seluruh himpunan buka dan kelas dari seluruh himpunan tutup.

Definisi 2.11

Misal konstruksi pada himpunan Cantor dimulai dari $E_0 = [0,1], E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], E_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ dan seterusnya, di mana E_{k+1}diperoleh dengan menghapus sepertiga tengah pada setiap interval di E_k. Oleh karena itu, E_k terdiri dari 2^k interval yang disebut dengan *basic* interval tahap k dan setiap interval memiliki panjang 3^{-k}.

Dari konstruksi himpunan Cantor, dapat disimpulkan bahwa $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$. Himpunan Cantor merupakan himpunan sempurna $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ yang dapat dikatakan juga dengan himpunan keserupaan diri yang dihasilkan oleh 2 keserupaan dengan faktor skalanya sebesar $\frac{1}{3}$.

Definisi 2.12

Misal C memenuhi kondisi pada himpunan buka, maka dimensi Hausdorff C sama dengan dimensi dari keserupaan C, yaitu $s_0 = {}^3\log 2$. Himpunan Cantor memiliki interval awal $E_0 = [0,1]$ dan E merupakan subset $\mathbb{R}^n$ pada $n = 1$. Jadi diperoleh dimensi keserupaan dari himpunan Cantor C adalah $s_0 = {}^3\log 2$.

Definisi 2.13

Misal I_k menjadi sebarang *basic* interval tahap k dinotasikann dengan F_k, kelas seluruh *basic* interval tahap k, dan $F = \bigcup_{k=0}^{\infty} F_k$, kelas seluruh *basic* interval. Menggunakan definisi dari *cover*, F merupakan jaring C untuk sebarang dua interval basic pada F yang saling lepas atau F dimuat satu dengan yang lain.

Jika C dapat ter-*cover* oleh 2^k tahap *basic* interval k dari panjang 3^{-k} dan mengunakan definisi ukuran Hausdorff dimensi s, maka Lemma 2.1 berikut jelas berlaku.

Lemma 2.1

$$\mathcal{H}^{s_0}(C) \leq 1$$

Lemma 2.2

Misalkan diambil sebarang I_k dengan $k \in \mathbb{N}$ dan diambil sebarang $\{I_m\}$ dengan $m > k$ yang merupakan kelas dari seluruh *basic* interval tahap m, maka

$$|I_k|^{s_0} = \sum_{I_m \in \{I_m\}} |I_m|^{s_0}$$

Teorema 2.2

Misal $\alpha = \{U_i\}$ adalah sebarang terbilang yang meng-*cover* C yang terdiri dari *basic* interval dan pada masing-masing α tidak dapat melengkapi interval yang lain, maka

$$\sum_{U_i \in \alpha} |U_i|^{s_0} = |E_0|^{s_0} = 1$$

Akibat 2.2

$$\mathcal{H}_\delta^s(C) = |E_0| = 1$$

Teorema 2.3

Misal U menjadi subset buka pada $\mathbb{R}$ dan F_U menjadi keluarga himpunan dari *basic* interval I_σ yang termuat secara lengkap di U, di mana tidak satupun yang termuat dengan yang lainnya, maka

$$\sum_{I_\sigma \in F_U} |I_\sigma|^{s_0} \leq |U|^{s_0} \tag{2.3}$$

Teorema 2.4

$$\mathcal{H}^{s_0}(C) = \mathcal{H}_F^{s_0}(C) = 1$$

Akibat 2.3

Pada himpunan Cantor C dan bilangan $s_0 = {}^3\log 2$, kelas seluruh himpunan ekuivalen lengkap pada jaring F dimana kelas terdiri dari seluruh *basic* interval. Terdapat delapan masalah terbuka pada nilai pasti dari ukuran Hausdorff. Permasalahan terbuka yang pertama (salah satunya) akan ditunjukkan sebagai berikut.

Masalah 2.1

Dalam kondisi apa terdapat *cover* pada E, katakan $\alpha = \{U_i, i > 0\}$, sedemikian sehingga $\mathcal{H}^s(E) = \sum_{i=1}^{m} |U_i|^s$?

Akibat 2.4

Misal $\alpha = \{U_i\}$ menjadi sebarang *cover* pada C yang terdiri dari *basic* interval di mana setiap α tidak dapat lengkap memuat pada interval lain, maka $\alpha = \{U_i\}$ yang merupakan *cover* terbaik C.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah kajian pustaka. Tujuan penelitian ini untuk mengkaji tentang sifat-sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor dan membuktikannya. Objek pada penelitian ini adalah himpunan Cantor yang mana sifat-sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor dikaji pada penelitian ini.

3.2 Pra Penelitian

Pra Penelitian yang dilakukan penulis adalah mengumpulkan sejumlah rujukan atau penelitian terdahulu yang sesuai dengan penelitian yang akan digunakan, menentukan objek yang akan digunakan, dan menentukan judul penelitian. Penulis merujuk kepada jurnal karya Minghua Wang, peneliti asal China yang berjudulkan *"Some Remarks on the Hausdorff Measure of the Cantor Set"*. Karena ukuran Hausdorff berkaitan erat dengan geometri fraktal, maka objek penelitian yang penulis gunakan pada penelitian ini berupa fraktal dari himpunan Cantor. Himpunan Cantor tersebut memiliki beberapa sifat yang ditentukan menggunakan ukuran Hausdorff.

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian dalam menentukan sifat-sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor, yaitu:

1. Mengkonstruksi himpunan Cantor dan mendefinisikan *basic* interval pada himpunan Cantor.

2. Mendefinisikan ukuran Hausdorff dimensi$-s$.
3. Mendefinisikan kelas interval-interval F yang nantinya akan digunakan dalam pembuktian beberapa sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor.
4. Menjelaskan perhitungan dari dimensi Hausdorff pada himpunan Cantor yang bernilai $s_0 = 3log_2$.
5. Menentukan ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor dan ukuran *basic* interval pada himpunan Cantor.
6. Membuktikan sifat-sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor melalui beberapa kasus.

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab pembahasan ini, akan dibuktikan sifat-sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor.

4.1 Sifat-sifat Ukuran Hausdorff pada Himpunan Cantor

Sebelum melanjutkan lebih dalam apa saja sifat-sifat dari ukuran hausdorff pada himpunan Cantor, berikut akan dijelaskan definisi dari himpunan Cantor.

Definisi 4.1

Misal konstruksi pada himpunan Cantor dimulai dari $E_0 = [0,1]$, $E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $E_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ dan seterusnya, di mana E_{k+1} diperoleh dengan menghapus sepertiga tengah pada setiap interval di E_k. Oleh karena itu, E_k terdiri dari 2^k interval yang disebut dengan *basic* interval tahap k dan setiap interval memiliki panjang 3^{-k}. Dari konstruksi himpunan Cantor tersebut dapat disimpulkan bahwa $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$. Himpunan Cantor didefinisikan dengan $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ yang merupakan salah satu jenis fraktal yang dihasilkan oleh dua keserupaan dengan faktor skalanya sebesar $\frac{1}{3}$.

