

**ANALISIS DINAMIK MODEL *SUSCEPTIBLE, EXPOSED, INFECTED, TREATMENT, RECOVERED* (SEITR) PADA TUBERKULOSIS
DENGAN PENGARUH VAKSIN DAN PENGOBATAN**

SKRIPSI

**OLEH
SABDAH NUR ULFA
NIM. 19610031**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023**

**ANALISIS DINAMIK MODEL *SUSCEPTIBLE, EXPOSED, INFECTED, TREATMENT, RECOVERED* (SEITR) PADA TUBERKULOSIS
DENGAN PENGARUH VAKSIN DAN PENGOBATAN**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Sabdah Nur Ulfa
NIM. 19610031**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023**

ANALISIS DINAMIK MODEL *SUSCEPTIBLE, EXPOSED, INFECTED, TREATMENT, RECOVERED* (SEITR) PADA TUBERKULOSIS DENGAN PENGARUH VAKSIN DAN PENGOBATAN

SKRIPSI

Oleh
Sabdah Nur Ulfa
NIM. 19610031

Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 21 Desember 2023

Dosen Pembimbing I



Juhari, M.Si
NIP. 19840209 202321 1 010

Dosen Pembimbing II



Ach. Nashichuddin, M.A.
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Ely Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

**ANALISIS DINAMIK MODEL *SUSCEPTIBLE, EXPOSED, INFECTED, TREATMENT, RECOVERED* (SEITR) PADA TUBERKULOSIS
DENGAN PENGARUH VAKSIN DAN PENGOBATAN**

SKRIPSI

Oleh
Sabdah Nur Ulfa
NIM. 19610031

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal, 26 Desember 2023

Ketua Penguji : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.
Anggota Penguji 1 : Dr. Usman Pagalay, M.Si.
Anggota Penguji 2 : Juhari, M.Si.
Anggota Penguji 3 : Ach. Nashichuddin, M.A.



Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Sabdah Nur Ulfa
NIM : 19610031
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model *Susceptible, Exposed, Infected, Treatment*, dan *Recovered* (SEITR) pada Tuberkulosis dengan Pengaruh Vaksin dan Pengobatan

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 26 Desember 2023
Yang membuat pernyataan,



Sabdah Nur Ulfa
NIM. 19610031

MOTO

“ Lakukan dan selesaikan apa yang menjadi tanggung jawabmu ”

“Jangan pernah menyesali keputusan yang telah engkau ambil, karena pasti engkau telah berulang kali memikirkannya hingga engkau memutuskannya”

“Life is only a path, full of efforts”

“If you never give up and just keep moving forward, one day at a certain moment, you’ll feel that you’ve become happier and stronger”

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Kedua orang tua tercinta, Bapak Japar dan Ibu Maisaro, yang senantiasa memberikan doa, dukungan, motivasi dan nasihat serta kasih sayang hingga saat ini.

Kedua adik tersayang Miftahul Hidayati dan Alfa Alaudin Akmal, yang senantiasa memberikan semangat dan dukungannya.

Para *Peterpan* ku a.k.a EXO (Baekhyun, Chanyeol, Sehun, Kai, Suho, Chen, Xiumin, D.O, Lay) yang senantiasa menjadi sumber kebahagiaan.

Diri sendiri yang telah berjuang untuk menyelesaikan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT. sehingga dengan segala rahmat, karunia serta hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Analisis Dinamik Model *Susceptible, Exposed, Infected, Treatment* dan *Recovered* (SEITR) pada Tuberkulosis dengan Pengaruh Vaksin dan Pengobatan”. Laporan penelitian ini disusun sebagai salah satu persyaratan mendapat gelar Program Strata-1 (S-1) dalam bidang Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Penulis sadar bahwa penulisan skripsi ini tidak dapat selesai oleh penulis sendiri. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mendukung terselesaikannya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis tujukan kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Juhari, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan arahan, nasihat, dan motivasi bagi penulis.
5. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan arahan, nasihat, dan motivasi bagi penulis.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
7. Kedua orang tua dan seluruh keluarga yang senantiasa mendoakan dan memberikan dukungan, semangat, motivasi serta restunya kepada penulis.
8. Seluruh member EXO (Byun Baekhyun, Park Chanyeol, Oh Sehun, Kim Jongin, Kim Junmyeon, Kim Jongdae, Kim Minseok, Doh Kyungsoo, Zhang Yixing) yang senantiasa menjadi sumber kebahagiaan bagi penulis melalui karya-karyanya.

9. Sahabat seperjuangan Salma Farihah Muazarah yang senantiasa memberikan semangat, doa, dan arahan kepada penulis.

10. Seluruh teman-teman mahasiswa matematika angkatan 2019

Penulis menyadari bahwa proposal penelitian ini masih jauh dari kesempurnaan, oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan untuk mengatasi segala kekurangan dalam penyusunan proposal penelitian ini. Selanjutnya, penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat tidak hanya bagi penulis tetapi juga berbagai pihak untuk memberikan kontribusi bagi ilmu pengetahuan yang terus berkembang.

Malang, 26 Desember 2023

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGANTAR	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
مستخلص البحث.....	xviii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	6
1.3 Tujuan Penelitian	6
1.4 Manfaat Penelitian	6
1.5 Batasan Masalah	7
1.6 Definisi Istilah.....	8
BAB II KAJIAN TEORI	12
2.1 Sistem Persamaan Diferensial.....	12
2.2 Model SEITR dan Model SEIQR-V	13
2.3 Analisis Dinamik Model	16
2.3.1 Linearisasi	16
2.3.2 Titik Keseimbangan	18
2.3.3 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)	19
2.3.4 Matriks Jacobian.....	20
2.3.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen.....	20
2.3.6 Kriteria Routh-Hurwitz	21
2.4 Tuberkulosis.....	23
2.5 Vaksin Tuberkulosis (BCG)	24
2.6 Pengobatan TBC	25
2.7 Bersikap terhadap Wabah dalam Pandangan Islam	26
BAB III METODE PENELITIAN	29
3.1 Jenis Penelitian.....	29
3.2 Pra Penelitian	29
3.3 Tahapan Penelitian.....	30
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	32
4.1 Analisis Dinamik Model SEITR pada Penyebaran TBC dengan Pengaruh Vaksin dan Pengobatan.....	32

4.2	Simulasi Model SEITR dan Perbandingan Grafik Dinamik dengan Pengaruh Vaksin dan Pengobatan.....	51
4.3	Pengendalian Penyakit Tuberkulosis (TBC) dalam Kaidah Islam	54
BAB V PENUTUP		57
5.1	Kesimpulan.....	57
5.2	Saran.....	58
DAFTAR PUSTAKA		59
LAMPIRAN.....		62
RIWAYAT HIDUP		65

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Routh Array	21
Tabel 2.2	Contoh Routh-Hurwitz	22
Tabel 4.2	Nilai Parameter Model SEITR	33
Tabel 4.3	Routh-Hurwitz $E0$	45
Tabel 4.4	Routh-Hurwitz $E1$	49

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1	Diagram Kompartemen Model SEITR dengan Pengaruh Vaksin dan Pengobatan.....	32
Gambar 4.2	Simulasi Perubahan Populasi S pada Model SEITR tanpa Pengaruh Vaksin dan Menggunakan Nilai Parameter $b = 0.2, \beta = 0.35, \mu = 0.0167$	52
Gambar 4.3	Simulasi Perubahan Populasi S pada Model SEITR dengan Pengaruh Vaksin dan Menggunakan $b = 0.2, \beta = 0.35, \mu = 0.0167, \sigma = 0.3, \rho = 0.6$	52
Gambar 4.4	Simulasi Perubahan Populasi E pada Model SEITR dengan Pengaruh Pengobatan dan Menggunakan Nilai Parameter $\beta = 0.35, \mu = 0.0167, \varepsilon = 0.3, \psi = 0.7$	53
Gambar 4.5	Simulasi Perubahan Populasi E pada Model SEITR dengan Pengaruh Pengobatan dan Menggunakan Nilai Parameter $\beta = 0.35, \mu = 0.0167, \varepsilon = 0.3, \psi = 0$	54

DAFTAR SIMBOL

N	: Total populasi individu di Kota Malang
V	: Banyaknya individu tervaksinasi
S	: Banyaknya individu yang rentan tertular TBC
E	: Banyaknya individu yang terpapar (laten) TBC
I	: Banyaknya individu yang terinfeksi TBC
T	: Banyaknya individu terinfeksi TBC yang menjalani pengobatan
R	: Banyaknya individu yang telah sembuh dari TBC
b	: Laju kelahiran
σ	: Tingkat pemberian vaksin
β	: Peluang individu terinfeksi TBC
ε	: Laju individu laten TBC menjadi individu aktif TBC
ψ	: Laju individu laten TBC menjalani pengobatan
ω	: Laju individu aktif TBC menjalani pengobatan
δ	: Peluang individu sembuh dengan pengobatan
μ	: Laju kematian alami
μ_T	: Laju kematian akibat TBC
γ	: Laju kesembuhan alami
ρ	: Laju individu tervaksinasi menjadi individu rentan
q	: Proporsi individu kelas <i>Treatment</i> sembuh

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	<i>Script</i> Analisis Dinamik Model SEITR dengan Pengaruh Vaksin dan Pengobatan.....	62
Lampiran 2	<i>Script MAPLE</i> Simulasi Model SEITR dengan Pengaruh Vaksin dan Pengobatan.....	64

ABSTRAK

Ulfa, Sabdah Nur. 2023. **Analisis Dinamik Model *Susceptible, Exposed, Infected, Treatment, Recovered* Pada Tuberkulosis dengan Pengaruh Vaksin dan Pengobatan**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Juhari, M.Si.. (II) Achmad Nasichuddin, M.A.

Kata Kunci: Analisis Dinamik; Model SEITR Tuberkulosis; Routh-Hurwitz

Penelitian ini membahas tentang analisis dinamik model *Susceptible, Exposed, Infected, Treatment, Recovered* (SEITR) yang diberikan pengaruh vaksin dan pengobatan pada penularan Tuberkulosis. Vaksin diberikan setiap individu yang rentan tertular TBC. Pengobatan tidak hanya diberikan pada populasi *infected* namun pada populasi *exposed* juga diberikan pengobatan karena sebagai upaya pengendalian kasus aktif TBC. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui mekanisme penularan TBC menggunakan model SEITR dan mengetahui perilaku model. Tahapan penelitian diawali dengan menentukan titik kesetimbangan dan menganalisis kestabilannya lalu menentukan bilangan R_0 . Kemudian dilakukan simulasi guna mengetahui ilustrasi penyebaran TBC menggunakan model SEITR. Hasil dari penelitian yaitu diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik endemik (dengan penyakit). Berdasarkan nilai eigen dan kriteria Routh-Hurwitz, kedua titik kesetimbangan bersifat stabil yang berarti bahwa populasi dapat menerima dan mempertahankan TBC namun dengan seiring berjalannya waktu TBC akan hilang dari populasi. Analisis dinamik pada model juga menghasilkan bilangan reproduksi dasar yang bernilai $R_0 < 1$ yang menunjukkan bahwa TBC akan menghilang dalam populasi pada waktu tertentu. Selanjutnya dilakukan simulasi pada model untuk menunjukkan pengaruh pemberian vaksin dan pengobatan pada model. Hasil simulasi menunjukkan dengan menggunakan nilai $b = 0.2, \beta = 0.35, \mu = 0.0167, \sigma = 0.3, \rho = 0.6$ maka populasi *susceptible* mengalami peningkatan dari 2 hingga mencapai 11 pada periode 20 tahun. Sedangkan untuk pengobatan pada populasi *exposed* juga berpengaruh pada laju penurunan individu *exposed*. Dengan menggunakan parameter $\beta = 0.35, \mu = 0.0167, \varepsilon = 0.3, \psi = 0.7$ mampu menurunkan populasi *exposed* dari 3 menjadi 0 pada periode 10. Penelitian ini dapat digunakan sebagai upaya untuk menentukan program pengendalian penularan TBC.

ABSTRACT

Ulfa, Sabdah Nur. 2023. **Dynamic Analysis of Susceptible, Exposed, Infected, Treatment, Recovered Models in Tuberculosis with Vaccine and Treatment Effects**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisors: (I) Juhari, M.Si. (II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Dynamic Analysis; SEITR Tuberculosis Model ; Routh-Hurwitz

This research discusses the dynamic analysis of the Susceptible, Exposed, Infected, Treatment, Recovered (SEITR) model given the effects of vaccines and treatment on tuberculosis transmission. The vaccine is given to every individual who is susceptible to contracting TB. The treatment is not only given to infected populations, but the treatment is also given to exposed populations as an effort to control the active TB cases. The aim of this research is to determine the mechanism of TB transmission using the SEITR model and determine the behavior of the model. The research stages begin by determining the equilibrium point and analyzing its stability then determining the number R_0 . Then a simulation was carried out to find out an illustration of the spread of TB using the SEITR model. The results of the research were that two equilibrium points were obtained, namely the disease-free equilibrium point and the endemic point (with disease). Based on the eigenvalues and Routh-Hurwitz criteria, both equilibrium points are stable, which means that the population can receive and maintain TB, but over time TB will disappear from the population. The dynamic analysis of the model also produces a basic reproduction number with a value $R_0 < 1$, which shows that TB will disappear in the population at a certain time. The simulation results showed that by using values, the $b = 0.2, \beta = 0.35, \mu = 0.0167, \sigma = 0.3, \rho = 0.6$, susceptible population increased from 2 to 11 in 20 year period. As for treatment in exposed populations also affects the rate of decline of *exposed* individuals. Using parameters $\beta = 0.35, \mu = 0.0167, \varepsilon = 0.3, \psi = 0.7$ was able to reduce the *exposed* population from 3 to 0 in 10 period. This study can be used as an effort to determine TB transmission control programs.

مستخلص البحث

أولفا، صبدة نور. 2023. التحليل الديناميكي للنماذج المعرضة والمكشوفة والمصابة والمعالجة والمعافي (SEITR) في مرض السل مع تأثير اللقاحات والعلاجات. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا بجامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف الأول: جوهرى، الماجستير. المشرف الثاني: أحمد ناصح الدين، الماجستير.

الكلمات المفتاحية: تحليل ديناميكي نموذج SEITR لمرض السل ؛ روث هورويتز

ناقش هذا البحث التحليل الديناميكي للنماذج المعرضة والمكشوفة والمصابة والمعالجة والمعافي (SEITR) بالنظر إلى تأثير اللقاحات والعلاجات على انتقال السل. يتم إعطاء اللقاحات لكل فرد معرض للإصابة بالسل. لا يتم إعطاء العلاج للسكان المصابين فحسب، بل يتم أيضا إعطاء العلاج للسكان المعرضين لأنه جهد للسيطرة على حالات السل النشطة. كان الهدف من هذا البحث هو معرفة آلية انتقال السل باستخدام نموذج SEITR ومعرفة سلوك النموذج. تبدأ مرحلة البحث بتحديد نقطة التوازن وتحليل ثباتها ثم تحديد العدد R_0 . ثم أجريت محاكاة لتحديد الرسم التوضيحي لانتشار السل باستخدام نموذج SEITR. حصلت نتائج البحث على نقطتي التوازن، وهما نقاط التوازن الخالية من الأمراض والنقاط المتوطنة (مع المرض). استنادا إلى القيم الذاتية ومعياري روث-هورويتز، فإن نقطتي التوازن مستقرتان مما يعني أن السكان يمكن أن يتلقوا السل ويحافظوا عليه ولكن بمرور الوقت سيختفي السل من السكان. كما أسفر التحليل الديناميكي للنموذج عن رقم تكاثر أساسي بقيمة $R_0 < 1$ ، مما يشير إلى أن السل سيختفي بين السكان في أي وقت. علاوة على ذلك، أجريت عمليات محاكاة على النموذج لإظهار تأثير اللقاح والعلاج على النموذج. أظهرت نتائج المحاكاة أنه باستخدام القيم $b = 0.2, \beta = 0.35, \mu$ ، زاد عدد السكان $\sigma = 0.30.0167, \rho = 0.6$ المعرضين للإصابة من 2 إلى 11 في فترة 20 عاما. أما بالنسبة للعلاج في السكان المعرضين يؤثر أيضا على معدل انخفاض الأفراد المعرضين. كان استخدام المعلمات $\beta = 0.35, \mu$ ، $\psi = 0.70.0167, \varepsilon = 0.3$ قادرا على تقليل عدد السكان المعرضين من 3 إلى 0 في الفترة 10. يمكن استخدام هذه الدراسة كمحاولة لتحديد برامج مكافحة انتقال السل.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Tuberkulosis atau yang lebih dikenal dengan sebutan TB/TBC adalah salah satu jenis penyakit menular. *Mycobacterium tuberculosis* merupakan bakteri penyebab seseorang dapat menderita penyakit TBC. Bakteri tersebut dapat menginfeksi berbagai populasi manusia. Pada penyebaran TBC populasi manusia dapat *tercluster* menjadi SEITR. Dimana populasi SEITR terdiri dari *Susceptible*, *Exposed*, *Infected*, *Treatment*, dan *Recovered*. *Susceptible* adalah populasi individu yang rentan terinfeksi bakteri, *Exposed* adalah populasi individu yang terpapar bakteri (laten), *Infected* adalah populasi individu yang terinfeksi bakteri, *Treatment* adalah populasi individu terinfeksi bakteri menjalani pengobatan, *Recovered* adalah populasi individu yang telah sembuh dari TBC. Penularan bakteri TBC pada populasi *S* dipengaruhi oleh parameter β sedangkan proses aktivasi bakteri TBC pada populasi *E* dipengaruhi oleh parameter ε . Arti dari parameter β adalah peluang individu terinfeksi TBC. Seseorang dapat terinfeksi TBC jika melakukan interaksi fisik secara dekat dengan individu terinfeksi TBC. Percikan dahak (*droplet*) dikeluarkan oleh individu terinfeksi TBC ketika berbicara, bersin maupun batuk sehingga dapat terhirup oleh individu sehat dan dapat menyebabkan infeksi TBC ke individu lain (Pramono, 2021). Sedangkan arti dari parameter ε adalah laju individu laten TBC menjadi individu aktif TBC. Individu laten dapat menjadi individu aktif TBC karena bakteri TBC yang terdapat di dalam tubuh menjadi bakteri aktif. Hal ini dapat terjadi ketika daya

tahan tubuh seseorang rendah (Werdhani, 2002). Meskipun penularannya yang cukup mudah namun penyakit TBC merupakan penyakit yang dapat disembuhkan dengan cara melakukan pengobatan. Peluang penderita TBC sembuh dipengaruhi oleh q yaitu proporsi individu pada kelas T yang sembuh. Hal ini berarti untuk sembuh dari TBC maka penderita TBC harus melakukan pengobatan secara berkesinambungan dengan kata lain tidak akan putus obat.

