

**ANALISIS DINAMIK MODEL DISKRIT VIBRASIDAWAI  
*FLYING FOX***

**SKRIPSI**

**OLEH  
ANIQ NUR MATSUBAH  
NIM. 19610006**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2023**

**ANALISIS DINAMIK MODEL DISKRIT VIBRASI DAWAI  
*FLYING FOX***

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan  
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat.)**

**Oleh:  
Aniq Nur Matsubah  
NIM. 19610006**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2023**

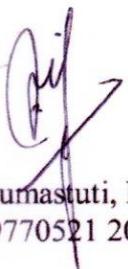
**ANALISIS DINAMIK MODEL DISKRIT VIBRASI DAWAI  
FLYING FOX**

**SKRIPSI**

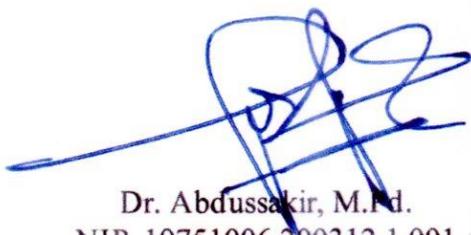
Oleh:  
**Aniq Nur Matsubah**  
NIM. 19610006

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Malang, 15 Desember 2023

Dosen Pembimbing I

  
Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.  
NIP. 19770521 200501 2 004

Dosen Pembimbing II

  
Dr. Abdussakir, M.Pd.  
NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika

  
  
Dr. Ely Susanti, M.Sc.  
NIP. 19741129 200012 2 005

**ANALISIS DINAMIK MODEL DISKRIT VIBRASI DAWAI  
FLYING FOX**

**SKRIPSI**

**Oleh:**  
**Aniq Nur Matsubah**  
**NIM. 19610006 ..**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat.)

Tanggal 19 Desember 2023

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Anggota Penguji 1 : Juhari, M.Si.

Anggota Penguji 2 : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.

Anggota Penguji 3 : Dr. Abdussakir, M.Pd.



Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika



  
Dr. Lily Susanti, M.Sc.  
NIP. 19741129 200012 2 005

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Aniq Nur Matsubah

NIM : 19610006

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Diskrit Vibrasi Dawai

*Flying Fox*

menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 19 Desember 2023

Yang membuat pernyataan,



Aniq Nur Matsubah  
NIM. 19610006

## MOTO

وَأَفْوِضْ أَمْرِي إِلَى اللَّهِ إِنَّ اللَّهَ بَصِيرٌ بِالْعِبَادِ ﴿٤٤﴾

“Aku menyerahkan urusanku kepada Allah. Sesungguhnya Allah Maha Melihat hamba-hamba-Nya”

(Ghafir:44)

## **PERSEMBAHAN**

*Bismillahirrahmanirrahim*, dengan mengucap syukur kepada Allah Swt. Skripsi ini peneliti persembahkan untuk ayahanda tercinta Abdul Mu'id Masduqi yang tiada lelah berusaha menopang pendidikan anaknya, ibunda tercinta Inayatur Rohmah yang tiada henti mendo'akan anaknya, adik tersayang Muhammad Ridho Mahbub yang menjadi penyemangat, dan teman-teman yang senantiasa membantu dan memberi dukungan peneliti.

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Segala dan puji syukur ke hadirat Allah Swt atas berkat, rahmat, limpahan ni'mat dan hidayah-Nya, sehingga peneliti dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Analisis Dinamik Model Diskrit Vibrasi Dawai *Flying Fox*”. Shalawat serta salam selalu terlimpahkan kepada Nabiullah Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yakni agama Islam.

Pada kesempatan ini, penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak akan dapat diselesaikan sendiri oleh peneliti. Banyak yang ikut serta berjuang dengan merelakan waktu, pikiran serta tenaga dalam membantu peneliti menyelesaikan skripsi ini baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, melalui ini dengan segala kerendahan dan ketulusan hati, peneliti menghaturkan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, nasihat, do'a, dan pengalaman berharga kepada penulis.
5. Dr. Abdussakir, M.Pd., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, nasihat, do'a, dan pengalaman berharga kepada penulis.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah memberikan ilmu selama perkuliahan, terima kasih untuk semua ilmu, pengalaman, dan bimbingan selama ini.

7. Abi Abdul Mu'id Masduqi dan Ibu Inayatur Rohmah yang tiada henti mendo'akan, memberikan semangat dan dukungan kepada penulis baik dari segi materi maupun batin selama perkuliahan. Terima kasih telah menjadi motivasi penulis untuk menyelesaikan tugas akhir.
8. Adik Muhammad Ridho Mahbub yang menjadi penyemangat bagi penulis menyelesaikan tugas akhir.
9. Teman-teman angkatan matematika 2019 "Soulmath" terima kasih atas segala pengalaman bersama selama menuntut ilmu di bangku kuliah.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat kepada kita semua. Peneliti juga berharap semoga semua yang ditulis dapat memberi manfaat kepada peneliti maupun pembaca.

*Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Malang, 15 Desember 2023

Peneliti

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	<b>i</b>
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b> .....	<b>ii</b>
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b> .....	<b>iii</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	<b>iv</b>
<b>PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b> .....	<b>v</b>
<b>MOTO</b> .....	<b>vi</b>
<b>PERSEMBAHAN</b> .....	<b>vii</b>
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>x</b>
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	<b>xii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	<b>xiv</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	<b>xv</b>
<b>ABSTRAK</b> .....	<b>xvi</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>xvii</b>
<b>مستخلص البحث</b> .....	<b>xviii</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	<b>1</b>
1.2 Rumusan Masalah .....	<b>6</b>
1.3 Tujuan Penelitian.....	<b>6</b>
1.4 Manfaat Penelitian.....	<b>6</b>
1.5 Batasan Masalah.....	<b>6</b>
<b>BAB II KAJIAN TEORI</b> .....	<b>7</b>
2.1 Teori Pendukung.....	<b>7</b>
2.1.1 Model Matematika Vibrasi Dawai <i>Flying Fox</i> .....	<b>7</b>
2.1.2 Uji Validasi Model.....	<b>13</b>
2.1.3 Persamaan Diferensial.....	<b>15</b>
2.1.4 Metode Euler.....	<b>18</b>
2.1.5 Sistem Dinamik Diskrit.....	<b>19</b>
2.1.6 Linierisasi Persamaan Diferensial.....	<b>21</b>
2.1.7 Nilai Eigen dan Vektor Eigen .....	<b>22</b>
2.1.8 Kestabilan Sistem Dinamik Diskrit.....	<b>25</b>
2.1.9 Solusi Analitik Model Matematika Vibrasi Dawai <i>Flying Fox</i> .....	<b>26</b>
2.2 Kajian Integrasi Topik dengan al-Qur'an/Hadits.....	<b>28</b>
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung.....	<b>29</b>
<b>BAB III METODE PENELITIAN</b> .....	<b>32</b>
3.1 Jenis Penelitian.....	<b>32</b>
3.2 Pra Penelitian.....	<b>32</b>
3.3 Tahapan Penelitian .....	<b>32</b>
<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	<b>33</b>
4.1 Analisis Dinamik Model Diskrit Vibrasi Dawai <i>Flying Fox</i> .....	<b>33</b>
4.1.1 Reduksi Model .....	<b>33</b>
4.1.2 Diskritisasi Model.....	<b>34</b>
4.1.3 Linierisasi Model .....	<b>37</b>
4.1.4 Titik Kesetimbangan Model .....	<b>38</b>

4.1.5 Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan .....	40
4.1.6 Simulasi dan Interpretasi.....	45
4.2 Kajian Nilai Keagamaan Mengenai Kestabilan .....	<b>49</b>
<b>BAB V PENUTUP</b> .....	<b>52</b>
5.1 Kesimpulan.....	<b>52</b>
5.2 Saran.....	<b>52</b>
<b>DAFTAR RUJUKAN</b> .....	<b>53</b>
<b>LAMPIRAN</b> .....	<b>55</b>
<b>RIWAYAT HIDUP</b> .....	<b>61</b>

## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Daftar Parameter .....	10
----------------------------------	----

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Ilustrasi <i>Flying Fox</i> .....	8
Gambar 2.2	Siklus Pemodelan Matematika (Kehle, 1998).....	13
Gambar 2.3	Grafik Persamaan Sudut Lendutan (Sari, 2018) .....	28
Gambar 4.1	Simulasi I Sistem Diskrit Lendutan Dawai.....	46
Gambar 4.2	Simulasi I Sistem Kontinu Lendutan Dawai.....	47
Gambar 4.3	Simulasi II Sistem Diskrit Sudut Lendutan Dawai.....	48
Gambar 4.4	Simulasi II Sistem Kontinu Sudut Lendutan Dawai .....	49

## DAFTAR SIMBOL

$y(t)$	: Lendutan atau simpangan dawai <i>flying fox</i> bergantung pada $t$
$\theta(t)$	: Sudut dawai <i>flying fox</i> bergantung pada variabel $t$
$\frac{dy(t)}{dt}$	: Kecepatan vibrasi dawai <i>flying fox</i> bergantung pada variabel $t$
$\frac{d^2y(t)}{dt^2}$	: Percepatan vibrasi dawai <i>flying fox</i> bergantung pada variabel $t$
$\frac{d\theta(t)}{dt}$	: Kecepatan sudut dawai <i>flying fox</i> bergantung pada variabel $t$
$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	: Percepatan sudut dawai <i>flying fox</i> bergantung pada variabel $t$
$t$	: Variabel bebas (waktu)
$l$	: Panjang dawai <i>flying fox</i>
$m_b$	: Massa benda yang meluncur pada dawai <i>flying fox</i>
$m_d$	: Massa dawai <i>flying fox</i>
$E$	: Modulus elastisitas dawai <i>flying fox</i>
$\mu_k$	: Koefisien gaya gesek antara <i>sling</i> baja dan dawai <i>flying fox</i>
$b$	: Konstanta yang mewakili benda yang meluncur pada dawai <i>flying fox</i>
$d$	: Konstanta yang mewakili dawai <i>flying fox</i>
$\eta$	: Koefisien kekentalan (viskositas) dinamis zat alir
$g$	: Percepatan gravitasi
$f$	: Frekuensi dawai <i>flying fox</i>
$\lambda$	: Panjang gelombang dawai <i>flying fox</i>
$v$	: Kecepatan benda yang meluncur pada dawai <i>flying fox</i>
$A$	: Luas penampang dawai <i>flying fox</i>
$N$	: Gaya normal benda

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Program <i>Maple</i> untuk Analisis Dinamik Persamaan Lendutan di Sekitar Titik Kesetimbangan .....	55
Lampiran 2	Program <i>Maple</i> untuk Analisis Dinamik Persamaan Sudut di Sekitar Titik Kesetimbangan .....	56
Lampiran 3	Program Matlab untuk Simulasi Numerik Model Diskrit Lendutan Vibrasi Dawai <i>Flying Fox</i> .....	57
Lampiran 4	Program Matlab untuk Simulasi Numerik Model Diskrit Sudut Lendutan Vibrasi Dawai <i>Flying Fox</i> .....	58
Lampiran 5	Tabel Perhitungan Simulasi Numerik Model Diskrit Lendutan dan Sudut Lendutan Vibrasi Dawai <i>Flying Fox</i> .....	59

## ABSTRAK

Matsubah, Aniq Nur. 2023. **Analisis Dinamik Model Diskrit Vibrasi Dawai *Flying Fox***. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M. Pd., M. Si. (II) Dr. Abdussakir, M. Pd.

**Kata kunci:** Analisis Dinamik, Model Diskrit *Flying Fox*, Lentutan Dawai, Sudut Lentutan Dawai.

Model matematika vibrasi dawai *flying fox* telah melewati beberapa uji validasi model. Namun, dalam proses tersebut masih belum cukup untuk menyatakan model tersebut valid. Oleh karena itu, dalam penelitian ini dilakukan analisis dinamik model diskrit vibrasi dawai *flying fox* untuk mendapatkan model yang valid dan dapat diimplementasikan di kehidupan nyata. Penelitian ini bertujuan untuk mencari kestabilan dari perubahan lentutan dawai dan sudut lentutan dawai saat benda diluncurkan di sepanjang *flying fox*. Penelitian ini menggunakan model yang dikonstruksi oleh Kusumastuti, dkk. (2017). Terdapat dua model yang dianalisis yakni model diskrit lentutan dawai  $y(t)$  dan sudut lentutan dawai  $\theta(t)$ . Langkah-langkah analisis meliputi dilakukannya reduksi model, diskritisasi model, linierisasi model, mencari titik tetap, dan menganalisis kestabilan. Kestabilan dapat dilihat dari nilai eigennya. Berdasarkan penelitian yang dilakukan, didapatkan nilai eigen sebagai berikut:  $\lambda_1 = -0,005h + (0,14565h)i$ ,  $\lambda_2 = -0,005h - (0,14565h)i$ ,  $\lambda_3 = -0,005h + (0,1331480769h)i$ , dan  $\lambda_4 = -0,005h - (0,1331480769h)i$ . Hasil penelitian menunjukkan kondisi stabil (*sink*) karena semua nilai eigen yang didapatkan bernilai negatif kompleks. Sehingga dapat dikatakan bahwa lentutan dawai, kecepatan lentutan dawai, sudut lentutan dawai, dan kecepatan sudut lentutan dawai menunjukkan kondisi stabil.

## ABSTRACT

Matsubah, Aniq Nur. 2023. **Dynamic Analysis of Flying Fox String Vibration Discrete Model**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, M. Pd., M. Si. (II) Dr. Abdussakir, M. Pd.

**Keywords:** Dynamic analysis, discrete models of flying fox, string deflection, string deflection angle.

The mathematical model of flying fox string vibration has passed several model validations. However, in the process it is still not enough to declare that the model is valid. Therefore, in this study, a dynamic analysis of the vibrational discrete model of flying fox strings was carried out in order to obtain a valid model that can be implemented in real life. This study aims to find the stability of changes in string deflection and string deflection angle when objects are launched along the flying fox. This study used a model constructed by Kusumastuti, et al. in 2017. There are two models analyzed, namely the discrete model of string deflection  $y(t)$  and the deflection angle of the string  $\theta(t)$ . The analysis steps include model reduction, model discretization, model linearization, finding fixed points, and analyzing the stability. The stability can be seen from its eigenvalue. Based on the research conducted, the following eigenvalues were obtained:  $\lambda_1 = -0,005h + (0,14565h)i$ ,  $\lambda_2 = -0,005h - (0,14565h)i$ ,  $\lambda_3 = -0,005h + (0.1331480769h)i$ , and  $\lambda_4 = -0,005h - (0.1331480769h)i$ . The results showed stable (*sink*) conditions because all eigenvalues obtained were complex negative. Therefore, it can be said that the deflection speed of the strings, the speed of the deflection of the strings, the angle of the deflection of the strings, and the angular velocity of the deflection of the strings show stable conditions.

## مستخلص البحث

مثنوبة، أنيق نور ٢٠٢٣. التحليل الديناميكي للنماذج المنفصلة الاهتزازية لسلاسل الثعلب الطائر. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) آري كوسوماستوتي، الماجستير، (٢) الدكتور عبد الشاكر، الماجستير.

