

**PENYELESAIAN NUMERIK MODEL *PREDATOR-PREY* TIGA SPESIES
MENGUNAKAN METODE RUNGE KUTTA ORDE 4**

SKRIPSI

**OLEH
NURUDDIN SYAUQI
NIM. 12610098**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**PENYELESAIAN NUMERIK MODEL *PREDATOR-PREY* TIGA SPESIES
MENGUNAKAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE 4**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Nuruddin Syauqi
NIM. 12610098**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**PENYELESAIAN NUMERIK MODEL *PREDATOR-PREY* TIGA SPESIES
MENGUNAKAN METODE RUNGE KUTTA ORDE 4**

SKRIPSI

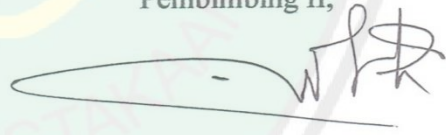
**Oleh
Nuruddin Syauqi
NIM. 12610098**

**Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 31 Oktober 2016**

Pembimbing I,

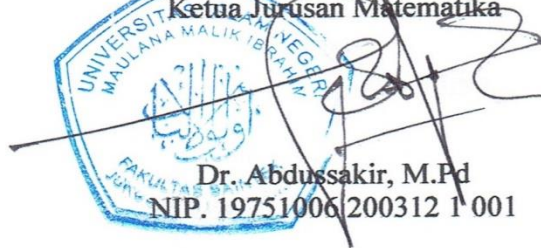

**Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001**

Pembimbing II,


**H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika


**Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001**

**PENYELESAIAN NUMERIK MODEL *PREDATOR-PREY* TIGA SPESIES
MENGUNAKAN METODE RUNGE KUTTA ORDE 4**

SKRIPSI

Oleh
Nuruddin Syauqi
NIM. 12610098

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 30 November 2016

Penguji Utama : Mohammad Jamhuri, M.Si

Ketua Penguji : Hairur Rahman, M.Si

Sekretaris Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Anggota Penguji : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika


Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nuruddin Syauqi

NIM : 12610098

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penyelesaian Numerik Model *Predator-Prey* Tiga Spesies

Menggunakan Metode Runge Kutta Orde 4

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 November 2016
Yang membuat pernyataan,



Nuruddin Syauqi
NIM. 12610098

MOTO

خَيْرُ النَّاسِ أَنْفَعُهُمْ لِلنَّاسِ

“... Sebaik-baik manusia ialah mereka yang paling bermanfaat bagi sesama manusia” (H.R. Thabrani).



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ibunda Tri Umi Kholifah dan ayahanda Imam Ma'arif tercinta

yang tak henti-hentinya dengan ikhlas dan sabar mendoakan, memberi dukungan,

motivasi, mendengarkan keluh kesah penulis, dan meridloi penulis dalam

menuntut ilmu. Untuk kakak dan adik-adik tersayang Umi Zahro, M. Yusron

Agus Salim, dan Etik Jauharotul Jinani.

Semoga Allah Swt. memberikan kebahagiaan dunia dan akhirat.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas limpahan rahmat, taufik, hidayah, dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan dengan baik penyusunan skripsi yang berjudul “Penyelesaian Numerik Model *Predator-Prey* Tiga Spesies Menggunakan Metode Runge Kutta Orde 4”. Shalawat serta salam senantiasa terlimpahkan kepada nabi Muhammad Saw. yang telah membimbing manusia dari zaman yang gelap ke zaman yang terang benderang yaitu agama Islam.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dalam proses penyusunannya tidak mungkin dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, serta arahan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang senantiasa memberikan doa, arahan, nasihat, motivasi dalam melakukan penelitian, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.

5. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Orang tua yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis hingga saat ini.
8. Seluruh teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2012, yang tiada hentinya membantu, mendukung, dan mendoakan dalam mewujudkan cita-cita, terima kasih atas kenangan-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai cita-cita.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, November 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGANTAR	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص	xvi
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Batasan Masalah	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	6
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Sistem Persamaan Diferensial	7
2.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linier dan Non Linier	9
2.3 Metode Runge Kutta	10
2.4 Galat	18
2.5 Analisis Model Lotka-Volterra	19
2.6 Kajian Al-Quran tentang Perintah untuk Menjaga Keseimbangan Alam	22

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Model Persamaan Dua <i>Predator</i> Satu <i>Prey</i>	26
3.2 Penyelesaian Numerik Model Dua <i>Predator</i> Satu <i>Prey</i> menggunakan Metode Runge Kutta Orde 4	27
3.3 Analisis Galat Metode Runge Kutta Orde 4	54
3.4 Interpretasi Grafik Solusi Model	56