Dalam Al-Qur'an surat al-Anbiya ayat 83, Allah SWT berfirman:

Ingatlah Ayyub ketika berdoa kepada Tuhannya, "(Ya Tuhanku) sesungguhnya aku telah ditimpa penyakit, padahal Engkau Tuhan Yang Maha Penyayang dari semua yang penyayang". (Al Qur'an dan Terjemahannya, 2019)

Ayat tersebut turun karena Allah mengingatkan Nabi Muhammad dan kaum muslimin tentang kisah Nabi Ayyub a.s. yang menghadapi musibah dalam harta, anak dan tubuhnya. Menurut tafsir Ibnu Katsir Nabi Ayyub adalah nabi yang memiliki kendaraan, binatang ternak dan tanaman yang banyak, anak dan tempat tinggal yang menyenangkan. Kemudian beliau ditimpa musibah yaitu dengan hilangnya semua yang telah dimiliki. Selain itu musibah juga diberikan pada tubuhnya, sehingga tidak ada seorang pun yang mendekatinya kecuali istrinya. Menurut suatu pendapat, penyakit yang menyerang seluruh tubuh Nabi Ayyub adalah penyakit lepra (Resky, 2020). Sebagai seorang muslim banyak hal yang dapat dipelajari dari kisah Nabi Ayyub ketika dihadapkan cobaan berupa penyakit, diantaranya adalah sabar. Dengan menanamkan dalam hati dan pikiran bahwa penyakit yang diberikan Allah bukan hanya cobaan dan derita melainkan sebuah ajakan untuk mendapatkan rahmat dan ridho-Nya melalui kesabaran. Rasulullah juga menganjurkan untuk senantiasa bersabar dalam menghadapi setiap cobaan atau ujian dari Allah SWT. selain bersabar sikap yang dapat dilakukan yaitu

optimis dan *berhusnudzon*. Sikap yakin seseorang terhadap sakit dan kesembuhan akan membawa dorongan serta doa untuk melawan penyakit. Berprasangka baik juga dapat menumbuhkan harapan sehingga meningkatkan kesehatan psikis, fisik dan menambah daya imun (Hamidi & Nuryansah, 2021).

Pada model SEITR individu sehat yang berinteraksi langsung dengan penderita TBC kemungkinan dapat tertular bakteri, namun tidak dapat dikatakan sebagai individu terinfeksi TBC melainkan individu terpapar TBC sehingga masuk ke dalam populasi *Exposed*. Hal ini karena bakteri TBC yang ditularkan membutuhkan waktu dan suatu keadaan tertentu untuk menjadi aktif. Menurut buku “Pedoman Diagnosis dan Penatalaksanaan Tuberkulosis di Indonesia” 95% individu yang tertular bakteri TBC akan masuk pada masa laten, sedangkan sisanya akan menjadi bakteri aktif (Perhimpunan Dokter Paru Indonesia, 2021). Individu dengan bakteri TBC yang aktif akan masuk pada populasi *Infected*, dan untuk sembuh dari TBC, individu tersebut harus melakukan pengobatan sehingga terdapat populasi *Treatment*. Pengobatan yang dilakukan harus secara intensif maksudnya harus dilakukan secara berkesinambungan. Setelah menjalani pengobatan yang sesuai maka individu terinfeksi dapat dikatakan sembuh dari TBC dan tidak akan menjadi individu yang rentan tertular kembali karena telah mendapatkan kekebalan sehingga berada pada populasi *Recovered*. Penyebaran TBC dapat dikendalikan dengan memperkecil peluang penyebaran dan tingginya keberhasilan pengobatan. Oleh karena itu peneliti ingin menambahkan kedua faktor tersebut ke dalam model SEITR.

Penelitian tentang model matematika penyakit TBC telah dilakukan oleh beberapa peneliti antara lain penelitian yang dilakukan oleh (Mishra & Srivastava,

2014), penelitian ini membahas tentang penyebaran TBC menggunakan model epidemik SEIQR yang disertai dengan vaksinasi. Vaksin pada model dinotasikan dengan parameter σ . Vaksin menjadi salah satu pengobatan untuk TBC. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dengan pemberian vaksin pada individu rentan, maka dengan seiring berjalannya waktu individu rentan semakin berkurang. Oleh karena itu peneliti mengambil vaksinasi sebagai upaya pengembangan model yang akan dilakukan.

Penelitian tentang model penyebaran TBC juga dilakukan oleh (Side et al., 2016). Penelitian ini membagi populasi menjadi 4 bagian yaitu *Susceptible*, *Infected*, *Treatment* dan *Recovered* (SITR). Pada penelitian ini individu terinfeksi diasumsikan harus melakukan pengobatan untuk menjadi individu yang sembuh dari TBC. Hal ini sesuai dengan buku pedoman diagnosis dan penatalaksanaan TBC. Oleh karena itu peneliti mengambil asumsi ini. Namun terdapat sedikit perbedaan asumsi yaitu pada penelitian ini individu harus melakukan pengobatan untuk sembuh, namun pada penelitian yang akan dilakukan terdapat syarat untuk pengobatannya yaitu harus dilakukan secara berkesinambungan selain itu terdapat laju kesembuhan alami agar individu terinfeksi sembuh dari TBC.

Penelitian lain tentang penyebaran TBC adalah penelitian (Ramadhan et al., 2018). Pada penelitian ini model yang digunakan adalah model SEITR. Model ini berfokus pada pengobatan dan penyembuhan penderita TBC. Hal ini dibuktikan dengan adanya parameter ψ , ω , γ , dan q . Parameter ψ berarti laju individu laten TBC menjalani pengobatan. Hal ini berarti individu yang terpapar bakteri TBC langsung diberikan pengobatan yang sesuai tanpa menunggu bakteri tersebut menjadi aktif. Hal tersebut cukup baik dilakukan karena dapat mengurangi

individu *Infected*. Selain itu terdapat parameter ω dan γ yang berarti laju individu terinfeksi TBC menjalani pengobatan dan laju kesembuhan alami. Dalam penelitian ini pengobatan yang dilakukan harus dilakukan secara intensif, hal ini dibuktikan dengan adanya parameter q . Hasil simulasi parameter β dan ω menunjukkan bahwa untuk mengurangi populasi *Infected*, hal yang harus dilakukan yaitu memperkecil nilai β dan memperbesar nilai ω . Oleh karena itu peneliti mengambil model penelitian yang dilakukan oleh (Ramadhan et al., 2018) untuk dilakukan modifikasi model.

Penelitian (Ramadhan et al., 2018) menunjukkan penyebaran TBC yang dimodelkan secara matematika menggunakan model SEITR yang berfokus pada pengobatan individu terinfeksi TBC. Hasil penelitian berupa simulasi parameter β dan ω menunjukkan bahwa semakin kecil peluang individu terinfeksi dan semakin besar individu TBC aktif yang menjalani pengobatan maka dapat memperkecil populasi individu TBC aktif. Dari penelitian (Mishra & Srivastava, 2014) dapat diketahui bahwa vaksinasi dapat memperkecil populasi rentan. Peran vaksin adalah mengurangi peluang individu tertular bakteri TBC. Oleh karena itu peneliti ingin menambahkan faktor vaksinasi pada model (Ramadhan et al., 2018) karena sebagai solusi dari simulasi yang telah dilakukan oleh (Ramadhan et al., 2018) yaitu memperkecil peluang individu tertular TBC. Setelah memodifikasi dan melakukan analisis dinamik pada model, selanjutnya dilakukan simulasi agar diketahui ilustrasi dari penularan TBC dengan menggunakan model *Susceptible*, *Exposed*, *Infected*, *Treatment* dan *Recovered*. Kemudian diberikan perbandingan grafik dinamik dan interpretasi antara model yang diberikan pengaruh vaksin juga pengobatan dan model yang tidak diberikan pengaruh vaksin juga pengobatan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah pada penelitian ini yaitu sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis dinamik model SEITR dengan pengaruh vaksin dan pengobatan pada penyebaran TBC?
2. Bagaimana simulasi model SEITR dan perbandingan grafik dinamik model dengan pengaruh vaksin dan pengobatan pada penyebaran TBC?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui analisis dinamik model SEITR dengan pengaruh vaksin pengobatan pada penyebaran TBC?
2. Untuk mengetahui simulasi model SEITR dan perbandingan grafik dinamik model dengan pengaruh vaksin dan pengobatan pada penyebaran TBC?

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan memiliki manfaat di antaranya adalah sebagai berikut:

1. Memberikan penjelasan tentang penyebaran penyakit di antara populasi dan mengetahui analisis perilaku dari suatu sistem/ model.
2. Memberikan penjelasan tentang ilustrasi penularan TBC menggunakan model SEITR dan mengetahui seberapa besar pengaruh vaksin dan pengobatan dalam penularan TBC.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini memiliki batasan masalah agar tidak menyimpang dari tujuan penulisan dan tidak memperluas pembahasan. Batasan masalah dalam penelitian ini adalah memodifikasi model penelitian (Ramadhan et al., 2018). Modifikasi model dilakukan dengan menambah parameter vaksin sesuai dengan penelitian (Mishra & Srivastava, 2014) sehingga model penelitian menjadi sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = b - \beta SI - \mu S - \sigma S + \rho V$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (\varepsilon + \psi + \mu)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon E + (1 - q)\delta T - (\omega + \gamma + \mu + \mu_T)I$$

$$\frac{dT}{dt} = \psi E + \omega I - (\delta + \mu)T$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + q\delta T - \mu R$$

$$\frac{dV}{dt} = \sigma S - \rho V - \mu V$$

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + T(t) + R(t) + V(t)$$

1.6 Definisi Istilah

1. Populasi Terpapar/Terduga TBC (E)

Populasi yang terdiri dari individu dengan gejala atau tanda TBC. Gejala umumnya yaitu batuk berdahak selama 2 minggu atau lebih (Perhimpunan Dokter Paru Indonesia, 2021). Individu terpapar TBC tidak dapat menularkan bakteri yang ada di dalam tubuhnya ke individu lain karena bakteri tersebut dalam masa inkubasi (laten).

2. Populasi Terinfeksi TBC (I)

Populasi yang terdiri dari individu yang ditemukan terdapat bakteri TBC pada tubuhnya baik secara klinis maupun bakteriologis (Perhimpunan Dokter Paru Indonesia, 2021). Individu terinfeksi TBC dapat menularkan bakteri ke individu lain karena bakteri tersebut bersifat aktif.

3. Laju kematian alami (μ)

Laju kematian atau yang biasa disebut dengan angka kematian kasar (CDR) adalah jumlah kematian dalam tahun tertentu per 1000 penduduk pada pertengahan tahun. Angka kematian kasar dihitung dengan menggunakan rumus:

$$CDR = \frac{D}{P} \times 1000$$

dengan D adalah jumlah kematian dalam 1 tahun, dan P jumlah penduduk pada pertengahan tahun (Badan Pusat Statistik (BPS)). Laju kematian juga dapat diperoleh dengan menggunakan angka harapan hidup masyarakat penduduk tersebut (Amri, 2020).

4. Laju kelahiran (b)

Laju kelahiran atau yang biasa disebut angka kelahiran kasar (CBR) adalah jumlah kelahiran dalam tahun tertentu per 1000 penduduk pada pertengahan tahun. Angka kelahiran kasar dapat dihitung dengan menggunakan rumus :

$$CBR = \frac{B}{P} \times 1000$$

dengan B adalah jumlah kelahiran dalam 1 tahun, dan P jumlah penduduk pada pertengahan tahun (Badan Pusat Statistik (BPS)).

5. Peluang individu terinfeksi TBC (β)

Dalam epidemiologi peluang merupakan perhitungan matematika yang dijadikan sebagai tolak ukur seberapa besar virus atau penyakit menular dapat menyebar. Parameter β menunjukkan seberapa besar bakteri TBC dapat menular ke individu lain.

6. Laju individu laten TBC menjadi individu aktif TBC (ϵ)

Parameter ϵ menyatakan perpindahan individu terpapar TBC menjadi individu terinfeksi TBC. Perpindahan individu laten TBC menjadi individu TBC aktif dipengaruhi oleh kekebalan tubuh. Apabila daya tahan tubuh individu rendah maka bakteri TBC yang ada dalam tubuh akan menjadi aktif sehingga menyebabkan individu tersebut menjadi TBC aktif atau dengan kata lain terinfeksi TBC.

7. Laju individu laten TBC menjalani pengobatan (ψ)

Parameter ψ menunjukkan besarnya individu yang terpapar TBC melakukan pengobatan. Pengobatan pada individu terpapar TBC dilakukan untuk mengurangi individu terinfeksi TBC.

8. Laju kesembuhan alami (γ)

Parameter γ berfungsi sebagai pelengkap pengobatan medis utama untuk mengatasi gejala TBC. Parameter γ dapat berupa obat herbal seperti kunyit, jahe dan teh hijau. Selain itu dapat berupa makan sehat yang berisi nutrisi yang dibutuhkan tubuh sehingga dapat mempercepat kesembuhan (Na'imah, 2023).

11. Laju individu TBC aktif menjalani pengobatan (ω)

Parameter ω menyatakan besarnya individu yang terinfeksi TBC atau bakteri dalam keadaan aktif melakukan pengobatan.

12. Peluang individu sembuh (δ)

Parameter δ menyatakan besarnya individu terinfeksi TBC yang melakukan pengobatan dapat sembuh dari penyakit TBC.

13. Proporsi individu kelas *treatment* sembuh (q)

Parameter q menyatakan tolak ukur individu TBC melakukan pengobatan agar sembuh. Setiap individu TBC dapat sembuh jika melakukan pengobatan yang lengkap yang artinya dilakukan hingga selesai dan tidak adanya putus obat dalam proses pengobatan.

14. Laju pemberian vaksin (σ)

Parameter σ menyatakan seberapa cepat atau seberapa banyak vaksin yang diberikan kepada populasi tertentu pada suatu periode waktu. Parameter σ dapat diukur dengan persentase populasi yang menerima vaksin.

15. Laju individu tervaksinasi menjadi individu rentan (ρ)

Parameter ρ menyatakan perpindahan individu yang telah diberi vaksin TBC menjadi individu terinfeksi TBC. Hal ini terjadi karena penurunan kekebalan vaksin yang diperoleh dalam periode waktu tertentu. Dengan

demikian dapat disimpulkan bahwa meskipun individu telah mendapat kekebalan dari TBC terdapat kemungkinan individu tersebut menjadi individu rentan.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu konsep dalam matematika yang cukup sering digunakan guna mendukung berbagai kebutuhan ilmu pengetahuan terapan lainnya melalui konsep dan metode perhitungannya. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih variabel terikat beserta turunannya terhadap satu atau lebih variabel bebas. Terdapat 2 jenis persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP) (Fitria, 2011). Perbedaan antara keduanya terletak pada jumlah variabel bebasnya. Persamaan diferensial biasa hanya bergantung pada satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial parsial bergantung lebih dari satu variabel bebas. Berikut contoh persamaan diferensial:

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad (2.1)$$

Sistem persamaan diferensial merupakan suatu sistem yang berisi n -persamaan diferensial, dengan n -fungsi yang tidak diketahui dan n adalah bilangan bulat yang lebih besar dari dua, dengan memiliki sifat saling terkait dan konsisten antar persamaan diferensial (Fitria, 2011). Berikut contoh sistem persamaan diferensial:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dengan $f_i: E \subset R^n \rightarrow R, i = 1, 2, \dots, n$, dan $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \subset R^n$. Lalu diberikan kondisi awal yaitu $y_i(t_0) = y_{i0}$, sehingga sistem (2.2) dapat ditulis sebagai $\dot{x} = f(x)$ (2.3)

solusi dari sistem (2.3) dinotasikan dengan $x(t)$.

