

KONTROL OPTIMAL MODEL SEIT (*SUSCEPTIBLE, EXPOSED, INFECTIVE, TREATMENT*) PADA PENULARAN PENYAKIT SKABIES

SKRIPSI

**OLEH
MUKHAMMAD KHADIK NGAINURIDWAN
NIM. 19610039**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023**

KONTROL OPTIMAL MODEL SEIT (*SUSCEPTIBLE, EXPOSED, INFECTIVE, TREATMENT*) PADA PENULARAN PENYAKIT SKABIES

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat.)**

**Oleh
Mukhammad Khadik Ngainuridwan
NIM. 19610039**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023**

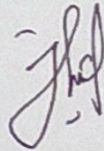
KONTROL OPTIMAL MODEL SEIT (*SUSCEPTIBLE, EXPOSED, INFECTIVE, TREATMENT*) PADA PENULARAN PENYAKIT SKABIES

SKRIPSI

Oleh
Mukhammad Khadik Ngainuridwan
NIM. 19610039

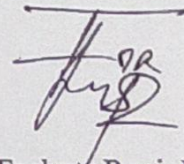
Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji
Malang, 20 Desember 2023

Dosen Pembimbing I,



Juhari, M.Si.
NIP. 198402092023211010

Dosen Pembimbing II,



Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP. 198005272008011012

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 197411292000122005

KONTROL OPTIMAL MODEL SEIT (*SUSCEPTIBLE, EXPOSED, INFECTIVE, TREATMENT*) PADA PENULARAN PENYAKIT SKABIES

SKRIPSI

Oleh
Mukhammad Khadik Ngainuridwan
NIM. 19610039

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

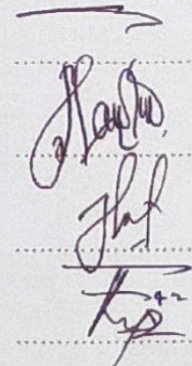
Tanggal 27 Desember 2023

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Anggota Penguji 1 : Intan Nisfulaila, M.Si.

Anggota Penguji 2 : Juhari, M.Si.

Anggota Penguji 3 : Dr. Fachrur Rozi, M.Si.



Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Ely Susanti, M.Sc.
NIP. 197411292000122005

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Mukhammad Khadik Ngainuridwan
NIM : 19610039
Progran Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Kontrol Optimal Model SEIT (*Susceptible, Exposed, Infective, Treatment*) pada Penularan Penyakit Skabies

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 Desember 2023

Yang membuat pernyataan,



Mukhammad Khadik Ngainuridwan

NIM. 19610039

HALAMAN MOTO

“Pemenang sejati adalah orang-orang yang mampu bangkit dari setiap kegagalan dan berjuang hingga garis akhir.”

HALAMAN PERSEMBAHAN

Alhamdulillah atas izin Allah SWT yang memudahkan penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Skripsi ini penulis persembahkan kepada Ayahanda tercinta Saerodji, Ibunda tercinta Siti Khodijah, Kakakku tersayang Nurul Khasanah yang tak henti-hentinya memberikan nasihat, do'a serta dukungan kepada penulis baik secara material maupun moril.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya, sehingga peneliti dapat menyelesaikan proposal skripsi dengan judul “Kontrol Optimal Model SEIT (*Susceptible, Exposed, Infective, Treatment*) pada Penularan Penyakit Skabies”. Shalawat dan salam mudah-mudahan selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah memimpin manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu *ad-dinul Islam* (agama islam).

Proposal skripsi ini dibuat oleh peneliti guna memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana matematika dari Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. terselesaikannya penyusunan proposal skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, peneliti mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Muhammad Zainuddin, M.A., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Juhari, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan bimbingan, nasihat, dan ilmu yang berharga kepada peneliti.
5. Dr. Fachrur Rozi, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, ilmu, dan nasihat yang berharga kepada peneliti.
6. Dr. Usman Pagalay, M.Si., selaku ketua penguji yang telah banyak memberikan bimbingan, nasihat, dan ilmu yang berharga kepada peneliti.
7. Intan Nisfulaila, M.Si., selaku anggota penguji I yang telah banyak memberikan arahan, ilmu, dan nasihat yang berharga kepada peneliti.

8. Segenap dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
9. Orang tua peneliti serta seluruh keluarga yang senantiasa mendoakan, memberikan semangat, motivasi, dan kasih sayang yang berlimpah sehingga peneliti dapat menyelesaikan proposal skripsi.
10. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2019 yang selalu membantu dan memberikan semangat di setiap saat.
11. Semua pihak yang secara langsung maupun tidak langsung yang telah berkontribusi dalam memberikan bantuan dan motivasi selama menyelesaikan penelitian ini.

Semoga Allah SWT memberikan balasan atas segala kebaikan yang telah diberikan kepada peneliti. Peneliti berharap agar laporan ini dapat bermanfaat khususnya bagi peneliti dan bagi para pembaca pada umumnya.

Malang, 27 Desember 2023

Peneliti

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
HALAMAN MOTO	vi
HALAMAN PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
DAFTAR SIMBOL	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
ملخص	xviii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Definisi Istilah	6
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Persamaan Diferensial	7
2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa Linear	7
2.1.2 Persamaan Diferensial Biasa Non-Linear	8
2.2 Batas Solusi	8
2.3 Titik Ekuilibrium	9
2.4 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	10
2.5 Fungsi Lyapunov	11
2.6 Prinsip Invarian LaSalle	12
2.7 Ukuran Lozinskii	13
2.8 Teori Kontrol Optimal	14
2.9 Prinsip Maksimum Pontryagin	16
2.10 Metode Runga Kutta Orde 4	17
2.11 Model Matematika Dinamika Penyakit Skabies	18
2.11.1 Batas Solusi Model	20
2.11.2 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit	22
2.11.3 Titik Ekuilibrium Endemik	23
2.11.4 Bilangan Reproduksi Dasar	24
2.11.5 Kestabilan Global Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit	26
2.11.6 Kestabilan Global Titik Ekuilibrium Endemik	27

2.12 Skabies	36
2.13 Ikhtiar Menurut Pandangan Islam.....	37
BAB III METODE PENELITIAN	41
3.1 Jenis Penelitian.....	41
3.2 Tahapan Penelitian.....	41
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	43
4.1 Analisis Kontrol Optimal	43
4.2 Penyelesaian Analisis Kontrol Optimal	46
4.3 Simulasi Numerik	54
BAB V PENUTUP	66
5.1 Kesimpulan	66
5.2 Saran.....	67
DAFTAR PUSTAKA	68
LAMPIRAN.....	70
RIWAYAT HIDUP	76

DAFTAR TABEL

Tabel 1.1 Nilai Parameter Pada Model Penyakit Skabies.....	5
Tabel 4.1 Nilai Awal Populasi	47
Tabel 4.2 Nilai Parameter Simulasi	47

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Model Dinamika Penyakit Skabies	19
Gambar 4.1 Model Dinamika Penyakit Skabies dengan Kontrol	44
Gambar 4.2 Penyebaran Penyakit Skabies Tanpa Kontrol	61
Gambar 4.3 Penyebaran Penyakit Skabies dengan dan Tanpa Kontrol.....	62
Gambar 4.4 Simulasi Kontrol u_1, u_2, u_3	63

DAFTAR LAMPIRAN

- Lampiran 1 M-File Simulasi Numerik Tanpa Kontrol
- Lampiran 2 M-File Simulasi Numerik Dengan Kontrol

DAFTAR SIMBOL

- $S(t)$: Banyaknya individu rentan terinfeksi pada waktu t
 $E(t)$: Banyaknya individu dalam masa inkubasi pada waktu t
 $I(t)$: Banyaknya individu yang mengalami infeksi pada waktu t
 $T(t)$: Banyaknya individu dalam pengobatan pada waktu t
 α : Laju pertumbuhan populasi
 β : Tingkat individu yang rentan terinfeksi karena kontak
 μ : Tingkat kematian alami
 θ : Proporsi individu dalam masa inkubasi yang menolak pengobatan
 σ : Tingkat individu dalam masa inkubasi yang menjalani pengobatan
 γ : Tingkat individu terinfeksi yang menjalani pengobatan
 t : Variabel bebas (waktu)
 N : Total individu
 u : Upaya edukasi masyarakat

ABSTRAK

Ngainuridwan, Mukhammad Khadik. 2023. **Kontrol Optimal Model SEIT (*Susceptible, Exposed, Infective, Treatment*) pada Penularan Penyakit Skabies**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Juhari, M.Si., (II) Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

Kata kunci: Kontrol Optimal, SEIT, Skabies, Prinsip Maksimum Pontryagin.

Skabies merupakan ruam yang diakibatkan oleh serangan dan sensitisasi tungau *Sarcoptes scabiei var. hominis* yang bermanifestasi sebagai lesi *papular, pustula* dan *vesikel*. Sedangkan kontrol optimal adalah upaya untuk menemukan kontrol suatu sistem dinamis selama periode waktu, sehingga fungsi tujuan dapat dioptimalkan. Untuk mencegah serta mengatasi penyebaran penyakit skabies maka dilakukan analisis kontrol optimal model SEIT pada penularan penyakit skabies menggunakan prinsip maksimum Pontryagin disertai fungsi Hamiltonian. Pada model diberikan faktor kontrol berupa edukasi masyarakat. Serta dilakukan simulasi numerik menggunakan metode Runge Kutta orde 4. Berdasarkan hasil simulasi yang diperoleh, populasi rentan skabies (S), populasi dalam inkubasi skabies (E), populasi terinfeksi skabies (I) dan populasi dalam pengobatan (T) berhasil dioptimalkan dengan kontrol yang diberikan. Oleh karena itu kontrol edukasi masyarakat memiliki pengaruh dalam mencegah dan mengatasi penularan penyakit skabies. Masyarakat yang hidup di lingkungan yang rentan skabies bisa diberikan edukasi terkait skabies, dengan begitu penyebaran penyakit skabies bisa dicegah dan diatasi.

ABSTRACT

Ngainuridwan, Mukhammad Khadik. 2023. **Optimal Control of SEIT Model (Susceptible, Exposed, Infective, Treatment) in Transmission of Scabies.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Juhari, M.Si., (II) Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

Keywords: Optimal Control, SEIT, Scabies, Pontryagin's Maximum Principle.

Scabies is a rash caused by attack and sensitization of the mite *Sarcoptes scabiei* var. *hominis* which manifests as papular lesions, pustules and vesicles. Meanwhile, optimal control is an attempt to find the control of a dynamic system over a period of time, so that the objective function can be optimized. To prevent and overcome the spread of scabies, an optimal control analysis of the SEIT model for the transmission of scabies was carried out using the Pontryagin maximum principle accompanied by the Hamiltonian function. The model provides a control factor in the form of public education. Numerical simulations were also carried out using Runge Kutta order 4 method. Based on the simulation results obtained, the scabies susceptible population (S), the scabies incubation population (E), the scabies infected population (I) and the population under treatment (T) were successfully optimized with the control provided. Therefore, community education control has an influence in preventing and overcoming the transmission of scabies. People who live in environments that are susceptible to scabies can be given education regarding scabies, so that the spread of scabies can be prevented and managed.

ملخص

نجينوريدوان، محمد خاديك. ٢٠٢٣. التحكم الأمثل في النموذج SEIT (المعرض ، المكشوف ، المعدي ، العلاج) على انتقال مرض الجرب. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) جوهري، الماجستير، (٢) الدكتور فخرور روزي، الماجستير.

الكلمة المفتاحية: التحكم الأمثل، SEIT، الجرب، مبدأ Pontryagin الأقصى

الجرب هو طفح جلدي ناجم عن هجوم وحساسية العث *Sarcoptes scabiei var. hominis* الذي يظهر على شكل آفات حطاطية وبثرات وحبوب. في حين أن التحكم الأمثل هو محاولة للعثور على التحكم في النظام الديناميكي على مدى فترة من الزمن، بحيث يمكن تحسين الوظيفة الموضوعية. لمنع انتشار الجرب والتغلب عليه، تم إجراء تحليل التحكم الأمثل لنموذج SEIT لانتقال الجرب باستخدام مبدأ Pontryagin الأقصى المصحوب بوظيفة Hamiltonian. يوفر النموذج عامل تحكم في شكل التعليم العام. وتم إجراء عمليات المحاكاة العددية باستخدام طريقة Runge Kutta من الدرجة ٤. استنادًا إلى نتائج المحاكاة التي تم الحصول عليها، فإن السكان المعرضين للجرب (S)، ومجموعات حضانة الجرب (E)، والسكان المصابين بالجرب (I)، والسكان الخاضعين للعلاج (T) تم تحسينها بنجاح باستخدام عناصر التحكم المناسبة. ولذلك فإن مراقبة التثقيف المجتمعي لها تأثير في الوقاية من انتقال مرض الجرب والتغلب عليه. يمكن إعطاء الأشخاص الذين يعيشون في بيئات معرضة للإصابة بالجرب التثقيف بشأن الجرب، بحيث يمكن منع انتشار الجرب وإدارته.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Skabies atau yang biasa disebut dengan kudis merupakan ruam akibat serangan dan sensitisasi oleh tungau *Sarcoptes scabiei var. hominis* yang bermanifestasi sebagai lesi *papular, pustula, vesikel*, terkadang dengan erosi, krusta juga terowongan keabu-abuan dengan keluhan subyektif berupa rasa gatal yang hebat yang muncul di daerah celah dan lipatan (Nurainiwati, 2011). Beberapa faktor mempengaruhi perkembangan penyakit skabies, di antaranya keadaan sosial ekonomi yang buruk, daerah dalam keadaan perang, kepadatan penduduk yang tinggi, sanitasi yang buruk, pengetahuan yang rendah, serta kesalahan ketika diagnosis dan penatalaksanaan skabies. Penularan skabies dapat terjadi di antara penderita melalui kontak langsung dari orang ke orang dan kulit ke kulit dalam jangka waktu yang cukup lama. Ini bisa terjadi ketika berbagi kamar dan tidur bersama, terutama anak-anak yang bertempat tinggal di asrama. Ditambah, skabies dapat menular melalui kontak tidak langsung yaitu melalui pakaian yang dipakai bersama dan peralatan mandi yang tidak terpisah (Nurainiwati, 2011).

Penyakit skabies mudah menyebar di wilayah Asia dengan iklim tropis dan subtropis. Karena hal ini Indonesia masuk dalam daftar negara yang mana penduduknya tidak jarang menderita penyakit skabies. Penderita penyakit skabies di dunia pada umumnya terdapat sekitar 200 juta orang setiap tahunnya (Winarni dan Sofiyati, 2022). Sedangkan dari Kementerian Kesehatan Republik Indonesia menjelaskan bahwa sebesar 4,60% hingga 12,95% dari jumlah penduduk

Indonesia terjangkit skabies dalam suatu waktu. Hal ini mengindikasikan bahwa Indonesia menyumbang cukup besar dalam kasus skabies tahunan di dunia.

Penyakit skabies sendiri menduduki urutan ketiga pada dua belas penyakit kulit yang banyak diderita di Indonesia (Winarni dan Sofiyati, 2022). Ditambah lagi penanganan dan pencegahan terhadap skabies masih sangat kurang. Masyarakat Indonesia banyak yang tidak peduli jika mereka bisa tertular skabies. Saat sudah tertular skabies, barulah orang-orang merasa frustrasi dengan skabies. Sedangkan penyakit skabies sangat sulit disembuhkan hanya dengan pengobatan saja, kita juga harus memastikan bahwa lingkungan tempat tinggal sudah terbebas dari skabies. Oleh sebab itu, sangat dianjurkan bagi masyarakat Indonesia untuk meningkatkan pemahaman terkait skabies serta kebersihan individu dan kebersihan lingkungan tempat tinggal agar bisa menghentikan penyebaran penyakit skabies.

Allah SWT berfirman dalam QS. Al-Anbiya ayat 83:

“Dan (ingatlah kisah) Ayub, ketika ia menyeru Tuhannya: (Ya Tuhanku), sesungguhnya aku telah ditimpa penyakit dan Engkau adalah Tuhan Yang Maha Penyayang di antara semua penyayang.”

Berdasarkan ayat tersebut, diceritakan kisah Nabi Ayyub yang diberikan ujian oleh Allah berupa penyakit parah dalam tubuhnya. Dalam menghadapi ujian tersebut, Nabi Ayyub senantiasa bersabar, bertawakal dan menguatkan iman bahwa Allah adalah sebaik-baiknya penyayang yang memberikan kesembuhan. Maka dari itu, saat ditimpa cobaan berupa penyakit, alangkah baiknya senantiasa berdoa kepada Allah dan terus berusaha untuk mencari jalan kesembuhan. Sebab dengan kehendak Allah, semua jenis penyakit bisa disembuhkan termasuk skabies.

Beberapa penelitian sebelumnya mengenai pencegahan dan penanganan penyebaran penyakit skabies telah dilakukan oleh Winarni dan Sofiyati (2022) yang menganalisis kestabilan lokal model SEITS di Indonesia. Pada penelitian tersebut didapatkan titik ekuilibrium bebas penyakit serta titik ekuilibrium endemik dengan kestabilan asimtotik lokal. Hasil simulasi yang diperoleh menjelaskan bahwa penyebaran skabies dapat ditekan dengan meningkatkan pengobatan dan mengurangi kontak dengan individu yang terinfeksi. Sementara Utami (2021) menganalisis kestabilan lokal pada model SIRS kemudian dilakukan pengujian dengan mengasumsikan nilai parameter. Dari pengujian tersebut, kedua titik ekuilibrium stabil asimtotik lokal. Berikutnya, Sriyanti dan Ahmad (2021) menganalisis model penularan skabies pada hewan dan manusia (SEIRSEI). Pada penelitian ini didapatkan dua titik ekuilibrium namun tidak diketahui jenis kestabilannya. Selain itu, diperoleh kesimpulan bahwa faktor penting dalam penularan skabies adalah kebersihan dan lingkungan. Dari tiga penelitian yang sudah disebutkan tidak dilakukan analisis kestabilan global dan kontrol optimal. Yang mana kontrol optimal adalah menentukan kontrol untuk sistem dinamis selama periode waktu sehingga fungsi tujuan dioptimalkan.

Berdasarkan permasalahan di atas, penelitian selanjutnya yang akan dikaji adalah melakukan analisis kontrol optimal pada model SEIT dengan faktor kontrol berupa edukasi masyarakat menggunakan prinsip maksimum Pontryagin disertai fungsi Hamiltonian agar menghasilkan solusi kontrol yang bertujuan untuk mengatasi penyebaran penyakit skabies di Indonesia.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana analisis kontrol optimal model SEIT (*Susceptible, Exposed, Infective, Treatment*) pada penularan penyakit skabies dengan faktor kontrol berupa edukasi masyarakat?
2. Bagaimana hasil simulasi numerik model SEIT (*Susceptible, Exposed, Infective, Treatment*) pada penularan penyakit skabies dengan faktor kontrol berupa edukasi masyarakat?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan pada penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui analisis kontrol optimal pada model SEIT (*Susceptible, Exposed, Infective, Treatment*) pada penularan penyakit skabies dengan faktor kontrol berupa edukasi masyarakat.
2. Untuk mengetahui hasil simulasi numerik pada model SEIT (*Susceptible, Exposed, Infective, Treatment*) pada penularan penyakit skabies dengan faktor kontrol berupa edukasi masyarakat.