**الكلمات المفتاحية:** التحليل الديناميكي، النماذج المنفصلة من الثعلب الطائر، انحراف السلسلة، زاوية انحراف السلسلة.

اجتاز النموذج الرياضي لاهتزاز سلسلة الثعلب الطائر العديد من عمليات التحقق من صحة النماذج. ومع ذلك، في هذه العملية لا يزال لا إعلان النموذج صالحا. لذلك، في هذه الدراسة، تم إجراء تحليل الديناميكي للنموذج المنفصل الاهتزازي لأوتار الثعلب الطائر من أجل الحصول على نموذج صالح يمكن تنفيذه في الحياة الواقعية. تهدف هذه الدراسة إلى إيجاد استقرار التغيرات في انحراف الأوتار وزاوية انحراف الأوتار عند إطلاق الأجسام على طول الثعلب الطائر. وأنشأت كوسوماستوتي في بحثها وزملائها (٢٠١٧). هناك نموذجان تم تحليلهما، وهما النموذج المنفصل لانحراف السلسلة  $y(t)$  وزاوية انحراف السلسلة  $\theta(t)$  تتضمن خطوات التحليل وتقليل النموذج، وتمييز النموذج، وخطي النموذج، وإيجاد نقاط ثابتة، وتحليل الاستقرار. يمكن رؤية الاستقرار من قيمته الذاتية. بناء على هذا البحث، تم الحصول على القيمة الذاتية التالية:  $\lambda_1 = -0,005h + (0,14565h)i$ ،  $\lambda_2 = -0,005h - (0,14565h)i$ ،  $\lambda_3 = -0,005h + (0,1331480769h)i$ ، و  $\lambda_4 = -0,005h - (0,1331480769h)i$ . مستقرة لأن جميع القيم الذاتية التي تم الحصول عليها كانت سلبية معقدة. لذلك يمكن القول أن سرعة انحراف الأوتار، وسرعة انحراف الأوتار، وزاوية انحراف الأوتار، والسرعة الزاوية لانحراف الأوتار تظهر ظروفًا مستقرة.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

*Flying fox* merupakan kegiatan *outbond* atau wahana dengan cara meluncur dari suatu ketinggian menuju landasan yang tingginya lebih rendah melalui seutas tali atau *sling* baja (Isbayani, dkk., 2015). Tujuan dari wahana tersebut adalah untuk menguji dan melatih adrenalin serta keberanian mengambil resiko. *Flying fox* ini menjadi salah satu wahana yang sangat digemari, sehingga dalam rancangan pembangunan wahana ini sangat perlu diperhatikan demi keselamatan pemain. Berdasarkan data dari *database* Sistem Pengawasan Cedera Elektronik Nasional, diperkirakan terdapat 16.850 kasus cedera akibat wahana *flying fox*. Sebesar 52,3% tingkat cedera tahunan per satu juta populasi mengalami cedera akibat terjatuh dari wahana tersebut. Peningkatan kasus ini menunjukkan perlunya keamaan yang sesuai standar dan perhitungan yang akurat. Kecelakaan dalam wahana *flying fox* ini dapat diminimalisir dengan menganalisis secara efisien dalam pembangunan wahana maupun melalui pendekatan ilmiah yaitu pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang merepresentasikan suatu masalah atau fenomena-fenomena fisik dalam kehidupan menjadi pernyataan matematika, sehingga mudah dipahami serta dapat dilakukan perhitungan dengan tepat (Prayudi, 2006).

Model matematika vibrasi dawai *flying fox* merupakan model yang merepresentasikan suatu fenomena getaran sepanjang dawai yang disajikan dalam bentuk persamaan diferensial biasa bergantung waktu. Model tersebut

dikembangkan oleh Kusumastuti, dkk. (2017) melalui analisis gaya-gaya, energi-energi, dan hukum-hukum fisika yang terlibat pada masalah dawai *flying fox*. Model tersebut memformulasikan lendutan  $y(t)$  dan sudut lendutan  $\theta(t)$  untuk mengukur vibrasi terbaik dawai *flying fox*. Model tersebut dinyatakan sebagai persamaan diferensial biasa orde dua, yang secara numerik menghasilkan profil grafik lendutan  $y_1(t)$ , kecepatan lendutan  $y_2(t)$ , sudut lendutan  $\theta_1(t)$ , dan kecepatan sudut lendutan  $\theta_2(t)$ . Kekurangan dari simulasi model Kusumastuti, dkk. (2017) ini adalah bahwa grafik lendutan  $y_1(t)$  dan kecepatan lendutan  $y_2(t)$  belum realistis. Hal ini tercermin dari vibrasi yang belum berada di sekitar titik kesetimbangan dan amplitudo masih sangat besar. Oleh karena itu, diperlukan adanya validasi model matematika vibrasi dawai *flying fox* (Kusumastuti, 2017).

Uji validasi model merupakan tahapan terakhir untuk memeriksa apakah model layak digunakan dan sesuai dengan sistem nyata dengan berdasarkan konsistensi, korespondensi, dan representasi. Suatu model dikatakan valid apabila hasil dari model mampu menjelaskan secara aktual dan rinci dari masalah nyata. Pentingnya dilakukan uji validasi model adalah untuk memeriksa kelayakan model sehingga dapat diimplementasikan di kehidupan. Sebagai contoh model matematika pada masalah vibrasi dawai *flying fox*.

Uji validasi dapat dilakukan dengan beberapa metode. Penelitian Sari (2018) membandingkan antara solusi analitik dan solusi numerik dari model matematika vibrasi dawai *flying fox*. Hasil dari penelitian tersebut masih belum cukup untuk memenuhi syarat kevalidan suatu model. Penelitian Makfiroh (2021) melakukan analisis kestabilan pada model matematika vibrasi dawai *flying fox*. Metode yang belum pernah dikembangkan sebelumnya pada model ini adalah

melakukan analisis dinamik model diskrit vibrasi dawai *flying fox*. Oleh karena itu, fokus penelitian ini adalah menganalisis kestabilan atau analisis dinamik dari model diskrit vibrasi dawai *flying fox*. Analisis dinamik dilakukan dengan menganalisis titik kesetimbangan, analisis nilai eigen, dan juga menganalisis hasil simulasi untuk mengamati perilaku model. Dari model tersebut dapat menggambarkan vibrasi dawai *flying fox* dengan membagi dawai menjadi sejumlah titik-titik yang terpisah. Model ini memperhitungkan sifat-sifat dari getaran seperti amplitudo, frekuensi, dan modus getar. Hal tersebut dapat membantu dalam memahami sifat-sifat vibrasi sekaligus pola yang diciptakan oleh getaran pada dawai *flying fox*.

Teori-teori yang terkait dalam penelitian ini adalah kajian-kajian mengenai titik kesetimbangan, nilai eigen, dan simulasi. Dari tiga hal tersebut menjadi satu kesatuan langkah-langkah untuk melakukan analisis dinamik atau analisis kestabilan pada model diskrit. Pada tahapan simulasi juga dapat dilakukan dengan cara simulasi numerik atau simulasi metode *state-space* dan lain-lainnya untuk mendapatkan gambaran atau solusi pada titik waktu diskrit. Solusi model diskrit dapat memberikan hasil yang terdiri dari himpunan keadaan diskrit yang berubah secara diskrit dalam ruang dan waktu.

Penelitian yang relevan dengan Kusumastuti, dkk. (2017) adalah penelitian Tajcova (1997) tentang model matematika yang menggambarkan perilaku dinamis jembatan gantung seperti jembatan Tacoma Narrow. Penelitian ini dilakukan setelah fenomena runtuhnya jembatan Tacoma Narrow, dengan tujuan untuk menentukan dalam kondisi apa supaya situasi serupa tidak terulang kembali dan untuk mengetahui parameter konstruksi jembatan yang aman. Penelitian tersebut berfokus pada pembentukan model dan interpretasi parameter, sehingga didapatkan

dua persamaan diferensial biasa yang merepresentasikan perpindahan getar tali dan perpindahan balok lentur pada jalan jembatan. Hal yang sama dari penelitian Tajcova (1997) dan Kusumastuti, dkk. (2017) adalah hasil yang diperoleh, yakni berupa dua persamaan diferensial biasa yang menggambarkan lendutan dan sudut lendutan, sedangkan perbedaannya terletak pada posisi benda yang melewati. Oleh sebab itu, penelitian Tajcova menjadi rujukan dalam penelitian ini (Tajcova & Plzen, 1997).

Penelitian lain yang digunakan sebagai rujukan adalah model matematika McKenna (1999) tentang model matematika jembatan Tacoma Narrow. Pengamatan dilakukan agar mendapatkan model realistis dan akurat yang mereplikasikan fenomena runtuhnya jembatan Tacoma Narrow. Pada model tersebut mengkaji dua persamaan diferensial biasa yang mengatur gerakan vertikal dan torsi dari penampang jembatan dengan melakukan perhitungan secara numerik. Hasil yang didapat berupa profil grafik yang merepresentasikan perilaku vibrasi pada titik setimbang. Dari hasil tersebut, dapat digunakan sebagai acuan atau perbandingan dengan hasil penelitian Kusumastuti, dkk. (2017) (McKenna & Moore, 1999).

Validasi model diharapkan mampu menghasilkan kesimpulan berupa model yang kontekstual, supaya model dapat diimplementasikan pada kehidupan nyata. Dengan begitu, salah satu manfaat yang diperoleh yakni dapat mengurangi maupun menghindari resiko kesalahan perhitungan dalam merumuskan bentuk formula *flying fox*. *Flying fox* sendiri juga dapat dikembangkan untuk teknologi berbasis *flying fox* atau penyelamatan korban dari ketinggian tertentu ke daerah yang lebih

rendah. Selain itu, *flying fox* dapat dinikmati dengan aman sebagai sarana *refreshing* dan permainan yang mengandung unsur tantangan.

Urgensi dilakukannya validasi model dan manfaat tersebut menjadi motivasi penelitian ini. Oleh karena itu, penelitian ini perlu dilakukan untuk mendapatkan model yang valid sekaligus interpretasinya di dalam matematika maupun di kehidupan nyata. Merujuk pada QS. Al-Hasyr ayat 18 yang artinya:

*“Wahai orang-orang yang beriman! Bertakwalah kepada Allah dan hendaklah setiap orang memperhatikan apa yang telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat), dan bertakwalah kepada Allah. Sungguh, Allah Mahateliti terhadap apa yang kamu kerjakan.” (QS. Al-Hasyr/59:18)*

Tafsir dari ayat tersebut oleh Ibnu Katsir khususnya pada potongan ayat yang artinya *“dan hendaklah setiap orang memperhatikan apa yang telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat)”* menjelaskan bahwa kata *ghad* atau hari esok memiliki banyak arti, dapat diartikan sebagai hari akhir agar manusia berhati-hati dalam perbuatannya. Pada hari akhir, manusia akan diminta pertanggungjawaban atas apa yang telah diperbuat. Ayat ini juga disandingkan dengan *qoul “haasibuu anfusakum qabla an tuhaasabuu”* yang artinya Hisablah (intropeksi) diri kalian sebelum nanti kalian dihisab (di hari akhir) (Zuhaili, 1998).

Dari potongan ayat tersebut menggambarkan bahwa manusia harus memperhatikan apa yang telah diperbuatnya, melakukan intropeksi diri, dan perbaikan. Dengan begitu, motivasi dari ayat tersebut sesuai dengan penelitian ini, yakni melakukan validasi atau pemeriksaan ulang terhadap model yang diteliti dengan analisis dinamik model diskrit vibrasi dawai *flying fox*. Penelitian ini juga didasari betapa pentingnya melakukan validasi maupun perbaikan ulang sebelum diterapkan di kehidupan, sehingga tidak ada pihak yang dirugikan atau membahayakan diri.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pemaparan latar belakang di atas, rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana analisis dinamik model diskrit vibrasi dawai *flying fox*?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang ditentukan, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui analisis dinamik model diskrit vibrasi dawai *flying fox*.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapat dari penelitian ini yakni mendapatkan hasil analisis dinamik model diskrit vibrasi dawai *flying fox* serta diharapkan dapat memanajemen  $y(t)$  dan  $\theta(t)$  agar semisal ada bencana atau perang, layanan teknologi berbasis *flying fox* yang mengangkut orang atau barang dari gedung ke gedung dapat diterapkan secara saintis.

## 1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah model vibrasi dawai *flying fox* yang dikonstruksi oleh Kusumastuti, dkk (2017), yaitu:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\delta_1 \frac{dy(t)}{dt} - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y(t)}{m_d L} + \frac{m_b g}{m_d}$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\delta_2 \frac{d\theta(t)}{dt} - \frac{6k}{m_d} \left( \frac{\sin \theta(t)}{\cos^3 \theta(t)} \right) + 0,05 \sin(t)$$

1. Nilai parameter yang digunakan pada penelitian ini merujuk pada penelitian Kusumastuti, dkk (2017).
2. Diskritisasi menggunakan metode *Forward Euler*.
3. Analisis kestabilan hanya di sekitar titik tetap saja.

## BAB II

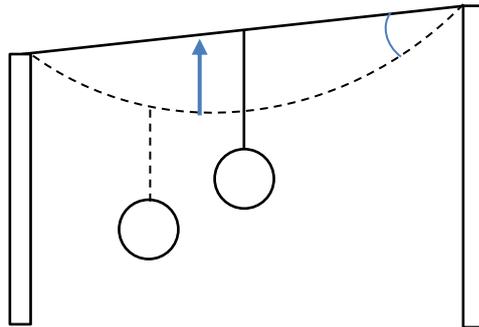
### KAJIAN TEORI

#### 2.1 Teori Pendukung

##### 2.1.1 Model Matematika Vibrasi Dawai *Flying Fox*

Model matematika adalah deskripsi matematis yang menggambarkan suatu fenomena di kehidupan nyata, baik secara fisik, maupun sosiologi. Secara umum, model matematika ditulis dalam bentuk persamaan diferensial biasa ataupun persamaan diferensial parsial (Zill & Wright, 2013). Model matematika didapat dengan melakukan tahapan pemodelan matematika. Dalam pemodelan matematika diperlukan konsep-konsep ilmiah pada permasalahan dalam bentuk persamaan matematika. Jadi, pemodelan masalah membutuhkan penguasaan matematika dan konsep ilmiah yang baik (Yakin, 2019).

Salah satu permasalahan yang diangkat menjadi suatu model adalah model matematika vibrasi dawai *flying fox*. Model tersebut telah dikonstruksi oleh Kusumastuti, dkk. (2017) untuk lendutan dawai  $y(t)$  dan sudut dawai  $\theta(t)$ . Langkah awal yang dilakukan adalah mengidentifikasi masalah vibrasi dawai *flying fox*. Komponen utama dalam permainan *flying fox* yaitu dawai yang diikat pada dua penyangga yang memiliki ketinggian berbeda (Isbayani, dkk., 2015). Kondisi ini mengakibatkan adanya kemiringan dawai *flying fox* atau bisa disebut dengan besar sudut dawai *flying fox*. Hal tersebut bertujuan untuk memudahkan benda yang meluncur pada dawai *flying fox* lebih mudah. Perhatikan Gambar 2.1 di bawah ini:



**Gambar 2.1** Ilustrasi *Flying Fox*

Pada Gambar 2.1, dawai diikat pada dua penyangga dengan tinggi yang berbeda. Penting diperhatikan juga untuk bahan yang digunakan pada dawai *flying fox* yaitu kabel baja, sehingga dawai cenderung kaku dan dapat menahan beban yang melintas sesuai dengan batas elastisitasnya. Permukaan dawai *flying fox* yang berbahan kawat baja cenderung licin akan tetapi perlu diperhatikan juga koefisien gaya gesek agar benda dapat meluncur dengan tetap menjaga kecepatannya. Gesekan antara dawai dengan benda tidak menempel secara langsung, akan tetapi terdapat *sling* baja yang menghubungkan antara keduanya.

Mengacu pada Kusumastuti, dkk. (2017), parameter yang terlibat pada persamaan model matematika vibrasi dawai *flying fox* sebagai berikut:

1. Massa benda *flying fox* ( $m_b$ ) merupakan besaran massa yang meluncur pada dawai *flying fox*. Satuan massa benda adalah kilogram ( $Kg$ ).
2. Massa dawai *flying fox* ( $m_d$ ) merupakan besaran massa dawai yang berbahan kawat baja. Satuan massa dawai *flying fox* adalah kilogram ( $Kg$ ).
3. Panjang dawai *flying fox* ( $l$ ) merupakan jarak antara dua buah penyangga yang kemudian dihubungkan dengan dawai *flying fox*. Satuan panjang dawai *flying fox* adalah meter ( $m$ ).