2.2 Model SEITR dan Model SEIQR-V

Model SEITR adalah model yang menjelaskan tentang peralihan individu rentan tertular menjadi terduga tertular (terpapar), lalu dari terpapar menjadi positif terinfeksi, kemudian individu terinfeksi harus menjalani pengobatan sehingga dapat sembuh. Pada model ini populasi dibagi menjadi lima antara lain kelompok individu rentan tertular (*Susceptible*), kelompok individu terpapar/laten (*Exposed*), kelompok individu terinfeksi (*Infected*), kelompok individu terinfeksi menjalani pengobatan (*Treatment*), dan kelompok individu sembuh (*Recovered*). Pada populasi *Exposed* individu tidak dapat menularkan bakteri ke individu lain karena bakteri tersebut dalam masa inkubasi (laten). Berikut model SEITR pada penelitian (Ramadhan et al., 2018):

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= b - \beta SI - \mu S \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (\varepsilon + \mu + \psi)E \\ \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E + (1 - q)\delta T - (\omega + \gamma + \mu + \mu_T)I \\ \frac{dT}{dt} &= \psi E + \omega I - (\delta + \mu)T \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I + q\delta T - \mu R \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + T(t) + R(t)$$

Model (2.4) menjelaskan tentang rangkaian penularan TBC. Dimulai dari individu sehat yang rentan tertular, lalu terpapar, kemudian terinfeksi, dan menjalani pengobatan sehingga sembuh dari TBC. Pada model ini faktor yang mempengaruhi seseorang tertular bakteri TBC adalah dengan melakukan kontak langsung dengan orang yang terinfeksi TBC. Lalu seseorang dapat sembuh dari TBC karena adanya pengobatan dan kesembuhan alami. Model ini juga berfokus dalam pengobatan dan penyembuhan pasien. Hal ini dibuktikan dengan adanya parameter ψ, ω dan q . Setiap individu yang tertular bakteri TBC diberikan pengobatan sehingga masuk ke populasi *Treatment* dan berpeluang sembuh dari TBC. Pada model ini parameter q diasumsikan bernilai satu yang berarti pengobatan dilakukan secara terus-menerus atau berkesinambungan. Berikut penjelasan terkait faktor-faktor yang mempengaruhi perubahan jumlah individu dalam populasi antara lain:

1. *Susceptible (S)*

Populasi S berisi individu yang masih bebas dari bakteri TBC. Populasi ini akan bertambah ketika terdapat kelahiran dengan laju sebesar b dan berkurang ketika terdapat kematian alami dengan laju sebesar μ . Pengurangan populasi ini juga terjadi jika terdapat interaksi populasi S dan I dengan peluang sebesar β yang dapat berpotensi masuk ke populasi E . Populasi diasumsikan tertutup sehingga migrasi dan imigrasi dianggap tidak ada.

2. *Exposed (E)*

Populasi E bertambah ketika terdapat interaksi antara populasi S dan I . Pengurangan populasi ini tidak hanya dari kematian alami melainkan munculnya

gejala terinfeksi pada individu terpapar sehingga menyebabkan bakteri TBC menjadi aktif dengan laju sebesar ε dan pengobatan yang dilakukan oleh individu laten dengan laju sebesar ψ . Aktivasi bakteri TBC disebabkan adanya penurunan kekebalan tubuh. Pengobatan yang dilakukan individu laten adalah sebagai upaya pencegahan dari infeksi TBC.

3. *Infected (I)*

Populasi I akan bertambah jika individu terpapar memiliki gejala infeksi oleh bakteri TBC yang menandakan bahwa bakteri TBC mulai aktif. Sedangkan pengurangan populasi ini adalah adanya kesembuhan baik secara alami dengan laju sebesar γ maupun pengobatan dengan laju sebesar ω . Kematian juga mengurangi populasi ini, termasuk kematian akibat TBC dengan laju sebesar μ_T .

4. *Treatment (T)*

Populasi T berasal dari populasi I yang tidak dapat menularkan TBC. Pengobatan yang dilakukan tidak boleh berhenti hingga dinyatakan bebas TBC oleh petugas kesehatan. Pengobatan individu terpapar dan aktif TBC akan menambah populasi ini. Sedangkan pengurangan populasi ini yaitu karena adanya kematian alami dan pengobatan yang dinyatakan telah sembuh dengan peluang sebesar δ .

5. *Recovered (R)*

Populasi R dapat berasal dari kesembuhan alami dan kesembuhan melalui pengobatan. Populasi ini hanya berkurang karena kematian alami. Pada kasus ini diasumsikan seseorang yang telah sembuh tidak akan terinfeksi bakteri TBC kembali karena adanya kekebalan dalam tubuh.

Model SEIQR-V adalah model yang terdiri dari populasi *Susceptible*, *Exposed*, *Infected*, *Quarantine*, *Recovered* dan *Vaccinated*. Model tersebut

menjelaskan tentang peralihan individu rentan tertular menjadi terduga tertular (terpapar), lalu dari terpapar menjadi positif terinfeksi, kemudian individu terinfeksi harus menjalani pengobatan (karantina) dan menjadi individu sembuh. Tetapi dalam model ini individu rentan diberikan vaksin sebagai upaya salah satu pengobatan TBC. Pemberian vaksin dinyatakan dalam parameter σ . Individu yang tervaksinasi dapat menjadi individu rentan kembali karena adanya penurunan kekebalan vaksin sebesar ρ . Berikut model SEIQR-V pada penelitian (Mishra & Srivastava, 2014):

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta SI - (\sigma + d)S + \varepsilon R + \rho V \\
 \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (\gamma + d)E \\
 \frac{dI}{dt} &= \gamma E - (\alpha + \varphi + d + \delta)I \\
 \frac{dQ}{dt} &= \alpha I - (\eta + d + \delta)Q \\
 \frac{dR}{dt} &= \varphi I + \eta Q - (\varepsilon + d)R \\
 \frac{dV}{dt} &= \sigma S - (\rho + d)V
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.3 Analisis Dinamik Model

2.3.1 Linearisasi

Linearisasi adalah suatu metode yang untuk mengubah suatu sistem persamaan diferensial nonlinear menjadi persamaan diferensial linear. Linearisasi dilakukan untuk menentukan perilaku sistem dinamik nonlinear disekitar titik kesetimbangan sistem (Lestari & Widodo, 2012). Diberikan sistem:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad (2.6)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

dengan titik kesetimbangan (a, b) ; $f(a, b) = g(a, b) = 0$.

Pendekatan linear fungsi $f(x, y)$ disekitar (a, b) diperoleh dengan menderetkan fungsi $f(x, y)$ sebagai deret Taylor, yaitu

$$f(x, y) \cong f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + \Theta_f \quad (2.7)$$

sedangkan Deret Taylor untuk $g(x, y)$ disekitar (a, b) adalah sebagai berikut:

$$g(x, y) \cong g(a, b) + \frac{\partial g}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)(y - b) + \Theta_g \quad (2.8)$$

dengan Θ_f dan Θ_g suku-suku non linear yang kemudian dapat dihilangkan.

Berdasarkan persamaan (2.6), (2.7) dan (2.8) diperoleh pendekatan linear sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \quad (2.9)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Persamaan (2.9) dapat dituliskan sebagai matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x - a) \\ (y - b) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Substitusi $u = x - a$ dan $v = y - b$, maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

dengan $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \end{bmatrix}$ merupakan matriks Jacobian sistem (2.6) pada

titik (a, b) . Matriks Jacobian merupakan linearisasi sistem disekitar titik kesetimbangan (Putra et al., 2016).

2.3.2 Titik Keseimbangan

Definisi titik keseimbangan adalah titik yang tidak terpengaruh oleh waktu t , yang artinya ketika $t = 1, 2, \dots, n$, nilai titik tersebut akan sama.

Definisi :

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik tetap jika memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ yang artinya ketika titik $\bar{x}$ disubstitusikan ke dalam persamaan maka persamaan tersebut menjadi 0. Titik tetap juga dapat disebut sebagai titik keseimbangan suatu sistem. Titik keseimbangan suatu sistem dikatakan: (Putra et al., 2016)

1. Stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ sistem (2.3) yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$ berakibat $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.
2. Stabil asimtotik lokal jika titik keseimbangan stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta_0$ berakibat $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$.
3. Tidak stabil jika poin 1 tidak terpenuhi.
4. Stabil asimtotik global jika untuk sebarang nilai awal yang diberikan, setiap solusi sistem $x(t)$ dengan $t \rightarrow \infty$ menuju titik keseimbangan.

2.3.3 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan R_0 adalah angka yang mewakili jumlah individu yang rentan tertular penyakit oleh individu yang terinfeksi. Tingkat penyebaran penyakit dapat diketahui melalui bilangan R_0 (Side et al., 2016). Beberapa kondisi yang disebabkan oleh bilangan R_0 :

1. Jika $R_0 < 1$, maka berarti penyakit akan hilang
2. Jika $R_0 = 1$, maka berarti penyakit akan menetap
3. Jika $R_0 > 1$, maka berarti penyakit akan menjadi suatu wabah (epidemi)

Bilangan R_0 dapat dicari dengan menggunakan matriks *Next-Generation*. Misalkan x menyatakan populasi yang terlibat dalam proses penularan bakteri, maka $x \in \mathbb{R}^n$, sehingga diperoleh:

$$\dot{x} = (F - V)x \quad (2.12)$$

dimana F merupakan matriks $n \times n$, F adalah matriks transmisi penyakit yaitu bertambahnya individu terinfeksi, sedangkan V adalah matriks transisi yaitu berkurangnya jumlah individu terinfeksi. Selanjutnya F dan V dilinearisasi pada titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0), sehingga diperoleh:

$$F = \left[\frac{\partial F}{\partial x} E_0 \right] \text{ dan } V = \left[\frac{\partial V}{\partial x} E_0 \right]$$

matriks *Next Generation* didefinisikan sebagai berikut:

$$G = FV^{-1} \quad (2.13)$$

selanjutnya bilangan R_0 dinyatakan sebagai radius spektral (nilai eigen dominan) dari matriks *Next Generation* sehingga diperoleh

$$R_0 = \rho(G) = \rho(FV^{-1}) \quad (2.14)$$

2.3.4 Matriks Jacobian

Matriks Jacobian adalah sebuah matriks dengan komponen fungsi $f_1, f_2, \dots, f_n$. Entri matriks jacobini merupakan turunan parsial pertama dari f terhadap variabel t .

Definisi:

Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada suatu sistem dengan $f_i \in C'(E, \mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$. Matriks $Jf(\bar{x})$ dinamakan matriks Jacobian dari f di titik $\bar{x}$.

$$Jf(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial t_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial t_1}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial t_n}(\bar{x}) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

2.3.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x pada R^n disebut vektor eigen dari A jika memenuhi:

$$Ax = \lambda x \quad (2.16)$$

λ merupakan skalar sembarang dan disebut nilai eigen dari A . Polinomial karakteristik dari A didefinisikan sebagai:

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0 \quad (2.17)$$

Persamaan (2.10) disebut persamaan karakteristik matriks A (Putra et al., 2016).

Nilai eigen matriks dapat digunakan untuk menunjukkan kestabilan suatu sistem dengan syarat matriks tersebut matriks jacobian yang sudah dilinearisasi pada titik kesetimbangan. Definisi: (Putra et al., 2016)

Diberikan matriks Jacobian $Jf(\bar{x})$ dari sistem (2.3) dengan nilai eigen λ

1. Jika $Jf(\bar{x})$ mempunyai bagian real negatif atau $\lambda_i < 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$, maka titik kesetimbangan $\bar{x}$ stabil asimtotik lokal.

2. Jika $Jf(\bar{x})$ mempunyai bagian real positif atau $\lambda_i > 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$, maka titik kesetimbangan $\bar{x}$ tidak stabil.

2.3.6 Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria stabilitas Routh-Hurwitz adalah metode untuk menunjukkan kestabilan suatu sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa langsung menghitung akarnya (Side et al., 2016). Dengan menggunakan kriteria ini stabilitas absolut diketahui dari koefisien-koefisien persamaan karakteristik. Misalkan persamaan karakteristik orde- n dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut: (Hasnawati et al., 2017)

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2.18)$$

dengan koefisien adalah besaran real dan $a_n \neq 0$, kemudian buat tabel Routh seperti berikut:

Tabel 2.1 Routh Array

λ^n	a_0	a_2	a_4	a_6	-
λ^{n-1}	a_1	a_3	a_5	-	-
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	-	-
λ^{n-3}	c_1	c_2	c_3	-	-
λ^{n-4}	d_1	d_2	-	-	-
	$\vdots$	$\vdots$			
λ^2	e_1	a_n	-	-	-
λ	f_1	-	-	-	-
λ^0	a_n	-	-	-	-

Koefisien pada baris pertama dan kedua diambil dari koefisien persamaan karakteristik, sedangkan koefisien pada baris ketiga dan seterusnya dapat menggunakan aturan di bawah ini:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}; b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}; b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}; b_4 = 0;$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}; c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1};$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}; d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1};$$

dan seterusnya hingga semua koefisien diperoleh membentuk matriks setengah piramida terbalik.

Kriteria kestabilan Routh adalah sebagai berikut:

1. Jika setiap akar polinomial adalah negatif atau memiliki bagian real negatif, maka koefisien pada kolom pertama tabel Routh adalah positif.
2. Jika terdapat satu atau lebih koefisien bernilai negatif, maka sistem tidak stabil.
3. Jumlah perubahan tanda pada kolom pertama menunjukkan jumlah akar positif dari persamaan karakteristik.

Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa jika terdapat 0 atau koefisien negatif disamping adanya koefisien positif, maka ini menunjukkan bahwa ada satu atau lebih akar imajiner atau bagian real yang positif yang berarti sistem tidak stabil. Kondisi perlu (tidak cukup) untuk stabil adalah bahwa semua koefisien persamaan karakteristik positif dan lengkap (Side et al., 2016).

Berikut diberikan contoh menentukan kriteria Routh-Hurwitz dari persamaan karakteristik yaitu $-\lambda^3 - 2.4749\lambda^2 - 0.7286\lambda - 0.02818 = 0$. Dari persamaan karakteristik dapat dibentuk tabel Routh-Hurwitz yaitu:

Tabel 2.2 Contoh Routh-Hurwitz

λ^3	$a_0 = -1$	$a_2 = -0.7286$	0
λ^2	$a_1 = -2.4749$	$a_3 = -0.02818$	0
λ	$b_1 = -0.7172$	0	0
λ^0	$a_3 = -0.02818$	0	0

Pada kolom pertama tabel 2.2 diketahui bahwa tidak terdapat perubahan tanda, sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem stabil.

2.4 Tuberkulosis

Tuberkulosis merupakan jenis penyakit menular yang disebabkan oleh *Mycobacterium tuberculosis*. Penularan bakteri terjadi melalui udara yaitu ketika individu aktif TBC bicara, batuk maupun bersin karena individu tersebut akan mengeluarkan percikan dahak yang menyebabkan infeksi TBC sehingga dapat disimpulkan bahwa bakteri TBC dapat menular jika terdapat kontak langsung dengan penderita aktif TBC (Pramono, 2021). Pada model peluang individu terinfeksi dinotasikan dalam parameter β . Bakteri yang ditularkan tidak langsung menyebabkan infeksi melainkan terpapar atau dalam kata lain masa laten. Menurut buku “Pedoman Diagnosis dan Penatalaksanaan Tuberkulosis di Indonesia” 95% individu yang tertular bakteri TBC akan masuk pada masa laten (Perhimpunan Dokter Paru Indonesia, 2021). Individu yang laten TBC akan berkembang menjadi TBC aktif dalam 1 tahun pertama setelah terpapar (Perhimpunan Dokter Paru Indonesia, 2021). Aktivasi bakteri TBC menyebabkan individu masuk pada populasi *Infected*, pada model perpindahan populasi *Exposed* ke populasi *Infected* dinotasikan dengan parameter ε . Infeksi TBC dapat menyebabkan kematian, sehingga pada model individu terinfeksi yang meninggal akibat penyakit TBC dinotasikan dengan μ_T .

TBC masuk ke dalam 10 penyakit mematikan di dunia (Pramono, 2021), tetapi TBC juga termasuk penyakit yang dapat disembuhkan dengan adanya pengobatan. Individu terinfeksi TBC yang menjalani pengobatan dinotasikan

dengan parameter ω . Untuk sembuh dari TBC pengobatan yang dilakukan harus dilakukan secara intensif yaitu tidak diperkenankan putus dalam berobat, sehingga nilai q diasumsikan satu. Parameter q berarti proporsi individu populasi *Treatment* sembuh. Perpindahan populasi *Treatment* ke populasi *Recovered* tidak hanya dipengaruhi parameter q tetapi juga dengan parameter δ yaitu peluang individu sembuh dengan pengobatan. Individu yang sembuh dari TBC tidak hanya dipengaruhi oleh pengobatan melainkan terdapat γ yang berarti laju kesembuhan alami.

Kasus TBC dapat ditekan dengan mengecilnya peluang penularan dan tingginya keberhasilan pengobatan. Peluang penularan dapat berkurang dengan semakin kecil interaksi individu rentan dengan individu terinfeksi. Oleh karena itu hal yang dapat dilakukan yaitu dengan memberikan kekebalan berupa vaksin pada individu sehat. Vaksin TBC dikenal dengan nama vaksin BCG, vaksin ini diberikan kepada bayi yang baru lahir. Sedangkan keberhasilan pengobatan juga diperlukan karena dapat mencegah adanya resistensi terhadap obat TBC dan kematian akibat TBC.