Definisi 4.2

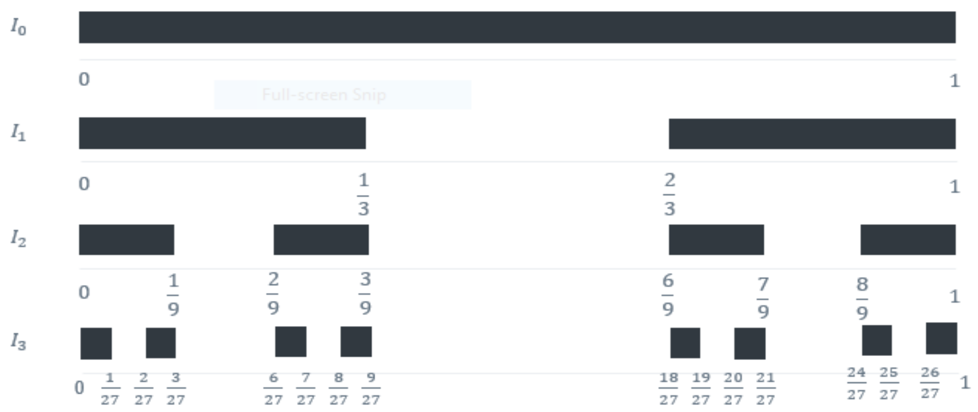
Misal himpunan Cantor C memenuhi kondisi pada himpunan buka, maka dimensi Hausdorff C sama dengan dimensi fraktal C, yaitu $s_0 = {}^3\log 2$. Himpunan Cantor memiliki interval awal $E_0 = [0,1]$ dan E merupakan subset $\mathbb{R}^n$ pada $n = 1$. Selain itu, dari gambar 4.1, ambil himpunan Cantor dengan tahapan $N = 2$ dan ukuran tiap intervalnya diperoleh $\frac{1}{3}$, maka berdasarkan Subbab 2.6 dimensi C sebagai berikut.

$$s_0 = \frac{\log(N)}{\log(\mathbb{R})} = -\frac{log2}{\log\frac{1}{3}} = \log\frac{2}{3} = {}^{3}\log 2$$

Jadi diperoleh dimensi dari himpunan Cantor C adalah $s_0 = {}^{3}\log 2$.

Definisi 4.3

Misal I_k menjadi sebarang *basic* interval tahap k, simbol F_k adalah kelas seluruh *basic* interval tahap k, dan $F = \bigcup_{k=0}^{\infty} F_k$. Menggunakan definisi dari *cover*, F merupakan jaring C untuk sebarang dua *basic* interval pada F yang saling lepas. Berikut merupakan gambar dari I_k.



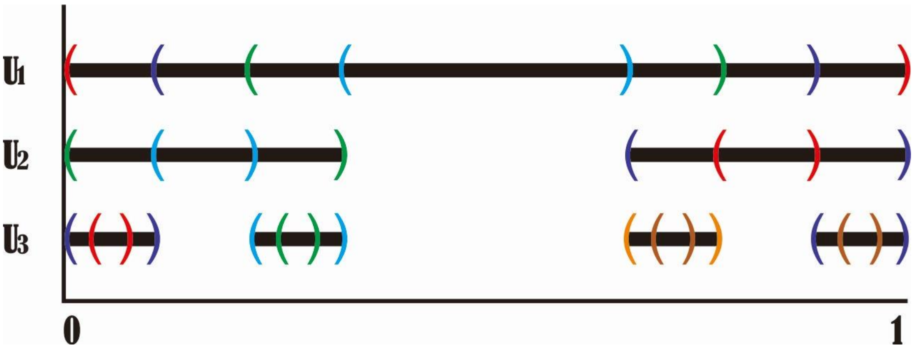
Gambar 4.1 Gambar *Basic* Interval Tahap $\boldsymbol{k}$

Definisi 4.4

Misal U menjadi subset tak kosong pada $\mathbb{R}^n$ yang dinotasikan dengan $|U|$ (dibaca diameter U). Kemudian, misal $E \subset \bigcup_i U_i$ dan $0 < |U| \leq \delta$ untuk setiap i, $\{U_i\}$ merupakan *cover* δ pada E di mana E menjadi subset $\mathbb{R}^n$ dan s menjadi bilangan *non-negative* untuk $\delta > 0$, diperoleh definisi sebagai berikut.

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

Cover $\{U_i\}$ digambarkan sebagai berikut



Gambar 4.2 Gambar *Cover* $\{\boldsymbol{U_i}\}$

Selanjutnya ukuran Hausdorff dimensi s di E didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E)$$

Rumus ukuran Hausdorff ini digunakan untuk menentukan nilai dari ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor.

Definisi 4.5

Diberikan kelas N merupakan himpunan-himpunan jaring E apabila untuk sebarang $x \in E$ dan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $A \in N$ sedemikian sehingga $x \in A$ dan $|A| \leq \varepsilon$. Jaring E merupakan himpunan buka yang meng-*cover* seluruh kelas *basic* interval.

Definisi 4.6

Ukuran *cover* dimensi s pada E dinotasikan dengan $\mathcal{H}^s_N(E)$. Hal ini didefinisikan dengan cara yang serupa pada ukuran Hausdorff dimensi s di E, tetapi menggunakan kelas N dari himpunan *cover* yang berhingga.

Definisi 4.7

Jaring N_1 ekuivalen secara lengkap pada N_2 apabila $\mathcal{H}^s_{N_1}(E) = \mathcal{H}^s_{N_2}(E)$. Hal ini berlaku untuk sebarang $E \subset \mathbb{R}^n$ dan sebarang $s \geq 0$, maka jaring N_1 ekuivalen secara lengkap pada jaring N_2 di himpunan E dan s jika $\mathcal{H}^s_{N_1}(E) = \mathcal{H}^s_{N_2}(E)$. Hal ini dapat diketahui bahwa kelas seluruh himpunan ekuivalen secara lengkap dengan kelas dari seluruh himpunan buka dan kelas dari seluruh himpunan tutup.

Pada Definisi 4.4, himpunan E merupakan sebarang himpunan di $\mathbb{R}^n$, maka C dapat menggantikan himpunan E, sedemikian sehingga rumus ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor adalah $\mathcal{H}^{s_0}(C)$. Berikut sifat-sifatnya.

