STUDI SOLUSI PERSAMAAN DIRAC PADA SUMUR POTENSIAL BERGERAK SEBAGIAN

SKRIPSI

Oleh:
AINAYAH SYAFIRAH SALSABILA H.I
NIM. 18640075

PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

HALAMAN PENGAJUAN

STUDI SOLUSI PERSAMAAN DIRAC PADA SUMUR POTENSIAL
BERGERAK SEBAGIAN

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains Dan Teknologi
Universitas Islam Negri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana (S.Si)

Oleh:
AINAYAH SYAFIRAH SALSABILA H.I
NIM. 18640075

PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGRI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

HALAMAN PERSETUJUAN

STUDI SOLUSI PERSAMAAN DIRAC PADA SUMUR POTENSIAL
BERGERAK SEBAGIAN

Diperoleh untuk pendaftaran

SKRIPSI

Oleh:

Ainayah Syafirah Salsabila H.I
NIM. 18640075

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Pada tanggal, 05 Oktober 2023

Pembimbing I	Pembimbing II
Arista Romadani, M.Sc	Muthmainnah, M.Si
NIP. 19900905 201903 1 018	NIP. 19860325 201903 2 009

Mengetahui,
Ketua Program Studi

Dr. Imam Tazi, M.Si
NIP. 19740730 200312 1 002

HALAMAN PENGESAHAN

STUDI SOLUSI PERSAMAAN DIRAC PADA SUMUR POTENSIAL
BERGERAK SEBAGIAN

SKRIPSI

Oleh:

Ainayah Syafirah Salsabila H.I
NIM: 18640075

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Pada tanggal, 05 Oktober 2023

Penguji Utama	Dr. Erna Hastuti, M.Si NIP. 19811119 200801 1 009	
Ketua Penguji	Muhammad Taufiqi, M.Si LB. 64021	
Sekretaris Penguji	Arista Romadani, M.Sc NIP. 19900905 201903 1 018	
Anggota Penguji	Muthmainnah, M.Si NIP. 19860325 201903 2 009	

Mengesahkan,
Ketua Program Studi

Dr. Imam Tazi, M.Si
NIP. 19740730 200312 1 002

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : Ainayah Syafirah Salsabila H.I

NIM : 18640075

Jurusan : Fisika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Penelitian : Studi Solusi Persamaan Dirac Pada Sumur Potensial Bergerak Sebagian

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil-alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil contekan, maka saya berssedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 18 Desember 2023
Yang Membuat Pernyataan

METERAI TEMPEL
10000
8E161AJX038002689

Ainayah Syafirah Salsabila H.I
NIM. 18640075

MOTTO

“Apabila kamu sudah memutuskan untuk menekuni suatu bidang. Jadilah orang yang konsisten itu adalah kunci keberhasilan yang sebenarnya”

B.J Habibie

“Sang juara bukanlah mereka yang tak terkalahkan. Melainkan yang sanggup bangkit dari pahitnya kekalahan”

Najwa Shihab

"وَمَنْ يَسْتَعْفِفْ يُعِفَّهُ اللَّهُ, وَمَنْ يَسْتَغْنِ يُغْنِهِ اللَّهُ, وَمَنْ يَتَصَبَّرْ يُصَبِّرْهُ اللَّه, وَمَا أُعْطِيَ أحَدُ عَطَاءً خَيْرًا وَاوْسَعَ مِن الصَّبْرِ"

“Barangsiapa yang berusaha menjaga diri, maka allah akan menjaganya, barangsiapa yang berusaha merasa cukup, maka Allah mencukupinya. Barangsiapa yang berusaha bersabar, maka Allah akan menjadikan bisa bersabar dan tidak ada seorangpun yang dianugerahi sesuatu yang melebihi kesabaran”

HR Bukhari NO.1469

HALAMAN PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin, dengan mengucapkan rasa syukur atas rahmat Allah SWT. Sebagai ungkapan terimakasih, skripsi ini saya persembahkan untuk :

1. Kedua orang tuaku tersayang ibu Rohimah dan Bapak Suhartijo yang selalu mendo'akan, mendukung, dan selalu memberi semangat. Terimakasih atas segala kasih sayang serta menjadi alasan untuk selalu semangat.
2. Untuk keluarga besar saya yang selalu mendukung dan memberikan semangat kepada saya.
3. Dosen Pembimbing saya bapak Arista Romadani, M.Sc dan Ibu Muthmainnah, M.Si yang senantiasa sabar membimbing saya dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Serta terimakasih kepada Bapak/Ibu dosen yang telah membimbing dan mendampingi saya dalam menuntut ilmu di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulisa sebutkan satu per satu.
5. Terakhir untuk diri saya sendiri, terimakasih telah terus konsisten, terimakasih telah bangkit dan berjuang untuk menyelesaikan penulisan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Puji syukur atas kehadirat Allah SWT yang senantiasa memberikan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi yang berjudul “Studi Solusi Persamaan Dirac Pada Sumur Potensial Bergerak Sebagian”. Sholawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun manusia menuju zaman zakiyyah, yakni Addinul Islam Wal Iman.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan Skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan Skripsi. Ucapan terimakasih penulis sampaikan kepada:

1. Dr. Imam Tazi, M.Si selaku Ketua Program Studi Fisika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Arista Romadani, M.Sc selaku Dosen Pembimbing yang senantiasa memberikan ilmu pengetahuan, motivasi dan meluangkan waktu untuk membimbing penulis selama proses penyusunan Skripsi dengan baik.
3. Muthmainnah, M.Si selaku Dosen Pembimbing Integrasi yang senantiasa memberikan ilmu pengetahuan, motivasi, dan bimbingan kepada penulis selama proses pengerjaan Skripsi.
4. Segenap Dosen Penguji, Laboran, dan Admin Program Studi Fisika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan serta arahan demi kelancaran penyusunan Skripsi ini.
5. Ayah, ibu, adik serta seluruh keluarga yang senantiasa memberikan dukungan baik secara materi maupun doa, dan juga senantiasa memotivasi penulis untuk menyelesaikan Skripsi.

6. Sahabat, dan juga teman teman dekat yang senantiasa memberikan dukungan dan motivasi kepada penulis dalam proses penyelesaian skripsi.
7. Teman-teman angkatan 2018, khususnya bidang minat Teori yang senantiasa memberi semangat dan dukungan kepada penulis.
8. Fikri Haikal yang telah menemani pengerjaan skripsi oleh penulis, memotivasi penulis serta membantu pengerjaan skripsi selama 2 tahun ini.
9. Mr. Qiuyu Shan selaku pemilik jurnal "*Study solution of Dirac Equation in one fix and one moving wall well*" yang telah meluangkan waktu untuk memberikan penjelasan detail dari jurnal.
10. Semua pihak yang secara langsung maupun tidak langsung memberikan dukungan dalam penulisan skripsi ini.

Dalam penyusunan Skripsi ini, penulis menyadari bahwa masih terdapat banyak kekurangan dan kekeliruan. Untuk itu, penulis mengharapkan segala kritik dan saran yang bersifat membangun. Demikian yang dapat penulis sampaikan, semoga Skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah pengetahuan bagi orang lain.

Malang, 01 Juni 2023

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Salsabila H.I, Ainayah Syafirah. 2023. **Studi Solusi Persamaan Dirac Pada Sumur Potensial Bergerak Sebagian.** Skripsi. Program Studi Fisika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dosen pembimbing (I) Arista Romadani, M.Sc (II) Muthmainnah, M.Si

---

Kata Kunci : *Persamaan Dirac, sumur potensial, partikel*

Persamaan Dirac adalah persamaan gelombang relativistik yang memiliki bentuk persamaan diferensial, bentuk penyelesaiannya akan menghasilkan suatu fungsi gelombang. Penelitian ini berfokus pada studi teoritis mengenai persamaan Dirac yang bergantung waktu dan tidak bergantung waktu dalam konteks sumur potensial bergerak sebagian. Penelitian ini mengajukan rumusan masalah seputar persamaan Dirac bergantung waktu dan tidak bergantung waktu untuk sumur potensial bergerak sebagian, serta eigen states dan eigen value pada persamaan Dirac tersebut. Tujuan penelitian adalah menentukan persamaan Dirac yang sesuai dengan kasus sumur potensial bergerak sebagian, serta menemukan eigen states dan eigen value terkait. Metode penelitian menggunakan pendekatan teoritis yakni solusi umum fungsi gelombang pada persamaan Dirac, diterapkan pada persamaan energi dan Hamiltonian. Selain itu, penelitian ini juga menggunakan cara alternatif yang melibatkan syarat kontinuitas dan konstanta normalisasi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa persamaan Dirac yang bergantung waktu dan tidak bergantung waktu dapat dihasilkan dengan menggunakan pendekatan yang diterapkan. Solusi eigen states dan eigen value pada persamaan Dirac untuk sumur potensial bergerak sebagian ditemukan dengan pendekatan numerik, memberikan pemahaman mendalam tentang sifat partikel dalam konteks ini.

ABSTRACT

Salsabila H.I, Ainayah Syafirah. 2023. **Study on Solutions of the Dirac Equation in a Partially Moving Potential Well**. Undergraduate Thesis. Physics Study Program. Faculty of Science and Technology. State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Arista Romadani, M.Sc (II) Muthmainnah, M.Si

Keywords: *Dirac equation, potential well, particle*

The Dirac equation is a relativistic wave equation that takes the form of a differential equation, and its solution yields a wave function. This research focuses on theoretical studies regarding the Dirac equation, both time-dependent and time-independent, in the context of a partially moving potential well. The study formulates problems related to the time-dependent and time-independent Dirac equations for a partially moving potential well, along with eigenstates and eigenvalues in the Dirac equation. The research aims to determine the appropriate Dirac equation for the case of a partially moving potential well and to discover the related eigenstates and eigenvalues. The research methodology employs a theoretical approach, namely the general solution of the wave function in the Dirac equation, applied to the energy and Hamiltonian equations. Additionally, this study also utilizes an alternative method involving continuity conditions and normalization constants. The results indicate that both time-dependent and time-independent Dirac equations can be obtained using the applied approach. The eigenstates and eigenvalues solutions for the Dirac equation in a partially moving potential well are found through numerical approaches, providing a profound understanding of particle behavior in this context.

الملخص

سلسبيلا ح.أ ، عينايا‌ه شافيرة. 2023. **دراسة حل معادلة ديراك في بئر الطاقة المتحركة جزئيا**. بكالوريوس. برنامج الفيزياء. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة الدولة الإسلامية مولانا مالك رسالة مطمئنّة، ماجستير العلوم (II) أريستا رومادانى، ماجستير العلوم (I) :إبراهيم مالانج. المشرفون.

الكلمات الرئيسية: معادلة ديراك، بئر الطاقة، جسيم

المعادلة ديراك هي معادلة موجة نسبوية تأخذ شكل معادلة تفاضلية، وحلاها يؤدي إلى وظيفة موجية. يركز هذا البحث على الدراسات النظرية المتعلقة بالمعادلة ديراك، سواء كانت ذات تبعية زمنية أو غير ذلك، في سياق بئر الطاقة المتحرك جزئيًا. يصاغ هذا البحث لحل المشاكل المتعلقة بالمعادلة ديراك التي تعتمد على الزمن والتي لا تعتمد على الزمن لبئر الطاقة المتحرك جزئيًا، بالإضافة إلى حالات وقيم الذات في هذه المعادلة. يهدف البحث إلى تحديد المعادلة الدراكية المناسبة لحالة بئر الطاقة المتحرك جزئيًا، واكتشاف حالات الذات وقيم الذات المتصلة. تعتمد منهجية البحث على نهج نظري، أي حلا عامًا لوظيفة الموجة في المعادلة ديراك، يتم تطبيقها على معادلات الطاقة والهاملتوني. بالإضافة إلى ذلك، يستخدم هذا البحث أيضًا طريقة بديلة تشمل شروط الاستمرارية وثوابت التوحيد. تشير النتائج إلى أنه يمكن الحصول على معادلتي ديراك، سواء التي تعتمد على الزمن أو التي لا تعتمد على الزمن، باستخدام النهج المطبق. تم العثور على حلول حالات وقيم الذات لمعادلة ديراك لبئر الطاقة المتحرك جزئيًا باستخدام النهج العددي، مما يوفر فهمًا عميقًا حول سلوك الجسيمات في هذا السياق.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada awal periode ke-19 merupakan peristiwa perkembangan fisika modern dan fisika kuantum, hal ini ditandai dengan penemuan Planck tentang konsep kuantisasi cahaya. Hampir sepanjang periode ini banyak kajian yang dilakukan terkait dengan gelombang elektromagnetik dan juga terkait dengan benda-benda berukuran mikroskopik. Pada periode ini juga dijelaskkan perbedaan mengenai mekanika klasik, mekanika relativitas, dan mekanika kuantum. Perbedaan ketiganya didasarkan pada perilaku dan ukuran sistem fisika yang dikaji.

Mekanika kuantum atau yang biasa disebut dengan fisika kuantum merupakan ide yang membahas mengenai perilaku benda-benda berukuran mikroskopis (sekitar ukuran atom atau lebih kecil lagi). Benda-benda massif atau non-masif berukuran sekitar diameter atom atau lebih kecil lagi memiliki perilaku ganda (dualisme), yakni berperilaku sebagai partikel dan seperti gelombang. Dalam mekanika klasik telah dirumuskan secara sempurna hukum dan persamaan untuk menjelaskan perilaku partikel atau perilaku gelombang secara terpisah. Namun, dalam mekanika kuantum suatu sistem fisika (foton, proton, dan elektron) memperlihatkan dua perilaku pada benda yang sama, tetapi pada waktu yang berbeda. Kadangkala cahaya menunjukkan perilaku sebagai partikel dan pada waktu yang lain cahaya menunjukkan perilaku sebagai gelombang. Pada mekanika klasik belum ada hukum dan persamaan yang menjelaskan perilaku partikel atau gelombang yang memiliki sifat ganda (dualisme).

Partikel selalu dikaitkan dengan sesuatu benda yang sangat kecil atau dapat disebut berukuran mikroskopis, di dalam Al-Qur’an terdapat sebuah ayat yang didalamnya terdapat pembahasan mengenai sesuatu yang berukuran sangat kecil yakni pada QS. Adz Dzaariyaat (51): ayat 1-6 :

بِسْمِ اللّهِ الرَّ حْمَنِ الرَّ حِيْمِ
وَ الذَّارِيَاتِ ذَرْوًا (١) فاَلْحاَ مِلاتِ وِقْرًا (٢) فاَلْجاَرِياَتِ يُسْرًا (٣)فَالْمُقَسِّماتِ أَمْرًا (٤) إِ نَّمَا تُو
عَدُونَ لَصَادِقٌ (٥) وَإِنَّ الدِّ يْنَ لَوَا قِعٌ (٦)

“*Demi Partikel –partikel yang sangat halus (1). Yang membawa beban berat (2) . Yang mengalir dengan mudah (3). Yang membagi-bagi urusan (4). Sesungguhnya yang dijanjikan padamu pasti benar (5). Dan sesungguhnya pembalasan pasti terjadi (6)* ”(Qs. Adz-Dzaariyaat (51):1-6

Dalam Tafsir Fi Zhilalil –Qur’an IX , ayat ini menjelaskan tentang Allah SWT bersumpah demi angin, awan,kapal-kapal(bahtera) dan malaikat yang merupakan makhluk-Nya yang dijadikan sebagai sarana bagi kekuasaan-Nya dan pemenuh kehendak-Nya, Allah menuturkan segala sarana ini untuk mengarahkan kalbu kepada segala kerahasiaanNya yang terpendam serta memberikan segala bentuk rezeki kepada makhluk-Nya. Allah bersumpah atas keempat makhluk-Nya berjanju kepada manusia tentang segala perbuatannya yang baik maupun yang buruk pasti akan mendapatkan balasan yang sama, kebaikan akan dibalas dengan kebaikan keburukan akan dibalas dengan keburukan. Apabila Dia menangguhkan hisab di dunia, bukan berarti hisab akan ditangguhkan pula di akhirat. Janji itu akan terbukti dan apa yang dijanjikan Allah SWT pasti akan terwujud (Sayyid, 2003)

Pada Qs. Adz Dzariyat secara ekplisit mengandung suatu penafsiran yang dapat dikaitkan pada dunia sains, terkhusus mengenai mekanika kuantum. Penafsiran ayat yang merujuk tentang mekaika kuantum yang membahas mengenai partikel-

partikel berukuran mikro juga mengenai sifat dari partikel mikroskopis ini. Pada kata *dzariyat* (الذَّارِيَات) adalah suatu kata yang memiliki bentuk lain *dzarra* (ذَرَى) . Ketika pada Al-Qur'an menggunakan kata *dzarrah* untuk benda kecil seperti debu atau semut kecil maka dapat dikaitkan pada keilmuan fisika yang mengarah pada partikel beserta penyusun-penyusunnya (Mulyono dan Ahmad, 2006). Hal ini sangat sesuai dengan materi yang akan dikaji pada penelitian ini yakni partikel dalam persamaan dirac.

Materi yang menjelaskan mengenai sifat dari partikel didefinisikan dalam suatu postulat yang telah disepakati oleh fisikawan yang mendalami mekanika kuantum yakni Persamaan Schrodinger, dimana persamaan ini disepakati sebagai postulat dasar untuk perumusan persamaan gerak. Persamaan Schrodinger yang merupakan postulat dasar untuk perumusan persamaan gerak, dirumuskan oleh seorang fisikawan bernama Erwin Schrodinger pada tahun1925. Persamaan ini merupakan persamaan yang *dijabarkan* dari persamaan gelombang dan beberapa konsep fisika modern seperti sifat panjang gelombang *de' Broglie*, serta persamaan Schrodinger ini diberikan untuk perubahan dari fungsi gelombang pada sistem non-relativistik. Sedangkan pada sistem yang relativistik dijelaskan oleh Persamaan Klein-Gordon dan Persamaan Dirac

Persamaan Klein-Gordon dirumuskan oleh Oskar Klein, Walter Gordon dan Vladimir Fock pada tahun 1926. Persamaan ini merupakan modifikasi dari persamaan Schrodinger, yang digunakan untuk sistem relativistik. Namun, kelemahannya persamaan Klein-Gordon tidak memenuhi syarat kontinuitas karena suku waktu (t) merupakan persamaan orde kedua, lalu dari kekurangannya ini diperbaiki oleh Persamaan Dirac (Afifatul,2021).

Persamaan Dirac dirumuskan oleh fisikawan britania yakni Paul Andrien Maurice Dirac pada tahun 1928. Persamaan Dirac merupakan bentuk persamaan untuk menyelesaikan permasalahan yang ada pada persamaan Klein-Gordon dengan strategi yang berbeda, yakni merumuskan kembali persamaan gelombang relativistik dalam bentuk persamaan diferensial orde pertama, sebagaimana pada persamaan Schrodinger (Griffith,2008).

Banyak ilmuwan fisika yang tertarik untuk meneliti mengenai solusi untuk persamaan gelombang, dengan menggunakan berbagai metode numerik dan analitik. Salah satu penelitian mengenai persamaan gelombang dengan memvariasikan potensialnya menggunakan sumur potensial yakni penelitian dari Michael Koehn "*Solution of Klein Gordon Equation In An Infinite Square Well Potential With A Moving Wall* ". sistem relativistik dari dinding bergerak pada sisi lain adalah objek studi yang jarang diteliti meskipun memiliki aplikasi menarik. Pada penelitiannya membahas mengenai Klein-Gordon satu dimensi. Kemudian didapat solusi eksak dari persamaan Klein-Gordon dalam domain dengan batas-batas waktu. Pada penelitiannya mensubstitusikan solusi eksak orthogonal ke persamaan Klein-Gordon satu dimensi dengan sumur potensial persegi tak hingga yang memiliki dinding bergerak dengan kecepatan konstan. Solusi ini diperoleh dengan menerapkan transformasi sederhana ke ruang hiperbolik, lalu meneliti secara numeric sifat sifat gelombang relativistik tak bermassa yang memantul pada dinding bergerak datar dan dinding statis dalam ruang sumur potensial tak berhingga (Koehn,2013).

Selain penelitian pada persamaan Klein-Gordon yang merupakan persamaan relativistik orde kedua, terdapat penelitian lainnya yang mengkaji untuk orde pertama dalam persamaan relativistic yakni penelitian pada persamaan Dirac dengan permodelan potensial yang sama yakni menggunakan sumur Potensial. Yakni penelitian yang dilakukan oleh Qiuyu Shan, yang telah melakukan penelitian pada persamaan Dirac dengan menggunakan sumur potensial berhingga bergerak sebagian pada artikelnya dengan judul "*Solution Of The Dirac Equation In One Fixed And One Moving Wall Well"*. Pada penelitiannya didapatkan solusi numerik untuk persamaan Dirac yang bergantung waktu dan tak bergantung waktu pada sumur potensial berhingga bergerak sebagian. Operator Hamiltonian dalam kuantum merupakan hal yang sangat penting. Penelitian ini dimulai dengan menentukan koordinat partikel yakni koordinat z dan *spin up* dengan memberikan potensial pada sumur potensial berhingga yang mana dibagi menjadi tiga daerah, sehingga menghasilkan tiga solusi. Pada paper ini terdapat solusi dari persamaan Dirac yang bergantung waktu dan tak bergantung waktu pada sumur potensial bergerak sebagian, dan solusi untuk persamaan Klein-Gordon yang bergantung waktu pada sumur potensial bergerak sebagian. Kekurangan pada penelitian yang dilkukan Qiuyu shan yakni sebagai berikut, yang pertama solusi yang terdapat pada persamaan dirac tidak bergantung waktu hanya dituliskan secara singkat, yang mana masih terlihat solusi untuk sumur potensial biasa tanpa ada pergerakan pada salah satu dinding sumur. Yang kedua pada persamaan dirac yang bergantung waktu, karena pada persamaan ini untuk mendapatkan solusinya menggunakan pendekatan fungsi Bessel dan fungsi Mathieu yang terdapat pada solusi untuk persamaan Klein-Gordon yang bergantung waktu untuk sumur potensial yang mana hal tersebut jika diaplikasikan pada persamaan Dirac maka persamaan Dirac masih belum bisa mendeskripsikannya sehingga solusinya tidak sesuai dengan postulat Einstein dan penyelesaiannya tentu menjadi tidak sederhana (Shan,2021).

Kemudian digunakan suatu cara alternatif untuk menemukan solusi dari permsalahan pada kasus persamaan dirac yang bergantung waktu pada penelitian sebelumnya, yakni dengan mengutip solusi fungsi gelombang pada kasus tidak bergantung waktu dengan diberi tambahan nilai $V\Delta t$. Dimana $V\Delta t$ ini merupakan sampel kecil yang digunakan sebagai pendekatan untuk solusi yang diinginkan yakni solusi *eigen state* dan *eigen value*. Untuk mendapatkan penyelesaiannya diperlukan hasil dari normalisasi konstanta hingga persamaan tersebut ternormalisasi, lalu dari beberapa persamaan dan hasil dari konstanta normalisasi di plot pada matlab 2023a yang akan menghasilkan suatu grafik energi. Untuk referensi acuan yang digunakan ada beberapa buku yakni *Introduction to elementary particle* karya Griffith, serta beberapa buku lainnya. Hal ini akan menjadikan suatu alternatif dari jurnal karya Qiuyu shan.

Permodelan yang digunakan untuk menentukan potensial pada kedua penelitian diatas ialah Sumur Potensial. Sumur potensial merupakan permodelan sederhana yang akan menjembatani untuk membahas sistem yang lebih fisis, yakni osilator harmonik dan atom hydrogen. Sumur potensial digambarkan sebagai suatu daerah yang dibatasi oleh suatu dinding potensial tak berhingga dengan bagian dalamnya tidak terdapat potensial eksternal.

Pada penelitian ini memiliki penelitian terdahulu lainnya yakni mengenai kasus potensial penghalang satu dimendi untuk partikel Dirac dan Klein-Gordon yang dipengaruhi oleh medan elektromagnetik, yakni dengan memodelkan sistem potensial periodik satu dimensi yang kemudian dilakukan pemodifikasian terhadap persamaan Dirac dan Klein-Gordon akibat adanya medan elektromagnetik (Romadani, 2019). Dan kasus potensial lain yakni penelitian mengenai kasus penghalang potensial satu dimensi dari suatu partikel fermion yang berada dalam pengaruh medan elektromagnetik (Romadani, 2020).

Ketertarikan dalam mengkaji kasus pada persamaan Dirac ini karena dapat diaplikasikan untuk bidang fisika partikel, terlebih pada persamaan gelombang relativistik yang pada saat ini sedang ramai untuk dikaji. Berdasarkan penelitian terdahulu mengenai persamaan gelombang non-relativistik dan relativistik pada sumur potensial dalam menentukan fungsi gelombangnya dan nilai eigennya, dalam penelitian ini akan dikaji mengenai persamaan Dirac untuk kasus sumur potensial berhingga dengan dinding bergerak sebagian dengan mengkaji permodelan yang dilakukan pada penelitian dari Qiuyu Shan. Berdasarkan referensi paper dan buku buku lainnnya sehingga Penelitian dapat memaparkan kajian mengenai solusi untuk persamaan Dirac yang bergantung waktu dan tidak bergantung waktu pada kasus sumur potensial bergerak sebagian, dan dapat mengkaji mengenai solusi fungsi gelombang (*eigen state*) juga nilai eigen (*eigen value)* pada persamaan dirac yang bergantung waktu maupun tidak bergantung waktu dalam kasus ini.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, dirumuskan beberapa masalah yang akan diselesaikan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana persamaan Dirac bergantung waktu dan tak bergantung waktu untuk sumur potensial bergerak sebagian ?

2. Bagaimana *eigen states* dan *eigen value* sumur potensial berhingga dengan dinding bergerak sebagian pada persamaan Dirac yang bergantung waktu dan tak bergantung waktu ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang akan dibahas, maka tujuan dilakukannya studi teoritik ini adalah sebagai berikut.

1. Untuk menentukan persamaan Dirac yang bergantung waktu dan tidak bergantung waktu untuk sumur potensial bergerak sebagian
2. Untuk menentukan *eigen states* dan *eigen value* sumur potensial behingga dengan dinding bergerak sebagian pada persamaan Dirac yang bergantung waktu dan tak bergantung waktu.

1.4 Manfaat Penelitian

Dari pembahasan secara teoritik ini diharapkan memberikan manfaat sebagai kajian pengembangan dalam penelitian suatu kasus dalam bidang fisika partikel mengenai persamaan gelombang relativistik dengan partikel yang memiliki spin $\frac{1}{2}$, atau dapat juga hasil yang didapat pada penelitian ini bisa menjadi rujukan ketika mengkaji mengenai persamaan Dirac dalam sumur potensial berhingga dengan dinding yang bergerak sebagian

1.5 Batasan Masalah

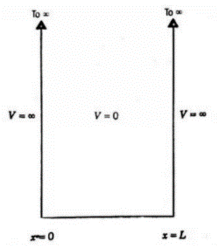
Batasan masalah pada penelitian ini adalah kajian teoritik mengenai fungsi gelombang pada persamaan Dirac yang bergantung waktu dan tak bergantung waktu, *eigen state* dan *eigen value* sumur potensial berhingga yang bergerak sebagian pada persamaan Dirac yang bergantung waktu dan tak bergantung waktu. Kemudian untuk penggunaan cara alternatif menggunakan syarat kontinuitas dan konstanta normalisasi.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Sumur Potensial Kuantum

Sumur potensial digambarkan sebagai suatu daerah yang dibatasi dinding potensial yang tak terbatas tanpa potensi eksternal di dalamnya. Di dalam sumur, kondisi partikel Dirac dapat ditinjau dalam keadaan bebas (*particle free*). Karena dinding potensial memiliki nilai yang sangat besar, jadi efek tunneling tidak akan muncul.



Gambar 2. 1 Sumur Potensial tak berhingga (Krane,2012)

Pada gambar 2.1, energi potensial V partikel bernilai tak berhingga di kedua sisi sumur dan V bernilai konstan (sama dengan nol) di dalam sumur. Sementara itu, dinding sumur yang dianggap sangat keras dan tak berhingga menyebabkan partikel hanya dapat bergerak bolak balik di antara dnding sumur. Partikel dapat bergerak bolak balik dan menumbuk dinding sumur tanpa kehilangan energi, sehingga energinya konstan. Karena energi partikel yang konstan dan tidak bisa bernilai tak berhingga, maka partikel tidak mungkin berada di luar sumur. Dalam keadaan demikian, partikel dikatakan mengalami keadaan terikat (bound state) yang artinya partikel terperangkap dalam sumur dengan $\psi = 0$ untuk $x \leq 0$ dan $x \geq L$ (Beiser,2003).

Jika suatu energi potensial partikel adalah konstanta, berarti tidak bergantung pada posisinya, partikel dinyatakan dalam keadaan bebas, dan tidak ada gaya. Jadi dalam hal ini ada dua kemungkinan keadaan gerak partikel, yakni diam atau bergerak lurus beraturan. Namun, faktanya tidak ada partikel dengan keadaan bebas pada semua spasial, akan tetapi partikel itu bebas di ruang yang berhingga. Hal ini berarti, energi potensial konstan hanya ada pada interval spasial atau ruang tertentu. Potensial yang merupakan konstanta selama selang waktu tertentu dan berubah menjadi konstanta lain pada interval lain disebut potensial kotak. Apabila terjadi perubahan dalam potensial, seperti,

$$v(x) = \{ \begin{matrix} v_0 & untuk\ x < 0 \\ v_1 & untuk\ x > 0 \end{matrix}$$

ini disebut potensial tangga. Jika terjadi dua perubahan pada potensial, maka ada kemungkinan ada dua jenis potensial, yakni potensial tanggul dan potensial sumur atau yang kerap disebut sebagai sumur potensial (Sutopo,2005).