2.5 Vaksin Tuberkulosis (BCG)

Vaksin *Bacille Calmette Guerin* (BCG) adalah vaksin yang dirancang guna memberikan reaksi kekebalan terhadap bakteri penyebab tuberkulosis yaitu *Mycobacterium tuberculosis*. Vaksin ini mengandung bakteri *Mycobacterium bovis*, namun dalam kondisi telah dilemahkan (Indrawati et al., 2020). Sehingga ketika vaksin ini masuk ke dalam tubuh individu yang sehat, tidak menyebabkan

sakit TBC melainkan berperan sebagai pelindung dari infeksi TBC. Vaksin BCG bekerja paling efektif pada bayi dan anak kecil (Setyawan et al., 2020).

Pada model vaksin dinotasikan dengan σ . Tujuan pemberian vaksin adalah untuk memberikan kekebalan, sehingga individu yang tervaksinasi tidak akan tertular bakteri TBC. Namun seiring berjalannya waktu kekebalan vaksin akan mengalami penurunan, sehingga individu yang tervaksinasi dapat menjadi individu rentan tertular TBC. Perpindahan individu vaksin menjadi individu rentan dinyatakan dalam parameter ρ . Penggunaan vaksin dalam model ini yaitu sebagai upaya pengendalian penularan TBC.

2.6 Pengobatan TBC

TBC termasuk ke dalam penyakit yang mematikan, namun TBC juga dapat disembuhkan. Secara teori penyembuhan TBC melalui pengobatan. Pengobatan yang dilakukan yaitu dengan mengonsumsi obat yang dikenal dengan obat anti tuberkulosis (OAT). Waktu yang dibutuhkan sekitar 6 bulan. Tujuan pengobatan yaitu untuk menyembuhkan, mencegah kematian dan terjadinya resistensi obat serta menurunkan risiko penularan (Perhimpunan Dokter Paru Indonesia, 2021). Keberhasilan pengobatan TBC dicapai dengan adanya kepatuhan dalam mengonsumsi obat, dengan kata lain pengobatan yang dilakukan harus berkesinambungan. Akibat dari putusnya berobat yaitu kegagalan dalam berobat sehingga menyebabkan adanya resistensi terhadap obat dan waktu yang dibutuhkan untuk pengobatan akan cenderung lebih lama.

Pada model SEITR pengobatan tidak hanya diberikan kepada populasi terinfeksi (*Infected*) melainkan kepada populasi terpapar (*Exposed*). Hal ini karena

pengobatan juga berperan sebagai parameter untuk menurunkan risiko penularan. Populasi *Exposed* yang melakukan pengobatan sebesar ψ akan langsung masuk pada populasi *Treatment*. Sedangkan populasi *Infected* yang melakukan pengobatan sebesar ω juga masuk ke populasi *Treatment*. Pada populasi *Treatment* individu dapat sembuh dengan melakukan pengobatan secara intensif ($q = 1$) sehingga dapat masuk ke populasi *Recovered*.

2.7 Bersikap terhadap Wabah dalam Pandangan Islam

Penularan penyakit masih menjadi masalah yang penting untuk diperhatikan, karena jika tidak dilakukan upaya pengendalian dapat menyebabkan terjadinya suatu wabah. Di mana wabah penyakit atau yang biasa disebut dengan istilah *Tha'un* telah ada sejak zaman nabi Muhammad SAW. *Tha'un* merupakan infeksi penyakit menular yang dapat menyebabkan kematian. Istilah *Tha'un* termaktub dalam hadis nabi yaitu:

Rasulullah SAW bersabda: “Tha'un (wabah penyakit menular) adalah suatu peringatan dari Allah SWT untuk menguji hamba-hamba-Nya dari kalangan manusia. Maka apabila kamu mendengar penyakit itu berjangkit di suatu negeri, janganlah kamu masuk ke negeri itu. Dan apabila wabah itu berjangkit di negeri tempat kamu berada, jangan pula kamu lari daripadanya.” (HR Bukhari dan Muslim)(Firdaus, 2020)

Hadis tersebut menjelaskan bahwa adanya suatu wabah penyakit bukanlah suatu ancaman bagi kehidupan, melainkan suatu cobaan atau ujian dari Allah. Cobaan yang dimaksud merupakan suatu teguran dari Allah untuk membuktikan keimanan seorang hamba-Nya (Firdaus, 2020). Rasulullah SAW memerintahkan untuk menghindar dari suatu wabah, namun jika dihadapkan dengan suatu wabah maka hal yang harus dilakukan yaitu menerimanya dengan ikhlas (Soraya, 2020). Berikut cara yang dapat digunakan dalam menghadapi wabah dalam islam:

1. Sabar dan Tawakkal

Bagi setiap muslim sudah seharusnya bersikap tawakkal kepada Allah dalam segala hal yang terjadi. Hal ini karena setiap peristiwa yang terjadi merupakan kehendak Allah SWT, seperti halnya penyakit menular. Selain tawakkal hendaknya kaum muslimin senantiasa bersabar dalam menghadapi suatu wabah. Dalam suatu hadis riwayat Bukhari, Rasulullah bersabda: *"Tha'un merupakan azab yang ditimpakan kepada siapa saja yang Allah kehendaki. Kemudian Allah jadikan rahmat kepada kaum mukminin"* (Daim, 2020). Oleh karena itu sebagai manusia hendaknya menerima musibah tersebut dengan penuh kesabaran dan ikhlas sebagai bentuk keimanan atas kekuasaan Allah dan memperoleh rahmat-Nya.

2. Berupaya Melakukan Pengobatan

Dalam H.R Muslim Rasulullah bersabda: *"Setiap penyakit ada obatnya. Apabila ditemukan obat yang tepat untuk suatu penyakit, maka akan sembuhlah penyakit itu dengan izin Allah SWT"*. Melalui hadis tersebut dapat disimpulkan bahwa Islam mengajarkan untuk melakukan ikhtiar yaitu berobat dalam mencapai kesembuhan. Oleh karena itu meskipun tawakkal dianjurkan dalam menghadapi suatu penyakit, tetapi sudah seharusnya melakukan usaha dalam mencari obatnya sehingga tidak memperluas terjadinya wabah (Soraya, 2020).

3. Bersikap Toleransi terhadap Sesama

Rasulullah menganjurkan untuk selalu menghindar dan menjauh dari wabah. Beliau bersabda: *"Larilah dari orang yang sakit lepra, sebagaimana kamu lari dari singa"*. Nabi Muhammad menganjurkan umatnya untuk berlindung dari penyakit menular dengan tidak menganggap remeh faktor penyebab penyakit

tersebut. Salah satunya menghindari kontak langsung dengan penderita penyakit. Namun hal ini bukan berarti sikap menghindar merupakan sikap mengucilkan penderita penyakit, melainkan sikap toleransi dan tingginya kepedulian terhadap sesama (Daim, 2020).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Definisi penelitian kualitatif menurut (Albi Anggito, 2018) adalah pengumpulan informasi atau data dengan tujuan untuk menginterpretasikan fenomena yang terjadi. Sedangkan menurut (Dr. Rukin, 2019) penelitian kualitatif adalah suatu kegiatan yang menggunakan metode ilmiah untuk mempelajari suatu masalah secara terencana dan sistematis untuk menemukan informasi baru yang benar-benar dapat dipercaya.

3.2 Pra Penelitian

Pra penelitian yang dilakukan penulis antara lain memahami tentang mekanisme penyebaran dan parameter-parameter yang dapat mempengaruhi terjadinya TBC. Kemudian menelaah dan menentukan model matematika yang sesuai dengan penyebaran TBC. Adapun model yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah modifikasi model penelitian Ramadhan dan kawan-kawan (2018). Modifikasi yang dilakukan yaitu dengan menambahkan pengaruh vaksin pada model sesuai dengan penelitian (Mishra & Srivastava, 2014). Selanjutnya menyiapkan nilai awal dan nilai parameter yang akan digunakan pada simulasi sebagai interpretasi dari model. Pada penelitian ini besar nilai yang digunakan diambil dari penelitian (Ramadhan et al., 2018) dan (Mishra & Srivastava, 2014).

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Melakukan analisis dinamik pada model
 - a. Menentukan titik kesetimbangan model penyebaran penyakit TBC. Titik kesetimbangan yang diperoleh berupa titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.
 - b. Melakukan analisis kestabilan pada kedua titik kesetimbangan. Analisis kestabilan berdasarkan nilai eigen yang diperoleh dari matriks Jacobian. Dimana matriks Jacobian merupakan salah satu metode linearisasi.
 - c. Menentukan bilangan reproduksi dasar. Bilangan reproduksi dasar diperoleh dengan menggunakan metode *Next Generation*. Populasi yang dikonstruksi menjadi matriks F dan V populasi E dan I . Selanjutnya dilakukan linearisasi menggunakan matriks Jacobi. Kemudian membentuk matriks *Next Generation*. Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari nilai eigen dominan matriks *Next Generation*.
2. Simulasi model SEITR dengan menggunakan *software* MAPLE.
 - a. Menentukan nilai awal dan nilai parameter untuk dilakukan simulasi.
 - b. Melakukan simulasi dengan memasukkan nilai parameter dan nilai awal serta model pada *software*.
 - c. Melakukan interpretasi hasil dengan menampilkan grafik yang telah diperoleh dan membandingkan grafik dinamik antara model yang

diberikan pengaruh vaksin juga pengobatan dan model yang tidak diberikan vaksin juga pengobatan.

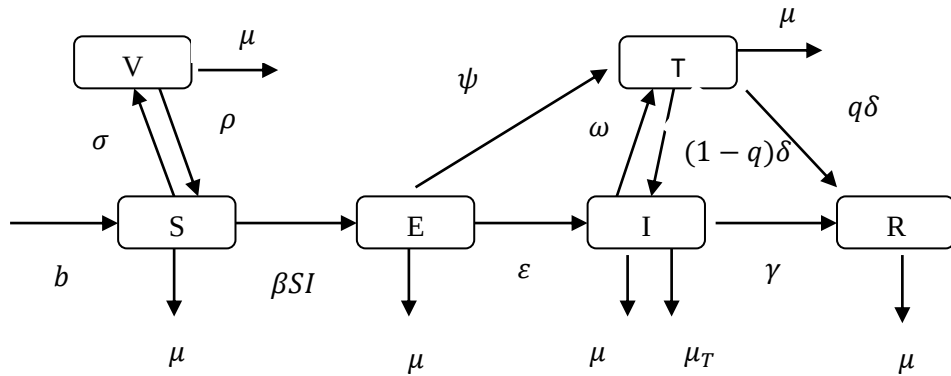
- d. Melakukan analisis pada grafik yang telah dihasilkan dan membuat kesimpulan.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Analisis Dinamik Model SEITR pada Penyebaran TBC dengan Pengaruh Vaksin dan Pengobatan

Model yang digunakan dalam penelitian ini adalah modifikasi model SEITR yang dihasilkan dari penelitian (Ramadhan et al., 2018). Modifikasi model dilakukan dengan mempertimbangkan pemberian vaksin *Bacille Calmette Guerin* (BCG) sesuai dengan penelitian (Mishra & Srivastava, 2014). Berdasarkan uraian tersebut, maka dapat dibentuk model SEITR dengan pengaruh vaksin dan pengobatan pada penyebaran penyakit TBC adalah sebagai berikut:



Gambar 4.1 Diagram Kompartemen Model SEITR dengan Pengaruh Vaksin dan Pengobatan

Berdasarkan diagram kompartemen, maka model dapat dinyatakan dalam persamaan diferensial yaitu sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = b - \beta SI - \mu S - \sigma S + \rho V$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (\varepsilon + \psi + \mu)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon E + (1 - q)\delta T - (\omega + \gamma + \mu + \mu_T)I \quad (4.1)$$

$$\frac{dT}{dt} = \psi E + \omega I - (\delta + \mu)T$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + q\delta T - \mu R$$

$$\frac{dV}{dt} = \sigma S - \rho V - \mu V$$

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + T(t) + R(t) + V(t)$$

dengan penjelasan variabel dan parameter sebagai berikut:

Tabel 4.1 Nilai Parameter Model SEITR

Parameter	Definisi	Nilai	Sumber
b	Laju kelahiran per tahun	0,2	(Ramadhan et al., 2018)
β	Peluang individu terinfeksi TBC per tahun	0,35	(Ramadhan et al., 2018)
ε	Laju individu laten TBC menjadi individu aktif TBC per tahun	0,3	(Ramadhan et al., 2018)
ψ	Laju individu laten TBC menjalani pengobatan per tahun	0,7	(Ramadhan et al., 2018)
ω	Laju individu aktif TBC menjalani pengobatan per tahun	0,55	(Ramadhan et al., 2018)
δ	Peluang individu sembuh dengan pengobatan per tahun	0,91	(Ramadhan et al., 2018)
μ	Laju kematian alami per tahun	0,0167	(Ramadhan et al., 2018)
μ_T	Laju kematian akibat TBC per tahun	0,3	(Ramadhan et al., 2018)
γ	Laju kesembuhan alami per tahun	0,25	(Ramadhan et al., 2018)
q	Proporsi individu kelas <i>treatment</i> sembuh	1	(Ramadhan et al., 2018)
σ	Tingkat pemberian vaksin per tahun	0,3	(Mishra & Srivastava, 2014)
ρ	Laju individu tervaksinasi menjadi individu rentan per tahun	0,6	(Mishra & Srivastava, 2014)

Berdasarkan model, individu yang menjalani pengobatan diasumsikan tidak akan putus obat, yang artinya $q = 1$. Untuk mempermudah analisis model maka

misalkan $X = \varepsilon + \psi + \mu$; $Y = \omega + \gamma + \mu + \mu_T$; $Z = \delta + \mu$. Sehingga model (4.1) menjadi:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= b - \beta SI - \mu S - \sigma S + \rho V \\
 \frac{dE}{dt} &= \beta SI - XE \\
 \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E - YI \\
 \frac{dT}{dt} &= \psi E + \omega I - ZT \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I + \delta T - \mu R \\
 \frac{dV}{dt} &= \sigma S - \rho V - \mu V
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.1.1 Menentukan titik kesetimbangan

Titik kesetimbangan diperoleh ketika $\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dT}{dt} = \frac{dR}{dt} = \frac{dV}{dt} = 0$,

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 b - \beta SI - \mu S - \sigma S + \rho V &= 0 \\
 \beta SI - XE &= 0
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\varepsilon E - YI = 0$$

$$\psi E + \omega I - ZT = 0$$

$$\gamma I + q\delta T - \mu R = 0$$

$$\sigma S - \rho V - \mu V = 0$$

1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit (Kasus $I = 0$)

Persamaan 1 dari sistem (4.3)

$$b - \beta SI - \mu S - \sigma S + \rho V = 0$$

$$\Leftrightarrow -(\mu + \sigma)S = -b - \rho V$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{-(b + \rho V)}{-(\mu + \sigma)} = \frac{b + \rho V}{\mu + \sigma}$$

Persamaan 6 dari sistem (4.3)

$$\sigma S - \rho V - \mu V = 0$$

$$\Leftrightarrow -(\rho + \mu)V = -\sigma S$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{-\sigma S}{-(\rho + \mu)} = \frac{\sigma S}{\rho + \mu}$$

Substitusi $V = \frac{\sigma S}{\rho + \mu}$ ke $S = \frac{b + \rho V}{\mu + \sigma}$

$$S = \frac{b + \rho \left(\frac{\sigma S}{\rho + \mu} \right)}{\mu + \sigma}$$

$$\Leftrightarrow (\mu + \sigma)S = b + \rho \left(\frac{\sigma S}{\rho + \mu} \right)$$

$$\Leftrightarrow (\mu + \sigma)S = \frac{b(\rho + \mu) + \rho \sigma S}{\rho + \mu}$$

$$\Leftrightarrow (\mu + \sigma)(\rho + \mu)S = b(\rho + \mu) + \rho \sigma S$$

$$\Leftrightarrow [(\mu + \sigma)(\rho + \mu) - \rho \sigma]S = b(\rho + \mu)$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{b(\rho + \mu)}{(\mu + \sigma)(\rho + \mu) - \rho \sigma} = \frac{b(\rho + \mu)}{\mu^2 + \mu\rho + \sigma\mu + \rho\sigma - \rho\sigma} = \frac{b(\rho + \mu)}{\mu^2 + \mu\rho + \sigma\mu}$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)}$$

Dengan demikian diperoleh

$$V = \frac{\sigma S}{\rho + \mu} = \frac{\sigma \left(\frac{b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} \right)}{\rho + \mu} = \frac{\frac{\sigma b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)}}{\rho + \mu}$$

$$\Leftrightarrow V = \left(\frac{\sigma b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} \right) \left(\frac{1}{\rho + \mu} \right) = \frac{\sigma b}{\mu(\mu + \rho + \sigma)}$$

Persamaan 2 dari sistem (4.3)

$$\beta SI - XE = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta S(0) = XE$$

$$\Leftrightarrow E = 0$$

Persamaan 4 dari sistem (4.3)

$$\psi E + \omega I - ZT = 0$$

$$\Leftrightarrow \psi(0) + \omega(0) = ZT$$

$$\Leftrightarrow T = 0$$

Persamaan 5 dari sistem (4.3)

$$\gamma I + q\delta T - \mu R = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma(0) + \delta(0) = \mu R$$

$$\Leftrightarrow R = 0$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu

$$E_0 = (S, E, I, T, R, V) = \left(\frac{b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)}, 0, 0, 0, 0, \frac{\sigma b}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} \right)$$