1.4 Manfaat Penelitian

Diharapkan penelitian ini dapat memberikan kontribusi dan bermanfaat dalam bidang kesehatan untuk mencegah penyebaran penyakit skabies, sehingga dapat dijadikan acuan pada usaha mengurangi penderita penyakit skabies dan menciptakan lingkungan yang bebas dari skabies.

1.5 Batasan Masalah

Supaya persoalan yang dibahas sesuai dengan ruang lingkup penelitian, maka dibuat batasan masalah yaitu persoalan yang dibahas dalam penelitian ini adalah menganalisis kontrol optimal dan membuat simulasi numerik pada model SEIT penyakit skabies menggunakan model yang telah dibuat oleh Farman, dkk (2018) yang berjudul “*Analysis and numerical solution SEIR epidemic model of measles with non-integer time fractional derivatives by using Laplace Adomian Decomposition Method*”. Model SEIT penyakit skabies yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \alpha - \beta SI - \mu S \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (\sigma + \theta + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} &= \theta E - (\gamma + \mu)I \\ \frac{dT}{dt} &= \sigma E + \gamma I - \mu T\end{aligned}\tag{1.1}$$

Dengan nilai parameter berdasarkan Bhunu, dkk (2013) dan Beeton, dkk (2018) yang terdapat pada Tabel 1.1.

Tabel 1.1 Nilai Parameter Pada Model Penyakit Skabies

Notasi	Deskripsi	Nilai	Satuan	Kondisi
α	Laju pertumbuhan populasi	0.029	Pertahun	$\alpha > 0$
β	Tingkat individu yang rentan terinfeksi karena kontak	0.043	Pertahun	$0 \leq \beta \leq 1$
μ	Tingkat kematian alami	0.02	Pertahun	$0 \leq \mu \leq 1$
θ	Tingkat individu dalam masa inkubasi yang menolak pengobatan	0.03	Pertahun	$0 \leq \theta \leq 1$
σ	Tingkat individu dalam masa inkubasi yang menjalani pengobatan	0.014	Pertahun	$0 \leq \sigma \leq 1$
γ	Tingkat individu terinfeksi yang menjalani pengobatan	0.75	Pertahun	$0 \leq \gamma \leq 1$

1.6 Definisi Istilah

Pada penelitian ini mencakup beberapa istilah, yaitu:

1. Kontrol optimal

Kontrol optimal adalah menemukan kontrol untuk sistem dinamis selama periode waktu sedemikian rupa sehingga fungsi tujuan dioptimalkan.

2. Model matematika

Model matematika adalah suatu penyelesaian permasalahan sehari-hari dengan cara mempresentasikannya ke dalam bentuk matematika berupa suatu persamaan diferensial.

3. Skabies

Skabies atau yang biasa disebut dengan kudis merupakan ruam akibat serangan dan sensitisasi oleh tungau *Sarcoptes scabiei var. hominis* yang bermanifestasi sebagai lesi *papular*, *pustula*, *vesikel*, terkadang dengan erosi, krusta juga terowongan keabu-abuan dengan keluhan subyektif berupa rasa gatal yang hebat yang muncul di daerah celah dan lipatan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari atau fenomena alam yang terjadi di dunia dapat dibentuk menjadi persamaan diferensial untuk membangun sebuah model matematika. Oleh karena itu persamaan diferensial memiliki peran penting dalam berbagai bidang. Menurut Trench (2013), persamaan diferensial adalah persamaan yang mencakup satu atau lebih turunan dari fungsi yang tidak diketahui. Order pada persamaan diferensial merupakan order dari turunan yang paling tinggi yang dimiliki persamaan tersebut. Persamaan diferensial yang melibatkan fungsi satu variabel disebut sebagai persamaan diferensial biasa. Sedangkan jika memuat turunan parsial pada sebuah fungsi yang memiliki lebih dari satu variabel, maka disebut persamaan diferensial parsial. Bentuk sederhana persamaan diferensial biasa yaitu persamaan orde satu berikut

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{atau} \quad y' = f(x)$$

di mana f adalah fungsi terhadap x .

2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa Linear

Selain persamaan diferensial yang memiliki dua jenis, persamaan diferensial biasa juga dibagi menjadi dua berdasarkan kelinearannya yaitu persamaan diferensial biasa linear dan persamaan diferensial biasa non-linear. Persamaan diferensial biasa linear merupakan persamaan diferensial yang memiliki turunan bersifat linear dan peubahnya tidak bebas. Menurut Trench

(2013), persamaan diferensial biasa orde pertama disebut linear jika dapat ditulis sebagai

$$y' + a(x)y = f(x)$$

atau

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

di mana a adalah koefisien konstan. Misalnya $\frac{dy}{dt} = -ay + b$.

2.1.2 Persamaan Diferensial Biasa Non-Linear

Yang kedua adalah persamaan diferensial biasa non-linear yang mana kebalikan dari persamaan diferensial biasa linear. Sebuah persamaan diferensial biasa dapat dikatakan non-linear jika memenuhi syarat berikut:

1. Variabel tidak bebas dan turunan berpangkat selain satu
2. Dari variabel tidak bebas atau turunannya memiliki suatu perkalian dan fungsi transendental

Bentuk yang biasa digunakan dari persamaan diferensial biasa non-linear orde satu adalah:

$$a_0 \left(\frac{dx}{dy}\right)^n + a_1 \left(\frac{dx}{dy}\right)^{n-1} + a_2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^{n-2} + \dots + \frac{a_n dx}{dy} + a_n y = 0$$

yang mana a_0, a_1, \dots, a_n adalah fungsi dari x dan y (Mastuti, 2004).

2.2 Batas Solusi

Batas solusi merupakan syarat atau batasan ketika melakukan proses memaksimalkan atau meminimalkan suatu fungsi tujuan. Hal ini biasa disebut sebagai batasan optimasi. Dalam metode optimasi diperlukan titik yang minimum

pada sebuah fungsi dalam sub himpunan ruang bilangan riil yang tidak kosong. Misalkan Q adalah ruangan bilangan riil, kemudian P adalah subset tak kosong dari Q , dan dimisalkan fungsi $f: P \rightarrow Q$. Ketika $f(\bar{x}) \leq f(x)$ untuk setiap $x \in P$, maka sebuah elemen $\bar{x} \in P$ bisa dikatakan sebagai titik minimum f pada P . Dalam hal ini, fungsi f adalah fungsi obyektif sedangkan P adalah himpunan yang membatasi (Umar dan DEA, 2011).

Sebagai contoh, diberi suatu fungsi f sebagai berikut:

$$f(x) = \int_{t_0}^{t_1} l(x(t), x'(t), t) dt,$$

di mana $-\infty < a < b < \infty$ dan l merupakan fungsi kontinu yang bisa didiferensialkan dengan cara kontinu pada x dan t . Kemudian diberikan

$$P := \{x \in C^1[a, b] | x(a) = x_1 \text{ dan } x(b) = x_2\}$$

yang mana x_1 dan x_2 merupakan titik terminal yang tidak berubah (Umar dan DEA, 2011).

2.3 Titik Ekuilibrium

Nama lain dari ekuilibrium adalah kesetimbangan, artinya suatu keadaan atau kondisi yang tetap karena keseimbangan atau sepadan. Selain itu terdapat juga titik ekuilibrium atau titik kesetimbangan yang mana dalam matematika merupakan pusat dari ilmu dinamika sebagai subjek studi tentang teori stabilitas. Suatu titik $x_0 \in \mathbb{R}^2$ dikatakan sebagai titik kesetimbangan atau titik ekuilibrium pada sebuah sistem nonlinier $\dot{x} = f(x)$ jika $f(x_0) = 0$. Kemudian jika $\phi_1: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ adalah pemetaan dari persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$, maka $\phi_t(x_0) = x_0$ untuk semua $t \in \mathbb{R}$. Dengan demikian, x_0 merupakan titik tetap dari pemetaan ϕ_t (Perko, 2000).

Titik ekuilibrium pada model SEIT terdiri dari dua titik utama di antaranya titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit mengindikasikan bahwa tidak terdapat manusia terinfeksi atau dalam tahap terinfeksi pada suatu populasi. Sebaliknya, titik ekuilibrium endemik mengindikasikan bahwa terdapat individu yang terinfeksi atau dalam tahap terinfeksi pada suatu populasi.

2.4 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar adalah rerataan dari sejumlah individu yang mengalami infeksi yang disebabkan oleh penularan dari individu lainnya yang sebelumnya sudah terinfeksi. Bilangan reproduksi dasar juga bisa disebut sebagai nilai ambang batas endemik yang sering dipakai untuk parameter ambang. Parameter ambang sendiri biasanya digunakan untuk mencari batas dari penyebaran suatu penyakit dan kepunahannya. Ketika $R_0 < 1$, penyebaran penyakit menjadi ditiadakan kemudian penyakit bisa musnah. Sedangkan saat $R_0 > 1$, penyebaran penyakit akan berlangsung pada populasi kemudian menyebabkan terjadinya wabah penyakit (Giesecke, 2002).

Suatu metode yang dipakai dalam mencari bilangan reproduksi dasar adalah Matriks Next Generation. Metode tersebut menggunakan matriks yang diperoleh dalam perkalian antara invers matriks V dan matriks F .

$$G = FV^{-1}$$

yang mana V^{-1} adalah rata-rata usia individu dan F adalah laju individu terinfeksi yang dihasilkan dari individu terinfeksi lainnya (Winarni dan Sofiyati, 2022)

2.5 Fungsi Lyapunov

Fungsi Lyapunov merupakan suatu fungsi yang dibentuk dengan tujuan untuk mengetahui kestabilan global pada sistem non-linear. Dalam penggunaan metode Lyapunov diperlukan langsung sebuah fungsi Lyapunov untuk menyelesaikan kestabilan sistem dinamik yaitu suatu fungsi skalar dengan syarat tertentu. Lyapunov banyak digunakan pada analisis kestabilan sistem linear, sistem non-linear, sistem *time-invariant*, sistem *time-varying* (Sundari & Apriliani, 2017).

Misalkan terdapat suatu persamaan diferensial biasa autonomous C^r , $r \geq 1$ berikut

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

mempunyai titik ekuilibrium pada $x = \bar{x}$ yaitu

$$f(\bar{x}) = 0$$

Untuk fungsi skalar yang didefinisikan pada \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} V: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow V(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ditentukan turunan dari persamaan (2.1) sepanjang lintasan persamaan (2.2) yaitu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} V(x) &= \dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot \dot{x} \\ &= \nabla V(x) \cdot f(x) \end{aligned}$$

Sehingga dapat dinyatakan teorema Lyapunov sebagai berikut:

Teorema 1. Misalkan terdapat bidang vektor autonomous C^r , ($r \geq 1$) pada \mathbb{R}^n :

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

Asumsikan $x = \bar{x}$ adalah titik tetap dari (2.3) dan $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi C^1 yang terdefinisi di beberapa lingkungan U dari \bar{x} yaitu:

1. $V(\bar{x}) = 0$ dan $V(x) > 0$ jika $x \neq \bar{x}$
2. $V(\dot{x}) \leq 0$ di $U - \bar{x}$
3. $\dot{V}(x) < 0$ di $U - \bar{x}$

Maka \bar{x} stabil asimtotik (Wiggins, 2017).

Agar pembentukan fungsi Lyapunov lebih sistematis dan terstruktur maka akan digunakan metode berikut: Diberikan suatu fungsi $V: Z \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dan pada $\dot{x} = f(x)$ diberikan titik kesetimbangan $\hat{x} \in Z$. Fungsi V dikatakan sebagai fungsi Lyapunov jika sesuai dengan tiga pernyataan, yaitu:

1. Fungsi V kontinu serta memiliki turunan parsial pertama yang juga kontinu pada Z atau $V \in C'(Z)$.
2. Fungsi $V(\hat{x}) = 0$ dengan $x = \hat{x}$, serta $V(x) > 0$ untuk $x \in Z$ dengan $x \neq \hat{x}$ (di mana titik kesetimbangan \hat{x} merupakan titik minimum yang global).
3. Fungsi $\dot{V}(x) \leq 0$ untuk semua $x \in Z$ (Yulida, 2011).

2.6 Prinsip Invarian LaSalle

Jika metode Lyapunov fokus pada pertanyaan khusus tentang kestabilan pada solusi titik ekuilibrium, di sisi lain prinsip invarian LaSalle memberikan kondisi yang menggambarkan perilaku $t \rightarrow \infty$ dari semua solusi suatu persamaan diferensial biasa autonomus. Misalkan terdapat suatu persamaan diferensial biasa autonomus pada \mathbb{R}^n :

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \quad (2.4)$$

di mana $f(x)$ adalah C^r , $r \geq 1$. Asumsikan $\phi_t(\cdot)$ merupakan aliran yang dibentuk oleh persamaan (2.4) dan $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ menunjukkan himpunan invarian positif yang tertutup dan terbatas. Suatu fungsi skalar $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ yaitu

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ di } \mathcal{M}$$

Kemudian

$$E = \{x \in \mathcal{M} | \dot{V}(x) = 0\}$$

dan

$$M = \{\text{gabungan dari semua lintasan yang dimulai dari } E \\ \text{dan tetap berada di } E \text{ untuk semua } t \geq 0\}$$

Sehingga dapat dinyatakan prinsip invarian LaSalle sebagai berikut:

Teorema 2. Untuk semua $x \in \mathcal{M}$, $\phi_t(x) \rightarrow \mathcal{M}$ ketika $t \rightarrow \infty$ (Wiggins, 2017)

2.7 Ukuran Lozinskii

Sama seperti Lyapumov, ukuran Lozinskii juga dipakai dalam memeriksa kestabilan global suatu sistem. Ukuran Lozinskii merupakan salah satu metode untuk menentukan kestabilan global pada titik kesetimbangan endemik. Perhatikan jika diberikan persamaan:

$$\dot{\bar{x}} = f(x) \tag{2.5}$$

di mana $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ adalah himpunan terbuka dan $f \in C^1(D)$. Kemudian diperoleh asumsi berikut:

(H1) D kontinu,

(H2) Terdapat $K \subset D$,

(H3) \bar{x} merupakan titik kesetimbangan endemik (2.5) di D .

Terdapat dua teorema yang menyatakan bahwa suatu titik ekuilibrium dapat dikatakan stabil asimtotik global, yaitu:

Teorema 3. Titik ekuilibrium \bar{x} dari persamaan (2.5) stabil asimtotik global di domain D jika $\bar{q} < 0$, di mana

$$\bar{q} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x_0 \in K} \frac{1}{t} v \left(B(x(s, x_0)) \right) ds$$

dengan matriks B yang didefinisikan $B = A_f A^{-1} + A \frac{\partial f^{[2]}}{\partial x} A^{-1}$, dan A_f diperoleh dengan mengganti letak A_{ij} dari matriks A dengan turunan solusi dari f dan $A \frac{\partial f^{[2]}}{\partial x}$, kemudian $A \frac{\partial f^{[2]}}{\partial x}$ merupakan matriks jacobian dari persamaan (2.5).

Selanjutnya, ukuran Lozinskii dengan norm vector $\|\cdot\|$ di \mathbb{R}^n yang didefinisikan sebagai berikut:

$$v(B) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|I + hE| - 1}{h}$$

Sehingga terdapat lemma yang mengikuti teorema untuk menentukan suatu titik ekuilibrium stabil global.

Lemma 1. Suatu sistem S, E, I, R kontinu di domain D saat $R_0 > 1$.

Bukti:

Karena sistem S, E, I, R kontinu di domain D , maka terdapat konstanta $c > 0$ sebagai berikut:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S(t) > c, \liminf_{t \rightarrow \infty} E(t) > c, \liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) > c, \liminf_{t \rightarrow \infty} R(t) > c$$

terbukti $S(0), E(0), I(0), R(0) \in D$.

Teorema 4. Suatu titik kesetimbangan endemik dapat dikatakan stabil asimtotik global di domain D saat $R_0 > 1$ dan $\bar{b} > 0$, di mana \bar{b} adalah persamaan ukuran Lozinskii yang didapatkan (LI & Muldowney, 1996).

2.8 Teori Kontrol Optimal

Masalah optimasi dari suatu sistem dinamik biasanya diselesaikan menggunakan suatu metode standar yaitu kontrol optimal. Teori kontrol optimal

merupakan perluasan dari kalkulus variasi yang bertujuan untuk menghasilkan kontrol yang optimal agar jumlah populasi terinfeksi dapat diminimalkan secara maksimal. Kontrol optimal sering digunakan juga untuk mencari hukum kontrol misalkan dalam masalah kendali biaya fungsional (Syahril & Garnadi, 2018). Menurut Sund (2012), masalah kontrol merupakan sebuah masalah dengan kondisi titik akhir di mana fungsi u dapat mengambil nilai dalam himpunan bagian \mathbb{R} atau himpunan bagian yang lebih umum dari \mathbb{R} . Seperti masalah berikut:

1. $\max/\min \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt,$
2. $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1,$
3. $u(t) \in \mathbb{R}, t \in [t_0, t_1], u$ kontinu,

di mana u adalah variabel kontrol.

Daerah kontrol adalah jangkauan umum yang memungkinkan dari kontrol u . Pasangan fungsi (x, u) yang memenuhi kondisi titik akhir, serta persamaan *state* $\dot{x} = g(t, x, u)$, merupakan pasangan yang diterima (*admissible pairs*). Sering diasumsikan bahwa kontrol u kontinu, artinya u mungkin memiliki jumlah diskontinuitas lompatan yang terbatas. Dalam kalkulus variasi, selalu diasumsikan bahwa $\dot{x} = u$ adalah dari kelas C yaitu fungsi yang terdiferensiasi secara kontinu. Dalam teori kontrol optimal, itu terbukti sangat berguna untuk penerapan sebuah fungsi pembantu H dari empat variabel yang didefinisikan oleh

$$H(t, x, u, p) = f(t, x, u) + pg(t, x, u)$$

yang disebut sebagai fungsi Hamilton atau Hamiltonian dari masalah yang diberikan.

2.9 Prinsip Maksimum Pontryagin

Untuk mendapatkan solusi yang optimal pada suatu masalah kontrol optimal maka digunakan prinsip maksimum Pontryagin. Prinsip maksimum Pontryagin dipakai guna mencari solusi analitik, yang mana ketika didapatkan hasil dari Runge Kutta maka akan dibandingkan dengan solusi analitiknya. Prinsip ini meminimalkan persamaan fungsi tujuan menggunakan persamaan kendala serta memberikan persamaan kontrol (Mahmudah & Naf'an, 2014). Menurut Vinter (2014), prinsip maksimum Pontryagin atau prinsip maksimum adalah inti dari teori kontrol optimal yaitu seperangkat kondisi yang sesuai di mana meminimalkan $(\bar{x}(\cdot), \bar{t}(\cdot))$.