Lemma 4.1

Jika C di*cover* oleh *basic* interval tahap k yang masing-masing memiliki interval sebanyak 2^k dan panjang 3^{-k}, sedemikian sehingga mengunakan ukuran Hausdorff dimensi s_0, maka

$$\mathcal{H}^{s_0}(C) \leq 1$$

Bukti:

Diketahui C merupakan himpunan Cantor dan didefinisikan $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ untuk setiap interval k, maka ukuran Hausdorff dari himpunan Cantor sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{s_0}(C) &= \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(C) \\
&= \lim_{\delta \to 0} \inf \sum_{i=1}^{\infty} |E_k|^s \\
&= \lim_{\delta \to 0} (\inf|E_0|^{s_0}, |E_1|^{s_0}, |E_2|^{s_0}, , \dots , |E_k|^{s_0}) \\
&= \lim_{\delta \to 0} \left(\inf|1|^{s_0}, \left|\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right|^{s_0}, \left|\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right|^{s_0}, \dots , |E_k|^{s_0} \right) \\
&= \lim_{\delta \to 0} \left(\inf|1|^{s_0}, \left|\frac{2}{3}\right|^{{}^3\log 2}, \left|\frac{4}{9}\right|^{{}^3\log 2}, \dots , |E_k|^{s_0} \right)
\end{aligned}$$

Misal untuk *basic* interval tahap 0, maka ukuran Hausdorffnya adalah $inf\ |E_0| = inf|1|^{s_0} = inf|1|^{{}^3\log 2} = 1$. Selanjutnya, untuk *basic* interval tahap 1, ukuran Hausdorffnya adalah $inf\ |E_0|^{s_0}, |E_1|^{s_0} = inf\ \ |1|^{s_0}, \left|\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right|^{s_0} =$

$inf\ \ |1|^{log\frac{2}{3}}, \left|\frac{2}{3}\right|^{log\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$, dan seterusnya. Karena ukuran Hausdorff memiliki limit menuju 0 dari inf $|E_k|$, maka $0 < \mathcal{H}^{s_0}(C) \leq 1$, artinya untuk setiap E_k tidak ada interval yang memiliki panjang 0. Namun, jika k semakin besar, maka $|E_k|$ akan menuju 0. Jadi, Lemma 4.1 terbukti bahwa $\mathcal{H}^{s_0}(C) \leq 1$.

Menurut Definisi 4.3, *basic* interval memiliki tak hingga banyaknya interval yang disimbolkan dengan I_k dan masing-masing panjangnya disimbolkan $|I_k|$, maka Lemma 4.2 berikut membuktikan ukuran interval pada himpunan Cantor.

Lemma 4.2

Misalkan diambil sebarang I_k dengan $k \in \mathbb{N}$ dan diambil sebarang $\{I_m\}$ dengan $m > k$ yang merupakan kelas dari setiap *basic* interval tahap m, maka

$$|I_k|^{s_0} = \sum\nolimits_{I_m \in \{I_m\}} |I_m|^{s_0}$$

Bukti:

Karena I_k terdiri dari 2^{m-k} *basic* interval tahap m dengan panjang masing-masing $|I_m| = 3^{-m}$ dan $|I_k| = 3^{-k}$. Perhatikan bahwa

$$3^{s_0} = 3^{\,{}^{3}\log 2} = 2$$

Sehingga

$$\begin{aligned} |I_k|^{s_0} &= (3^{-k})^{s_0} \\ &= (3^{-k})^{\,{}^{3}\log 2} \\ &= 3^{{}^{3}\log 2^{-k}} \\ &= 2^{-k} \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\sum_{I_m \in \{I_m\}} |I_m|^{s_0} = 2^{m-k}(3^{-m})^{s_0} = 2^{-k}$. Karena $m > k$, maka $I_m \in \{I_{k+1}, I_{k+2}, I_{k+3}, \dots\}$ sehingga

$$\sum_{I_m \in \{I_m\}} |I_m|^{s_0} = |I_{k+1}|^{s_0} + |I_{k+1}|^{s_0} + \cdots$$

$$= \left(3^{-(k+1)}\right)^{{}^3\log 2} + \left(3^{-(k+2)}\right)^{{}^3\log 2} + \cdots$$

$$= 3^{{}^3\log 2^{-(k+1)}} + 3^{{}^3\log 2^{-(k+2)}} + \cdots$$

$$= 2^{-(k+1)} + 2^{-(k+2)} + \cdots$$

$$= 2^{-k}\, 2^{-1} + 2^{-k}\, 2^{-2} + \cdots$$

$$= 2^{-k} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

Pola pada $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right)$ membentuk deret geometri dengan rasio $r = \frac{U_n}{U_n - 1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

dan $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ sehingga

$$\sum_{I_m \in \{I_m\}} |I_m|^{s_0}$$

$$= 2^{-k}.1$$

$$= 2^{-k}$$

Jadi, Lemma $|I_k|^{s_0} = \sum_{I_m \in \{I_m\}} |I_m|^{s_0}$ terbukti.

Sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor yang membuktikan bahwa penjumlahan dari *cover* $\{U_i\}$ memiliki nilai yang sama dengan ukuran awal pada himpunan Cantor yang akan dijelaskan pada Teorema 4.1 berikut.

Teorema 4.1

Misal $\alpha = \{U_i\}$ adalah sebarang himpunan terbilang yang meng-*cover* C. $\alpha = \{U_i\}$ terdiri dari *basic* interval dan pada masing-masing α tidak dapat melengkapi interval yang lain, maka

$$\sum_{U_i \in \alpha} |U_i|^{s_0} = |E_0|^{s_0} = 1$$

Bukti:

Misal $m = inf\{j: U_i \in F_j \;\; untuk\ suatu\ U_i \in \alpha\}$

$n = sup\{j: U_i \in F_j \;\; untuk\ suatu\ U_i \in \alpha\}$

Karena m adalah infimum dan n adalah supremum, maka m berhingga dan $n \geq m$ atau $n = +\infty$. Oleh karena itu akan dibuktikan dengan 3 kasus, yaitu:

1. Kasus 1, jika $n = m$, maka $a = F_m$ sedemikian sehingga

$$\sum_{U_i \in \alpha} |U_i|^{s_0} = \sum_{U_i \in F_m} |U_i|^{s_0} = 2^m (3^{-m})^{s_0} = 1$$

2. Kasus 2, jika $m < n < \infty$, maka

$$\sum_{U_i \in \alpha} |U_i|^{s_0} = 2^n (3^{-n})^{s_0} = 1$$

3. Kasus 3, jika $n = +\infty$, maka

$$\sum_{U_i \in \alpha} |U_i|^{s_0} = \sum_{k=m}^{+\infty} |I_k|^{s_0}$$

Meninjau kasus 1, yaitu jika $n = m$, maka $\alpha = F_m$. Berdasarkan Definisi 4.3, F_m merupakan kelas seluruh *basic* interval tahap m. Pertama-tama akan dibuktikan bahwa $\sum_{U_i \in \alpha} |U_i|^{s_0} = 1$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\sum_{U_i \in \alpha} |U_i|^{s_0} &= |U_1|^{s_0} + |U_2|^{s_0} + \cdots \\
&= (3^{-1})^{{}^3\log 2} + (3^{-2})^{{}^3\log 2} + \cdots \\
&= 3^{{}^3\log 2^{-1}} + 3^{{}^3\log 2^{-2}} + \cdots \\
&= 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots
\end{aligned}$$

Hasil di atas membentuk deret geometri dengan rasio $r = \frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ dan $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$, sehingga $\sum_{U_i \in F_m} |U_i|^{s_0} = 1$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\sum_{U_i \in F_m} |U_i|^{s_0} = 1$. Karena α terdiri dari 2^m interval dan masing-masing memiliki panjang 3^{-m}, maka $\alpha = 2^m (3^{-m})^{s_0} = 1$. Jadi, terbukti bahwa $\sum_{U_i \in \alpha} |U_i|^{s_0} = \sum_{U_i \in F_m} |U_i|^{s_0} = 2^m (3^{-m})^{s_0} = 1$.