2. Titik kesetimbangan Endemik (Kasus $I \neq 0$)

Misalkan $E_1 = (S^*, E^*, I^*, T^*, R^*, V^*)$, maka sistem (4.3) menjadi

$$b - \beta S^* I^* - \mu S^* - \sigma S^* + \rho V = 0$$

$$\beta S^* I^* - XE^* = 0$$

$$\varepsilon E^* - YI^* = 0 \tag{4.4}$$

$$\psi E^* + \omega I^* - ZT^* = 0$$

$$\gamma I^* + \delta T^* - \mu R^* = 0$$

$$\sigma S^* - \rho V^* - \mu V^* = 0$$

Persamaan 4 dari sistem (4.4)

$$\varepsilon E^* - YI^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon E^* = YI^*$$

$$\Leftrightarrow E^* = \frac{YI^*}{\varepsilon}$$

Substitusi $E^* = \frac{YI^*}{\varepsilon}$ ke persamaan 2 sistem (4.4)

$$\beta S^* I^* - XE^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta S^* I^* - X \left(\frac{YI^*}{\varepsilon} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow I^* \left(\beta S^* - \frac{XY}{\varepsilon} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow I^* = 0 \vee \beta S^* = \frac{XY}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow I^* = 0 \vee S^* = \frac{XY}{\beta \varepsilon}$$

Karena $I^* \neq 0$ maka diperoleh $S^* = \frac{XY}{\beta \varepsilon}$

Persamaan 6 dari sistem (4.4)

$$\sigma S^* - \rho V^* - \mu V^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma \left(\frac{XY}{\beta \varepsilon} \right) - (\rho + \mu) V^* = 0$$

$$\Leftrightarrow V^* = \left(\frac{\sigma XY}{\beta \varepsilon} \right) \left(\frac{1}{\rho + \mu} \right) = \frac{\sigma XY}{(\beta \varepsilon)(\rho + \mu)}$$

Persamaan 1 dari sistem (4.4)

$$b - \beta S^* I^* - \mu S^* - \sigma S^* + \rho V = 0$$

$$\Leftrightarrow b - \beta \left(\frac{XY}{\beta \varepsilon} \right) I^* - \mu \left(\frac{XY}{\beta \varepsilon} \right) - \sigma \left(\frac{XY}{\beta \varepsilon} \right) + \rho \left(\frac{\sigma XY}{(\beta \varepsilon)(\rho + \mu)} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{XY}{\varepsilon} \right) I^* = b - \left(\frac{XY}{\beta \varepsilon} \right) \left(\mu + \sigma - \frac{\rho \sigma}{\rho + \mu} \right)$$

$$\Leftrightarrow I^* = \left[b - \left(\frac{XY}{\beta \varepsilon} \right) \left(\mu + \sigma - \frac{\rho \sigma}{\rho + \mu} \right) \right] \left(\frac{\varepsilon}{XY} \right)$$

$$\Leftrightarrow I^* = \frac{b\varepsilon}{XY} - \frac{1}{\beta} \left(\frac{(\mu + \sigma)(\rho + \mu) - \rho\sigma}{\rho + \mu} \right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\beta} \left(\frac{\mu^2 + \mu\rho + \sigma\mu + \rho\sigma - \rho\sigma}{\rho + \mu} \right)$$

$$\Leftrightarrow I^* = \frac{b\varepsilon}{XY} - \frac{\mu^2 + \mu\rho + \sigma\mu}{\beta(\rho + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow I^* = \frac{b\varepsilon\beta(\rho + \mu) - (\mu^2 + \mu\rho + \sigma\mu)XY}{XY\beta(\rho + \mu)}$$

$$\Leftrightarrow I^* = \frac{b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - (\mu^2 XY + \mu\rho XY + \sigma\mu XY)}{XY\beta(\rho + \mu)}$$

Persamaan 2 dari sistem (4.4)

$$\beta S^* I^* - X E^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta \left(\frac{XY}{\beta \varepsilon} \right) \left(\frac{b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - (\mu^2 XY + \mu\rho XY + \sigma\mu XY)}{XY\beta(\rho + \mu)} \right) = X E^*$$

$$\Leftrightarrow E^* = \left(\frac{b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - (\mu^2 XY + \mu\rho XY + \sigma\mu XY)}{\beta \varepsilon(\rho + \mu)} \right) \left(\frac{1}{X} \right)$$

$$\Leftrightarrow E^* = \frac{b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - (\mu^2 XY + \mu\rho XY + \sigma\mu XY)}{X\beta \varepsilon(\rho + \mu)}$$

Persamaan 4 dari sistem (4.4)

$$\psi E^* + \omega I^* - Z T^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \psi \left(\frac{b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - (\mu^2 XY + \mu\rho XY + \sigma\mu XY)}{X\beta \varepsilon(\rho + \mu)} \right) + \omega \left(\frac{b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - (\mu^2 XY + \mu\rho XY + \sigma\mu XY)}{XY\beta(\rho + \mu)} \right) = Z T^*$$

Samakan penyebut sehingga diperoleh

$$\psi XY\beta(\rho + \mu)(b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - (\mu^2 XY + \mu\rho XY + \sigma\mu XY)) +$$

$$\omega X\beta\varepsilon(\rho + \mu)(b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - (\mu^2XY + \mu\rho XY + \sigma\mu XY))$$

Bagian penyebut diperoleh sebagai berikut

$$[X\beta\varepsilon(\rho + \mu)][XY\beta(\rho + \mu)]$$

$$\Leftrightarrow (X\beta\varepsilon\rho + X\beta\varepsilon\mu)(\rho XY\beta + \mu XY\beta)$$

$$\Leftrightarrow X^2Y\beta^2\rho^2\varepsilon + X^2Y\beta^2\mu\rho\varepsilon + X^2Y\beta^2\mu\rho\varepsilon + X^2Y\beta^2\mu^2\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(\rho^2 + \mu\rho + \mu\rho + \mu^2)$$

$$\Leftrightarrow X^2Y\beta^2\varepsilon(\mu + \rho)(\mu + \rho)$$

Dengan demikian diperoleh

$$T^* = \left[\frac{(\rho + \mu)(b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - (\mu^2XY + \mu\rho XY + \sigma\mu XY))(\psi XY\beta + \omega X\beta\varepsilon)}{X^2Y\beta^2\varepsilon(\mu + \rho)(\mu + \rho)} \right] \frac{1}{Z}$$

$$T^* = \frac{(b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - (\mu^2XY + \mu\rho XY + \sigma\mu XY))(\psi Y + \omega\varepsilon)(\beta X)}{X^2Y\beta^2\varepsilon(\mu + \rho)Z}$$

$$T^* = \frac{(b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - (\mu^2XY + \mu\rho XY + \sigma\mu XY))(\psi Y + \omega\varepsilon)}{XY\beta\varepsilon(\mu + \rho)Z}$$

Persamaan 5 dari sistem (4.4)

$$\gamma I^* + \delta T^* - \mu R^* = 0$$

$$\begin{aligned} & \gamma \left(\frac{b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - (\mu^2XY + \mu\rho XY + \sigma\mu XY)}{XY\beta(\rho + \mu)} \right) \\ & + \delta \left(\frac{(b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - (\mu^2XY + \mu\rho XY + \sigma\mu XY))(\psi Y + \omega\varepsilon)}{XY\beta\varepsilon(\mu + \rho)Z} \right) \\ & = \mu R^* \end{aligned}$$

Samakan penyebut sehingga diperoleh

$$\gamma XY\beta\varepsilon(\mu + \rho)Z(b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - (\mu^2XY + \mu\rho XY + \sigma\mu XY)) +$$

$$\delta XY\beta(\rho + \mu)(b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - (\mu^2XY + \mu\rho XY + \sigma\mu XY))(\psi Y + \omega\varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
& [\gamma XY \beta \varepsilon (\mu + \rho) Z + \delta XY \beta (\rho + \mu) (\psi Y + \omega \varepsilon)] (b \varepsilon \beta \rho + b \varepsilon \beta \mu - (\mu^2 XY + \mu \rho XY + \sigma \mu XY)) \\
& (\rho + \mu) [\gamma XY \beta \varepsilon Z + \delta XY \beta (\psi Y + \omega \varepsilon)] (b \varepsilon \beta \rho + b \varepsilon \beta \mu \\
& \quad - (\mu^2 XY + \mu \rho XY + \sigma \mu XY)) \\
& (\rho + \mu) [\gamma XY \beta \varepsilon Z + XY^2 \delta \beta \psi + \omega XY \delta \beta \varepsilon] (b \varepsilon \beta \rho + b \varepsilon \beta \mu \\
& \quad - (\mu^2 XY + \mu \rho XY + \sigma \mu XY)) \\
& (\rho + \mu) [XY \beta (\gamma \varepsilon Z + \delta Y \psi + \delta \omega \varepsilon)] (b \varepsilon \beta \rho + b \varepsilon \beta \mu - (\mu^2 XY + \mu \rho XY + \sigma \mu XY))
\end{aligned}$$

Bagian penyebut

$$\begin{aligned}
& [XY \beta (\rho + \mu)] [XY \beta \varepsilon (\mu + \rho) Z] \\
& (XY \beta \rho + XY \beta \mu) (XY \beta \varepsilon \mu Z + XY \beta \varepsilon \rho Z) \\
& X^2 Y^2 \beta^2 \rho \varepsilon \mu Z + X^2 Y^2 \beta^2 \rho^2 \varepsilon Z + X^2 Y^2 \beta^2 \mu^2 \varepsilon Z + X^2 Y^2 \beta^2 \mu \varepsilon \rho Z \\
& X^2 Y^2 \beta^2 \varepsilon (\rho \mu Z + \rho Z + \mu^2 Z + \mu \rho Z) \\
& X^2 Y^2 \beta^2 \varepsilon (\rho \mu + \rho + \mu^2 + \mu \rho) Z \\
& X^2 Y^2 \beta^2 \varepsilon (\rho + \mu) (\rho + \mu) Z
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}
R^* &= \left[\frac{(\rho + \mu) [XY \beta (\gamma \varepsilon Z + \delta Y \psi + \delta \omega \varepsilon)] (b \varepsilon \beta \rho + b \varepsilon \beta \mu - (\mu^2 XY + \mu \rho XY + \sigma \mu XY))}{X^2 Y^2 \beta^2 \varepsilon (\rho + \mu) (\rho + \mu) Z} \right] \frac{1}{\mu} \\
R^* &= \frac{(\gamma \varepsilon Z + \delta Y \psi + \delta \omega \varepsilon) (b \varepsilon \beta \rho + b \varepsilon \beta \mu - (\mu^2 XY + \mu \rho XY + \sigma \mu XY))}{XY \beta \varepsilon (\rho + \mu) Z}
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik yaitu

$$\begin{aligned}
E_1 &= (S^*, E^*, I^*, T^*, R^*, V^*) = \\
& \left(\frac{XY}{\beta \varepsilon}, \frac{b \varepsilon \beta \rho + b \varepsilon \beta \mu - \theta}{XY \beta (\rho + \mu)}, \frac{b \varepsilon \beta \rho + b \varepsilon \beta \mu - \theta}{XY \beta (\rho + \mu)}, \frac{\theta (\psi Y + \omega \varepsilon)}{XY \beta \varepsilon (\mu + \rho) Z}, \frac{\theta (\gamma \varepsilon Z + \delta Y \psi + \delta \omega \varepsilon)}{XY \beta \varepsilon (\rho + \mu) Z} \right)
\end{aligned}$$

dengan

$$\theta = (b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - (\mu^2XY + \mu\rho XY + \sigma\mu XY))$$

4.1.2 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Langkah awal dalam melakukan analisis kestabilan yaitu dengan melakukan linearisasi pada titik keseimbangan dengan membentuk matriks Jacobian. Lalu dicari nilai eigen dari matriks Jacobian guna menentukan kestabilan suatu model/sistem. Jika persamaan karakteristik yang dihasilkan cukup sulit ditemukan nilai eigennya, maka kestabilan titik keseimbangan dapat ditentukan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

1. Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Hasil linearisasi titik keseimbangan bebas penyakit menggunakan matriks Jacobian yaitu sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dS}{dS} & \frac{dS}{dE} & \frac{dS}{dI} & \frac{dS}{dT} & \frac{dS}{dR} & \frac{dS}{dV} \\ \frac{dE}{dS} & \frac{dE}{dE} & \frac{dE}{dI} & \frac{dE}{dT} & \frac{dE}{dR} & \frac{dE}{dV} \\ \frac{dI}{dS} & \frac{dI}{dE} & \frac{dI}{dI} & \frac{dI}{dT} & \frac{dI}{dR} & \frac{dI}{dV} \\ \frac{dT}{dS} & \frac{dT}{dE} & \frac{dT}{dI} & \frac{dT}{dT} & \frac{dT}{dR} & \frac{dT}{dV} \\ \frac{dR}{dS} & \frac{dR}{dE} & \frac{dR}{dI} & \frac{dR}{dT} & \frac{dR}{dR} & \frac{dR}{dV} \\ \frac{dV}{dS} & \frac{dV}{dE} & \frac{dV}{dI} & \frac{dV}{dT} & \frac{dV}{dR} & \frac{dV}{dV} \end{bmatrix}$$

maka diperoleh:

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I - \mu - \sigma & 0 & -\beta S & 0 & 0 & \rho \\ \beta I & -X & \beta S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi & \omega & -Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \delta & -\mu & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho - \mu \end{bmatrix}$$

lalu substitusi titik kesetimbangan bebas penyakit pada matriks J yaitu

$E_0 = \left(\frac{b(\rho+\mu)}{\mu(\mu+\rho+\sigma)}, 0, 0, 0, 0, \frac{\sigma b}{\mu(\mu+\rho+\sigma)} \right)$, sehingga diperoleh:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu - \sigma & 0 & -\beta \left(\frac{b(\rho+\mu)}{\mu(\mu+\rho+\sigma)} \right) & 0 & 0 & \rho \\ 0 & -X & \beta \left(\frac{b(\rho+\mu)}{\mu(\mu+\rho+\sigma)} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y & -Z & 0 & 0 \\ 0 & \psi & \omega & \delta & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & -\rho - \mu \\ \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

selanjutnya menentukan nilai eigen matriks $J(E_0)$. Nilai eigen diperoleh dari

$|J(E_0) - \lambda I| = 0$, maka diperoleh:

$$\begin{vmatrix} -\mu - \sigma - \lambda & 0 & -\frac{\beta b(\rho+\mu)}{\mu(\mu+\rho+\sigma)} & 0 & 0 & \rho \\ 0 & -X - \lambda & \frac{\beta b(\rho+\mu)}{\mu(\mu+\rho+\sigma)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y - \lambda & -Z - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \psi & \omega & \delta & -\mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & -\rho - \mu - \lambda \\ \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Determinan matriks diperoleh menggunakan ekspansi kofaktor, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} & (-\rho - \mu - \lambda) \begin{vmatrix} -\mu - \sigma - \lambda & 0 & -\frac{\beta b(\rho+\mu)}{\mu(\mu+\rho+\sigma)} & 0 & 0 \\ 0 & -X - \lambda & \frac{\beta b(\rho+\mu)}{\mu(\mu+\rho+\sigma)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y - \lambda & -Z - \lambda & 0 \\ 0 & \psi & \omega & \delta & -\mu - \lambda \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} - \\ & \rho \begin{vmatrix} 0 & -X - \lambda & \frac{\beta b(\rho+\mu)}{\mu(\mu+\rho+\sigma)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y - \lambda & -Z - \lambda & 0 \\ 0 & \psi & \omega & \delta & -\mu - \lambda \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$(-\rho - \mu - \lambda)(-\mu - \lambda) \begin{vmatrix} -\mu - \sigma - \lambda & 0 & -\frac{\beta b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} & 0 \\ 0 & -X - \lambda & \frac{\beta b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y - \lambda & -Z - \lambda \\ 0 & \psi & \omega & \end{vmatrix} -$$

$$\rho(0) \begin{vmatrix} 0 & -X - \lambda & \frac{\beta b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y - \lambda & 0 \\ 0 & \psi & \omega & -Z - \lambda \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{vmatrix} - (-\mu - \lambda)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -X - \lambda & \frac{\beta b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y - \lambda & 0 \\ 0 & \psi & \omega & -Z - \lambda \\ \sigma & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\rho - \mu - \lambda)(-\mu - \lambda)(-Z - \lambda) \begin{vmatrix} -\mu - \sigma - \lambda & 0 & -\frac{\beta b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} \\ 0 & -X - \lambda & \frac{\beta b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} \\ 0 & \varepsilon & -Y - \lambda \end{vmatrix} -$$

$$(-\mu - \lambda)(0) \begin{vmatrix} 0 & -X - \lambda & \frac{\beta b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} \\ 0 & \varepsilon & -Y - \lambda \\ 0 & \psi & \omega \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\rho - \mu - \lambda)(-\mu - \lambda)(-Z - \lambda) \left[(-Y - \lambda) \begin{vmatrix} -\mu - \sigma - \lambda & 0 \\ 0 & -X - \lambda \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\beta b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} \right) \begin{vmatrix} -\mu - \sigma - \lambda & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{\beta b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} \right) \begin{vmatrix} 0 & -X - \lambda \\ 0 & \varepsilon \end{vmatrix} \right] = 0$$

$$(-\rho - \mu - \lambda)(-\mu - \lambda)(-Z - \lambda) \left[(-Y - \lambda)(-\mu - \sigma - \lambda)(-X - \lambda) \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\beta b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} \right) (-\mu - \sigma - \lambda)\varepsilon \right] = 0$$

$$(-\rho - \mu - \lambda)(-\mu - \lambda)(-Z - \lambda)(-\mu - \sigma - \lambda) \left[(-Y - \lambda)(-X - \lambda) - \frac{\beta b \varepsilon (\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} \right] = 0$$

dengan demikian diperoleh nilai eigen antara lain:

$$\lambda_1 = -\rho - \mu$$

$$\lambda_2 = -\mu$$

$$\lambda_3 = -Z$$

$$\lambda_4 = -\mu - \sigma$$

Lalu untuk nilai eigen selanjutnya diperoleh dengan melakukan perhitungan persamaan karakteristik yang tersisa yaitu

$$(-Y - \lambda)(-X - \lambda) - \frac{\beta b \varepsilon (\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} = 0$$

$$\lambda^2 + (X + Y)\lambda + XY - \frac{\beta b \varepsilon (\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} = 0$$

sehingga diperoleh:

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

dengan

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = X + Y$$

$$a_2 = XY - \frac{\beta b \varepsilon (\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)}$$

Karena nilai akar-akar persamaan karakteristik di atas sulit diperoleh, maka untuk mengetahui sifat kestabilan titik kesetimbangan E_0 dapat dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Berdasarkan kriteria tersebut, titik kesetimbangan E_0 akan bersifat stabil jika semua koefisien persamaan karakteristik positif dan lengkap. Oleh karena itu dengan mensubstitusikan nilai

parameter Tabel 4.2 pada koefisien persamaan karakteristik sehingga diperoleh hasil perhitungan yang ditunjukkan pada tabel Routh sebagai berikut:

Tabel 4. 2 Routh-Hurwitz E_0

λ^2	$a_0 = 1$	$a_2 = 0.28938945$	
λ	$a_1 = 2.1334$		
λ^0	$a_2 = 0.28938945$		

Karena nilai eigen bernilai negatif dan berdasarkan tabel 4.3 diketahui tidak terdapat perubahan tanda pada kolom pertama tabel 4.3, sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) pada model SEITR dengan pengaruh vaksin dan pengobatan bersifat stabil asimtotik lokal. Kestabilan titik E_0 berarti seiring berjalannya waktu, jumlah individu yang rentan tertular TBC akan semakin berkurang hingga penyakit akan hilang dalam suatu populasi.

2. Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Hasil linearisasi titik kesetimbangan bebas penyakit menggunakan matriks Jacobian yaitu sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dS^*}{dS^*} & \frac{dS^*}{dE^*} & \frac{dS^*}{dI^*} & \frac{dS^*}{dT^*} & \frac{dS^*}{dR^*} & \frac{dS^*}{dV^*} \\ \frac{dE^*}{dS^*} & \frac{dE^*}{dE^*} & \frac{dE^*}{dI^*} & \frac{dE^*}{dT^*} & \frac{dE^*}{dR^*} & \frac{dE^*}{dV^*} \\ \frac{dI^*}{dS^*} & \frac{dI^*}{dE^*} & \frac{dI^*}{dI^*} & \frac{dI^*}{dT^*} & \frac{dI^*}{dR^*} & \frac{dI^*}{dV^*} \\ \frac{dT^*}{dS^*} & \frac{dT^*}{dE^*} & \frac{dT^*}{dI^*} & \frac{dT^*}{dT^*} & \frac{dT^*}{dR^*} & \frac{dT^*}{dV^*} \\ \frac{dR^*}{dS^*} & \frac{dR^*}{dE^*} & \frac{dR^*}{dI^*} & \frac{dR^*}{dT^*} & \frac{dR^*}{dR^*} & \frac{dR^*}{dV^*} \\ \frac{dV^*}{dS^*} & \frac{dV^*}{dE^*} & \frac{dV^*}{dI^*} & \frac{dV^*}{dT^*} & \frac{dV^*}{dR^*} & \frac{dV^*}{dV^*} \end{bmatrix}$$

maka diperoleh:

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I^* - \mu - \sigma & 0 & -\beta S^* & 0 & 0 & \rho \\ \beta I^* & -X & \beta S^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi & \omega & -Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \delta & -\mu & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho - \mu \end{bmatrix}$$

Substitusi titik kesetimbangan endemik E_1 pada matriks $J(E_1)$. Lalu menentukan nilai eigen matriks $J(E_1)$ yang diperoleh dari $|J(E_1) - \lambda I| = 0$ sehingga

$$\begin{vmatrix} -\beta I^* - \mu - \sigma - \lambda & 0 & -\frac{XY}{\varepsilon} & 0 & 0 & \rho \\ \beta I^* & -X - \lambda & \frac{XY}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y - \lambda & -Z - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \psi & \omega & \delta & -\mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & -\rho - \mu - \lambda \\ \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Determinan matriks diperoleh menggunakan ekspansi kofaktor, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} & (-\rho - \mu - \lambda) \begin{vmatrix} -\beta I^* - \mu - \sigma - \lambda & 0 & -\frac{XY}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ \beta I^* & -X - \lambda & \frac{XY}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y - \lambda & -Z - \lambda & 0 \\ 0 & \psi & \omega & \delta & -\mu - \lambda \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ & - \rho \begin{vmatrix} \beta I^* & -X - \lambda & \frac{XY}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y - \lambda & -Z - \lambda & 0 \\ 0 & \psi & \omega & \delta & -\mu - \lambda \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-\rho - \mu - \lambda)(-\mu - \lambda) \begin{vmatrix} -\beta I^* - \mu - \sigma - \lambda & 0 & -\frac{XY}{\varepsilon} & 0 \\ \beta I^* & -X - \lambda & \frac{XY}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y - \lambda & 0 \\ 0 & \psi & \omega & -Z - \lambda \end{vmatrix} \\
& - \rho(0) \begin{vmatrix} \beta I^* & -X - \lambda & \frac{XY}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y - \lambda & -Z - \lambda \\ 0 & \psi & \omega & \delta \\ 0 & 0 & \gamma & \end{vmatrix} \\
& - (-\mu - \lambda)(0) \begin{vmatrix} \beta I^* & -X - \lambda & \frac{XY}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \varepsilon & -Y - \lambda & -Z - \lambda \\ 0 & \psi & \omega & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & \end{vmatrix} = 0 \\
& (-\rho - \mu - \lambda)(-\mu - \lambda)(-Z - \lambda) \begin{vmatrix} -\beta I^* - \mu - \sigma - \lambda & 0 & -\frac{XY}{\varepsilon} \\ \beta I^* & -X - \lambda & \frac{XY}{\varepsilon} \\ 0 & \varepsilon & -Y - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\
& (-\rho - \mu - \lambda)(-\mu - \lambda)(-Z - \lambda) \left[(-Y - \lambda) \begin{vmatrix} -\beta I^* - \mu - \sigma - \lambda & 0 \\ \beta I^* & -X - \lambda \end{vmatrix} \right. \\
& \quad \left. - \frac{XY}{\varepsilon} \begin{vmatrix} -\beta I^* - \mu - \sigma - \lambda & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{vmatrix} + \left(-\frac{XY}{\varepsilon} \right) \begin{vmatrix} \beta I^* & -X - \lambda \\ 0 & \varepsilon \end{vmatrix} \right] = 0 \\
& (-\rho - \mu - \lambda)(-\mu - \lambda)(-Z - \lambda) \left[(-Y - \lambda)(-\beta I^* - \mu - \sigma - \lambda)(-X - \lambda) \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{XY}{\varepsilon} \right) (\varepsilon)(-\beta I^* - \mu - \sigma - \lambda) - \left(\frac{XY}{\varepsilon} \right) (\varepsilon)(\beta I^*) \right] = 0 \\
& (-\rho - \mu - \lambda)(-\mu - \lambda)(-Z - \lambda) \left[(-Y - \lambda) \left[(-\beta I^* - \mu - \sigma - \lambda)((-Y - \lambda)(-X - \lambda) - XY) - XY\beta I^* \right] \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{XY}{\varepsilon} \right) (\varepsilon)(-\beta I^* - \mu - \sigma - \lambda) - \left(\frac{XY}{\varepsilon} \right) (\varepsilon)(\beta I^*) \right] = 0
\end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$\lambda_1 = -\rho - \mu$$

$$\lambda_2 = -\mu$$

$$\lambda_3 = -Z$$

Lalu nilai eigen selanjutnya diperoleh dengan melakukan perhitungan persamaan karakteristik yang tersisa yaitu

$$[-\beta I^* - \mu - \sigma - \lambda][(-Y - \lambda)(-X - \lambda) - XY] - XY\beta I^* = 0$$

$$\left[-\beta \left(\frac{b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - \theta}{XY\beta(\rho + \mu)}\right) - \mu - \sigma - \lambda\right][(-Y - \lambda)(-X - \lambda) - XY]$$

$$- XY\beta \left(\frac{b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - \theta}{XY\beta(\rho + \mu)}\right) = 0$$

$$\left(\frac{-b\varepsilon\beta\rho - b\varepsilon\beta\mu + \theta}{XY(\rho + \mu)} - \mu - \sigma - \lambda\right)(\lambda^2 + (X + Y)\lambda - XY - XY)$$

$$- XY \left(\frac{b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - \theta}{XY(\rho + \mu)}\right) = 0$$

$$\left(\frac{-b\varepsilon\beta\rho - b\varepsilon\beta\mu + \theta}{XY(\rho + \mu)} - \mu - \sigma - \lambda\right)(\lambda^2 + (X + Y)\lambda)$$

$$- XY \left(\frac{b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - \theta}{XY(\rho + \mu)}\right) = 0$$

$$\left(\frac{-b\varepsilon\beta\rho - b\varepsilon\beta\mu + \theta}{XY(\rho + \mu)} - \mu - \sigma\right)\lambda^2 + \left(\frac{-b\varepsilon\beta\rho - b\varepsilon\beta\mu + \theta}{XY(\rho + \mu)} - \mu - \sigma\right)(X + Y)\lambda$$

$$- \lambda^3 - (X + Y)\lambda^2 - XY \left(\frac{b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - \theta}{XY(\rho + \mu)}\right) = 0$$

$$- \lambda^3 + \left(\frac{-b\varepsilon\beta\rho - b\varepsilon\beta\mu + \theta}{XY(\rho + \mu)} - \mu - \sigma - X - Y\right)\lambda^2$$

$$+ \left(\frac{-b\varepsilon\beta\rho - b\varepsilon\beta\mu + \theta}{XY(\rho + \mu)} - \mu - \sigma\right)(X + Y)\lambda$$

$$- XY \left(\frac{b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - \theta}{XY(\rho + \mu)}\right) = 0$$

sehingga diperoleh

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

dengan

$$a_0 = -1$$

$$a_1 = \frac{-b\varepsilon\beta\rho - b\varepsilon\beta\mu + \theta}{XY(\rho + \mu)} - \mu - \sigma - X - Y$$

$$a_2 = \left(\frac{-b\varepsilon\beta\rho - b\varepsilon\beta\mu + \theta}{XY(\rho + \mu)} - \mu - \sigma \right) (X + Y)$$

$$a_3 = -XY \left(\frac{b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - \theta}{XY(\rho + \mu)} \right)$$

Karena nilai akar-akar persamaan karakteristik di atas sulit diperoleh, maka untuk mengetahui sifat kestabilan titik kesetimbangan E_1 dapat dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Berdasarkan kriteria tersebut, titik kesetimbangan E_1 akan bersifat stabil jika semua koefisien persamaan karakteristik positif dan lengkap. Oleh karena itu dengan mensubstitusikan nilai parameter Tabel 4.2 pada koefisien persamaan karakteristik sehingga diperoleh hasil perhitungan yang ditunjukkan pada tabel Routh sebagai berikut:

Tabel 4.3 Routh-Hurwitz E_1

λ^3	$a_0 = -1$	$a_2 = -0.728607056$	
λ^2	$a_1 = -2.474923885$	$a_3 = -0.02818377$	
λ	$b_1 = -0.7172193241$		
λ^0	$a_3 = -0.02818377$		

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa nilai eigen bernilai negatif, dan tidak terdapat perubahan tanda pada tabel 4.4 maka dapat disimpulkan bahwa E_1 bersifat stabil. Kestabilan titik E_1 berarti upaya pengendalian yang dilakukan telah berhasil dan populasi dapat mempertahankan tingkat penyakit yang diterima. Hal ini cukup membantu dalam mengatasi penyebaran yang tidak terkendali.

4.1.3 Menentukan Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar (R_0) diperoleh dengan menggunakan matriks *Next-Generation*. Berikut langkah memperoleh bilangan (R_0):

1. Mengambil kompartemen yang terlibat dalam penularan penyakit, dimana pada model ini yaitu kompartemen E dan I.

$$x = \begin{bmatrix} E \\ I \end{bmatrix}$$

2. Linearisasi pada titik kesetimbangan bebas penyakit menggunakan matriks Jacobian. Linearisasi dilakukan dengan membentuk matriks jacobian lalu mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{E} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dE}{dE} & \frac{dE}{dI} \\ \frac{dI}{dE} & \frac{dI}{dI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X & \beta S \\ \varepsilon & -Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{E} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X & \beta \left(\frac{b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} \right) \\ \varepsilon & -Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ I \end{bmatrix}$$

3. Dekomposisi matriks menjadi matriks F dan V

Matriks F merupakan transmisi penyakit (bertambahnya individu terinfeksi), sedangkan matriks V merupakan transisi penyakit (berkurangnya individu terinfeksi). Sehingga diperoleh matriks F dan V sebagai berikut:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \beta S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} X & 0 \\ -\varepsilon & Y \end{bmatrix}$$

4. Menentukan V^{-1}

Definisi matriks *next-generation* adalah $G = FV^{-1}$, sehingga diperoleh

$$V^{-1} = \frac{1}{|V|} \text{adj } V = \frac{1}{XY} \begin{bmatrix} Y & 0 \\ \varepsilon & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{X} & 0 \\ \frac{\varepsilon}{XY} & \frac{1}{Y} \end{bmatrix}$$

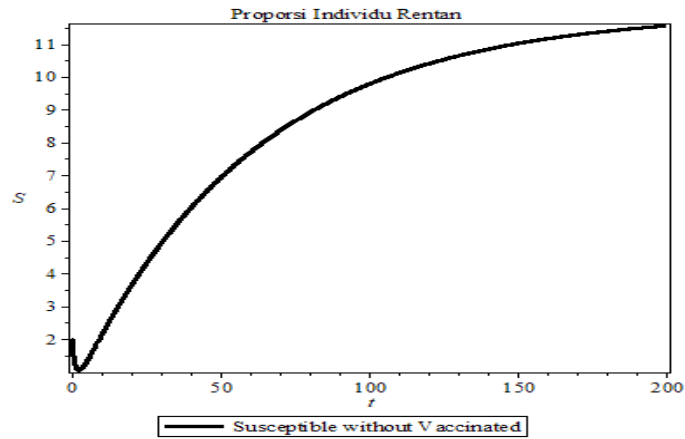
$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta b(\rho + \mu)}{\mu(\mu + \rho + \sigma)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{X} & 0 \\ \frac{\varepsilon}{XY} & \frac{1}{Y} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\beta b \varepsilon(\rho + \mu)}{\mu XY(\mu + \rho + \sigma)} & \frac{\beta b(\rho + \mu)}{\mu Y(\mu + \rho + \sigma)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena bilangan R_0 merupakan radius spektral (nilai eigen dominan) dari matriks *Next Generation*, maka diperoleh $R_0 = \frac{\beta b \varepsilon(\rho + \mu)}{\mu XY(\mu + \rho + \sigma)}$, dengan $X = \varepsilon + \psi + \mu$ dan $Y = \omega + \gamma + \mu + \mu_T$ maka dengan mensubstitusikan nilai $b = 0.2, \beta = 0.35, \varepsilon = 0.3, \mu = 0.0167, \rho = 0.6, \sigma = 0.3, X = 1.0167, Y = 1.1167$ yang diperoleh dari Tabel 4.2, dengan demikian diperoleh nilai $R_0 = 0.00015935377$. Karena nilai $R_0 < 1$ maka dapat disimpulkan bahwa jumlah kasus TBC akan semakin berkurang dari waktu ke waktu sehingga wabah TBC hilang dari populasi.