4. Koefisien gaya gesek dawai *flying fox* ( $\mu_k$ ) merupakan konstanta yang menyatakan besaran interaksi dawai *flying fox* dengan sling baja. Koefisien gaya gesek tersebut adalah 0,57 (Young & Friedman, 2002).
5. Konstanta ( $b$ ) merupakan besaran yang mewakili bentuk benda yang bergesekan dengan udara. Dalam penelitian ini, benda diasumsikan sebagai sistem bundar, sehingga konstanta  $b = 6\pi r_b$ , dengan  $r_b$  adalah jari-jari benda. Semakin besar jari-jari benda, maka semakin besar pula gaya hambatannya dengan fluida (udara).
6. Koefisien viskositas ( $\eta$ ) merupakan koefisien kekentalan fluida atau zat alir. Dalam penelitian ini, jenis fluida atau zat alir yang dipertimbangkan adalah udara dengan koefisien viskositas sebesar ( $0,018 \times 10^{-3} \text{ N s/m}^2$ ) (Arifudin, 2007).
7. Percepatan gravitasi ( $g$ ) merupakan percepatan yang diakibatkan oleh gaya tarik bumi. Nilai dari percepatan gravitasi adalah  $9,8 \text{ m/s}^2$ .
8. Frekuensi gerak dawai *flying fox* ( $f$ ). Satuan frekuensi gerak dawai *flying fox* adalah  $\text{Hz}$  atau  $1/\text{s}$ .
9. Panjang gelombang dawai *flying fox* ( $\lambda$ ). Satuan panjang gelombang dawai *flying fox* adalah meter ( $\text{m}$ ).
10. Kecepatan benda meluncur pada dawai *flying fox* ( $v$ ) dengan satuan  $\text{m/s}$ .
11. Modulus elastisitas dawai *flying fox* ( $E$ ) merupakan konstanta yang menyatakan ukuran kelenturan dawai *flying fox* berbahan kawat baja. Satuan modulus elastisitas dawai *flying fox* adalah  $\text{N/m}^2$ .
12. Luas penampang dawai *flying fox* ( $A$ ) dengan satuan  $\text{m}^2$ .

Variabel yang terlibat pada model matematika vibrasi dawai *flying fox* ini terbagi menjadi dua macam yaitu variabel bebas dan variabel terikat. Variabel bebas berupa waktu ( $t$ ) karena vibrasi dawai pada penelitian ini bergantung pada waktu ( $t$ ). Sedangkan variabel terikatnya yaitu lendutan dawai *flying fox* ( $y$ ), besar sudut ( $\theta$ ), kecepatan gerak dawai *flying fox* saat berosilasi ( $\frac{dy}{dt}$ ) yang satuannya adalah  $m/s$ , percepatan gerak dawai *flying fox* saat berosilasi ( $\frac{d^2y}{dt^2}$ ) yang satuannya adalah  $m/s^2$ , kecepatan sudut dawai *flying fox* ( $\frac{d\theta}{dt}$ ) dengan satuannya adalah  $m\ rad/s$ , dan percepatan sudut dawai *flying fox* ( $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ ) yang terbentuk saat benda meluncur pada dawai *flying fox*, dengan satuannya adalah  $m\ rad/s^2$ .

Nilai parameter yang digunakan dirujuk dari Kusumastuti, dkk. (2017) seperti pada Tabel 2.1 berikut:

**Tabel 2.1** Daftar Nilai Parameter (Kusumastuti, dkk., 2017)

No	Parameter	Definisi	Nilai	Satuan
1.	$m_b$	Massa benda	50	$kg$
2.	$r_b$	Jari-jari benda	0,25	$m$
3.	$b$	Konstanta benda ( $b = 6\pi r_b$ )	4,71	
4.	$m_d$	Massa dawai	50	$kg$
5.	$r_d$	Jari-jari dawai	0,006	$m$
6.	$E$	Modulus elastisitas dawai	$10^7$	$N/m^2$
7.	$A$	Luas penampang dawai ( $A = \pi(r_d)^2$ )	0,00008654625	$m$
8.	$L$	Panjang dawai <i>flying fox</i>	100	$m$
9.	$k_p$	Konstanta pegas	8,654625	$N/m$
10.	$\mu_k$	Koefisien gaya gesek dawai <i>flying fox</i>	0,57	
11.	$g$	Percepatan gravitasi	9,8	$m/s^2$
12.	$v$	Kecepatan benda	15	$m/s$

13.	$\eta$	Koefisien viskositas	$0,018 \times 10^{-3}$	$Ns/m^2$
14.	$\delta$	Frekuensi dawai	$\frac{1}{100}$	$Hz$

Dalam memodelkan permasalahan vibrasi dawai *flying fox*, diperlukan analisis beberapa gaya dan energi yaitu energi potensial pegas, energi potensial berat, energi potensial gesek, energi potensial tegangan dawai, energi kinetik dawai, dan energi kinetik benda. Setelah didapatkan energi potensial dan energi kinetik yang bekerja di sepanjang dawai *flying fox*, maka akan ditentukan persamaan Lagrange sebagai berikut

$$\begin{aligned}
L &= EK_M - EP_M \\
&= \left( \frac{1}{2} m_d \left( \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{12} l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \right) - \left( \frac{1}{4} k l^2 (\tan^2 \theta + 2) \right) \\
&\quad + \left( m_b g + d\eta \left( \frac{dy}{dt} \right) \right) y - (\mu_k N + b\eta v - 2EA) \sqrt{y^2 + \frac{1}{4} l^2} \quad (2.1)
\end{aligned}$$

atau dapat ditulis ulang menjadi

$$\begin{aligned}
L &= EK_M - EP_M \\
&= \left( \frac{1}{2} m_d \left( \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{12} l^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \right) - \left( \frac{1}{4} k l^2 \left( \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 + 2 \right) \right) \\
&\quad + \left( m_b g + d\eta \left( \frac{dy}{dt} \right) \right) - (\mu_k N + b\eta v - 2EA) \sqrt{y^2 + \frac{1}{4} l^2} \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan Lagrange (2.2), gerak vibrasi pada dawai *flying fox* dapat ditulis menjadi

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{d\theta}{dt} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{6k}{m_d} \left( \frac{\sin \theta}{(\cos \theta)^3} \right) \quad (2.3)$$

dan

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dy}{dt} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}} y + \frac{m_b g}{m_d} = 0 \quad (2.4)$$

Persamaan (2.3) dan (2.4) masing-masing dipengaruhi oleh  $\delta_1 \frac{dy}{dt}$  dan  $\delta_2 \frac{d\theta}{dt}$ , dengan  $\delta_1$  dan  $\delta_2$  sebagai frekuensi dawai *flying fox* saat beresilasi dan terjadi gerak torsional. Sehingga persamaan (2.3) dan (2.4) dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\delta_1 \frac{dy}{dt} - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} y + \frac{m_b g}{m_d} \quad (2.5)$$

dan

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\delta_2 \frac{d\theta}{dt} - \frac{6k}{m_d} \left( \frac{\sin \theta}{(\cos \theta)^3} \right) \quad (2.6)$$

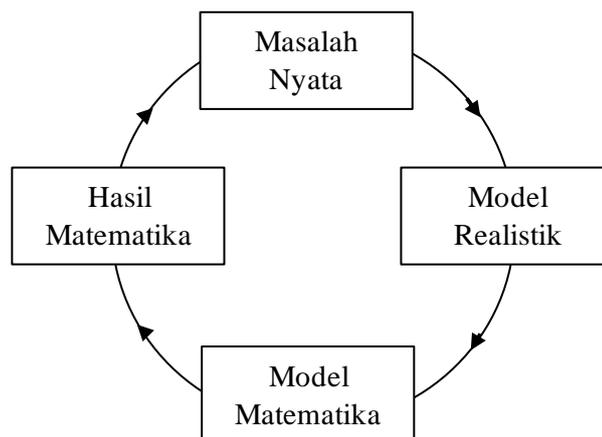
Pada persamaan (2.6) diberikan suatu gaya dari luar yang mempengaruhi percepatan gerak sudut dawai *flying fox* berupa fungsi  $f(t) = 0,05 \sin t$ , seperti halnya pada model matematika jembatan Tacoma Narrow yang dikonstruksi oleh McKenna dan Moore (1999). Sehingga persamaan (2.6) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\delta_2 \frac{d\theta}{dt} - \frac{6k}{m_d} \left( \frac{\sin \theta}{(\cos \theta)^3} \right) + 0,05 \sin t \quad (2.7)$$

Dari persamaan (2.5) dan (2.7) membentuk persamaan lendutan dawai  $y(t)$  dan sudut dawai  $\theta(t)$ .

### 2.1.2 Uji Validasi Model

Pemodelan matematika adalah teknik untuk merepresentasikan sistem yang kompleks ke dalam model matematika. Dengan kata lain, pemodelan matematika adalah sistem persamaan yang dapat mewakili masalah kompleks yang diamati (Meksianis & Ndi, 2022). Menurut Smith (1996), dalam menghadapi suatu permasalahan dan proses menyelesaikan pemodelan matematika dibutuhkan penalaran, penyelidikan, dan juga langkah terstruktur secara matematis. Berdasarkan pernyataan tersebut mengatakan bahwa pemodelan matematika merupakan suatu proses terus-menerus yang membentuk siklus, proses pemodelan digambarkan melalui bagan berikut:



**Gambar 2.2** Siklus Pemodelan Matematika (Kehle, 1998)

Pada Gambar 2.2 terdapat beberapa tahapan dalam satu siklus, dimulai dari masalah nyata yang akan disederhanakan menjadi model realistik. Model realistik akan diabstraksi menjadi bentuk model matematika. Dari model matematika didapatkan hasil matematis yang menginterpretasikan sebuah pemecah dari masalah nyata.

Model matematika didapatkan dengan melakukan beberapa tahapan. Tahapan yang diperlukan untuk membentuk suatu model matematika terdiri dari

tujuh tahapan. Pertama, dilakukan identifikasi masalah untuk memahami masalah yang akan dirumuskan. Kedua, membangun asumsi-asumsi dengan mengidentifikasi variabel yang terlibat, hal tersebut diperlukan untuk penyederhanaan kompleksitas dari masalah. Ketiga, mengkonstruksi model dengan membuat diagram alur atau melalui hubungan fungsional. Selanjutnya yaitu menganalisis model dengan melakukan optimasi atau simulasi sehingga didapatkan hasil. Dari hasil tersebut kemudian diinterpretasikan untuk mengetahui hasil model tersebut rasional atau tidak. Kemudian dilakukan validasi model sebelum model tersebut diimplementasikan. Tahap terakhir yaitu implementasi model dengan syarat hasil validasi model memenuhi syarat, rasional, dan dapat diterima (Pagalay, 2009).

Tahapan yang tidak kalah penting yakni validasi model. Model harus divalidasi sebelum model digunakan untuk menyimpulkan kejadian nyata. Pertimbangan utama dilakukannya validasi model adalah efisiensi dan efektivitas model dalam memecahkan permasalahan yang dihadapi. Berdasarkan tahapan pemodelan matematika, validasi model dilakukan ketika model melewati tahap analisis. Hal tersebut bertujuan untuk memperkuat model agar dapat dilanjut ke tahap berikutnya. Model dikatakan valid jika berhasil mencapai tujuan yang diinginkan. Model yang valid tidak hanya mengikuti prinsip-prinsip teoritis yang sesuai, tetapi juga memberikan interpretasi hasil yang diperoleh mendekati penerapan. Jika sebagian besar standar verifikasi dapat dilewati, model dapat digunakan, jika tidak, struktur model harus dibentuk ulang (Sargent, 1998).

Validasi model dapat ditempuh dengan uji validasi kinerja dan uji sensitivitas model. Pertama, cara melakukan validasi kinerja model adalah

memvalidasi kinerja model dengan data empirik, untuk melihat sejauh mana kesesuaian perilaku *output* model dengan perilaku nyata. Kedua, uji sensitivitas model adalah intervensi parameter input model atau struktur model untuk melihat seberapa sensitif model terhadap perubahan, sehingga dapat diamati dampak dari perubahan terhadap kinerja model. Terdapat dua uji sensitivitas model, yaitu intervensi fungsional dan intervensi struktural. Intervensi fungsional adalah intervensi terhadap parameter model, sedangkan intervensi struktural adalah intervensi yang mempengaruhi hubungan antar unsur atau struktur model (Muhammadi, 2001).

### 2.1.3 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang melibatkan turunan biasa dari satu atau lebih dari satu variabel (Ross, 2010).

**Definisi 1.** Persamaan diferensial biasa linier merupakan persamaan diferensial orde-  $n$  yang memuat turunan biasa dan hanya memiliki satu variabel bebas  $t$  dan variabel terikat  $y$ . Secara umum bentuk persamaan diferensial linier sebagai berikut:

$$a_n(t) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dy}{dx} + a_0(t)y = F(t) \quad (2.8)$$

dengan  $a_n$  tidak nol,  $a_n, a_{n-1}, a_1, a_0$  adalah koefisien dan  $F$  adalah fungsi kontinu pada interval  $a \leq t \leq b$  (Ross, 1984).

Contoh persamaan diferensial biasa linier adalah

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\delta_1 \frac{dy}{dt} - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{\sqrt{y^2 + \frac{1}{4}l^2}} y + \frac{m_b g}{m_d} = 0 \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) merupakan contoh persamaan diferensial biasa linier orde dua dengan variabel bebas  $t$  dan variabel terikat  $y$  serta tidak mengandung perkalian antar variabel. Persamaan (2.9) adalah bentuk dari persamaan lendutan vibrasi dawai *flying fox* yang bersifat linier, sehingga tidak perlu dilakukan linierisasi untuk melakukan analisis dinamik model diskrit.

**Definisi 2.** Persamaan diferensial biasa non linier merupakan persamaan diferensial yang memuat perkalian antar variabel tak bebas dan turunannya serta memuat fungsi non linier seperti fungsi trigonometri, fungsi eksponensial, dan fungsi aloritmik (Ross, 1984).

Contoh persamaan diferensial biasa non linier adalah

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\delta_2 \frac{d\theta}{dt} - \frac{6k}{m_d} \left( \frac{\sin \theta}{(\cos \theta)^3} \right) + 0,05 \sin t \quad (2.10)$$

Persamaan (2.10) merupakan persamaan diferensial non linier karena mengandung fungsi trigonometri yakni  $\frac{\sin \theta}{(\cos \theta)^3}$ . Oleh karena itu, persamaan (2.10) merupakan persamaan sudut vibrasi dawai *flying fox* berbentuk non linier, yang mana untuk melakukan penelitian berupa analisis dinamik model diskrit diperlukan adanya linierisasi terlebih dahulu.