Meninjau kasus 2, jika $m < n < +\infty$, diasumsikan bahwa terdapat l_k interval tahap k dengan I_k di $\alpha = \{U_i\}$ dan $k = m, m+1, m+2, \dots, n$. Jika I_k berisi 2^{n-k} *basic* interval tahap n, maka terdapat l_m yang merupakan *basic* interval tahap m, sedemikian sehingga $l_m 2^{n-m} + l_{m+1} 2^{n-m-1} + l_{m+2} 2^{n-m-2} + \cdots l_n$ merupakan *basic* interval tahap n di $\alpha = \{U_i\}$. Karena $\alpha = \{U_i\}$ merupakan *cover* C, hal ini jelas bahwa $l_m 2^{n-m} + l_{m+1} 2^{n-m-1} + l_{m+2} 2^{n-m-2} + \cdots l_n = 2^n$. Menggunakan Lemma 4.2, kasus ini akan dibuktikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\sum_{U_i \in \alpha} |U_i|^{s_0} &= l_m |I_m|^{s_0} + l_{m+1} |I_{m+1}|^{s_0} + l_{m+2} |I_{m+2}|^{s_0} + \cdots l_n |I_n|^{s_0} \\
&= l_m 2^{n-m} |I_n|^{s_0} + l_{m+1} 2^{n-m-1} |I_n|^{s_0} \\
&\qquad + l_{m+2} 2^{n-m-2} |I_n|^{s_0} + \cdots l_n |I_n|^{s_0} \\
&= (l_m 2^{n-m} + l_{m+1} 2^{n-m-1} + l_{m+2} 2^{n-m-2} + \cdots l_n) |I_n|^{s_0} \\
&= 2^n (3^{-n})^{s_0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Pada kasus ketiga, jika $n = +\infty$. Pertama-tama diasumsikan bahwa terdapat l_k *basic* interval tahap k, I_k di $\alpha = \{U_i\}, k = m, m+1, m+2, \dots, n$ maka ditunjukkan sebagai berikut

$$\sum\nolimits_{U_i \in \alpha} |U_i|^{s_0} = \sum_{k=m}^{+\infty} I_k \, |I_k|^{s_0} \tag{4.1}$$

Pada persamaan $\sum_{U_i \in \alpha} |U_i|^{s_0} = 1$ sudah dibuktikan pada kasus kedua. Selanjutnya, akan dibuktikan $\sum_{k=m}^{+\infty} I_k \, |I_k|^{s_0} = 1$. Jika I_k berisi 2^{n-k} *basic* interval tahap n, maka $l_m 2^{n-k} + l_{m+1} 2^{n-k-1} + l_{m+2} 2^{n-k-2} + \cdots l_k = 2^k$. Menggunakan rumus pada kasus dua, diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{+\infty} l_k \, |I_k|^{s_0} \\
&= l_m |I_m|^{s_0} + l_{m+1} |I_{m+1}|^{s_0} + l_{m+2} |I_{m+2}|^{s_0} + \cdots l_k |I_k|^{s_0} \\
&= l_m 2^{n-k} |I_n|^{s_0} + l_{m+1} 2^{n-k-1} |I_n|^{s_0} + l_{m+2} 2^{n-k-2} |I_k|^{s_0} \\
&\qquad + \cdots l_k |I_k|^{s_0} \\
&= (l_m 2^{n-k} + l_{m+1} 2^{n-k-1} + l_{m+2} 2^{n-k-2} + \cdots l_k) |I_k|^{s_0} \\
&= 2^k (3^{-k})^{s_0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Misal simbol m_p merupakan bilangan seluruh *basic* interval tahap $(p+1)$ yang tidak dimuat pada *basic* interval tahap q di α di mana $q < p+1$. Dari bukti kasus kedua, jika $m < n < +\infty$ untuk sebarang bilangan bulat $p (p \geq m)$, didapatkan sebagai berikut.

$$\sum_{k=m}^{p} l_k \, |I_k|^{s_0} + m_p \left| I_{p+1} \right| = 1 \tag{4.2}$$

Klaim bahwa $m_p \left| I_{p+1} \right| \to 0$, maka $p \to \infty$. Jika klaim salah, akan terdapat $\varepsilon_0 > 0$ (di mana $\varepsilon \notin \mathbb{R}$ dan ε berupa ukuran antara dua titik di $\mathbb{R}$) dan terdapat bilangan bulat positif $p_0 > N$ untuk sebarang bilangan bulat positif N sedemikian sehingga $m_{p_0} \left| I_{p_0+1} \right|^{s_0} \geq \varepsilon_0$ untuk $p \in N_{\varepsilon_0}$. Untuk setiap $p \in N_{\varepsilon_0}$, misal M_p menjadi gabungan m_p *basic* interval tahap $(p+1)$ disimbolkan dengan $M_p =$

$\bigcup m_p\left|I_{p+1}\right|$, di mana tidak dimuat di sebarang *basic* interval tahap q di α dan $q < p+1$. Sehingga diperoleh bahwa M_p tak kosong dan kompak, dan $M_j \supset M_i$ untuk $i > j$. Jadi, $\bigcap_{p\in N_{\varepsilon_0}} M_p \neq \emptyset$ dan $\bigcap_{p\in N_{\varepsilon_0}} M_p \subset C$.

Pada satu sisi, $\emptyset \neq \bigcap_{p\in N_{\varepsilon_0}} M_p \subset \bigcup_{U_i\in\alpha} U_i$. Pada lain sisi, dari definisi M_p, bahwa $\left(\bigcup_{U_i\in\alpha} U_i\right) \cap \left(\bigcap_{p\in N_{\varepsilon_0}} M_p\right)$ kontradiksi dengan fakta bahwa $\emptyset \neq \bigcap_{p\in N_{\varepsilon_0}} M_p \subset \bigcup_{U_i\in\alpha} U_i$. Sehingga diperoleh persamaan (4.2) bahwa $\sum_{k=m}^{p} l_k\,|I_k|^{s_0} = 1$ dan diperoleh persamaan (4.1) bahwa $\sum_{U_i\in\alpha}|U_i|^{s_0} = 1$. Jadi, Teorema 4.1 terbukti.

Karena penjumlahan seluruh *cover* dari himpunan Cantor terbukti sama dengan $|E_0|$, maka ukuran Hausdorff dari kelas *basic* interval juga memiliki nilai yang sama dengan $|E_0|$. Sedemikian sehingga dari Teorema 4.1, diperoleh akibat 4.1 yang akan dijelaskan sebagai berikut.