Sistem kuantum yang dipertimbangkan merupakan partikel bermassa m yang terperangkap dalam sumur potensial satu dimensi tak berhingga. Persamaan dirac harus didapatkan solusi, dengan operator Hamiltonian

$$H\psi = i\hbar \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \tag{2.1}$$

Energi potensial dengan fungsi $V(x)$ didefinisikan menjadi nol jika $0 < x < L$. Apabila sumur potensial tidak bergantung pada waktu maka L dapat dituliskan L_0 maka, fungsi dan nilai eigen dapat diperoleh dengan rumusan dasar berikut,

$$v_n(x,t) = \left(\frac{2}{L_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_0}\right) \exp\left(-\frac{iE_n^0 t}{\hbar}\right), \tag{2.2}$$

$$E_n^0 = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL_0^2} \tag{2.3}$$

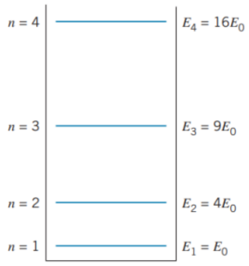
Jika sumur bergantung waktu maka, bisa menggunakan prinsip kontinuitas fungsi gelombang, diekspresikan sebagai jumlah linier di atas himpunan fungsi ortonormal $\Phi_n(x,t)$, yakni

$$\boldsymbol{\Psi}_n = a_n \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \tag{2.4}$$

Sumur potensial merupakan struktur satu dimensi yang dibangun untuk memudahkan dalam mengekploitasi tingkat energi atau level energi diskrit yang dimiliki partikel, karena sebuah partikel yang terperangkap dalam sumur potensial tidak dapat memiliki sembarang energi sebagaimana energi yang dimiliki oleh partikel bebas. Keadaan partikel yang terperangkap menyebabkan adanya pembatasan panjang gelombang yang ekuivalen dengan pembatasan pada momentum sehingga juga mengakibatkan pembatasan pada energi kinetik.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \left(\frac{(mv)^2}{2m}\right) \tag{2.5}$$

Eksistensi partikel dalam sumur potensial dapat dilihat dari sifat fungsi gelombang $\Psi(x,t)$, meskipun fungsi gelombangnya tidak memiliki makna fisis secara langsung. Alasannya adalah, berkaitan dengan probabilitas bahwa partikel berada di titik tertentu pada waktu tertentu mempunyai nilai di antara dua batas, yaitu 0 dan 1. Sedangkan amplitudo gelombang dapat bernilai negatif, jadi $\Psi(x,t)$ tidak dapat menjadi kuantitas yang teramati.



Gambar 2. 2 Tingkatan Energi Partikel dalam Sumur Potensial (Krane,2012)

Akan tetapi, hal tersebut tidak berlaku untuk kuadrat besaran mutlak fungsi gelombang $|\Psi(x,t)|^2$ yang disebut sebagai rapat probabilitas posisi partikel .

$$P(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 = \Psi * (x,t)\Psi(x,t). \tag{2.6}$$

Secara lebih tepat $|\Psi(x,t)|^2 dV$ menyatakan kemungkinan untuk mendapatkan partikel yang dideskripsikan oleh $\Psi(x,t)$ dalam elemen volume dV di sekitar posisi x pada saat t. Dalam kasus satu dimensi, probabilitas untuk menemukan partikel dalam interval x dan $x + dx$ pada waktu t adalah,

$$P(x,t)dx = |\Psi(x,t)|^2 dx = \Psi * (x,t)\Psi(x,t)dx \tag{2.7}$$

karena $|\Psi(x,t)|^2$ berbanding lurus dengan rapat probabilitas $P(x,t)$, maka integral rapat probabilitas atau $|\Psi(x,t)|^2$ ke seluruh ruang V harus berhingga untuk mendapatkan partikel yang diberikan oleh $|\Psi(x,t)|^2$. Rumus yang dapat menyatakan bahwa partikel berada di dalam sumur pada waktu tertentu adalah (Krane,2012),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x,t)dV = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 \, dV = 1 \tag{2.8}$$

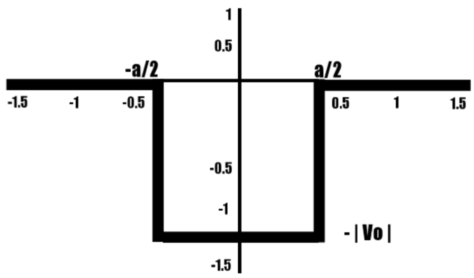
Persamaan ini merupakan syarat normalisasi dan fungsi gelombang yang memenuhi syarat tersebut maka merupakan fungsi ternormalisasi (Purwanto,2005).

Selain harus ternormalisasi secara tepat, fungsi gelombang juga harus memenuhi syarat yang lain, yakni turunan pertamanya harus kontinyu di setiap x, berhingga, dan bernilai tunggal, supaya bisa digunakan untuk semua perhitungan yang memiliki makna fisis (Krane,2012).

Fungsi gelombang $\Psi(x,t)$ dapat bernilai positif atau negatif, sedangkan rapat probabilitas $|\Psi(x,t)|^2$ selalu bernilai positif. Sebab sebuah partikel yang berada dalam sumur potensial hanya dapat ditemukan dengan energi E_n, maka fungsi gelombang dan rapat probabilitas partikel tersebut berbentuk $\Psi_n(x,t)$ dan $|\Psi_n(x,t)|^2$ supaya sesuai dengan E_n(Krane,2012).

2.2 Sumur Potensial Berhingga pada Persamaan Schrodinger

Perhatikan pada gambar sumur potensial berhingga berikut:



Gambar 2. 3 Sumur potensial

Dengan ,

$$\mathrm{V(x)} = -\mathrm{V_0}, -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}, \qquad \mathrm{II}$$

$$\mathrm{V(x)} = 0, x \leq \ -\frac{a}{2} \quad (\mathrm{I}); \quad x \geq \frac{a}{2}, \quad (\mathrm{III})$$

Dengan persamaan Schrodinger yakni:

$$\psi" = \begin{cases} -\dfrac{2m}{\hbar^2}\, E\,\psi, & x < -\dfrac{a}{2}; x > \dfrac{a}{2}, \\ -\dfrac{2m}{\hbar^2}\,(E + V_0)\psi, & -\dfrac{a}{2} < x < \dfrac{a}{2}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Untuk $E > 0$ pada persamaan (2.9) memiliki solusi dalam bentuk e^{ikz} yang mana tidak dapat dinormalisasi tapi dapat dibatasi, sehingga pada daerah E tersebut sesuai dengan spektrum kontinu. Untuk spektrum kontinu berada diantara $[-V_0, \infty]$, dan pada keadaan terikat berada diantara $[-V_0, 0]$, yang dirumuskan

$$q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - |E|)}}{\hbar} > 0, \qquad \kappa = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} > 0,$$

Dengan,

$$\psi" = \begin{cases} -\dfrac{2m}{\hbar^2}\, E\,\psi, & x \in \text{I, III} \\ -\dfrac{2m}{\hbar^2}\,(E + V_0)\psi, & x \in \text{II}. \end{cases}$$

Perhatikan bahwa q dan κ memenuhi,

$$q^2 + \kappa^2 = \frac{2m\,V_0}{\hbar^2}. \tag{2.10}$$

Pada daerah II solusinya sebagai berikut,

$$\psi_{II} = A\sin(qx + \delta)$$

Pada wilayah I dan III, solusinya memiliki bentuk e^{ikz} dengan memperhitungkan normalisasinya,

$$\psi_I = Be^{ikz}; \qquad \psi_{III} = Ce^{-ikz}$$

Karena Hamiltonian merupakan invariant dibawah $x \rightarrow -x$ dan karena tingkat diskrit satu dimensi adalah non-degenerasi, fungsi eigen energi memiliki paritas pasti, baik genap maupun ganjil di bawah x. Maka,

$$\psi_{II} = A\cos q\,x \qquad \text{atau} \qquad \psi_{II} = A\sin q\,x$$

pada daerah I atau III, penyelesaiannya berbentuk e^{ikz} jadi,

$$\psi_{I} = Be^{\kappa x} \qquad \text{atau} \qquad \psi_{III} = Ce^{-\kappa x}$$

Kontinuitas di $x = \frac{a}{2}$ menggunakan kondisi $\psi_{II} = \psi_{III}$; $\psi'_{II} = \psi'_{III}$. karena fungsinya genap atau ganjil, maka kondisi kontinu pada $x = -\frac{a}{2}$ yang secara otomatis akan terpenuhi, untuk fungsi genap $(B = C)$ diperoleh bahwa,

$$q\tan\frac{q\,a}{2} = \kappa \tag{2.11}$$

mudahnya untuk fungsi eigen ganjil pada kondisi ini adalah

$$-q\cot\frac{q\,a}{2} = \kappa \tag{2.12}$$

Pada sumur potensial satu dimensi memiliki setidaknya satu keadaan terikat. Namun berbeda jika pada kasus sumur poentsial tiga dimensi, dimana potensialnya harus memiliki lebar atau kedalaman minimum untuk memiliki satu keadaan terikat.

2.3 Persamaan Klein -Gordon

Mekanika Newtonian yang diperkenalkan oleh Newton, pada dasarnya merupakan prinsip dari fenomena-fenomena yang ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Akan tetapi, mekanika Newtonian hanya dapat dioperasikan pada objek makro yang bergerak dengan kecepatan kecil. Namun pada obbjek makro yang bergerak dengan kecepatan tinggi (mendekati kecepatan cahaya), telah diperkenalkan teori baru Einstein pada tahun 1905 yang disebut dengan teori relativitas khusus. Pada awal abad ke-20, lahir lah pula teori yang menjadi pilar bagi fisika modern. Teori yang dimaksud adalah teori mekanika kuantum yang diberlakukan untuk objek-objek mikro, seperti atom dan partikel penyusunnya. Mekanika kuantum dirumuskan oleh banyak fisikawan, diantaranya adalah Max Planck, A. Einstein, A. H. Compton, Louis de Broglie, E. Schrodinger, W. Heisenberg, dan Neils Bohr. E. Schrodinger dan W. Heisenberg kemudian disebut sebagai pelopor mekanika kuantum karena berhasil merumuskan solusi dari salah satu kasus yang ditelaah dalam mekanika kuantum, yakni tentang cara mendapatkan fungsi gelombang (Griffiths, 1999).

Keberhasilan Schrodinger dalam merumuskan fungsi gelombang belum dapat dikatakan sebagai puncak kejayaan teori kuantum. Sebab, setlah ditemukan dan dirumuskannya tiga pilar dasar tersebut, kembali muncul pertanyaan mengenani bagaimana menjelaskan tentang objek mikro yang bergerak dengan kecepatan tinggi, mmisalnya seperti elektron yang bergerak dengan kecepatan 250 juta m/s. Pertanyaan ini kemudian berhasil dipecahkakn oleh O. Klein, V. Fock, dan W. Gordon melalui upayanya dalam menggabungkan teori mekanika kuantum dari teori relativitas khusus (Purwanto, 2005). Lalu dilakukan modifikasi terhadap persamaan gelombang schrodinger agar menjadi persamaan yang relevan untuk kasus relativistik yang kemudian menghasilkan persamaan gelombang relativistik yang disebut dengan persamaan Klein-Fock-Gordon atau persamaan Klein-Gordon.

Persamaan Klein-Gordon diturunkan dengan metode yang sama seperti persamaan Schrodinger karena pada dasarnya persamaan Klein-Gordon merupakan persamaan Schrodinger yang termodifikasi. Persamaan Schrodinger merupakan persamaan gelombang non-relativistik yang ditenntukan melalui persamaan hubungan energi dan momentum. Sehingga, persamaan Klein-Gordon yang merupakan persamaan gelombang relativistik diturunkan melalui persamaan hubungan energi dan momentum yang relativistik. Partikel yang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya $(v \approx c)$ mempunyai energi total dan momentum sebesar

$$E = mc^2, \qquad\qquad p = mv \tag{2.13}$$

Massa m dalam persamaan (2.13) adalah massa untuk benda yang bergerak, karena dalam hal ini benda atau partikel yang ditinjau adalah benda yang begerak. Massa untuk partikel yang bergerak besarnya adalah,

$$\begin{aligned} m &= \gamma m_0 \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{2.14}$$

dengan m_0 adalah massa diam benda, sedangkan γ diperoleh dari transformasi Lorentz. Substitusi m ke persamaan (2.13)

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.15}$$

Ketika E dan p pada persamaan (2.14) di kuadratkan, kemudian dilakukan substitusi dan operasi matematis di antara keduanya, maka akan didapatkan persamaan hubungan energi dan momentum relativistik sebagai berikut,

$$\boldsymbol{E^2} = \boldsymbol{p^2} c^2 + m^2 c^4, \tag{2.16}$$

untuk energi dan momentum dalam kasus relativistik dituliskan dalam bentuk operator yakni

$$\overline{\boldsymbol{E}} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \overline{\boldsymbol{p}} = -i\hbar \nabla \tag{2.17}$$

Substitusi operator energi dan operator momentum ke dalam persamaan (2.16) kemudian mengoperasikan operator tersebut pada suatu fungsi gelombang $\Psi(x,t)$, menghasilkan persamaan

$$\boldsymbol{E^2} = \boldsymbol{p^2}c^2 + m^2c^4, \tag{2.18}$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \Psi(x,t) = (-i\hbar\nabla)^2c^2\Psi(x,t) + m^2c^4\Psi(x,t)$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2} = (-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4)\Psi(x,t)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2c^4}{\hbar^2c^2}\right)\Psi(x,t) = 0$$

Persamaan (2.17) ini yang disebut persamaan Klein-Gordon, dengan $\Psi(x,t)$ dinyatakan sebagai perkalian dari fungsi posisi $\psi(x)$ dan fungsi waktu $\varphi(t)$. Di persamaan (2.16) menyatakan operator energi dan momentum. Partikel bebas dengan hubungan relativistik diterapkan pada persamaan Schrodinger untuk mendapatkan persamaan gelombang relativistik. Dalam relativitas khusus, diperkenalkan momentum empat yaitu generalisasi momentum tiga dimensi klasik menjadi ruang-waktu empat dimensi. Persamaannya dapat ditulis sebagai berikut (Greiner,2000):

$$\bar{p}^\mu\bar{p}_\mu \equiv \frac{E^2}{c^2} - p.p = m_0^2c^2, \tag{2.19}$$

dimana $\bar{p}^\mu$ adalah operator momentum empat dimensi kovarian yang didefinisikan:

$$\bar{p}^\mu \equiv i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial(ct)} + i\hbar\frac{\partial}{\partial x_1} + i\hbar\frac{\partial}{\partial x_2} + i\hbar\frac{\partial}{\partial x_3}\right\} \tag{2.20}$$

$$\equiv i\hbar\nabla^\mu$$

$$= \left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial(ct)}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

$$= i\hbar\left\{\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla\right\} = \{\bar{p}_0, \bar{p}\}$$

dengan demikian, didapat persamaan Klein-Gordon untuk partikel bebas dalam bentuk momentum empat dimensi:

$$p^\mu p_\mu \psi = m_0^2 c^2 \psi \tag{2.21}$$

untuk nilai m_0 merupakan massa diam partikel yang didefinisikan sebagai massa yang diukur dalam kerangka diamnya dan c kecepatan cahaya dalam vakum. Dengan mensubstitusikan persamaan (2.20) ke persamaan (2.21) didapatkan (Greiner,2000):

$$p^\mu p_\mu \psi = m_0^2 c^2 \psi \tag{2.22}$$

$$\left(p^\mu p_\mu \psi - m_0^2 c^2 \psi\right) = 0$$

$$-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi - m_0^2 c^2 \psi = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0$$

Persamaan Klein-Gordon dapat diverivikasi kovariansi lorentznya, seperti $p^\mu p_\mu$ adalah invarian dalam transformasi Lorentz. Persamaan (2.22) identik dengan persamaan gelombang klasik dimana suku $\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}$ menjadi konstanta k. Solusi bebas berbentuk (Greiner,2000):

$$\psi = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu\right) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(p_0 x^0 - p.x)\right] \tag{2.23}$$

$$= \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p.x - Et)\right].$$

Persamaan (2.23) memberikan solusi persamaan gelombang sebagai fungsi posisi dan fungsi waktu sekaligus, berbeda dengan persamaan gelombang klaslik yang hanya fungsi posisi untuk partikel bebas. Dengan menyisipkan persamaan (2.23) ke dalam persamaan (2.21) didapatkan (Griffith,2005):

$$p^{\mu}p_{\mu}\psi = m_0^2c^2\psi \tag{2.24}$$

$$p^{\mu}p_{\mu}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_{\mu}x^{\mu}\right) = m_0^2c^2\exp\left(-\frac{i}{\hbar}p_{\mu}x^{\mu}\right)$$

$$p^{\mu}p_{\mu} = m_0^2c^2$$

$$\frac{E^2}{c^2} - p.p = m_0^2c^2$$

$$E^2 = (m_0^2c^4 + p^2c^2)$$

$$E = \pm\sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}$$

Dengan demikian persamaan (2.24) mempresentasikan dua solusi yakni energi positif $E = (m_0^2c^4 + p^2c^2)^{\frac{1}{2}}$ dan energi negatif $E = -(m_0^2c^4 + p^2c^2)^{\frac{1}{2}}$. Solusi persamaan (2.24) menghasilkan energi negatif yang menunjukkan adanya antipartikel (Greiner,2000).

2.3.1 Non-relativistik Limit

Untuk mempelajari mengenai non-relativistk limit dari persamaan Klein-Gordon (2.21). terlebih dahulu dapat ditentukan ansatz

$$\psi(r,t) = \varphi(r,t)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\, m_0c^2t\right), \tag{2.25}$$

dalam batas non-relativistik selisih jika energi total partikel adalah E dan massa diam partikel m_0c^2 sangat kecil. Maka dapat didefinisikan

$$E' = E - m_0c^2 \tag{2.26}$$

pada persamaan diatas menyatakan bahwa E' merupakan non-relativistik, maka dapat diartikan $E' \ll m_0c^2$. Oleh karena itu

$$\left| i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \approx E' \varphi \ll m_0 c^2 \varphi \tag{2.27}$$

maka, dari persamaan (2.25) didapatkan,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \varphi \right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) \tag{2.28}$$

$$\approx -i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \varphi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \varphi \right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right)$$

$$\approx \left[i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad i \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right] \exp\left(\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right)$$

$$= -\left[i \frac{2 m_0 c^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right] \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right)$$

lalu substitusikan hasil pada persamaan (2.21), (Greiner,2000)

$$-\frac{1}{c^2} \left[i \frac{2 m_0 c^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right] \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) \tag{2.29}$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \varphi \exp(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t)$$

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2 m_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = -\frac{\hbar^2}{2 m_0} \Delta \varphi$$

2.3.2 Partikel bebas Spin-0

Sebelumnya kita telah menyatakan bahwa dalam teori relativistik konsep partikel bebas adalah suatu idealisasi. Selanjutnya partikel spin-nol, seperti pion atau kaon, berinteraksi kuat dengan partikel dan medan lain. Namun demikian kita dapat menemukan beberapa metode praktis untuk menangani masalah ini dengan mempelajari solusi bebas dari (2.21). Berikut merupakan persamaan densitas (2.30) dan probabilitas (2.31)

$$j_\mu = \frac{i\hbar}{2m_0}\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}_\mu\psi \;\; \psi\boldsymbol{\nabla}_\mu\psi^*\right) \tag{2.30}$$

$$\varrho = \frac{i\hbar}{2m_0c^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) \tag{2.31}$$

dari kedua persamaan ini didapatkan persamaan kontinuitas, kemudian diintegralkan persamaan tersebut,

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + div\, j = 0 \tag{2.32}$$

$$\int_v \frac{\partial\varrho}{\partial t}\, d^3x = \frac{\partial}{\partial t}\int_v \varrho(x,t)d^3x \tag{2.33}$$

$$= -\int_v div\, j\, d^3x$$

$$= -\int_F j\,.\,d\boldsymbol{F} = 0$$

dapat diartikan bahwa

$$\int_v \varrho\, d^3x = konstan \tag{2.34}$$

yakni ketetapan waktu pada normalisasi. Kemudian bagaimana untuk menafsirkan ϱ dan $\boldsymbol{j}$. Interpretasi probabilitas tidak berlaku, seperti yang terlihat pada persamaan (2.31). Namun didapat alternatif yang memperoleh empat rapat arus muatan dari perkalian densitas (2.30) dengan muatan dasar e,

$$\boldsymbol{j}'_{\boldsymbol{\mu}} = \frac{ie\hbar}{2m_0}\left[\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}, \frac{\partial\psi}{\partial ct}\right) - \left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}, \frac{\partial\psi^*}{\partial y}, \frac{\partial\psi^*}{\partial z}, \frac{\partial\psi^*}{\partial ct}\right)\right] \tag{2.35}$$

$$j'_\mu = \frac{ie\hbar}{2m_0}\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}_\mu\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}_\mu\psi^*\right) = \{c\,\varrho', -j'\}$$

dimana ϱ' dan $\boldsymbol{j}'$ sebagai berikut,

$$\varrho' = \frac{i\hbar e}{2m_0c^2}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right) \tag{2.36}$$

$$\varrho' = \frac{i\hbar e}{2m_0c}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right)$$

$$c\varrho' = \frac{i\hbar e}{2m_0c^2}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right)$$

$$\boldsymbol{j}' = \frac{ie\hbar}{2m_0}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\frac{\partial \psi^*}{\partial y}\frac{\partial \psi^*}{\partial z}\right) \tag{2.37}$$

$$\boldsymbol{j}' = \frac{ie\hbar}{2m_0}\left(\psi^* \boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\right)$$

Persamaan (2.36) diperbolehkan positif, negatif atau nol. Hal Ini sama dengan keberadaan partikel dan antipartikel dalam teori. Dengan menghitung solusi untuk partikel bebas, dapat ditulis dalam bentuk

$$\left(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - m_0^2c^2\right)\psi = 0 \tag{2.38}$$

dan berdasarkan ansatz untuk gelombang bebas

$$\psi = A \exp\left(-\frac{\boldsymbol{i}}{\hbar}p_\mu x^\mu\right) = A \exp\left[\frac{\boldsymbol{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - Et)\right]$$

diperoleh sebuah kondisi yang menyatakan, bahwa

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - m_0^2c^2 = 0 = p_0^2 - \boldsymbol{p^2} - m_0^2c^2 \tag{2.39}$$

karena $p_0 = \frac{E}{c}$, maka

$$E^2 = c^2(p^2 + m_0^2c^2) \tag{2.40}$$

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \boldsymbol{p^2} - m_0^2c^2 = 0$$

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 = \boldsymbol{p^2} + m_0^2c^2$$

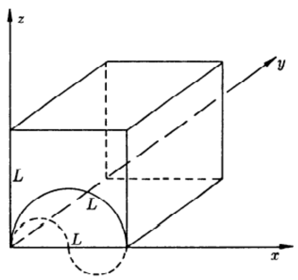
Akibatnya, terdapat dua kemungkinan solusi yang diberikan oleh momentum $\boldsymbol{p}$: satu positif dan satu lainnya adalah negatif energi,

$$E_p = \pm c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} \quad , \quad \psi_{\pm} = A_{(\pm)} \exp\left[\frac{\boldsymbol{i}}{\hbar}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} \mp |E_p|t\right)\right] \tag{2.41}$$

$A_{(\pm)}$ adalah konstanta normalisasi. Substitusikan ini ada persamaan (2.36), maka akan didapat

$$\varrho_{(\pm)} = \pm\frac{e|\boldsymbol{E_p}|}{m_0c^2}\psi^*_{(\pm)}\psi_{(\pm)} \tag{2.42}$$

Hal ini menunjukkan interpretasi bahwa $\psi_{(+)}$ menentukan partikel dengan muatan +e dan $\psi_{(-)}$ menentukan partikel dengan massa yang sama, tetapi dengan muatan -e. Solusi umum persamaan gelombang selalu merupakan kombinasi linier dari kedua jenis fungsi. Hal ini dapat diperjelas lebih lanjut dengan mendiskritisasi gelombang bidang kontinu. Maka dengan membatasi gelombang pada kotak kubik besar (kotak normalisasi) dengan panjang tepi L (lihat Gambar 2.4) dan, diperlukan kondisi batas periodik pada dinding kotak. Ini menghasilkan dengan cara yang umum digunakan,



Gambar 2. 4 Kotak Normalisasi

$$\psi_{n(\pm)} = A_{n(\pm)} \exp\left[\frac{\boldsymbol{i}}{\hbar}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} \mp E_{p_n}t\right)\right] \tag{2.43}$$

dengan

$$p_n = \frac{2\pi}{L}n \qquad ,n = \{n_x\, , n_y\, , n_z\}; \qquad n_i \in \mathbb{N}$$

$$E_{p_n} = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} \equiv E_n \tag{2.44}$$

n merupakan vector diskrit pada celah kisi dengan sumbu n_x, n_y, n_z. Menggunakan persamaan (2.42), normalisasi faktor $A_{(\pm)}$ ditentukan dengan syarat bahwa

$$\pm e = \int_{L^3} d^3x\varrho_{\pm}(\boldsymbol{x}) = \pm\frac{e\boldsymbol{E_{pn}}}{m_0c^2}\left|A_{n(\pm)}\right|^2\boldsymbol{L^3} \tag{2.45}$$

Persamaan tersebut didapat dengan mensubstitusikan nilai dari ϱ pada persamaan (2.42). Dengan demikian akan didapat persamaan sebagai berikut

$$\pm e = \int_{L^3} d^3x\varrho_{(\pm)}(\boldsymbol{x}) = 1 \tag{2.46}$$

$$\pm e = \int_{L^3} \frac{eE}{m_0c^2}\,\psi^*\psi d^3x = 1$$

$$\pm e = \int_{L^3} \frac{eE}{m_0c^2}\,\psi^2 d^3x$$

$$\pm e = \pm\frac{e\boldsymbol{E_{pn}}}{m_0c^2}\left|A_{n(\pm)}\right|^2\boldsymbol{L^3}$$

lalu didapatkan amplitude

$$A_{n(\pm)} = \sqrt{\frac{m_0c^2}{L^3E_{pn}}} \tag{2.47}$$

Dengan demikian untuk fungsi gelombangnya adalah

$$\psi_{n(\pm)} = \sqrt{\frac{m_0c^2}{L^3E_{p_n}}}\exp\left[\frac{\boldsymbol{i}}{\hbar}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} \mp E_{p_n}t\right)\right] \tag{2.48}$$

Perhatikan bahwa normalisasi kedua jenis solusi (berhubungan dengan muatan positif dan muatan negatif) adalah sama. Satu-satunya perbedaan adalah karena waktu. Faktor $\exp\left(\pm\frac{iE_{pn}t}{\hbar}\right)$. Solusi paling umum dari persamaan Klein Gordon untuk partikel spin-0 positif dan negatif dituliskan sebagai berikut

$$\psi_{(+)} = \sum_n a_n \psi_{n(+)} = \sum_n a_n \sqrt{\frac{m_0 c^2}{L^3 E_{pn}}} \exp\left[\frac{\boldsymbol{i}}{\hbar}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} + E_{pn}t\right)\right] \tag{2.49}$$

$$\psi_{(-)} = \sum_n a_n \psi_{n(-)} = \sum_n a_n \sqrt{\frac{m_0 c^2}{L^3 E_{pn}}} \exp\left[\frac{\boldsymbol{i}}{\hbar}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - E_{pn}t\right)\right]$$

Solusi untuk partikel spin-0 dengan muatan nol juga dapat dibuat. Dengan mengenali dari bentuk ekspresi untuk kerapatan muatan (2.36) bahwa medan Klein Gordon tidak nyata untuk partikel netral, pada

$$\psi^* = \psi \tag{2.50}$$

Melalui (2.49) kita dapat dengan mudah mendeskripsikan bagian awal gelombang untuk partikel netral,

$$\psi_{n(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi^n_{(+)}(\boldsymbol{p_n}) + \psi^n_{(-)}(-\boldsymbol{p_n})\right) \tag{2.51}$$

$$= \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2L^3 E_{pn}}}\left\{\exp\left[\frac{\boldsymbol{i}}{\hbar}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - E_{pn}t\right)\right] + \exp\left[\frac{\boldsymbol{i}}{\hbar}\left(-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} + E_{pn}t\right)\right]\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2L^3 E_{pn}}}\left\{\exp\left[\frac{\boldsymbol{i}}{\hbar}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - E_{pn}t\right)\right] + \exp\left[-\frac{\boldsymbol{i}}{\hbar}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} + E_{pn}t\right)\right]\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2L^3 E_{pn}}}\left\{\left[\cos\frac{1}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - E_t) + i\sin\frac{1}{\hbar}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - E_p\right)\right]\right.$$

$$\left. + \left[\cos-\frac{1}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} + E_t) - i\sin\frac{1}{\hbar}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - E_p\right)\right]\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2L^3 E_{pn}}}\ 2\cos\left(\boldsymbol{p_n}\cdot\boldsymbol{x} - \frac{E_{pn}t}{\hbar}\right)$$

Jadi berlaku $\psi^n_{(0)} = \psi^{n*}_{(0)}$ oleh karena itu, berdasarkan persamaan (2.36)

$$\varrho' = \frac{i\hbar e}{2m_0c^2}\left(\psi^*_{n(0)}\frac{\partial\psi_{n(0)}}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*_{n(0)}}{\partial t}\right) = 0 \tag{2.52}$$

Kemudian dapat dilihat bahwa $\boldsymbol{j}'(\boldsymbol{x}\,, t)$ partikel netral persamaan (2.37) juga menghilang. Akibatnya dalam hal ini tidak ada hukum konservasi. Maka teori kuantum relativistik pasti mengarah pada derajat kebebasan baru, yaitu derajat kebebasan partikel. Dalam teori non-relativistik bebas, partikel tanpa spin dapat merambat secara bebas dengan momentum $\boldsymbol{p}$ yang terdefinisi dengan baik.