Teorema 5. [Prinsip Maksimum] Misalkan $(\bar{x}(\cdot), \bar{t}(\cdot))$ meminimalkan masalah (P). Asumsikan bahwa hipotesis berikut benar:

1. g terdiferensiasi kontinu,
2. $\phi^i, i = 1, \dots, k_1$ dan $\psi^i, i = 1, \dots, k_2$ terdiferensiasi kontinu,
3. Dengan $\tilde{f}(t, x, u) = (L(t, x, u), f(t, x, u)), \tilde{f}(\cdot, \cdot, \cdot)$ kontinu,

$\tilde{f}(t, \cdot, u)$ terdiferensiasi kontinu untuk setiap (t, u) terdapat $\epsilon > 0$
dan $k(\cdot) \in L^1$ sehingga

$$|\tilde{f}(t, x, u) - \tilde{f}(t, x', u)| \leq k(t)|x - x'|$$

untuk semua $x, x' \in R^n$ sedemikian sehingga

$$|x - \bar{x}(t)| \text{ dan } |x' - \bar{x}(t)| \leq \epsilon, \text{ dan } u \in \Omega, a. e. t \in [0, T]$$
4. Ω adalah himpunan Borel.

Maka terdapat bilangan λ ($\lambda = 0$ atau 1), busur kontinu absolut $p : [0, T] \rightarrow R^n$, bilangan $\alpha^i \geq 0$ untuk $i = 1, \dots, k_1$ dan bilangan β^i untuk $i = 1, \dots, k_2$ yang memenuhi

$$(p(\cdot), \lambda, \{\alpha^i\}, \{\beta^i\}) \neq (0, 0, \{ \dots 0 \}, \{0, \dots 0\})$$

Berdasarkan Chiang (2005), untuk masalah kontrol optimal sebagai berikut:

$$\max J(u) = S(x(T), T) + \int_0^T F(x, u, t) dt,$$

$$\text{kendala } \dot{x}(t) = f(x, u, t), x(0) = x_0$$

suatu kontrol optimal u^* harus memenuhi syarat yaitu

$$H(t, x^*, u^*, \lambda) \geq H(t, x, u, \lambda) \quad \text{untuk semua } t \in [0, T]$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (\text{Kondisi optimal})$$

$$\lambda(T) \text{ bebas} \quad (\text{Kondisi transversal})$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (\text{Persamaan } \textit{adjoin})$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (\text{Persamaan } \textit{state}).$$

2.10 Metode Runge Kutta Orde 4

Diketahui bahwa deret Taylor merupakan metode numerik yang dipakai dalam penyelesaian persamaan diferensial dengan batasan harus menemukan turunan dari orde yang lebih tinggi, sehingga akan memakan banyak waktu untuk menghitungnya. Hal tersebut bisa diatasi dengan menggunakan metode numerik yang disebut Runge Kutta yang juga memberikan akurasi yang lebih baik. Metode Runge Kutta sendiri terdiri dari Runge Kutta orde empat, Runge Kutta orde tiga, Runge Kutta orde dua, dan Runge Kutta orde satu. Metode dengan tingkat akurasi yang lebih baik adalah Runge Kutta orde empat. Berdasarkan Lyu (2016), ekspresi dari Runge Kutta orde empat adalah berikut ini:

$$y_{n+1} = y_n + \left[\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 \right]$$

di mana

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y^n + h\frac{k_1}{2}\right)$$

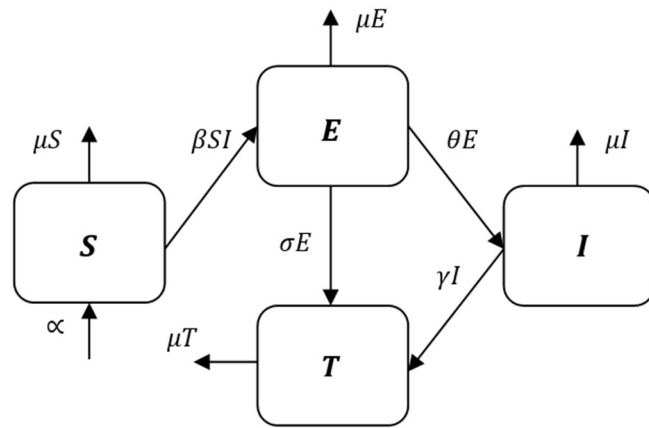
$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y^n + h\frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y^n + hk_3)$$

serta $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Kemudian y_{n+1} merupakan pendekatan Runge Kutta 4 dari $y(t_{n+1})$, k adalah kemiringan pada keempat titik dalam interval dan h merupakan ukuran langkah yang digunakan, yang mana $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$.

2.11 Model Matematika Dinamika Penyakit Skabies

Model matematika dinamis merupakan sekumpulan persamaan yang menggambarkan suatu permasalahan dalam kehidupan manusia. Farman, dkk (2022) menyajikan model SEIT yang digunakan untuk mendeskripsikan dinamika penyebaran penyakit skabies pada manusia. Populasi terdiri dari empat populasi, yaitu populasi manusia yang rawan terinfeksi skabies (S), populasi manusia dalam masa inkubasi skabies (E), populasi manusia yang terinfeksi skabies (I), populasi manusia menjalani pengobatan (T), dengan jumlah populasi manusia $N = S + E + I + T$. Berikut merupakan diagram dari model matematika dinamika penyakit skabies:



Gambar 2.1 Model Dinamika Penyakit Skabies

Berdasarkan Gambar 2.1 maka bisa dibentuk suatu sistem persamaan diferensial non linier dengan formulasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \alpha - \beta SI - \mu S \\
 \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (\sigma + \theta + \mu)E \\
 \frac{dI}{dt} &= \theta E - (\gamma + \mu)I \\
 \frac{dT}{dt} &= \sigma E + \gamma I - \mu T
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Populasi S mengacu pada individu yang rentan atau memungkinkan untuk tertular penyakit skabies. Jumlah awal populasi ini bergantung pada konstanta rekrutmen α . Lalu berkurang karena terdapat laju kematian alami μ serta laju kontak efektif dalam periode inkubasi β . Berikut merupakan persamaan untuk populasi S pada waktu t :

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - \beta SI - \mu S
 \tag{2.7}$$

Populasi E mengacu pada individu yang sedang dalam masa inkubasi penyakit skabies. Jumlah individu pada populasi ini akan bertambah dengan laju kontak efektif pada periode inkubasi β . Lalu menurun dengan keberadaan laju kematian alami μ serta laju pengobatan individu inkubasi θ menuju populasi I dan populasi T dengan laju σ . Berikut merupakan persamaan untuk populasi E pada waktu t :

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (\sigma + \theta + \mu)E \quad (2.8)$$

Selanjutnya, populasi I mengacu pada individu yang sedang terinfeksi penyakit skabies. Total individu dalam populasi ini akan meningkat oleh individu yang tidak menjalani pengobatan dengan laju θ . Lalu menyusut dengan keberadaan laju kematian alami μ serta laju individu terinfeksi yang menjalani pengobatan γ . Berikut merupakan persamaan untuk populasi I pada waktu t :

$$\frac{dI}{dt} = \theta E - (\gamma + \mu)I \quad (2.9)$$

Kemudian, populasi T mengacu pada individu yang sedang menjalani pengobatan. Total individu dalam populasi ini bisa meningkat oleh laju individu inkubasi yang menjalani pengobatan σ dan laju individu terinfeksi yang menjalani pengobatan γ . Berikut merupakan persamaan untuk populasi T pada waktu t :

$$\frac{dT}{dt} = \sigma E + \gamma I - \mu T \quad (2.10)$$

2.11.1 Batas Solusi Model

Dikatakan bahwa $N(t) = N$ adalah jumlah individu pada suatu populasi di mana $N = S + E + I + T$ maka:

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dT}{dt} \\
&= \alpha - \beta SI - \mu S + \beta SI - (\sigma + \theta + \mu)E + \theta E - (\gamma + \mu)I + \sigma E + \gamma I - \mu T \\
&= \alpha - \mu(S + E + I + T) \\
&= \alpha - \mu N
\end{aligned} \tag{2.11}$$

sehingga jumlah individu pada suatu populasi beragam bergantung terhadap waktu. Pada persamaan (2.11), populasi sudah terbebas dari penyakit karena tidak terdapat kematian oleh penyakit. Selanjutnya akan dihitung integral dari persamaan (2.11) sebagai berikut:

$$\int_{N_0}^{N_t} \frac{dN}{\alpha - \mu N} = \int_0^t dt$$

Misalkan $v = \alpha - \mu N$ dan $dv = -\mu dN$

$$-\frac{1}{\mu} \int_{N_0}^{N_t} \frac{1}{v} dv = -\frac{1}{\mu} \ln(v) \Big|_{N_0}^{N_t} = -\frac{1}{\mu} \ln(\alpha - \mu N) \Big|_{N_0}^{N_t}$$

Didapatkan

$$-\frac{1}{\mu} \ln(\alpha - \mu N_t) + \frac{1}{\mu} \ln(\alpha - \mu N_0) = t$$

$$\ln \left[\frac{(\alpha - \mu N_t)}{(\alpha - \mu N_0)} \right] = -\mu t$$

$$\left[\frac{(\alpha - \mu N_t)}{(\alpha - \mu N_0)} \right] = e^{-\mu t}$$

$$N_t = \frac{(\alpha - \mu N_0)e^{-\mu t} - \alpha}{-\mu}$$

$$N_t = \frac{\alpha}{\mu} - \left[\frac{\alpha}{\mu} - N_0 \right] e^{-\mu t} \tag{2.12}$$

Ketika t membesar maka diperoleh $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = \frac{\infty}{\mu}$. Hal ini menunjukkan bahwa jumlah individu pada suatu populasi akan menuju kapasitas batas $\frac{\infty}{\mu}$ pada rentang waktu yang lama. Kemudian diasumsikan $N_t \leq \frac{\infty}{\mu}$ untuk setiap $t \geq 0$. Jadi daerah solusi untuk model (2.12) didefinisikan sebagai:

$$\Psi = \left\{ (S, E, I, T) \in \mathbb{R}_+^4 : S \geq 0; E \geq 0; I \geq 0; T \geq 0; N \leq \frac{\infty}{\mu} \right\}$$

2.11.2 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Pada bagian ini akan ditentukan titik ekuilibrium pada sistem persamaan diferensial model SEIT yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit. Untuk menentukan titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu $K_0 = (S_0, E_0, I_0, T_0)$ yang memenuhi

$$\alpha - \beta SI - \mu S = 0 \quad (2.13)$$

$$\beta SI - (\sigma + \theta + \mu)E = 0 \quad (2.14)$$

$$\theta E - (\gamma + \mu)I = 0 \quad (2.15)$$

$$\sigma E + \gamma I - \mu T = 0 \quad (2.16)$$

substitusikan $E_0 = 0$ dan $I_0 = 0$ pada persamaan (2.13), (2.14), (2.15), (2.16).

Dari persamaan (2.16) didapatkan

$$\theta k(0) + \gamma(0) - \mu T = 0$$

$$-\mu T = 0$$

$$T = 0 \quad (2.17)$$

Kemudian dari persamaan (2.13) didapatkan

$$\alpha - \beta S(0) - \mu S = 0$$

$$\alpha - \mu S = 0$$

$$S = \frac{\alpha}{\mu}$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit sebagai berikut:

$$K_0 = \left(\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0, 0\right)$$

2.11.3 Titik Ekuilibrium Endemik

Pada bagian ini akan ditentukan titik ekuilibrium pada sistem persamaan diferensial model SEIT yaitu titik ekuilibrium endemik. Dalam menentukan titik ekuilibrium endemik $K_1 = (S, E, I, T)$, akan dilakukan sama seperti pada titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu dengan membuat nol model SEIT. Dari persamaan (2.16) didapatkan

$$\mu T = \sigma E + \gamma I$$

$$T = \frac{\sigma E + \gamma I}{\mu}$$

Lalu dari persamaan (2.14) menghasilkan

$$\beta SI = (\sigma + \theta + \mu)E$$

$$S = \frac{(\sigma + \theta + \mu)E}{\beta I}$$

Kemudian dari persamaan (2.15) diperoleh

$$\theta E = (\gamma + \mu)I$$

$$E = \frac{(\gamma + \mu)I}{\theta}$$

dan dari persamaan (2.16) didapatkan

$$\gamma I = \mu T - \sigma E$$

$$I = \frac{\mu T - \sigma E}{\gamma}$$

Jadi, dari penjabaran di atas diperoleh titik ekuilibrium endemik sebagai berikut:

$$K_1 = \left(\frac{(\sigma + \theta + \mu)E}{\beta I}, \frac{(\gamma + \mu)I}{\theta}, \frac{\mu T - \sigma E}{\gamma}, \frac{\sigma E + \gamma I}{\mu} \right)$$

di mana $R_0 > 1$.

2.11.4 Bilangan Reproduksi Dasar

Selanjutnya akan dihitung bilangan reproduksi dasar. Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah rasio yang memperlihatkan berapa besar pengaruh individu terinfeksi pada suatu populasi rentan untuk menciptakan individu baru yang terinfeksi. Bilangan reproduksi dasar dapat dihitung menggunakan matriks *next-generation* pada persamaan model individu terinfeksi dan individu terinfeksi.

Teorema 6. Ketika $R_0 < 1$, penyebaran penyakit menjadi ditiadakan kemudian penyakit bisa musnah. Sedangkan saat $R_0 > 1$, penyebaran penyakit akan berlangsung pada populasi kemudian menyebabkan terjadinya wabah penyakit.

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (\sigma + \theta + \mu)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \theta E - (\gamma + \mu)I$$

Kemudian

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta SI \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} (\sigma + \theta + \mu)E \\ -\theta E + (\gamma + \mu)I \end{bmatrix}$$

Substitusi $S_0 = \frac{\infty}{\mu}$ setelah dihitung turunan parsial dari F dan V , diperoleh:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha\beta}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} \sigma + \theta + \mu & 0 \\ -\theta & \gamma + \mu \end{bmatrix}$$

Kemudian berdasarkan definisi matriks generasi berikutnya (G) yaitu $G = FV^{-1}$, akan dihitung V^{-1} sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V^{-1} &= \frac{1}{(\sigma + \theta + \mu)(\gamma + \mu)} \begin{bmatrix} \gamma + \mu & 0 \\ \theta & \sigma + \theta + \mu \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma + \theta + \mu} & 0 \\ \frac{\theta}{(\sigma + \theta + \mu)(\gamma + \mu)} & \frac{1}{\gamma + \mu} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} FV^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha\beta}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma + \theta + \mu} & 0 \\ \frac{\theta}{(\sigma + \theta + \mu)(\gamma + \mu)} & \frac{1}{\gamma + \mu} \end{bmatrix} \\ G &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha\beta\theta}{\mu(\sigma + \theta + \mu)(\gamma + \mu)} & \frac{\alpha\beta}{\mu(\gamma + \mu)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, berdasarkan nilai eigen positif terbesar dari matriks G , bilangan reproduksi dasar (R_0) yang dihasilkan adalah

$$R_0 = \frac{\alpha\beta\theta}{\mu(\sigma + \theta + \mu)(\gamma + \mu)} \quad (2.18)$$

Kemudian substitusi nilai parameter Tabel 1.1 pada persamaan (2.18), didapatkan

$$R_0 = \frac{0,029(0,043)(0,03)}{0,02(0,014 + 0,03 + 0,02)(0,75 + 0,02)} = 0,04$$

Karena $R_0 = 0,04 > 0$, maka penyebaran penyakit akan berlangsung pada populasi dan menyebabkan terjadinya wabah penyakit.

2.11.5 Kestabilan Global Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Untuk memeriksa kestabilan global titik ekuilibrium dari suatu sistem non-linier bebas penyakit akan dibangun fungsi Lyapunov. Fungsi Lyapunov sendiri dikonstruksi menggunakan gabungan fungsi kuadrat komposit, kuadrat bersama, fungsi logaritma serta fungsi linier sehingga dapat menganalisis suatu sistem yang diberikan.

Titik ekuilibrium bebas penyakit K_0 pada model SEIT stabil asimtotik global jika $R_0 \leq 1$.

Bukti:

Didefinisikan $H: A \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$H(S, E, I, T) = B_1 E + B_2 I$$

$$\dot{H}(S, E, I, T) = B_1 \dot{E} + B_2 \dot{I}$$

$$= B_1(\beta SI - (\sigma + \theta + \mu)E) + B_2(\theta E - (\gamma + \mu)I)$$

Berdasarkan persamaan (2.18) dan $\dot{H}(S, E, I, T)$ diperoleh

$$B_1 = \theta E \text{ dan } B_2 = \sigma + \theta + \mu$$

$$H(S, E, I, T) = \theta E + (\sigma + \theta + \mu)I \quad (2.19)$$

Fungsi H bisa dikatakan sebagai fungsi Lyapunov karena memenuhi syarat sebagai berikut:

1. Fungsi (2.19) terdiri dari fungsi yang linier sehingga jelas bahwa fungsi kontinu pada A , serta turunan parsial pertama juga kontinu.
2. Untuk sebarang $K = (S, E, I, T) \in A$ dengan $K \neq K_0$ maka $H(K)$ akan positif. Kemudian jika $K = K_0$ maka $H(K) = 0$.
3. Turunan fungsi $H(S, E, I, T)$ terhadap t adalah sebagai berikut:

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial S} \frac{dS}{dt} + \frac{\partial H}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial H}{\partial I} \frac{dI}{dt} + \frac{\partial H}{\partial T} \frac{dT}{dt}$$

$$\begin{aligned}
&= (0) \frac{dS}{dt} + (\theta) \frac{dE}{dt} + (\sigma + \theta + \mu) \frac{dI}{dt} + (0) \frac{dT}{dt} \\
&= \theta(\beta SI - (\sigma + \theta + \mu)E) + (\sigma + \theta + \mu)(\theta E - (\gamma + \mu)I) \\
&= \theta\beta SI - (\sigma + \theta + \mu)\theta E + (\sigma + \theta + \mu)\theta E - (\sigma + \theta + \mu)(\gamma + \mu)I \\
&= \left(\frac{\theta\beta S}{(\sigma + \theta + \mu)(\gamma + \mu)} - 1 \right) I
\end{aligned}$$

Karena $S = \frac{\sigma}{\mu}$, berdasarkan persamaan (2.18) maka didapatkan:

$$= (R_0 - 1)I$$

Sehingga $\dot{H} \leq 0$ asalkan $R_0 \leq 1$.

Jadi terbukti bahwa $H(S, E, I, T)$ merupakan fungsi Lyapunov.

Selanjutnya akan dibuktikan fungsi $\dot{H}(t) = 0$ ketika $E = I = 0$.