Suatu persamaan diferensial memiliki dua solusi dalam penyelesaian analitik yaitu solusi umum dan solusi khusus. Solusi umum merupakan solusi yang terdiri dari jumlah fungsi bebasnya sesuai dengan orde persamaan diferensial yang diselesaikan. Solusi khusus merupakan solusi yang didapatkan dengan mensubstitusikan nilai awal ke dalam fungsi bebas dari solusi umum (Kartono, 2012). Diberikan persamaan diferensial nonhomogen untuk dicari solusi analitiknya sebagai berikut:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} + \theta = \sin t$$

Atau dapat ditulis kembali menjadi  $\theta'' + \theta' + \theta = \sin t$

Pertama, tentukan solusi umum  $\theta_h(t)$ . Perhatikan bagian persamaan diferensial linier homogen memiliki persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

Untuk  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  ditentukan menggunakan rumus ABC persamaan kuadrat

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= -\frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ &= -\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\end{aligned}$$

Didapatkan  $\lambda_{1,2} = v \pm iw$  dengan  $i = \sqrt{-1}$ , maka  $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $v = -\frac{1}{2}$ ,

$w = \frac{\sqrt{3}}{2}$  dan basis solusi persamaan diferensial adalah

$$\begin{aligned}\theta_1 &= e^{vt} \cos wt \text{ dan } \theta_2 = e^{vt} \sin wt \\ \theta_1 &= e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \text{ dan } \theta_2 = e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\end{aligned}$$

Maka solusi umum persamaan diferensial tersebut adalah

$$\begin{aligned}\theta_h(t) &= C_1\theta_1 + C_2\theta_2 \\ &= C_1e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\end{aligned}$$

Karena persamaan diferensial berupa linier nonhomogen, maka  $r(t) \neq 0$  dan  $r(t) = \sin t$ , serta diferensial dari fungsi eksponen menghasilkan dirinya sendiri, maka fungsi  $\theta_k(t)$  akan dimisalkan

$$\theta_k(t) = A \sin t + B \cos t$$

Dengan  $A$  dan  $B$  koefisien yang akan ditentukan.

Turunan dari  $\theta_k$  adalah

$$\theta_k'(t) = A \cos t - B \sin t$$

$$\theta_k''(t) = -A \sin t - B \cos t$$

Kemudian substitusikan ke  $\theta'' + \theta' + \theta = \sin t$  maka diperoleh

$$\theta'' + \theta' + \theta = (-A - B + A + B - 1) \sin t + (-B + A + B) \cos t = 0$$

Saat  $t = 0$  diperoleh  $A = 0$  dan saat  $t = \frac{\pi}{2}$  diperoleh  $B = -1$ , jadi  $\theta_k(y) = -\cos t$

Maka solusinya adalah

$$\theta = \theta_h(t) + \theta_k(t)$$

$$= C_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos t$$

#### 2.1.4 Metode Euler

Metode Euler merupakan metode beda hingga yang menggunakan pendekatan turunan pertama dengan beda maju atau mundur. Metode Euler beda maju atau metode *Forward Euler* adalah salah satu skema diskrit yang sederhana untuk mendiskritisasi suatu persamaan. Pada metode Euler beda maju, turunan pertama  $\frac{dx}{dt}$  dan  $\frac{dy}{dt}$  diganti sebagai berikut dengan  $h > 0$  untuk ukuran langkah

$$\frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h} = f(x(t_n), y(t_n)) \quad (2.11)$$

$$\frac{y(t_n + h) - y(t_n)}{h} = g(x(t_n), y(t_n)) \quad (2.12)$$

atau dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut untuk diskritisasi dengan metode *Forward Euler*

$$x(t_n + h) = x(t_n) + hf(x(t_n), y(t_n)) \quad (2.13)$$

$$y(t_n + h) = y(t_n) + hg(x(t_n), y(t_n))$$

Misalkan  $x(t_n) = x_n$ ,  $x(t_n + h) = x_{n+1}$ ,  $y(t_n) = y_n$ , dan  $y(t_n + h) = y_{n+1}$ , maka sistem persamaan (2.12) ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hg(x_n, y_n) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Demikian juga pada pembentukan model diskrit dari model vibrasi dawai *flying fox* dilakukan dengan mentransformasikan persamaannya satu persatu (Boyce & Diprima, 2005).

### 2.1.5 Sistem Dinamik Diskrit

Sistem dinamik merupakan sistem yang dibentuk oleh persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial. Sistem dinamik dibagi menjadi dua sesuai penerapannya, yaitu sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu. Sistem dinamik diskrit dinyatakan dalam persamaan beda sebagai berikut

$$x_{n+1} = f(x_n), t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^n \tag{2.15}$$

Sistem dinamik diskrit dua dimensi dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n) \end{aligned} \tag{2.16}$$

dengan  $f$  dan  $g$  disebut fungsi pembangkit sistem (Elaydi, 2005).

Dikatakan sistem dinamik diskrit linier jika dalam sistem persamaan tidak mengandung perkalian antara variabel tak bebasnya. Sedangkan sistem dinamik diskrit non linier memuat perkalian antara variabel tak bebasnya (Elaydi, 2005).

Bentuk sistem dinamik diskrit sering dikaitkan dengan bentuk sistem persamaan beda linier yang terdiri dari suku ke- $k$  sebagai berikut

$$x_1(n+1) = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \dots + a_{1k}x_k(n)$$

$$x_2(n+1) = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2k}x_k(n) \quad (2.17)$$

$$\vdots$$

$$x_k(n+1) = a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + \cdots + a_{kk}x_k(n)$$

Sistem persamaan (2.17) dapat ditulis kembali dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{aligned} \vec{x}(n+1) &= \begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ \vdots \\ x_k(n+1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1k}x_k(n) \\ a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2k}x_k(n) \\ \vdots \\ a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + \cdots + a_{kk}x_k(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_k(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_k(n) \end{pmatrix} \\ &= \vec{A}(\vec{x}(n)) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dengan demikian, persamaan (2.18) sebagai persamaan sistem dinamik diskrit dengan fungsi pembangkit

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

### 2.1.6 Linierisasi Persamaan Diferensial

Dalam mempelajari perilaku sistem dinamik model diskrit dilakukan linierisasi pada persamaan diferensial yang bersifat non linier. Diberikan sistem persamaan diferensial dua variabel sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.19}$$

Pendekatan linier fungsi  $f(x, y)$  dan  $g(x, y)$  diperoleh dengan mengekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \\ &\quad + \eta_1(x_n, y_n) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \\ &\quad + \eta_2(x_n, y_n)\end{aligned}\tag{2.20}$$

dengan  $\eta_1(x_n, y_n)$  dan  $\eta_2(x_n, y_n)$  adalah suku sisa yang memenuhi

$$\lim_{(x_n, y_n) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_j(x_n, y_n)}{\|\vec{w}_n\|} = 0$$

Mengingat  $(x^*, y^*)$  adalah titik kesetimbangan, maka sistem persamaan (2.20)

dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x^* + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \\ y_{n+1} &= y^* + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*)\end{aligned}\tag{2.21}$$

Diasumsikan  $x_n - x^* = u_n$  dan  $y_n - y^* = v_n$ , maka sistem persamaan (2.21) dapat didekati dengan

$$\vec{w}_{n+1} = J^* \vec{w}_n \quad \text{dengan} \quad \vec{w}_n = (u_n, v_n) \quad \text{dan} \quad J^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} \end{bmatrix} \quad \text{yang}$$

merupakan matriks Jacobi di titik  $(x^*, y^*)$ .

Sedangkan untuk pendekatan linier fungsi non linier satu variabel diperoleh dengan mengekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$f(x) \approx f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots \quad (2.22)$$

Contoh proses linierisasi fungsi satu variabel:

$$f(x) = \sin(x)$$

Maka,  $\sin(x)$  dihampiri dengan deret Taylor sebagai berikut dengan  $c = 0$ :

$$\sin(x) \approx \sin(0) + \frac{\cos(0)}{1!}(x - 0)$$

$$\sin(x) \approx x$$

Dengan demikian, persamaan diferensial yang awalnya bersifat non linier menjadi linier (Boyce & Diprima, 2005).

### 2.1.7 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

**Definisi 3.** Jika  $A$  adalah matriks  $n \times n$  maka vektor tak nol di  $\mathbb{R}^n$  disebut vektor eigen dari  $A$  jika  $Ax$  sama dengan perkalian suatu skalar dengan  $x$ , yaitu

$$Ax = \lambda x \quad (2.23)$$

skalar  $\lambda$  disebut nilai eigen dari  $A$ .

Untuk menentukan nilai eigen dari matriks  $A$  berukuran  $n \times n$  maka dapat ditulis

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (2.24)$$

Persamaan (2.24) disebut persamaan karakteristik dari matriks  $A$  dan akar-akar persamaan yakni  $\lambda$  dinamakan nilai-nilai eigen atau akar-akar karakteristik.

**Contoh:**

Misalkan diberikan persamaan diferensial linier sebagai berikut

$$\dot{x} = 3x$$

$$\dot{y} = 8x - y$$

**Langkah I.** Menentukan nilai-nilai eigen

Dicari nilai-nilai eigen dari persamaan diferensial tersebut, sehingga dapat ditulis ulang menjadi matriks  $2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

Berdasarkan definisi maka diperoleh

$$\det(\lambda I - \mathbf{A}) = 0$$

Kemudian, substitusikan matriks  $\mathbf{A}$  dan matriks identitas

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

Setelah itu, matriks identitas dikalikan dengan skalar  $\lambda$  dan juga dilakukan operasi aljabar pengurangan pada matriks, sehingga diperoleh

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

Selanjutnya hitung determinan dari matriks tersebut untuk menghasilkan persamaan karakteristik

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

Sehingga didapat nilai-nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda_1 = 3 \text{ dan } \lambda_2 = -1$$

Jadi, nilai-nilai eigen dari matriks  $\mathbf{A}$  adalah  $\lambda_1 = 3$  dan  $\lambda_2 = -1$ .

**Langkah II.** Menentukan vektor eigen

Vektor eigen didapatkan dengan menghitung

$$(\lambda I - \mathbf{A})x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk nilai eigen pertama  $\lambda = 3$  disubstitusikan ke dalam matriks, sehingga menghasilkan

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian dilakukan perhitungan aljabar untuk mendapatkan vektor eigen

$$-8x_1 + 4x_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}t \text{ atau } x_2 = t, t \in \mathbb{R}$$

Didapatkan vektor eigen:  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t$  membentuk ruang eigen

Jadi,  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$  adalah basis untuk ruang eigen dengan  $\lambda = 3$

Ruang eigen dapat ditulis sebagai  $E(3) = \{x = t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}\}$

Untuk nilai eigen kedua  $\lambda = -1$  disubstitusikan ke dalam matriks, sehingga menghasilkan

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian diselesaikan menggunakan eliminasi Gauss dari matriks berikut

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

didapatkan nilai vektor eigen

$$x_1 = 0 \text{ atau } x_2 = t, t \in \mathbb{R}$$

Vektor eigen:  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$  membentuk ruang eigen

Jadi,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  adalah basis untuk ruang eigen dengan  $\lambda = -1$

Ruang eigen dapat ditulis sebagai  $E(-1) = \{x = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}\}$

### 2.1.8 Kestabilan Sistem Dinamik Diskrit

Matriks  $A$  berukuran  $2 \times 2$  yang dapat ditulis sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Nilai-nilai eigen dari matriks  $A$  diperoleh dari akar-akar persamaan karakteristik

$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$ , dengan  $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  dan  $\tau = a_{11} + a_{22}$ .

**Kasus I:**  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ , dengan  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

1. Jika  $|\lambda_1| < 0$  dan  $|\lambda_2| < 0$ , maka titik kesetimbangan sistem bersifat stabil.
2. Jika  $|\lambda_1| > 0$  dan  $|\lambda_2| > 0$ , maka titik kesetimbangan sistem bersifat tak stabil.
3. Jika  $|\lambda_1| > 0$  dan  $|\lambda_2| < 0$ , atau Jika  $|\lambda_1| < 0$  dan  $|\lambda_2| > 0$  maka titik kesetimbangan sistem bersifat tak stabil pelana.
4. Jika  $|\lambda_{1,2}| = 1$ , maka titik kesetimbangan sistem bersifat tak stabil.

**Kasus II:**  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ , dengan  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

1. Jika  $|\lambda| < 1$  maka titik kesetimbangan sistem bersifat stabil.
2. Jika  $|\lambda| > 1$  maka titik kesetimbangan sistem bersifat tak stabil

**Kasus III:**  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ , dengan  $\lambda_1 = a + ib$  atau  $\lambda_2 = a - ib$  dan  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

1. Jika  $|r| < 1$  maka titik kesetimbangan sistem bersifat stabil (*sink*).
2. Jika  $|r| > 1$  maka titik kesetimbangan sistem bersifat tak stabil (*source*).
3. Jika  $|r| = 1$  maka titik kesetimbangan sistem bersifat *center* (Elaydi, 2005).

### 2.1.9 Solusi Analitik Model Matematika Vibrasi Dawai *Flying Fox*

Pada subbab ini akan dibahas mengenai solusi analitik dari model matematika vibrasi dawai *flying fox* yang diteliti oleh Sari (2018) pada penelitian yang berjudul “Uji Validasi Model Matematika Vibrasi Dawai *Flying Fox*”. Penelitian tentang solusi analitik tersebut akan dijabarkan secara singkat sebagai berikut:

Persamaan (2.5) sebagai persamaan lendutan dawai *flying fox* yang variabelnya akan disubstitusikan dengan parameter dari Kusumastuti, dkk. (2017) tanpa melalui reduksi persamaan diferensial, maka akan menjadi persamaan berikut:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\frac{1}{100} \frac{dy(t)}{dt} - \frac{2124}{100000} y(t) + \frac{98}{10} \quad (2.25)$$

Dari persamaan (2.25) di atas dapat dicari solusi analitiknya, sehingga menghasilkan persamaan berikut

$$y(t) = -\frac{245000}{531} e^{-\frac{1}{200}t} \cos \frac{1}{200} \sqrt{\frac{4243}{5}} t - \frac{245000}{531 \sqrt{\frac{4243}{5}}} e^{-\frac{1}{200}t} \sin \frac{1}{200} \sqrt{\frac{4243}{5}} t + \frac{245000}{531}$$

Selanjutnya untuk persamaan (2.7) sebagai persamaan sudut dawai *flying fox* yang memuat suku non linier yaitu  $\frac{\sin \theta}{(\cos \theta)^3}$ , sehingga perlu dilakukan linierisasi terlebih dahulu untuk menjadikan suku linier. Linierisasi dilakukan dengan mengekspansi suku non linier menggunakan deret Taylor di sekitar  $\theta = 0$  dengan pemotongan turunan pertama, sehingga didapatkan

$$f(\theta) = \frac{\sin \theta}{(\cos \theta)^3} \rightarrow f(0) = \frac{\sin 0}{(\cos 0)^3} = \frac{0}{1} = 0$$

$$f'(\theta) = \frac{3 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^4 \theta} \rightarrow f'(0) = \frac{3 \sin^2 0 + \cos^2 0}{\cos^4 0} = \frac{3 \cdot 0 + 1}{1} = 1$$

$$f(\theta) \approx f(0) + \frac{f'(0)(\theta - 0)}{1!}$$

$$\approx 0 + \frac{1(\theta)}{1!}$$

$$\approx \theta$$

$$\frac{\sin \theta}{(\cos \theta)^3} \approx \theta$$

Sehingga persamaan (2.7) menjadi

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\delta_2 \frac{d\theta}{dt} - \frac{6k}{m_a}(\theta) + 0.05 \sin t \quad (2.26)$$

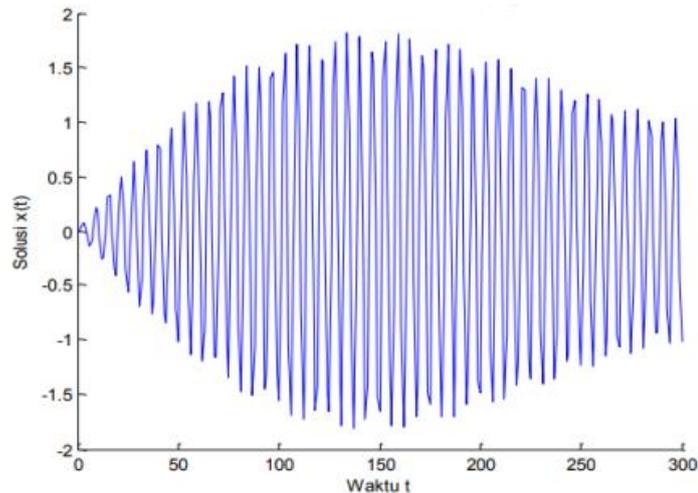
Kemudian substitusikan persamaan (2.26) dengan parameter dari Kusumastuti, dkk. (2017), maka persamaan (2.26) menjadi

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{1}{100} \frac{d\theta(t)}{dt} - 1.0386 \left( \frac{\sin \theta(t)}{\cos^3 \theta(t)} \right) + 0.05 \sin t \quad (2.27)$$

Dari persamaan (2.27) di atas dapat dicari solusi analitiknya, sehingga menghasilkan persamaan berikut

$$\begin{aligned} \theta(t) = & \frac{20000000}{63459521} e^{-\frac{1}{100}t} \cos \frac{1}{100} \sqrt{\frac{103853}{10}} t \\ & - \frac{453000000}{387674213789} \sqrt{1038530} e^{-\frac{1}{200}t} \sin \frac{1}{100} \sqrt{\frac{103853}{10}} t \\ & - \frac{20000000}{63459521} \cos t + \frac{77110000}{63459521} \sin t \end{aligned}$$

Sehingga grafiknya dapat digambar menggunakan program Matlab ketika  $t \in [0,300]$  dengan kondisi awal  $\theta(0) = 0$  dan  $\theta'(0) = 0$  sebagai syarat khusus persamaan diferensial. Profil grafik dari sistem persamaan sudut lendutan sebagai berikut:



**Gambar 2.3** Grafik Persamaan Sudut Lendutan (Sari, 2018)

## 2.2 Kajian Integrasi Topik dengan al-Qur'an/Hadits

Pada BAB I telah dijelaskan mengenai ayat al-Qur'an yang berkaitan dengan validasi atau intropeksi diri. Mengingat rumusan masalah pada penelitian ini adalah analisis dinamik atau analisis kestabilan dari model diskrit *flying fox*. Oleh karena itu, pada subbab ini akan dijelaskan lebih spesifik terkait dalil mengenai keseimbangan atau kestabilan.