2.4 Persamaan Dirac

Pada tahun 1982, Paul, A.M Dirac berhasil mempublikasikan karyanya yaitu persamaan relativistik yang invarian untuk elektron. Persamaan ini menjelaskan tentang partikel berspin $\frac{1}{2}$, dan menyelesaikan permasalahan energi negatif pada persamaan Klein-Gordon. Pada persamaan Klein-Gordon untuk sebuah partikel pada dasarnya sulit untuk mendapatkan solusinya sebab merupakan turunan waktu orde kedua, maka diperlukan menemukan persamaan baru pada turunan waktu orde pertama. Dalam teori relativitas khusus, koordinat waktu dan spasial harus sama dalam persamaan apapun, sehingga persamaan baru untuk koordinat spasial juga harus berada pada turunan orde pertama. Kemudian, untuk fungsi gelombang tidak hanya memenuhi persamaan pada orde pertama namun juga pada persamaan Klein-Gordon yang terakhir yang menyatakan (Eugene, 2014)

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{2.53}$$

Secara umum, peralihan dari mekanika klasik ke mekanika kuantum dapat diperoleh dengan mengganti besaran klasik dengan operator yang sesuai. Biasanya operator ini adalah operator differensial atau perkalian yang bekerja pada fungsi gelombang. Khususnya, untuk energi E dan momentum $\boldsymbol{p}$ dari partikel bebas dapat disubstitusi

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad\qquad \boldsymbol{p} \rightarrow -i\hbar\boldsymbol{\nabla} \tag{2.54}$$

Diketahui dari teori non-relativistik. Selanjutnya, (2.54) secara umum adalah invarian Lorentz. Jika diterapkan pada hubungan energi-momen relativistik klasik, maka

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{2.55}$$

Pada persamaan (2.54) memberikan persamaan Klein-Gordon dari akar kuadrat

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\,(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) = -\sqrt{-c^2\hbar^2\Delta + m^2c^4\psi\,(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})} \tag{2.56}$$

dengan $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ yang merupakan operator laplace. Akar kuadrat dari operator diferensial dapat ditemukan dengan menggunakan transformasi Fourier, tetapi karena asimetri ruang dan turunan waktu, tidak mungkin bagi Dirac untuk memasukkan medan elektromagnetik eksternal dengan cara relativistik invarian. Kemudian dicari persamaan lain yang dapat dimodifikasi untuk menggambarkan aksi gaya elektromagnetik. Persamaan baru ini juga harus menggambarkan struktur internal elektron dan spin. Maka dapat dituliskan persamaan

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t}\,\psi\,(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) = (-c^2\hbar^2\Delta + m^2c^4)\,\psi\,(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) \tag{2.57}$$

Karena persamaan evolusi kuantum mekanik harus orde pertama dalam turunan waktu. Maka , Dirac menggunakan persamaan (2.54) yang ia liniearisasi

$$E = c\sum_{i=1}^{3}\alpha_i p_i + \beta mc^2 \equiv c\,\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{p} + \beta mc^2 \tag{2.58}$$

dimana $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dan β ditentukan dengan persamaan (2.55), namun jika mengasumsikan $\boldsymbol{\alpha}$ dan β sebagai antikomutan dengan direpresentasikan oleh matriks $n\ x\ n$ (matriks Dirac). Membandingkan nilai E^2 berdasarkan persamaan (2.58) dan (2.55) , terdapat hubungan yang harus terpenuhi

$$\alpha_{\boldsymbol{i}}\alpha_{\boldsymbol{k}} + \alpha_{\boldsymbol{k}}\alpha_{\boldsymbol{i}} = 2\ \delta_{\boldsymbol{ik}}\mathbf{1} \qquad (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k} = 1,2,3,) \tag{2.59}$$

$$\alpha_{\boldsymbol{i}}\beta + \beta\alpha_{\boldsymbol{i}} = 0 \qquad (\boldsymbol{i} = 1,2,3,)$$

$$\beta^2 = \mathbf{1}$$

dengan $\delta_{\boldsymbol{ik}}$ merupakan symbol kroneker ($\delta_{\boldsymbol{ik}} = 1\ jika\ i = k\ , \delta_{\boldsymbol{ik}} = 0\ jika\ i \neq k$) 1 dan 0 adalah unit n-dimensi dan matriks nol. Matriks $n\ x\ n$ dari $\boldsymbol{\alpha}$ dan $\boldsymbol{\beta}$ harus hermitian sehingga pada persamaan (2.58) didapatkan *self-adjoint*. Untuk n-dimensi matriks Dirac didapatkan dengan mengembangkan persamaan (2.59)

$$tr\ \alpha_i = tr\beta^2\alpha_i = -tr\beta\alpha_i\beta = -tr\ \alpha_i\beta\beta = -tr\ \alpha_i = 0 \tag{2.60}$$

tr merupakan *trace* dari matriks. Di sisi lain, $\alpha_i^2 = 1$ maka nilai eigen untuk $\alpha_i$adalah ± 1. Pada persamaan ini menunjukkan n-dimensi harus merupakan bilangan genap. Untuk $n = 2$ paling banyak ada tiga linier bebas matriks antikomutan. Seperti, matriks Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.61}$$

Bersamaan dengan matriks 1 yang memebentuk basis pada ruang matriks Hermitian $2\ x\ 2$. Sehingga tidak ada tempat untuk matriks “energi diam(rest-energy)” β dua-dimensi. Pada empat dimensi (2.59) dapat terpenuhi jika,

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma_i} \\ \boldsymbol{\sigma_i} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{i} = 1,2,3, \tag{2.62}$$

Ini merupakan representasi sederhana yang diperkenalkan oleh Dirac. Kemudian untuk mekanika kuantum dari persamaan (2.58) kita bisa menuliskan persamaan Dirac

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) = H_0\psi(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) \tag{2.63}$$

H_0 secara ekplisit menyatakan ekspresi diferensial dari matriks

$$H_0 = -i\hbar c\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\nabla} + \beta mc^2 \tag{2.64}$$

$$= \begin{pmatrix} mc^2 1 & -i\hbar c\,\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\nabla} \\ -i\hbar c\,\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\nabla} & -mc^2 1 \end{pmatrix}$$

H_0 dapat direpresentasikan menjadi nilai vektor (*vector-value*) fungsi gelombang, sebagai berikut,

$$\psi(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \psi_1(t,x) \\ \vdots \\ \psi_4(t,x) \end{pmatrix} \tag{2.65}$$

Jika $m = 0$ (neutrino), maka massa pada persamaan (2.58) dihilangkan dan hanya memerlukan 3 antikomutan α_i. Pada kasus ini cukup menggunakan matriks $2\ x\ 2$. $E = c\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{p}$ memenuhi syarat $E^2 = c^2p^2$ yang didefinisikan dengan matriks Pauli. Dapat dituliskan hubungan dari dua komponen dalam persamaan ,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t) = c\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{p}\,\psi(t) \tag{2.66}$$

ini disebut persamaan Weyl. Hal ini tidak invarian dengan refleksi ruang dan karena itu ditolak hingga ditemukan pelanggaran paritas (*parity violation*) pada eksperimen neutrino. Jika dimensi ruangnya adalah 1 atau 2, bisa menggunakan matriks Pauli sebagai pengganti dari matriks Dirac. Persamaan dirac pada bentuk (2.63) dengan, (Thaller,1992)

$$H_0 = -i\hbar c\left(\sigma_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \sigma_3 mc^2 \tag{2.67}$$

2.4.1 Partikel bebas Spin $\frac{1}{2}$

Spin $\frac{1}{2}$ ini merupakan salah satu sistem spin yang penting, sebab proton, neutron, elektron, quark dan lepton memuat spin $\frac{1}{2}$. Kemudian, setelah memahami kasus mengenai spin $\frac{1}{2}$ dapat lebih sederhana untuk menyelesaikan kasus yang lain. Suatu partikel yang memuat spin $\frac{1}{2}$ bisa berada dalam keadaan positif yakni $m_s = \frac{1}{2}$ atau disebut dengan *spin up* atau berada dalam keadaan negatif yakni $m_s = -\frac{1}{2}$ yang disebut sebagai *spin down*, untuk merepresentasikan kedua keadaan ini dapat digunakan notasi arah ↑ dan ↓ . Namun terdapat bentuk yang lebih baik untuk merepresentasikannya yakni spinor atau vector kolom

$$\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{2.68}$$

Sering menjadi suatu pembicaraan bahwasanya partikel dengan spin $\frac{1}{2}$ ini hanya dapat berada pada salah satu keadaan diatas, namun terdapat suatu penelitian yang menghasilkan bahwa partikel spin $\frac{1}{2}$ bisa berada pada keduanya, yakni kondisi kombinasi linier.

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{2.69}$$

Operator α dan β merupakan suatu bilangan kompleks, hal ini menyatakan bahwa pengukuran dari S_z hanya dapat berada pada salah satu nilai , yakni $+\frac{1}{2}\hbar$ maupun pada $-\frac{1}{2}\hbar$. Pada hasil yang pertama tidak bisa membuktikan keberadaan partikel pada keadaan $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ sebelum pengukuran dilakukan. Dalam suatu kasus umum $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ dengan $|\alpha|^2$ yang merupakan suatu probabilitas yang dapat menyatakan mengenai pengukuran S_z mampu menghadilkan nilai $+\frac{1}{2}\hbar$, kemudian $|\beta|^2$ juga merupakan suatu probabilitas yang menghasilkan nilai $-\frac{1}{2}\hbar$, maka dapat diurmuskan sebagai berikut

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{2.70}$$

Untuk masing-masing dari component S adalah suatu matrks 2 x 2

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{2.71}$$

Eigenvalue dari $\hat{S}_x$ adalah $\pm\frac{\hbar}{2}$, yang mana hal tersebut sesuai dengan *eigenvector*

$$X_{\pm} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \tag{2.72}$$

Dengan menggunakan spinor $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, sebagai kombinasi linier maka berikut bentuk dari *eigenvector* nya

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \tag{2.73}$$

Didapatkan nilai untuk masing masing vector α dan β , yakni $\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\alpha+\beta)$ dan $\beta = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\alpha-\beta)$.

2.4.2 Fungsi gelombang persamaan Dirac

Sebelum memperalajari mengenai fungsi gelombang Dirac ψ dengan transformasi Lorentz, kita lihat maksud yang tersirat pada persamaan berikut,

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0 \tag{2.74}$$

pada elektromagnetik persamaan dirac dapat dituliskan,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)\gamma_\mu\psi + \frac{mc}{\hbar}\psi = 0 \tag{2.75}$$

Dengan mengasumsikan bahwa A_μ bergantung waktu, untuk ψ yang bergantung waktu diberikan oleh

$$\psi = \psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})|_{t=0} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \tag{2.76}$$

(yang berarti bahwa ψ adalah fungsi eigen dari $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ dengan E sebagai nilai eigen atau *eigenvalue*). Maka persamaan gabungan untuk komponen *spin-up* dan *spin-down*

$$\left[\boldsymbol{\sigma}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e\boldsymbol{A}}{c}\right)\right]\psi_B = \frac{1}{c}(E - eA_0 - mc^2)\psi_A, \tag{2.77}$$

$$-\left[\boldsymbol{\sigma}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e\boldsymbol{A}}{c}\right)\right]\psi_A = -\frac{1}{c}(E - eA_0 + mc^2)\psi_B$$

dimana $A_\mu = (\boldsymbol{A}, iA_0)$ seperti sebelumnya. Dengan menggunakan persamaan kedua, dapat dengan mudah untuk mengeliminasi ψ_B dalam persamaan pertama maka didapatkan

$$\left[\boldsymbol{\sigma}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e\boldsymbol{A}}{c}\right)\right]\left[\frac{c^2}{E - eA_0 + mc^2}\right]\left[\boldsymbol{\sigma}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e\boldsymbol{A}}{c}\right)\right]\psi_A = (E - eA_0 - mc^2)\psi_A \tag{2.78}$$

Kita asumsikan bahwa $E \approx mc^2$, $|eA_0| \ll mc^2$, maka dapat menentukan energi yang diukur dengan $E^{(NR)} = E + mc^2$

$$\frac{c^2}{E - eA_0 + mc^2} = \frac{1}{2m}\left[\frac{2mc^2}{2mc^2 + E^{(NR)} - eA_0}\right] \tag{2.79}$$

$$= \frac{1}{2m}\left[1 - \frac{E^{(NR)} - eA_0}{2mc^2} + \cdots\right]$$

Hal ini dapat dianggap sebagai perpanjangan dari pangkat $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ disebabkan karena $E^{(NR)} - eA_0$ diperkirakan $\frac{\left[\boldsymbol{p} - \left(\frac{e\boldsymbol{A}}{c}\right)\right]^2}{2m} \approx \frac{mv^2}{2}$. Dengan menyimpan hanya suku utama pada persamaan (2.80) diperoleh

$$\frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e\boldsymbol{A}}{c}\right)\boldsymbol{\sigma}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e\boldsymbol{A}}{c}\right)\psi_A = \left(E^{(NR)} - eA_0\right)\psi_A, \qquad (2.80)$$

$$\left[\frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma}.\left(\boldsymbol{p} - \frac{e\boldsymbol{A}}{c}\right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B} + eA_0\right]\psi_A = E^{(NR)}\psi_A$$

Oleh sebab itu pada orde nol di $\left(\frac{v}{c}\right)^2$, ψ_A tidak lain merupakan dua komponen fungsi gelombang Schrodinger-Pauli non reltivistik yang dikalikan dengan $e\text{^}\left(-\frac{imc^2t}{\hbar}\right)$. Dengan menggunakan persamaan kedua pada (2.78), dapat terlihat bahwa ψ_B "lebih kecil" dari ψ_A dengan factor sekitar $\frac{\left|\boldsymbol{p} - e\left(\frac{A}{c}\right)\right|}{2mc} \approx \frac{v}{2c}$, dengan ketentuan $E \approx mc^2$, $|eA_0| \ll mc^2$ valid. Untuk ketentuan dengan $E \sim mc^2$, ψ_A dan ψ_B masing-masing disebut sebagain komponen besar dan kecil dari fungsi gelombang Dirac.

2.4.3 Solusi Persamaan Dirac pada kasus Sumur Potensial

Persamaan Dirac adalah persamaan gelombang relativistik yang memiliki bentuk persamaan diferensial, bentuk penyelesaiannya akan menghasilkan suatu fungsi gelombang $\psi(x)$. Fungsi gelombang tersebut adalah suatu deskripsi dari keadaan gerak suatu sistem, sebab dari fungsi gelombang diketahui tentang distribusi dari probabilitas gerak partikel. Mengingat bahwasanya suatu besaran-besaran dinamis bisa dinyatakan sebagai fungsi posisi serta momentum sudut. Suatu besaran besaran dinamis diperkirakan dapat diketahui nilainya berdasarkan suatu pengukuran, yang dimaksud dengan pengukuran dalam fisika kuatum yakni mengerjakan atau mengembangkan operator yang meakili besaran fisika yang salah satunya ialah fungsi gelombang dengan tujuan untuk menggambarkan suatu keadaan dari sistem dalam pengukuran tersebut (Sutopo,2005).

Strategi awal yang digunakan dirac untuk mendapatkan solusinya yakni dengan memfaktorkan rumus pada relasi energi-momentum, yang lebih mudahnya memisalkan p^{μ} adalah p^{0} dengan nilai dari p nya adalah 0, maka didapatkan dua persamaan berikut (Griffith,2008)

$$p^{\mu}p_{\mu} - m^2c^2 = 0 \qquad 2.81$$

$$(p^0)^2 - m^2c^2 = (p^0 + mc)(p^0 - mc) = 0$$

$$(p^0 + mc) = 0 \text{ atau } (p^0 - mc) = 0$$

namun akan menjadi bentuk yang berbeda jika yang di faktorkan pada kasus ini adalah p^{μ}, akan terdapat suatu faktor baru yakni β^{κ} dan γ^{λ} keduanya merupakan suatu *eight coefficient* yang harus untuk ditentukan. Karena pada p_{κ} tidak boleh sesuatu yang linier, maka dapat dipilih salah satunya $\beta^{\kappa} = \gamma^{\kappa}$

$$p^{\mu}p_{\mu} - m^2c^2 \qquad 2.82$$

$$p^{\mu}p_{\mu} - m^2c^2 = (\beta^{\kappa}p_{\kappa} + mc)(\gamma^{\lambda}p_{\lambda} - mc)$$

$$(p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 - m^2c^2 = (\beta^0p^0 - \beta^1p^1 - \beta^2p^2 - \beta^3p^3$$

$$+mc)(\gamma^0p^0 - \gamma^1p^1 - \gamma^2p^2 - \gamma^3p^3 - mc$$

$$\beta^{\kappa}\gamma^{\lambda}p_{\kappa}p_{\lambda} - mc(\beta^{\kappa} - \gamma^{\kappa})p_{\kappa} - m^2c^2$$

Kemudian perlu juga untuk menentukan koefisien γ^{κ}, maka

$$p^{\mu}p_{\mu} = \gamma^{\kappa}\gamma^{\lambda}p_{\kappa}p_{\lambda} \qquad 2.83$$

$$(p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = (\gamma^0)^2(p^0)^2 + (\gamma^1)^2(p^1)^2 + (\gamma^2)^2(p^2)^2$$

$$+(\gamma^3)^2(p^3)^2 + (\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0)p_0p_1 + (\gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0)p_0p_2 + (\gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0)p_0p_3 + (\gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1)p_1p_2 + (\gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^1)p_1p_3 + (\gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2)p_2p_3$$

Dengan menentukan bahwa $\gamma^0 = 1$ dan $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma^3 = i$, namun hanya dengan ini tidak bisa menghilangkan suku silang pada rumus. Maka Dirac memisalkan γ menjadi suatu matriks dengan $\mu \neq \nu$

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1, \quad \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 0 \qquad 2.84$$

atau dapat lebih singkat seperti berikut, ($g^{\mu\nu}$ merupakan matriks minkowski, dan kurung kurawalnya menyatakan *antikomutator)*

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \qquad 2.85$$

Penyelesaiannya dapat menggunakan matriks $4\ x\ 4$, yakni menggunakan himpunan matriks gamma dengan standar "*Bjorken and Drell*", dengan $\sigma^i (i = 1,2,3)$ menunjukkan matriks pauli. Untuk "1" menunjukkan matriks ordo $2\ x\ 2$ dan "0" menunjukkan matriks ordo $2\ x\ 2$ juga.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad 2.86$$

karena menggunakan matriks $4\,x\,4$ maka relasi energi-momentum dapat dirumuskan

$$\left(p^\mu p_\mu - m^2c^2\right) = (\gamma^\kappa p_\kappa + mc)\left(\gamma^\lambda p_\lambda - mc\right) = 0 \qquad 2.87$$

$$\gamma^\mu p_\mu - mc = 0$$

Kemudian dilakukan substitusi $p_\mu \to i\hbar\,\partial_\mu$ dan pada fungsi gelombang ψ, dihasilkan persamaan Dirac berikut

$$\gamma^\mu p_\mu - mc = 0 \qquad 2.88$$

$$\gamma^{\mu}\left(i\hbar\partial_{\mu}\right)\psi - mc\psi = 0$$

$$i\hbar\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - mc\psi = 0$$

Perlu diingat bahwa ψ ini merupakan matriks kolom dengan empat elemen, yang disebut sebagai “*bi-spinor”* atau “*Dirac spinor*” (walaupun spinor ini merupakan 4 komponen tetapi spinor bukan vektor empat)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \qquad 2.89$$

2.4.3.1 Solusi persamaan Dirac yang bergantung waktu

Persamaan Dirac dihasilkan dari pemfaktoran relasi energi momentum relativistik, yang harapannya dapat menyelesakan permasalahan solusi energi negatif pada persamaan Klien-Gordon. Pada persamaan umum dirac didefinisikan oleh persamaan berikut

$$i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - mc\psi = 0 \qquad 2.90$$

Solusi pada Persamaan dirac merupakan fungsi (x, t) atau dapat dituliskan menjadi $\psi = (x, t)$. Lalu asumsikan untuk ψ tidak bergantung pada posisi dapat diartikan bahwa ψ merupakan persamaan *time-dependent*, dengan kondisi partikelnya berada pada keadaan diam. Karena pada persamaan umum terdapat faktor ($\mu = 1{,}2{,}3$), maka

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \qquad 2.91$$

Untuk persamaan umum Dirac digambarkan dengan $\boldsymbol{p} = 0$, lalu persamaan tersebut dapat diubah menjadi bentuk terpisah dengan masing-masing ruasnya dikalikan` dengan $\frac{i\hbar}{c}$, sehingga pada Persamaan umum dirac dapat dirumuskan menjadi,

$$\frac{i\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} - mc\psi = 0 \qquad 2.92$$

$$\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\frac{mc^2}{\hbar}\psi$$

Pada persamaan (2.92) ini juga dapat dirumuskan menggunakan bentuk matriks, dengan dimisalkan jika $\psi_A = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ dan $\psi_B = \begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$ juga pada γ^0 ini menyatakan bentuk matriks $4\ x\ 4$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial t}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial t}\\ \frac{\partial\psi_4}{\partial t}\end{pmatrix} = -i\frac{mc^2}{\hbar}\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial t}\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial t}\\ \frac{\partial\psi_4}{\partial t}\end{pmatrix} \qquad 2.93$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_A}{\partial t}\\ \frac{\partial\psi_B}{\partial t}\end{pmatrix} = -i\frac{mc^2}{\hbar}\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix}$$

Untuk persamaan (2.93) pada faktor ψ_A dan ψ_B dapat dijabarkan sebagai berikut

$$\frac{\partial\psi_A}{\partial t} = -i\frac{mc^2}{\hbar}\psi_A \qquad 2.94$$

$$\int_{\psi_A(0)}^{\psi_A(t)}\frac{\partial\psi_A}{\psi_A} = -i\frac{mc^2}{\hbar}\int_0^t\partial t$$

$$\ln\frac{\psi_{A(t)}}{\psi_{A(0)}} = -i\frac{mc^2}{\hbar}t$$

$$\psi_A(t) = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\ \psi_A(0)$$

$$-\frac{\partial\psi_b}{\partial t} = \ -i\ \frac{mc^2}{\hbar}\ \psi_A$$

$$\int_{\psi_B(0)}^{\psi_B(t)} \frac{\partial\psi_B}{\psi_B} = i\ \frac{mc^2}{\hbar}\int_0^t \partial t$$

$$\ln\frac{\psi_{B_{(t)}}}{\psi_{B_{(0)}}} = \ i\ \frac{mc^2}{\hbar}\ t$$

$$\psi_B(t) = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\ \psi_B(0)$$

Pada persamaan dirac yang memiliki partikel dengan keadaan diam energinya adalah $E = mc^2$, yang menyatakan energi partikel berada pada keadaan yang positif dan untuk energi partikel yang berada pada keadaan negatif dapat dinyatakan menggunakan $E = -mc^2$. Pada energi positif diartikan dengan partikel dengan energi positif dan untuk energi negatif diartikan sebagai antipartikel namun energinya positif, misalnya jika ψ_A menjelaskan mengenai elektron maka ψ_B menjelaskan mengenai positron. Kemudian didapat dua persamaan untuk solusi Persamaan Dirac yang bergantung terhadap waktu yakni,

$$\psi_A(t) = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\ \psi_A(0) \qquad 2.95$$

$$\psi_A(t) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}\ \psi_A(0)$$

$$\psi_B(t) = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\ \psi_B(0) \qquad 2.96$$

$$\psi_B(t) = e^{i\frac{Et}{\hbar}}\ \psi_B(0)$$

Dapat dijabarkan untuk masing masing nilai ψ pada elektron spin up dan spin down ataupun pada positron spin up dan spin down,

$$\psi^{(1)} = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{partikel spin up (elektron spin up)} \qquad 2.97$$

$$\psi^{(2)} = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{partikel spin down (elektron spin down)}$$

$$\psi^{(3)} = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{antipartikel spin up (positron spin up)}$$

$$\psi^{(4)} = e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{antipartikel spin down (positron spin down)}$$

2.4.3.2 Solusi persamaan Dirac yang tidak bergantung waktu

Berbeda dengan mencari solusi persamaan Dirac yang bergantung waktu, untuk langkah awal dari menentukan solusi persamaan dirac yang tidak bergantung waktu ini ialah menebak solusi *plane-wave*nya

$$\psi(x) = \alpha e^{-ik_x}u(k) \qquad 2.98$$

(α merupakan suatu konstanta normalisasi), dari persamaan (2.98) diharapkan supaya dapat menemukan nilai dari vector empat k^μ lalu mengaitkannya dengan bispinor $u(k)$, sehingga nantinya $\psi(x)$ dapat memenuhi persamaan dirac, dengan menemukan differensialnya kemudian substitusikan persamaan (2.98) ke persamaan (2.90)

$$\partial_\mu\psi(x) = \left(-ik_\mu\right)ae^{-ik_x}u(k) \qquad 2.99$$

$$= -ik_{\mu}\psi$$

$$i\hbar\gamma^{\mu}\left(-ik_{\mu}ae^{-ik_{x}}u(k)\right) - mc\ \left(ae^{-ik.x}u(k)\right) = 0 \qquad 2.100$$

$$\left(\hbar\gamma^{\mu}k_{\mu} - mc\right)u = 0$$

Persamaan (2.100) disebut dengan momentum ruang persamaan dirac, apabila "u" mampu memenuhi persamaan (2.100) maka fungsi gelombang bisa memenuhi persamaan dirac. Maka dapat kita rumuskan dalam bentuk matriks,

$$\gamma^{\mu}k_{\mu} = \gamma^{0}k^{0} - \boldsymbol{\gamma}.\boldsymbol{k} \qquad 2.101$$

$$= k^{0}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \boldsymbol{k}.\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k^{0} & -\boldsymbol{k}.\ \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma} & k^{0} \end{pmatrix}$$

Ketika persamaan (2.101) disubstitusikan pada persamaan (2.100), maka dapat dituliskan menjadi (dengan $u_A = u_1, u_2$ dan $u_B = u_3, u_4$)

$$\left(\hbar\gamma^{\mu}k_{\mu} - mc\right)u = \left[\hbar\begin{pmatrix} k^{0} & -\boldsymbol{k}.\ \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma} & k^{0} \end{pmatrix} - mc\right]\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \qquad 2.102$$

$$\left(\hbar\gamma^{\mu}k_{\mu} - mc\right)u = \begin{pmatrix} \hbar k^{0} - mc & -\hbar\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma} \\ \hbar\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma} & -\hbar k^{0} - mc \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

$$\left(\hbar\gamma^{\mu}k_{\mu} - mc\right)u = (\hbar k^{0} - mc)u_A - (\hbar\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma})u_B = 0$$

$$(\hbar k^{0} - mc)u_A - (\hbar\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma})u_B = 0 \qquad 2.103$$

$$(\hbar k^{0} - mc)u_A = (\hbar\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma})u_B$$

$$u_A = \frac{1}{k^{0} - \frac{mc}{\hbar}}\ (\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma})u_B$$

$$(\hbar\boldsymbol{k}\ .\boldsymbol{\sigma})u_A - (\hbar k^{0} + mc)u_B = 0$$

$$(\hbar\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma})u_A = (-\hbar k^{0} + mc)u_B$$

$$u_B = \frac{1}{k^{0} - \frac{mc}{\hbar}}\ (\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma})u_A$$

Kemudian dapat disubstitusikan persamaan u_B ke persamaan u_A, dengan nilai $\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma}$ dan $(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma})^2$ yang sebelumnya dijabarkan

$$\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma} = \left(k_x\boldsymbol{i} + k_y\boldsymbol{j} + k_z\boldsymbol{k}\right).(\sigma_1\boldsymbol{i} + \sigma_2\boldsymbol{j} + \sigma_3\boldsymbol{k}) \qquad 2.104$$

$$= \left(k_x\sigma_1 + k_y\sigma_2 + k_z\sigma_3\right)$$

$$= k_x\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + k_y\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + k_z\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}k_z & k_x - ik_y\\ k_x + ik_y & -k_z\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma})^2 = \begin{pmatrix}k_z^2 + k_y^2 + k_x^2 & 0\\ 0 & k_z^2 + k_y^2 + k_x^2\end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{k^2}.\boldsymbol{1}$$

$$u_A = \frac{1}{k^0 - \frac{mc}{\hbar}}\,(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma})\,\frac{1}{k^0 + \frac{mc^2}{\hbar}}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma})u_A \qquad 2.105$$

$$= \frac{1}{(k^0)^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma})^2u_A$$

$$u_A = \frac{(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\sigma})^2}{(k^0)^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2}u_A$$

$$= \frac{\boldsymbol{k}^2}{(k^0)^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2} = 1$$

$$\boldsymbol{k^2} = (k^0)^{\boldsymbol{2}} - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2$$

$$(k^0)^{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{k^2} = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2$$

$$k^2 = k^\mu k_\mu = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2$$

Untuk nilai $\psi = e^{-ikx}u(k)$ memenuhi persamaan Dirac, maka $\hbar k^{\mu}$ haruslah merupakan vector-4,

$$u_A = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} : u_B = \frac{\boldsymbol{p}\,.\,\boldsymbol{\sigma}}{p^0 + mc}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2}\begin{pmatrix}p_z\\p_X + ip_y\end{pmatrix} \qquad 2.106$$

$$u^{(1)} = N\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{c(p_z)}{E + mc^2}\\\frac{c\left(p_x + ip_y\right)}{E + mc^2}\end{pmatrix}$$

$$u_A = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} : u_B = \frac{\boldsymbol{p}\,.\,\boldsymbol{\sigma}}{p^0 + mc}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2}\begin{pmatrix}p_x - ip_y\\-pz\end{pmatrix} \qquad 2.107$$

$$u^{(2)} = N\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{c\left(p_x - ip_y\right)}{E + mc^2}\\\frac{c(-p_z)}{E + mc^2}\end{pmatrix}$$

$$u_B = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} : u_A = \frac{\boldsymbol{p}\,.\,\boldsymbol{\sigma}}{p^0 + mc}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2}\begin{pmatrix}p_z\\p_X + ip_y\end{pmatrix} \qquad 2.108$$

$$v^{(1)} = N\begin{pmatrix}\frac{c(p_z)}{E + mc^2}\\\frac{c\left(p_x + ip_y\right)}{E + mc^2}\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$u_B = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} : u_A = \frac{\boldsymbol{p}\,.\,\boldsymbol{\sigma}}{p^0 + mc}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2}\begin{pmatrix}p_x - ip_y\\-p_z\end{pmatrix} \qquad 2.109$$

$$v^{(2)} = N\begin{pmatrix}\frac{c\left(p_x - ip_y\right)}{E + mc^2}\\\frac{c(-p_z)}{E + mc^2}\\0\\1\end{pmatrix}$$

Pada persamaan (2.106) dan(2.107) merupakan solusi yang didapatkan yakni u^1 dan u^2 menunjukkan keadaan dari dua spin dari elektron yakni elektron spin up dan elektron spin down, sedangkan untuk persamaan (2.108) dan (2.109) didapat solusi yakni v^1 dan v^2 yang menunjukkan keadaan dari positron yakni positron spin up dan positron spin down. Untuk nilia u yang harusnya memenuhi persamaan dirac untuk ruang momentum yakni $(\gamma^{\mu}p_{\mu} - mc)u = 0$, begitu juga dengan v yakni $\left(\gamma_{\mu}^{\mu p} + mc\right)v = 0$, sehingga hasil akhirnya didapatkan dua solusi untuk persamaan dirac yang tidak bergantung waktu, yakni untuk yang particle dan antiparticle

$$\psi = ae^{-i\frac{p_x}{\hbar}}u \text{ (partikel)} \qquad 2.110$$

$$\psi = ae^{i\frac{p_x}{\hbar}}v \text{ (antipartikel)} \qquad 2.111$$

2.5 Partikel dalam Kajian Islam

Dalam suatu dunia Sains khususnya dalam ruang lingkup fisika, terdapat suatu materi yang bernama partikel. Pada dasarnya sebelum dikemukakan dalam dunia sains materi mengenai partikel ini sudah adala dalam Al-Quran, seperti yang dikemukakan oleh Jhon Dalton pada awal abad ke-19 bahwa terdapat suatu partikel terkecil dari materi yang tidak bisa terbagi lagi yang dikenal dengan sebutan atom dan ia juga mengemukakan bahwa atom tidak dapat dibuat maupun dihancurkan (Muchtaridi, 2009).

Seiring berjalannya waktu dunia sains dan fisika terus berkembang mengikuti era, sehingga seorang ilmuwan fisika kembali mengemukakan teori pembaharuan dari teori John Dalton. Berawal dari penelitian yang dilakukan oleh JJ Thomson tentang proses terjadinya suatu sinar positif yang terdapat dalam suatu atom.