Bukti:

$$\dot{H}(t) = (R_0 - 1)I = (R_0 - 1)0 = 0$$

Terbukti bahwa $\dot{H}(t) = 0$ ketika $E = I = 0$ dan $R_0 \leq 1$, berdasarkan prinsip invarian LaSalle, titik kesetimbangan K_0 stabil asimtotik global

2.11.6 Kestabilan Global Titik Ekuilibrium Endemik

Pada tahap ini untuk menganalisis kestabilan global titik ekuilibrium endemik dipakai pendekatan geometrik dan ukuran Lozinskii. Terdapat dua teorema untuk menyatakan bahwa titik ekuilibrium endemik K_1 stabil asimtotik global.

Teorema 3

Titik ekuilibrium endemik K_1 stabil asimtotik global di daerah solusi Ω jika $\bar{q} < 0$ di mana

$$\bar{q} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x_0 \in \Psi} \frac{1}{t} \int_0^t v(B(x(s, x_0))) ds$$

Matriks B didefinisikan $B = Q_f Q^{-1} + Q J^{[2]} Q^{-1}$ di mana Q_f diperoleh dengan mengganti entri Q_{ij} dari Q dengan turunannya yang mendekati solusi fungsi yang digunakan, $J^{[2]}$ adalah tambahan kedua pada matriks Jacobian model SEIT.

Teorema 4

Titik ekuilibrium endemik K_1 stabil asimtotik global di daerah solusi Ω ketika $R_0 > 1, \bar{b} > 0$.

Pertama-tama akan ditentukan matriks Jacobian dari model yang diberikan.

$$J(S, E, I, T) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial T} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial T} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial T} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial E} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial T} \end{bmatrix}$$

$$J(S, E, I, T) = \begin{bmatrix} -(\beta I + \mu) & 0 & -\beta S & 0 \\ \beta I & -(\sigma + \theta + \mu) & \beta S & 0 \\ 0 & \theta & -(\gamma + \mu) & 0 \\ 0 & \sigma & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Kemudian didapatkan tambahan kedua matriks Jacobian $J^{[2]}$:

$$J^{[2]} = \begin{bmatrix} m_{11} + m_{22} & m_{23} & m_{24} & -m_{13} & -m_{14} & 0 \\ m_{32} & m_{11} + m_{33} & m_{34} & m_{12} & 0 & -m_{14} \\ m_{42} & m_{43} & m_{11} + m_{44} & 0 & m_{12} & m_{13} \\ -m_{31} & m_{21} & 0 & m_{22} + m_{33} & m_{34} & -m_{24} \\ -m_{41} & 0 & m_{21} & m_{43} & m_{22} + m_{44} & m_{23} \\ 0 & -m_{41} & m_{31} & -m_{42} & m_{32} & m_{33} + m_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(\beta I + 2\mu + \sigma + \theta) & \beta S & 0 & \beta S & 0 & 0 \\ \theta & -(\beta I + 2\mu + \gamma) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma & \gamma & -(\beta I + 2\mu) & 0 & 0 & -\beta S \\ 0 & \beta I & 0 & -(\sigma + \theta + 2\mu + \gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta I & \gamma & -(\sigma + \theta + 2\mu) & \beta S \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma & \theta & -(\gamma + 2\mu) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya diambil fungsi $Q = Q(S, E, I, T)$

$$Q = \text{diag}\{1, 1, 1, 1, E, E\}$$

Maka didapatkan

$$\begin{aligned} Q_f Q^{-1} &= \text{diag}\{0, 0, 0, 0, E, E\} \times \text{diag}\left\{1, 1, 1, 1, \frac{1}{E}, \frac{1}{E}\right\} \\ &= \text{diag}\left\{0, 0, 0, 0, \frac{E'}{E}, \frac{E'}{E}\right\} \end{aligned}$$

Hitung $QJ^{[2]}Q^{-1}$, sehingga diperoleh $B = Q_f Q^{-1} + QJ^{[2]}Q^{-1}$ yaitu

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} -(\beta I + 2\mu + \sigma + \theta) & \beta S & 0 & \beta S & 0 & 0 \\ \theta & -(\beta I + 2\mu + \gamma) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma & \gamma & -(\beta I + 2\mu) & 0 & 0 & -\frac{\beta S}{E} \\ 0 & \beta I & 0 & -(\sigma + \theta + 2\mu + \gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta I E & \gamma E & -(\sigma + \theta + 2\mu) + \frac{E'}{E} & \beta S \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma E & \theta & -(\gamma + 2\mu) + \frac{E'}{E} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

di mana $B_{11} = [-(\beta I + 2\mu + \sigma + \theta)]$, $B_{12} = [\beta S \quad 0 \quad \beta S \quad 0 \quad 0]$,

$$B_{21} = \begin{bmatrix} \theta \\ \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} -(\beta I + 2\mu + \gamma) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & -(\beta I + 2\mu) & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta S}{E} \\ \beta I & 0 & -(\sigma + \theta + 2\mu + \gamma) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta I E & \gamma E & -(\sigma + \theta + 2\mu) + \frac{E'}{E} & \beta S & \\ 0 & 0 & -\sigma E & \theta & -(\gamma + 2\mu) + \frac{E'}{E} \end{bmatrix}$$

Ukuran Lozinskii dari matriks B didefinisikan:

$$v(B) \leq \max\{g_1, g_2\}$$

di mana $g_1 = v(B_{11}) + \|B_{12}\|$ dan $g_2 = \|B_{21}\| + v(B_{22})$ dengan

$$v(B_{11}) = -(\beta I + 2\mu + \sigma + \theta),$$

$$\|B_{12}\| = \beta S,$$

$$\|B_{21}\| = \max\{\sigma, \theta\}$$

sehingga didapatkan

$$g_1 = -(\beta I + 2\mu + \sigma + \theta) + \beta S$$

$$g_2 = \max\{\sigma, \theta\} + v(B_{22})$$

Selanjutnya menentukan $v(B_{22})$ dengan partisi matriks B_{22}

$$B_{22} = C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

di mana

$$C_{11} = [-(\beta I + 2\mu + \gamma)],$$

$$C_{12} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} -(\beta I + 2\mu) & 0 & 0 & -\frac{\beta S}{E} \\ 0 & -(\sigma + \theta + 2\mu + \gamma) & 0 & 0 \\ \beta I E & \gamma E & -(\sigma + \theta + 2\mu) + \frac{E'}{E} & \beta S \\ 0 & -\sigma E & \theta & -(\gamma + 2\mu) + \frac{E'}{E} \end{bmatrix}$$

Ukuran Lozinskii dari matriks C didefinisikan:

$$v(C) \leq \max\{g_3, g_4\}$$

di mana $g_3 = v(C_{11}) + \|C_{12}\|$ dan $g_4 = \|C_{21}\| + v(C_{22})$ dengan

$$v(C_{11}) = -(\beta I + 2\mu + \gamma),$$

$$\|C_{12}\| = 0,$$

$$\|C_{21}\| = \max\{\gamma, \beta I\}$$

Sehingga didapatkan

$$g_3 = -(\beta I + 2\mu + \gamma)$$

$$g_4 = \max\{\gamma, \beta I\} + v(C_{22})$$

Selanjutnya menentukan $v(C_{22})$ dengan partisi matriks C_{22}

$$C_{22} = F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$$

di mana

$$F_{11} = [-(\beta I + 2\mu)],$$

$$F_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\beta S}{E} \end{bmatrix},$$

$$F_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta I E \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F_{22} = \begin{bmatrix} -(\sigma + \theta + 2\mu + \gamma) & 0 & 0 \\ \gamma E & -(\sigma + \theta + 2\mu) + \frac{E'}{E} & \beta S \\ -\sigma E & \theta & -(\gamma + 2\mu) + \frac{E'}{E} \end{bmatrix}$$

Ukuran Lozinskii dari matriks F didefinisikan:

$$v(F) \leq \max\{g_5, g_6\}$$

di mana $g_5 = v(F_{11}) + \|F_{12}\|$ dan $g_6 = \|F_{21}\| + v(F_{22})$ dengan

$$v(F_{11}) = -(\beta I + 2\mu),$$

$$\|F_{12}\| = \frac{\beta S}{E},$$

$$\|F_{21}\| = \beta I E$$

Sehingga didapatkan

$$g_5 = -(\beta I + 2\mu) + \frac{\beta S}{E}$$

$$g_6 = \beta I E + v(F_{22})$$

Selanjutnya menentukan $v(F_{22})$ dengan partisi matriks F_{22}

$$F_{22} = G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

di mana

$$G_{11} = [-(\sigma + \theta + 2\mu + \gamma)],$$

$$G_{12} = [0 \quad 0],$$

$$G_{21} = \begin{bmatrix} \gamma E \\ -\sigma E \end{bmatrix},$$

$$G_{22} = \begin{bmatrix} -(\sigma + \theta + 2\mu) + \frac{E'}{E} & \beta S \\ \theta & -(\gamma + 2\mu) + \frac{E'}{E} \end{bmatrix}$$

Ukuran Lozinskii dari matriks G didefinisikan:

$$v(G) \leq \max\{g_7, g_8\}$$

di mana $g_7 = v(G_{11}) + \|G_{12}\|$ dan $g_8 = \|G_{21}\| + v(G_{22})$ dengan

$$v(G_{11}) = -(\sigma + \theta + 2\mu + \gamma),$$

$$\|G_{12}\| = 0,$$

$$\|G_{21}\| = \max\{\gamma E, \sigma E\},$$

$$v(G_{22}) = \max\left\{-\left(\sigma + \theta + 2\mu\right) + \frac{E'}{E}, -\left(\gamma + 2\mu\right) + \frac{E'}{E}\right\}$$

$$= -2\mu + \frac{E'}{E} + \max\{-(\sigma + \theta), -\gamma\}$$

Sehingga didapatkan

$$g_7 = -(\sigma + \theta + 2\mu + \gamma)$$

$$g_8 = \max\{\gamma E, \sigma E\} - 2\mu + \frac{E'}{E} + \max\{-(\sigma + \theta), -\gamma\} \quad (2.20)$$

Misalkan

$$\begin{aligned} g_7 &= -(\sigma + \theta + 2\mu + \gamma) + 0 \\ &= -(\sigma + \theta + 2\mu + \gamma) + \frac{E'}{E} - \frac{E'}{E} \\ &= \frac{E'}{E} - (\sigma + \theta + 2\mu + \gamma) - \frac{E'}{E} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Substitusi persamaan (2.20) dan (2.21)

$$\begin{aligned} v(G) &\leq \max\{g_7, g_8\} \\ &= \max\left[\frac{E'}{E} - (\sigma + \theta + 2\mu + \gamma) - \frac{E'}{E}, \sup\{\gamma E, \sigma E\} - 2\mu + \frac{E'}{E} \right. \\ &\quad \left. + \sup\{-(\sigma + \theta), -\gamma\}\right] \\ &= \frac{E'}{E} + \max\left[-(\sigma + \theta + 2\mu + \gamma) - \frac{E'}{E}, \sup\{\gamma E, \sigma E\} - 2\mu \right. \\ &\quad \left. + \sup\{-(\sigma + \theta), -\gamma\}\right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Kemudian

$$v(F) \leq \max\{g_5, g_6\}$$

di mana

$$g_5 = -(\beta I + 2\mu) + \frac{\beta S}{E} \text{ dan } g_6 = \beta I E + v(F_{22})$$

Misalkan

$$\begin{aligned} g_5 &= -(\beta I + 2\mu) + \frac{\beta S}{E} + 0 \\ &= -(\beta I + 2\mu) + \frac{\beta S}{E} + \frac{E'}{E} - \frac{E'}{E} \end{aligned}$$

$$= \frac{E'}{E} - (\beta I + 2\mu) + \frac{\beta S}{E} - \frac{E'}{E}$$

Substitusi persamaan (2.22) pada g_6 sehingga

$$v(F) \leq \frac{E'}{E} + \max \left[-(\beta I + 2\mu) + \frac{\beta S}{E} - \frac{E'}{E}, \beta I E - (\sigma + \theta + 2\mu + \gamma) \right. \\ \left. - \frac{E'}{E}, \beta I E + \sup\{\gamma E, \sigma E\} - 2\mu + \sup\{-(\sigma + \theta), -\gamma\} \right] \quad (2.23)$$

Kemudian

$$v(C) \leq \max\{g_3, g_4\}$$

di mana

$$g_3 = -(\beta I + 2\mu + \gamma) \text{ dan } g_4 = \max\{\gamma, \beta I\} + v(C_{22})$$

Misalkan

$$g_3 = -(\beta I + 2\mu + \gamma) + 0 \\ = -(\beta I + 2\mu + \gamma) + \frac{E'}{E} - \frac{E'}{E} \\ = \frac{E'}{E} - (\beta I + 2\mu + \gamma) - \frac{E'}{E}$$

Substitusi persamaan (2.23) pada g_4 sehingga

$$v(C) \leq \frac{E'}{E} + \max \left[-(\beta I + 2\mu + \gamma) - \frac{E'}{E}, \sup\{\gamma, \beta I\} - (\beta I + 2\mu) \right. \\ \left. + \frac{\beta S}{E} - \frac{E'}{E}, \sup\{\gamma, \beta I\} + \beta I E - (\sigma + \theta + 2\mu + \gamma) \right. \\ \left. - \frac{E'}{E}, \sup\{\gamma, \beta I\} + \beta I E + \sup\{\gamma E, \sigma E\} - 2\mu \right. \\ \left. + \sup\{-(\sigma + \theta), -\gamma\} \right] \quad (2.24)$$

Kemudian

$$v(B) \leq \max\{g_1, g_2\}$$

di mana

$$g_1 = -(\beta I + 2\mu + \sigma + \theta) + \max\{\beta S\} \text{ dan } g_2 = \max\{\sigma, \theta\} + v(B_{22})$$

Misalkan

$$\begin{aligned} g_1 &= -(\beta I + 2\mu + \sigma + \theta) + \max\{\beta S\} + 0 \\ &= -(\beta I + 2\mu + \sigma + \theta) + \max\{\beta S\} + \frac{E'}{E} - \frac{E'}{E} \\ &= \frac{E'}{E} - (\beta I + 2\mu + \sigma + \theta) + \max\{\beta S\} - \frac{E'}{E} \end{aligned}$$

Substitusi persamaan (2.24) pada g_2 sehingga

$$\begin{aligned} v(B) &\leq \frac{E'}{E} + \max \left[-(\beta I + 2\mu + \sigma + \theta) + \sup\{\beta S\} - \frac{E'}{E}, \sup\{\sigma, \theta\} - (\beta I + 2\mu + \gamma) \right. \\ &\quad \left. - \frac{E'}{E}, \sup\{\sigma, \theta\} + \sup\{\gamma, \beta I\} - (\beta I + 2\mu + \delta) + \frac{\beta S}{E} - \frac{E'}{E}, \sup\{\sigma, \theta\} \right. \\ &\quad \left. + \sup\{\gamma, \beta I\} + \beta I E - (\sigma + \theta + 2\mu + \gamma) - \frac{E'}{E}, \sup\{\sigma, \theta\} + \sup\{\gamma, \beta I\} \right. \\ &\quad \left. + \beta I E + \sup\{\gamma E, \sigma E\} - 2\mu + \sup\{-(\sigma + \theta), -\gamma\} \right] \\ &\leq \frac{E'}{E} + \min \left[(\beta I + 2\mu + \sigma + \theta) - \sup\{\beta S\} + \frac{E'}{E}, -\sup\{\sigma, \theta\} \right. \\ &\quad \left. + (\beta I + 2\mu + \gamma) + \frac{E'}{E}, -\sup\{\sigma, \theta\} - \sup\{\gamma, \beta I\} \right. \\ &\quad \left. + (\beta I + 2\mu + \delta) - \frac{\beta S}{E} + \frac{E'}{E}, -\sup\{\sigma, \theta\} - \sup\{\gamma, \beta I\} - \beta I E \right. \\ &\quad \left. + (\sigma + \theta + 2\mu + \gamma) + \frac{E'}{E}, -\sup\{\sigma, \theta\} - \sup\{\gamma, \beta I\} - \beta I E \right. \\ &\quad \left. - \sup\{\gamma E, \sigma E\} + 2\mu - \sup\{-(\sigma + \theta), -\gamma\} \right] \end{aligned}$$

Maka diperoleh $v(B) \leq \frac{E'}{E} - \bar{b}$,

$$\begin{aligned}
\bar{b} = \min & \left[(\beta I + 2\mu + \sigma + \theta) - \sup\{\beta S\} + \frac{E'}{E}, -\sup\{\sigma, \theta\} + (\beta I + 2\mu + \gamma) \right. \\
& + \frac{E'}{E}, -\sup\{\sigma, \theta\} - \sup\{\gamma, \beta I\} + (\beta I + 2\mu + \delta) - \frac{\beta S}{E} \\
& + \frac{E'}{E}, -\sup\{\sigma, \theta\} - \sup\{\gamma, \beta I\} - \beta I E + (\sigma + \theta + 2\mu + \gamma) \\
& + \frac{E'}{E}, -\sup\{\sigma, \theta\} - \sup\{\gamma, \beta I\} - \beta I E - \sup\{\gamma E, \sigma E\} + 2\mu \\
& \left. - \sup\{-(\sigma + \theta), -\gamma\} \right]
\end{aligned}$$

Pertimbangkan setiap solusi dari $(S(t), E(t), I(t), R(t))$ yang berada pada $A \subset \Psi$. Persamaan $(S(t), E(t), I(t), T(t)) \subset A$ untuk setiap $t \geq \bar{t}$. Kemudian di daerah solusi $S(0), E(0), I(0), T(0)$ sedemikian sehingga $(S(0), E(0), I(0), R(0)) \in A$ untuk $t \geq \bar{t}$.

$$\begin{aligned}
\bar{q} &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x_0 \in \Psi} \frac{1}{t} \int_0^t v(B) ds \\
&\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \log \frac{E(t)}{E(0)} - \bar{b} \right) = -\bar{b} < 0
\end{aligned}$$

Maka $\bar{q} \leq -\bar{b} < 0$ yang artinya $\bar{q} < 0$. Oleh sebab itu dari teorema 4, titik ekuilibrium endemik K_1 stabil asimtotik global.

2.12 Skabies

Skabies atau kudis adalah penyakit kulit yang diakibatkan oleh tungau (kutu kecil). Tungau tersebut dinamakan sebagai *Sarcoptes scabiei* varietas hominis. Penyakit ini merupakan persoalan kesehatan penduduk khususnya di daerah yang memiliki iklim tropis dan subtropis. Terdapat lebih dari 300 juta kasus skabies di seluruh dunia setiap tahunnya, dengan jumlah yang bervariasi pada negara-negara.