Akibat 4.1

$$\mathcal{H}_F^{s_0}(C) = |E_0|^{s_0} = 1$$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 4.3 yaitu misal F menjadi jaring C, setiap sebarang dua *basic* interval di E disjoin atau salah satu berada dalam interval lain yang didefinisikan dengan $F = \bigcup_{k=0}^{\infty} F_k$. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\mathcal{H}_F^{s_0}(C) = 1$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_F^{s_0}(C) &= inf \sum_{i=1}^{\infty} |E_k|^{s_0} \\
&= inf\left(|E_0|^{s_0} + |E_1|^{s_0} + \cdots + |E_k|^{s_0}\right) \\
&= |E_0|^{s_0}
\end{aligned}$$

Sedangkan, ukuran dari $|E_0|^{s_0}$ adalah

$$\begin{aligned} |E_0|^{s_0} &= |[0,1]|^{s_0} \\ &= |1-0|^{s_0} \\ &= 1^{\,^3\log 2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa Akibat 4.1 $\mathcal{H}_F^{s_0}(C) = |E_0|^{s_0} = 1$.

Kemudian, Teorema 4.2 menjelaskan sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor dimana $I_\sigma \in F_U$ dimuat secara lengkap di U. Lebih jelasnya akan dibuktikan sebagai berikut.

Teorema 4.2

Misal U menjadi subset buka pada $\mathbb{R}$ dan F_U menjadi keluarga himpunan dari *basic* interval I_σ yang dimuat secara lengkap di U, di mana tidak satupun yang termuat dengan yang lainnya, maka

$$\sum_{I_\sigma \in F_U} |I_\sigma|^{s_0} \leq |U|^{s_0} \tag{4.3}$$

Bukti:

Diketahui bahwa F_U merupakan keluarga himpunan dari sebarang basic interval I_σ tahap σ, dimana U merupakan subset buka di $\mathbb{R}$. Berdasarkan Lemma 4.2 terbukti bahwa $\sum_{I_\sigma \in F_U} |I_\sigma|^{s_0} = 2^k$. Kemudian, pada Teorema 4.1 jelas terbukti bahwa $\sum_{I_\sigma \in F_U} |I_\sigma|^{s_0} \leq 1$, sedemikian sehingga Teorema 4.2 ini berlaku ketika $|U| \geq 1$. Kebalikannya, jika $|U| < 1$, maka terdapat integer $k \geq 0$ sedemikian sehingga $3^{-(k+1)} \leq |U| < 3^{-k}$.

$$k = 0: 3^{-(0+1)} \leq |U| < 3^{-0} = \frac{1}{3} \leq |U| < 1$$

$$k = 1: 3^{-(1+1)} \leq |U| < 3^{-1} = \frac{1}{9} \leq |U| < \frac{1}{3}$$

$$k = 0: 3^{-(0+1)} \leq |U| < 3^{-0} = \frac{1}{27} \leq |U| < \frac{1}{9}$$

dan seterusnya untuk $k \geq 0$, sedemikian sehingga semakin besar nilai k, maka $|U|$ akan semakin kecil.

Jelas bahwa U hanya dapat beririsan dengan satu *basic* interval tahap k yang dinotasikan dengan I dan I tidak dapat memuat secara lengkap di U, karena $|U| < 3^{-k}$. Jika I memuat dua interval tahap $(k+1)$, maka akan dibuktikan dengan dua kasus:

1. Jika U beririsan dengan satu *basic* interval tahap $(k+1)$ di I, maka

$$\sum\nolimits_{I_\sigma \in F_U} |I_\sigma|^{s_0} \leq |I_{k+1}|^{s_0} = \left(3^{-(k+1)}\right)^{s_0}$$

2. Jika salah satu dari ujung kiri di I_{k+1}^{l} atau ujung kanan di I_{k+1}^{r} dimuat di $\overline{U}$, maka

$$^{3}\log 2 \,.\, ln\left(1 - \frac{1}{3^t}\right) \geq ln\left(1 - \frac{1}{2^{t+1}}\right)$$

atau jika $\overline{U}$ dapat memuat salah satu dari kedua ujung kiri I_{k+1}^{l} dan ujung kanan I_{k+1}^{r}, maka

$$\left(1 - \frac{1}{3^m} - \frac{1}{3^n}\right)^{s_0} \geq 1 - \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

Meninjau kasus pertama, yaitu jika U beririsan dengan satu *basic* interval tahap $(k+1)$ di I, maka

$$\sum\nolimits_{I_\sigma \in F_U} |I_\sigma|^{s_0} \leq |I_{k+1}|^{s_0} = \left(3^{-(k+1)}\right)^{s_0}$$

Persamaan di atas ekuivalen dengan

$$\sum\nolimits_{I_\sigma \in F_U} |I_\sigma|^{s_0} = \left(3^{-(k+1)}\right)^{s_0}$$

Karena $|U| \geq 3^{-(k+1)}$, maka $\sum_{I_\sigma \in F_U} |I_\sigma|^{s_0} \leq \left(3^{-(k+1)}\right)^{s_0} \leq |U|$ yang ekuivalen dengan persamaan (4.3) bahwa $\sum_{I_\sigma \in F_U} |I_\sigma|^{s_0} \leq |U|$ terbukti.

Meninjau kasus dua, Jika U beririsan dengan dua interval tahap $(k+1)$ di I, maka terdapat dua definisi sebagai berikut:

1. $I_i^l (i > k)$ merupakan interval tahap i di I yang ujung kirinya berimpit dengan ujung kiri I, dan
2. $I_i^r (i > k)$ merupakan interval tahap i di I yang ujung kanannya berimpit dengan ujung kanan I.

Karena $|U| = |\bar{U}| < 3^{-k}$, U dan $\bar{U}$ tidak dapat memuat ujung kiri di I_{k+1}^l dan ujung kanan di I_{k+1}^r. $\bar{U}$ merupakan komplemen U atau bukan *subset* tak kosong di $\mathbb{R}^n$. Jika salah satu dari ujung kiri di I_{k+1}^l atau ujung kanan di I_{k+1}^r termuat di $\bar{U}$, misal katakan bahwa ujung kiri di I_{k+1}^l termuat di $\bar{U}$ dan ujung kanan di I_{k+1}^r termuat di $\bar{U}$, maka terdapat integer positif t sebagai berikut:

$$U \cap I_{k+1}^r \neq \emptyset, U \cap I_{k+t+1}^r = \emptyset,$$

maka ditunjukkan sebagai berikut

$$|U| \geq |I| - |I_{k+1}^r| = 3^{-k} - 3^{-(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{3^t}\right) 3^{-k} \tag{4.4}$$

dan

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_{I_\sigma \in F_U} |I_\sigma|^{s_0} &\leq \left|I_{k+1}^l\right|^{s_0} + (2^t - 1)|I_{k+t+1}|^{s_0} \\ &= \left(3^{-(k+1)}\right)^{s_0} + (2^t - 1)\left(\left(3^{-(k+t+1)}\right)^{s_0}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{2^t - 1}{2^{t+1}}\right)(3^{-k})^{s_0} \end{aligned}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^{t+1}}\right)(3^{-k})^{s_0} \tag{4.5}$$

Klaim bahwa:

$$\left(1 - \frac{1}{3^t}\right)^{s_0} \geq 1 - \frac{1}{2^{t+1}} \; artinya \; {}^3\log 2 \, . \, ln\left(1 - \frac{1}{3^t}\right) \geq ln\left(1 - \frac{1}{2^{t+1}}\right) \tag{4.6}$$

Jelas bahwa persamaan (4.6) berlaku untuk $t = 1$. Ketika $t \geq 2$, misal $f(x) = 3_{\log 2}. ln\left(1 - \frac{1}{3^t}\right) \geq ln\left(1 - \frac{1}{2^{t+1}}\right)$. Dapat ditunjukkan bahwa $f(x)$ naik pada $[2, +\infty)$ dengan perhitungan turunan $f'(x)$, dan $f(+\infty) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ dan karena $f(x) \geq 0$ untuk $x \geq 2$. Jadi, terbukti bahwa dari persamaan (4.4) dan (4.5), maka persamaan (4.3) berlaku.