Kemudian seiring dengan ilmu pengetahuan yang semakin berkembang, kemudian muncul suatu pendapat baru mengenai atom tersebut yang dikemukakan oleh Rutherford dan Niels Bohr yang menjelaskan tentang posisi dari suatu elektron dengan sangat detail dan juga menjelaskan tentang adanya suatu inti dari atom yang memiliki penyusun berupa Proton dan Neutron. Hal ini yang menjadi suatu bukti mengenai partikel merupakan materi terkecil dalam dunia sains.

Segala sesuatu pada alam semesta ini memiliki unsur-unsur penyusunnya serta partikel didalamnya, mulai dari partikel yang berukuran makroskopis maupun mikroskopis. Penjelasan mengenai partikel ini sudah dipaparkan dalam Al-Quran yang diturunkan oleh Allah SWT kepada Rasulullah pada awal abad ke-7M. Allah SWT menjelaskan dalam firmannya Qs. Saba’(34) :3

وقَالَ الَّذِيْنَ كَفَرُوْا لَا تَأْتِيْنَا السَّاعَةُ قُلْ بَلٰى وَرَبِّيْ لَتَأْتِيَنَّكُمْۙ عٰلِمِ الْغَيْبِۙ لَا يَعْزُبُ عَنْهُ مِثْقَالُ ذَرَّةٍ فِى السَّمٰوٰتِ وَلَا فِى الْاَرْضِ وَلَآ اَصْغَرُ مِنْ ذٰلِكَ وَلَآ اَكْبَرُ اِلَّا فِيْ كِتٰبٍ مُّبِيْنٍۙ (٣)

“Orang-orang yang kufur berkata,”hari Kiamat itu tidak akan datang kepada kami.” Katakanlah (Nabi Muhammad), “Pasti datang. Demi tuhanku yang mengetahui yang ghaib, kiamat itu pasti mendatangi kamu. Tidak ada yang tersembunyi bagi-Nya sekalipun sebesar dzarrah, baik yang dilangit maupun yang di bumi, yang lebih kecil daripada itu atau yang lebih besar, kecuali semuanya ada dalam kitab yang jelas (Lauhul Mahfudz).” (Qs. Saba’ (34): 3)

Menurut Tafsir Ibnu Katsir surat merupakan salah satu dari tiga ayat dalam Al-Qur’an yang Allah SWT wahyukan kepada Rasulullah yang berupa penegasan dengan memakai sumpah menyebut nama Tuhannya bahwasanya hari kiamat benar-benar akan terjadi. Mujahid dan Qatadah telah mengatakan sehubungan dengan makna firman-Nya: *Tidak ada tersembunyi dari-Nya.* (Saba: 3) Yakni tidak ada yang gaib dari-Nya. Dengan kata lain, semuanya berada di bawah pengetahuan-

Nya, maka tiada sesuatu pun yang samar bagi-Nya. Semua tulang itu sekali telah bercerai-berai dan lenyap serta tercabik-cabik dagingnya, Dia mengetahui ke mana perginya tulang-tulang itu dan tercerai-berai ke mana. Dia mampu mengembalikannya sebagaimana Dia menciptakannya pada yang pertama kali. Sesungguhnya Dia Maha Mengetahui segala sesuatu (Tafsir Ibnu Katsir, 2015).

Berdasarkan Tafsir Al-Ahzar pada ayat 3 dalam Qs. Saba’ ini terungkaplah hasil penyelidikan terakhir bahwa zarrah atau atom yang dikatakan tidak dapat dibagi lagi, karena sudah sehabis-habis kecil, adalah perhitungan yang salah. Ternyata kebenaran dari hasil penyelidikan bahwa atom itu bukanlah yang sehabis-habis kecil, malahan ada lagi yang lebih kecil dari atom. Atom mempunyai neutron yang dianggap sebagai intinya dan atom adalah kumpulan di antara neutron itu dengan satelit-satelitnya, yang diberi nama proton, elektron dan sebagainya. Semuanya itu telah tercatat dalam kitab yang nyata, tegasnya terdaftar di sisi Allah SWT, bukan barang yang terjadi sendirinya (Hamka, 2015).

Qs. Saba’ ayat 3 ini dalam Tafsir Jalalain (Dan orang-orang yang kafir berkata, "Hari terakhir itu tidak akan datang kepada kami") yakni hari kiamat. (Katakanlah) kepada mereka, ("Pasti datang, demi Rabbku Yang mengetahui yang gaib, sesungguhnya kiamat itu pasti akan datang kepada kalian) kalau dibaca 'Aalimil Ghaibi berarti menjadi sifat dari lafal Rabbii. Kalau dibaca 'Aalimul Ghaibi berarti menjadi Khabar dari Mubtada, sehingga artinya menjadi seperti berikut, Ya, pasti datang, demi Rabbku, hari kiamat itu pasti akan datang kepada kalian; Dia mengetahui yang gaib. Bacaan yang kedua ini lebih sesuai dengan kalimat yang sesudahnya, yaitu, (tidak ada yang tersembunyi) tiada yang tidak tampak (bagi-Nya seberat) sebesar (zarah pun) zarah artinya semut yang paling kecil (yang ada di langit dan yang ada di bumi, dan tidak ada pula yang lebih kecil dari itu dan yang lebih besar, melainkan semuanya tercatat dalam Kitab yang nyata.) Kitab yang jelas, yang dimaksud adalah Lauhul mahfuz (Tafsir Jalalain, 2023).

Dalam Qs. Saba' ayat ke 3 telah dijelaskan tentang suatu materi yang bernama "*dzarrah*" dimana dalam bahasa Arab pada umumnya diartikan sebagai atom, dijelaskan bahwa Allah SWT mengetahui segalanya walau hal tersebut berukuran sangat kecil dan hampir tidak bisa terlihat dengan penglihatan secara normal. Hal ini juga menjadi suatu pembuktian jika dalam Al-Qur'an sudah lebih dahulu mengemukakan materi tentang partikel sebelum dikemukakan oleh ilmuwan fisika.

Suatu partikel juga memiliki pasangannya, sebagaimana yang dikemukakan oleh Paul Dirac bahwa setiap materi yang diciptakan memiliki pasangan (berpasangan) dengan lawan jenisnya yakni antimateri. Materi dan Antimateri memiliki sifat yang berbeda bahkan berlawanan, dimana Dirac juga memberikan contoh tentang hal tersebut yakni suatu elektron anti materi memiliki muatan positif dan proton memilik muatan negatif. Hal tersebut dijelaskan dalam suatu sumber ilmiah yang mengatakan:

"...setiap partikel memiliki antipartiel yang memiliki muatan berlawanan...Dan hubungan ketidakpastian mengatakan kepada kita bahwa penciptaam pasangan dan pemusnahan berpasangan terjadi dalam vakum disetiap saat disetiap tempat".

Mengenai segala sesuatu yang berpasangan, hal ini juga dijelaskan dalam Al-Quran surah Yasin(36) ayat 36, yakni

سُبْحٰنَ الَّذِيْ خَلَقَ الْاَزْوَاجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنْۢبِتُ الْاَرْضُ وَمِنْ اَنْفُسِهِمْ وَمِمَّا لَا يَعْلَمُوْنَ (٣٦)

"Mahasuci (Allah) yang telah menciptakan semuanya berpasang-pasangan, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka sendiri maupun dari apa yang tidak mereka ketahui"

Menurut Tafsir Ibnu Katsir penjelasannya yakni, Mahasuci Tuhan yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi. Yakni berupa berbagai macam tanaman dan pohon-pohonan yang berbuah. dan dari diri mereka sendiri. Maka Dia menjadikan mereka ada yang jenis pria dan ada yang jenis wanita. maupun dari apa yang tidak mereka ketahui. Yaitu dari berbagai macam makhluk yang beraneka ragam yang tidak mereka ketahui. Ayat ini semakna dengan apa yang disebutkan oleh Allah SWT dalam ayat lain melalui firman-Nya: Dan segala sesuatu Kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat akan kebesaran Allah yakni Qs.Az-Zariyat: 49. (Tafsir Ibnu Katsir, 2015).

Berdasarkan Tafsir Al-Ahzar surah ini membahas mengenai kekayaan Allah SWT dalam Alam. Secara ringkas ditafsirkan bahwa Semuanya diciptakan Allah berpasang-pasangan. Ada awal dan akhir, ada pangkal ada ujung, ada langit ada bumi, ada kasar ada halus, dan banyak lagi, semuanya berpasang-pasangan. Segala tumbuh-tumbuhan yang tumbuh di muka bumi ini pun berpasangan juga. Tiba pada yang tumbuh dari bumi dan pada binatang-binatang disebut orang ada jantan dan ada betina. Begitu juga halnya. Pada manusia kita beri nama laki-laki dan perempuan. Meskipun tadinya tidak tahu, sebagaimana dikatakan dalam ayat initetapi lama-kelamaan dibukakan Allah SWT juga rahasia itu kepada beberapa manusia yang terbuka pikiran dan lanjut akalnya. Yaitu tentang asal mula kejadian atom. Zat paling kecil yang tidak terbagi lagi itu. Menurut penenelitian makanya atom bisa terjadi ialah karena pergeseran di antara positif dan negatif. Dengan pertemuan keduanya itu barulah atom ada, dan atom itu bermuatan positif maupun negatif juga dengan adanya pertemuan di antara benda dan tenaga. Dari pertemuan positif negatif jualah timbul suatu energi yang bisa dihasilkan dari keduanya (Hamka, 2015).

Menurut Kemenag yang secara ringkas menafsirkan ayat ini yakni, Mahasuci Allah dari sifat yang tidak layak bagi-Nya, Dialah yang telah menciptakan semuanya berpasang-pasangan, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka sendiri, yaitu keturunan Nabi Adam dari jenis laki-laki dan perempuan, maupun dari apa yang tidak mereka ketahui dari semua ciptaan Allah yang terbentang di alam semesta. 37. Dan suatu tanda kebesaran Allah bagi mereka adalah datangnya waktu malam. Ketika malam tiba, Kami tanggalkan siang dari malam itu, maka seketika itu mereka berada dalam kegelapan malam (Tafsir Kemenag, 2023).

Kata berpasang-pasangan biasanya menunjukkan pada suatu pasangan manusia atau insan, namun pada kalimat "dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi" hal ini bisa menyatakan hal selain manusia. Begitupun dalam kalimat "dari apa yang tidak mereka ketahui" hal ini merujuk pada hal-hal yang lebih luas lagi cakupannya. Dapat kita kaitkan dengan keberadaan partikel yang tidak dapat kita lihat secara jelas, bahkan ada yang tidak mengetahui dari keberadaan partikel tersebut.

2.5.1 Pengertian *Dzarrah*

Dzarrah memiliki pengertian secara umum yakni benda yang sangat kecil. Menurut kamus bahasa arab *Almaany* kata *dzarrah* (ذَرَّة) memiliki beberapa arti sebagai berikut: atom, partikel, jagung-tepung jagung, bagian terkecil, bagian yang terkecil, zarrah. Kata ذَرَّةْ merupakan bentuk isim nakiroh, sebab ciri-ciri yang menunjukkan isim nakiroh yakni dengan adanya tanwin (ٌ-) yang terdapat dalam kata ذَرَّةْ, selain itu kata dzarrah juga menunjukkan isim muannats karena kata yang di *Nash* kan dalam Al-Qur'an (Hakim, 2003). Berdasarkan tasrif kata ذَرَّةْ memiliki kata awal yakni ذَرَى dengan (فعل الأمر)اِذْرِ ,(فعل مضارع)يَذْرِي ,(فعل مضي)ذَرَى dengan arti dari *dzara* yakni atom (tasrif reverso).

Pengertian ذَرَّةْ menurut Ibnu jauzi memiliki 5 arti dari para ulama tafsir, sebagai berikut:

1. *Dzarrah* memiliki arti kepala semut merah, yang mana pendapat tersebut diriwayatkan oleh Ikrimah dari Ibnu Abbas RA.
2. *Dzarrah* memiliki arti butiran tanah yang diriwayatkan oleh Yazid bin Al-Asham daari Ibnu Abbas RA.
3. *Dzarrah* memiliki arti semut paling kecil, yang merupakan pendapat ahli bahasa yakni Ibnu Qutaibah dan Ibnu Faris.
4. *Dzarrah* memiliki arti biji khardalah (tanaman mustard), yang mana arti ini pendapat dari At-Tsalabi.
5. *Dzarrah* memiliki arti titik-titik debu yang terlihat di udara ketika terdapat celah pada dinding yang terkena sinar matahari, hal ini juga merupakan pendapat dari At-Tsalabi.

Ibnu jauzi juga memberikan suatu kesimpulan yaitu "pahamilah bahwa penyebutan *dzarrah* hanyalah ungkapan yang bisa ditangkap oleh logika manusia. Karena tujuan sebenarnya, bahwa Allah SWT tidak berbuat dzalim baik sedikit maupun banyak". Maka makna *dzarrah* tidak untuk mendeskripsikan suatu benda akan tetapi menggambarkan suatu hal yang begitu kecil untuk memberikan pemahaman kepada manusia pada saat ayat-ayat Al-Qur'an yang merujuk pada kata *dzarrah* (Permana, 2020). Menurut ustadz Firanda pengertian *dzarrah* adalah ungkapan dari sesuatu yang sangat kecil dalam bahasa arab, serta *dzarrah* tersebut merupakan wujud yang sangat ringan dan sangat kecil (Sunnah Reminders, 2021).

Makna *dzarrah* (ذَرَّة) dalam Qs. Dzariyaat berasal dari kata (الذريات) pada ayat pertama yang memiliki bentuk lain yakni (ذَرَّى) dengan (فعل مضارغ) يَذْرِي, (فعل مضي) ذَرَى , dimana pada ayat ini memiliki arti angin, akan tetapi yang digunakan penafsirannya ialah *dzarrah* merupakan bentuk jamak dari (الذريات) yakni (ذَرَّى). Sedangkan pada kata (ذَرْوًا), dalam ayat ini memiliki arti debu-debu yang juga bentuk lain yakni (ذَرِّى) dengan arti secara spesifik yakni berkenaan dengan atom atau benda atomik (Almaany.com).

Dzarrah juga dibahas dalam Qs. Saba' ayat: 3 pada kata (ذَرَّةٍ) yang memiliki arti *dzarrah* atau bagian terkecil dalam penelitian ini yang disebut dengan partikel (Almaany.com). Sehingga berdasarkan kedua ayat yang telah dijelaskan dapat disimpulkan mengenai arti dari kata *dzarrah* yakni partikel, yang mana hal tersebut sesuai dengan kajian yang telah dikaji dalam penelitian ini.

BAB III

SUMUR POTENSIAL BERGERAK SEBAGIAN

3.1 Persamaan Dirac

3.1.1 Persamaan Dirac yang tidak bergantung Waktu

Persamaan dirac merupakan suatu persamaan gelombang relativistik yang mana memiliki bentuk persamaan suatu diferensial yang hasilnya akan didapatkan solusi dengan bentuk fungsi gelombang $\psi(x)$. Suatu fungsi gelombang adalah suatu bentuk solusi dari keadaan gerak pada sistem yang berisi tentang informasi dari sistem tersebut. Hal ini disebabkan, dari suatu fungsi gelombang bisa didapatkan suatu distribusi probabilitas dari partikel pada suatu ruang-waktu tertentu juga mengenai momentum linier dari suatu partikel yang dimaksud. Meninjau tentang besaran-besaran dinamis misalnya gaya, energi kinetic, energi potensial, momentum sudut dan lain-lain bisa dinyatakan dengan fungsi posisi serta momentum sudut (Sutopo, 2005).

Persamaan Dirac merupakan suatu rumusan tentang perilaku partikel subatomik yang memiliki spin $\frac{1}{2}$ dalam bidang mekanika kuantum serta teori medan kuantum. Pada penelitian ini diberikan penurunan dari persamaan Dirac yang akan digunakan untuk mendapatkan solusi persamaan Dirac di sub materi berikutnya, untuk mendapatkan persamaan Dirac dengan mengoperasikan persamaan umum fungsi gelombang,

$$\psi = Ae^{i(kz-\omega t)} \tag{3.1}$$

Kemudian dilakukan penurunan terhadap posisi dari persamaan umum fungsi gelombang diatas (3.1), sebagai berikut

$$\psi = Ae^{i(kz-\omega t)} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = ik.Ae^{i(kz-\omega t)}$$

dengan konstanta $k = \frac{p}{\hbar}$, sehingga persamaan (3.2) menjadi

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = i\frac{p}{\hbar}.Ae^{i(kz-\omega t)} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = i\frac{p}{\hbar}\,\psi$$

$$\hbar\frac{\partial \psi}{\partial z} = ip\,\psi$$

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi}{\partial z} = p\,\psi$$

$$-i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial z} = p\,\psi$$

Persamaan (3.3) merupakan persamaan momentum, setelah didapatkan persamaan momentum kemudian diaplikasikan pada persamaan hubungan Hamiltonian dan energi $E\psi = H\psi$ (Sudiarta, 2019),

$$E\psi = H\psi \tag{3.4}$$

$$E\psi = (c\,\hat{\boldsymbol{\alpha}}.\boldsymbol{p} + \beta\,mc^2 + V)\psi$$

Dengan α dan β merupakan matriks dirac, dan pada penelitian ini α diganti dengan $\alpha = \alpha_3$ dikarenakan α pada matriks diac ini dijadikan sebagai persamaan untuk satu koordinat saja. Kemudian disubstitusikan persamaan (3.3) sebagai nilai momentum, sehingga persamaan (3.4) dituliskan sebagai berikut

$$E\psi = \left(c\,\alpha_3\left(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \beta mc^2 + V\right)\psi \qquad 3.5$$

$$E\psi = \left(-i\hbar c\,\alpha_3\frac{\partial\psi}{\partial z} + \beta mc^2 + V\right)\psi$$

Sehingga persamaan (3.5) ini menjadi rumusan untuk persamaan Dirac yang tidak bergantung waktu.

3.1.2 Persamaan Dirac yang Bergantung Waktu

Persamaan Dirac yang bergantung waktu juga disebut sebagai persamaan yang bergantung posisi dan waktu, yang mana ketika suatu partikel mengalami perpindahan posisi maka hal ini berarti juga mengalami perubahan terhadap waktu. Sama seperti kasus persamaan dirac yang tidak bergantung waktu, untuk mendapatkan persamaan dirac yang bergantung waktu juga mengoperasikan ansatz persamaan umum gelombang yang dilakukan turunan terhadap waktu, sebagai berikut

$$\psi = Ae^{i(k_z-\omega t)} \qquad 3.6$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\omega.Ae^{i(k_z-\omega t)}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\omega\psi$$

Berikutnya dari persamaan (3.6) yang didapatkan dioperasikan dengan persamaan hubungan antara energi dari suatu partikel (E) dengan frekuensi angular gelombang (ω), yakni

$$E = \hbar\omega \qquad 3.7$$

$$E\psi = \hbar\omega\, \psi$$

$$-iE\psi = -i\hbar\, \omega\psi$$

$$-iE\psi = \hbar(-i\omega\psi)$$

$$-iE\psi = \hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$E\psi = \frac{\hbar}{-i}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$E\psi = \frac{\hbar}{-i}\frac{i}{i}\,\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

$$E\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Kemudian setelah didapatkan persamaan (3.7) kemudian disubstitusikan pada persamaan (3.5) untuk mendapatkan persamaan dirac yang bergantung waktu, sebagai berikut

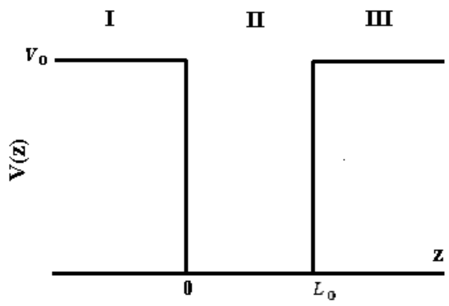
$$E\psi = \left(-i\hbar c\, \alpha_3 \frac{\partial\psi}{\partial t} + \beta mc^2\right)\psi \qquad 3.8$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-i\hbar c\, \alpha_3 \frac{\partial\psi}{\partial t} + \beta mc^2\right)\psi$$

Setelah dilakukan substitusi pada persamaan yang tidak bergantung waktu, maka saat ini persamaan (3.8) merupakan persamaan Dirac yang bergantung waktu.

3.2 Solusi Persamaan Dirac

Pada besaran-besaran dinamis dapat dilakukan pengukuran untuk mengetahui nilai besaran tersebut. Suatu postulat mengenai pengukuran menyatakan jika mengukur pada konteks fisika kuantum merupakan perumusan dari operator yang mewakili besaran-besaran tersebut dalam pengukuran, pengukurannya menggunakan fungsi gelombang yang mana fungsi gelombang ini dapat mendeskripsikan keadaan dari suatu sistem tersebut (Sutopo,2005). Penelitian dalam skripsi ini menggunakan fungsi gelombang dari persamaan Dirac dalam sumur potensial bergerak sebagian.



Gambar 3. 1 Sumur potensial dengan dinding bergerak sebagian yang tidak bergantung waktu

Dari gambar 3.1 ini dapat dieskpresikan pada persamaan dengan bentuk syarat batas berikut,

$$V(z) = \begin{cases} V_0 & (z \leq 0) \quad \text{I} \\ 0 & (0 < z < L_0) \quad \text{II} \\ V_0 & (z \geq L_0) \quad \text{III} \end{cases} \tag{3.9}$$

Syarat batas pada persamaan (3.9) ini menjelaskan mengenai bagaimana $V(z)$ berubah dengan posisi z pada sumur potensial. Sumur potensial merupakan suatu model matematis yang digunakan untuk memodelkan perubahan energi potensial dalam sistem fisika. Persamaan (3.9) menunjukkan adanya tiga wilayah yang berbeda dalam sumur potensial, yakni: wilayah dengan poensial V_0 untuk $z \leq$

0, wilayah dengan potensial nol (0) untuk $0 < z < L_0$, dan wilayah dengan potensial V_0 lagi untuk $z \geq L_0$. Pada titik $z = 0$ dan $z = L_0$, fungsi gelombang harus kontinu. Artinya, nilai fungsi gelombang pada kedua sisi titik tersebut harus sama. Dalam hal ini, ini berarti bahwa fungsi gelombang harus memiliki nilai yang sama pada kedua sisi titik $z = 0$ dan $z = L_0$.

Dari ditentukannya potensial dari sumur ini dapat membantu untuk penyelesaian yang akan dilakukan, dan persamaan Dirac yang akan digunakan untuk penelitian ini, yakni dengan mengggunakan persamaan dirac untuk partikel *spin-up* yang merambat pada koordinat z. Dalam kasus ini akan didapatkan solusi untuk persamaan dirac yang bergantung waktu dan tidak bergantung waktu,

3.2.1 Solusi Persamaan Dirac yang tidak bergantung waktu

3.2.1.1 Solusi pada daerah I

Pada solusi untuk persamaan dirac di daerah satu ini diberikan suatu potensial sumur

$$V(z) = V_0 \quad (z \leq 0) \text{ Daerah 1} \tag{3.10}$$

Ketika $z \leq 0$, potensial $V(z)$ memiliki nilai konstan V_0. Ini berarti bahwa di bawah titik $z \leq 0$, potensial tidak tergantung pada posisi z dan tetap konstan sepanjang sumur. Ini dapat diasumsikan sebagai adanya dinding atau penghalang yang menetapkan potensial V_0 di bawah titik tersebut. Untuk daerah I Pada kasus sumur potensial ini persamaan Dirac dapat didefinisikan oleh persamaan berikut (Shan, 2022),

$$E\psi = \left[-i\hbar c \left(\alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}\right) + \beta mc^2\right]\psi \tag{3.11}$$

Suatu partikel pasti memiliki besaran fisis misalnya posisi, momentum dan energi, dan dari bersaran fisis ini berkaitan dengan suatu operator. Salah satu dari operator ini merupakan energi total dari suatu partikel yang disebut dengan Hamiltonian. Berkaitan dengan hal mengenai operator dari besaran fisis maka terdapat beberapa istilah yang digunakan, sebagi berikut (Siregar,2010),

a. Nilai dari suatu besaran fisis merupakan *eigen value* dari operatornya
b. *Eigen value* berasal dari operator besaran fisis yang berkaitan dengan fungsi eigen, yang mana *eigen value*. Maka berlaku persamaan berikut

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x) \quad 3.12$$

Pada poin a dan b, E merupakan suatu energi yang menjadi *eigen value* dari operator $\hat{H}$, serta $\psi(x)$ merupakan fungsi eigen operator $\hat{H}$. E disimpulkan merupakan suatu energi yang tetap pada suatu partikel, maka $\psi(x,t) = \varphi(x)e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$ menggambarkan keadaan yang stasioner dan fungsi ini disebut dengan *eigen state*

c. Nilai rata-rata dari besaran fisis pada *eigen state* memenuhi persamaan

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, \hat{A}\psi(x)dx$$

Dengan $\hat{A}$ merupakan operator pada suatu besaran fisis, dan $\langle A \rangle$ merupakan nilai rata-ratanya dengan menggunakan fungsi gelombang atau *eigen state* yang ternormalisasi.

setiap persamaan pasti memiliki bentuk Hamiltonian yang menyesuaikan dengan sistem yang digunakan, sehingga untuk Hamiltonian pada daerah I dapat dituliskan (Sudiarta, 2019),

$$H = c\,\hat{\boldsymbol{\alpha}}.\boldsymbol{p} + \beta\, mc^2 + V \quad 3.13$$

Dengan $V = V_0$

$$H_1 = \left[-i\hbar c\left(\alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}\right) + \beta mc^2 + V_0\right]$$

Persamaan Hamiltonian (3.13) menyatakan bentuk persamaan yang hanya bergantung pada posisi. Berdasarkan Hamiltonian (3.13) dapat dirumuskan energi untuk persamaan dirac pada persamaan (3.12),

$$E\psi = \left[-i\hbar c\left(\alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}\right) + \beta mc^2 + V_0\right]\psi \quad 3.14$$

Suatu solusi fungsi gelombang $\psi(z)$ dalam persamaan dirac disebut sebagai spinor Dirac, yang mana spinor ini memiliki dua komponen yakni untuk partikel dan anti pasrtikell yang masing masing memiliki energi negatif dan energi positif,

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad 3.15$$

Pada solusi spinor dimisalkan didalamnya terdiri atas dua komponen besar vector yakni ψ_A dan ψ_B yang memberikan gambaran partikel dan antipartikel yang masing masing memiliki keadaan *spin up* dan *spin down*, Dalam pendekatan spinor yang digunakan pada dapat diasumsikan yakni $\psi_A = (\psi_1, \psi_2)$ yang mewakili komponen partikel dari spin$\frac{1}{2}$ kemudian untuk $\psi_B = (\psi_3, \psi_4)$ yang mewakili antipartikel dari spin$\frac{1}{2}$ (Thaller,1992). Sehingga persamaan (3.14) dapat dirumuskan dalam bentuk matriks, yakni (Romadani, 2019):

$$E\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \left[-i\hbar c\ \left(\alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}\right) + \beta mc^2 + V_0\right]\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad 3.16$$

Kemudian untuk mendapatkan *eigen state* pada daerah yang tidak bergantung waktu dapat menggunakan solusi umum pada persamaan gelombang dengan ψ yang memenuhi spinor $\psi_A = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ dan $\psi_B = \begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$,

$$\psi(z) = Ae^{ik_2 z}\psi_A + Be^{-ik_2 z}\psi_B \qquad 3.17$$

$$\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix} = Ae^{ik_2 z}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} + Be^{-ik_2 z}\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$$

Dalam suatu solusi umum persamaan gelombang terdapat suatu komponen ψ_A dan ψ_B yang merupakan kumpulan bispinor Dirac satu dimensi, yang mana komponen tersebut harus memenuhi persamaan dirac satu dimensi. Untuk mendapatkan solusi dari nilai eigen dilakukan pembuktikan pemenuhan persamaan dirac pada ψ_A dan ψ_B. Dengan mengoperasikan persamaan (3.14) yang mana nilai ψ diberikan ansatz $\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right)$ dihasilkan (Amrulloh, 2021),

$$E\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) = \left[-i\hbar c\alpha_3 \frac{d}{dz} + \beta mc^2 + V_0\right] \left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) \qquad 3.18$$

Kemudian jika diketahui bahwa,

$$\frac{d}{dz}\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) = ik\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) \qquad 3.19$$

Sehingga persamaan (3.18) dapat dituliskan

$$E\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) = -i\hbar c\alpha_3\left(ik\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right)\right) \qquad 3.20$$

$$+\beta mc^2 + V_0 \ \left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right)$$

$$= \hbar kc\alpha_3\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right)$$

$$+\beta mc^2 + V_0 \ \ (e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B)$$

$$= (\hbar ck\alpha_3 + \beta mc^2 + V_0)e^{ikz}\psi_A$$

$$-(\hbar ck\alpha_3 - \beta mc^2 - V_0)e^{-ikz}\psi_B$$

Untuk nilai dari konstanta k dapat berupa suatu nilai positif maupun nilai negatif. dengan konstanta $k = \pm\frac{p}{\hbar} \ \rightarrow \hbar k = p$, sehingga konstanta k_2 ini dapat didefinisikan sebagai berikut (Shan,2023),

$$k_2 = \frac{\sqrt{(E - V_0)^2 - m^2c^4}}{\hbar c} \qquad 3.21$$

Pada persamaan (3. 20) untuk $(\hbar k)$ yang berupa nilai positif pada suku-suku yang berada pada komponen bispinor ψ_A dan bernilai negatif untuk komponen bispinor ψ_B. Kemudian dilakukan pemisahan variabel pada persamaan (3.20) untuk mendapatkan persamaan masing masing ψ_A dan ψ_B.

$$Ee^{ikz}\psi_A = (\hbar kc\alpha_3 + \beta mc^2 - V_0)e^{ikz}\psi_A \qquad 3.22$$

$$E\psi_A = (\hbar kc\alpha_3 + \beta mc^2 + V_0)\psi_A$$

$$Ee^{-ikz}\psi_B = (-\hbar kc\alpha_3 + \beta mc^2 - V_0)e^{-ikz}\psi_B \qquad 3.23$$

$$E\psi_B = -(\hbar kc\alpha_3 + \beta mc^2 + V_0)\psi_B$$

Sebagaimana dalam fungsi gelombang Dirac atau spinor Dirac $\psi(z)$, komponen ψ_A dan ψ_B masing masing terdiri dari dua komponen juga yakni , $\psi_A = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ dan $\psi_B = \begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$, sehingga persamaan (3.22) yang merupakan komponen ψ_A dapat dituliskan sebagai berikut,

$$E\psi_A = (\hbar kc\alpha_3 + \beta mc^2 + V_0)\psi_A \qquad 3.24$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \hbar kc\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}mc^2\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} + V_0\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \hbar kc\\ \hbar kc & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}mc^2 & 0\\ 0 & -mc^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} + V_0\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hbar kc\ \psi_2\\ \hbar kc\ \psi_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}mc^2\ \psi_1\\ -mc^2\ \psi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}V_0\ \psi_1\\ V_0\ \psi_2\end{pmatrix}$$