Skabies merupakan salah satu penyakit kulit yang paling umum di Indonesia pada pusat kesehatan masyarakat. Prevalensi skabies di Puskesmas Indonesia pada tahun 2008 berkisar antara 5,6% sampai 12,9%, menjadikannya penyakit kulit terbanyak ketiga. Faktor-faktor yang berkontribusi terhadap tingginya angka skabies antara lain kemiskinan, kepadatan penduduk, tingkat pendidikan yang kurang, akses air bersih yang terbatas dan praktik kebersihan yang tidak benar. Kepadatan penduduk yang tinggi dengan kontak fisik dan interaksi yang erat memudahkan penyebaran skabies (Sungkar, 2016).

Kudis dapat ditemukan di pondok pesantren dan juga panti asuhan. Di Thailand, setidaknya 87% anak di panti asuhan menderita kudis. Pada tahun 2014, Seodarman menyatakan prevalensi skabies di pesantren Jakarta Selatan sebesar 68% (Sungkar, 2016).

Skabies tidak dapat diberantas secara individu di asrama, panti asuhan dan pondok pesantren, tetapi harus dilakukan secara serentak dan menyeluruh. Setiap pengidap penyakit ini perlu dirawat dan area tempat tinggal harus dibersihkan (desinfeksi). Jika tidak begitu, maka individu terinfeksi yang telah diobati akan terinfeksi kembali, dan akan berulang dalam waktu singkat membentuk lingkaran setan yang susah dikendalikan (Sungkar, 2016).

2.13 Ikhtiar Menurut Pandangan Islam

Ikhtiar merupakan suatu usaha yang dikerjakan oleh manusia sebagai upaya untuk menjalani kehidupan dengan jalan yang baik dan benar. Sebagai seorang muslim sebaiknya senantiasa melakukan usaha dan bekerja keras dalam menggapai tujuan yang diinginkan, serta tidak mudah menyerah atau berputus asa

jika dihadapkan pada sebuah kegagalan (Putri, 2022). Ketaatan dan keimanan seorang muslim kepada Allah bisa dilihat dari bagaimana seseorang berikhtiar. Semakin kokoh tekad seorang muslim dalam bekerja keras dengan rasa sabar dan selalu meminta pertolongan kepada Allah, maka semakin dekat dirinya kepada Allah SWT. Sehingga ikhtiar tidak hanya akan membantu dalam meraih kesuksesan di dunia, melainkan juga akan membantu dalam meraih kesuksesan di akhirat. Oleh karena itu, jangan sampai berputus asa dalam berikhtiar, rahmat Allah selalu ada di setiap usaha yang kita lakukan. Seperti halnya saat seseorang yang sakit menginginkan kesembuhan, Allah pasti akan memberikan jalan kesembuhan dengan berikhtiar sebab Allah adalah sebaik-baiknya penyayang.

Tetapi dalam kehidupan ini, banyak orang sakit yang sudah berikhtiar tidak mendapatkan kesembuhan. Dalam melakukan suatu usaha, hasil yang diperoleh tidak selalu berakhir sesuai dengan yang diharapkan, karena hasil yang kita dapatkan ditentukan oleh kuasa Allah SWT. Namun hal ini kembali lagi pada usaha yang sudah dilaksanakan apakah sudah dilakukan dengan sungguh-sungguh atau belum. Misalnya berobat ke dokter yang berbeda atau rumah sakit yang lain, mencari pengobatan tradisional atau terapi, maupun menghilangkan atau menghindari faktor-faktor yang membuat kambuhnya penyakit. Pada kenyataannya, banyak orang yang belum berikhtiar dengan maksimal akan menyerah setelah menemui beberapa kegagalan. Alangkah baiknya kita bercermin kepada diri kita sendiri dan melihat apa yang membuat kegagalan itu terjadi kemudian kembali berusaha dengan cara yang lebih baik agar mendapatkan kesembuhan.

Allah SWT berfirman dalam QS. Al-Rum ayat 41:

“Telah tampak kerusakan di darat dan di laut disebabkan perbuatan manusia, supaya Allah merasakan kepada mereka sebagian dari (akibat) perbuatan mereka, agar mereka kembali (ke jalan yang benar).”

Dalam ayat ini, Allah menegaskan bahwasannya kerusakan telah berlangsung menimpa muka bumi yang disebabkan oleh perbuatan tangan manusia yang kendalinya adalah nafsu mereka yang jauh dari tuntunan fitrah. Allah ingin mereka merasakan beberapa akibat perbuatan salah mereka sehingga mereka dapat kembali ke jalan yang benar dengan menjaga perilakunya sesuai fitrah atau jiwanya yang murni.

Suatu penyakit bisa timbul akibat dari tindakan atau perbuatan manusia dalam kehidupan sehari-hari. Sesak nafas yang diakibatkan adanya polusi udara yang dihasilkan dari kendaraan bermotor, diabetes atau kolesterol karena mengonsumsi makanan yang tidak sehat, demam berdarah sebab lingkungan yang tidak terawat sehingga menjadi sarang nyamuk, ataupun skabies yang diakibatkan oleh kondisi tempat tinggal yang tidak layak. Itu semua merupakan kerusakan berupa penyakit akibat dari perbuatan manusia itu sendiri. Sehingga perlu dilakukan ikhtiar dalam memperbaiki perbuatan buruk tersebut agar diberikan kesembuhan.

Nabi Muhammad SAW bersabda:

“Tidaklah Allah menurunkan penyakit kecuali Dia juga menurunkan penawarnya.”

Hadist tersebut menjelaskan bahwa segala penyakit yang ada di muka bumi ini terdapat obatnya atau jalan kesembuhannya atas kuasa Allah SWT. Sehingga tidak ada penyakit yang tidak bisa disembuhkan jika ikhtiar dilakukan dengan sungguh-sungguh. Namun masyarakat pada umumnya, terkadang minim pengetahuan mengenai hal-hal yang menyebabkan terjadinya suatu penyakit. Oleh

sebab itu, ketika dihadapkan pada berbagai penyakit, orang-orang tidak mengerti usaha apa yang harus dilakukan untuk mengatasinya selain pergi ke dokter. Padahal tidak semua penyakit bisa disembuhkan hanya dengan berobat ke dokter. Dengan demikian, perlu dilakukannya sosialisasi serta edukasi kepada masyarakat supaya bisa berikhtiar menggunakan cara yang benar agar mendapatkan kesembuhan.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang diterapkan pada penelitian ini adalah penelitian kualitatif yang mana dilakukan analisis dinamik dengan menganalisis kestabilan global serta kontrol optimal model SEIT pada penularan penyakit skabies. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik menggunakan data yang diperoleh dari artikel Beeton, dkk (2018) dan Bhunu, dkk (2013) sehingga dapat menghasilkan grafik solusi untuk membuat kesimpulan.

3.2 Tahapan Penelitian

Adapun langkah-langkah pada penelitian ini dikerjakan menggunakan tahapan berikut:

1. Analisis kontrol optimal pada model SEIT penyakit skabies dengan kontrol edukasi masyarakat menggunakan prinsip maksimum Pontryagin.
 - a. Merumuskan persamaan diferensial dalam bentuk fungsi Hamiltonian.
 - b. Menyelesaikan persamaan state serta co-state.
 - c. Mencari fungsi kontrol optimal dengan meminimalkan fungsi Hamiltonian.
 - d. Membentuk fungsi Hamiltonian yang optimal.
 - e. Mensubstitusikan kontrol masukan yang optimal pada sistem dengan tujuan memperoleh bentuk sistem umpan balik keadaan yang optimal.

2. Simulasi numerik model SEIT penyakit skabies dengan kontrol edukasi masyarakat
 - a. Simulasi numerik model SEIT penyakit skabies dengan kontrol edukasi masyarakat menggunakan Metode Runge Kutta.
 - b. Membuat grafik simulasi numerik menggunakan aplikasi Octave.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

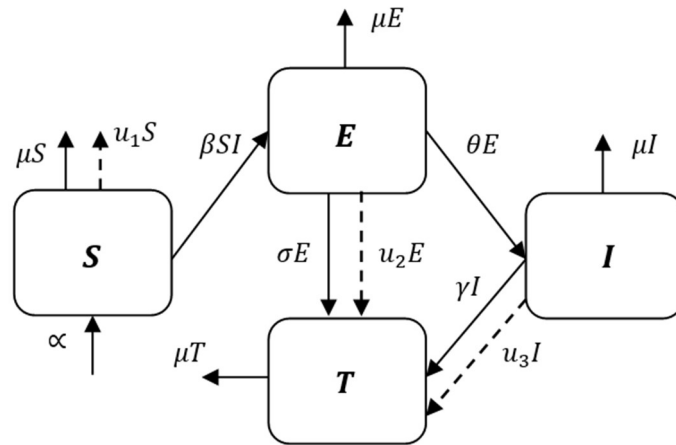
Dalam bab ini akan dibahas mengenai analisis kontrol optimal model SEIT penyakit skabies dengan kontrol berupa edukasi masyarakat. Kemudian menggunakan prinsip maksimum Pontryagin, akan dicari penyelesaian dari permasalahan kontrol optimal. Selanjutnya, model yang telah diperoleh akan disimulasikan menggunakan metode numerik sehingga bisa diketahui apakah terdapat pengaruh pada penyebaran penyakit skabies dengan kontrol yang telah diberikan.

4.1 Analisis Kontrol Optimal

Dalam model SEIT diterapkan variabel kontrol optimal dengan strategi untuk meminimalkan jumlah individu yang rentan terinfeksi $S(t)$ dan memaksimalkan jumlah individu yang menjalani pengobatan $T(t)$ selama interval waktu $[t_0; t_f]$, serta meminimalkan biaya yang dibutuhkan pada program edukasi masyarakat. Pada model (2.6) digunakan kontrol sebagai berikut:

1. u_1 adalah upaya edukasi masyarakat yang diterapkan pada populasi rentan terinfeksi guna menjauhkan mereka dari skabies.
2. u_2 adalah upaya edukasi masyarakat yang diterapkan pada populasi inkubasi agar segera menjalani pengobatan.
3. u_3 adalah upaya edukasi masyarakat yang diterapkan pada populasi terinfeksi agar segera menjalani pengobatan.

Yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.1 Model Dinamika Penyakit Skabies dengan Kontrol

Sistem matematika terkontrol diberikan oleh sistem persamaan diferensial

berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - \beta SI - \mu S - u_1 S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (\sigma + \theta + \mu)E - u_2 E$$

$$\frac{dI}{dt} = \theta E - (\gamma + \mu)I - u_3 I$$

$$\frac{dT}{dt} = \sigma E + \gamma I - \mu T + u_2 E + u_3 I$$

(4.1)

Skabies adalah penyakit menular yang terjadi melalui kontak langsung pada kulit manusia atau benda-benda yang terdapat tungau *Sarcoptes Scabiei* yang mana tidak peduli pada usia individu dikarenakan hanya mencari kulit yang hangat untuk bertelur (Anggriani, 2019). Oleh karena itu, semua individu yang berada pada jangkauan tungau *Sarcoptes Scabiei* atau berada di lingkungan tempat tinggal yang terdapat perantara tungau ini akan menjadi individu yang rentan tertular skabies. α merupakan konstanta rekrutmen yang menentukan jumlah awal populasi rentan skabies (S). Jumlah populasi S akan berkurang

karena terdapat laju kematian alami μ dan laju kontak efektif dalam periode inkubasi β . Untuk semakin mengurangi jumlah populasi S agar tidak berlanjut pada tahap inkubasi, maka dilakukan sosialisasi pada masyarakat untuk lebih memperhatikan kebersihan karena tungau *Sarcoptes Scabiei* dapat bertahan hidup selama 2-3 hari di luar kulit manusia dan hanya dapat dibunuh pada air panas dengan suhu di atas 50°C . Untuk mencegahnya, rumah harus rutin dibersihkan dan beberapa perlengkapan dijemur di panas matahari. Oleh sebab itu, lingkungan tempat tinggal menjadi faktor utama dalam penularan skabies, semakin padat jumlah individu di suatu tempat dan semakin acuh individu pada kebersihan tempat tinggal maka semakin mudah bagi tungau *Sarcoptes Scabiei* untuk berpindah-pindah. Jadi diberikan konstanta u_1 yaitu kontrol berupa edukasi masyarakat pada populasi S .

Kemudian, dengan laju β sejumlah individu melakukan kontak langsung dengan perantara tungau maka tungau akan menular ke individu tersebut dan induk tungau akan membuat terowongan pada kulit yang tipis di lipatan tubuh untuk bertelur. Dalam waktu sekitar 10 hari, telur tersebut akan menetas dan mengeluarkan larva yang selanjutnya akan bergerak ke permukaan kulit dan menjadi tungau dewasa. Rasa gatal pada kulit biasanya akan terasa setelah sekitar 4 sampai 6 minggu atau lebih cepat. Populasi pada masa inkubasi (E) yang tidak memilih pengobatan θ akan berpindah pada I dan individu yang memilih pengobatan σ akan berpindah pada T . Populasi E juga akan berkurang karena kematian alami dengan laju μ . Agar memaksimalkan individu untuk memilih pengobatan maka diberikan u_2 yaitu kontrol edukasi masyarakat. Masyarakat

perlu mengetahui bahwa skabies mustahil disembuhkan tanpa proses pengobatan yang tepat.

Pada individu yang menolak pengobatan θ secara keseluruhan akan dapat dinyatakan terinfeksi oleh timbulnya beberapa gejala yaitu rasa gatal yang memuncak pada malam hari, adanya bintik-bintik kecil merah yang terkadang membentuk garis serta pengelupasan di permukaan kulit. Rasa gatal yang terjadi diakibatkan oleh sensitisasi terhadap sekreta dan ekskreta yang dikeluarkan tungau. Hal ini dapat semakin parah ketika muncul benjolan bernanah. Jika tidak ditangani dengan tepat, skabies tidak akan sembuh selamanya. Pada laju γ sejumlah individu akan memilih untuk menjalani pengobatan dan dimaksimalkan dengan konstanta u_3 yaitu kontrol edukasi masyarakat pada populasi terinfeksi (I). Populasi I juga akan berkurang karena kematian alami dengan laju μ .

Selanjutnya, populasi yang menjalani pengobatan (T) akan bertambah dari populasi E dengan laju σ dan populasi I dengan laju γ yang mana dimaksimalkan dengan u_2 dan u_3 . Dalam upaya pengobatan, pasien akan diberikan obat oles yang harus diaplikasikan pada tubuh dari bawah telinga hingga ujung kaki, serta obat dalam untuk mengurangi rasa gatal. Selain itu, pasien harus mencuci semua pakaian dan perlengkapan lainnya kemudian merendamnya dengan air panas. Ditambah harus dipastikan bahwa tidak ada orang terdekat yang terinfeksi skabies. Di sisi lain, belum ada vaksin pada manusia yang terbukti ampuh dikarenakan tungau menyerang luar tubuh manusia. Siklus skabies ini tidak akan berhenti tanpa adanya kesadaran dari masyarakat.

4.2 Penyelesaian Analisis Kontrol Optimal

Pada subbab sebelumnya telah diperoleh model SEIT dengan kontrol edukasi masyarakat. Selanjutnya dengan parameter berdasarkan Beeton, dkk (2018) serta Bhunu, dkk (2013) pada Tabel 1.2 dan Tabel 1.3 akan disubstitusikan nilai parameter ke dalam persamaan (4.1), sehingga diperoleh persamaan (4.2).

Tabel 4.1 Nilai Awal Populasi

Notasi	Deskripsi	Nilai	Satuan
$S(0)$	Banyaknya populasi rentan saat $t = 0$	6	Pertahun
$E(0)$	Banyaknya populasi inkubasi saat $t = 0$	3	Pertahun
$I(0)$	Banyaknya populasi terinfeksi saat $t = 0$	2	Pertahun
$T(0)$	Banyaknya populasi dalam pengobatan saat $t = 0$	1	Pertahun

Tabel 4.2 Nilai Parameter Simulasi

Notasi	Deskripsi	Nilai	Satuan
α	Laju pertumbuhan populasi	0.029	Pertahun
β	Tingkat individu yang rentan terinfeksi karena kontak	0.043	Pertahun
μ	Tingkat kematian alami	0.02	Pertahun
θ	Tingkat individu dalam masa inkubasi yang tidak menjalani pengobatan	0.03	Pertahun
σ	Tingkat individu dalam masa inkubasi yang menjalani pengobatan	0.014	Pertahun
γ	Tingkat individu terinfeksi yang menjalani pengobatan	0.75	Pertahun

$$\frac{dS}{dt} = g_1 = 0,029 - 0,043SI - 0,02S - u_1S$$

$$\frac{dE}{dt} = g_2 = 0,043SI - 0,044E - u_2E$$

$$\frac{dI}{dt} = g_3 = 0,03E - 0,77I - u_3I$$

$$\frac{dT}{dt} = g_4 = 0,014E + 0,75I - 0,02T + u_2E + u_3I$$

(4.2)

Kemudian ditentukan bentuk dari $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ yang optimal yaitu $u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t)$ sehingga upaya pemberian kontrol dapat maksimal dengan biaya yang minimum. Serta dimodelkan suatu fungsi objektif yang menyatakan jumlah individu rentan terinfeksi $S(t)$, jumlah individu dalam masa inkubasi $E(t)$, jumlah individu terinfeksi $I(t)$, jumlah individu dalam pengobatan $T(t)$, serta biaya yang diperlukan untuk program edukasi masyarakat. Dikarenakan hubungan biaya untuk $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ merupakan hubungan yang tidak linier, maka fungsi biaya dibentuk menjadi model non linier dan fungsi kuadratik $u_1^2(t), u_2^2(t), u_3^2(t)$. Sehingga fungsi biaya untuk edukasi masyarakat adalah $D_1 u_1^2(t), D_2 u_2^2(t), D_3 u_3^2(t)$ yang mana D_1, D_2, D_3 merupakan bobot biaya untuk variabel kontrol. Fungsi objektif yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 J(u_1, u_2, u_3) &= S_{t_f} + E_{t_f} + I_{t_f} - T_{t_f} \\
 &+ \int_{t_0}^{t_f} \left(S(t) + E(t) + I(t) - T(t) + \frac{D_1}{2} u_1^2(t) + \frac{D_2}{2} u_2^2(t) \right. \\
 &\left. + \frac{D_3}{2} u_3^2(t) \right) dt
 \end{aligned}$$

Fungsi objektif tersebut merupakan kombinasi linier dari bentuk Mayer dan Lagrange yang disebut sebagai fungsi Bolza. $S_{t_f} + E_{t_f} + I_{t_f} - T_{t_f}$ adalah fungsi Mayer dan $\int_{t_0}^{t_f} \left(S(t) + E(t) + I(t) - T(t) + \frac{D_1}{2} u_1^2(t) + \frac{D_2}{2} u_2^2(t) + \frac{D_3}{2} u_3^2(t) \right) dt$ adalah fungsi Lagrange. Fungsi Mayer bertujuan untuk mengoptimalkan waktu akhir sedangkan fungsi Lagrange bertujuan untuk meminimalkan jumlah individu rentan terinfeksi skabies dan memaksimalkan jumlah individu yang menjalani pengobatan pada interval waktu $[t_0; t_f]$.