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	63
4.2 Saran	63

DAFTAR RUJUKAN	64
-----------------------------	----

LAMPIRAN-LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP



DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Nilai Parameter dan Nilai Awal Sistem Persamaan (3.1)	27
Tabel 3.2	Solusi $x(t)$, $y(t)$, dan $z(t)$ Menggunakan Metode Runge Kutta Orde 4	54
Tabel 3.3	Galat Relatif $x(t)$	55
Tabel 3.4	Galat Relatif $y(t)$	55
Tabel 3.5	Galat Relatif $z(t)$	55

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Grafik $x(t)$, $y(t)$, dan $z(t)$ pada Saat $t = 0,5$ Menggunakan Metode Runge Kutta Orde 4.....	54
Gambar 3.2	Grafik $x(t)$, $y(t)$, dan $z(t)$ pada Saat $t = 0,5$	56
Gambar 3.3	Grafik $x(t)$, $y(t)$, dan $z(t)$ pada Saat $t = 1$	57
Gambar 3.4	Grafik $x(t)$, $y(t)$, dan $z(t)$ pada Saat $t = 140$	58

ABSTRAK

Syauqi, Nuruddin. 2016. **Penyelesaian Numerik Model *Predator-Prey* Tiga Spesies Menggunakan Metode Runge Kutta Orde 4**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd.

Kata Kunci: Runge Kutta orde 4, model *predator-prey* tiga spesies

Model *predator-prey* tiga spesies yang telah dirumuskan oleh Alebraheem dan Hasan (2012) berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinier, sehingga membutuhkan metode khusus dalam menentukan solusinya. Penyelesaian sistem persamaan diferensial nonlinier pada umumnya sulit dilakukan baik secara analitik maupun numerik. Dalam penelitian ini, metode Runge Kutta orde 4 digunakan sebagai salah satu metode numerik untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial nonlinier tersebut. Metode Runge Kutta orde 4 adalah metode numerik satu langkah dengan ketelitian yang tinggi dikarenakan memiliki 4 konstanta perhitungan yang berperan untuk memperbarui metode sebelumnya.

Inti dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana penyelesaian numerik model *predator-prey* tiga spesies dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4. Dalam penelitian ini hanya dihitung penyelesaian numeriknya pada saat $t = 0$ sampai $t = 0,5$ dengan $h = 0,1$.

Berdasarkan hasil penelitian ini dapat dilihat bahwa dengan nilai awal ($x(0) = 0,5$, $y(0) = 0,2$ dan $z(0) = 0,2$), grafik pertumbuhan $x(t)$ bergerak turun terus-menerus yang dimulai pada saat $t = 0$ sampai $t = 0,5$ sebesar

0,490761270070566. Grafik pertumbuhan *predator* $y(t)$ juga bergerak turun terus-menerus yang dimulai pada saat $t = 0$ hingga $t = 0,5$ sebesar

0,178943360272503. Pergerakan grafik pertumbuhan $z(t)$ terus-menerus mengalami penurunan hingga $t = 0,5$ sebesar 0,172522186209918.

ABSTRACT

Syauqi, Nuruddin. 2016. **Solution of the Numerical Model of the Predator-Prey Three Species Using the Runge Kutta Method 4th Order**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) H. Wahyu H. Irawam, M. Pd.

Keywords: 4th order Runge Kutta method, predator-prey model of three species

Predator-prey model three of species that have been formulated by Alebraheem and Hasan (2012) is in the form nonlinear differential equations system, so it requires special methods in determining the solution. Solving nonlinear differential equations system is generally hard to do analytically or numerically. In this study, 4th order Runge Kutta method is used as a numerical method to solve nonlinear differential equation system. The 4th order Runge Kutta method is a numerical method of one step with high precision because it has four constant calculations which act to refine the previous iterations.

The core of this research is to find out how the solution of the numerical model of three species predato-prey by using the 4th order Runge Kutta method. In this study the solutions are calculated at time $t = 0$ to $t = 0,5$ and $h = 0,5$.

Based on these results it can be seen that the initial value ($x(0) = 0,5$, $y(0) = 0,2$, and $z(0) = 0,2$), the growth chart $x(t)$ decreased continuously begins at time $t = 0$ to $t = 0,5$ by 0,490761270070566. Growth charts predator $y(t)$ also decreased continuously starting at $t = 0$ and $t = 0,5$ by 0,178943360272503. The movement of the growth charts $z(t)$ experienced a continuous decreased until $t = 0,5$ by 0,172522186209918.