Jika $\overline{U}$ dapat memuat salah satu dari kedua ujung kiri I_{k+1}^l dan ujung kanan I_{k+1}^r, maka terdapat dua bilangan bulat positif m dan n sebagai berikut:

$$U \cap I_{k+m}^l \neq \emptyset, U \cap I_{k+m+1}^l = \emptyset, U \cap I_{k+n}^r \neq \emptyset, U \cap I_{k+n+1}^l = \emptyset$$

Berikut bahwa:

$$\begin{aligned} |U| \geq |I| - \left(|I_{k+1}^l| + |I_{k+1}^r|\right) \quad &= 3^{-k} - \left(3^{-(k+m)} + 3^{-(k+n)}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3^m} - \frac{1}{3^n}\right)3^{-k} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_{I_\sigma \in F_U} |I_\sigma|^{s_0} \quad &\leq (2^m - 1)\left|I_{k+m+1}^l\right|^{s_0} + (2^n - 1)\left|I_{k+n+1}^l\right|^{s_0} \\ &= (2^m - 1)\left(3^{-(k+m+1)}\right)^{s_0} + (2^n - 1)\left(3^{-(k+n+1)}\right)^{s_0} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(3^{-k})^{s_0} \end{aligned}$$

Serupa dengan diskusi di atas, dapat diperoleh bahwa $\left(1 - \frac{1}{3^m} - \frac{1}{3^n}\right)^{s_0} \geq 1 - \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}$ dan persamaan (4.3) berlaku. Terbukti bahwa Teorema 4.2, $\sum_{I_\sigma \in F_U} |I_\sigma|^{s_0} \leq |U|^{s_0}$ berlaku.

Selanjutnya, pada Teorema 4.3 berikut menjelaskan mengenai sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor yang memiliki nilai sama dengan ukuran Hausdorff dari kelas *basic* interval pada himpunan Cantor. Lebih jelasnya dibuktikan sebagai berikut.

Teorema 4.3

$$\mathcal{H}^{s_0}(C) = \mathcal{H}_F^{s_0}(C) = 1$$

Bukti:

Berdasarkan Lemma 4.1 bahwa $\mathcal{H}^{s_0}(C) \leq 1$ dan Akibat 4.1 bahwa $\mathcal{H}_\delta^s(C) = 1$, maka $\mathcal{H}^{s_0}(C) \leq \mathcal{H}_F^{s_0}(C)$ terbukti. Selanjutnya, untuk membuktikan lawan dari ketaksamaan tersebut, dibutuhkan pertimbangan dari seluruh *cover* δ pada C dari definisi $\mathcal{H}^s(E)$. Berdasarkan Definisi 4.7 bahwa kelas pada seluruh himpunan ekuivalen secara lengkap dengan kelas seluruh himpunan buka, hal ini cukup membuktikan $\mathcal{H}^{s_0}(C) \geq \mathcal{H}_F^{s_0}(C)$ untuk seluruh himpunan buka *cover* δ pada C.

Misal $\{U_i\}$ menjadi sebarang himpunan buka *cover* δ pada C. Untuk sebarang $U_i \in \{U_i\}$ diberikan, misal F_{U_i} menjadi kelas dari *basic* interval yang dimuat secara lengkap di U_i, dimana tidak satu pun dimuat oleh interval lain, berdasarkan Teorema 4.2 maka $|U_i|^{s_0} \geq \sum_{I_\sigma \in F_{U_i}} |I_\sigma|^{s_0}$.

Karena C kompak, F_{U_i} dapat memuat $C \subset \bigcup_{U_i \in \{U_i\}} \bigcup_{I_\sigma \in F_{U_i}} I_\sigma$ dan karena $\sum_{U_i \in \{U_i\}} |U_i|^{s_0} \geq \sum_{U_i \in \{U_i\}} \sum_{I_\sigma \in F_{U_i}} |I_\sigma|^{s_0}$, maka $\mathcal{H}^{s_0}(C) \geq \mathcal{H}_F^{s_0}(C)$ terbukti. Jadi dapat diperoleh bahwa $\mathcal{H}^{s_0}(C) = \mathcal{H}_F^{s_0}(C) = 1$, dan Teroma 4.3 terbukti.

Dari Teorema 4.3, diperoleh Akibat 4.2 berikut yang membuktikan bahwa kelas setiap himpunan *basic* interval ekuivalen secara lengkap pada *cover* F.

Akibat 4.2

Pada himpunan Cantor C dan bilangan $s_0 = {}^3\log 2$, setiap kelas himpunan ekuivalen secara lengkap pada jaring F, di mana kelas terdiri dari setiap *basic* interval.

Bukti:

Menurut Definisi 4.5 jaring F_1 ekuivalen secara lengkap pada F_2 apabila $\mathcal{H}_{F_1}^{s_0}(C) = \mathcal{H}_{F_2}^{s_0}(C)$ untuk sebarang $C \subset \mathbb{R}^n$ dan sebarang $s \geq 0$. Hal ini menunjukkan bahwa kelas setiap himpunan ekuivalen secara lengkap pada jaring F yang dinotasikan dengan $\mathcal{H}^{s_0}(C) = \mathcal{H}_F^{s_0}(C)$. Jadi, Akibat 3.2 terbukti.

Terdapat delapan masalah terbuka pada nilai pasti dari ukuran Hausdorff. Permasalahan terbuka yang pertama (salah satunya) akan ditunjukkan sebagai berikut (Zhou. Z. L, 2004).

Masalah 4.1

Dalam kondisi apa terdapat *cover* pada E, katakan $\alpha = \{U_i, i > 0\}$, sedemikian sehingga $\mathcal{H}^s(E) = \sum_{i=1}^{m} |U_i|^s$?

Jawab:

Berdasarkan *cover* pada E atau disebut sebagai *cover*. Hal ini mudah ditunjukkan bahwa $\{C\}$ merupakan *cover* terbaik pada C, dan kelas F_k pada seluruh *basic* interval tahap k merupakan *cover* terbaik C. Maka dari itu, dengan menggunakan Teorema 4.1 bahwa $\sum_{U_i \in \alpha} |U_i|^{s_0} = |E_0|^{s_0} = 1$ dan Teorema 4.3 bahwa $\mathcal{H}^{s_0}(C) = \mathcal{H}_F^{s_0}(C) = 1$, didapatkan akibat sebagai berikut.