Kemudian terdapat pula nilai $\frac{1}{2}$ yang merupakan bobot yang menyatakan bahwa kepentingan dari biaya-biaya adalah sama.

Selanjutnya ditentukan kontrol optimal u_1, u_2, u_3 sedemikian sehingga

$$J(u_1^*, u_2^*, u_3^*) = \min_{(u_1, u_2, u_3) \in U_{ad}^3} J(u_1, u_2, u_3)$$

di mana U_{ad} adalah himpunan kontrol yang didefinisikan oleh

$$U_{ad} = \{u_i(t): 0 \leq u_i \leq 1, \text{ untuk } i = 1, 2, 3 \text{ dan } t \in [t_0; t_f]\}$$

Solusi optimal dari masalah kontrol optimal dapat diperoleh dengan menentukan Hamiltonian untuk masalah tersebut. Dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin, dapat dibentuk Hamiltonian dan mendapatkan sistem optimal berikut:

$$\hat{H} = f + \sum_k^4 \lambda_k g_k$$

$$\begin{aligned} \hat{H} = S + E + I - T + \frac{D_1}{2} u_1^2(t) + \frac{D_2}{2} u_2^2(t) + \frac{D_3}{2} u_3^2(t) \\ + \lambda_1 \{0,029 - 0,043SI - 0,02S - u_1S\} + \lambda_2 \{0,043SI - 0,044E \\ - u_2E\} + \lambda_3 \{0,03E - 0,77I - u_3I\} + \lambda_4 \{0,014E + 0,75I \\ - 0,02T + u_2E + u_3I\} \end{aligned}$$

di mana $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ merupakan fungsi adjoint yang terkait dengan persamaan untuk keadaan masing-masing S, E, I, T .

Berdasarkan Hamiltonian yang telah didapatkan, akan ditentukan persamaan *state* dan *co-state*. Persamaan *state* dari Hamiltonian tersebut adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda_1} = 0,029 - 0,043SI - 0,02S - u_1S$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda_2} = 0,043SI - 0,044E - u_2E$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda_3} = 0,03E - 0,77I - u_3I$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda_4} = 0,014E + 0,75I - 0,02T + u_2E + u_3I$$

Kemudian didapatkan persamaan *co-state* yaitu:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial S} = -[1 + \{-0,043I - 0,02 - u_1\}\lambda_1 + 0,043\lambda_2I]$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial E} = -[1 + \{-0,44 - u_2\}\lambda_2 + 0,03\lambda_3 + \{0,014 + u_2\}\lambda_4]$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial I} = & -[1 - 0,043\lambda_1S + 0,043\lambda_2S + \{-0,77 - u_3\}\lambda_3 \\ & + \{0,75 + u_3\}\lambda_4] \end{aligned}$$

$$\dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial T} = -[-1 - 0,02\lambda_4]$$

Kontrol optimal $u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t)$ bisa diselesaikan dari kondisi stasioner sebagai berikut:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial u_1} = 0, \frac{\partial \hat{H}}{\partial u_2} = 0, \frac{\partial \hat{H}}{\partial u_3} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial u_1} = D_1u_1(t) - \lambda_1S$$

$$u_1^*(t) = \frac{\lambda_1S}{D_1}$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial u_2} = D_2u_2(t) + (\lambda_4 - \lambda_2)E$$

$$u_2^*(t) = \frac{(-\lambda_4 + \lambda_2)E}{D_2}$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial u_3} = D_3u_3(t) + (\lambda_4 - \lambda_3)I$$

$$u_3^*(t) = \frac{(-\lambda_4 + \lambda_3)I}{D_3}$$

Pada kontrol pertama, batas nilai u_1 adalah $0 \leq u_1 \leq 1$ sehingga terdapat beberapa kemungkinan yaitu:

$$u_1^*(t) = \begin{cases} u_1^*(t), & \text{jika } 0 < \frac{\lambda_1 S}{D_1} < 1 \\ 0, & \text{jika } \frac{\lambda_1 S}{D_1} \leq 0 \\ 1, & \text{jika } \frac{\lambda_1 S}{D_1} \geq 1 \end{cases}$$

Pada kontrol kedua, batas nilai u_2 adalah $0 \leq u_2 \leq 1$ sehingga terdapat beberapa kemungkinan yaitu:

$$u_2^*(t) = \begin{cases} u_2^*(t), & \text{jika } 0 < \frac{(-\lambda_4 + \lambda_2)E}{D_2} < 1 \\ 0, & \text{jika } \frac{(-\lambda_4 + \lambda_2)E}{D_2} \leq 0 \\ 1, & \text{jika } \frac{(-\lambda_4 + \lambda_2)E}{D_2} \geq 1 \end{cases}$$

Pada kontrol ketiga, batas nilai u_3 adalah $0 \leq u_3 \leq 1$ sehingga terdapat beberapa kemungkinan yaitu:

$$u_3^*(t) = \begin{cases} u_3^*(t), & \text{jika } 0 < \frac{(-\lambda_4 + \lambda_3)I}{D_3} < 1 \\ 0, & \text{jika } \frac{(-\lambda_4 + \lambda_3)I}{D_3} \leq 0 \\ 1, & \text{jika } \frac{(-\lambda_4 + \lambda_3)I}{D_3} \geq 1 \end{cases}$$

Kontrol optimal dari $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$, $u_3^*(t)$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$u_1^*(t) = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda_1 S}{D_1} \right) \right)$$

$$u_2^*(t) = \min \left(1, \max \left(0, \frac{(-\lambda_4 + \lambda_2)E}{D_2} \right) \right)$$

$$u_3^*(t) = \min \left(1, \max \left(0, \frac{(-\lambda_4 + \lambda_3)I}{D_3} \right) \right)$$

Dengan turunan kedua dari Hamiltonian akan ditunjukkan bahwa \hat{H} mempunyai nilai minimum di u_1, u_2, u_3 .

$$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial u_1^2} = D_1 > 0$$

$$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial u_2^2} = D_2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial u_3^2} = D_3 > 0$$

Sebab turunan kedua \hat{H} bernilai positif maka terbukti bahwa \hat{H} mempunyai nilai minimum di u_1, u_2, u_3 .

Selanjutnya adalah menentukan fungsi \hat{H} yang optimal dengan substitusi nilai kontrol optimal $u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{H}^* = & S^* + E^* + I^* - T^* + \frac{D_1^*}{2} \left(\min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda_1 S^*}{D_1^*} \right) \right) \right)^2 \\ & + \frac{D_2^*}{2} \left(\min \left(1, \max \left(0, \frac{(-\lambda_4^* + \lambda_2^*)E^*}{D_2^*} \right) \right) \right)^2 \\ & + \frac{D_3^*}{2} \left(\min \left(1, \max \left(0, \frac{(-\lambda_4^* + \lambda_3^*)I^*}{D_3^*} \right) \right) \right)^2 \\ & + \lambda_1 \{0,029 - 0,043SI - 0,02S - u_1S\} + \lambda_2 \{0,043SI - 0,044E \\ & - u_2E\} + \lambda_3 \{0,03E - 0,77I - u_3I\} + \lambda_4 \{0,014E + 0,75I \\ & - 0,02T + u_2E + u_3I\} \end{aligned}$$

Dari persamaan *state* sebelumnya, juga disubstitusikan nilai kontrol optimal $u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t)$ yaitu

$$\begin{aligned} \dot{S}^* &= 0,029 - 0,043S^*I^* - 0,02S^* \\ &\quad - \left(\min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda_1 S^*}{D_1^*} \right) \right) \right) S^* \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}^* &= 0,043S^*I^* - 0,044E^* \\ &\quad - \left(\min \left(1, \max \left(0, \frac{(-\lambda_4^* + \lambda_2^*)E^*}{D_2^*} \right) \right) \right) E^* \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\dot{I}^* = 0,03E^* - 0,77I^* - \left(\min \left(1, \max \left(0, \frac{(-\lambda_4^* + \lambda_3^*)I^*}{D_3^*} \right) \right) \right) I^* \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{T}^* &= 0,014E^* + 0,75I^* - 0,02T^* \\ &\quad + \left(\min \left(1, \max \left(0, \frac{(-\lambda_4^* + \lambda_2^*)E^*}{D_2^*} \right) \right) \right) E^* \\ &\quad + \left(\min \left(1, \max \left(0, \frac{(-\lambda_4^* + \lambda_3^*)I^*}{D_3^*} \right) \right) \right) I^* \end{aligned} \quad (4.6)$$

Begitu pula dengan *co-state* yaitu:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1^* &= -[1 + (-0,043I^* - 0,02 - \min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda_1 S^*}{D_1^*} \right) \right))] \lambda_1^* \\ &\quad + 0,043\lambda_2^* I^*] \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2^* &= -[1 + \left(-0,044 - \min \left(1, \max \left(0, \frac{(-\lambda_4^* + \lambda_2^*)E^*}{D_2^*} \right) \right) \right)] \lambda_2^* \\ &\quad + 0,03\lambda_3^* \\ &\quad + \left(0,014 + \min \left(1, \max \left(0, \frac{(-\lambda_4^* + \lambda_2^*)E^*}{D_2^*} \right) \right) \right) \lambda_4^*] \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_3^* &= -[1 - 0,043\lambda_1^* S^* + 0,043\lambda_2^* S^* \\ &\quad + \left(-0,77 - \min \left(1, \max \left(0, \frac{(-\lambda_4^* + \lambda_3^*)I^*}{D_3^*} \right) \right) \right) \lambda_3^* \\ &\quad + \left(0,75 + \min \left(1, \max \left(0, \frac{(-\lambda_4^* + \lambda_3^*)I^*}{D_3^*} \right) \right) \right) \lambda_4^*] \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\lambda_4^* = -[-1-0,02\lambda_4^*] \quad (4.10)$$

4.3 Simulasi Numerik

Pada pembahasan kali ini, persamaan *state* dan persamaan *co-state* akan diselesaikan secara numerik menggunakan metode Runge Kutta orde 4. Persamaan (4.3) sampai (4.6) akan disimulasikan menggunakan skema maju Runge Kutta orde 4 sedangkan persamaan (4.7) sampai (4.10) disimulasikan menggunakan skema mundur Runge Kutta orde 4. Penyelesaian persamaan *state* menggunakan skema maju Runge Kutta orde 4 adalah sebagai berikut:

$$S_{i+1} = S_i + \frac{h}{6}(k_{1,S} + 2k_{2,S} + 2k_{3,S} + k_{4,S})$$

$$E_{i+1} = E_i + \frac{h}{6}(k_{1,E} + 2k_{2,E} + 2k_{3,E} + k_{4,E})$$

$$I_{i+1} = I_i + \frac{h}{6}(k_{1,I} + 2k_{2,I} + 2k_{3,I} + k_{4,I})$$

$$T_{i+1} = T_i + \frac{h}{6}(k_{1,T} + 2k_{2,T} + 2k_{3,T} + k_{4,T})$$

dengan $i = 0,1,2,3, \dots, 50$

Tahap 1 diskritisasi sistem persamaan

$$k_{1,S} = f(t_i, S_i) = 0,029 - 0,043S_iI_i - 0,02S_i - u_{1,i}S_i$$

$$k_{1,E} = f(t_i, E_i) = 0,043S_iI_i - 0,044E_i - u_{2,i}E_i$$

$$k_{1,I} = f(t_i, I_i) = 0,03E_i - 0,77I_i - u_{3,i}I_i$$

$$k_{1,T} = f(t_i, T_i) = 0,014E_i + 0,75I_i - 0,02T_i + u_{2,i}E_i + u_{3,i}I_i$$

Tahap 2 diskritisasi sistem persamaan

$$k_{2,S} = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, S_i + \frac{1}{2}hk_{1,S}\right)$$

$$= 0,029 - 0,043 \left(S_i + \frac{1}{2} h k_{1,S} \right) \left(I_i + \frac{1}{2} h k_{1,I} \right) - 0,02 \left(S_i + \frac{1}{2} h k_{1,S} \right) \\ - \left(\frac{1}{2} (u_{1,i} + u_{1,i+1}) \right) \left(S_i + \frac{1}{2} h k_{1,S} \right)$$

$$k_{2,E} = f \left(t_i + \frac{1}{2} h, E_i + \frac{1}{2} h k_{1,E} \right) \\ = 0,043 \left(S_i + \frac{1}{2} h k_{1,S} \right) \left(I_i + \frac{1}{2} h k_{1,I} \right) - 0,044 \left(E_i + \frac{1}{2} h k_{1,E} \right) \\ - \left(\frac{1}{2} (u_{2,i} + u_{2,i+1}) \right) \left(E_i + \frac{1}{2} h k_{1,E} \right)$$

$$k_{2,I} = f \left(t_i + \frac{1}{2} h, I_i + \frac{1}{2} h k_{1,I} \right) \\ = 0,03 \left(E_i + \frac{1}{2} h k_{1,E} \right) - 0,77 \left(I_i + \frac{1}{2} h k_{1,I} \right) \\ - \left(\frac{1}{2} (u_{3,i} + u_{3,i+1}) \right) \left(I_i + \frac{1}{2} h k_{1,I} \right)$$

$$k_{2,T} = f \left(t_i + \frac{1}{2} h, T_i + \frac{1}{2} h k_{1,T} \right) \\ = 0,044 \left(E_i + \frac{1}{2} h k_{1,E} \right) + 0,75 \left(I_i + \frac{1}{2} h k_{1,I} \right) - 0,02 \left(T_i + \frac{1}{2} h k_{1,T} \right) \\ + \left(\frac{1}{2} (u_{2,i} + u_{2,i+1}) \right) \left(E_i + \frac{1}{2} h k_{1,E} \right) \\ + \left(\frac{1}{2} (u_{3,i} + u_{3,i+1}) \right) \left(I_i + \frac{1}{2} h k_{1,I} \right)$$

Tahap 3 diskritisasi sistem persamaan

$$k_{3,S} = f \left(t_i + \frac{1}{2} h, S_i + \frac{1}{2} h k_{2,S} \right) \\ = 0,029 - 0,043 \left(S_i + \frac{1}{2} h k_{2,S} \right) \left(I_i + \frac{1}{2} h k_{2,I} \right) - 0,02 \left(S_i + \frac{1}{2} h k_{2,S} \right) \\ - \left(\frac{1}{2} (u_{1,i} + u_{1,i+1}) \right) \left(S_i + \frac{1}{2} h k_{2,S} \right)$$

$$\begin{aligned}
k_{3,E} &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, E_i + \frac{1}{2}hk_{2,E}\right) \\
&= 0,043\left(S_i + \frac{1}{2}hk_{2,S}\right)\left(I_i + \frac{1}{2}hk_{2,I}\right) - 0,044\left(E_i + \frac{1}{2}hk_{2,E}\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}(u_{2,i} + u_{2,i+1})\right)\left(E_i + \frac{1}{2}hk_{2,E}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,I} &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, I_i + \frac{1}{2}hk_{2,I}\right) \\
&= 0,03\left(E_i + \frac{1}{2}hk_{2,E}\right) - 0,77\left(I_i + \frac{1}{2}hk_{2,I}\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}(u_{3,i} + u_{3,i+1})\right)\left(I_i + \frac{1}{2}hk_{2,I}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,T} &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, T_i + \frac{1}{2}hk_{2,T}\right) \\
&= 0,014\left(E_i + \frac{1}{2}hk_{2,E}\right) + 0,75\left(I_i + \frac{1}{2}hk_{2,I}\right) - 0,02\left(T_i + \frac{1}{2}hk_{2,T}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}(u_{2,i} + u_{2,i+1})\right)\left(E_i + \frac{1}{2}hk_{2,E}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}(u_{3,i} + u_{3,i+1})\right)\left(I_i + \frac{1}{2}hk_{2,I}\right)
\end{aligned}$$

Tahap 4 diskritisasi sistem persamaan

$$\begin{aligned}
k_{4,S} &= f(t_i + h, S_i + hk_{3,S}) \\
&= 0,029 - 0,043(S_i + hk_{3,S})(I_i + hk_{3,I}) - 0,02(S_i + hk_{3,S}) \\
&\quad - u_{1,i+1}(S_i + hk_{3,S})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{4,E} &= f(t_i + h, E_i + hk_{3,E}) \\
&= 0,043(S_i + hk_{3,S})(I_i + hk_{3,I}) - 0,044(E_i + hk_{3,E}) - u_{2,i+1}(E_i + hk_{3,E})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{4,I} &= f(t_i + h, I_i + hk_{3,I}) \\
&= 0,03(E_i + hk_{3,E}) - 0,77(I_i + hk_{3,I}) - u_{3,i+1}(I_i + hk_{3,I})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{4,T} &= f(t_i + h, T_i + hk_{3,T}) \\
&= 0,014(E_i + hk_{3,E}) + 0,75(I_i + hk_{3,I}) - 0,02(T_i + hk_{3,T}) \\
&\quad + u_{2,i+1}(E_i + hk_{3,E}) + u_{3,i+1}(I_i + hk_{3,I})
\end{aligned}$$

Penyelesaian persamaan *co-state* menggunakan skema mundur Runge Kutta orde 4 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\lambda_1^j &= \lambda_1^{j-1} - \frac{h}{6}(k_{1,S} + 2k_{2,S} + 2k_{3,S} + k_{4,S}) \\
\lambda_2^j &= \lambda_2^{j-1} - \frac{h}{6}(k_{1,E} + 2k_{2,E} + 2k_{3,E} + k_{4,E}) \\
\lambda_3^j &= \lambda_3^{j-1} - \frac{h}{6}(k_{1,I} + 2k_{2,I} + 2k_{3,I} + k_{4,I}) \\
\lambda_4^j &= \lambda_4^{j-1} - \frac{h}{6}(k_{1,T} + 2k_{2,T} + 2k_{3,T} + k_{4,T})
\end{aligned}$$

dengan $j = (50 + 2 - i)$

Tahap 1 diskritisasi sistem persamaan

$$\begin{aligned}
k_{1,S} &= f(t_i, \lambda_1^j) = -[(-0,043I - 0,02 - u_1)\lambda_1^j + 0,043\lambda_2^j I] \\
k_{1,E} &= f(t_i, \lambda_2^j) = -[1 + (-0,044 - u_2)\lambda_2^j + 0,03\lambda_3^j + (0,014 + u_2)\lambda_4^j] \\
k_{1,I} &= f(t_i, \lambda_3^j) = -[1 - 0,043\lambda_1^j S + 0,043\lambda_2^j S + (-0,77 - u_3)\lambda_3^j \\
&\quad + (0,75 + u_3)\lambda_4^j] \\
k_{1,T} &= f(t_i, \lambda_4^j) = -[-1 - 0,02\lambda_4^j]
\end{aligned}$$