Pada persamaan (3.24) dilakukan pemisahan variabel untuk mendapatkan masing masing dari ψ_1 dan ψ_2

$$E\psi_1 = \hbar kc\ u_2 + mc^2\ \psi_1 + V_0\ \psi_1 \qquad 3.25$$

$$(E - V_0 - mc^2)\ \psi_1 = -\hbar kc\ \psi_2$$

$$(E - V_0 - mc^2)\ \psi_1 + \hbar kc\ \psi_2 = 0$$

$$\psi_1 = \frac{\hbar kc}{E - V_0 - mc^2}\ \psi_2$$

$$E\psi_2 = \hbar kc\ \psi_1 - mc^2\ \psi_2 + V_0\psi_2 \qquad 3.26$$

$$(E - V_0 + mc^2)\ \psi_2 = -\hbar kc\ \psi_1$$

$$(E - V_0 + mc^2)\ \psi_2 + \hbar kc\ \psi_1 = 0$$

$$\psi_2 = \frac{\hbar kc}{E - V_0 + mc^2}\ \psi_1$$

Sehingga untuk solusi daerah I bispinor $\psi_A = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$, pada penelitian ini hanya mengkaji mengenai keadaan partikel atau antipartikel yang *spin*-up sehingga, jika nilai partikel *spin-up* $\psi_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, dari persamaan (3.26) dirumuskan

$$\psi_2 = \left(\frac{\hbar kc}{E - V_0 + mc^2}\right)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \qquad 3.27$$

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} \frac{\hbar kc}{E - V_0 + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan bentuk bispinor ψ_A sebagai berikut,

$$\psi_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{\hbar k_2 c}{E - V_0 + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 3.28$$

Untuk solusi dari komponen ψ_B(antipartikel) dapat menggunakan cara yang sama seperti pada penentuan solusi ψ_A (Lampiran A), yang menghasilkan solusi akhir

$$\psi_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(-\frac{\hbar k_2 c}{E - V_0 + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 3.29$$

Maka berdasarkan hasil yang diperoleh pada persamaan (3.28) dan (3.29), kemudian substitusikan pada solusi umum gelombang yang diberikan pada persamaan (3.17), dihasilkan solusi pada daerah I yakni

$$\Psi_I\ (z) = se^{ik_2 z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{\hbar k_2 c}{E - V_0 + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} + be^{-ik_2 z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(-\frac{\hbar k_2 c}{E - V_0 + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 3.30$$

Solusi fungsi gelombang (*Eigen State*) daerah I untuk persamaan dirac tidak bergantung waktu dinyatakan oleh persamaan (3.30), dari solusi yang berbentuk spinor atau dapat dirumuskan menjadi fungsi gelombang sebagai berikut

$$\Psi_I = se^{ik_2 z}\psi_A + be^{-ik_2 z}\,\psi_B \qquad 3.31$$

Setelah mendapatkan suatu fungsi gelombang (*eigen state*) daerah I yang dinyatakan oleh persamaan (3.30) dan (3.31), kemudian untuk *eigen value* dari daerah ini dapat ditentukan dengan mengoperasikan persamaan (3.24) untuk persamaan $E\psi_1$ dan mensubstitusi persamaan ψ_2 (3.26) untuk mengeliminasi pada suku ψ_1 (Rizqy,2023),

$$E\psi_1 = \hbar c k_2\, \psi_2 + mc^2\psi_1 + V_0\psi_1 \qquad 3.32$$

$$E\psi_1 = \hbar c k_2\, \psi_2 + mc^2\psi_1 + V_0\psi_1$$

$$E\psi_1 = \hbar c k\, \left(\frac{\hbar k_2 c}{E - V_0 + mc^2}\, \psi_1\right) mc^2\psi_1 + V_0\psi_1$$

$$E\psi_1 = \left(\left(\frac{\hbar k_2 c^2}{E - V_0 + mc^2}\right) + mc^2 + V_0\right)\psi_1$$

$$E\psi_1 = \left(\left(\frac{\hbar k_2 c^2 + Emc^2 - V_0 mc^2 + m^2c^4}{E - V_0 + mc^2}\right) + V_0\right)\psi_1$$

$$E\psi_1 = \left(\left(\frac{\hbar k_2 c^2 + (E - V_0 + mc^2)mc^2}{E - V_0 + mc^2}\right) + V_0\right)\psi_1$$

$$E\psi_1 = (\,\hbar k c^2 + mc^2 + V_0)\psi_1$$

Pada persamaan (3.32) telah menjadi suatu persamaan yang hanya memiliki suku ψ_1 yang berarti persamaan untuk partikel dengan energi positif, untuk memudahkan pengkajian dalam bidang teoritis maka untuk suku ψ_1 dapat diganti dengan suku ψ saja , maka didapatkan persamaan

$$E\psi = (\,\hbar k_2 c^2 + mc^2 + V_0)\psi \qquad 3.33$$

Persamaan (3.33) ini merupakan benttuk hubungan antara *eigen value*dan Hamiltonian ($H\psi = E\psi$), sehingga untuk *eigen value* dari daerah I ini dirumuskan berdasarkan persamaan (3.33) yakni (Rizqy,2023)

$$[E - (\hbar k_2 c^2 + mc^2 + V_0)]\psi = 0 \qquad 3.34$$

$$E = (\hbar k_2 c^2 + mc^2 + V_0)$$

Persamaan (3.34) ini menyatakan solusi *eigen value* untuk daerah I pada persamaan Dirac yang tidak bergantung waktu. Solusi ini hanya berlaku untuk daerah I dengan posisi daerah kiri pada sumur potensial dengan batas potensial sesuai dengan persamaan (3.10) adalah $V_0 = z \leq 0$.

3.2.1.2 Solusi pada daerah II

Pada kasus ini potensial daerah II didefinisikan sebagai berikut,

$$V(z) = 0 \quad (0 < z < L_0) \text{ Daerah 2} \qquad 3.35$$

Pada potensial untuk daerah II yang ditunjukkan oleh persamaan (3.35) dinyatakan dalam $0 < z < L_0$, potensial $V(z)$. menunjukkan bahwa potensial dalam sumur potensial tersebut adalah nol ketika koordinat (z) berada di antara dua titik, yaitu 0 dan L_0. Hal ini menunjukkan bahwa tidak ada gaya tarik atau dorongan yang bekerja di dalam wilayah ini, sehingga partikel-partikel dalam sistem memiliki kebebasan untuk bergerak secara bebas. Untuk persamaan dirac pada daerah II ini dapat dinyatakan dengan (Shan, 2023),

$$E\psi = \left[-i\hbar c\left(\alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}\right) + \beta mc^2\right]\psi \qquad 3.36$$

Berdasarkan persamaan Dirac pada daerah II, dapat ditentukan Hamiltoniannya, karena daerah II merupakan daerah yang memiliki nilai potensial 0 yang artinya tidak terpengaruhi oleh potensial. Maka untuk Hamiltonian pada daerah II (Sudiarta, 2019),

$$H = c\,\hat{\boldsymbol{\alpha}}.\boldsymbol{p} + \beta\, mc^2 + V \qquad 3.37$$

Dengan $V(z) = 0$

$$H_2 = \left[-i\hbar c \left(\alpha_3 \ \frac{\partial}{\partial z} \right) + \beta mc^2 \right]$$

Setelah mendapat persamaan Hamiltonian pada daerah II (3.73), dapat dirumuskan energi pada persamaan Dirac untuk daerah II, dengan menggunakan persamaan (3.12)

$$E\psi = \left[-i\hbar c \ \left(\alpha_3 \frac{d}{dz} \right) + \beta mc^2 \right] \psi \qquad 3.38$$

Dalam persamaan dirac solusi fungsi gelombangnya $\psi(z)$ disebut sebagai spinor Dirac, spinor dirac memiliki dua komponen yakni untuk partikel dan antipartikel yang masing masing memiliki energi negatif dan energi positif seperti pada persamaan (3.23), lalu subtitusi persamaan (3.23) pada persamaan (3.38) ,

$$E \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \left[-i\hbar c \ \left(\alpha_3 \frac{d}{dz} \right) + \beta mc^2 \right] \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \qquad 3.39$$

Dengan suatu solusi gelombang $\psi(z)$ yang terdiri dari komponen ψ_A dan ψ_B. Kemudian untuk mendapatkan *eigen state* pada daerah II dapat digunakan solusi umum fungsi gelombang dengan spinor $\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ dan $\psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$,

$$\psi(z) = He^{ikz}\psi_A + Je^{-ikz}\psi_B \qquad 3.40$$

$$\begin{pmatrix}\psi_A \\ \psi_B\end{pmatrix} = He^{ikz}\begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix} + Je^{-ikz}\begin{pmatrix}\psi_3 \\ \psi_4\end{pmatrix}$$

Persamaan diatas diperlukan untuk mengkaji terkait nilai masing masing pada spinornya. Sehingga dengan mengoperasikan persamaan (3.14) yang diberikan ansatz $\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right)$ untuk nilai ψ pada persamaan tersebut (Amrulloh, 2021),

$$E\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) = \left[-i\hbar c\alpha_3 \frac{d}{dz} + \beta mc^2\right] \left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) \qquad 3.41$$

Dengan diketahui bahwa,

$$\frac{d}{dz}\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) = ik\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) \qquad 3.42$$

Maka persamaan (3.42) dapat dituliskan

$$\begin{aligned} E\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right)i\hbar c\alpha_3 \ &\left(ik\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right)\right) \qquad 3.43 \\ &+\beta mc^2 \ \left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) \\ &= \hbar kc\alpha_3\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) \\ &+\beta mc^2 \ \left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) \\ &= (\hbar kc\alpha_3 + \beta mc^2)e^{ikz}\psi_A \\ &-(\hbar kc\alpha_3 + \beta mc^2)e^{-ikz}\psi_B \end{aligned}$$

Pada persamaan (3.43) nilai dari konstanta k dapat berupa suatu nilai positif maupun nilai negatif, dengan konstanta $k = \pm\frac{p}{\hbar}$, untuk solusi pada daerah II nilai konstanta k_1 didefinisikan dengan (Shan, 2023)

$$k_1 = \frac{\sqrt{E + mc^2}}{\hbar c} \qquad 3.44$$

Dari persamaan (3.43) dapat dilakukan pemisahan variabel pada persamaan ssehingga akan didapatkan persamaan masing masing ψ_A dan ψ_B sebagai berikut,

$$Ee^{ik_1 z}\psi_A = (\hbar k_1 c\alpha_3 + \beta mc^2)e^{ik_1 z}\psi_A \qquad 3.45$$

$$E\psi_A = (\hbar k_1 c\alpha_3 + \beta mc^2)\psi_A$$

$$Ee^{-ik_1 z}\psi_B = (-\hbar k_1 c\alpha_3 + \beta mc^2)e^{-ik_1 z}\psi_B \qquad 3.46$$

$$E\psi_B = (-\hbar k_1 c\alpha_3 + \beta mc^2)\psi_B$$

Pernyataan pada suatu fungsi gelombang Dirac atau spinor Dirac $\psi(z)$, di setiap komponennya memiiki komponen tersendiri juga yakni $\psi_A = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ serta pada $\psi_B = \begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$, maka pada persamaan (3.45) yang merupakan komponen ψ_A atau solusi energi positif didefinisikan sebagai berikut,

$$E\psi_A = (\hbar k_1 c\alpha_3 + \beta mc^2)\psi_A \qquad 3.47$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \hbar k_1 c\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}mc^2\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \hbar k_1 c\\ \hbar k_1 c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}mc^2 & 0\\ 0 & -mc^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hbar k_1 c\,\psi_2\\ \hbar k_1 c\,\psi_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}mc^2\,\psi_1\\ -mc^2\,\psi_2\end{pmatrix}$$

Pada persamaan (3.47) untuk mendapatkan nilai masing masing dari ψ_1 dan ψ_2 maka dapat digunakan pemisahan variabel sebagai berikut,

$$E\psi_1 = \hbar k_1 c\,\psi_2 + mc^2\,\psi_1 \qquad 3.48$$

$$(E - mc^2)\,\psi_1 - \hbar k_1 c\,\psi_2 = 0$$

$$\psi_1 = \frac{\hbar k_1 c}{E - mc^2}\,\psi_2$$

$$E\psi_2 = \hbar k_1 c\,\psi_1 + mc^2\,\psi_2 \qquad 3.49$$

$$(E + mc^2)\,\psi_2 - \hbar k_1 c\,\psi_1 = 0$$

$$\psi_2 = \frac{\hbar k_1 c}{E + mc^2}\psi_1$$

Sehingga untuk solusi daerah II bispinor $\psi_A = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ dikarenakan hanya mengkaji pada partikel maupun anti partikel dengan keadaan spin up, dengan memberikan $\psi_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ maka, dihasikan persamaan

$$\psi_2 = \frac{\hbar k_1 c}{E + mc^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad 3.50$$

$$\psi_2 = \begin{pmatrix}\dfrac{\hbar k_1 c}{E + mc^2}\\ 0\end{pmatrix}$$

Kemudian setelah mendapatkan nilai $\psi_2$pada persamaan diatas, maka untuk bispinor partikel energi positif yakni ψ_H dituliskan,

$$\psi_H = \begin{pmatrix}1\\0\\ \left(\dfrac{\hbar k_1 c}{E + mc^2}\right)\\ 0\end{pmatrix} \qquad 3.51$$

Pada komponen antipartikel (ψ_J) juga mengikuti perhitungan yang sama dengan solusi untuk ψ_H(Lampiran A) , sehingga

$$\psi_J = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(-\dfrac{\hbar k_1 c}{E + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad 3.52$$

Sehingga untuk solusi fungsi gelombang (*eigen state*) pada daerah II, dapat dituliskan,

$$\Psi_{II}(z) = He^{ik_1 z}\psi_A + Je^{-ik_1 z}\,\psi_B \quad 3.53$$

$$\Psi_{II} = He^{ik_1 z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(\dfrac{\hbar k_1 c}{E + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} + Je^{-ik_1 z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(-\dfrac{\hbar k_1 c}{E + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigen State atau fungsi gelombang pada daerah II telah dinyatakan pada persamaan (3.53), Dalam setiap solusi persamaan pasti memiliki fungsi gelombang atau *eigen state* dan nilai eigen atau *eigen value* yang dinyatakan dengan E. Untuk mendapatkan *eigen value* dapat mensubtitusi ψ_2 (3.49) pada persamaan $E\psi_{II}$ (3.47)

$$E\psi_{II} = \hbar ck_1\,\psi_2 + mc^2\psi_1 \quad 3.54$$

$$E\psi_{II} = \hbar ck_1\,\psi_2 + mc^2\psi_1$$

$$E\psi_{II} = \hbar ck_1\left(\frac{\hbar k_1 c}{E + mc^2}\,\psi_1\right)mc^2\psi_1$$

$$E\psi_{II} = \left(\left(\frac{\hbar k_1 c^2}{E + mc^2}\right) + mc^2\right)\psi_1$$

$$E\psi_{II} = \left(\frac{\hbar k_1 c^2 + Emc^2 + m^2c^4}{E + mc^2}\right)\psi_1$$

$$E\psi_{II} = \left(\frac{\hbar k_1 c^2 + (E + mc^2)mc^2}{E + mc^2}\right)\psi_1$$

$$E\psi_{II} = (\ \hbar_1 kc^2 + mc^2)\psi_1$$

$$E\psi_{II} = (\ \hbar k_1 c^2 + mc^2)\psi_1$$

Pada persamaan (3.54) merupakan persamaan dengan satu suku yakni ψ_{II} dengan artian bahwa persamaan tersebut menyatakan partikel dengan energi positif, kemudian dari persamaan (3.54) didapatkan *eigenvalue* sebagai berikut (Rizqy, 2023),

$$[E - (\ \hbar kc^2 + mc^2)]\psi = 0 \qquad 3.55$$

$$E = (\ \hbar kc^2 + mc^2)$$

dengan batas potensialnya daerah II yakni $0 < z < V_0\theta(z - vt)$. Sebab sumur potensial memiliki tiga daerah maka untuk solusi daerah yang ketiga akan diberikan pada submateri berikutnya.

3.2.1.3 Solusi pada daerah III

Berdasarkan persamaan (3.9), daerah III pada sumur potensial ini memiliki potensial dengan batas daerah sebagai berikut,

$$V(z) = V_0 \quad z \geq L_0 \qquad 3.56$$

Syarat batas ketiga $V(z) = V_0$, untuk $z \geq L_0$, menunjukkan bahwa potensial dalam sumur potensial tersebut kembali menjadi konstan (V_0) ketika koordinat (z) berada di atas atau pada titik akhir sumur $(z \geq L_0)$. Hal ini menunjukkan adanya potensial positif yang kuat di bagian atas sumur, sehingga partikel-partikel dalam sistem akan cenderung tertarik ke arah sumur. Kemudian pada kasus ini di daerah III persamaan Dirac didefinsikan dengan (Shan,2023),

$$E\psi = \left[-i\hbar\left(\alpha_3\ \frac{\partial}{\partial z}\right) + \beta mc^2\right]\psi \tag{3.57}$$

Kemudian setelah mendapat persamaan Dirac untuk daerah III, maka dapat dihasilkan suatu Hamiltonian Dirac sebagai berikut (sudiarta,2019),

$$H = c\ \hat{\boldsymbol{\alpha}}.\boldsymbol{p} + \beta\ mc^2 + V \tag{3.58}$$

Dengan $V = V_0$

$$H_3 = \left[-i\hbar c\left(\alpha_3 \frac{\partial}{\partial z}\right) + \beta mc^2 + V_0\right]\psi$$

Berdasarkan persamaan Hamiltonian untuk daerah III pada persamaan (3.58), sehingga dapat ditetentukan untuk persamaan energinya dengan mengoperasikan persamaan (3.12)

$$E\psi = \left[-i\hbar c\left(\alpha_3\ \frac{d}{dz}\right) + \beta mc^2 + V_0\right]\psi \tag{3.59}$$

Suatu solusi fungsi gelombang $\psi(z)$ dalam persamaan dirac disebut sebagai spinor Dirac, yang mana spinor ini memiliki dua komponen yakni partikel dan antipartikel yang masing masing memiliki energi negatif dan energi positif seperti pada persamaan (3.15), kemudian substitusikan persamaan (3.15) pada persamaan (3.59) sebagai berikut

$$E\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix} = \left[-i\hbar c\ \left(\alpha_3 \frac{d}{dz}\right) + \beta m + V_0\right]\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix} \tag{3.60}$$

Persamaan (3.50) yang merupakan persamaan energi dengan memberikan spinor $\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix}$ yang merupakan bagian dari $\psi(z)$, untuk mendapatkan *eigen state* pada daerah III yakni dengan megoperasikan ansatz persamaan umum fungsi gelombang dengagn memberikan spinor $\psi_A = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ dan $\psi_B = \begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$. dihasilkan persamaan berikut,

$$\psi(z) = qe^{ikz}\psi_A + re^{-ikz}\psi_B \tag{3.61}$$

$$\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix} = qe^{ikz}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} + re^{-ikz}\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$$

Dari persamaan (3.61) untuk mendapatkan hasil dari masing masing spinor, yakni dengan menggunakan persamaan (3.59) dengan $\psi = \left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right)$ (Amrulloh, 2021),

$$E\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) = \left[-i\hbar c\alpha_3\ \frac{d}{dz} + \beta mc^2 + V_0\right] \left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) \tag{3.62}$$

Kemudian didefinisikan bahwa,

$$\frac{d}{dz}\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) = ik\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) \tag{3.63}$$

Sehingga persamaan (3.63) dapat dituliskan

$$\begin{aligned} E\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) &= -i\hbar c\alpha_3\left(ik\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right)\right) \\ &\quad +\beta mc^2 + V_0\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) \\ &= \hbar kc\alpha_3\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right) + \beta mc^2 + V_0 \end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\left(e^{ikz}\psi_A + e^{-ikz}\psi_B\right)$$
$$= (\hbar kc\alpha_3 + \beta mc^2 + V_0\theta(z - vt)\ )\ e^{ikz}\psi_A$$
$$-\left(\hbar kc\alpha_3 + \beta mc^2 + V_0\theta(z - vt)\right)e^{-ikz}\psi_B$$

Pada persamaan (3.64) terdapat konstanta k dapat berupa suatu nilai positif maupun nilai negatif. Untuk konstanta $k = \pm\frac{p}{\hbar} \rightarrow \hbar k = p$, sehingga konstanta k didefinisikan sebagai berikut (Shan, 2023),

$$k_2 = \sqrt{\frac{(E - V_0)^2 - m^2c^4}{\hbar c}} \quad 3.65$$

Dari persamaan (3.64) terdapat konstanta $(\hbar k)$ yang merupakan nilai positif untuk suku-suku bispinor pada ψ_A dan bernilai negatif bispinor pada komponen spinor ψ_B. Untuk mendapatkan persamaan pada masinng masing bispinor maka dilakukan pemisahan variabel pada persamaan (3.64),

$$Ee^{ik_2z}\psi_A = (\ \hbar k_2c\alpha_3 + \beta mc^2 + V_0)\ e^{ik_2z}\psi_A \quad 3.66$$
$$E\psi_A = (\ \hbar k_2\alpha_3 + \beta mc^2 + V_0)\ \psi_A$$
$$Ee^{-ik_2z}\psi_B = -(\hbar k_2c_2\alpha_3 + \beta mc^2 + V_0\theta)\ e^{-ik_2z}\psi_B \quad 3.67$$
$$E\psi_B = -(\hbar k_2c\alpha_3 + \beta mc^2 + V_0)\ \psi_B$$

Dengan spinor $\psi_A = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ dan $\psi_B = \begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$ sehingga persamaan $E\psi_A$ (3.66) dituliskan dengan,

$$E\psi_A = (\ \hbar k_2c\alpha_3 + \beta mc^2 + V_0)\ \psi_A \quad 3.68$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = (\,\hbar k_2 c\alpha_3 + \beta mc^2 + V_0)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \hbar k_2 c\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} mc^2\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} + V_0\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hbar k_2 c\,\psi_2\\ \hbar k_2 c\,\psi_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}mc^2\,\psi_1\\ -mc^2\,\psi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}V_0\,\psi_1\\ V_0\,\psi_2\end{pmatrix}$$

Pada persamaan (3.68) dilakukan pemisahan variabel untuk mendapatkan masing masing dari ψ_1 dan ψ_2, maka

$$E\psi_1 = (\,\hbar k_2 c\,\psi_2 + \; mc^2\psi_1 + V_0\,\psi_1) \qquad 3.69$$

$$(E - V_0 - mc^2)\,\psi_1 = \hbar k_2 c\,\psi_2$$

$$(E - V_0\theta - mc^2)\,\psi_1 - \hbar k_2 c\,\psi_2 = 0$$

$$\psi_1 = \frac{\hbar k_2 c}{E - V_0 - mc^2}\,\psi_2$$

$$E\psi_2 = (\,\hbar k_2 c\,\psi_1 - \; mc^2\psi_2 + V_0\,\psi_2) \qquad 3.70$$

$$(E - V_0 + mc^2)\,\psi_2 = \hbar k_2 c\,\psi_1$$

$$(E - V_0 + mc^2)\,\psi_2 - \hbar k_2 c\,\psi_1 = 0$$

$$\psi_2 = \frac{\hbar k_2 c}{E - V_0 + mc^2}\,\psi_1$$

Sehingga untuk solusi daerah III pada bispinor $\psi_A = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ dalam keadaan *spin-up*, jika nilai $\psi_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ maka persamaan (3.70) dihasilkan

$$\psi_2 = \frac{\hbar k_2 c}{E - V_0 + mc^2}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \qquad 3.71$$

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} \frac{\hbar k_2 c}{E - V_0 + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga bentuk dari ψ_A dituliskan dengan,

$$\psi_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{\hbar k_2 c}{E - V_0 + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad 3.72$$

Berdasarkan pada persamaan ψ_A (3.72) maka untuk komponen antipartikel ψ_B (Lampiran A) dapat dilakukan dengan cara yang sama, dengan hasil akhir sebagai berikut,

$$\psi_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(-\frac{\hbar k_2 c}{E - V_0 + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad 3.73$$

Eigen State atau fungsi gelombang pada daerah III diperoleh dengan mensubstitusi persamaan (3.72) dan (3.73) pada persamaan (3.17) yakni,

$$\Psi_{III} = Qe^{ik_2 z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{\hbar k_2 c}{E - V_0 + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} + Re^{-ik_2 z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(-\frac{\hbar k_2 c}{E - V_0 + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad 3.74$$

Atau dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\Psi_{III} = Qe^{ik_2 z}\psi_A + Re^{-ik_2 z}\psi_B$$

Pada persamaan (3.74) merupakan suatu fungsi gelombang (*eigen state*) daerah III, kemudian untuk *eigen value* dari daerah ini dapat ditentukan dengan mengoperasikan persamaan (3.68) untuk persamaan $E\psi_1$ dan mensubstitusi persamaan ψ_2 (3.70) untuk mengeliminasi ψ_2 pada suku $E\psi_1$ yamg menjadi $E\psi_{III}$ (Rizqy,2023),

$$E\psi_{III} = \hbar c k_2\, \psi_2 + mc^2\psi_1 + V_0\psi_1 \qquad 3.75$$

$$E\psi_{III} = \hbar c_2 k\, \psi_2 + mc^2\psi_1 + V_0\psi_1$$

$$E\psi_{III} = \hbar c k_2 \left(\frac{\hbar k_2 c}{E - V_0 + mc^2}\, \psi_1\right) mc^2\psi_1 + V_0\psi_1$$

$$E\psi_{III} = \left(\left(\frac{\hbar k_2 c^2}{E - V_0 + mc^2}\right) + mc^2 + V_0\right)\psi_1$$

$$E\psi_{III} = \left(\left(\frac{\hbar k_2 c^2 + Emc^2 - V_0 mc^2 + m^2c^4}{E - V_0 + mc^2}\right) + V_0\right)\psi_1$$

$$E\psi_{III} = \left(\left(\frac{\hbar k_2 c^2 + (E - V_0 + mc^2)mc^2}{E - V_0 + mc^2}\right) + V_0\right)\psi_1$$

$$E\psi_{III} = (\,\hbar k c^2 + mc^2 + V_0)\psi_1$$

$$E\psi_{III} = (\,1 + \hbar k c^2 + mc^2 + V_0)\psi_1$$

Pada persamaan (3.75) untuk mempermudah pengajian mengenai *eigen value* maka suku ψ_1 dapat digantikan dengan menggunakan , sehingga dihasilkan

$$E\psi = (\,\hbar k c^2 + mc^2 + V_0)\psi \qquad 3.76$$

Dari persamaan (3.76) diatas dapat didefinisikan sebagai persamaan hubungan *eigen value* dan Hamiltonian ($E\psi = H\psi$), maka untuk *eigen value* pada daerah III dirumuskan,

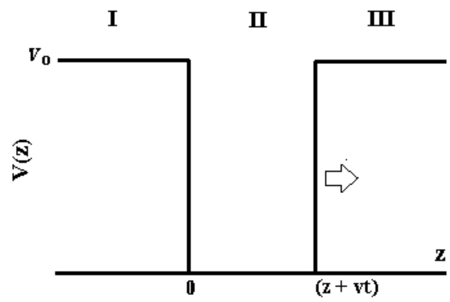
$$[E - (\hbar kc^2 + mc^2 + V_0)]\psi = 0 \qquad 3.77$$

$$E = (\hbar kc^2 + mc^2 + V_0)$$

Beberapa persamaan pada daerah III ini sama dengan daerah I karena potensialnya V_0 persamaan keduanya serupa namun tetap memiliki pembeda pada batas dari potensial sumurnya dan keadaan dari bagian sumur ini. Pada pada penelitian ini mengkaji mengenai sumur potensial bergerak sebagian dimana pergerakan dindingnya memiliki pengaruh pada daerah III dan II sebab bagian yang bergerak ialah pada bagian dinding sumur di daerah III. Dengan pergerakan dindingnya bergerak dengan kecepatan konstan yang bergantung pada waktu (t). Sehigga untuk pembahsan mengenai daerah yang bergerak ini akan dijelaskan pada sub materi berikutnya yakni solusi persamaan dirac yang bergantung waktu untuk kasus sumur potensial bergerak sebagian.

3.3 Solusi Persamaan Dirac yang bergantung waktu

Pada pembahasan mengenai persamaan dirac yang bergantung waktu ini berbeda dengan persamaan yang tidak begantung waktu, sebab pada persamaan ini akan dikaji tentang solusi yang didapat ketika dinding sumur bergerak, untuk persamaan Dirac yang digunakan sama seperti solusi sebelumnya yakni persamaan Dirac untuk partikel dengan keadaaan *spin-up* yang merambat pada koordinat z. Dengan pemodelan sumur potensial bergerak sebagian pergerakan yang berubah terhadap waktu dengan kecepatan konstan, seperti gambar permodelan berikut,



Gambar 3. 2 Pemodelan sumur potensial dengan dinding bergerak sebagian bergantung waktu

Untuk potensial yang diberikan pada kasus sumur potensial yang bergantung waktu sebagai berikut,

$$V(z) = \begin{cases} 0 & (0 < z < vt) \\ V_0 \, (z \le 0, & z \ge vt) \end{cases} \qquad 3.78$$

Persamaan Dirac adalah persamaan diferensial yang menggambarkan partikel dalam medan potensial yang tidak terikat. Dalam kasus ini, kita memiliki sumur potensial dengan dua daerah yang berbeda. Syarat batas ini menyiratkan bahwa di daerah di mana $V(z) = 0\,(0 < z < vt)$, partikel bebas bergerak. Ini berarti bahwa persamaan Dirac di dalam daerah ini akan memiliki solusi yang menunjukkan perambatan gelombang bebas. Yakni pada daerah potensial $V(z) = V_0\,(z \le 0$ dan $z \ge vt)$, partikel menghadapi penghalang potensial dengan tinggi V_0. Syarat batas ini menunjukkan bahwa persamaan Dirac di dalam daerah ini akan memiliki solusi yang mencerminkan pantulan gelombang dari penghalang potensial.