Akibat 4.3

Misal $\alpha = \{U_i\}$ menjadi sebarang *cover* pada C yang terdiri dari *basic* interval di mana setiap α tidak dapat memuat secara lengkap pada interval lain, maka $\alpha = \{U_i\}$ yang merupakan *cover* terbaik C.

Bukti:

Berdasarkan pernyataan pada Teorema 4.1 bahwa $\sum_{U_i \in \alpha} |U_i|^{s_0} = |E_0|^{s_0} = 1$. Dalam perhitungan ukuran Hausdorff, *cover* terbaik adalah *cover* yang memberikan nilai paling akurat pada himpunan Cantor. Karena setiap $\alpha = \{U_i\}$ tidak dapat memuat secara lengkap pada interval lain, maka dapat dipastikan bahwa *cover* tersebut adalah yang terbaik untuk mengukur ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor.

4.2 Kajian Integrasi Nilai Keagamaan

Dalam membuktikan sifat-sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor tentunya perlu rumus dari ukuran Hausdorff. Pada dasarnya, ukuran Hausdorff sulit dihitung. Meskipun ukuran Hausdorff sulit dihitung. Namun, konsep ini dapat dilakukan dengan hasil yang mendekati persamaan universal berupa bilangan bulat. Hal ini disebut dengan aproksimasi. Serupa dengan Q.S Al-Maryam ayat 94 bahwa Allah akan memperhitungkan segala sesuatu yang manusia lakukan di bumi sesuai dengan amal baik dan buruknya dengan perhitungan yang teliti dan tidak tertinggal amalnya satu pun.

Ditinjau dalam pandangan Islam, Dalam diri manusia ada empat sifat. Tiga dari empat sufat itu berpotensi untuk mencelakakan manusia dan satu berpotensi mengantarkan manusia menuju pintu kebahagiaan, yaitu:

1. Sifat Syaithaniyah

   Sifat identiknya adalah kecemburuan, hasad dan dengki, saling iri dan menjatuhkan. Pekerjaan dan targetnya bagaimana membuat jalan yang menyesatkan. Menjerumuskan dan menjatuhkan pada jalan kenistaan. Membasmi dan menghilangkan sifat kemanusiaan dan martabat anak Adam yang dimuliakan.

2. Sifat Bahimah (Sifat Binatang Ternak)

   Seperti diketahui bahwa sikap binatang ternak yang diciptakan tanpa fikir, tanpa rasa. Bagi binatang ini adalah sifatnya, ia begitu, adalah lumrah. Namun, apabila manusia yang diberi hati diberi rasa, bersikap dengan sikap bahimah, maka hal ini akan menjadi petaka dan berbahaya.

3. Sifat Sabi’iyah

   Sifat yang bukan binatang ternak, tapi lebih tinggi, binatang liar dan buas. Sifat-sifat identiknya adalah kesemena-menaan, tak punya rasa kasihan, tidak ada iba dan rasa. Ia akan menerkam siapa saja, andalannya adalah bringas dan tenaga, kuku tajam dan taringnya. Karakternya kezaliman, tidak ada keadilan. Yang kuat berkuasa, yang lemah binasa. Tidak ada ukuran kebenaran, yang ada unjuk kekuatan. Ini yang kita kenal dengan hukum rimba. Yang kuat selamat yang lemah terhina. Yang berani akan menindas yang pengecut. Yang kuat akan memakan yang lemah.

4. Sifat Rububiyyah

   Sedangan satu-satunya sifat yang menjamin keselamatan dan kebaikan manusia, adalah sifat ‘rububiyyah” sifat berketuhanan, beriman, bertaqwa, memiliki kontrol keyakinan. Yakin akan hari pembalasan. Dan percaya bahwa kehidupan dunia akan dipertanggungjawabkan.

Kebenaran mutlak adalah ketentuan Tuhan, dijelaskan nabi, dikandung Al Quran. Sifat yang tumbuh tidak mengedepankan nafsu keserakahan, tidak ada kepuasan di atas kejahatan. Kebahagiaan bukan tumbuh di atas penderitaan orang lain.

BAB V

KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Penelitian ini menjelaskan konsep ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor yang memiliki 2^k basic interval tahap$-k$ dengan masing-masing panjangnya 3^{-k}. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa ukuran Hausdorff pada Himpunan Cantor C adalah $\mathcal{H}^{s_0} = 1$ di mana $s_0 = {}^3\log 2$ merupakan dimensi Hausdorff pada himpunan Cantor C yang ekuivalen dengan dimensi keserupaan pada C.

Penelitian ini memberikan pemahaman terkait bagaimana karakteristik geometri fraktal pada himpunan Cantor yang dinyatakan dalam perhitungan ukuran Hausdorff dengan membuktikan $\mathcal{H}^{s_0}(C) = \mathcal{H}_F^{s_0}(C) = 1$ dan konsep lainnya melalui beberapa kasus. Hasil dari penelitian ini, terdapat sifat-sifat ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor, yaitu:

1. Ukuran Hausdorff pada himpunan Cantor bernilai kurang dari sama dengan 1.
2. Ukuran dari *basic* interval tahap k sama dengan menjumlahkan masing-masing interval tahap m untuk $m > k$, sehingga diperoleh nilai 2^{-k}.
3. Penjumlahan ukuran *cover* dari *basic* interval memiliki nilai yang sama dengan interval awal dari himpunan Cantor, yaitu 1.
4. Ukuran Hausdorff dari kelas *cover* himpunan Cantor memiliki nilai yang sama dengan ukuran interval awal dari dari himpunan Cantor.
5. Penjumlahan dari ukuran interval σ yang merupakan anggota dari kelas subset buka $\mathbb{R}$ memiliki nilai kurang dari sama dengan ukuran subset buka $\mathbb{R}$.

6. Ukuran Hausdorff dari himpunan Cantor memiliki nilai yang sama dengan ukuran Hausdorff dari kelas *cover* himpunan Cantor, yaitu 1.

Selain itu, hasil pada penelitian ini juga memiliki keterhubungan dengan teori fraktal dan dimensi Hausdorff yang berguna untuk mempelajari tentang cara mengukur dan menganalisis himpunan-himpunan fraktal.

5.2 Saran

Penulis menyarankan untuk penelitian selanjutnya, dapat meneliti Ukuran Hausdorff pada objek fraktal lain seperti Kurva Von Koch atau Segitiga Sierpinski. Karena Ukuran Hausdorff berkaitan erat dengan geometri fraktal, maka dari itu bisa dilakukan penelitian ukuran Hausdorff pada jenis fraktal. Selain itu, apabila ingin mengembangkan penelitian ini, penulis menyarankan untuk dapat menentukan sifat-sifat dimensi Hausdorff pada Himpunan Cantor.