Tahap 2 diskritisasi sistem persamaan

$$\begin{aligned}
k_{2,S} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_1^j - \frac{1}{2}hk_{1,S}\right) \\
&= -\left[1 + \left(-0,043\left(\frac{1}{2}(I_i + I_{i-1})\right) - 0,02 - \left(\frac{1}{2}(u_{1,i} + u_{1,i-1})\right)\right)\left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hk_{1,S}\right)\right. \\
&\quad \left.+ 0,043\left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hk_{1,E}\right)\left(\frac{1}{2}(I_i + I_{i-1})\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,E} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_2^j - \frac{1}{2}hk_{1,E}\right) \\
&= -\left[1 + \left(-0,044 - \left(\frac{1}{2}(u_{2,i} + u_{2,i-1})\right)\right)\right]\left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hk_{1,E}\right) \\
&\quad + 0,03\left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hk_{1,I}\right) \\
&\quad + \left(0,014 + \left(\frac{1}{2}(u_{2,i} + u_{2,i-1})\right)\right)\left(\lambda_4^j - \frac{1}{2}hk_{1,T}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,I} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_3^j - \frac{1}{2}hk_{1,I}\right) \\
&= -\left[1 - 0,043\left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hk_{1,S}\right)\left(\frac{1}{2}(S_i + S_{i-1})\right)\right. \\
&\quad + 0,043\left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hk_{1,E}\right)\left(\frac{1}{2}(S_i + S_{i-1})\right) \\
&\quad + \left(-0,77 - \left(\frac{1}{2}(u_{3,i} + u_{3,i-1})\right)\right)\left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hk_{1,I}\right) \\
&\quad \left. + \left(0,75 + \left(\frac{1}{2}(u_{3,i} + u_{3,i-1})\right)\right)\left(\lambda_4^j - \frac{1}{2}hk_{1,T}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,T} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_4^j - \frac{1}{2}hk_{1,T}\right) \\
&= -\left[-1 - 0,02\left(\lambda_4^j - \frac{1}{2}hk_{1,T}\right)\right]
\end{aligned}$$

Tahap 3 diskritisasi sistem persamaan

$$\begin{aligned}
k_{3,S} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_1^j - \frac{1}{2}hk_{2,S}\right) \\
&= -\left[1 + \left(-0,043\left(\frac{1}{2}(I_i + I_{i-1})\right) - 0,02 - \left(\frac{1}{2}(u_{1,i} + u_{1,i-1})\right)\right)\right]\left(\lambda_1^j\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}hk_{2,S}\right) + 0,043\left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hk_{2,E}\right)\left(\frac{1}{2}(I_i + I_{i-1})\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,E} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_2^j - \frac{1}{2}hk_{2,E}\right) \\
&= -\left[1 + \left(-0,044 - \left(\frac{1}{2}(u_{2,i} + u_{2,i-1})\right)\right)\right]\left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hk_{2,E}\right) \\
&\quad + 0,03\left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hk_{2,I}\right) \\
&\quad + \left(0,044 + \left(\frac{1}{2}(u_{2,i} + u_{2,i-1})\right)\right)\left(\lambda_4^j - \frac{1}{2}hk_{2,T}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,I} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_3^j - \frac{1}{2}hk_{2,I}\right) \\
&= -\left[1 - 0,043\left(\lambda_1^j - \frac{1}{2}hk_{2,S}\right)\left(\frac{1}{2}(S_i + S_{i-1})\right)\right. \\
&\quad + 0,043\left(\lambda_2^j - \frac{1}{2}hk_{2,E}\right)\left(\frac{1}{2}(S_i + S_{i-1})\right) \\
&\quad + \left(-0,77 - \left(\frac{1}{2}(u_{3,i} + u_{3,i-1})\right)\right)\left(\lambda_3^j - \frac{1}{2}hk_{2,I}\right) \\
&\quad \left. + \left(0,75 + \left(\frac{1}{2}(u_{3,i} + u_{3,i-1})\right)\right)\left(\lambda_4^j - \frac{1}{2}hk_{2,T}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,T} &= f\left(t_i - \frac{1}{2}h, \lambda_4^j - \frac{1}{2}hk_{2,T}\right) \\
&= -\left[-1 - 0,02\left(\lambda_4^j - \frac{1}{2}hk_{2,T}\right)\right]
\end{aligned}$$

Tahap 4 diskritisasi sistem persamaan

$$\begin{aligned}
k_{4,S} &= f(t_i - h, \lambda_1^j - hk_{3,S}) \\
&= -\left[(-0,043I_{i-1} - 0,02 - u_{1,i-1})(\lambda_1^j - hk_{3,S}) + 0,043(\lambda_2^j - hk_{3,E})I_{i-1}\right]
\end{aligned}$$

$$k_{4,E} = f(t_i - h, \lambda_2^j - hk_{3,E})$$

$$= -[1 + (-0,044 - u_{2,i-1})(\lambda_2^j - hk_{3,E}) + 0,03(\lambda_3^j - hk_{3,I}) \\ + (0,014 + u_{2,i-1})(\lambda_4^j - hk_{3,T})]$$

$$k_{4,I} = f(t_i - h, \lambda_3^j - hk_{3,I})$$

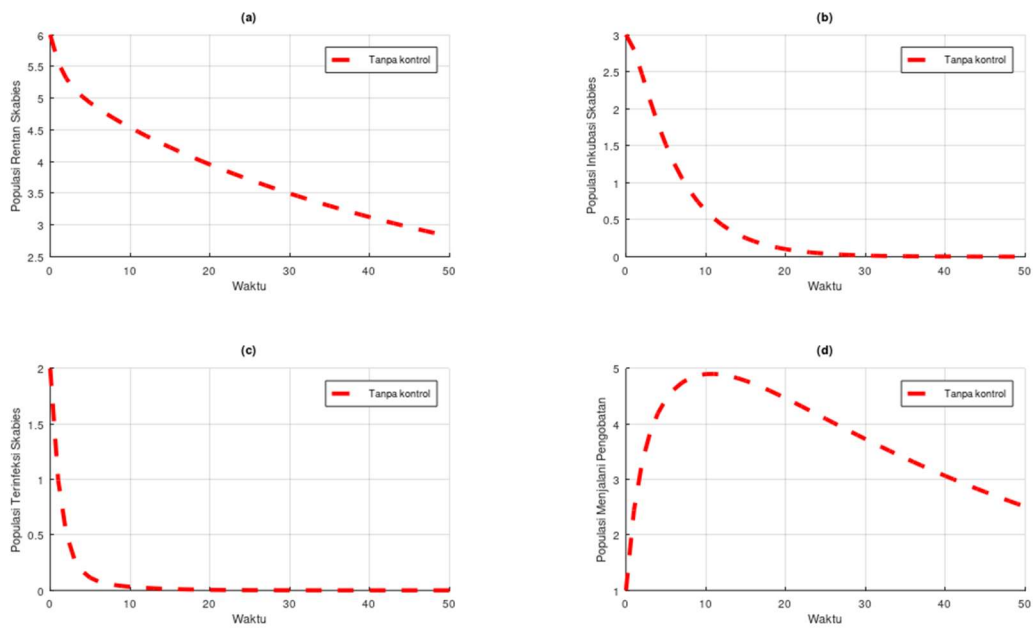
$$= -[1 - 0,043(\lambda_1^j - hk_{3,S})S_{i-1} + 0,043(\lambda_2^j - hk_{3,E})S_{i-1} \\ + (-0,77 - u_{3,i-1})(\lambda_3^j - hk_{3,I}) + (0,75 + u_{3,i-1})(\lambda_4^j - hk_{3,T})]$$

$$k_{4,T} = f(t_i - h, \lambda_4^j - hk_{3,T})$$

$$= -[-1 - 0,02(\lambda_4^j - hk_{3,T})]$$

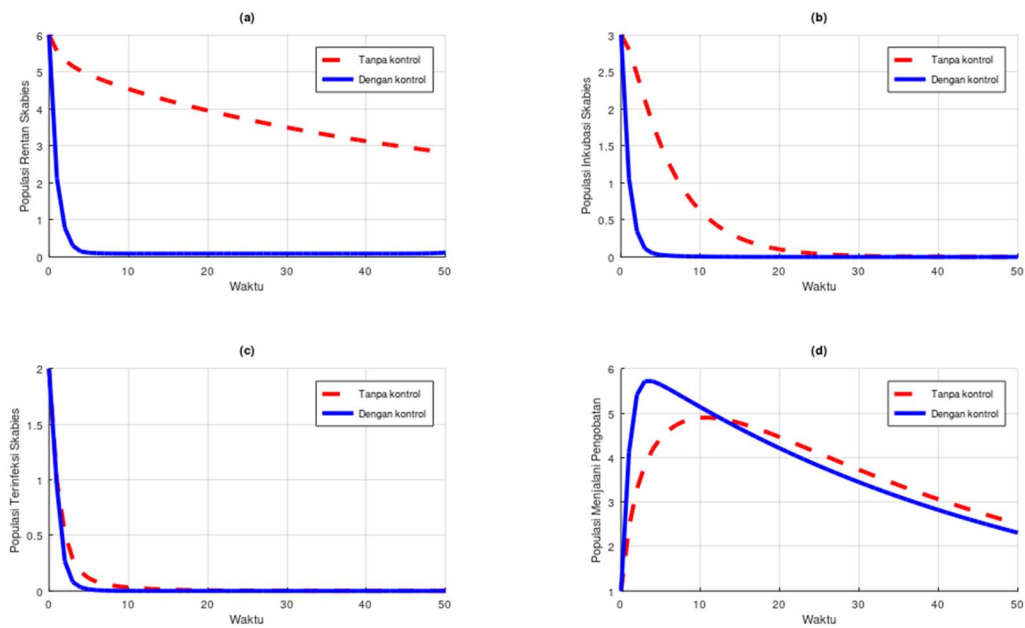
Hal selanjutnya yang dilakukan adalah simulasi numerik dengan menggunakan aplikasi Octave. Terdapat tiga kontrol yang diberikan pada model yaitu kontrol edukasi populasi rentan u_1 , kontrol edukasi populasi inkubasi u_2 dan kontrol edukasi populasi terinfeksi u_3 . Tabel 4.1 merupakan nilai awal yang digunakan untuk simulasi sedangkan Tabel 4.2 adalah nilai parameternya. Interval waktu yang dipakai adalah $t \in [0,50]$.

Pada Gambar 4.2 diperlihatkan simulasi numerik model tanpa kontrol dengan grafik (a) adalah populasi rentan, grafik (b) adalah populasi inkubasi, grafik (c) adalah populasi terinfeksi dan grafik (d) adalah populasi dalam pengobatan. Sementara Gambar 4.3 memperlihatkan simulasi numerik model tanpa kontrol dan dengan kontrol. Kemudian Gambar 4.4 adalah simulasi numerik kontrol.



Gambar 4.2 Penyebaran Skabies Tanpa Kontrol

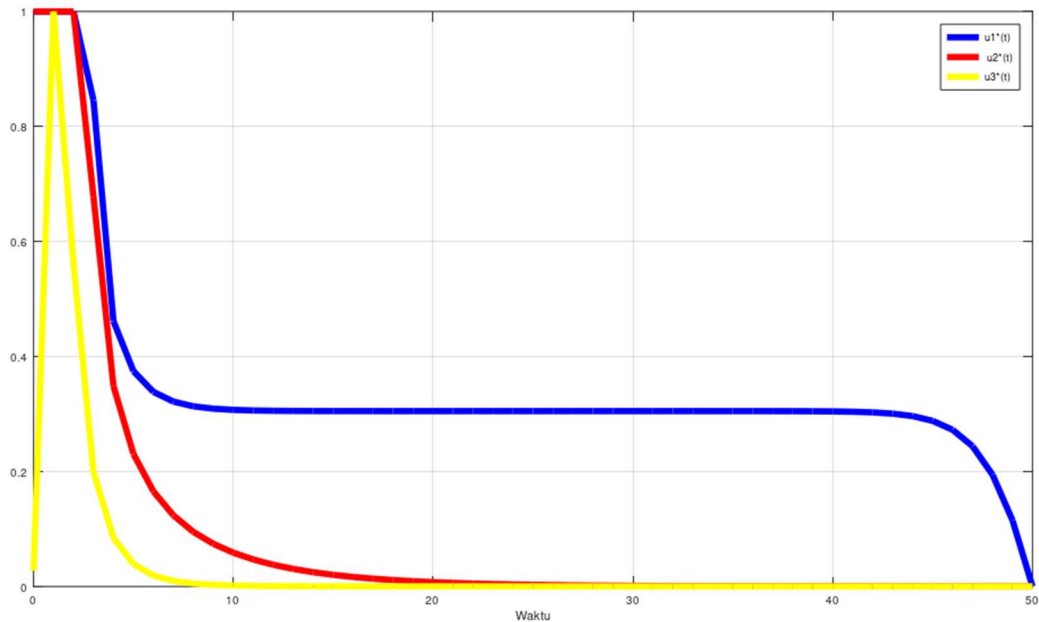
Dari Gambar 4.2, grafik (a) menunjukkan populasi rentan skabies menurun dari waktu ke waktu dan tidak pernah terjadi peningkatan hingga jumlah populasi mencapai 2,8214 di tahun ke-50. Sementara itu, pada grafik (b), (c) mengalami penurunan dan grafik (d) mengalami peningkatan jika dilihat dari nilai awal (3, 2, 1) dan nilai akhir (0,00042; $2,1726 \times 10^{-5}$; 2,5093). Dilihat dari grafik (d) yang mengalami peningkatan hingga sekitar tahun ke-11 dengan nilai tertinggi 4,9005 menunjukkan hal yang cukup baik karena sebaliknya grafik (b), (c) akan turun drastis oleh angka pengobatan yang tinggi. Sehingga dari Gambar 4.2 dapat disimpulkan bahwa penyebaran skabies masih mampu diatasi hanya dengan pengobatan.



Gambar 4.3 Penyebaran Skabies dengan dan Tanpa Kontrol

Selanjutnya dengan Gambar 4.3 akan dibandingkan kedua kurva yaitu kurva dengan kontrol dan kurva tanpa kontrol. Dari keempat grafik, setelah diberikan kontrol yaitu u_1, u_2, u_3 , grafik (a) mengalami perubahan yang sangat signifikan. Banyaknya populasi rentan sekitar tahun ke-3 mengalami penurunan drastis sampai $0,30567$. Maka dari itu, angka populasi rentan terinfeksi dapat lebih ditekan dengan kontrol u_1 yang sudah diberikan. Lalu pada grafik (b), (c), (d), terlihat juga mengalami perubahan secara positif. Pada grafik (d), banyaknya individu yang menjalani pengobatan bertambah dengan lebih cepat dan lebih banyak. Puncaknya terjadi sekitar tahun ke-3 dengan nilai $5,7222$. Hal ini sebanding dengan grafik (b), (c) yang mengalami penurunan lebih banyak dan lebih cepat di mana sekitar tahun ke-3, grafik (b) dan (c) turun mendekati 0 secara bersamaan. Saat tahun ke-50 angka populasi inkubasi sebesar $2,0313 \times 10^{-6}$ dan populasi terinfeksi sebesar $1,0503 \times 10^{-5}$. Namun kurva pada grafik (c) tidak mengalami perubahan yang signifikan. Meski begitu, u_1, u_2, u_3 memiliki

pengaruh pada populasi rentan, populasi inkubasi, populasi terinfeksi dan populasi dalam pengobatan.



Gambar 4.4 Simulasi Kontrol u_1, u_2, u_3

Berdasarkan kesimpulan yang diambil sebelumnya, hal tersebut sesuai dengan simulasi kontrol yang diberikan pada Gambar 4.4. Kurva biru menunjukkan bahwa diberikan kontrol u_1 dari awal periode dengan nilai 0,027637 kemudian meningkat pada tahun pertama dengan nilai maksimal dan menurun di tahun kedua. Kurva merah menunjukkan kontrol u_2 yang mengalami peningkatan drastis hingga nilai maksimal di periode awal yang kemudian menurun sekitar tahun ke-3. Sedangkan kurva kuning menunjukkan kurva u_3 yang terus berada pada kontrol maksimal hingga sekitar tahun ke-2 yang kemudian mengalami penurunan di tahun ke-3. Di tahun ke-50, seluruh kontrol berada pada nilai 0. Meski pada garfik (c) di Gambar 4.3 tidak memiliki perubahan yang besar, namun ketiga kontrol memiliki nilai yang tinggi sekitar

tahun pertama. Dari simulasi tersebut, mengindikasikan bahwa kontrol u_1, u_2, u_3 sangat berperan dalam menekan penyebaran penyakit skabies.

Melihat kontrol edukasi masyarakat hanya memberikan sedikit pengaruh pada kurva, perlu diingat kembali mengenai arti dari ikhtiar. Dalam Islam, usaha atau ikhtiar yang baik dan benar adalah mengerahkan seluruh kemampuan yang dimiliki untuk mencapai tujuan dengan niat yang tulus karena Allah, serta menerima apa pun hasil yang merupakan kehendak dari Allah. Berikhtiar juga harus dilakukan secara terus menerus meski melalui beberapa kegagalan. Sebagai seorang muslim, kita harus yakin bahwa rencana Allah adalah rencana yang terbaik untuk kita, oleh karena itu kita tidak boleh mudah menyerah oleh kegagalan. Suatu kegagalan adalah bentuk pembelajaran agar kita bisa menjadi lebih baik dari sebelumnya. Manusia adalah makhluk yang tidak sempurna, dalam berikhtiar ada kalanya kita juga menemui jalan buntu karena terbatasnya kemampuan. Namun itu adalah supaya kita mengingat Allah dan terus bergantung kepada Allah. Kita tidak boleh angkuh bahwa dengan usaha kita sendiri semuanya akan berjalan dengan mudah. Sesungguhnya semua yang terjadi di dunia ini adalah atas izin Allah, tidak ada daya dan kekuatan kecuali dengan izin Allah SWT.