Berdasarkan potensial yang diberikan untuk kasus bergantung waktu (*time-dependent)* yang akan dikaji hanya pada daerah II dan III. Sebab untuk daerah I menyatakan posisi diam(statis). Sedangkan dinding yang mengalami pergerakan berada pada perbatasan kedua daerah tersebut diatas yakni daerah II dan III, serta pada hanya kedua daerah ini saja yang terdapat variabel t atau menyatakan suatu keadaan yang mana pergerakan dari posisi z nya berdasarkan waktu. Maka untuk persamaan dirac dalam kasus ini dapat dirumuskan (Shan,2023)

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial \varphi_0(z,t)}{\partial t} = -i\hbar c \dfrac{\partial \varphi_2(z,t)}{\partial z} + mc^2 \varphi_0(z,t) \\ i\hbar \dfrac{\partial \varphi_2(z,t)}{\partial t} = -i\hbar c \dfrac{\partial \varphi_0(z,t)}{\partial z} + mc^2 \varphi_2(z,t) \end{cases} \quad 3.79$$

Kemudian diberikan ansatz dengan $U_1(z,t) = \varphi_0 + \varphi_2$ dan $U_2 = \varphi_0 - \varphi_2$, maka didapatkan

$$i\hbar \frac{\partial U_1}{\partial t} = \left(-i\hbar c \frac{\partial \varphi_2(z,t)}{\partial z} + mc^2 \varphi_0(z,t)\right) + \left(-i\hbar c \frac{\partial \varphi_0(z,t)}{\partial z} + mc^2 \varphi_2(z,t)\right) \quad 3.80$$

$$i\hbar \frac{\partial U_1(z,t)}{\partial t} = \left(-i\hbar c \frac{\partial \varphi_2(z,t)}{\partial z} - i\hbar c \frac{\partial \varphi_0(z,t)}{\partial z}\right)$$
$$+ \left(mc^2 \varphi_0(z,t) - mc^2 \varphi_2(z,t)\right)$$

$$i\hbar \frac{\partial U_1(z,t)}{\partial t} = -i\hbar c \left(\frac{\partial \varphi_2(z,t)}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_0(z,t)}{\partial z}\right) + mc^2\left(\varphi_0(z,t) - \varphi_2(z,t)\right)$$

$$i\hbar \frac{\partial U_1(z,t)}{\partial t} = -i\hbar c \frac{\partial U_1(z,t)}{\partial z} + mc^2 U_2(z,t)$$

$$i\hbar\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial t} = \left(-i\hbar c\frac{\partial \varphi_2(z,t)}{\partial z} + mc^2\varphi_0(z,t)\right) - \left(-i\hbar c\frac{\partial \varphi_0(z,t)}{\partial z} + mc^2\varphi_2(z,t)\right) \quad 3.81$$

$$i\hbar\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial t} = \left(-i\hbar c\frac{\partial \varphi_2(z,t)}{\partial z} + i\hbar c\frac{\partial \varphi_0(z,t)}{\partial z}\right) - \left(mc^2\varphi_0(z,t) - mc^2\varphi_2(z,t)\right)$$

$$i\hbar\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial \varphi_2(z,t)}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_0(z,t)}{\partial z}\right) + mc^2\left(\varphi_0(z,t) + \varphi_2(z,t)\right)$$

$$i\hbar\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial t} = i\hbar c\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial z} + mc^2U_1(z,t)$$

Berdasarkan persamaan (3.80) dan (3.81) diberikan pemisahanan variabel untuk mendapatkan solusi pada masing masing suku U_1 dan U_2, untuk mendapatkan persamaan untuk U_1 maka dengan mengoperasikan suku U_2 pada persamaan (3.80) sebagai berikut,

$$i\hbar\frac{\partial U_1(z,t)}{\partial t} = -i\hbar c\frac{\partial U_1(z,t)}{\partial z} + mc^2U_2(z,t) \quad 3.82$$

$$\frac{i\hbar}{mc^2}\frac{\partial U_1(z,t)}{\partial t} + \frac{i\hbar c}{mc^2}\frac{\partial U_1(z,t)}{\partial z} = U_2(z,t)$$

$$\frac{i\hbar}{mc^2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + c\frac{\partial U_1}{\partial z}\right) = U_2(z,t)$$

Kemudian substitusikan hasil dari U_2 (3.82) pada persamaan (3.81), sehingga akan didaptkan persamaan umum untuk U_1

$$i\hbar\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial t} = i\hbar c\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial z} + mc^2U_1(z,t) \quad 3.83$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i\hbar}{mc^2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}+c\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)\right)= i\hbar c\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{i\hbar}{mc^2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}+c\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)\right)+ mc^2U_1(z,t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{mc^2}\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}+c\frac{\partial U_1}{\partial z\partial t}\right)= -\frac{\hbar^2 c}{mc^2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial t\partial z}+c\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}\right)+ mc^2U_1(z,t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{mc^2}\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}+c\frac{\partial U_1}{\partial z\partial t}\right)+\frac{\hbar^2 c}{mc^2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial t\partial z}+c\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}\right)= mc^2U_1(z,t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{mc^2}\ \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}+\frac{\hbar^2 c^2}{mc^2}\ \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}-mc^2U_1\ (z,t)=0$$

Sehingga untuk mendapatkan persamaan U_2 juga dilakukan cara yang serupa seperti pada persamaan U_1, yang mana dengan mengoperasikan suku U_1 pada persamaan (3.81) yakni,

3.84

$$i\hbar\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial t}= i\hbar c\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial z}+ mc^2U_1(z,t)$$

$$i\hbar\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial t}-i\hbar c\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial z}=mc^2U_1(z,t)$$

$$\frac{i\hbar}{mc^2}\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial t}-\frac{i\hbar c}{mc^2}\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial z}=U_1(z,t)$$

$$\frac{i\hbar}{mc^2}\left(\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial t}-c\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial z}\right)=U_1$$

Setelah didapatkan suku U_1 pada persamaan (3.84), kemudian substitusikan U_1 pada persamaan (3.80) untuk mengasilkan persamaan umum U_2

3.85

$$i\hbar\frac{\partial U_1(z,t)}{\partial t}= -i\hbar c\frac{\partial U_1(z,t)}{\partial z}+ mc^2U_2(z,t)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i\hbar}{mc^2}\left(\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial t}-c\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial z}\right)\right)=-i\hbar c\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{i\hbar}{mc^2}\left(\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial t}-c\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial z}\right)\right)$$

$$+\,mc^2U_2(z,t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{mc^2}\left(\frac{\partial^2 U_2(z,t)}{\partial t^2}-c\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial z\partial t}\right)=\frac{\hbar^2 c}{mc^2}\left(\frac{\partial U_2(z,t)}{\partial t\partial z}-c\frac{\partial^2 U_2(z,t)}{\partial z^2}\right)+\,mc^2U_2(z,t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{mc^2}\frac{\partial^2 U_2(z,t)}{\partial t^2}+\frac{\hbar^2c^2}{mc^2}\frac{\partial^2 U_2(z,t)}{\partial z^2}-mc^2U_2=0$$

Setelah mendapatkan persamaan dari $U_1(z,t)$ pada (3.83) dan $U_2(z,t)$ pada (3.85), kemudian dilakukan transformasi koordinat (z,t) pada koordinat (x,y), hal ini dijukukan untuk mempermudah pengkajian dikarenakan pada langkah berikutnya akan menggunakan Fungsi Bessel. Dan untuk koordinat (x,y) memiliki definisi sebagai berikut ,(Shan,2023)

$$x=\sqrt{\frac{ct+z}{ct-z}}\ ;\ y=\sqrt{c^2t^2-z^2} \tag{3.86}$$

$$x^2=\frac{ct+z}{ct-z}\ ;\qquad y^2=(ct+z)(ct-z) \tag{3.87}$$

$$x^2y^2=(ct+z)^2;\qquad \frac{y^2}{x^2}=(ct-z)^2$$

$$xy=(ct+z);\qquad \frac{y}{x}=(ct-z)$$

Pada persamaan (3.86) merupakan kemungkinan pengoperasian yang akan digunakan untuk x dan y. Jika persamaan (3.83) ditransformasikan pada koordinat (x,y) dihasilkan persamaan sebagai berikut, 3.88

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 U_1(z,t)}{\partial t^2} + \hbar^2 c^2 \frac{\partial^2 U_1(z,t)}{\partial z^2} - m^2 c^4 U_1(z,t) = 0$$

$$-\hbar^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial t}\right) - \hbar^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t}\right) + \hbar^2 c^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial z}\right) + \hbar^2 c^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial z}\right)$$
$$- m^2 c^4 U_1(x,y) = 0$$

Karena dari persamaan (3.88) terdapat $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}$ (Lampiran B), maka substitusikan hasil dari penurunan tersebut,

3.89

$$-\hbar^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{c(x^2-1)}{2y}\right)\right) - \hbar^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c(x^2+1)}{2x}\right)\right)$$
$$+ \hbar^2 c^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2+1}{2y}\right)\right) + \hbar^2 c^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-x^2+1}{2x}\right)\right)$$
$$- m^2 c^4 U_1(x,y) = 0$$

Kemudian untuk $\frac{\partial}{\partial z}$ dan $\frac{\partial}{\partial t}$ disederhanakan, sehingga menghasilkan nilai berikut

3.90

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{c(x^2-1)}{2y}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c(x^2+1)}{2x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{c(x^2-1)}{2y} + \frac{c(x^2+1)}{2x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c}{yx}\right) = 1$$

3.91

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{(x^2+1)}{2y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-(x^2+1)}{2x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2+1-x^2+1}{2yx}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{yx}\right) = -1$$

Setelah mendapatkan bentuk penyederhanaan dari turunan terhadap waktu dan posisi, kemudian substitusikan persamaan (3.90) dan (3.91) pada persamaan (3.89) , lalu dari persamaan yang dihasilkan dijadikan bentuk persamaan diferensial Bessel menjadi(Shan, 2023)

$$-\hbar^2 c\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right) - \hbar^2 c\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right) + \hbar^2 c^2\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right) + \hbar^2 c^2\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right) - m^2 c^4\, U_1(x,y) = 0 \quad 3.92$$

Dengan persamaan umum diferensial Bessel $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$, maka persamaan diferensial diatas menghasilkan persamaan berikut,

$$-\hbar^2 x\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right) - \hbar^2 y\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right) + \hbar^2 x^2\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}\right) + \hbar^2 y^2\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right) - m^2 c^4\, U_1(x,y) = 0 \quad 3.93$$

Lalu dilakukan pemisahan variabel pada persamaan (3.92) dengan memberikan persamaan x pada ruas kiri dan memindahkan persamaan y pada ruas kanan dan didefinisikan $U_1(x,y) = f(x)g(y)$, sehingga dihasilkan persamaan sebagai berikut,

$$\hbar^2 x^2\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}\right) - \hbar^2 x\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right) = -\hbar^2 y^2\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right) + \hbar^2 y\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right) + m^2 c^4\, U_1(x,y) = a \quad 3.94$$

$$\frac{\hbar^2 x^2}{f(x)}\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right) - \frac{\hbar^2 x}{f(x)}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right) = -\frac{(\hbar^2 y^2)}{g(y)}\left(\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}\right) + \frac{\hbar^2 y}{g(y)}\left(\frac{\partial g(y)}{\partial y}\right) \quad 3.95$$

$$+m^2 c^4\, U_1(x,y) = a$$

Hasil untuk persamaan U_2 dilakukan dengancara serupa dengan U_1 (Lampiran C). Nilai a pada kedua persamaan diats merupakan suatu konstanta. Kemudian dari pemisahan variabel didapatkan dua solusi persamaan yang mana persaman ini merupakan persamaan fungsi Bessel, sebagai berikut

$$f(x) = c_1 x^{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}} + c_2 x^{-\frac{\sqrt{a}}{\hbar}} \tag{3.96}$$

$$g(y) = \left(c_3 J_{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right) + c_4 Y_{-\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right)\right)$$

Solusi $f(x)g(y)$ diatas merupakan solusi untuk U_1 dan U_2, sedangkan untuk Pada persamaan diatas terdapat $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ yang merupakan suatu konstanta, kemudian setelah mendapatkan beberapa persamaan diatas ,maka didapatkan solusi persamaan Dirac untuk $U_1(x, y) = f(x)g(y)$ dan $U_2(x, y) = f(x)g(y)$ dengan mensubstitusikan $f(x)$ dan $g(y)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} U_1(x, y) = \sum_a \left(c_1 x^{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\right)\left(c_3 J_{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right) + c_4 Y_{-\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right)\right) \\ + \left(c_2 x^{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\right)\left(c_3 J_{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right) + c_4 Y_{-\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right)\right) \end{aligned} \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned} U_2(x, y) = \sum_a \left(c_1 x^{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\right)\left(c_3 J_{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right) + c_4 Y_{-\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right)\right) \\ + \left(c_2 x^{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\right)\left(c_3 J_{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right) + c_4 Y_{-\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right)\right) \end{aligned} \tag{3.98}$$

Kemudian pada persamaan U_1 dan U_2 masing masing memiliki komponen spinor dirac yakni φ_0 dan φ_2, maka dari persamaan (3.96) dan (3.97) menghasilkan nilai φ_0 dan φ_2 berikut, (Shan,2023)

$$\varphi_0(x,y) = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \tag{3.99}$$

$$\begin{aligned}\varphi_0(x,y) = \frac{1}{2}\sum_a \Bigg\{ & \left(c_1 x^{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\right)\left(c_3\, J_{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right) + c_4\, Y_{-\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right)\right) \\ & + \left(c_2 x^{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\right)\left(c_3\, J_{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right) + c_4\, Y_{-\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right)\right) \\ & + \left(c_1 x^{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\right)\left(c_3\, J_{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right) + c_4\, Y_{-\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right)\right) \\ & + \left(c_2 x^{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\right)\left(c_3\, J_{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right) + c_4\, Y_{-\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right)\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

$$\varphi_2(x,y) = -\frac{1}{2}(U_1 + U_2) \tag{3.100}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(x,y) = -\frac{1}{2}\sum_a \Bigg\{ & \left(c_1 x^{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\right)\left(c_3\, J_{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right) + c_4\, Y_{-\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right)\right) \\ & + \left(c_2 x^{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\right)\left(c_3\, J_{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right) + c_4\, Y_{-\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right)\right) \\ & + \left(c_1 x^{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\right)\left(c_3\, J_{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right) + c_4\, Y_{-\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right)\right) \\ & + \left(c_2 x^{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\right)\left(c_3\, J_{\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right) + c_4\, Y_{-\frac{\sqrt{a}}{\hbar}}\left(\frac{mcy}{\hbar}\right)\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

Setelah mendapatkan $\varphi_0(x,y)$ dan $\varphi_2(x,y)$ pada persamaan (3.99) dan (3.100) , untuk menyatakan *eigen state* untuk pada kasus sumur potensial bergerak sebagian.diberikan solusi persamaan gelombang yakni (Shan,2023),

$$\psi(x,y) = \begin{bmatrix} \varphi_0(x,y) \\ 0 \\ \varphi_2(x,y) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.101}$$

Disamping menggunakan penurunan manual untuk mendapatkan *eigen state* dan *eigen value* maka dapat digunakan cara alternatif, yakni dengan mengambil sedikit sampai dari bagian dinding yang bergerak. Sebelumnya pada persamaan dirac yang tidak bergantung waktu diberikan suatu syarat kontinuitas. Kemudian untuk solusi yang bergantung waktu diberikan syarat kontinuitas berikut,

$$z = 0 : \begin{cases} s + b = h + j \\ s - b = \dfrac{k_2 \dfrac{\sqrt{(E-V_0)^2 - m^2c^4}}{\hbar c}}{k_1 \dfrac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{\hbar c}} \; (h - j) \end{cases} \tag{3.102}$$

$$z = L_0 : \begin{cases} q\, e\hat{}(ik_2(L_0 + V_0\Delta_t) + r\, e\hat{}(ik_2(L_0 + V_0\Delta_t) = h\, e\hat{}(ik_1(L_0 + V_0\Delta_t) + j\, e\hat{}(ik_1\, (L_0 + V_0\Delta_t) \\ q\, e\hat{}(ik_2(L_0 + V_0\Delta_t) - r\, e\hat{}(ik_2(L_0 + V_0\Delta_t) = \dfrac{k_1 \dfrac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{\hbar c}}{k_2 \dfrac{\sqrt{(E-V_0)^2 - m^2c^4}}{\hbar c}} \; h\, e\hat{}(ik_1(L_0 + V_0\Delta_t) + j\, e\hat{}(ik_1\, (L_0 + V_0\Delta_t) \end{cases} \tag{3.103}$$

Kemudian dari syarat kontinuitas pada persamaan (3.102) dan (3.103) karena terdapat beberapa konstanta seperti (s, b, h, j, q, r) (Lampiran E), maka akan digunakan konstanta normalisasi untuk mendapatkan nilai dari masing masing konstanta. Yang mana konstanta normalisasi ini berfungsi untuk menyatakan interpretasi dari probabilitas total pada keberadaan suatu partikel yang terdapat pada masing masing daerah, serta konstanta normalisasi ini juga berperan untuk menjaga konservasi energi. Sehingga hal tersebut dapat digunakan untuk mendapatkan nilai *eigen-value*. Untuk mendapatkan normalisasi konstanta ini digunakan persamaan *eigen state* pada persamaan dirac yang tidak bergantung waktu pada daerah I (3.30) , sebagai berikut untuk konstanta s dan b

$$\Psi_I\ (z) = se^{ik_z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{\hbar kc}{E - V_0 + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} + be^{-ik_z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(-\frac{\hbar kc}{E - V_0 + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 3.104$$

Dengan,

$$Se^{ik_z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar ck}{E - V_0 + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} = S^\dagger\ e^{-ik_z}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\hbar ck}{E - V_0 + mc^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$be^{-ik_z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\hbar ck}{E - V_0 + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} = b^\dagger e^{ik_z}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\hbar ck}{E - V_0 + mc^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Maka untuk normalisasi konstanta $\psi_1^\dagger\ \psi_1$, didapatkan,

$$\psi_1^\dagger\ \psi_1 = \left[S^\dagger\ e^{-ik_z}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\hbar ck}{E - V_0 + mc^2} & 0 \end{pmatrix}.Se^{ik_z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar ck}{E - V_0 + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$+\left[b^\dagger e^{ik_z}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\hbar ck}{E - V_0 + mc^2} & 0 \end{pmatrix}.be^{-ik_z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\hbar ck}{E - V_0 + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \left[|s|^2\left(\ e^{-ik_z}\right)^2\left(1 + 0 + \left(\frac{\hbar ck}{E - V_0 + mc^2}\right)^2 + 0\right)\right] +$$

$$\left[|b|^2\left(\ e^{-ik_z}\right)^2\left(1 + 0 + \left(-\frac{\hbar ck}{E - V_0 + mc^2}\right)^2 + 0\right)\right]$$

$$= \left[(|s|^2 + |b|^2) \left(\frac{(\hbar ck)^2}{(E - V_0 + mc^2)^2} \right)^2 \right]$$

Dari persamaan (3.104) telah didapatkan konstanta normalisasi untuk s dan b pada syarat kontinuitas $(z = 0)$, kemudian untuk konstanta h dan j dilakukan cara yang serupa sehingga menghasilkan persamaan berikut dengan menggunakan solusi *eigen state* pada daerah II,

$$\Psi_{II}\,(z) = he^{ik_z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{\hbar kc}{E + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} + je^{-ik_z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(-\frac{\hbar kc}{E + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.105}$$

Dengan,

$$he^{ik_z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar ck}{E + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} = h^\dagger\, e^{-ik_z} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\hbar ck}{E + mc^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$je^{-ik_z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\hbar ck}{E + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} = j^\dagger e^{ik_z} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\hbar ck}{E + mc^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Maka untuk normalisasi konstanta $\psi_{II}^\dagger\, \psi_{II}$, didapatkan,

$$\psi_{1I}^\dagger\, \psi_{1I} = \left[(|h|^2 + |j|^2) \left(\frac{(\hbar ck)^2}{(E + mc^2)^2} \right)^2 \right]$$

Kemudian untuk syarat kontinuitas pada $(z = L_0)$ yang mana syarat tersebut untuk berlaku pada konstanta q, r, h, j. Maka diberikan ansatz yang menunjukkan sampel selisis waktu untuk jarak yang kecil lalu diekspansikan,

$$qe^{(ik_1(L_0+V\Delta t)} + re^{(ik_1(L_0+V\Delta t)} = he^{(ik_2(L_0+V\Delta t)} + je^{(ik_2(L_0+V\Delta t)}$$

$$qe^{(ik_2 L_0)}(1 + ik_2\, V\Delta t) + re^{(-ik_2 L_0)}(1 - ik_2\, V\Delta t) =$$

$$he^{(ik_1 L_0)}(1 + ik_1\, V\Delta t) + je^{(-ik_1 L_0)}(1 - ik_1\, V\Delta t) \qquad 3.106$$

Kemudian dari persamaan (3.106) dilakukan operasi persamaan seperti yang dilakukan pada solusi persamaan dengan syarat kontinuitas $z = 0$, dengan menggunakan solusi *eigen* state pada daerah III (3.74) sehingga untuk q dan r dihasilkan konstanta normalisasi sebagai berikut,

$$\psi_{III} = qe^{(ik_z L_0)}(1 + ik_z\, V\Delta t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{\hbar kc}{E - V_0 + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} + re^{-ik_z(L_0+V\Delta t)}(1 - ik_z\, V\Delta t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(-\frac{\hbar kc}{E - V_0 + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 3.107$$

Dengan,

$$qe^{(ik_z L_0)}(1 + ik_z\, V\Delta t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar ck}{E - V_0 + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= q^{\dagger}e^{(-ik_z L_0)}(1 + ik_z\, V\Delta t)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\hbar ck}{E - V_0 + mc^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$re^{-ik_z(L_0+V\Delta t)}(1-ik_z\,V\Delta t)\begin{pmatrix}1\\0\\\left(-\dfrac{\hbar kc}{E-V_0+mc^2}\right)\\0\end{pmatrix}$$

$$=r^{\dagger}e^{ik_z(L_0+V\Delta t)}(1-ik_z\,V\Delta t)\begin{pmatrix}1 & 0 & -\dfrac{\hbar ck}{E-V_0+mc^2} & 0\end{pmatrix}$$

Maka untuk normalisasi konstanta $\psi_{III}^{\dagger}\,\psi_{III}$, didapatkan,

$$\psi_{III}^{\dagger}\,\psi_{III}=\left[q^{\dagger}e^{(-ik_2\,L_0)}(1+ik_2\,V\Delta t)\begin{pmatrix}1 & 0 & \dfrac{\hbar ck_2}{E-V_0+mc^2} & 0\end{pmatrix}.\,qe^{(ik_2\,L_0)}(1\right.$$

$$\left.+ik_2\,V\Delta t)\begin{pmatrix}1\\0\\\dfrac{\hbar ck}{E-V_0+mc^2}\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$+\left[r^{\dagger}e^{ik_2(L_0+V\Delta t)}(1-ik_2\,V\Delta t)\begin{pmatrix}1 & 0 & -\dfrac{\hbar ck}{E-V_0+mc^2} & 0\end{pmatrix}.\,re^{-ik_2(L_0+V\Delta t)}(1\right.$$

$$\left.-ik_2\,V\Delta t)\begin{pmatrix}1\\0\\\left(-\dfrac{\hbar kc}{E-V_0+mc^2}\right)\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$=\left[|q|^2(1+ik_2\,V\Delta t)^2\left(1+0+\left(\frac{\hbar ck}{E-V_0+mc^2}\right)^2+0\right)\right]+$$

$$\left[|r|^2(1-ik_2\,V\Delta t)^2\left(1+0+\left(-\frac{\hbar ck}{E-V_0+mc^2}\right)^2+0\right)\right]$$

$$=\left[(|q|^2+|r|^2)\,(1^2-(ik_2\,V\Delta t)^2)^2\left(\frac{(\hbar ck_2)^2}{(E-V_0+mc^2)^2}\right)^2\right]$$

Sehinngga untuk konstanta h dan j pada syarat kontinuitas $z=L_0$ maka dilakukan operasi persamaan serupa dengan persamaan (3.107), namun menggunakan persamaan *eigen state* pada daerah II. Sebagai berikut,

$$\psi_{II} = he^{(ik_z L_0)}(1 + ik_z V\Delta t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(\dfrac{\hbar kc}{E + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} + je^{-ik_z(L_0+V\Delta t)}(1 \qquad 3.108$$

$$- ik_z V\Delta t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(-\dfrac{\hbar kc}{E + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan,

$$he^{(ik_z L_0)}(1 + ik_1 V\Delta t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\hbar ck}{E + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= h^{\dagger}e^{(-ik_z L_0)}(1 + ik_1 V\Delta t)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\hbar ck}{E + mc^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$je^{-ik_z(L_0+V\Delta t)}(1 - ik_z V\Delta t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(-\dfrac{\hbar kc}{E + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= j^{\dagger}e^{ik_z(L_0+V\Delta t)}(1 - ik_z V\Delta t)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{\hbar ck}{E + mc^2} & 0 \end{pmatrix}$$

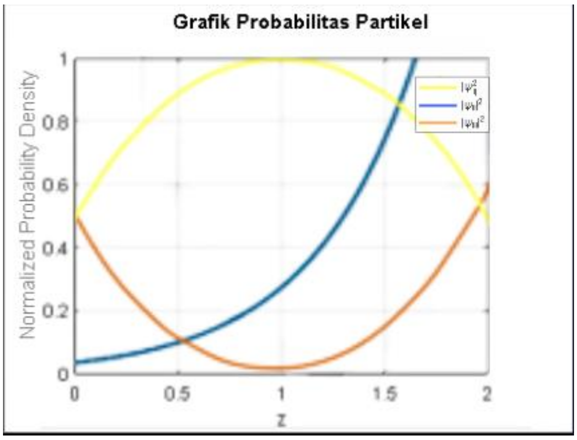
Maka untuk normalisasi konstanta $\psi_{II}^{\dagger}\,\psi_{II}$, pada $z = L_0$ didapatkan,

$$\psi_{II}^{\dagger}\,\psi_{II} = \left[(|h|^2 + |j|^2)\,(1^2 - (ik_z V\Delta t)^2)^2 \left(\frac{(\hbar ck)^2}{(E + mc^2)^2}\right)^2\right]$$

Dari hasil perhitungan *eigenstate* yang didapatkan dimana terdapat 4 *eigenstate* yang masing masing 2 *eigenstate* untuk posisi $z = 0$ dan 2 *eigenstate* untuk posisi $z = L_0$. Untuk hasil *eigenstate* dapat diplot pada matlab untuk menentukan probabilitas dari partikel yang berada pada wilayah dan kondisi tersebut untuk waktu tertentu, untuk hasil plot tersebut didapatkan dengan memberikan inputan persamaan (3.104), (3.105), (3.107) (3.108) dengan menyertakan nilai masing-

masing konstanta pada persamaan fungsi gelombangnya (Lampiran E) dengan menggunakan matlab sehingga menghasilkan suatu kode plot (Lampiran D)

Kemudian dari kode plot diatas didapatkan sebuah grafik *probabilitas* pada kasus ini yang diambil kondisi energi terendahnya (*groundstate*) menjabarkan tentang probabilitas keberadaan partikel pada waktu dan posisi tertentu,

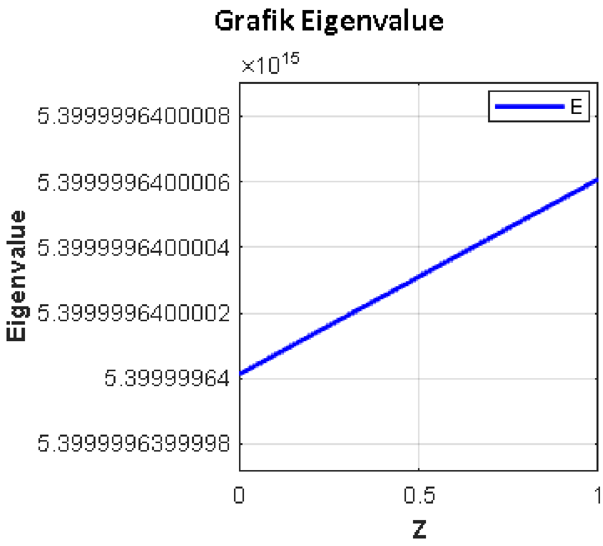


Gambar 3. 3 Grafik Probabilitas untuk kasus persamaan Dirac pada sumur potensial yang bergantung waktu

Pada gambar grafik 3.3 diatas memiliki sumbu x yang menyatakan posisi dari pergerakan dinding sumur yang dituliskan sebagai (posisi (z)) dan memiliki sumbu y yang menyatakan probabilitas partikel dengan nilai maksimum ialah 1, pada grafik *eigenstate* memiliki komponen-komponen fungsi gelombang yakni $\psi_1, \psi_2,$ dan ψ_3 untuk menyatakan persamaan *eigenstate* pada masing masing wilayah sumur potensial dengan batas posisi $z = 0$ dan z = L_0(diberikan permisalan nilai 2), berdasarkan gambar (3.3) menghasilkan grafik probabilitas dengan kurva yang memiliki perbedaan pada setiap daerah namun tetap sesuai dengan teori yakni probabilitas total adalah 1. Perubahan probabilitas yang bergantung pada waktu diakibatkan oleh perubahan lebar yang terjadi pada sumur potensial(Tiandho, 2016).

Setelah mendapatkan *probabilitas* pada kasus sumur potensial yang bergantung waktu yang menggunakan beberapa persamaan *eigenstate*, setiap persamaan pasti memiliki *eigenstate* dan *eigenvalue.* Untuk mendapatkan *eigenvalue* pada setiap persamaan normalisasi konstanta (3.104), (3.105), (3.107) (3.108) digunakan matlab yang akan mengkonversi perhitungan berdasarkan persamaan normalisasi konstanta, syarat kontinuitas, nilai masing-masing konstanta (Lampiran E) dan parameter parameter sumur potensial yang digunakan sehingga dapat menghasilkan nilai *E* dari setiap persamaan (Lampiran D).

Berdasarkan hasil nilai E *(eigenvalue)* yang didapatkan pada lampiran D, kemudian hasil tersebut di plot pada matlab untuk menghasilkan grafik *eigenvalue* pada posisi tertentu, dengan kode plot grafik pada lampiran D menghasilkan grafik sebagai berikut,



Gambar 3. 4 Grafik Eigenvalue untuk kasus persamaan Dirac pada sumur potensial yang bergantung waktu

Pada gambar grafik (3.4) memiliki sumbu x yang menyatakan pergerakan dari dinding sumur potensial yang dituliskan dengan (z), lalu untuk sumbu y menyatakan hasil dari nilai E yang dituliskan dengan (Eigenvalue). Berdasarkan gambar grafik *eigenvalue* (3.4) dapat dijabarkan bahwa grafik diatas menunjukkan kenaikan dan merupakan grafik linier yang lurus, dengan rentang posisi (z) yang diilustraksikan berada dari titik 0 hingga titik 1. Pada grafik menunjukkan bahwa semakin lebar posisi pergerakan dinding maka semakin besar pula nilai E nya. Karena grafik diatas menunjukkan grafik linier yang mana perubahan setiap titiknya dipengaruhi oleh dinding dari sumur potensial yang bergerak dengan kecepatan konstan.