Model matematika dapat divalidasi menggunakan banyak cara salah satunya dengan dilakukan analisis dinamik model diskrit. Dalam analisis dinamik membahas kestabilan dan kekonsistenan, begitu juga di dalam al-Qur'an sudah terlebih dahulu dibahas. Sebagaimana firman Allah dalam surat al-Mulk ayat 3 sampai 4 yang artinya:

*“yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sama sekali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang. Kemudian pandanglah sekali lagi niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan tidak menemukan sesuatu cacat dan penglihatanmu itu pun dalam keadaan payah”. (Q.S. al-Mulk/67:3-4)*

Tafsir dari ayat tersebut oleh Ahmad Mustafa Al-Maraghi dalam kitabnya Tafsir Al-Maraghi dijelaskan bahwa Allah telah menciptakan tujuh langit yang

berlapis-lapis tanpa ada tiang penyangga atau pengikat yang ada di dalam maupun di luar. Kekuasaan tersebut juga menjadi salah satu dari bukti ilmu pengetahuan-Nya yang tidak akan pernah habis. Ciptaannya tidak akan pernah ditemukan celah kekacauan atau ketidakseimbangan karena tidak ada satupun ciptaannya yang melampaui batas dengan menambah ataupun mengurangi. Jadi, semua yang ada pada-Nya itu seimbang dan berjalan sesuai dengan ketentuannya. Oleh karena itu, jika masih terdapat keraguan dalam hal ini, maka dianjurkan untuk melihat ulang atau mempelajarinya sampai mendapatkan kejelasan dalam pembuktian keseimbangan.

Berdasarkan ayat tersebut betapa pentingnya kestabilan atau keseimbangan dalam suatu hal. Allah Swt menciptakan dunia dan isinya dengan seimbang, presisi, dan tanpa cela. Allah Swt memerintahkan makhluknya untuk melihat dengan berulang-ulang tentang adakah hal yang tidak seimbang, dalam hal ini, manusia diperintahkan untuk mentadabburi ciptaan-Nya, niscaya tidak ada satupun ciptaan-Nya yang tidak seimbang.

Inti pelajaran yang dapat diambil dari ayat ini yaitu prinsip keseimbangan sekaligus cara memandang kekuasaan Allah Swt. Alam dan ilmu pengetahuan Allah itu sangat luas. Banyak yang tidak diketahui oleh manusia, baik yang pernah dialami ataupun belum pernah dialami. Oleh karena itu, dalam mentadabburi ciptaan-Nya dapat dilakukan dengan menganalisis kestabilan suatu model matematika vibrasi dawai *flying fox*.

### **2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung**

Penelitian yang dilakukan Kusumastuti, dkk. (2017) yaitu mengkonstruksi model matematika vibrasi dawai *flying fox*. Dari model tersebut menghasilkan dua

persamaan diferensial biasa orde dua yang kemudian direduksi menjadi persamaan diferensial orde berupayakan  $y_1(t)$  sebagai lendutan dawai,  $y_2(t)$  sebagai kecepatan lendutan dawai,  $\theta_1(t)$  sebagai sudut dawai, dan  $\theta_2(t)$  sebagai kecepatan sudut dawai. Model yang dikonstruksi oleh Kusumastuti, dkk. (2017) ini berdasarkan penelitian terdahulu oleh McKenna dan Moore (1999) yang mengkonstruksi model matematika dari jembatan Tacoma Narrow. Model ini bersifat linier pada persamaan lendutan dawai *flying fox* dan bersifat non linier pada persamaan sudut dawai *flying fox*.

Metode penyelesaian yang dilakukan pada penelitian ini adalah analisis dinamik atau analisis kestabilan model diskrit pada vibrasi dawai *flying fox*. Analisis model diskrit dilakukan dengan menentukan titik tetap atau titik kesetimbangan. Sebelum itu, dilakukan reduksi pada model untuk menghasilkan persamaan diferensial biasa orde satu, kemudian dilakukan diskritisasi pada model. Linierisasi juga dilakukan pada persamaan diferensial yang bersifat non linier. Selanjutnya menentukan nilai eigen dari matriks Jacobi. Berdasarkan nilai eigen tersebut, dapat ditentukan jenis kestabilan dari model tersebut. Kemudian dilakukan simulasi dan interpretasi untuk menggambarkan solusi dari analisis dinamik model diskrit vibrasi dawai *flying fox*.

Pada penelitian ini diperlukan teori pendukung yang mendukung kelancaran penelitian. Seperti halnya teori validasi model untuk memahami metode yang akan digunakan. Pemahaman masalah pada *flying fox* juga membantu dalam menguraikan objek yang dianalisis. Begitu juga pemahaman mencari titik tetap dan nilai eigen untuk menentukan jenis kestabilan. Pada tahap simulasi model, parameter yang akan digunakan adalah dari penelitian Hidayahningrum (2017).

Parameter tersebut didapat dari rujukan penelitian Kusumastuti, dkk. (2017) dan McKenna dan Moore (1999).

Berdasarkan uraian di atas, kajian topik dengan teori pendukung saling berhubungan untuk memudahkan penelitian. Teori pendukung juga sebagai bekal untuk menuju pembahasan penelitian. Maka dari itu, penelitian yang berfokus pada analisis dinamik model diskrit vibrasi dawai *flying fox* yang telah didukung oleh teori pendukung diharapkan mendapat hasil yang diinginkan.

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

#### **3.1 Jenis Penelitian**

Jenis penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah penelitian kualitatif atau studi literatur. Penelitian kualitatif merupakan penelitian yang menggunakan data dan informasi yang sudah ada dalam literatur (Abdullah, 2015). Objek penelitian pada penelitian ini adalah model matematika penelitian Kusumastuti, dkk. (2017) tentang model matematika vibrasi dawai *flying fox*.

#### **3.2 Pra Penelitian**

Pra penelitian yang dilakukan penulis adalah mengumpulkan sejumlah referensi yang sesuai dengan penelitian ini, menentukan model matematika yang akan digunakan. Penulis memakai model matematika yang dikonstruksi oleh Kusumastuti, dkk. (2017) untuk dilakukan analisis validasi. Validasi dilakukan dengan melakukan analisis dinamik model diskrit vibrasi dawai *flying fox*.

#### **3.3 Tahapan Penelitian**

Tahapan penelitian ini sebagai berikut:

1. Reduksi model matematika vibrasi dawai *flying fox*.
2. Diskritisasi model dengan metode *Forward Euler*.
3. Linierisasi model tak linier dengan ekspansi deret Taylor.
4. Menentukan titik kesetimbangan pada sistem diskrit.
5. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan pada sistem diskrit dengan matriks Jacobi untuk menentukan nilai eigen.
6. Simulasi sistem dinamik diskrit dan menginterpretasikan hasil dari simulasi.

## BAB IV

### HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 4.1 Analisis Dinamik Model Diskrit Vibrasi Dawai *Flying Fox*

##### 4.1.1 Reduksi Model

Pada subbab ini dipaparkan mengenai reduksi dari model matematika vibrasi dawai *flying fox* berupa persamaan diferensial biasa orde dua. Perlu dilakukan adanya reduksi model sebelum melakukan analisis kestabilan, sehingga model tersebut akan menjadi sistem persamaan diferensial biasa orde satu. Model matematika vibrasi dawai *flying fox* yang dikonstruksi oleh Kusumastuti, dkk. (2017) sebagai berikut:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\delta_1 \frac{dy(t)}{dt} - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)y(t)}{m_d L} + \frac{m_b g}{m_d} \quad (4.1)$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\delta_2 \frac{d\theta(t)}{dt} - \frac{6k}{m_d} \left( \frac{\sin \theta(t)}{\cos^3 \theta(t)} \right) + 0,05 \sin t \quad (4.2)$$

Persamaan (4.1) merupakan persamaan lendutan dawai *flying fox* dan persamaan (4.2) merupakan persamaan sudut lendutan dawai *flying fox*. Reduksi pada persamaan (4.1) dilakukan dengan memisalkan  $y(t) = P$  dan  $\frac{dP}{dt} = Q$ , maka dapat ditulis menjadi

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dP}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (Q) = \frac{dQ}{dt}$$

Sehingga

$$\frac{dQ}{dt} = -\delta_1 Q - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} P + \frac{m_b g}{m_d}$$

Setelah dilakukan reduksi, maka diperoleh sistem persamaan diferensial biasa dari persamaan (4.1) sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = Q \\ \frac{dQ}{dt} = -\delta_1 Q - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} P + \frac{m_b g}{m_d} \end{cases} \quad (4.3)$$

Selanjutnya reduksi pada persamaan (4.2) dilakukan dengan memisalkan  $\theta(t) = R$

dan  $\frac{dR}{dt} = S$ , maka dapat ditulis kembali menjadi:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dR}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (S) = \frac{dS}{dt}$$

Sehingga

$$\frac{dS}{dt} = -\delta_2 S - \frac{6k}{m_d} \left( \frac{\sin R}{\cos^3 R} \right) + 0,05 \sin t$$

Setelah dilakukan reduksi, maka diperoleh sistem persamaan diferensial biasa dari persamaan (4.2) sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = S \\ \frac{dS}{dt} = -\delta_2 S - \frac{6k}{m_d} \left( \frac{\sin R}{\cos^3 R} \right) + 0,05 \sin t \end{cases} \quad (4.4)$$

Berdasarkan pemaparan reduksi model (4.1) dan (4.2) yang berupa persamaan diferensial biasa orde dua, telah berubah menjadi sistem persamaan diferensial biasa orde satu, dimana  $P$  adalah persamaan lendutan dawai,  $Q$  adalah persamaan kecepatan lendutan dawai,  $R$  persamaan sudut lendutan dawai, dan  $S$  adalah persamaan kecepatan sudut lendutan dawai *flying fox*.

#### 4.1.2 Diskritisasi Model

Sistem persamaan (4.3) didiskritisasi menggunakan pendekatan metode beda hingga standar untuk nilai  $\frac{dP}{dt} = \frac{P_{n+1} - P_n}{h}$  pada persamaan lendutan dawai dan nilai  $\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_{n+1} - Q_n}{h}$  pada persamaan kecepatan lendutan dawai. Oleh karena itu,

proses diskritisasi pada persamaan model matematika lendutan vibrasi dawai *flying fox* dipaparkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= Q \\ \frac{P_{n+1} - P_n}{h} &= Q_n \\ P_{n+1} - P_n &= hQ_n \\ P_{n+1} &= P_n + hQ_n\end{aligned}$$

Sedangkan proses diskritisasi pada persamaan model matematika kecepatan lendutan vibrasi dawai *flying fox* dipaparkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= -\delta_1 Q - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} P + \frac{m_b g}{m_d} \\ \frac{Q_{n+1} - Q_n}{h} &= -\delta_1 Q_n - \frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} P_n + \frac{m_b g}{m_d} \\ Q_{n+1} - Q_n &= -h\delta_1 Q_n - \frac{h(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} P_n + \frac{hm_b g}{m_d} \\ Q_{n+1} &= Q_n - h\delta_1 Q_n - \frac{h(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} P_n + \frac{hm_b g}{m_d}\end{aligned}$$

Kemudian, sistem persamaan (4.4) didiskritisasi menggunakan pendekatan metode beda hingga standar untuk nilai  $\frac{dR}{dt} = \frac{R_{n+1} - R_n}{h}$  pada persamaan sudut dawai dan nilai  $\frac{dS}{dt} = \frac{S_{n+1} - S_n}{h}$  pada persamaan kecepatan sudut dawai. Oleh karena itu, proses diskritisasi pada persamaan model matematika lendutan vibrasi dawai *flying fox* dipaparkan sebagai berikut:

$$\frac{dR}{dt} = S$$

$$\frac{R_{n+1} - R_n}{h} = S_n$$

$$R_{n+1} - R_n = hS_n$$

$$R_{n+1} = R_n + hS_n$$

Sedangkan proses diskritisasi pada persamaan model matematika kecepatan sudut vibrasi dawai *flying fox* dipaparkan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = -\delta_2 S - \frac{6k}{m_d} \left( \frac{\sin R}{\cos^3 R} \right) + 0,05 \sin t$$

$$\frac{S_{n+1} - S_n}{h} = -\delta_2 S_n - \frac{6k}{m_d} \left( \frac{\sin R_n}{\cos^3 R_n} \right) + 0,05 \sin t$$

$$S_{n+1} - S_n = -h\delta_2 S_n - \frac{6hk}{m_d} \left( \frac{\sin R_n}{\cos^3 R_n} \right) + 0,05 \sin t (h)$$

$$S_{n+1} = S_n - h\delta_2 S_n - \frac{6hk}{m_d} \left( \frac{\sin R_n}{\cos^3 R_n} \right) + 0,05 \sin t (h)$$

Dengan demikian, diperoleh model sistem dinamik diskrit lendutan dawai *flying fox* sebagai berikut:

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n + hQ_n = f(P^*, Q^*) \\ Q_{n+1} = Q_n - h\delta_1 Q_n - \frac{h(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} P_n + \frac{hm_b g}{m_d} = g(P^*, Q^*) \end{cases} \quad (4.5)$$

Dan juga diperoleh model sistem dinamik diskrit sudut dawai *flying fox* sebagai berikut:

$$\begin{cases} R_{n+1} = R_n + hS_n = f(R^*, S^*) \\ S_{n+1} = S_n - h\delta_2 S_n - \frac{6kh}{m_d} \left( \frac{\sin R_n}{\cos^3 R_n} \right) + 0,05 \sin t (h) = g(R^*, S^*) \end{cases} \quad (4.6)$$

Sistem persamaan (4.5) merupakan model lendutan vibrasi dawai *flying fox* diskrit dan sistem persamaan (4.6) merupakan model sudut lendutan vibrasi dawai *flying fox* diskrit dimana  $h$  adalah ukuran langkah yang bernilai positif.