Maka dari itu, untuk mengatasi penyebaran skabies diperlukan ikhtiar yang baik dan benar agar hasil dari usaha yang dilakukan merupakan hasil yang terbaik. Masyarakat harus terus diedukasi secara sungguh-sungguh mengenai cara mencegah dan mengatasi skabies. Meskipun grafik (c) pada Gambar 4.3 menunjukkan hasil yang tidak memuaskan, dengan kuasa Allah hal tersebut bisa diubah dengan berikhtiar. Masyarakat harus lebih dipastikan apakah benar-benar

sudah memahami edukasi yang diberikan, kemudian juga harus dipastikan apakah masyarakat menerapkan pengetahuan yang didapat dalam kehidupan sehari-hari. Masyarakat yang rentan perlu melakukan tindakan pencegahan dengan rutin membersihkan tempat tinggal dan memperbaiki lingkungan tempat tinggal agar rapi dan tertata, serta segera memeriksakan diri ke dokter jika terdapat orang terdekat yang terinfeksi skabies. Sedangkan bagi masyarakat pada populasi inkubasi dan terinfeksi, perlu melakukan tindakan penanganan yaitu segera memeriksakan diri ke dokter, rutin memakai obat dari dokter dengan benar, membersihkan semua kain dengan merendamnya menggunakan air panas, memastikan tidak ada orang terdekat yang terinfeksi agar tempat tinggal benar-benar bersih dari skabies. Setelah semua usaha sudah dikerahkan dengan sungguh-sungguh, maka dengan izin Allah, skabies akan bisa teratasi dan dicegah.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pada pembahasan sebelumnya, dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Model dinamika penyebaran penyakit skabies dengan tiga strategi kontrol yaitu edukasi masyarakat pada populasi rentan (u_1), edukasi masyarakat pada populasi inkubasi (u_2) dan edukasi masyarakat pada populasi terinfeksi (u_3) diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - \beta SI - \mu S - u_1 S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (\sigma + \theta + \mu)E - u_2 E$$

$$\frac{dI}{dt} = \theta - (\gamma + \mu)I - u_3 I$$

$$\frac{dT}{dt} = \sigma + \gamma I - \mu T + u_2 E + u_3 I$$

2. Bentuk kontrol yang paling optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut:

$$u_1^*(t) = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda_1 S}{D_1} \right) \right)$$

$$u_2^*(t) = \min \left(1, \max \left(0, \frac{(-\lambda_4 + \lambda_2)E}{D_2} \right) \right)$$

$$u_3^*(t) = \min \left(1, \max \left(0, \frac{(-\lambda_4 + \lambda_3)I}{D_3} \right) \right)$$

Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa edukasi masyarakat pada populasi rentan (u_1), edukasi masyarakat pada populasi inkubasi (u_2), edukasi masyarakat pada populasi terinfeksi (u_3) berpengaruh untuk meminimalkan jumlah populasi rentan, meminimalkan jumlah populasi inkubasi dan populasi terinfeksi serta memaksimalkan jumlah populasi dalam pengobatan.

5.2 Saran

Pada penelitian ini penyebaran skabies tidak melibatkan masyarakat tervaksinasi, oleh karena itu pada penelitian selanjutnya dapat dikembangkan menggunakan vaksinasi untuk melihat pengaruh vaksinasi terhadap skabies. Diharapkan model pada penelitian ini bisa disimulasikan menggunakan parameter berbeda di suatu lokasi dengan penyebaran skabies yang tinggi agar dapat mengatasi penyebaran skabies di lokasi tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Anggraini, Y. E. (2019). *Mengenal Scabies*, RSUP Dr. Sardjito. <https://sardjito.co.id/2019/10/30/mengenal-scabies/>
- Beeton, N. J., Carver, S., Forbes, L. K. (2018). *A Model for the Treatment of Environmentally Transmitted Sarcoptic Mange in Bare-Nosed Wombats (Vombatus Urinus)*. Journal of Theoretical Biology.
- Bhunu, C. P., Mushayabasa, S., Monera, T. G. (2013). *Assesing the Impact of Vaccination on Controlling the Spread of Human Scabies*. Hindawi Publishing Corporation.
- Chiang, A. C. (2005). *Fundamental Method of Mathematical Economics Fourth Edition*. The McGraw-Hill. New York.
- Farman, M., Saleem, M.U., Ahmad, A., Ahmad, M. O. (2018). *Analysis and Numerical Solution of SEIR Epidemic Model of Measles with Non-Integer Time Fractional Derivatives by using Laplace Adominan Decomposition Method*. Ain Shams Engineering Journal.
- Giesecke, J. (2002). *Modern Infections Disease Epidemiology*. Arnold. London.
- LI, M. Y. & Muldowney, J. S. (1996). *A Geometric Approach to Global Stability Problems*. Siam J. Math. Anal Vol. 27, No. 4, 12-26.
- Lyu, L. H. (2016). *Derivation of the Numerical Intregation Formulas*. Appendix. Taiwan.
- Mahmudah, D. E. & Naf'an, M. Z. (2014). *Kontrol Optimal Model Epidemik Host-Vector dengan Simulasi Menggunakan Forward-Backwardsweep Method*. Jurnal Ilmiah Teknologi dan Informasi ASIA Vol. 8, No. 2, 1-9.
- Mastuti, H. T. (2004). *Persamaan Diferensial Linear dan Penerapannya*. Skripsi.
- Nurainiwati, S. A. (2011). *Skabies*. Sainika Medika Vol. 7, No. 15, 69-72.
- Pentasihan, L. (2019). *Al-Qur'an dan Terjemahannya Edisi Penyempurnaan 2019*. Badan Litbang dan Diklat Kementerian Agama RI.
- Perko, L. (2000). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer. New York.
- Putri, A.I.K.A. (2022). *Ikhtiar dan Takdir (Studi Komparatif Nurcholish Madjid dan Hamka)*. Skripsi.

- Sriyanti, Y. & Ahmad, D. (2021). *Model Matematika Penyebaran Penyakit Scabies pada Populasi Hewan dan Manusia*. UNPjoMath Vol. 3, No. 3.
- Sund, T. (2012). *Lectures on Optimal Control Theory*. Corpus. USA.
- Sundari, R. & Apriliani, E. (2017). *Konstruksi Fungsi Lyapunov untuk Menentukan Kestabilan*. Jurnal Sains dan Seni ITS Vol 6, No. 1.
- Sungkar, S. (2016). *Skabies: Etiologi, Patogenesis, Pengobatan, Pemberantasan, dan Pencegahan*. Badan Penerbit FKUI. Jakarta.
- Syahril, R. & Garnadi, A. D. (2018). *Kuliah Pengantar Kontrol Optimum dan Metode Numerik dalam Scilab*. JMA Vol. yy, No. 1, 4-24.
- Trench, W. F. (2013). *Elementary Differential Equations*. Brooks/Cole Thomson Learning.
- Umar, P. D., & DEA. (2011). *Metode Optimasi*. Muara Indah. Bandung.
- Utami, N. P. (2021). *Pemodelan Pencegahan Penularan Scabies*. JOSTECH J. Sci. Tech. Vol. 1, No. 2, 136-148.
- Vinter, R. B. (2014). *Optimal Control and Pontryagin's Maximum Principle*. Springer-Verlag. London.
- Wiggins, S. (2017). *Ordinary Differential Equations*. University of Bristol. Inggris.
- Winarni, A., & Sofiyati, N. (2022). *Model Epidemik SEITS dengan Kejadian Bilinier pada Penyebaran Penyakit Scabies*. Jurnal Sains, Teknologi dan Industri Vol. 20, No. 1, 8-15.
- Yulida, Y. (2011). *Analisis Kestabilan Global Model Epidemik SIRS Menggunakan Fungsi Lyapunov*. Jurnal Matematika Murni dan Terapan Vol. 5, No. 2, 19-30.

LAMPIRAN

Lampiran 1: M-File Simulasi Numerik Tanpa Kontrol

```
function dt=tanpa (y,alpa,beta,mu,sigma,teta,gamma)

x(1)=alpa-beta*y(1)*y(3)-mu*y(1);
x(2)=beta*y(1)*y(3)-sigma*y(2)-teta*y(2)-mu*y(2);
x(3)=teta*y(2)-gamma*y(3)-mu*y(3);
x(4)=sigma*y(2)+gamma*y(3)-mu*y(4);

dt=[x(1) x(2) x(3) x(4)];

clear all;clc; close all;

alpa=0.029;
beta=0.043;
mu=0.02;
teta=0.03;
sigma=0.14;
gamma=0.75;

S0=6; E0=3; I0=2; T0=1;

h=1;
t=0:h:50;
N=length(t);

S=zeros(N,1); So=zeros(N,1);
E=zeros(N,1); Eo=zeros(N,1);
I=zeros(N,1); Io=zeros(N,1);
T=zeros(N,1); To=zeros(N,1);

S(1)=S0; E(1)=E0; I(1)=I0; T(1)=T0;

for i=1:N-1

y=[S(i) E(i) I(i) T(i)];
k1=h*tanpa(y,alpa,beta,mu,sigma,teta,gamma);
k2=h*tanpa(y+0.5*k1,alpa,beta,mu,sigma,teta,gamma);
k3=h*tanpa(y+0.5*k2,alpa,beta,mu,sigma,teta,gamma);
k4=h*tanpa(y+k3,alpa,beta,mu,sigma,teta,gamma);

y=y+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
S(i+1)=y(1); E(i+1)=y(2); I(i+1)=y(3); T(i+1)=y(4);
```



```

endfor

figure(1)
subplot(2,2,1); grid on; hold on;
plot(t,S,'r--','linewidth',2);
legend('Tanpa kontrol','Dengan kontrol');
xlabel('Waktu'); ylabel('Populasi Rentan Skabies');
title('(a)');

subplot(2,2,2); grid on; hold on;
plot(t,E,'r--','linewidth',2);
legend('Tanpa kontrol','Dengan kontrol');
xlabel('Waktu'); ylabel('Populasi Inkubasi Skabies');
title('(b)');

subplot(2,2,3); grid on; hold on;
plot(t,I,'r--','linewidth',2);
legend('Tanpa kontrol','Dengan kontrol');
xlabel('Waktu'); ylabel('Populasi Terinfeksi Skabies');
title('(c)');

subplot(2,2,4); grid on; hold on;
plot(t,T,'r--','linewidth',2);
legend('Tanpa kontrol','Dengan kontrol');
xlabel('Waktu'); ylabel('Populasi Menjalani Pengobatan');
title('(d)');

```

Lampiran 2: M-File Simulasi Numerik Dengan Kontrol

```

function dt=state(y, alpa, beta, mu, u1, u2, u3, sigma, teta, gamma)

x(1)=alpa-beta*y(1)*y(3)-mu*y(1)-u1*y(1);
x(2)=beta*y(1)*y(3)-sigma*y(2)-teta*y(2)-mu*y(2)-u2*y(2);
x(3)=teta*y(2)-gamma*y(3)-mu*y(3)-u3*y(3);
x(4)=sigma*y(2)+gamma*y(3)-mu*y(4)+u2*y(2)+u3*y(3);

dt=[x(1) x(2) x(3) x(4)];

function dL = costate(y, beta, mu, u1, u2, u3, sigma, teta, gamma, S, I)
L1=y(1);    L2=y(2);
L3=y(3);    L4=y(4);

x(1)=- (1+L1*(-beta*I-mu-u1)+L2*beta*I);
x(2)=- (1+L2*(-sigma-teta-mu-u2)+L3*teta+L4*(sigma+u2));
x(3)=- (1-L1*beta*S+L2*beta*S+L3*(-gamma-mu-u3)+L4*(gamma+u3));
x(4)=1+L4*mu;

```

```

dL=[x(1) x(2) x(3) x(4)];
clear all;clc;

alpha=0.029;
beta=0.043;
mu=0.02;
teta=0.03;
sigma=0.14;
gamma=0.75;

u1max=1;
u2max=1;
u3max=1;
B1=0.9;
B2=0.9;
B3=0.9;
S0=6; E0=3; I0=2; T0=1;

h=1;
t=0:h:50;
N=length(t);
u1=zeros(N,1); u1o=zeros(N,1);
u2=zeros(N,1); u2o=zeros(N,1);
u3=zeros(N,1); u3o=zeros(N,1);
S=zeros(N,1); So=zeros(N,1);
E=zeros(N,1); Eo=zeros(N,1);
I=zeros(N,1); Io=zeros(N,1);
T=zeros(N,1); To=zeros(N,1);

L1=zeros(N,1); L1o=zeros(N,1);
L2=zeros(N,1); L2o=zeros(N,1);
L3=zeros(N,1); L3o=zeros(N,1);
L4=zeros(N,1); L4o=zeros(N,1);

tes=1;
it=0;
while tes>1e-3
u1o=u1;
u2o=u2;
u3o=u3;
So=S; Eo=E; Io=I; To=T;
L1o=L1; L2o=L2; L3o=L3; L4o=L4;
S(1)=S0; E(1)=E0; I(1)=I0; T(1)=T0;
J(it+1)=0;

```

```

for i=1:N-1

y=[S(i) E(i) I(i) T(i)];
k11=h*state(y, alpa, beta, mu, u1o(i), u2o(i), u3o(i), sigma, teta, gamma)
;
k12=h*state(y+0.5*k11, alpa, beta, mu, u1o(i), u2o(i), u3o(i), sigma, tet
a, gamma);
k13=h*state(y+0.5*k12, alpa, beta, mu, u1o(i), u2o(i), u3o(i), sigma, tet
a, gamma);
k14=h*state(y+k13, alpa, beta, mu, u1o(i), u2o(i), u3o(i), sigma, teta, ga
mma);

y=y+(1/6)*(k11+2*k12+2*k13+k14);

S(i+1)=y(1); E(i+1)=y(2); I(i+1)=y(3); T(i+1)=y(4);

endfor

L1(N)=0; L2(N)=0; L3(N)=0; L4(N)=0; u(N)=0;

for i=1:N-1
    j=N-i;

y=[L1(j+1) L2(j+1) L3(j+1) L4(j+1)];

k21=h*costate(y, beta, mu, u1o(j+1), u2o(j+1), u3o(j+1), sigma, teta, gam
ma, S(j+1), I(j+1));
k22=h*costate(y-0.5*k21, beta, mu, u1o(j+1), u2o(j+1), u3o(j+1),
sigma, teta, gamma, S(j+1), I(j+1));
k23=h*costate(y-0.5*k22, beta, mu, u1o(j+1), u2o(j+1), u3o(j+1),
sigma, teta, gamma, S(j+1), I(j+1));
k24=h*costate(y-k23, beta, mu, u1o(j+1), u2o(j+1), u3o(j+1),
sigma, teta, gamma, S(j+1), I(j+1));

y=y-(1/6)*(k21+2*k22+2*k23+k24);
L1(j)=y(1);
L2(j)=y(2);
L3(j)=y(3);
L4(j)=y(4);

temp2=max([(L1(j)*S(j))/B1 0]);
u1(j)=min([u1max temp2]);

temp4=max([((-L4(j)+L2(j))*E(j))/B2 0]);
u2(j)=min([u2max temp4]);

```

```

temp6=max([((-L4(j)+L3(j))*I(j))/B3 0]);
u3(j)=min([u3max temp6]);
endfor

eS=sum(abs(S-So));
eE=sum(abs(E-Eo));
eI=sum(abs(I-Io));
eT=sum(abs(T-To));

eL1=sum(abs(L1-L1o));
eL2=sum(abs(L2-L2o));
eL3=sum(abs(L3-L3o));
eL4=sum(abs(L4-L4o));

eu1=sum(abs(u1-u1o));
eu2=sum(abs(u2-u2o));
eu3=sum(abs(u3-u3o));

tes=eS+eE+eI+eT+eL1+eL2+eL3+eL4+eu1+eu2+eu3;
it=it+1;
u1=(0.5*u1+0.5*u1o);
u2=(0.5*u2+0.5*u2o);
u3=(0.5*u3+0.5*u3o);
end

figure(1)
subplot(2,2,1); grid on; hold on;
plot(t,S,'b','linewidth',2);
legend('Tanpa kontrol','Dengan kontrol');
xlabel('Waktu'); ylabel('Populasi Rentan Skabies');
title('(a)');

subplot(2,2,2); grid on; hold on;
plot(t,E,'b','linewidth',2);
legend('Tanpa kontrol','Dengan kontrol');
xlabel('Waktu'); ylabel('Populasi Inkubasi Skabies');
title('(b)');

subplot(2,2,3); grid on; hold on;
plot(t,I,'b','linewidth',2);
legend('Tanpa kontrol','Dengan kontrol');
xlabel('Waktu'); ylabel('Populasi Terinfeksi Skabies');
title('(c)');

subplot(2,2,4); grid on; hold on;
plot(t,T,'b','linewidth',2);
legend('Tanpa kontrol','Dengan kontrol');

```

```
xlabel('Waktu'); ylabel('Populasi Menjalani Pengobatan');  
title('(d)');  
  
figure(2)  
plot(t,u1,'b-','linewidth',3);  
xlabel('Waktu');  
grid on;hold on;  
  
figure(2)  
plot(t,u2,'r-','linewidth',3);  
xlabel('Waktu');  
grid on;hold on;  
  
figure(2)  
plot(t,u3,'g-','linewidth',3);  
legend('u1*(t)', ' u2*(t)', 'u3*(t)');  
xlabel('Waktu');  
grid on;hold off;
```

RIWAYAT HIDUP



Mukhammad Khadik Ngainuridwan dilahirkan di Trenggalek pada hari Jumat, tanggal 16 Februari 2001, biasa dipanggil Khadik. Anak kedua dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Saerodji dan Ibu Siti Khodijah. Bersama orang tua tinggal di Desa Malasan, Kecamatan Durenan, Kabupaten Trenggalek.

Pendidikan yang pernah ditempuh yaitu pendidikan di TK Dharma Wanita III (2005-2007), sekolah dasar ditempuh di SDN 4 Malasan (2007-2013). Setelah itu melanjutkan ke jenjang berikutnya di SMP Negeri 1 Durenan (2013-2016). Kemudian dilanjutkan ke jenjang berikutnya di SMA Negeri 1 Durenan (2016-2019). Pada tahun 2019, menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil bidang keilmuan Matematika.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Mukhammad Khadik Ngainuridwan
NIM : 19610039
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Kontrol Optimal Model SEIT (*Susceptible, Exposed, Infective, Treatment*) pada Penularan Penyakit Skabies
Pembimbing I : Juhari, M.Si.
Pembimbing II : Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	1 Desember 2022	Konsultasi Rencana Skripsi	1. JH
2.	13 Desember 2023	Konsultasi Bab I sampai Bab III	2. JH
3.	6 Februari 2023	Konsultasi Hasil dan Pembahasan	3. JH
4.	28 Februari 2023	Konsultasi Revisi Hasil dan Pembahasan	4. JH
5.	03 Maret 2023	Konsultasi Revisi Bab I sampai Bab III	5. JH
6.	20 Maret 2023	Konsultasi Lanjutan Revisi Bab I sampai Bab III dan ACC	6. JH
7.	29 Maret 2023	Konsultasi Kajian Agama dan ACC	7. FR
8.	22 Juni 2023	Konsultasi Bab IV	8. JH
9.	9 Oktober 2023	Konsultasi Revisi Bab IV	9. JH
10.	23 Oktober 2023	Konsultasi Revisi Bab IV dan Bab V	10. JH
11.	4 November 2023	Konsultasi Revisi Bab IV dan Bab V dan ACC	11. JH
12.	9 November 2023	Konsultasi Integrasi Agama dan ACC	12. FR
13.	29 November 2023	Konsultasi Bab II dan Bab IV	13. JH
14.	30 November 2023	Konsultasi Bab II dan Revisi Bab IV	14. JH



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

15.	4 Desember 2023	ACC Revisi Seminar Hasil	15. <i>JH</i>
16.	20 Desember 2023	ACC Sidang Skripsi	14. <i>JH</i>
17.	27 Desember 2023	ACC Keseluruhan (Pembimbing I)	17. <i>JH</i>
18.	27 Desember 2023	ACC Keseluruhan (Pembimbing II)	18. <i>JH</i>

Malang, 27 Desember 2023

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Ely Susanti, M.Sc.

NIP. 19741129 200012 2 005