3.4 Sumur potensial kuantum dalam kajian Islam

Pengetahuan yang berdasarkan dari Al-Qur'an memang tidak diragukan lagi keragamannya, dalam Al-Quran telah disuguhkan segala macam hal mengenai ilmu pengetahuan yang ada di alam semesta ini. Mulai dari benda-benda yang berukuran makro hingga mikro, juga dari segi penyampaiannya ada yang disampaikan secara jelas atau eksplisit ada juga yang memelukan beberapa kajian dan imajinasi dari logika atau secara implisit. Pada penelitian dikaji suatu keilmuan dalam bidang sains, khususnya dalam dunia fisika kuantum yang berakaitan dengan partikel.

Persamaan dirac membahas mengenai suatu partikel dengan spin $\frac{1}{2}$, partikel merupakan suatu makhluk ciptaanNya yang berukuran sangat kecil atau dalam dunia sains disebut dengan benda mikroskopis. Hal ini juga terdapat pembahasannya dalam Al-Qur’an, yakni dalam Qs. Adz-Dzaariyat(51): ayat 1-6

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّ حْمَنِ الرَّ حِيْمِ

وَ الذَّا رِ ياَتِ ذَرْوًا (١) فاَلْحاَ مِلاتِ وِقْرًا (٢) فاَلْجاَرِياَتِ يُسْرًا (٣)فَاَلْمُقَسِّماتِ أَمْرًا (٤) إِ نَّمَا تُو عَدُونَ لَصَادِقٌ (٥) وَإِنَّ الدِّ يْنَ لَوَا قِعٌ (٦)

“*Demi (angin) yang menerbangkan debu (1). Dan awan yang mengandung (hujan) (2) . dan (kapal-kapal) yang berlayar dengan mudah (3). Dan (malaikat-malaikat) yang membagi-bagi urusan (4). Sungguh apa yang dijanjikan padamu pasti benar (5). Dan sungguh (hari) pembalasan pasti terjadi (6)* ” (Qs. Adz-Dzaariyaat (51):1-6)

Berdasarkan Tafsir Ibnu Katsir adz-dzariyat merupakan angin kencang Syu'bah ibnul Hajjaj telah meriwayatkan dari Sammak, dari Khalid ibnu Ur'urah bahwa ia pernah mendengar Ali RA Syu'bah juga telah meriwayatkan pula dari Al-Qasim ibnu Abu Buzzah, dari Abut Tufail bahwa ia pernah mendengar Ali RA dan telah diriwayatkan pula melalui berbagai alur dari Amirul Mu’minin Ali ibnu Abu Talib RA Disebutkan bahwa ia menaiki mimbar di Kufah lalu berkata, "Tidaklah kalian bertanya kepadaku tentang suatu ayat di dalam *Kitabullah* dan tidak pula dari sunnah Rasulullah melainkan aku ceritakan kepada kalian tentangnya." Maka berdirilah Ibnul Kawa, lalu bertanya, "Hai Amirul Mu’minin, apakah makna firman Allah SWT.: *'Demi* (angin) *yang menerbangkan debu dengan sekuat-kuatnya'* (Adz-Dzariyat: 1)?" Maka Ali RA menjawab, "Makna yang dimaksud adalah angin." Ibnul Kawa menanyakan tentang makna firman selanjutnya: *dan awan yang mengandung hujan.* (Adz-Dzariyat: 2) Ali RA menjawab, bahwa yang dimaksud adalah awan. Lalu Ibnul Kawa bertanya lagi tentang makna firman-Nya: *dan kapal-kapal yang berlayar dengan mudah.* (Adz-Dzariyat: 3) Ali RA menjawab, bahwa yang dimaksud adalah kapal-kapal. Ibnul Kawa bertanya lagi mengenai firman-Nya: (malaikat-malaikat) *yang membagi-bagi urusan* (Adz-Dzariyat : 4) Maka Ali RA mengatakan bahwa makna yang dimaksud ialah malaikat-malaikat yang ditugaskan untuk itu. Dimana hal ini telah diriwayatkan pada suatu hadits yang marfu' (Tafsir Ibnu Katsir, 2015).

Oleh sebab itu Al-Hafiz Abu Bakar Al-Bazzar mengatakan, telah menceritakan kepada kami Ibrahim ibnu Hani', telah menceritakan kepada kami Sa'id ibnu Salam Al-Attar, telah menceritakan kepada kami Abu Bakar ibnu Abu Sabrah, dari Yahya ibnu Sa'id, dari Sa'id ibnul Musayyab yang mengatakan bahwa Sabig At-Tamimi datang kepada Umar ibnul Khattab RA, lalu bertanya, "Hai Amirul Mu'minin, ceritakanlah kepadaku tentang makna *az-zariyati zarwa."* Maka Umar RA menjawab, "Itu adalah angin yang bertiup kencang. Seandainya aku tidak mendengar Rasulullah SAW. mengatakannya, tentulah aku tidak akan mengatakannya." Sabig bertanya, "Maka ceritakanlah kepadaku makna *al-mugassimati amra."* Umar RA menjawab, "Yang dimaksud adalah malaikat-malaikat. Seandainya aku tidak mendengar Rasulullah SAW. mengatakannya, tentulah aku tidak akan mengatakannya." Sabig At-Tamimi kembali bertanya, "Ceritakanlah kepadaku tentang makna *al-jariyati yusra."* Maka Umar RA menjawab, "Makna yang dimaksud ialah kapal-kapal. Seandainya aku tidak pernah mendengar Rasulullah SAW. mengatakannya, tentulah aku tidak berani mengatakannya." Kemudian Khalifah Umar memerintahkan agar Sabig dihukum dera. Maka ia didera sebanyak seratus kali, lalu disekap di dalam sebuah rumah. Setelah sembuh dari luka deranya, ia dipanggil lagi dan dihukum dera lagi, lalu dinaikkan ke atas unta, dan Umar RA berkirim surat kepada Abu Musa Al-Asy'ari

RA yang isinya mengatakan, "Laranglah orang-orang duduk bersamanya dalam suatu majelis." Sanksi itu terus-menerus diberlakukan atas dirinya. Akhirnya Sabig datang kepada Abu Musa RA, lalu bersumpah dengan sumpah berat bahwa dia tidak merasa sakit hati atas apa yang telah dialaminya itu. Maka Abu Musa RA berkirim surat kepada Umar RA memberitakan hal tersebut. Umar RA membalas suratnya itu dengan mengatakan, "Menurut hemat saya, tiadalah dia sekarang melainkan benar dalam pengakuannya. Maka biarkanlah dia bergaul dengan orang-orang dalam majelis mereka." Abu Bakar Al-Bazzar mengatakan bahwa Abu Bakar ibnu Abu Sabrah orangnya *daif*, dan Sa'id ibnu Salam bukan termasuk ahli hadis. Menurut hemat saya, hadis ini dinilai *daif* dari segi *ke-marfu* '-annya, dan yang paling mendekati kepada kebenaran hadis ini *mauquf* hanya sampai pada Umar RA Karena sesungguhnya kisah Sabig ibnu Asal ini cukup terkenal, dan sesungguhnya Khalifah Umar RA memerintahkan agar Sabig didera karena Sabig dalam pertanyaannya itu kelihatan seperti orang yang mengingkarinya; hanya Allah-lah Yang Maha Mengetahui (Tafsir Ibnu Katsir, 2015).

Berdasarkan pendapat yang terkenal dari jumhur ulama menyebutkan seperti pendapat di atas, yaitu kapal-kapal yang berlayar dengan mudah di atas permukaan air. Menurut sebagian dari mereka, yang dimaksud adalah bintang-bintang yang beredar pada garis edarnya masing-masing. Demikian itu agar ungkapan ini dimaksudkan bertingkat-tingkat dimulai dari yang paling bawah, kemudian berakhir di yang paling atas. Dengan kata lain, angin di atasnya terdapat awan, dan bintang-bintang di atas kesemuanya itu, dan yang lebih atas lagi ialah para malaikat yang ditugaskan untuk membagi-bagi urusan; mereka turun dengan membawa perintah-perintah Allah, baik yang berupa syariat ataupun yang berupa urusan alam.

Ungkapan ini merupakan *qasam* atau sumpah dari Allah SWT. yang menunjukkan akan kepastian terjadinya hari kembali (hari kiamat), sebagaimana firman Allah dalam ayat 5 dan ayat 6 pada surah Adz Dzariyat ini (Tafsir Ibnu Katsir, 2015)

Berdasarkan Tafsir Fi Zhilalil –Qur'an XI , ayat ini menjelaskan tentang Allah SWT bersumpah demi angin, awan, kapal-kapal(bahtera) dan malaikat yang merupakan makhluk-Nya yang dijadikan sebagai sarana bagi kekuasaan-Nya dan pemenuh kehendak-Nya, Allah menuturkan segala sarana ini untuk mengarahkan kalbu kepada segala kerahasiaanNya yang terpendam serta memberikan segala bentuk rezeki kepada makhluk-Nya. Allah bersumpah atas keempat makhluk-Nya berjanju kepada manusia tentang segala perbuatannya yang baik maupun yang buruk pasti akan mendapatkan balasan yang sama, kebaikan akan dibalas dengan kebaikan keburukan akan dibalas dengan keburukan. Apabila Dia menangguhkan hisab di dunia, bukan berarti hisab akan ditangguhkan pula di akhirat. Janji itu akan terbukti dan apa yang dijanjikan Allah SWT pasti akan terwujud (Sayyid, 2003).

Pada Qs. Adz Dzaariyaat secara tersirat mengandung suatu penafsiran yang dapat dikaitkan pada dunia sains, terkhusus mengenai partikel-partikel berukuran mikro juga mengenai sifat dari partikel mikroskopis ini. Pada kata *dzaariyaat* adalah suatu kata jamak yang asalnya dari *dzarrah* (semut kecil atau debu). Ketika pada Al-Qur'an menggunakan kata *dzarrah* untuk benda kecil seperti debu atau semut kecil maka dapat dikaitkan pada keilmuan fisika yang mengarah pada partikel beserta penyusun-penyusunnya (Mulyono dan Ahmad, 2006).

Kemudian untuk permodelan yang digunakan dalam kasus yang diberikan untuk partikel dirac ini adalah sumur potensial berhingga, dimana sumur ini dibatasi dengan dua dinding dengan suatu partikel yang terperangkap pada sumur ini. Dalam Al-Qur’an terdapat suatu ayat yang membahas mengenai sumur, yakni Qs.Yasin

Pada setiap keilmuan dan benda yang berada di muka bumi pasti telah tertulis pada Al-Qur’an, dengan menggunakan penafsiran yang tepat. Seperti salah satunya pada penelitian ini yang membahas mengenai kasus sumur potensial bergerak sebagian, terdapat suatu ayat dalam Al-Qur’an yang menjelaskan secara tersirat mengenai hal tersebut. Berikut Qs. Yasin (36): 9 :

وَجَعَلْنَا مِنْ بَيْنِ اَيْدِيْهِمْ سَدًّا وَمِنْ خَلْفِهِمْ سَدًّا فَأَغْشَيْنَاهُمْ فَهُمْ لاَ يُبْصِرُوْنَ (٩)

“*Dan Kami jadikan di hadapan mereka sekat (dinding) dan di belakang mereka juga sekat, dan Kami tutup (mata) mereka sehingga mereka tidak dapat melihat* ” (Qs. Yasin (36) : 9).

Berdasrkan Tafsir Ibnu Katsir pada yasin ayat 9, menurut mujahid dinding itu menutupi mereka dari kebenaran sehingga mereka kebingungan, yang menurut Qatadah disebutkan berada dalam kesesatan. Yang mana mata mereka ditutup dari kebenaran, sehingga tidak dapat mengambil manfaat dari pada kebaikan tersebut serta tidak mendapatkan petunjuk dari Allah untuk menempuh jalan kebaikan. bdur Rahman ibnu Zaid ibnu Aslam mengatakan bahwa Allah SWT. menjadikan dinding ini antara mereka dan Islam serta iman, karenanya mereka tidak dapat menembusnya (Tafsir Ibnu Katsir, 2015).

Berdasarkan penjelasan pada Tafsir Jalalain yakni Dan Kami adakan di hadapan mereka dinding dan di belakang mereka dinding) lafal Saddan dalam dua tempat tadi boleh dibaca Suddan (dan Kami tutup -mata- mereka sehingga mereka tidak dapat melihat.) Ini merupakan tamtsil yang menggambarkan tertutupnya jalan iman bagi mereka (Tafsir Jalalain, 2023).

Pada kamus bahasa arab almaany kata سَدٌّ memiliki arti rintangan, halangan, penghalang, benteng, tutup, atau سَدَّ ,السَّدَّين–سَدَّين memiliki arti dua tutup. Kata سَدًّا memiliki tasrif sebagai berikut سَدَّ(فعل مضي), يَسِدُّ(فعل مضارع), سِدَّ(فعل الأمر) yang bermakna bendungan atau sumur.

Dalam Tafsir ringkas Kemenag pada ayat ini yakni Dan Kami jadikan di hadapan mereka sekat, yakni dinding penghalang antara mereka dengan kebenaran yang dibawa oleh Nabi Muhammad, dan di belakang mereka juga Kami ciptakan sekat, dan Kami tutup mata mereka sehingga mereka tidak dapat melihat kebenaran. Itulah perum-pamaan orang-orang yang enggan melakukan kebaikan dan selalu menolak kebenaran. 10. Itu membuktikan bahwa peringatan apa pun sama sekali tidak ada pengaruhnya bagi kaum kafir. Dan sama saja bagi mereka, apakah engkau, wahai Nabi Muhammad, memberi peringatan kepada mereka akan adanya azab atau engkau tidak memberi peringatan kepada mereka; pada akhirnya mereka tetap tidak akan beriman juga. Itu semua diakibatkan oleh keengganan mereka menerima petunjuk Allah yang disampaikan oleh para rasul (Tafsir Kemenag, 2023).

Kemudian pada Tafsir Al-Ahzar dijelaskan bahwa pada kalimat “Dan telah Kami jadikan di hadapan mereka suatu sekatan dan di belakang mereka pun suatu sekatan “ Akan maju ke depan terhambat, akan surut ke belakang terhalang, sehingga mereka hanya berputar di sana ke sana saja, tidak ada kemajuan dan tidak pula surut ke belakang, karena putaran hidup bukanlah surut ke belakang melainkan maju ke muka, namun mereka tidak dapat maju. Terkurung, terbelenggu dan terhambat. Dan “Lalu Kami selubungilah mereka; maka tidaklah mereka dapat melihat." Cobalah gambarkan sekali lagi betapa malang nasib orang itu atau kebanyakan dari mereka itu karena iman tidak ada. Tangan dialihkan ke belakang dan dibawa ke kuduk dan kuduk penuh dengan belenggu, sehingga tersundak ke dagu. Dagu tertengadah sehingga tidak dapat lurus melihat ke muka, melainkan tertengadah ke atas. Sebab itu gelaplah jalan yang akan ditempuh, terselubung. Tidak bebas buat melihat dan mempertimbangkan. Diri telah terbatas dari petunjuk dan kebenaran karena di muka tertutup dan di belakang pun tertutup. Semua jadi gelap, semua jadi terhalang dan terhambat (Hamka, 2015).

Ayat ini menjelaskan mengenai Abu Jahal yang ingin membunuh Rasulullah SAW, jika bertemu dengannya. Namun ketika Rasulullah berada di dekatnya maka Allah SWT menutup mata Abu Jahal sehingga tidak dapat melihat Rasulullah SAW. Pada penjelasan ini Allah SWT membuat dinding yang berada di depan serta di belakang sehingga membuat pandangannya terhalang untuk melihat Rasulullah SAW (Putra, 2019).

Jika penjelasan diatas dipertimbangkan pada pemahaman ilmu fisika mengenai sumur potensial maka dinding yang menutupi mata Abu Jahal merupakan dinding dengan sifat tak berhingga pada kedua sisinya sehingga ia tak mampu melihat Rasulullah SAW. Ketika suatu dinding potensial dengan nilai yang sangat besar sehingga partikel berada dalam keadaan terikat, atau dapat dikatakan keadan terikat terjadi ketika potensial dalam dinding bernilai nol jadi partikel akan sulit keluar untuk melewati dinding tersebut (Putra, 2019).

Dapat disimpulkan bahwa makna serta tafsir dari kata سَدًّ ialah sumur yang digambarkan sebagai suatu wilayah dengan memiliki dua tutup sebagai penyekat atau penghalangnya. Berdasarkan penelitian ini memiliki hikmah yang dapat dijadikan pelajaran serta cara pendekatan untuk lebih dekat dengan Allah SWT, sebab jika berkaitan dengan *dzarrah* berarti hal sekecil apapun di duina ini Allah SWT pasti mellihatnya dan amalan baik ataupun buruk yang telah dilakukan selama di dunia ini akan dipertimbangkan kelak di hari akhir, tak hanya itu sekecil apapun amalan baik ataupun buruk pasti ada balasannya.

Sedangkan untuk سَدًّا yang berarti sumur atau sekat, hal ini berkaitan dengan keridhoan Allah SWT terhadap apa yang akan diperoleh kepada manusia. Dimana manusia hanya mampu berencana akan tetapi Allah SWT adalah sebaik-baiknya perencana. Seperti pada kisah abu jahal yang hendak menyakiti Rasulullah SAW , abu jahal hanya berencana akan tetapi Allah SWT tidak meridhoi ia menyakiti rasulullah maka Allah SWT ciptakanlah sekat diantara mereka untuk melindungi Rasululllah SAW. Begitupula dengan umat manusia jika kita menginginkan suatu hal yang menurut kita baik tapi kurang tepat untuk kita menurut Allah SWT, maka Ia akan memberikan sekat kepada kita terhadap tujuan tersebut akan tetapi , Ia sudah menyiapkan sesuatu yang kita butuhkan ketika Allah SWT telah membuka sekat tersebut, maka teruslah untuk berprasangka baik terhadap rencana Allah SWT.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari penelitian yang telah dilakukan, didapat kesimpulan sebagai berikut:

1. Persamaan dirac yang bergantung waktu dan tidak bergantung waktu merupakan solusi yang didapatkan dengan mengoperasikan solusi umum fungsi gelombang dan diaplikasikan pada persamaan hubungan energi dan Hamiltonian dirac
2. Solusi *eigenstate* dan *eigenvalue* pada persamaan Dirac yang tidak bergantung waktu untuk kasus sumur potensial bergerak sebagian didapatkan bentuk eksplisit dari ψ dan E pada masing-masing daerah I, II,III dalam sumur potensial dengan menggunakan pendekatan numerik. Kemudian solusi *eigenstate* dan *eigenvalue* pada persamaan Dirac yang bergantung waktu untuk kasus sumur potensial bergerak sebagian dalam mendapatkan solusi *eigenstate* digunakan pendekatan numerik yang menggunakan syarat kontinuitas dengan menghasilkan nilai dari masing masing konstanta dari persamaan dan persamaan probabilitas pertikelnya, sedangkan untuk solusi *eigenvalue* digunakan pendekatan menggunakan software Mathlab yang menghasilkan bentuk dari energi partikel dalam sumur potensial yang divisualisasikan dalam bentuk grafik *eigenvalue* terhadap posisi dari pergerakan dinding sumur potensial.

4.2 Saran

Berdasarkan hasil dan kajian pustaka pada penelitian ini dimana persamaan yang dikaji menggunakan kajian pada Quantum Relativistic , dimana terdapat permasalahan yang belum bisa mendekripsikan pada kasus sumur potensial bergerak sebagian. Sehingga dibutuhkan kajian yang lebih tinggi yakni pada kajian Quantum Field.

DAFTAR PUSTAKA

Amrulloh, Afifatul Husna Kukuh. 2021. *Studi Persamaan Klein-Gordon Dan Persamaan Dirac Dalam Sumur Potensial Persegi Ganda Simetri*. Jurusan Fisika UIN Malang: Skripsi

Beiser, Arthur. 2003. *Concepts of Modern Physics, Sixth Edition*. United States of America: McGraww-Hill Companies

Birula, Iwo Bialynicki. 2013. *Solution of d'Alembertian and Klein-Gordon equation confined to a region with one fixed and one moving wall*. EPL Journal. Published on 28 March 2013

Commins, Eugene D. 2014. *Quantum Mechanics (An Experimentalist's Approach)*. Cambridge University: Cambridge University Press; 1st Edition .

Greiner, Professor Dr. Walter. 2000. *Relativistik Quantum Mechanics Wave Equation*. Berlin: Springer.

Griffith, David J. 1999. *Introduction to Electrodynamics, Third Edition*. New Jersey, United Stated of America.

Griffith, David J. 2005. *Introduction to Quantum Mechanics Second Edition*. Pearson education International: United States of America.

Griffiths, David J. 2008. *Introduction to Elementary Particles, Second Revised Edition*. Jerman: Wiley-VCH Verlag GmbH &Co.

Hakim, Taufiqul. H. 2003. AMTSILATI (Metode Praktis Mendalami Al-Quran dan membaca Kitab Kuning). Jepara: Al-Falah offset

Hamil. B, L Chetouani. 2016. *Moving Potential for Dirac and Klein-gordon equations.*PRAMANAJournal of Physics.Indian Academy of Sciences, Vol 86 No. 4

Hamka, 2015. *Tafsir Al-Ahzar Jilid 8*. Jakarta: Gema Insani

Husna, Radhiatul. 2015. *Solusi Persamaan Diferensial Bessel dengan menggunakan Metode Frobenius*. Padang: Jurusan Matematikan Universitas Andalas.

Ibnukatsironline.com. (2015, 15 September). Tafsir Surat Saba,ayat 3-6. Diakses pada 22 November 2023, dari http://www.ibnukatsironline.com/2015/09/tafsir-surat-saba-ayat-3-6.html

Ibnukatsironline.com. (2015, 30 September). Tafsir Surat Yasin,ayat 33-36. Diakses pada 22 November 2023, dari http://www.ibnukatsironline.com/2015/09/tafsir-surat-yasin-ayat-33-36.html

Ibnukatsironline.com. (2015, 21 Oktober). Tafsir Surat Adz Dzariyat ,ayat 1-14. Diakses pada 22 November 2023, dari http://www.ibnukatsironline.com/2015/10/tafsir-surat-adz-dzariyat-ayat-1-4.html

Ibnukatsironline.com. (2015, 30 September). Tafsir Surat Yasin ,ayat 8-12. Diakses pada 22 November 2023, dari http://www.ibnukatsironline.com/2015/09/tafsir-surat-yasin-ayat-8-12.html

Kamus Bahasa Arab (al-maany.com), Diakses pada 9 November 2023, dari https://www.almaany.com/id/dict/ar-id/

Koehn, Michael. 2013. *Solution Of The Klein-Gordon Equation In An Infinite Square-Well Potential With A Moving Wall*. Arxiv. Published on 3 January 2013.

Konishi, Kenichi dan Giampierro Paffuti. 2009. *Quantum Mechanics: A New Introduction*. Oxford University Press.

Krane, Kenneth S. 2012. *Modern Physics, Third Edition*. United States of America: John Wiley and Sons, Inc.

Mulyono, Agus dan Ahmad Abtokhi. 2006. *Fisika dan Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Purwanto, Agus. 2005. *Fisika Kuantum*. Yogyakarta: Penerbit Gava Media.

Putra, Ruby Maulana. 2019. *Studi Persamaan Klein Gordon Pada Sumur Potensial Tak Terhingga Dengan Dinding Bergerak*. Jurusan Fisika UIN Malang: Skripsi

Romadani, Arista, E.Rani. 2019. *Pengaruh Medan Elektromagnet terhadap Partikel Dirac dan Klein-Gordon dalam Potensial Penghalang Periodik Satu Dimensi*.Malang: JPSE (Journal of Physical Science and Engineering), Vol. 4, No. 1, 2019.

Romadani, Arista, E.Rani. 2020. *Solusi Persamaan Dirac Untuk Fermion Dengan Model Potensial Penghalang Medan Elektromagnetik*. Malang:Jurnal Fisika Flux. Vol. 17 No. 2, 2020.

Sayyid, Outhb. 2003. *Tafsir Fi Zhihalil Qur'an*. Jakarta: Gema Insani Press

Shan, Qiuyu. 2021.*Study Solution of dirac equation in one fix moving wall well*. Arxiv. Published on 21 june 2021.

Sudiarta, I Wayan. 2019. *Mekanika Kuantum, Edisi Pertama*. Mataram: CV Garuda Ilmu.

Sutopo. 2005. *Pengantar Fisika Kuantum*. Malang: UM Press.

Siregar, Rustam E. 2010. *Fisika Kuantum*. Jatinagor: Fakultas MIPA Universitas Padjadjaran.

Tafsir.learn-qur'an. Tafsir Jalalain Saba' ayat 3. Diakses pada 22 November 2023, dari https://tafsir.learn-quran.co/id/surat-34-al-saba/ayat-3#

Tafsir.learn-qur'an. Tafsir Jalalain Yasin ayat 9. Diakses pada 22 November 2023, dari https://tafsir.learn-quran.co/id/surat-36-ya%20sin/ayat-9

Tafsir.learn-qur'an. Tafsir Ringkas Kemenag Surat Yasin ayat 36. Diakses pada 22 November 2023, dari https://tafsir.learn-quran.co/id/surat-36-ya%20sin/ayat-36

Tafsir.learn-qur'an. Tafsir Ringkas Kemenag Surat Yasin ayat 9. Diakses pada 22 November 2023, dari https://tafsir.learn-quran.co/id/surat-36-ya%20sin/ayat-9

Tasrif Kata Reverso. Diakses pada 11 November 2023. Dari, https://tasrif.reverso.net/.html

Thaller, Bernd. 1992. *The Dirac Equation*. Springer-Verlaag: 2nd Edition.

Tiandho, Yuant. 2016. *Partikel Dirac dalam Sumur Potensial Dinamis*. Jurnal Edumat Sains, Vol 1 (1)

LAMPIRAN A

Solusi ψ_B Pada Daerah I,II, dan III

1. Solusi ψ_B pada daerah I

Pada persamaan untuk daerah I telah dituliskan hasil untuk ψ_A, kemudian untuk ψ_B dapat dilakukan operasi serupa pada ψ_A, sehingga untuk solusi daerah I pada bispinor $\psi_B = \begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$ yang dalam keadaan *spin-up*, maka diperlukan mencari solusi untuk ψ_3 dan ψ_4. Dengan mengoperasikan $E\psi_B$ seperti persamaan (3.16)

$$E\psi_B = -(\,\hbar kc\alpha_3 + \beta mc^2 + V_0)\,\psi_B$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} = (-\,\hbar kc\alpha_3 - \beta mc^2 - V_0)\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} = -\hbar kc\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} mc^2\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} - V_0\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\hbar kc\,\psi_4\\ \hbar kc\,\psi_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}mc^2\,\psi_3\\ -mc^2\,\psi_4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}V_0\,\psi_3\\ V_0\,\psi_4\end{pmatrix}$$

Kemudian akan mendapatkan persamaan yang merupakan hasill dari pemisahan variabel berikut,

$$E\psi_3 = (-\,\hbar kc\,\psi_4 - \,mc^2\psi_3 - V_0\,\psi_3)$$

$$(E + V_0 + mc^2)\,\psi_3 = \hbar kc\,\psi_4$$

$$\psi_3 = -\frac{\hbar kc}{E - V_0 - mc^2}\,\psi_4$$

$$E\psi_4 = (-\,\hbar kc\,\psi_3 + \,mc^2\psi_4 - V_0\,\psi_4)$$

$$(E + V_0 - mc^2)\,\psi_4 = \hbar kc\,\psi_3$$

$$\psi_4 = -\frac{\hbar kc}{E - V_0 + mc^2}\,\psi_3$$

Jika kasus yang diinginkan adalah keadaan *spin-up* maka , didefinisikan $\psi_3 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ substitusikan pada persamaan ψ_4

$$\psi_4 = -\frac{\hbar kc}{E - V_0 + mc^2}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\psi_4 = \begin{pmatrix}-\dfrac{\hbar kc}{E - V_0 + mc^2}\\ 0\end{pmatrix}$$

Sehingga untuk $\psi_B = \begin{pmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$ dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\psi_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{\hbar kc}{E - V_0 + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Solusi ψ_B pada daerah II

Solusi ψ_B untuk daerah II dapat ditentukan dengan langkah awal yakni mengoperasikan persamaan $E\psi_B$

$$E\psi_B = (-\hbar kc\alpha_3 + \beta mc^2)\psi_A$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_3 \\ \psi_4\end{pmatrix} = -\hbar kc\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_3 \\ \psi_4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} mc^2\begin{pmatrix}\psi_3 \\ \psi_4\end{pmatrix}$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_3 \\ \psi_4\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0 & \hbar kc \\ \hbar kc & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_3 \\ \psi_4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_3 \\ \psi_4\end{pmatrix}$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_3 \\ \psi_4\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\hbar kc\,\psi_4 \\ \hbar kc\,\psi_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}mc^2\,\psi_3 \\ -mc^2\,\psi_4\end{pmatrix}$$

Pada persamaan diatas untuk mendapatkan nilai masing masing dari ψ_1 dan ψ_2 maka dapat digunakan pemisahan variabel sebagai berikut,

$$E\psi_3 = -\hbar kc\,\psi_4 + mc^2\,\psi_3$$

$$(E - mc^2)\,\psi_3 + \hbar kc\,\psi_4 = 0$$

$$\psi_3 = -\frac{\hbar kc}{E - mc^2}\,\psi_4$$

$$E\psi_4 = -\hbar kc\,\psi_3 - mc^2\,\psi_4$$

$$(E + mc^2)\,\psi_4 - \hbar kc\,\psi_3 = 0$$

$$\psi_4 = -\frac{\hbar kc}{E + mc^2}\psi_3$$

Sehingga untuk solusi daerah II bispinor $\psi_B = \begin{pmatrix}\psi_3 \\ \psi_4\end{pmatrix}$ dikarenakan hanya mengkaji pada partikel maupun anti partikel dengan keadaan spin up, dengan memberikan $\psi_3 = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$ maka, dihasikan persamaan

$$\psi_4 = -\frac{\hbar kc}{E + mc^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\psi_4 = \begin{pmatrix}-\dfrac{\hbar kc}{E + mc^2}\\0\end{pmatrix}$$

Kemudian setelah mendapatkan nilai $\psi_4$pada persamaan diatas, maka untuk bispinor ψ_B dirumuskan

$$\psi_B = \begin{pmatrix}1\\0\\\left(-\dfrac{\hbar kc}{E + mc^2}\right)\\0\end{pmatrix}$$