### 4.1.3 Linierisasi Model

Linierisasi dilakukan apabila ada suku tak linier pada suatu persamaan sebelum dilakukannya analisis kesetimbangan. Suku tak linier pada dua sistem persamaan terdapat pada persamaan (4.6) yakni  $\frac{\sin R_n}{\cos^3 R_n}$ . Linierisasi dilakukan dengan mengekspansi suku tak linier menggunakan deret Taylor di sekitar  $R_n = 0$  sebagai berikut:

Formulasi deret Taylor yaitu

$$f(x) \approx f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \dots \quad (4.7)$$

Proses linierisasi pada kasus ini hanya membutuhkan deret Taylor dengan pemotongan pada turunan kedua. Kemudian diketahui bahwa

$$f(R_n) = \frac{\sin R_n}{\cos^3 R_n} \Rightarrow f(0) = \frac{\sin 0}{\cos^3 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$f'(R_n) = \frac{3 \sin^2 R_n + \cos^2 R_n}{\cos^4 R_n} \Rightarrow f'(0) = \frac{3 \sin^2 0 + \cos^2 0}{\cos^4 0} = \frac{3 \cdot 0 + 1}{1} = 1$$

$$f''(R_n) = \frac{4 \sec^3 R_n \tan R_n (2 \cos^2 R_n + 3 \sin^2 R_n)}{\cos R_n} \Rightarrow f''(0) = 0$$

Jadi

$$f(R_n) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(R_n - 0) + \frac{f''(0)}{2!}(R_n - 0)^2$$

$$\approx 0 + \frac{1(R_n)}{1} + 0$$

$$\approx R_n$$

$$\frac{\sin R_n}{\cos^3 R_n} \approx R_n$$

Sehingga diperoleh

$$S_{n+1} = S_n - h\delta_2 S_n - \frac{6kh}{m_d} R_n + 0,05 \sin t h \quad (4.8)$$

Dengan demikian, persamaan diferensial biasa tak linier telah menjadi persamaan diferensial biasa linier.

#### 4.1.4 Titik Keseimbangan Model

Titik kesetimbangan dinamik diskrit pada sistem persamaan (4.5) merupakan titik  $(P^*, Q^*)$  yang diperoleh dengan memenuhi persamaan  $f(P^*, Q^*) = P^*$  dan  $g(P^*, Q^*) = Q^*$  (Elaydi, 2005). Pada kasus pertama, dimisalkan lendutan dan kecepatan lendutan pada kondisi awal bernilai nol atau  $P^* = 0$ , karena  $P^* + hQ^* = P^*$  maka  $hQ^* = 0$  atau  $Q^* = 0$ . Sehingga diperoleh titik kesetimbangan dari sistem persamaan (4.5) yakni  $E_1(P^*, Q^*) = (0,0)$ . Titik kesetimbangan ini merupakan titik kesetimbangan trivial.

Kemudian pada kasus kedua, dari persamaan (4.5) juga diperoleh

$$\begin{aligned} f(P^*, Q^*) &= P^* \\ P^* + hQ^* &= P^* \\ hQ^* &= P^* - P^* \\ hQ^* &= 0 \\ Q^* &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

dengan nilai  $P^*$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} g(P^*, Q^*) &= Q^* \\ Q^* - h\delta_1 Q^* - \frac{h(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} P^* + \frac{hm_b g}{m_d} &= Q^* \\ -h\delta_1 Q^* - \frac{h(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} P^* + \frac{hm_b g}{m_d} &= Q^* - Q^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-h\delta_1 Q^* - \frac{h(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} P^* + \frac{hm_b g}{m_d} &= 0 \\
h\delta_1 Q^* &= -\frac{h(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} P^* + \frac{hm_b g}{m_d} \\
Q^* &= -\frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{\delta_1 m_d L} P^* + \frac{m_b g}{\delta_1 m_d} \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Karena  $Q^* = 0$ , maka

$$\begin{aligned}
-\frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{\delta_1 m_d L} P^* + \frac{m_b g}{\delta_1 m_d} &= 0 \\
\frac{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{\delta_1 m_d L} P^* &= \frac{m_b g}{\delta_1 m_d} \\
(\delta_1 m_d)(\mu_k N + b\eta v - 2EA)P^* &= (m_b g)(\delta_1 m_d L) \\
P^* &= \frac{(m_b g)(\delta_1 m_d L)}{\delta_1 m_d (\mu_k N + b\eta v - 2EA)} \\
P^* &= \frac{(m_b g)(L)}{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)} \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan yang kedua dari sistem persamaan (4.5)

$$\text{yakni } E_2(P^*, Q^*) = \left( \frac{(m_b g)(L)}{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}, 0 \right)$$

Selanjutnya, karena sistem persamaan (4.5) dan (4.6) *uncouple*, maka dicari masing-masing titik kesetimbangannya. Titik kesetimbangan dinamik diskrit pada sistem persamaan (4.6) merupakan titik  $(R^*, S^*)$  yang diperoleh dengan memenuhi persamaan  $f(R^*, S^*) = R^*$  dan  $g(R^*, S^*) = S^*$  (Elaydi, 2005). Pada kasus pertama, dikarenakan pada kondisi awal sudut dan kecepatan sudut tidak ada perubahan, maka dapat ditulis  $R^* = 0$ , karena  $R^* + hS^* = R^*$  maka  $hS^* = 0$  atau  $S^* = 0$ . Sehingga diperoleh titik kesetimbangan dari sistem persamaan (4.6) yakni  $E_1(R^*, S^*) = (0, 0)$ . Titik kesetimbangan ini merupakan titik kesetimbangan trivial. Kemudian pada kasus kedua, dari persamaan (4.6) juga diperoleh

$$\begin{aligned}
f(R^*, S^*) &= R^* \\
R^* + hS^* &= R^* \\
hS^* &= R^* - R^* \\
hS^* &= 0 \\
S^* &= 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

dengan nilai  $R^*$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
g(R^*, S^*) &= S^* \\
S^* - h\delta_2 S^* - \frac{6kh}{m_d} R^* + 0,05 \sin t h &= S^* \\
-h\delta_2 S^* - \frac{6kh}{m_d} R^* + 0,05 \sin t h &= 0 \\
S^* &= -\frac{6k}{\delta_2 m_d} R^* + \frac{0,05 \sin t}{\delta_2}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Karena  $S^* = 0$ , maka

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{6k}{\delta_2 m_d} R^* + \frac{0,05 \sin t}{\delta_2} \\
\frac{6k}{\delta_2 m_d} R^* &= \frac{0,05 \sin t}{\delta_2} \\
R^* &= \frac{0,05 \sin t}{\delta_2} \left( \frac{\delta_2 m_d}{6k} \right) \\
R^* &= \frac{0,05 \sin t (m_d)}{6k}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan yang kedua dari sistem persamaan (4.6)

yakni  $E_2(R^*, S^*) = \left( \frac{0,05 \sin t (m_d)}{6k}, 0 \right)$ .

#### 4.1.5 Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan

**Tahap I.** Analisis kestabilan persamaan lendutan

Mengingat sistem persamaan (4.5) yakni:

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n + hQ_n \\ Q_{n+1} = Q_n - h\delta_1 Q_n - \frac{h(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} P_n + \frac{hm_b g}{m_d} \end{cases}$$

maka untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan pada sistem persamaan (4.5) tersebut, dilakukan analisis nilai eigen dari matriks Jacobian untuk  $E_2(P^*, Q^*)$ . Selanjutnya, untuk matriks Jacobian pada sistem persamaan (4.5) di titik kesetimbangan  $(P^*, Q^*)$  sebagai berikut:

$$J(P^*, Q^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial P} & \frac{\partial f}{\partial Q} \\ \frac{\partial g}{\partial P} & \frac{\partial g}{\partial Q} \end{bmatrix}_{(P^*, Q^*)} \quad (4.15)$$

Dari persamaan (4.15) diketahui terlebih dahulu nilai-nilai berikut:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial P} \right|_{(P^*, Q^*)} = 1$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial Q} \right|_{(P^*, Q^*)} = h$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial P} \right|_{(P^*, Q^*)} = -\frac{h(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L}$$

$$\left. \frac{\partial g}{\partial Q} \right|_{(P^*, Q^*)} = 1 - h\delta_1$$

Sehingga diperoleh matriks Jacobi untuk sistem persamaan (4.5) sebagai berikut:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & h \\ -\frac{h(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} & 1 - h\delta_1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, untuk mencari nilai eigen dari matriks Jacobian pada titik kesetimbangan di  $E_2$ , dipaparkan sebagai berikut:

$$\det(A_1 - \lambda I) = 0$$

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{bmatrix} 1 & h \\ -\frac{h(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} & 1 - h\delta_1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \\
& \left| \begin{bmatrix} 1 & h \\ -\frac{h(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} & 1 - h\delta_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \\
& \left| \begin{bmatrix} 1 - \lambda & h \\ -\frac{h(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} & 1 - h\delta_1 - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \\
& (1 - \lambda)(1 - h\delta_1 - \lambda) + \frac{h^2(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} = 0 \\
& \lambda^2 + (h\delta_1 - 2)\lambda + \frac{(1 - h\delta_1)m_d L + h^2(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} = 0 \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Nilai-nilai eigen diperoleh dengan mencari akar-akar persamaan karakteristik dari (4.16) dengan  $a = 1$ ,  $b = h\delta_1 - 2$ , dan  $c = \frac{(1-h\delta_1)m_d L + h^2(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L}$ , sehingga nilai-nilai eigen yang diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= -\frac{(h\delta_1 - 2) \pm \sqrt{(h\delta_1 - 2)^2 - 4(1) \frac{(1-h\delta_1)m_d L + h^2(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L}}}{2(1)} \\
&= -\frac{(h\delta_1 - 2) \pm \sqrt{(h^2\delta_1^2 - 4h\delta_1 + 4) - 4 \left( \frac{h^2(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}{m_d L} \right)}}{2} \\
&= -\frac{\frac{1}{2} \delta_1 h \cdot m_d L - 2m_d L \pm \sqrt{L^2 \delta_1^2 h^2 m_d^2 - 4L(\mu_k N + b\eta v - 2EA) h^2 m_d}}{m_d L} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Kemudian substitusikan nilai parameter Tabel 2.1 oleh Kusumastuti, dkk (2017) ke dalam  $\lambda_{1,2}$ , sehingga diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = -0,005h + (0,14565h)i$  dan  $\lambda_2 = -0,005h - (0,14565h)i$ . Karena  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ , dengan  $h$  yang selalu bernilai positif,  $\lambda_1 = a + ib$  atau  $\lambda_2 = a - ib$  dan  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ , maka  $r = \sqrt{(-0,005)^2 + (0,14565)^2} = 0.14574$ . Jika  $|r| < 1$  maka titik kesetimbangan

$E_2(P^*, Q^*) = \left( \frac{(m_b g)(L)}{(\mu_k N + b \eta v - 2EA)}, 0 \right)$  bersifat stabil (*sink*). Sehingga dapat dikatakan bahwa lendutan dawai dan kecepatan lendutan dawai menunjukkan perilaku yang mendekati keadaan sebenarnya.

## Tahap II. Analisis kestabilan persamaan sudut lendutan dawai

Mengingat sistem persamaan sudut lendutan setelah dilakukan linierisasi yakni:

$$\begin{cases} R_{n+1} = R_n + hS_n \\ S_{n+1} = S_n - h\delta_2 S_n - \frac{6kh}{m_d} R_n + 0,05 \sin t(h) \end{cases} \quad (4.19)$$

maka untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan pada sistem persamaan (4.19) tersebut, dilakukan analisis nilai eigen dari matriks Jacobian untuk  $E_2(R^*, S^*)$ . Selanjutnya, untuk matriks Jacobian pada sistem persamaan (4.19) di titik kesetimbangan  $(R^*, S^*)$  sebagai berikut:

$$J(R^*, S^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial R} & \frac{\partial f}{\partial S} \\ \frac{\partial g}{\partial R} & \frac{\partial g}{\partial S} \end{bmatrix} \Bigg|_{(R^*, S^*)} \quad (4.20)$$

Dari persamaan (4.20) diketahui terlebih dahulu nilai-nilai berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial R} \Big|_{(R^*, S^*)} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} \Big|_{(R^*, S^*)} = h$$

$$\frac{\partial g}{\partial R} \Big|_{(R^*, S^*)} = -\frac{6kh}{m_d}$$

$$\frac{\partial g}{\partial S} \Big|_{(R^*, S^*)} = 1 - h\delta_2$$

Sehingga diperoleh matriks Jacobi untuk sistem persamaan (4.19) sebagai berikut:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & h \\ -\frac{6kh}{m_d} & 1 - h\delta_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, untuk mencari nilai eigen dari matriks Jacobian pada titik kesetimbangan di  $E_2$ , dipaparkan sebagai berikut:

$$\det(A_1 - \lambda I) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & h \\ -\frac{6kh}{m_d} & 1 - h\delta_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & h \\ -\frac{6kh}{m_d} & 1 - h\delta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & h \\ -\frac{6kh}{m_d} & 1 - h\delta_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)(1 - h\delta_2 - \lambda) + \frac{h^2 6k}{m_d} = 0$$

$$\lambda^2 + (h\delta_2 - 2)\lambda + \frac{(1 - h\delta_2)m_d + h^2 6k}{m_d} = 0 \quad (4.21)$$

Nilai-nilai eigen diperoleh dengan mencari akar-akar persamaan karakteristik dari (4.21) dengan  $a = 1$ ,  $b = h\delta_2 - 2$ , dan  $c = \frac{(1 - h\delta_2)m_d + h^2 6k}{m_d}$ , sehingga nilai-nilai

eigen yang diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_{3,4} &= -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= -\frac{(h\delta_2 - 2) \pm \sqrt{(h\delta_2 - 2)^2 - 4(1)\left(\frac{(1 - h\delta_2)m_d + h^2 6k}{m_d}\right)}}{2(1)} \\ &= -\frac{(h\delta_2 - 2) \pm \sqrt{h^2 \delta_2^2 - 4h\delta_2 + 4 - \left(\frac{4(1 - h\delta_2)m_d + 4h^2 6k}{m_d}\right)}}{2} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{h\delta_2 m_d + 2m_d \pm \sqrt{h^2 \delta_2^2 m_d^2 - 24h^2 k \cdot m_d}}{m_d} \quad (4.22)$$

Kemudian substitusikan nilai parameter Tabel 2.1 oleh Kusumastuti, dkk (2017) ke dalam  $\lambda_{3,4}$ , sehingga diperoleh nilai eigen  $\lambda_3 = -0,005h + (0.1331480769h)i$  dan  $\lambda_4 = -0,005h - (0.1331480769h)i$ . Karena  $\lambda_{3,4} \in \mathbb{C}$ , dengan  $h$  yang selalu bernilai positif,  $\lambda_3 = a + ib$  atau  $\lambda_4 = a - ib$  dan  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ , maka  $r = \sqrt{(-0,005)^2 + (0.1331480769)^2} = 0.1332419$ . Jika  $|r| < 1$  maka titik kesetimbangan  $E_2(R^*, S^*) = \left(\frac{0,05 \sin t(m_d)}{6k}, 0\right)$  bersifat stabil (*sink*). Sehingga dapat dikatakan bahwa sudut lendutan dawai dan kecepatan sudut lendutan dawai menunjukkan perilaku yang mendekati keadaan sebenarnya.