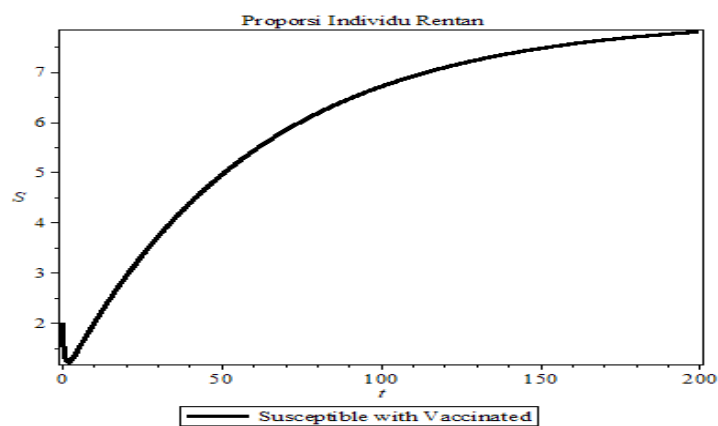
4.2 Simulasi Model SEITR dan Perbandingan Grafik Dinamik dengan Pengaruh Vaksin dan Pengobatan

Simulasi dilakukan untuk mengetahui gambaran penyebaran penyakit TBC dengan menggunakan model SEITR yang diberikan pengaruh vaksin dan pengobatan. Pada simulasi ini nilai parameter sesuai dengan Tabel 4.2. Dengan menginput model, nilai awal dan nilai parameter pada *software*, maka diperoleh hasil grafik sebagai berikut:



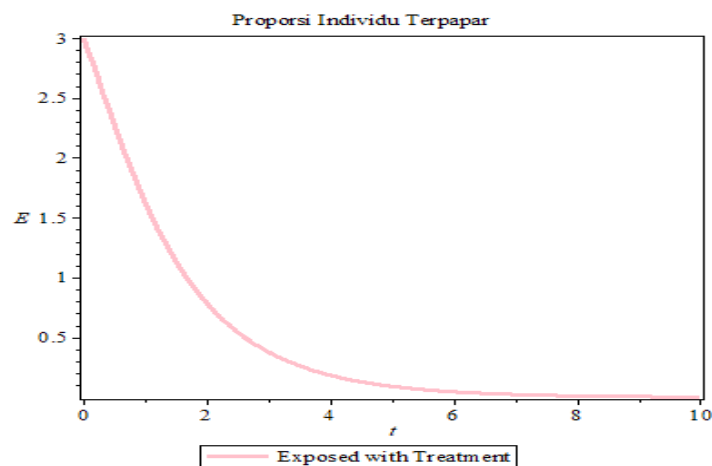
Gambar 4.2 Simulasi Perubahan Populasi S pada Model SEITR tanpa Pengaruh Vaksin dan Menggunakan Nilai Parameter $b = 0.2, \beta = 0.35, \mu = 0.0167$

Gambar 4.2 menunjukkan banyaknya individu rentan pada model SEITR yang tidak diberikan pengaruh vaksin pada individu yang rentan. Berdasarkan grafik yang diperoleh pada mulanya $t < 10$ individu rentan berkurang lalu perlahan meningkat hingga pada $t = 200$ proporsi individu rentan mencapai angka sekitar 11. Selanjutnya akan diberikan grafik proporsi populasi S pada model SEITR yang diberikan pengaruh vaksin.



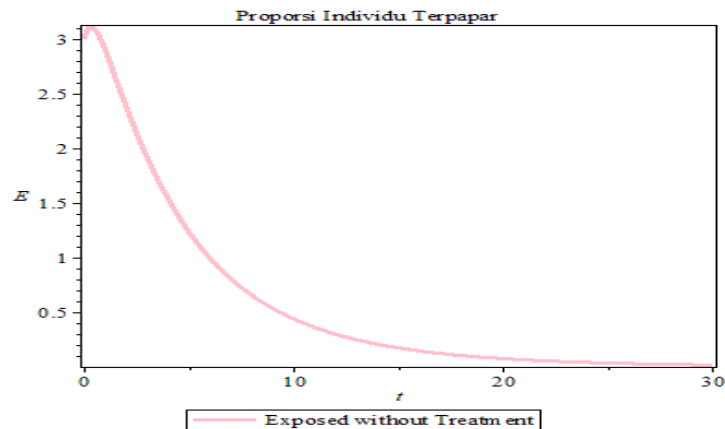
Gambar 4.3 Simulasi Perubahan Populasi S pada Model SEITR dengan Pengaruh Vaksin dan Menggunakan $b = 0.2, \beta = 0.35, \mu = 0.0167, \sigma = 0.3, \rho = 0.6$

Gambar 4.2 menunjukkan banyaknya individu rentan model SEITR yang diberikan pengaruh vaksin pada individu yang rentan. Berdasarkan grafik yang diperoleh pada mulanya individu rentan berkurang lalu perlahan meningkat hingga pada $t = 200$ proporsi individu rentan mencapai angka sekitar 8. Pada penelitian ini juga telah dilakukan simulasi dengan nilai $\sigma = 0.8$, hasil grafik menunjukkan bahwa pada mulanya individu rentan tertular berkurang lalu perlahan meningkat hingga mencapai angka 3. Sehingga dapat disimpulkan bahwa vaksin dapat memperlambat peningkatan individu rentan dengan berjalannya waktu. Dengan meningkatkan pemberian vaksin maka peningkatan individu rentan juga memerlukan waktu yang lebih lama.



Gambar 4.4 Simulasi Perubahan Populasi E pada Model SEITR dengan Pengaruh Pengobatan dan Menggunakan Nilai Parameter $\beta = 0.35$, $\mu = 0.0167$, $\varepsilon = 0.3$, $\psi = 0.7$

Gambar 4.4 menunjukkan banyaknya individu terpapar pada model SEITR yang diberikan pengaruh pengobatan pada individu yang terpapar. Berdasarkan grafik diperoleh bahwa individu terpapar terus mengalami penurunan hingga menjadi 0 pada sekitar $t = 10$. Selanjutnya diberikan grafik proporsi individu terpapar yang tanpa diberikan pengobatan.



Gambar 4.5 Simulasi Perubahan Populasi E pada Model SEITR dengan Pengaruh Pengobatan dan Menggunakan Nilai Parameter $\beta = 0.35$, $\mu = 0.0167$, $\varepsilon = 0.3$, $\psi = 0$

Gambar 4.5 menunjukkan banyaknya individu terpapar pada model SEITR yang tidak diberikan pengaruh pengobatan pada individu yang terpapar. Berdasarkan grafik diperoleh bahwa ketika $t = 1$ hingga $t = 2$ banyaknya individu terpapar mengalami peningkatan lalu terus mengalami penurunan. Namun dibandingkan dengan gambar 4.4, grafik pada gambar 4.5 mengalami penurunan cenderung lebih lambat. Individu terpapar mencapai angka 0 sekitar pada $t = 30$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa pengobatan pada populasi E dapat mengurangi jumlah individu terpapar TBC, sehingga dengan berkurangnya individu terpapar dapat mengakibatkan berkurangnya individu terinfeksi TBC.

4.3 Pengendalian Penyakit Tuberkulosis (TBC) dalam Kaidah Islam

TBC merupakan jenis penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium tuberculosis*. Penularan bakteri yang cukup mudah menjadi salah satu penyebab banyaknya penderita TBC, sehingga jika tidak dilakukan upaya

pengendalian dapat menjadi suatu wabah atau dalam Islam disebut dengan istilah *Tha'un*. Berdasarkan hadis yang diriwayatkan oleh Bukhari dan Muslim, *Tha'un* merupakan suatu peringatan dari Allah SWT untuk menguji hamba-Nya. Ujian tersebut digunakan sebagai bukti keimanan seorang hamba kepada Allah SWT. Dalam hadis juga disebutkan bahwa *Tha'un* sebaiknya dihindari, namun jika dihadapkan langsung dengan *Tha'un* maka hal yang harus dilakukan yaitu menerima dengan ikhlas dan sabar.

Islam mengajarkan beberapa cara dalam menghadapi penyakit menular seperti TBC yaitu dengan melakukan pengobatan bagi orang yang sakit. Dalam hadis riwayat muslim disebutkan bahwa “setiap penyakit memiliki obat. Jika ditemukan obat yang tepat maka penyakit tersebut dapat sembuh dengan izin Allah SWT”. Selain pengobatan bagi orang yang sakit, hal lain yang dapat dilakukan untuk menghadapi penyakit menular adalah dengan mengurangi peluang terjadinya penularan bakteri. Penularan bakteri terjadi karena adanya interaksi antara orang yang rentan tertular dan orang yang terinfeksi bakteri. Rasulullah telah menganjurkan untuk menghindar dan menjauh dari wabah. Dalam hadis riwayat Bukhari dan Muslim juga telah dijelaskan bahwa sikap yang dilakukan jika terjadi *Tha'un* di suatu tempat adalah dengan menghindari *Tha'un*.

Berdasarkan analisis perilaku model SEITR dengan pengaruh vaksin dan pengobatan yang telah dilakukan, dapat diketahui bahwa dengan seiring berjalannya waktu penyakit TBC akan hilang dalam populasi dengan dilakukan upaya pengendalian penyebarannya. Pada model ini upaya pengendalian berupa vaksinasi dan keberhasilan pengobatan. Pemberian vaksin bertujuan untuk memberikan kekebalan pada tubuh sehingga dapat mengurangi jumlah individu

rentan tertular bakteri. Dengan kata lain pemberian vaksin dapat mengurangi individu terpapar maupun terinfeksi bakteri TBC. Dengan demikian upaya vaksinasi merupakan upaya memperkecil peluang penularan bakteri. Upaya pengendalian lain yaitu tingginya keberhasilan pengobatan. TBC merupakan penyakit yang dapat disembuhkan dengan dilakukan pengobatan yang intensif. Oleh karena itu untuk mengurangi jumlah kasus TBC maka keberhasilan pengobatan bagi penderita TBC harus tinggi. Hal tersebut dapat dicapai dengan lengkapnya pengobatan yang dilakukan bagi penderita.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada BAB IV, maka dapat diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Berdasarkan analisis dinamik model matematika penyebaran TBC pada populasi *Susceptible, Exposed, Infected, Treatment*, dan *Recovered* (SEITR) dengan pengaruh vaksin dan pengobatan diperoleh:

- a. Dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) dan titik kesetimbangan endemik (E_1)

$$E_0 = \left(\frac{b(\rho+\mu)}{\mu(\mu+\rho+\sigma)}, 0, 0, 0, \frac{\sigma b}{\mu(\mu+\rho+\sigma)} \right) \text{ dan}$$

$$E_1 = \left(\frac{XY}{\beta\varepsilon}, \frac{b\varepsilon\beta\rho+b\varepsilon\beta\mu-\theta}{X\beta\varepsilon(\rho+\mu)}, \frac{b\varepsilon\beta\rho+b\varepsilon\beta\mu-\theta}{XY\beta(\rho+\mu)}, \frac{\theta(\psi Y+\omega\varepsilon)}{XY\beta\varepsilon(\mu+\rho)Z}, \frac{\theta(\gamma\varepsilon Z+\delta Y\psi+\delta\omega\varepsilon)}{XY\beta\varepsilon(\rho+\mu)Z} \right)$$

$$\text{dengan } \theta = (b\varepsilon\beta\rho + b\varepsilon\beta\mu - (\mu^2 XY + \mu\rho XY + \sigma\mu XY))$$

- b. Kestabilan titik kesetimbangan ditentukan oleh nilai eigen yang dan berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz. Kedua titik kesetimbangan bersifat stabil yang artinya dalam populasi terdapat TBC namun dengan seiring berjalannya waktu penyakit TBC akan hilang dalam populasi. Oleh karena itu perlu dilakukan upaya pengendalian penularan.

- c. Bilangan reproduksi dasar yang diperoleh yaitu $R_0 = \frac{\beta b\varepsilon(\rho+\mu)}{\mu XY(\mu+\rho+\sigma)}$ dengan mensubstitusikan nilai parameter maka dapat diperoleh nilai R_0 sebesar

0.00015935377 dengan kata lain $R_0 < 1$ yang artinya penyakit TBC akan hilang dalam populasi

2. Berdasarkan grafik yang diperoleh dapat diketahui pengaruh vaksin dan pengobatan pada model. Dengan memberikan vaksin pada individu S maka laju peningkatan individu rentan menjadi lebih lambat dari pada individu rentan yang tidak diberikan vaksin. Semakin tinggi vaksinasi maka laju peningkatan individu rentan semakin lambat. Sedangkan untuk pengobatan pada populasi E juga memengaruhi laju penurunan individu E . Adanya pengobatan yang diberikan pada populasi E , maka laju penurunan proporsi individu E semakin cepat.

5.2 Saran

Pada Penelitian ini telah dibahas model matematika penyebaran penyakit TBC pada populasi *Susceptible*, *Exposed*, *Infected*, *Treatment* dan *Recovered* (SEITR) yang diberikan pengaruh vaksin dan pengobatan. Pada penelitian ini juga telah dilakukan analisis perilaku model berupa pencarian titik kesetimbangan, analisis kestabilan titik kesetimbangan dan bilangan reproduksi dasar. Pada penelitian selanjutnya diharapkan dapat dilakukan kontrol optimal pada model. Kontrol yang diberikan dapat berupa vaksin dan pengobatan atau dapat diberikan kontrol yang lain, sehingga dapat diketahui upaya paling efektif dalam menurunkan kasus TBC.

DAFTAR PUSTAKA

- Al Qur'an dan Terjemahannya*. (2019). Kementerian Agama RI.
- Albi Anggito, J. S. (2018). *Metodologi penelitian kualitatif*. CV Jejak (Jejak Publisher). <https://books.google.co.id/books?id=59V8DwAAQBAJ>
- Amri, N. A. (2020). *Analisis Model SIR (Susceptible Infected Recovered) Dalam Penyebaran Penyakit Kanker Serviks di Kota Palopo*. Universitas Cokroaminoto Palopo.
- Badan Pusat Statistik (BPS). (n.d.). *Laju Kelahiran dan Kematian Kota Malang*. <https://www.bps.go.id/>.
- Bhunu, C. P., Garira, W., Mukandavire, Z., & Zimba, M. (2008). Tuberculosis transmission model with chemoprophylaxis and treatment. *Bulletin of Mathematical Biology*, 70(4), 1163–1191. <https://doi.org/10.1007/s11538-008-9295-4>
- Chasanah, S. L., Ferdias, P., Nurvazly, D. E., & History, A. (2021). The analysis of the sensitivity of vaccination parameters in a tuberculosis transmission model. *Desimal: Jurnal Matematika*, 4(1), 47–56. <https://doi.org/10.24042/djm>
- Daim. (2020, May 7). *5 Sikap Nabi Menghadapi Wabah dan Penderita Penyakit Menular*. <https://adikarso.kec-kebumen.kebumenkab.go.id/>.
- Dr. Rukin, S. P. M. S. (2019). *Metodologi Penelitian Kualitatif Edisi Revisi*. Jakad Media Publishing. <https://books.google.co.id/books?id=I-E2EAAAQBAJ>
- Firdaus. (2020). Virus Corona Dalam Perspektif Sunnah. *Jurnal Kajian Al-Quran & Tafsir*, 5(1), 13–29.
- Fitria, V. A. (2011). Model Matematika Terhadap Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Rumah Sakit Paru Batu. *Jurnal Ilmiah Teknologi Informasi Asia*, 5(2), 60–67.
- Hamidi, A., & Nuryansah, M. (2021). Qashash Al-Qur'an: Kajian Do'a Nabi Ayyub Dalam QS Al-Anbiya 83-84 dan Kontekstualisasinya di Masa Pandemi. *Kontemplasi: Jurnal Imu-Ilmu Ushuluddin*, 09. <https://doi.org/10.21274>
- Hasnawati, Ratianingsih, R., & W Puspita, J. (2017). Analisis Kestabilan Model Matematika Pada Penyebaran Kanker Serviks Menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz. In *JIMT* (Vol. 14, Issue 1).
- Indrawati, Datau, F., Akuba, P., & Anani, I. (2020). *Pemodelan Matematika 318 Universitas Negeri Gorontalo Model Epidemik SIR Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Vaksinasi*. 318–330.

- Kurniawan, A. (2020). *Ini Hadits Rasulullah Seputar Wabah Penyakit, Thaun, atau Covid-19*. <https://Islam.Nu.or.Id>. <https://islam.nu.or.id/ilmu-hadits/ini-hadits-rasulullah-seputar-wabah-penyakit-thaun-atau-covid-19-yfSfu>
- Lestari, D., & Widodo. (2012). Linearisasi Sistem Persamaan Diferensial Parsial Pada Model Epidemi Sir Berdasarkan Kelompok Umur. *Universitas Gadjah Mada*.
- Mishra, B. K., & Srivastava, J. (2014). Mathematical model on pulmonary and multidrug-resistant tuberculosis patients with vaccination. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 22(2), 311–316. <https://doi.org/10.1016/j.joems.2013.07.006>
- Na'imah, S. (2023). *Berbagai Macam Pengobatan Alami untuk Mengatasi Gejala TBC*. <https://Hellosehat.Com/>.
- Perhimpunan Dokter Paru Indonesia. (2021). Tuberkulosis Pedoman Diagnosis dan Penatalaksanaan di Indonesia. In *Perhimpunan Dokter Paru Indonesia* (Vol. 001, Issue 2014).
- Pramono, J. S. (2021). Tinjauan Literatur: Faktor Risiko Peningkatan Angka Insidensi Tuberkulosis. *Jurnal Ilmiah Pannmed*, 16(1), 106–113. <http://ojs.poltekkes-medan.ac.id/pannmed/article/view/1006>
- Putra, R. T., Sukatik, & Sri Nita. (2016). Kestabilan Model Epidemi Seir dengan Matriks Hurwitz. *Jurnal Ilmiah Poli Rekayasa*, 11(2), 74. <https://doi.org/10.30630/jipr.11.2.76>
- Ramadhan, M. R., Waluya, S. B., & Kharis, M. (2018). Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Strategi DOTS. *Ujm*, 1(2252), 125–130.
- Resky, M. S. (2020). *Surat Al-Anbiya Ayat 83-84; Terjemahan dan Tafsir Al-Qur'an*. <https://Pecihitam.Org>. <https://pecihitam.org/surah-hud-ayat-64-68-terjemahan-dan-tafsir-al-quran/>
- Setyawan, A., Adi M, M. S., & Widiyanarko, B. (2020). Audit Pelaksanaan Program Imunisasi BCG di Puskesmas Kota Semarang Tahun 2019 (Studi pada Puskesmas Rowosari dan Puskesmas Tlogosari Kulon). *Jurnal Kesehatan*, 8(1), 33–38. <https://doi.org/10.25047/j-kes.v8i1.138>
- Side, S., Sanusi, W., & Setiawan, N. F. (2016). Analisis dan Simulasi Model SITR pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar Analysis and Simulation Of SITR Model on Tuberculosis in Makassar City. *Jurnal Sainsmat*, V(2), 191–204. <https://ojs.unm.ac.id/sainsmat/article/download/6448/3681>
- Soraya, D. A. (2020, June 19). *Bagaimana Seharusnya Sikap Muslim Menghadapi Wabah?* <https://Islamdigest.Republika.Co.Id/>.