Harapan penulis, penelitian ini dapat menjadi kontribusi penting di masa mendatang untuk memberikan pemahaman terkait himpunan Cantor, sekaligus memperkaya rujukan terkait teori ukuran Hausdorff dan pengaplikasiannya pada himpunan fraktal. Selain itu, penelitian ini memiliki potensi untuk memberikan informasi dalam bidang matematika seperti teori himpunan, analisis kompleks, dan ilmu komputer, di mana konsep ukuran Hausdorff dapat digunakan untuk mengukur dan menganalisis berbagai jenis data.

DAFTAR PUSTAKA

Abdillah, A. (n.d.). *Sunan Ibnu Majah* (p. 56).

Aliyah, K. N., & Manuharawati. (2013). *FUNGSI CANTOR*. 1–6.

Creswel, J. W. l. (2012). *Educational Research* (4th ed.). https://www.ptonline.com/articles/how-to-get-better-mfi-results

Davidson, K. R., & Donsig, A. P. (2010). *Real Analysisi and Applications Theori in Practice.* New York: LCC.

Falconer, K. (1985). The geometry of farctal sets. *Cambridge University Press*.

Falconer, Kenneth. (1990). Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. In *Biometrics* (Vol. 46, Issue 3). https://doi.org/10.2307/2532125

Hasanudin, A. Z. (2017). Kewajiban Menuntut Ilmu dalam Menurut Al-Qur'an dan Hadits. *Jurnal IAIN Metro*, *15*, 1–18.

Helmberg, G. (2009). Fractals and dimension. *Getting Acquainted with Fractals*, *v*, 1–10. https://doi.org/10.1515/9783110190922.1

Kementrian Agama, S. A. (1971). Al-Qur'an al-karim dan terjemahannya. In *Komplek Percetakan Al Qur'anul Karim Kepunyaan Raja Fahd* (p. 1281).

Laili, A. F. N. (2018). Teori Himpunan dalam Ayat-ayat al-Qur'an. *Matematika*, *46*(46), 1–11.

Pierce, D. (2014). *The Cantor set A winter course at the Nesin Matematik Köyü*. 167–174. https://doi.org/10.1090/surv/197/24

Royden, H., & Fitzpatrick, P. (2010). *Real Analysis*.

Sahid. (1997). Fraktal - Kurva yang merupakan diri sendiri. *Yayasan Harapan Kita : Jakarta*, 1–5.

Tomasoa, M., Talakua, M. W., Sinay, L. J., & Batkunde, H. (2015). Karakteristik Ruang Hausdorff Kompak. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, *9*(2), 85–88. https://doi.org/10.30598/barekengvol9iss2pp85-88

Wahyudin. (1987). *Dasar-Dasar Topologi.* Bandung: Tarsito.

Wang, M. (2016). Some remarks on the Hausdorff measure of the Cantor set. *SHS Web of Conferences*, *24*, 01015. https://doi.org/10.1051/shsconf/20162401015

Yundari, Suri, P. A., & Mariatul, K. (2019). Ruang Hausdorff Kompak. *Bimaster :*

Buletin Ilmiah Matematika, Statistika Dan Terapannya, *8*(3). https://doi.org/10.26418/bbimst.v8i3.33862

Yohanes, D. N. (2014). *Dimensi Haussdorf dari Beberapa Bangun Fraktal.* Yogyakarta: Universitas Santa Dharma.

Zhou. Z. L, F. L. (2004). Twelve open problems on the exact value of the Hausdorff measure and on topological entropy: a brief survey of recent results. *Non-Linearity*, 493-502.

RIWAYAT HIDUP

Ghoutsah Kholidah, lahir di Malang pada tanggal 21 November 2000. Putri ke delapan dari sembilan bersaudara dari Abah H. Ghozali, B.A dan Ibu Hj. Cholis Indasah. Ia dilahirkan dan dibesarkan di rumah sederhana yang terletak di Jl. Semanggi RT.07 RW.01 No.06 Kelurahan Bumiayu Kecamatan Kedungkandang Kota Malang.

Perempuan dengan sapaan Ocha ini telah menempuh pendidikan formal mulai dari taman kanak-kanak di TK Islam Bumiayu yang lulus pada tahun 2006, kemudian menempuh pendidikan sekolah dasar di SDN Bumiayu 2. Setelah lulus SD pada tahun 2012, ia melanjutkan pendidikan di SMP An-Nur Bululawang Malang yang lulus pada tahun 2015, kemudian di SMA An-Nur Bulalawang Malang yang lulus pada tahun 2018. Pada saat SMP dan SMA, ia juga menempuh pendidikan non-formal di lembaga yang sama yaitu Pondok Pesantren Wisata An-Nur 2 Bululawang Malang selama 6 tahun. Pada tahun 2019, ia tercatat sebagai mahasiswi di Jurusan Matematika murni Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Perempuan asal Malang ini mulai aktif mengikuti organisasi sejak SMP. Ia mengikuti organisasi Paskibraka dan OSIS dalam 2 periode. Periode pertama, ia hanya sebagai anggota dan periode kedua ia menjabat sebagai pengurus divisi. Saat SMP pun ia juga mengikuti organisasi yang sama, yakni paskibraka yang menjabat sebagai ketua pengurus administrasi dan pada organisasi OSIS, ia menjabat sebagai Sekretaris. Saat kuliah, ia juga pernah ia terpilih sebagai Duta Fakultas Sains dan Teknologi Juara 1 pada saat semester 1. Selanjutnya ia juga pernah mengikuti organisasi kepanitian KOMET selama 3 tahun dan organisasi HMJ Integral Matematika yang menjabat sebagai anggota pengurus divisi Jurnalis dan Penerbitan.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ghoutsah Kholidah
NIM : 19610029
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Sifat-sifat Ukuran Hausdorff pada Himpunan Cantor
Pembimbing I : Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc.
Pembimbing II : Juhari, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	6 Februari 2023	Konsultasi Bab I	1.
2.	20 Februari 2023	ACC Bab I	2.
3.	2 Maret 2023	Konsultasi Bab II dan III	3.
4.	13 Maret 2023	ACC Bab II dan III	4.
5.	27 Maret 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	3 April 2023	ACC Kajian Agama Bab I dan II	6.
7.	17 April 2023	ACC Seminar Proposal	7.
8.	15 Mei 2023	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	8.
9.	23 Agustus 2023	Konsultasi Bab IV dan V	9.
10.	29 September 2023	ACC Bab IV dan V	10.
11.	15 Oktober 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	11.
12.	18 Oktober 2023	ACC Kajian Agama Bab IV	12.
13.	30 Oktober 2023	ACC Seminar Hasil	13.
14.	2 November 2023	Konsultasi Revisi Seminar Hasil Latar Belakang	14.
15.	15 November 2023	Konsultasi Revisi Seminar Hasil Kajian Agama	15.
16.	25 November 2023	Konsultasi Revisi Seminar Hasil Teori Pendukung	16.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

17.	8 Desember 2023	ACC Sidang Skripsi	17.
18.	22 Desember 2023	ACC Keseluruhan	18.

Malang, 22 Desember 2023
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005