3. Solusi ψ_B pada daerah III

Dengan melakukan operasi serupa seperti proses untuk mendapatkan nilai ψ_A, sehingga untuk solusi daerah III pada bispinor $\psi_B = \begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}$ dalam keadaan *spin-up*, maka terlebih dahulu mencari solusi untuk ψ_3 dan ψ_4. Dengan mengoperasikan $E\psi_B$ seperti persamaan (3.60)

$$E\psi_B = (\hbar kc\alpha_3 + \beta mc^2 + V_0)\,\psi_B$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix} = (\hbar kc\alpha_3 + \beta mc^2 + V_0)\begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix} = \hbar kc\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}mc^2\begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix} + V_0\begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}$$

$$E\begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hbar kc\,\psi_4\\\hbar kc\,\psi_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}mc^2\,\psi_3\\-mc^2\,\psi_4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}V_0\,\psi_3\\V_0\,\psi_4\end{pmatrix}$$

Kemudian dari persamaan yang dihasilkan dilakukan pemisahan variabel

$$E\psi_3 = (\hbar kc\,\psi_4 + mc^2\psi_3 + V_0\,\psi_3)$$

$$(E - V_0 - mc^2)\,\psi_3 = \hbar kc\,\psi_4$$

$$(E - V_0\theta - mc^2)\,\psi_3 - \hbar kc\,\psi_4 = 0$$

$$\psi_3 = -\frac{\hbar kc}{E - V_0 - mc^2}\,\psi_4$$

$$E\psi_4 = (\hbar kc\,\psi_3 - mc^2\psi_4 + V_0\,\psi_4)$$

$$(E - V_0 + mc^2)\,\psi_4 = \hbar kc\,\psi_3$$

$$(E - V_0 + mc^2)\,\psi_4 - \hbar kc\,\psi_3 = 0$$

$$\psi_4 = -\frac{\hbar kc}{E - V_0 + mc^2}\,\psi_3$$

Jika kasus yang diinginkan adalah keadaan *spin-up* maka , didefinisikan $\psi_3 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ substitusikan pada persamaan ψ_4

$$\psi_4 = -\frac{\hbar kc}{E - V_0 + mc^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\psi_4 = \begin{pmatrix}-\dfrac{\hbar kc}{E - V_0 + mc^2}\\0\end{pmatrix}$$

Sehingga untuk $\psi_B = \begin{pmatrix}\psi_3\\\psi_4\end{pmatrix}$ dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\psi_B = \begin{pmatrix}1\\0\\-\dfrac{\hbar kc}{E - V_0 + mc^2}\\0\end{pmatrix}$$

LAMPIRAN B

Penurunan terhadap waktu (t) dan posisi(z)

Karena penurunan ini berawal dari transformasi koordinat (z,t) pada koordinat (x,y), sehingga Diberikan definisi untuk x dan y sebagai berikut,

$$x = \sqrt{\frac{ct+z}{ct-z}} \; ; \; y = \sqrt{c^2t^2 - z^2}$$

Kemudian diberikan beberapa kemungkinan operasi perhitungan yang digunakan pada x dan y,

$$x^2 = \frac{ct+z}{ct-z} \; ; \quad y^2 = (ct+z)(ct-z)$$

$$x^2y^2 = (ct+z)^2; \quad \frac{y^2}{x^2} = (ct-z)^2$$

$$xy = (ct+z); \quad \frac{y}{x} = (ct-z)$$

Sehingga untuk turunan terhadap waktu dan posisi sebagai berikut,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{ct+z}{ct-z}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{c(ct-z)-c(ct+z)}{(ct-z)^2}\right)$$

$$= -\left(\frac{ct+z}{ct-z}\right)^{-\frac{1}{2}} . \frac{zc}{(ct-z)^2}$$

$$= -\frac{1}{x}\frac{\left(\frac{1}{2}\, c\, \left(xy - \frac{y}{x}\right)\right)}{\frac{y^2}{x^2}}$$

$$= -\frac{\left(\frac{1}{2} x\, c\, \left(xy - \frac{y}{x}\right)\right)}{y^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{c(x^2-1)}{2y}$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{ct+z}{ct-z}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{((ct-z)+(ct+z))}{(ct-z)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{ct+z}{ct-z}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{ct}{ct-z^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{(x^2+1)}{2y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{c}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

LAMPIRAN C

Solusi Persamaan U_2

Sesuai dengan persamaan yang dihasilkan U_1 pada persamaan (3.84) ,maka untuk U_2 juga dilakukan step yang sama. Dengan melakukan transformasi koordinat (z, t) pada persamaan (3.77) pada koordinat (x, y) yang bertujuan untuk memudahkan pengkajian. Sehingga,

$$-\frac{\hbar^2}{mc^2}\frac{\partial^2 U_2(z,t)}{\partial t^2}+\frac{\hbar^2 c^2}{mc^2}\frac{\partial^2 U_2(z,t)}{\partial z^2}-mc^2 U_2=0$$

$$-\hbar^2\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial t}\right)-\hbar^2\left(\frac{\partial U_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t}\right)+\hbar^2 c^2\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial z}\right)+\hbar^2 c^2\left(\frac{\partial U_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial z}\right)-m^2c^4\,U_1(x,y)=0$$

Dengan mensubstitusikan nilai turunan terhadap waktu $\frac{\partial}{\partial t}$ dan turunan terhadap posisi $\frac{\partial}{\partial z}$ maka menghasilkan persamaan

$$-\hbar^2\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{c(x^2-1)}{2y}\right)\right)-\hbar^2\left(\frac{\partial U_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c(x^2+1)}{2x}\right)\right)+\hbar^2c^2\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2+1}{2y}\right)\right)+\hbar^2c^2\left(\frac{\partial U_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-x^2+1}{2x}\right)\right)-m^2c^4\,U_2(x,y)=0$$

Dengan mensubstitusikan pemyederhanaan dari $\frac{\partial}{\partial t}$ dan $\frac{\partial}{\partial z}$, maka menghasilkan persamaan U_2 sebagai berikut

$$-\hbar^2 c\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)-\hbar^2 c\left(\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)+\hbar^2c^2\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)+\hbar^2c^2\left(\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)-m^2c^4\,U_2(x,y)=0$$

Kemudian dari persamaan U_2 yang merupakan bentuk persamaan diferensial biasa disubstitusikan pada persamaan diferensial besel, dengan persamaan umum $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$

$$-\hbar^2 x\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)-\hbar^2 y\left(\frac{\partial U_2}{\partial y}\right)+\hbar^2x^2\left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}\right)+\hbar^2y^2\left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}\right)-m^2c^4\,U_1(x,y)=0$$

Kemudian dari persamaan diferensial Bessel ini dilakukan pemisahan variabel dengan $U_2(x,y)=f(x)g(y)$

$$\hbar^2 x^2 \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}\right) - \hbar^2 x \left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right) = -\hbar^2 y^2 \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}\right) + \hbar^2 y \left(\frac{\partial U_2}{\partial y}\right) + m^2 c^4\, U_2(x,y) = a$$

$$\frac{\hbar^2 x^2}{f(x)} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x}\right) - \hbar^2 x \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right) = -\frac{(\hbar^2 y^2)}{g(y)} \left(\frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2}\right) + \frac{\hbar^2 y}{g(y)} \left(\frac{\partial g(y)}{\partial y}\right)$$

$$+m^2 c^4\, U_1(x,y) = a$$

LAMPIRAN D

1. Berikut merupakan kode plot probabilitas pada kasus sumur potensial dengan dinding bergeraksebagian yang bergantung waktu

2. Berikut kode plot grafik nilai E berdasarkan hasil iterasi nilai E

```
% Define the number of iterations
numIterations = 100;
L0 = 1;
% Initialize arrays to store values
E_values = zeros(numIterations, 1);
Z_values = linspace(0, L0, numIterations); % Generate a range of z values based on numIterations
% Perform the iterations
for i = 1:numIterations
    eq1 = i;
    eq2 = i * 2;
    eq3 = i * 3;
    eq4 = 1799999880000002;
    eq5 = 1799999880000002;
    eq6 = 1799999880000002;
    % Calculate E based on eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6, and z
    z = Z_values(i); % Get the current z value
    E = eq1 + eq2 + eq3 + eq4 + eq5 + eq6 + z; % Include z in the calculation
    % Store values in the E_values array
    E_values(i) = E;
end
% Plot the values of E against z
figure;
plot(Z_values, E_values, 'b', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'E');
% Add labels and legend
xlabel('z');
ylabel('E');
title('E vs. z');
legend('Location', 'Best');
grid on;
```

LAMPIRAN E

Pada lampiran ini menuliskan secara detail tentang nilai masing-masing konstanta yang terdapat dalam persamaan fungsi gelombang persamaan dirac pada persamaan (3.104), (3.105), (3.107) (3.108) dengan menggunakan definisi $u^*u = 1 = v^*v$ (Ashok das), digunakan $\hbar = c = 1$; $E = mc^2$; $k_1 = \sqrt{\frac{E^2-m^2c^4}{\hbar c}}$;dan $k_2 = \sqrt{\frac{(E-V_0)^2-m^2c^4}{\hbar c}}$ sehingga konstanta s, b, h, j ,q, r sebagai berikut:

1. Konstanta $|s|$ dan $|b|$

$$Se^{ik_z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar c k_2}{E-V_0+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} = S^\dagger\, e^{-ik_z}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\hbar c k_2}{E-V_0+mc^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$u^*u = 1$$

$$s^*s = S^\dagger\, e^{-ik_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\hbar c k_2}{E-V_0+mc^2} & 0 \end{pmatrix} Se^{ik_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar c k_2}{E-V_0+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= |s|^2\,(e^0)\left[1 + \frac{(\hbar c k_2)^2}{(E-V_0+mc^2)^2}\right]$$

$$= |s|^2\left[\frac{(E-V_0+mc^2)^2 + (\hbar c k_2)^2}{(E-V_0+mc^2)^2}\right]$$

$$= \frac{|s|^2}{(E-V_0+mc^2)^2}\,[(E-V_0+mc^2)^2 + (\hbar c k_2)^2]$$

$$= \frac{|s|^2}{(E-V_0+mc^2)^2}\left[(E-V_0+mc^2)^2 + \hbar^2 c^2\left(\frac{((E-V_0)^2 - m^2c^4)}{\hbar c}\right)\right]$$

$$= \frac{|s|^2}{(E-V_0+mc^2)^2}\,[2E^2 - 3EV_0]$$

$$= \frac{|s|^2[2E^2 - 3EV_0]}{(E-V_0+mc^2)^2}$$

$$s^*s = \frac{|s|^2[2E^2 - 3EV_0]}{(E-V_0+mc^2)^2} = 1$$

$$= |s|^2[2E^2 - 3EV_0] = (E-V_0+mc^2)^2$$

$$= |s|^2[2E^2 - 3EV_0] = (E^2 - 2EV_0 + 2Emc^2 - V_0^2 + 2V_0mc^2 + m^2c^4)$$

$$= \ |s|^2[2E^2 - 3EV_0] = (E^2 - 2EV_0 + 2E^2 - V_0^2 + 2EV_0 + E^2)$$

$$= \ |s|^2[2E^2 - 3EV_0] = (4E^2 - V_0^2)$$

$$= \ |s|^2 = \frac{[4E^2 - V_0^2]}{(2E^2 - 3EV_0)}$$

Sehingga dengan nilai $|s|^2 = \frac{[4E^2 - V_0^2]}{(2E^2 - 3EV_0)}$ maka menghasilkan nilai s dalam konstanta normalisasi $|s| = \sqrt{\frac{[4E^2 - V_0^2]}{(2E^2 - 3EV_0)}}$. Dengan cara yang sama dihasilkan $|b|$ sebagai berikut:

$$b\ e^{-ik_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\hbar c k_2}{E - V_0 + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} = b^\dagger\ e^{ik_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\hbar c k_2}{E - V_0 + mc^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$v^* v = 1$$

$$b^* b = \ b^\dagger\ e^{ik_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\hbar c k_2}{E - V_0 + mc^2} & 0 \end{pmatrix} b\ e^{-ik_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\hbar c k_2}{E - V_0 + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ |b|^2\ (e^0) \left[1 + \frac{(\hbar c k_2)^2}{(E - V_0 + mc^2)^2}\right]$$

$$= \ |b|^2\ \left[\frac{(E - V_0 + mc^2)^2 + (\hbar c k_2)^2}{(E - V_0 + mc^2)^2}\right]$$

$$= \ \frac{|b|^2}{(E - V_0 + mc^2)^2}\ [(E - V_0 + mc^2)^2 + (\hbar c k_2)^2]$$

$$= \ \frac{|b|^2}{(E - V_0 + mc^2)^2}\ \left[(E - V_0 + mc^2)^2 + \hbar^2 c^2 \left(\frac{((E - V_0)^2 - m^2 c^4)}{\hbar c}\right)\right]$$

$$= \ \frac{|b|^2}{(E - V_0 + mc^2)^2}\ [2E^2 - 3EV_0]$$

$$= \ \frac{|b|^2[2E^2 - 3EV_0]}{(E - V_0 + mc^2)^2}$$

$$b^* b = \ \frac{|b|^2[2E^2 - 3EV_0]}{(E - V_0 + mc^2)^2} = 1$$

$$= \ |b|^2[2E^2 - 3EV_0] = \ (E - V_0 + mc^2)^2$$

$$= \ |b|^2[2E^2 - 3EV_0] = (E^2 - 2EV_0 + 2Emc^2 - V_0^2 + 2V_0 mc^2 + m^2 c^4)$$

$$= \ |b|^2[2E^2 - 3EV_0] = (E^2 - 2EV_0 + 2E^2 - V_0^2 + 2EV_0 + E^2)$$

$$= \ |b|^2[2E^2 - 3EV_0] = (4E^2 - V_0^2)$$

$$= \ |b|^2 = \frac{[4E^2 - V_0^2]}{(2E^2 - 3EV_0)}$$

Sehingga dengan $|b|^2 = \frac{[4E^2 - V_0^2]}{(2E^2 - 3EV_0)}$ didapatkan nilai $|b| = \sqrt{\frac{[4E^2 - V_0^2]}{(2E^2 - 3EV_0)}}$

2. Kemudian untuk nilai $|h|$ dan $|j|$ sebagai berikut:

a. Pada posisi $z = 0$

$$he^{ik_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar c k_1}{E + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} = h^{\dagger}\, e^{-ik_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\hbar c k_1}{E + mc^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$u^* u = 1$$

$$h^* h = \ h^{\dagger}\, e^{-ik_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\hbar c k_1}{E + mc^2} & 0 \end{pmatrix} he^{ik_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar c k_1}{E + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ |h|^2\ (e^0)\ \left[1 + \frac{(\hbar c k_1)^2}{(E + mc^2)^2}\right]$$

$$= \ |h|^2\ \left[\frac{(E + mc^2)^2 + (\hbar c k_1)^2}{(E + mc^2)^2}\right]$$

$$= \ \frac{|h|^2}{(E + mc^2)^2}\ \ [2E^2 + 2m^2c^4] = 1$$

$$= \ |h|^2\ \ [2E^2 + 2m^2c^4] = (E + mc^2)^2$$

$$= \ |h|^2\ \ [2E^2 + 2m^2c^4] = (E^2 + 2Emc^2 + m^2c^4)$$

$$= \ |h|^2\ \ [2E^2 + 2m^2c^4] = (E^2 + 2E^2 + E^2)$$

$$= \ |h|^2\ (4E^2) = 4E^2$$

$$= \ |h|^2\ = \frac{4E^2}{4E^2} = 1$$

Jadi nilai h adalah $|h| = \sqrt{1} = 1$ dan nilai j dengan cara serupa didapat $|j| = 1$ dengan penjabaran sebagai berikut

$$je^{-ik_1}\begin{pmatrix}1\\0\\-\dfrac{\hbar ck_1}{E+mc^2}\\0\end{pmatrix}=j^\dagger\,e^{ik_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\dfrac{\hbar ck_1}{E+mc^2} & 0\end{pmatrix}$$

$v^*v=1$

$$j^*j=\ j^\dagger\,e^{ik_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\dfrac{\hbar ck_1}{E+mc^2} & 0\end{pmatrix}je^{-ik_1}\begin{pmatrix}1\\0\\-\dfrac{\hbar ck_1}{E+mc^2}\\0\end{pmatrix}$$

$$=\ |j|^2\,(e^0)\left[1+\frac{(\hbar ck_1)^2}{(E+mc^2)^2}\right]$$

$$=\ |j|^2\ \left[\frac{(E+mc^2)^2+(\hbar ck_1)^2}{(E+mc^2)^2}\right]$$

$$=\ \frac{|j|^2}{(E+mc^2)^2}\ [2E^2+2m^2c^4]=1$$

$$=\ |j|^2\ [2E^2+2m^2c^4]=(E+mc^2)^2$$

$$=\ |j|^2\ [2E^2+2m^2c^4]=(E^2+2Emc^2+m^2c^4)$$

$$=\ |j|^2\ [2E^2+2m^2c^4]=(E^2+2E^2+E^2)$$

$$=\ |j|^2\,(4E^2)=4E^2$$

$$=\ |j|^2\ =\frac{4E^2}{4E^2}=1$$

b. Pada posisi $z=L_0$

$$he^{(ik_1 L_0)}(1+ik_1\,V\Delta t)\begin{pmatrix}1\\0\\\dfrac{\hbar ck_1}{E+mc^2}\\0\end{pmatrix}=h^\dagger e^{(-ik_1 L_0)}(1+ik_1\,V\Delta t)\ \begin{pmatrix}1 & 0 & \dfrac{\hbar ck_1}{E+mc^2} & 0\end{pmatrix}$$

$u^*u=1$

$$h^*h=\ h^\dagger\,e^{-(ik_1 L_0)}(1+ik_1\,V\Delta t)\begin{pmatrix}1 & 0 & \dfrac{\hbar ck_1}{E+mc^2} & 0\end{pmatrix}he^{(ik_1 L_0)}(1+ik_1\,V\Delta t)\begin{pmatrix}1\\0\\\dfrac{\hbar ck_1}{E+mc^2}\\0\end{pmatrix}$$

$$= \ |h|^2 \ (e^0)\left(1 + i \ \frac{E^2 - m^2c^4}{\hbar c} \ V\Delta t\right)^2 \ \left[1 + \frac{(\hbar c k_1)^2}{(E + mc^2)^2}\right]$$

$$= \ |h|^2 \left(1 + i\frac{E^2 - m^2c^4}{\hbar c} \ V\Delta t\right)^2 \ \left[\frac{(E + mc^2)^2 + (\hbar c k_1)^2}{(E + mc^2)^2}\right]$$

$$= \ \frac{|h|^2(1 + i(E^2 - m^2c^4)V\Delta_t)^2}{(E + mc^2)^2} \ [2E^2 + 2m^2c^4] = 1$$

$$= \ |h|^2 \ \big(1 + i\big((E + mc^2)(E - mc^2)\big)V\Delta t \ \big)^2 \ [2E^2 + 2m^2c^4] = (E + mc^2)^2$$

$$= \ |h|^2 \ \big(1 + 2i(E + mc^2)(E - mc^2)V\Delta t + (i^2(E + mc^2)^2(E - mc^2)^2V\Delta t^2 \ )\big) \ (4E^2)$$
$$= (E^2 + 2Emc^2 + m^2c^4)$$

$$= \ |h|^2 \ (1 + 2i(E + mc^2)(E - mc^2)V\Delta t - (E + mc^2)^2(E - mc^2)^2V\Delta t^2) \ (4E^2)$$
$$= (E^2 + 2Emc^2 + m^2c^4)$$

$$= \ |h|^2 \ (1 + 2i(E + mc^2)(E - mc^2)V\Delta t - (4E^2)(-E^2) \ V\Delta t^2) \ (4E^2) = (4E^2)$$

$$= \ |h|^2 \ (1 + 2i(E + mc^2)(E - mc^2)V\Delta t + 4E^4 \ V\Delta t^2) \ (4E^2) = (4E^2)$$

$$= \ |h|^2 \ (4E^2 - (8E(E + mc^2)(E - mc^2)V\Delta t)^2 + 8E^6 \ V\Delta t^2) = (4E^2)$$

$$= \ |h|^2 \ (E^2 - (2E(E + mc^2)(E - mc^2)V\Delta t)^2 + 2E^6 \ V\Delta t^2) = (E^2)$$

$$= \ |h|^2 = \left(\frac{E^2}{(E^2 - (2E(E + mc^2)(E - mc^2)V\Delta t)^2 + 2E^6 \ V\Delta t^2)}\right)$$

Sehingga dengan nilai $|h|^2 = \left(\frac{E^2}{(E^2-(2E(E+mc^2)(E-mc^2)V\Delta t)^2+2E^6 \ V\Delta t^2)}\right)$ didapatkan

nilai $|h|$ sebagai berikut $|h| = \sqrt{\left(\frac{E^2}{(E^2-(2E(E+mc^2)(E-mc^2)V\Delta t)^2+2E^6 \ V\Delta t^2)}\right)}$, berikutnya

untuk $|j|$

$$je^{-ik_1(L_0+V\Delta t)}(1 - ik_1 \ V\Delta t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(-\frac{\hbar c k_1}{E + mc^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = j^\dagger e^{(ik_1 \ L_0)}(1 - ik_1 \ V\Delta t) \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\hbar c k_1}{E + mc^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$v^*v = 1$$

$$j^*j = \ j^\dagger \ e^{(ik_1 \ L_0)}(1 - ik_1 \ V\Delta t) \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\hbar c k_1}{E + mc^2} & 0 \end{pmatrix} je^{-(ik_1 \ L_0)}(1 - ik_1 \ V\Delta t) \ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\hbar c k_1}{E + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ |j|^2 \ (e^0)\left(1 - i \ \frac{E^2 - m^2c^4}{\hbar c} \ V\Delta t\right)^2 \ \left[1 + \frac{(\hbar c k_1)^2}{(E + mc^2)^2}\right]$$

$$= \ |j|^2 \left(1 - i\frac{E^2 - m^2c^4}{\hbar c} \ V\Delta t\right)^2 \ \left[\frac{(E + mc^2)^2 + (\hbar ck_1)^2}{(E + mc^2)^2}\right]$$

$$= \ \frac{|j|^2(1 - i(E^2 - m^2c^4)V\Delta_t)^2}{(E + mc^2)^2} \ [2E^2 + 2m^2c^4] = 1$$

$$= \ |j|^2 \left(1 - i\big((E + mc^2)(E - mc^2)\big)V\Delta t\ \right)^2 [2E^2 + 2m^2c^4] = (E + mc^2)^2$$

$$= \ |j|^2 \ \left(1 - 2i(E + mc^2)(E - mc^2)V\Delta t + (i^2(E + mc^2)^2(E - mc^2)^2V\Delta t^2\ )\right)(4E^2) = (E^2 + 2Emc^2 + m^2c^4)$$

$$= \ |j|^2 \ \ (1 - 2i(E + mc^2)(E - mc^2)V\Delta t - (E + mc^2)^2(E - mc^2)^2V\Delta t^2)\ (4E^2) = (E^2 + 2Emc^2 + m^2c^4)$$

$$= \ |j|^2 \ \ (1 - 2i(E + mc^2)(E - mc^2)V\Delta t - (4E^2)(-E^2)\ V\Delta t^2)\ (4E^2) = (4E^2)$$

$$= \ |j|^2 \ \ (1 - 2i(E + mc^2)(E - mc^2)V\Delta t + 4E^4\ V\Delta t^2)\ (4E^2) = (4E^2)$$

$$= \ |j|^2 \ \ (4E^2 + (8E(E + mc^2)(E - mc^2)V\Delta t)^2 + 8E^6\ V\Delta t^2) = (4E^2)$$

$$= \ |j|^2 \ \ (E^2 + (2E(E + mc^2)(E - mc^2)V\Delta t)^2 + 2E^6\ V\Delta t^2) = (E^2)$$

$$= \ |j|^2 = \left(\frac{E^2}{(E^2 + (2E(E + mc^2)(E - mc^2)V\Delta t)^2 + 2E^6\ V\Delta t^2)}\right)$$

Sehingga dengan nilai $|j|^2 = \left(\frac{E^2}{(E^2+(2E(E+mc^2)(E-mc^2)V\Delta t)^2+2E^6\ V\Delta t^2)}\right)$ didapatkan nilai untuk $|j| = \sqrt{\left(\frac{E^2}{(E^2+(2E(E+mc^2)(E-mc^2)V\Delta t)^2+2E^6\ V\Delta t^2)}\right)}$

c. Nilai konstanta $|q|$ dan $|r|$:

$$qe^{(ik_2\,L_0)}(1 + ik_2\ V\Delta t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar ck_2}{E - V_0 + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} = q^\dagger e^{(-ik_2\,L_0)}(1 + ik_2\ V\Delta t)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\hbar ck_2}{E - V_0 + mc^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$u^*u = 1$$

$$q^*q = \ q^\dagger\ e^{(-ik_2\,L_0)}(1 + ik_2\ V\Delta t)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\hbar ck_2}{E - V_0 + mc^2} & 0 \end{pmatrix} qe^{(ik_2\,L_0)}(1 + ik_2\ V\Delta t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar ck_2}{E - V_0 + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ |q|^2\ (e^0)\left(1 + i\ \frac{(E - V_0)^2 - m^2c^4}{\hbar c}\ V\Delta t\right)^2 \left[1 + \frac{(\hbar ck_2)^2}{(E + mc^2)^2}\right]$$

$$= \ |q|^2\left(1 + i\frac{(E - V_0)^2 - m^2c^4}{\hbar c}\ V\Delta t\right)^2 \ \left[\frac{(E - V_0 + mc^2)^2 + (\hbar ck_2)^2}{(E - V_0 + mc^2)^2}\right]$$

$$= \frac{|q|^2(1+i(-2EV_0+V_0)V\Delta_t)^2}{(E-V_0+mc^2)^2}\ [2E^2-3V_0]=1$$

$$= |q|^2\ (1-i(2EV_0+V_0)V\Delta_t\ )^2\ [2E^2-3V_0]=(E-V_0+mc^2)^2$$

$$= |q|^2\ (1-i(2EV_0+V_0)V\Delta_t-4E^2V_0^2V\Delta t^2-4EV_0^2V\Delta t^2-V_0V\Delta t^2\ )\ [2E^2-3V_0] = (4E^2-4EV_0-V_0^2)$$

$$= |q|^2\ (2E^2-3V_0-2iEV_0^2V\Delta\, t-iEV\Delta t-8E^2V_0^2V\Delta t^2-8EV_0^2V\Delta t^2+3iV_0V\Delta t^2) = (4E^2-4EV_0-V_0^2)$$

$$= |q|^2\ (2E^2-3V_0-(2iEV_0^2V\Delta\, t+iEV\Delta t)-(8E^2V_0^2V\Delta t^2+8EV_0^2V\Delta t^2) + 3iV_0V\Delta t^2)=(4E^2-4EV_0-V_0^2)$$

$$= |q|^2\ (2E^2-3V_0+2EV_0^2V\Delta t+EV\Delta t-8EV_0^2V\Delta t^2(a+1)+3V_0V\Delta t^2) = (4E^2-4EV_0-V_0^2)$$

$$= |q|^2 = \left(\frac{4E^2-4EV_0-V_0^2}{(2E^2-3V_0+2EV_0^2V\Delta t+EV\Delta t-8EV_0^2V\Delta t^2(a+1)+3V_0V\Delta t^2)}\right)$$

Sehingga $|q| = \sqrt{\frac{4E^2-4EV_0-V_0^2}{(2E^2-3V_0+2EV_0^2V\Delta t+EV\Delta t-8EV_0^2V\Delta t^2(a+1)+3V_0V\Delta t^2)}}$

$$re^{-ik_z(L_0+V\Delta t)}(1-ik_z\,V\Delta t)\begin{pmatrix}1\\0\\\left(-\frac{\hbar kc}{E-V_0+mc^2}\right)\\0\end{pmatrix} = r^\dagger e^{ik_z(L_0+V\Delta t)}(1-ik_z\,V\Delta t)\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{\hbar ck}{E-V_0+mc^2} & 0\end{pmatrix}$$

$v^*v=1$

$$r^*r = r^\dagger\, e^{(ik_2\,L_0)}(1-ik_2\,V\Delta t)\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{\hbar ck_2}{E-V_0+mc^2} & 0\end{pmatrix} re^{(-ik_2\,L_0)}(1-ik_2\,V\Delta t)\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{\hbar ck_2}{E-V_0+mc^2}\\0\end{pmatrix}$$

$$= |r|^2\ (e^0)\left(1-i\ \frac{(E-V_0)^2-m^2c^4}{\hbar c}\ V\Delta t\right)^2\left[1+\frac{(\hbar ck_2)^2}{(E+mc^2)^2}\right]$$

$$= |r|^2\left(1-i\frac{(E-V_0)^2-m^2c^4}{\hbar c}\ V\Delta t\right)^2\ \left[\frac{(E-V_0+mc^2)^2+(\hbar ck_2)^2}{(E-V_0+mc^2)^2}\right]$$

$$= \frac{|r|^2(1-(-i(2EV_0+V_0)V\Delta_t)^2}{(E-V_0+mc^2)^2}\ [2E^2-3V_0]=1$$

$$= |r|^2\ (1+i(2EV_0+V_0)V\Delta_t\ )^2\ [2E^2-3V_0]=(E-V_0+mc^2)^2$$

$$= |r|^2\ (1+i(2EV_0+V_0)V\Delta_t+4E^2V_0^2V\Delta t^2+4EV_0^2V\Delta t^2+V_0V\Delta t^2\ )\ [2E^2-3V_0] = (4E^2-4EV_0-V_0^2)$$

$$= |r|^2\ (2E^2-3V_0+2iEV_0^2V\Delta\, t+iEV\Delta t+8E^2V_0^2V\Delta t^2+8EV_0^2V\Delta t^2-3iV_0V\Delta t^2) = (4E^2-4EV_0-V_0^2)$$

$$= \ |r|^2 \ (2E^2 - 3V_0 + (2iEV_0^2V\Delta\, t + iEV\Delta t) + (8E^2V_0^2V\Delta t^2 + 8EV_0^2V\Delta t^2) - 3iV_0V\Delta t^2)$$
$$= (4E^2 - 4EV_0 - V_0^2)$$

$$= \ |r|^2 \ (2E^2 - 3V_0 + 2EV_0^2V\Delta t + EV\Delta t + 8EV_0^2V\Delta t^2(a+1) + 3V_0V\Delta t^2)$$
$$= (4E^2 - 4EV_0 - V_0^2)$$

$$= \ |r|^2 = \left(\frac{4E^2 - 4EV_0 - V_0^2}{(2E^2 - 3V_0 + 2EV_0^2V\Delta t + EV\Delta t + 8EV_0^2V\Delta t^2(a+1) + 3V_0V\Delta t^2)}\right)$$

Sehingga $|r| = \sqrt{\frac{4E^2 - 4EV_0 - V_0^2}{(2E^2 - 3V_0 + 2EV_0^2V\Delta t + EV\Delta t + 8EV_0^2V\Delta t^2(a+1) + 3V_0V\Delta t^2)}}$