Werdhani, R. A. (2002). Patofisiologi, Diagnosis, dan Klasifikasi Tuberkulosis. *Jakarta: Departemen Ilmu Kedokteran Komunitas, Okupasi Dan Keluarga FKUI*, 1–18.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Script Analisis Dinamik Model SEITR dengan Pengaruh Vaksin dan Pengobatan

ANALISIS DINAMIK MODEL SEITR DENGAN PENGARUH VAKSIN DAN PENGOBATAN			
ANALISIS DINAMIK MODEL SEITR DENGAN PENGARUH VAKSIN DAN PENGOBATAN			(1)
1. TITIK KESETIMBANGAN			
1. TITIK KESETIMBANGAN			(2)
<pre>restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) : dS := b - β·S·In - μ·S - σ·S + ρ·V : dE := β·S·In - X·E : dIn := e·E - Y·In : dT := φ·E + ω·In - Z·T : dR := γ·In + δ·T - μ·R : dV := σ·S - ρ·V - μ·V : TTK := solve({dS, dE, dIn, dT, dR, dV}, {S, E, In, T, R, V}) : DFE := TTK[1] ;</pre>			
$\left\{ E=0, In=0, R=0, S=\frac{b(\mu+\rho)}{\mu(\mu+\rho+\sigma)}, T=0, V=\frac{b\sigma}{\mu(\mu+\rho+\sigma)} \right\}$			(3)
END := TTK[2] ;			
$\left\{ E=-\frac{XY\mu^2+XY\mu\rho+XY\mu\sigma-b\beta\epsilon\mu-b\beta\epsilon\rho}{X\beta(\mu+\rho)\epsilon}, In=-\frac{XY\mu^2+XY\mu\rho+XY\mu\sigma-b\beta\epsilon\mu-b\beta\epsilon\rho}{XY\beta(\mu+\rho)}, R=\right.$ $\left.-\frac{(XY\mu^2+XY\mu\rho+XY\mu\sigma-b\beta\epsilon\mu-b\beta\epsilon\rho)(Y\delta\phi+Z\epsilon\gamma+\delta\epsilon\omega)}{XY\beta(\mu+\rho)Z\epsilon\mu}, S=\frac{XY}{\beta\epsilon}, T=\right.$ $\left.-\frac{(XY\mu^2+XY\mu\rho+XY\mu\sigma-b\beta\epsilon\mu-b\beta\epsilon\rho)(Y\phi+\epsilon\omega)}{XY\beta(\mu+\rho)Z\epsilon}, V=\frac{XY\sigma}{\beta\epsilon(\mu+\rho)} \right\}$			(4)
2. ANALISIS KESTABILAN TITIK KESETIMBANGAN BEBAS PENYAKIT			
2. ANALISIS KESTABILAN TITIK KESETIMBANGAN BEBAS PENYAKIT			(5)
<pre>A := Matrix(jacobian([dS, dE, dIn, dT, dR, dV], [S, E, In, T, R, V])) : JacA := subs(DFE, A) : eigenvalues(JacA) ;</pre>			
$-Z, \frac{1}{2} \frac{1}{\mu(\mu+\rho+\sigma)} \left(-X\mu^2 - X\mu\rho - X\mu\sigma - Y\mu^2 - Y\mu\rho - Y\mu\sigma \right.$ $+ (X^2\mu^4 + 2X^2\mu^3\rho + 2X^2\mu^3\sigma + X^2\mu^2\rho^2 + 2X^2\mu^2\rho\sigma + X^2\mu^2\sigma^2 - 2XY\mu^4 - 4XY\mu^3\rho - 4XY\mu^3\sigma - 2XY\mu^2\rho^2 - 4XY\mu^2\rho\sigma$ $- 2XY\mu^2\sigma^2 + Y^2\mu^4 + 2Y^2\mu^3\rho + 2Y^2\mu^3\sigma + Y^2\mu^2\rho^2 + 2Y^2\mu^2\rho\sigma + Y^2\mu^2\sigma^2 + 4b\beta\epsilon\mu^3 + 8b\beta\epsilon\mu^2\rho + 4b\beta\epsilon\mu^2\sigma + 4b\beta\epsilon\mu\rho^2 + 4b\beta\epsilon\mu\rho\sigma$ $\left. \right), -\frac{1}{2} \frac{1}{\mu(\mu+\rho+\sigma)} \left(X\mu^2 + X\mu\rho + X\mu\sigma + Y\mu^2 + Y\mu\rho + Y\mu\sigma \right.$ $+ (X^2\mu^4 + 2X^2\mu^3\rho + 2X^2\mu^3\sigma + X^2\mu^2\rho^2 + 2X^2\mu^2\rho\sigma + X^2\mu^2\sigma^2 - 2XY\mu^4 - 4XY\mu^3\rho - 4XY\mu^3\sigma - 2XY\mu^2\rho^2 - 4XY\mu^2\rho\sigma$ $- 2XY\mu^2\sigma^2 + Y^2\mu^4 + 2Y^2\mu^3\rho + 2Y^2\mu^3\sigma + Y^2\mu^2\rho^2 + 2Y^2\mu^2\rho\sigma + Y^2\mu^2\sigma^2 + 4b\beta\epsilon\mu^3 + 8b\beta\epsilon\mu^2\rho + 4b\beta\epsilon\mu^2\sigma + 4b\beta\epsilon\mu\rho^2 + 4b\beta\epsilon\mu\rho\sigma$ $\left. \right), -\mu - \rho - \sigma, -\mu, -\mu$			(6)
3. ANALISIS KESTABILAN TITIK KESETIMBANGAN ENDEMIK			
3. ANALISIS KESTABILAN TITIK KESETIMBANGAN ENDEMIK			(7)
<pre>A := Matrix(jacobian([dS, dE, dIn, dT, dR, dV], [S, E, In, T, R, V])) : JacB := subs(END, A) : eigenvalues(JacB) ;</pre>			
$-\mu, \text{RootOf}\left((XY\mu+XY\rho)_Z^4 + (X^2Y\mu+X^2Y\rho+XY^2\mu+XY^2\rho+XY\mu^2+2XY\mu\rho+XY\rho^2+XY\rho\sigma+b\beta\epsilon\mu+b\beta\epsilon\rho)_Z^3 + (X^2Y\mu^2\right.$ $+ 2X^2Y\mu\rho+X^2Y\rho^2+X^2Y\rho\sigma+XY^2\mu^2+2XY^2\mu\rho+XY^2\rho^2+XY^2\rho\sigma+Xb\beta\epsilon\mu+Xb\beta\epsilon\rho+Yb\beta\epsilon\mu+Yb\beta\epsilon\rho+b\beta\epsilon\mu^2+2b\beta\epsilon\mu\rho$ $+ b\beta\epsilon\rho^2)_Z^2 + (-X^2Y^2\mu^2-X^2Y^2\mu\rho-X^2Y^2\mu\sigma+XYb\beta\epsilon\mu+XYb\beta\epsilon\rho+Xb\beta\epsilon\mu^2+2Xb\beta\epsilon\mu\rho+Xb\beta\epsilon\rho^2+Yb\beta\epsilon\mu^2+2Yb\beta\epsilon\mu\rho$ $+ Yb\beta\epsilon\rho^2)_Z - X^2Y^2\mu^3 - 2X^2Y^2\mu^2\rho - X^2Y^2\mu^2\sigma - X^2Y^2\mu\rho^2 - X^2Y^2\mu\rho\sigma + XYb\beta\epsilon\mu^2 + 2XYb\beta\epsilon\mu\rho + XYb\beta\epsilon\rho^2, -Z$			(8)
KRITERIA ROUTH HURWITZ			
KRITERIA ROUTH HURWITZ			(11)
BEBAS PENYAKIT			
BEBAS PENYAKIT			(12)
<pre>a0 := 1; a1 := X+Y; a2 := X·Y-$\frac{b\cdot\beta\cdot\epsilon\cdot(\rho+\mu)}{\mu\cdot(\mu+\rho+\sigma)}$;</pre>			
$\frac{1}{1.588371429}$ 0.6282109279			(13)
λ^2	$a0$	$a2$	
λ	$a1$		
λ^0	$a2$		

ENDEMIK

$$\theta := b \cdot \varepsilon \cdot \beta \cdot \rho + b \cdot \varepsilon \cdot \beta \cdot \mu - \left(\mu^2 \cdot X \cdot Y + \mu \cdot \rho \cdot X \cdot Y + \sigma \cdot \mu \cdot X \cdot Y \right); \quad \theta := -0.008205203956 \quad (14)$$

$$\text{ENDEMIK} \quad (15)$$

$$a0 := -1;$$

$$a1 := \frac{-b \cdot \beta \cdot \varepsilon \cdot \rho - b \cdot \varepsilon \cdot \beta \cdot \mu + \theta}{X \cdot Y \cdot (\rho + \mu)} - \mu - \sigma - X - Y;$$

$$a2 := \left(\frac{-b \cdot \beta \cdot \varepsilon \cdot \rho - b \cdot \varepsilon \cdot \beta \cdot \mu + \theta}{X \cdot Y \cdot (\rho + \mu)} - \mu - \sigma \right) \cdot (X + Y);$$

$$a3 := -X \cdot Y \cdot \left(\frac{b \cdot \beta \cdot \varepsilon \cdot \rho + b \cdot \varepsilon \cdot \beta \cdot \mu - \theta}{X \cdot Y \cdot (\rho + \mu)} \right);$$

$$-1$$

$$-1.923919601$$

$$-0.5329751307$$

$$-0.01335752162 \quad (16)$$

λ^3	$a0$	$a2$	$a4$	
λ^2	$a1$	$a3$		
λ	$b1$			
λ^0	$a3$			

BILANGAN REPRODUKSI DASAR

$$A := \text{Matrix}(\text{jacobian}([dE, dI], [E, I]));$$

$$\begin{bmatrix} -X & \beta S \\ \varepsilon & -Y \end{bmatrix}$$

$$(13)$$

$$\text{JacA} := \text{subs}(DFE, A);$$

$$\begin{bmatrix} -X & \frac{\beta b (\mu + \rho)}{\mu (\mu + \rho + \sigma)} \\ \varepsilon & -Y \end{bmatrix}$$

$$(14)$$

$$F := \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta \cdot b \cdot (\mu + \rho)}{(\rho + \sigma + \mu) \cdot \mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta b (\mu + \rho)}{\mu (\mu + \rho + \sigma)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(15)$$

$$V := \begin{bmatrix} X & 0 \\ -\varepsilon & Y \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ -\varepsilon & Y \end{bmatrix}$$

$$(16)$$

$$VI := \text{inverse}(V);$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{X} & 0 \\ \frac{\varepsilon}{XY} & \frac{1}{Y} \end{bmatrix}$$

$$(17)$$

$$a := \text{evalm}(F.VI);$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\beta b (\mu + \rho) \varepsilon}{\mu (\mu + \rho + \sigma) XY} & \frac{\beta b (\mu + \rho)}{\mu (\mu + \rho + \sigma) Y} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(18)$$

$$R0 := \text{linalg}['\text{eigenvalues}'];$$

$$R0 := \text{factor}(\text{eigenvalues}(a)[1]);$$

$$\frac{\beta b (\mu + \rho) \varepsilon}{\mu (\mu + \rho + \sigma) XY}$$

$$(19)$$

Lampiran 2 Script MAPLE Simulasi Model SEITR dengan Pengaruh Vaksin dan Pengobatan

```

restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) :
ode1 := diff(S(t), t) = b - β · S(t) · In(t) - μ · S(t) :
ode2 := diff(E(t), t) = β · S(t) · In(t) - X · E(t) :
ode3 := diff(In(t), t) = e · E(t) - Y · In(t) :
ode4 := diff(T(t), t) = φ · E(t) + ω · In(t) - Z · T(t) :
ode5 := diff(R(t), t) = γ · In(t) + δ · T(t) - μ · R(t) :
inits := [ S(0) = 2, E(0) = 3, In(0) = 2.5, T(0) = 2, R(0) = 3 ] :
unprotect(gamma) : gamma := 'gamma': with(VectorCalculus) : local Psi :
b := 0.2 : β := 0.35 : μ := 0.0167 : μT := 0.3 : e := 0.3 : φ := 0.7 : ω := 0.55 : δ := 0.91 : gamma := 0.25 : X := 1.0167 : Y := 1.1167 : Z := 0.9267 :

plot1 := DEplot([ode1, ode2, ode3, ode4, ode5], [S, E, In, T, R], t = 0 .. 200, [inits], scene = [t, S], title = "Proporsi Individu Rentan", linecolour = black, myopts) :
display(plot1);
plot2 := DEplot([ode1, ode2, ode3, ode4, ode5], [S, E, In, T, R], t = 0 .. 10, [inits], scene = [t, E], title = "Proporsi Individu Terpapar", linecolour = pink, myopts) :
display(plot2);

restart : with(plots) : with(DEtools) : with(linalg) :
ode1 := diff(S(t), t) = b - β · S(t) · In(t) - μ · S(t) - σ · S(t) + ρ · V(t) :
ode2 := diff(E(t), t) = β · S(t) · In(t) - X · E(t) :
ode3 := diff(In(t), t) = e · E(t) - Y · In(t) :
ode4 := diff(T(t), t) = φ · E(t) + ω · In(t) - Z · T(t) :
ode5 := diff(R(t), t) = γ · In(t) + δ · T(t) - μ · R(t) :
ode6 := diff(V(t), t) = σ · S(t) - ρ · V(t) - μ · V(t) :
inits := [ S(0) = 2, E(0) = 3, In(0) = 2.5, T(0) = 2, R(0) = 3, V(0) = 1 ] :
unprotect(gamma) : gamma := 'gamma': with(VectorCalculus) : local Psi :
b := 0.2 : σ := 0.8 : β := 0.35 : μ := 0.0167 : μT := 0.3 : e := 0.3 : φ := 0 : ω := 0.55 : δ := 0.91 : gamma := 0.25 : X := 0.3167 : Y := 0.8667 : Z := 0.9267 : ρ := 0.3 :

myopts := stepsize = 0.01, arrows = NONE :
plot1 := DEplot([ode1, ode2, ode3, ode4, ode5, ode6], [S, E, In, T, R, V], t = 0 .. 200, [inits], scene = [t, S], title = "Proporsi Individu Rentan", linecolour = black, myopts) :
display(plot1);
plot2 := DEplot([ode1, ode2, ode3, ode4, ode5, ode6], [S, E, In, T, R, V], t = 0 .. 30, [inits], scene = [t, E], title = "Proporsi Individu Terpapar", linecolour = pink, myopts) :
display(plot2);

```

RIWAYAT HIDUP



Sabdah Nur Ulfa, lahir di Kabupaten Malang pada tanggal 27 Agustus 2000, biasa dipanggil Sabdah atau Ulfa. Penulis tinggal di Desa Sepanjang RT 09 RW 01 Kec. Gondanglegi Kab. Malang. Anak pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Japar dan Ibu Maisaro.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Mambaul Ulum Sepanjang dan lulus pada tahun 2013. Lalu melanjutkan pendidikan menengah pertama di Madrasah Tsanawiyah (MTs.) Khairuddin Gondanglegi, lulus pada tahun 2016. Kemudian melanjutkan pendidikan menengah atas di Madrasah Aliyah (MA) Khairuddin Gondanglegi dan lulus pada tahun 2019. Setelah lulus penulis melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SNMPTN dan mengambil Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Sabdah Nur Ulfa
NIM : 19610031
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model *Susceptible, Exposed, Infected, Treatment, Recovered* (SEITR) pada Tuberkulosis dengan Pengaruh Vaksin dan Pengobatan
Pembimbing I : Juhari, M.Si.
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	13 Februari 2023	Konsultasi Bab I	1.
2.	01 Maret 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	13 Maret 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	20 Maret 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	21 Maret 2023	Konsultasi Keagamaan Bab I dan II	5.
6.	27 Maret 2023	Konsultasi Keagamaan Bab I dan II	6.
7.	29 Maret 2023	Konsultasi Keagamaan Bab I dan II	7.
8.	31 Maret 2023	ACC Keagamaan Bab I, dan II	8.
9.	05 April 2023	ACC untuk Seminar Proposal	9.
10.	14 Agustus 2023	Konsultasi Bab IV	10.
11.	01 September 2023	Konsultasi Bab IV	11.
12.	27 September 2023	Konsultasi Bab IV	12.
13.	02 Oktober 2023	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	03 Oktober 2023	Konsultasi Keagamaan Bab IV	14.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

15.	05 Oktober 2023	Konsultasi Keagamaan Bab IV	15.
16.	06 Oktober 2023	ACC Keagamaan Bab IV	16.
17.	09 Oktober 2023	ACC untuk Seminar Hasil	17.
18.	28 November 2023	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	18.
19.	04 Desember 2023	ACC untuk Sidang Skripsi	19.
20.	22 Desember 2023	ACC Keseluruhan	20.

Malang, 26 Desember 2023

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Ely Susanti, M.Sc

NIP. 19741129 200012 2 005