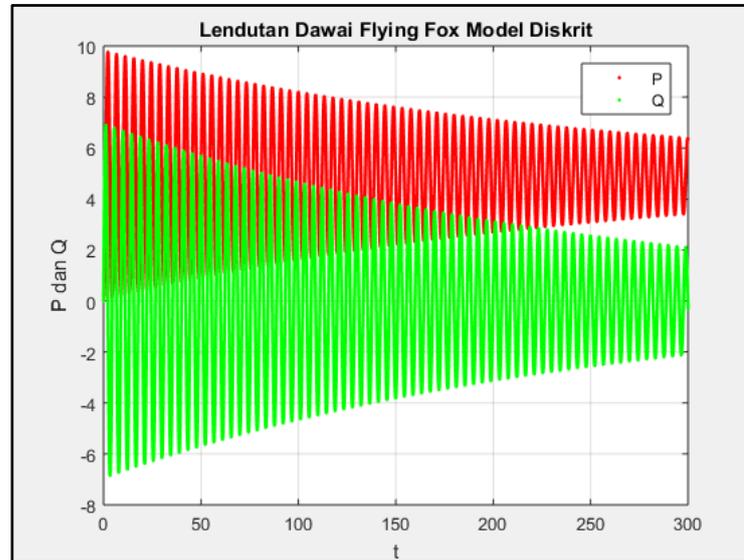
#### 4.1.6 Simulasi dan Interpretasi

Pada subbab ini dibahas mengenai simulasi dengan bantuan *software* Matlab. Hal ini bertujuan untuk menggambarkan hasil analisis dinamik model diskrit yang telah diperoleh pada subbab sebelumnya. Berikut simulasi dari model di sekitar titik kesetimbangan dengan parameter yang digunakan dari Kusumastuti, dkk. (2017) yang digambarkan dengan simulasi. *Script* Matlab dapat dilihat pada Lampiran.

##### Simulasi I (Lendutan Dawai Vibrasi Dawai *Flying Fox*)

Berdasarkan hasil analisis yang diperoleh, model diskrit vibrasi dawai *flying fox* khususnya persamaan lendutan mempunyai titik kesetimbangan yang dapat ditentukan jenis kestabilannya yaitu  $E_1(P^*, Q^*) = (0,0)$  dan  $E_2(P^*, Q^*) = \left(\frac{(m_b g)(L)}{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}, 0\right)$ . Menghasilkan nilai eigen kompleks  $\lambda_1 = -0,005h +$

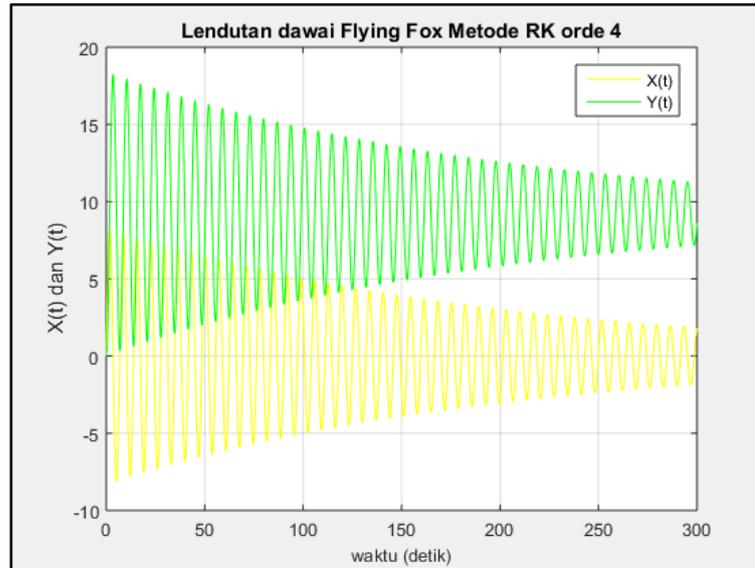
$(0,14565h)i$  dan  $\lambda_2 = -0,005h - (0,14565h)i$ . Secara diskrit simulasinya dapat dipaparkan sebagai berikut:



**Gambar 4.1** Simulasi I Sistem Diskrit Lendutan Dawai *Flying Fox*: nilai awal untuk  $P(0) = 0, Q(0) = 0, \delta_1 = 1/100, m_b = 50$ , dan  $m_d = 50$

Pada Gambar 4.1 merupakan simulasi numerik model diskrit lendutan pada dawai *flying fox* ketika  $t \in [0,300]$  dengan kondisi awal  $P(0) = 0$  dan  $Q(0) = 0$  sebagai syarat khusus persamaan diferensial biasa. Dari grafik tersebut terlihat bahwa simulasi menunjukkan titik kesetimbangan eksis dan bersifat stabil. Hal ini dapat dilihat dari arah solusi menuju titik kesetimbangan. Begitu juga dengan hasil nilai eigen berupa bilangan negatif kompleks. Dengan demikian model yang dianalisis bersifat stabil dengan parameter yang digunakan.

Grafik dari hasil penyelesaian model kontinu lendutan vibrasi dawai *flying fox* secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 akan dipaparkan sebagai berikut:



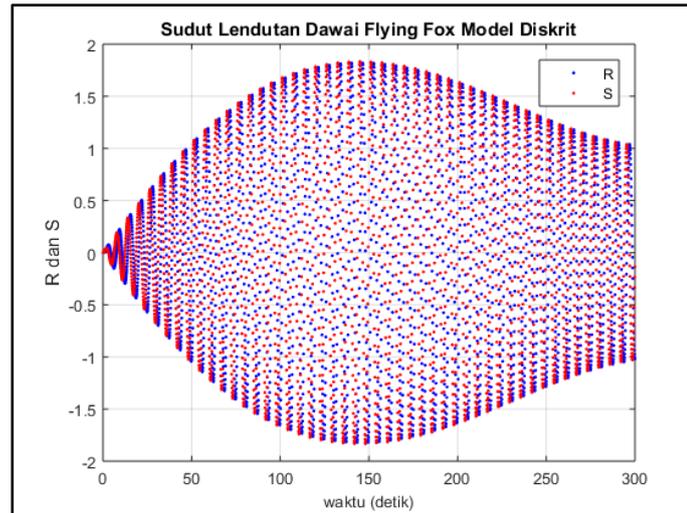
**Gambar 4.2** Simulasi I Sistem Kontinu Lendutan Dawai *Flying Fox*: nilai awal untuk  $P(0) = 0, Q(0) = 0, \delta_1 = 1/100, m_b = 50,$  dan  $m_d = 50$

Pada Gambar 4.2 menunjukkan grafik model matematika vibrasi dawai *flying fox* yang kontinu. Grafik ditampilkan dengan program MATLAB di waktu 5 menit awal atau ketika  $t \in [300]$  dalam detik. Dari grafik tersebut terlihat bahwa lendutan semakin mengecil seiring berjalannya waktu, hal ini sesuai dengan fenomena di lapangan bahwa dawai memiliki lendutan yang besar pada saat benda atau beban mulai diluncurkan pada wahana *flying fox*. Dari grafik diskrit dan kontinu terlihat bahwa simulasi keduanya menunjukkan titik kesetimbangan eksis dan bersifat stabil. Hal ini juga terlihat dari perbedaan grafik yang tidak terlalu signifikan. Selanjutnya, untuk melihat perbedaan hasil perhitungan lendutan dawai *flying fox* berupa sistem diskrit maupun kontinu yang mengalami perubahan dalam rentang waktu 60 detik pertama dapat di lihat pada Lampiran 5.

### **Simulasi II (Sudut Lendutan Vibrasi Dawai *Flying Fox*)**

Berdasarkan hasil analisis yang diperoleh, model diskrit vibrasi dawai *flying fox* khususnya persamaan sudut lendutan mempunyai titik kesetimbangan yang

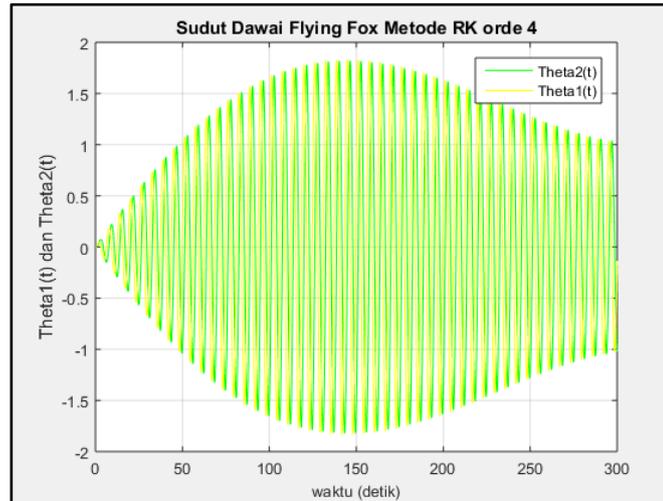
dapat ditentukan jenis kestabilannya yaitu  $E_1(R^*, S^*) = (0,0)$  dan  $E_2(R^*, S^*) = \left(\frac{0,05 \sin t(m_d)}{6k}, 0\right)$ . Menghasilkan nilai eigen kompleks  $\lambda_1 = -0,005h + (0.1331480769h)i$  dan  $\lambda_2 = -0,005h - (0.1331480769h)i$ . Secara diskrit simulasinya dapat dipaparkan sebagai berikut:



**Gambar 4.3** Simulasi II Sistem Diskrit Sudut Lendutan Dawai *Flying Fox*: nilai awal untuk  $R(0) = 0, S(0) = 0, \delta_2 = 1/100, m_b = 50$ , dan  $m_d = 50$

Pada Gambar 4.3 terlihat bahwa simulasi menunjukkan titik kesetimbangan eksis dan bersifat stabil. Hal ini dapat dilihat dari arah solusi menuju titik kesetimbangan. Begitu juga dengan hasil nilai eigen berupa bilangan negatif kompleks. Dengan demikian diperoleh kesimpulan bahwa model yang dianalisis bersifat stabil dengan parameter yang digunakan.

Grafik dari hasil penyelesaian model kontinu sudut lendutan vibrasi dawai *flying fox* secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 akan dipaparkan sebagai berikut:



**Gambar 4.4** Simulasi II Sistem Kontinu Sudut Lendutan Dawai *Flying Fox*: nilai awal untuk  $R(0) = 0, S(0) = 0, \delta_2 = 1/100, m_b = 50,$  dan  $m_d = 50$

Pada Gambar 4.4 menunjukkan grafik model matematika sudut lendutan vibrasi dawai *flying fox* yang kontinu. Grafik ditampilkan dengan program MATLAB di waktu 5 menit awal atau ketika  $t \in [300]$  dalam detik. Dari grafik tersebut terlihat bahwa sudut lendutan semakin besar seiring berjalannya waktu dan kemudian kembali mengecil saat *flying fox* akan selesai, hal ini sesuai dengan fenomena di lapangan bahwa dawai memiliki sudut lendutan kecil pada saat benda atau beban mulai diluncurkan pada wahana *flying fox*. Dari grafik diskrit dan kontinu terlihat bahwa simulasi keduanya menunjukkan titik kesetimbangan eksis dan bersifat stabil. Hal ini juga terlihat dari perbedaan grafik yang tidak terlalu signifikan. Selanjutnya, untuk melihat perbedaan hasil perhitungan lendutan dawai *flying fox* berupa sistem diskrit maupun kontinu yang mengalami perubahan dalam rentang waktu 60 detik pertama dapat di lihat pada Lampiran 5.

#### 4.2 Kajian Nilai Keagamaan Mengenai Kestabilan

Pada BAB I telah dijelaskan mengenai ayat al-Qur'an yang berkaitan dengan validasi atau intropeksi diri yaitu pada QS. Al-Hasyr/59:18 beserta

tafsirnya, sedangkan pada BAB II telah dijelaskan mengenai ayat al-Qur'an yang menjelaskan lebih spesifik terkait topik penelitian yang membahas kestabilan. Kestabilan tersebut merupakan hasil dari proses validasi atau intropeksi diri dari apa yang telah diperbuat. Oleh karena itu, pada subbab ini akan dijelaskan intergrasi dari kedua dalil tersebut dengan hasil penelitian ini.

Kesuksesan seorang muslim dapat dilihat dari kadar ketakwaan kepada Allah Swt dengan bagaimana melakukan peribadatan. Bukan hanya tentang seberapa sering beribadah namun kualitas ibadah yang dilakukan dan efek setelah beribadah. Tidak hanya tentang kualitas ibadah yang diperhatikan, dampak setelahnya juga sangat penting, seperti halnya melakukan kegiatan dengan penuh tanggung jawab. Islam sudah mengatur sedemikian dengan pedoman yang akan menuntun umat islam menjadi hamba yang berkualitas dalam mengatur kegiatan dengan baik, disiplin, dan bertanggung jawab, baik dari kegiatan yang bersifat duniawi maupun ukhrawi (Chasbullah, 2020). Maka dari itu, betapa pentingnya melakukan intropeksi diri, validasi ulang, dan bertanggung jawab atas apa yang dilakukan. Salah satu ayat yang relevan untuk melakukan benah diri dari apa yang telah diperbuat terdapat dalam QS. al-Hasyr ayat 18.

Dalam proses intropeksi atau *muhasabah* diri, seseorang harus totalitas mengerahkan semua kemampuannya. Intropeksi diri dapat diciptakan dengan salah satu cara yakni menghadirkan takwa kepada Allah Swt dan takut terhadap azab-Nya (Khatib, 1970). Hal ini berkesesuaian dengan Ayat tersebut yang menjadi motivasi penulis untuk melakukan intropeksi diri atau validasi ulang dari model matematika vibrasi dawai *flying fox*. Dengan demikian, validasi tersebut dilakukan agar tidak ada pihak yang dibahayakan saat model tersebut telah

diimplementasikan. Hasil yang akan didapat juga menjadi amal baik karena telah berhati-hati dan bertanggung jawab atas apa yang diperbuat.

Validasi dilakukan dengan melakukan analisis kestabilan atau analisis dinamik. Dalam analisis dinamik membahas kestabilan dan kekonsistenan, begitu juga di dalam al-Qur'an sudah terlebih dahulu dibahas. Sebagaimana firman Allah dalam surat al-Mulk ayat 3 sampai 4.

Hasil dan pembahasan dari penelitian ini didapatkan model tersebut memiliki titik kesetimbangan dan jenis kestabilannya. Dari hasil yang menunjukkan kestabilan tersebut menandakan bahwa model layak digunakan dan diimplementasikan di kehidupan nyata. Selain itu, penelitian ini juga mengajarkan bahwa sesuatu yang seimbang atau stabil akan membuahkan hasil yang baik atau bermanfaat.

## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka didapatkan kesimpulan bahwa model diskrit vibrasi dawai *flying fox* berupa persamaan diferensial biasa orde dua direduksi sehingga menghasilkan persamaan diferensial biasa orde satu. Dilakukan diskritisasi menggunakan metode Euler *Forward* menghasilkan sistem dinamik linier dan non linier. Linierisasi dilakukan pada persamaan diferensial yang bersifat non linier. Pada masing-masing sistem dinamik didapatkan titik kesetimbangan yaitu  $E_1(P^*, Q^*) = (0,0)$ ,  $E_2(P^*, Q^*) = \left( \frac{(m_b g)(L)}{(\mu_k N + b\eta v - 2EA)}, 0 \right)$  dan  $E_1(R^*, S^*) = (0,0)$ ,  $E_2(R^*, S^*) = \left( \frac{0,05t(m_a)}{6k}, 0 \right)$  sehingga dapat ditentukan jenis kestabilannya. Titik kesetimbangan  $E_2(P^*, Q^*)$  dan  $E_2(R^*, S^*)$  bersifat stabil dengan nilai eigen negatif kompleks. Pada bagian simulasi dan interpretasi dilakukan simulasi numerik dan potret fase menggunakan parameter yang telah ditentukan. Didapatkan hasil analisis yang sesuai antara model diskrit dan kontinu. Hal ini dapat dilihat dari bentuk simulasi yang spiral dengan arah menuju titik kesetimbangan.

#### 5.2 Saran

Pada penelitian ini dikaji mengenai validasi model dengan melakukan analisis dinamik model diskrit vibrasi dawai *flying fox*. Pada pengkajian selanjutnya diharapkan membahas tentang analisis kestabilan dari model matematika vibrasi dawai *flying fox* yang sudah berbentuk *couple*. Selain itu, diperlukan kajian ulang dari model agar membentuk sistem persamaan yang *couple* atau bebasangan.

## DAFTAR RUJUKAN

- Abdullah, M. (2015). *Metodologi Penelitian Kuantitatif*. Yogyakarta: Aswaja Pressindo.
- Arifudin, A. M. (2007). *Fisika untuk SMA*. Jakarta: Interplus.
- Al-Qur'an dan Terjemahannya*. (2019). Kementrian Agama RI.
- Boyce, W. E., & Diprima, R. C. (2005). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Eight Edition*. USA: Hhn Willey & Sons, Inc.
- Bueche, J. F., & Hecht, E. (2006). *Fisika Universitas (Terjemahan)*. Jakarta: Erlangga.
- Chasbullah, A. (2020). *Tafsir Surah Al-Hasyr Ayat 18: Intropeksi Diri, Manajemen Waktu, dan Tabungan Kebaikan dalam Al-Qur'an*. Retrieved from Tafsir AL-Qur'an: <https://tafsiralquran.id/>
- Elaydi, S. (2005). *An Introduction to Difference Equations. Third Edition*. New York: Springer.
- Hartanto, H. (2015). *Smart Pocket Book Fisika SMA Kelas X, XI, & XII*. Yogyakarta: Indonesia Tera.
- Hidayahningrum, S. (2017). *Konstruksi Model Matematika Vibrasi Dawai Flying Fox. Skripsi*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Indrajit, D. (2009). *Mudah dan Aktif Belajar Fisika*. Jakarta: Setia Purna Inves PT.
- Isbayani, N., Made Sulastri, M., Tirtayani, L., & Psi, S. (2015). Penerapan Metode Outbond untuk Meningkatkan Keterampilan Sosial Emosional Anak. *Jurnal Pendidikan Anak Usia Dini Undiksha*, 1.
- Kanginan, M. (2006). *Fisika untuk SMA Kelas XI*. Jakarta: Erlangga.
- Kehle, P. E. (1998). An Empirical Semiotic Analysis of Abstraction in Mathematical Modeling. *Dissertation Indiana University*.
- Khatib, A. K. (1970). *At-Tafsir al-Qur'an li al-Qur'an*. Beirut: Dar al-Fikr al-'arabi.
- Kusumastuti, J. H. (2017). Analysis Construction of Mathematical Modelling of Flying Fox String Vibration. *Jurnal Teknologi*.
- McKenna, P. J., & Moore, K. S. (1999). The Global Structure of Periodic Solutions to a Suspension Bridge Mechanical Model. *IMA Journal Applied Math*, 459-478.

- Meksianis, Z., & Ndi. (2022). *Pemodelan Matematika*. Jawa Tengah: Penerbit NEM.
- Muhammadi, E. (2001). *Analisis Sistem Dinamis Lingkungan Hidup, Sosial, Ekonomi, Manajemen*. Jakarta: UMJ Press.
- Pagalay, U. (2009). *Mathematical Modelling*. Malang: UIN Malang Press.
- Resmiyanto, R. (2010). *Paradigma Mekanika Newtonian vs Lagrangian: Reduksionisme vs Holisme*. Retrieved from <http://rachmadresmi.blogspot.com>
- Sargent, R. G. (1998). Verification and Validation of Simulation Models. *Electrical Engineering and Computer Science*.
- Tajcova, G., & Plzen. (1997). Mathematical Models of Suspension Bridges. *Applications of Mathematics*, 451-480.
- Young, H. D., & Friedman, R. A. (2002). *Fisika Universitas*. Jakarta: Erlangga.
- Zill, D., & Wright, W. (2013). *Differential Equation with Boundary-Value Problem, Eight Edition*. Boston: Brooks/Cole.
- Zuhaili, W. (1998). *At-Tafsiral-Munir fi al-'Aqidah wa al-Syari'ah wa al-Manhaj*. Damaskus: Dar al-Fikr.

## LAMPIRAN

### Lampiran 1 Program *Maple* untuk Analisis Dinamik Persamaan Lendutan di Sekitar Titik Kesetimbangan

> restart; unprotect('gamma')

> dP := h·Q

$$dP := hQ$$

> dQ := -h·gamma<sub>1</sub>·Q -  $\frac{h \cdot (\mu_k \cdot N + b \cdot \eta \cdot v - 2 \cdot E \cdot A)}{m_d \cdot L} \cdot P + \frac{h \cdot m_b \cdot g}{m_d}$

$$dQ := -h\gamma_1 Q - \frac{h(b\eta v - 2AE + N\mu_k)P}{m_d L} + \frac{hm_b g}{m_d}$$

> titiktetap := solve({dP, dQ}, {P, Q});

$$\text{titiktetap} := \left\{ P = -\frac{m_b g L}{-b\eta v + 2AE - N\mu_k}, Q = 0 \right\}$$

> titiktetap1 := titiktetap[1]; titiktetap2 := titiktetap[2];

$$\text{titiktetap1} := P = -\frac{m_b g L}{-b\eta v + 2AE - N\mu_k}$$

$$\text{titiktetap2} := Q = 0$$

> with(plots) : with(linalg) :

## Lampiran 2 Program *Maple* untuk Analisis Dinamik Persamaan Sudut di Sekitar Titik Kesetimbangan

>  $dR := h \cdot S$

$$dR := h S$$

>  $dS := -h \cdot \text{gamma}_2 \cdot S - \frac{6k \cdot h}{m_d} \cdot (R) + 0.05 \sin(t) \cdot h$

$$dS := -h \gamma_2 S - \frac{6khR}{m_d} + 0.05 \sin(t) h$$

>  $\text{titiktetap} := \text{solve}(\{dR, dS\}, \{R, S\});$

$$\text{titiktetap} := \left\{ R = \frac{0.008333333333 \sin(t) m_d}{k}, S = 0. \right\}$$

>  $\text{titiktetap1} := \text{titiktetap}[1]; \text{titiktetap2} := \text{titiktetap}[2];$

$$\text{titiktetap1} := R = \frac{0.008333333333 \sin(t) m_d}{k}$$

$$\text{titiktetap2} := S = 0.$$

>  $\text{with}(\text{plots}) : \text{with}(\text{linalg}) :$

### Lampiran 3 Program Matlab untuk Simulasi Numerik Model Diskrit Lendutan Vibrasi Dawai *Flying Fox*

```

clc;
clear all;
h=0.001;
t=0:h:300;
n=length(t);
%parameter untuk simulasi I
a1=1/100;
md=50;
mb=50;
l=100;
B=10,62;
g=9.8;
L=10;
%batas ukuran langkah
h1=2/((1/2*a1)-1/2*sqrt((a1)^2*md*L-4*B));
h2=2/((1/2*a1)+1/2*sqrt((a1)^2*md*L-4*B));
%nilai awal
P(1)=0;
Q(1)=0;
%titik kesetimbangan
P1=(mb*g*L)/B
%solusi sistem
for i=1:n-1
    P(i+1)=P(i)+h*Q(i);
    Q(i+1)=Q(i)-h*a1*Q(i)-((h*B)/md*L)*P(i)+h*mb*g/md;

    fprintf('%5.1f %5.4f %8.2f\n',i,t(i+1),P(i+1),Q(i+1));
end;
figure(1);
plot(t,P,'.r',t,Q,'.g');
xlabel('t');
ylabel('P dan Q');
legend('P','Q');
hold on;
title('Lendutan Dawai Flying Fox Model Diskrit');
grid on;

```

#### Lampiran 4 Program Matlab untuk Simulasi Numerik Model Diskrit Sudut Lendutan Vibrasi Dawai *Flying Fox*

```

clc;
clear all;
h=0.1;
t=0:h:100;
n=length(t);
%parameter
a1=1/100;
a2=1/100;
md=50;
mb=50;
l=100;
B=106,2088;
g=9.8;
L=10;
k=8.654625;
%nilai awal
R(1)=0;
S(1)=0;
%titik kesetimbangan
R1=(0.05*sin(t)*md)/6*k
%solusi sistem
for i=1:n-1
    R(i+1)=R(i)+h*S(i);
    S(i+1)=S(i)-h*a2*S(i)-(6*k*h/md)*R(i)+0.05* sin(t)*h;
end;
figure(2);
plot(t,R, '.b', t, S, '.y');
xlabel('t');
ylabel('R dan S');
legend('R', 'S');
hold on;
grid on;

```

**Lampiran 5 Tabel Perhitungan Simulasi Numerik Model Diskrit Sudut Lendutan Vibrasi Dawai *Flying Fox***

$t$	$P$	$Q$
1	0.007495	0.020893
2	0.042944	0.044303
3	0.075292	0.008128
4	0.041865	-0.07669
5	-0.06247	0 -0.11528078
6	-0.14661	7 -0.03244145
7	-0.10268	6 0.12036555
8	0.065485	0.189092
9	0.211235	0.071952
10	0.17265	3 -0.15019050
11	-0.05178	05 -0.2628749
12	-0.26666	66 -0.1252670
13	-0.24922	75 0.16482898
14	0.021627	5 0.33378503
15	0.310636	0.190625
16	0.329691	-0.16336
17	0.024283	-0.39906
18	-0.3412	-0.26594
19	-0.41123	0.145283
20	-0.08483	0.456071
21	0.356769	0.348847
22	0.490987	-0.11056
23	0.158486	-0.50241
24	-0.35612	-0.43677
25	-0.56612	0.059586
26	-0.24338	0.53593
27	0.338473	0.526957
28	0.633887	0.006807
29	0.337321	-0.55479
30	-0.30346	-0.61658
31	-0.6917	-0.08737
32	-0.43784	0.557496
33	0.251178	0.702767
34	0.737185	0.180462
35	0.542266	-0.54297
36	-0.18215	-0.78269
37	-0.76824	-0.28409
38	-0.64778	0.510542
39	0.097353	0.853611

$t$	$R$	$S$
1	6.478625	3.500229
2	7.976542	11.23668
3	3.449396	17.31957
4	-3.23192	0 17.42390982
5	-7.86306	7 12.01404535
6	-6.96223	1 4.30773802
7	-1.15153	4 0.31071079
8	5.302132	2.256393
9	8.313729	9.183565
10	5.281681	6 16.12223499
11	-1.19339	60 18.15484613
12	-7.01757	32 14.16190883
13	-7.88778	02 6.46583962
14	-3.24624	09 0.92319140
15	3.546439	5 0.92600225
16	8.059718	5 6.82919979
17	6.761438	2 14.35781714
18	0.953914	1 18.25340449
19	-5.67838	24 16.00108871
20	-8.28486	22 8.82546527
21	-5.13112	55 2.11354300
22	1.5238	4 0.14792314
23	7.259916	3 4.61250308
24	7.787477	4 12.23011567
25	3.059586	0 17.72726305
26	-3.93816	06 17.40151901
27	-8.12246	19 11.22700545
28	-6.67819	91 3.80497134
29	-0.62866	71 -0.02011931
30	5.962451	1 2.68749206
31	8.286031	6 9.87938922
32	4.979328	6 16.60816746
33	-1.91268	88 18.26171742
34	-7.40514	40 13.50778368
35	-7.77987	56 5.88624880
36	-2.76366	55 0.43893800
37	4.250099	2 1.18940228
38	8.218658	8 7.46290279
39	6.580005	7 14.96835244

40	0.783096	0.395963
41	0.751466	-0.45997
42	0.001837	-0.91297
43	-0.78033	-0.51351
44	-0.8504	0.391478
45	-0.11365	0.958438
46	0.758922	0.633976
47	0.941702	-0.30571
48	0.235965	-0.98794
49	-0.71829	-0.75445
50	-1.0226	0.203777
51	-0.36636	0.999763
52	0.658295	0.871967
53	1.090487	-0.08717
54	0.502142	-0.99254
55	-0.57924	-0.98352
56	-1.14301	-0.04221
57	-0.64045	0.965329
58	0.481872	1.086177
59	1.17811	0.18212
60	0.778256	-0.91761

40	0.261966	4 18.51639936
41	-6.17578	66 15.51172295
42	-8.3577	41 8.21837716
43	-4.73396	10 1.49965206
44	2.234943	0 0.22529931
45	7.585192	6 5.14424364
46	7.748926	5 12.91603986
47	2.438341	2 18.14126230
48	-4.51291	28 17.10006389
49	-8.36801	26 10.64386554
50	-6.40239	61 3.09534165
51	0.050983	5 -0.13343690
52	6.424111	0 3.08213369
53	8.401783	8 10.58843643
54	4.467627	9 17.15501464
55	-2.52564	14 18.16101198
56	-7.80528	49 12.99734651
57	-7.65129	39 5.12220217
58	-2.15482	29 0.14372426
59	4.810257	1 1.41947864
60	8.488717	0 8.14267740

## RIWAYAT HIDUP



Aniq Nur Matsubah, lahir di Lumajang, 03 April 2001. Tinggal di Desa Besuk, Kecamatan Tempeh, Kabupaten Lumajang. Anak pertama dari 2 bersaudara. Putri dari pasangan Bapak Abdul Mu'id Masduqi dan Ibu Inayatur Rohmah. Pendidikan dasar ditempuh di MI Nurul Islam Tempeh Tengah dan lulus pada tahun 2013, kemudian melanjutkan Pendidikan menengah pertama di MTs Unggulan Ma'arif NU Nurul Islam Bades Pasirian dan lulus pada tahun 2016. Setelah itu melanjutkan pendidikan menengah atas di MA Ma'arif NU Nurul Islam Bades Pasirian dan lulus pada tahun 2019. Selanjutnya menempuh Pendidikan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2019 melalui jalur SNMPTN. Selama menempuh Pendidikan tinggi, peneliti menjadi musaidah di Haiyah Tahfidz Qur'an selama 1 periode dan menjadi musyrifah santri tahfidz di Ma'had Sunan Ampel Al-'Aly selama 3 periode. Peneliti dapat dihubungi melalui *e-mail*: [matsubaha@gmail.com](mailto:matsubaha@gmail.com).



**KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Aniq Nur Matsubah  
NIM : 19610006  
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika  
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Diskrit Vibrasi Dawai *Flying Fox*  
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.  
Pembimbing II : Dr. Abdussakir, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	13 September 2022	Konsultasi Topik dan Data	1.
2.	17 November 2022	Konsultasi Bab I	2.
3.	23 November 2022	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	1 Maret 2023	ACC Bab I, II, dan III	4.
5.	3 Maret 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	8 Maret 2023	ACC Kajian Agama Bab I dan II	6.
7.	10 Maret 2023	ACC Seminar Proposal	7.
8.	3 Mei 2023	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	8.
9.	9 Mei 2023	Konsultasi Bab IV dan V	9.
10.	10 Mei 2023	ACC Bab IV	10.
11.	11 Agustus 2023	ACC Bab IV dan V	11.
12.	22 September 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	12.
13.	13 Oktober 2023	ACC Kajian Agama Bab IV	13.
14.	16 Oktober 2023	ACC Seminar Hasil	14.
15.	19 November 2023	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	15.
16.	6 Desember 2023	ACC Sidang Skripsi	16.



**KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

17.	20 Desember 2023	ACC Keseluruhan	17.
-----	------------------	-----------------	-----

Malang, 21 Desember 2023  
Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika

  
  
Dr. Elly Susanti, M.Sc.  
NIP. 19741129 200012 2 005