ملخص

شوقي، نور الدين. ٢٠١٦. الحلول العددية نموذج المفترس والفريسة الأنواع الثلاثة باستخدام طريقة رونج كوتا على الرتبة الرابعة. بحث جامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم و التكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. مشرف: (١) الدكتور عثمان فكالاي الماجستير (٢) وحيو ه. إيراوان الماجستير

الكلمات الرئيسية: طريقة رونج كوتا على الرتبة الرابعة ، نموذج المفترس فريسة من الأنواع الثلاثة

نموذج المفترس فريسة الأنواع الثلاثة التي صيغت بها إبراهيم وحسن (٢٠١٢) هي على شكل نظام المعادلات التفاضلية غير الخطية، حيث أنها تتطلب طريقة خاصة في تحديد الحل. حل نظام المعادلات التفاضلية غير الخطية من الصعب عموماً للقيام تحليلية كانت أو عددية. في هذه الدراسة، طريقة رونج كوتا على الرتبة الرابعة يستخدم كطريقة عددية لحل نظام المعادلات التفاضلية غير الخطية. طريقة رونج كوتا الرتبة الرابعة هي طريقة عددية من خطوة واحدة بدقة عالية لأنه يحتوي على أربعة حسابات المستمرة التي تعمل على تحديث التكرار السابقة.

وبناء على هذه النتائج التي يمكن أن ينظر إلى أن القيمة الأولى $(x(0) = 0,5, y(0) = 0,2, \text{ و } z(0) = 0,2)$ الرسم البياني للنمو $x(t)$ تتحرك باستمرار أسفل أن يبدأ في لحظة $t = 0$ إلى $t = 0,5$ من $0,490761270070566$. انتقل $y(t)$ مخطط نمو الحيوانات المفترسة أيضاً بانخفاض بدءاً باستمرار في $t = 0$ و $t = 0,5$ من $0,178943360272503$. انخفض $z(t)$ حركة الرسم البياني تشهد نمواً مستمراً إلى $t = 0,5$ من $0,172522186209918$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ekologi merupakan cabang ilmu yang mempelajari hubungan timbal balik antara organisme dengan lingkungannya serta menganut prinsip keseimbangan dan keharmonisan semua komponen alam. Keseimbangan dalam kehidupan misalnya adanya laki-laki dan perempuan, siang dan malam, mangsa dan pemangsa yang dikenal dengan istilah *predator-prey*. Dalam al-Quran surat al-Mulk/67:3-4 Allah Swt. berfirman:

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَوَاتٍ طِبَاقًا ۚ مَا تَرَىٰ فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِن تَفَوُّتٍ ۚ فَارْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَىٰ مِن فُطُورٍ ۚ ثُمَّ ارْجِعِ الْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنقَلِبْ إِلَيْكَ الْبَصَرُ خَاسِئًا وَهُوَ حَسِيرٌ ﴿٤﴾

“Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?. Kemudian pandanglah sekali lagi niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan tidak menemukan sesuatu cacat dan penglihatanmu itupun dalam keadaan payah” (QS. Al-Mulk/67:3-4).

Pada ayat tersebut ditekankan “Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?”. Ayat ini memberikan penekanan bahwa Allah Swt. menciptakan alam raya dan segala isinya secara seimbang. Allah Swt. menciptakan makhluk hidup sebagai pemangsa (*predator*) dan mangsa (*prey*) juga secara seimbang. Maka kita harus menjaga keseimbangan dari populasi *predator* dan populasi *prey*, demi menjaga kelangsungan hidup dari keduanya sehingga akan tercipta lingkungan yang stabil. Tetapi, pada akhirnya alam menjadi tidak seimbang dikarenakan ulah manusia. Kerusakan alam terjadi dimana-mana baik di darat maupun di laut yang mengancam kelangsungan

kehidupan makhluk hidup yang ada di bumi ini seperti banjir yang disebabkan karena banyaknya manusia yang membuang sampah sembarangan atau pencemaran air yang disebabkan karena pembuangan limbah pabrik bukan pada tempatnya, serta tanah longsor yang disebabkan penggundulan hutan secara liar sehingga banyak merusak makhluk dan ekosistem yang ada di alam. Kerusakan tersebut terjadi disebabkan oleh perbuatan manusia itu sendiri. Allah Swt. telah berfirman dalam al-Quran surat ar-Rum/30:41, yaitu:

ظَهَرَ الْفَسَادُ فِي الْبَرِّ وَالْبَحْرِ بِمَا كَسَبَتْ أَيْدِي النَّاسِ لِيُذِيقَهُمْ بَعْضَ الَّذِي عَمِلُوا لَعَلَّهُمْ
يَرْجِعُونَ ﴿٤١﴾

“Telah nampak kerusakan di darat dan di laut disebabkan karena perbuatan tangan manusia, supaya Allah Swt. merasakan kepada mereka sebagian dari (akibat) perbuatan mereka, agar mereka kembali (ke jalan yang benar)” (QS. Ar-Rum/30:41).

Mengenai ayat tersebut, adanya interaksi antara dua polulasi atau lebih dapat dimodelkan dalam model matematika. Model matematika merupakan bagian dari matematika terapan, yang digunakan untuk menjelaskan fenomena alam yang terjadi, serta dapat digunakan untuk memprediksi perilaku sistem untuk jangka waktu tertentu. Pemodelan matematika pada bidang ekologi sangat menarik untuk dikaji mengingat banyak sekali faktor-faktor yang mempengaruhi pertumbuhan dan kehidupan populasi makhluk hidup serta keseimbangan makhluk hidup. Proses dinamika kehidupan makhluk hidup (organisme) dapat dimodelkan secara matematis dengan menggunakan persamaan diferensial yang melibatkan waktu yang kontinu atau waktu yang diskret. Salah satu model matematika yang digunakan dalam menjelaskan fenomena alam tersebut adalah model populasi mangsa-pemangsa (Didiharyono, 2016).

Salah satu model interaksi antar makhluk hidup dalam suatu ekosistem adalah model *predator-prey*, dengan *prey* sebagai spesies yang dimangsa dan *predator* sebagai spesies yang memangsa. Model *predator-prey* pertama kali dikenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926, sehingga model ini juga disebut model Lotka-Volterra (Boyce dan DiPrima, 2009). Pada kenyataannya, interaksi antara *predator* dan *prey* tidak hanya terjadi pada dua spesies saja. Misal terdapat omnivora sebagai spesies ketiga yang memangsa *prey* dan bangkai *predator*, maka kehadiran omnivora dapat menyebabkan populasi *prey* semakin berkurang (Andayani, 2012).

Pada skripsi ini, akan dibahas model *predator-prey* tiga spesies pada suatu jaring-jaring makanan yang terdiri dari *prey*, *intermediate-predator*, dan *top-predator*. *Prey* adalah spesies yang dimangsa oleh *intermediate-predator* dan *top-predator*, *intermediate-predator* merupakan spesies yang memangsa *prey* tetapi juga dimangsa oleh *top-predator*, sedangkan *top-predator* adalah spesies yang memangsa *prey* dan *intermediate-predator*. Adanya keterlibatan *top-predator* menyebabkan sistem yang diperoleh menjadi lebih kompleks. Dengan menggunakan fungsi respon yang berbeda untuk kedua *predator* dalam sistem tersebut memberikan perubahan signifikan terhadap perilaku solusi interaksi di antara ketiga spesies tersebut (Skalski dan Gilliam, 2001).

Model *predator-prey* ini menggambarkan interaksi kehidupan suatu populasi pemangsa dan mangsanya. Dalam model ini, terdapat ketidaklinieran dalam persamaannya, sehingga akan sulit untuk mencari solusi eksaknya. Oleh karena itu di dalam penelitian ini akan dijelaskan sebuah metode untuk mencari solusi dari model *predator-prey* secara numerik.

Penyelesaian numerik dari model *predator-prey* tiga spesies dapat diperoleh melalui banyak metode yang dapat digunakan, salah satunya adalah metode Runge Kutta. Dalam penelitian ini akan dijelaskan tentang bagaimana mencari solusi numerik model *predator-prey* dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4. Metode ini dipandang cukup baik digunakan dalam mencari solusi numerik karena memiliki ketelitian lebih besar dari metode sebelumnya dan tidak memerlukan turunan fungsi dalam penyelesaiannya.

Penelitian ini diharapkan dapat memperoleh solusi numerik dari persamaan *predator-prey* tiga spesies yang lebih akurat dari penelitian yang telah dilakukan sebelumnya. Dan juga penelitian ini sebagai cara untuk menutupi keterbatasan manusia dalam hal menghitung. Oleh karena itu, penulis melakukan penelitian ini dengan judul “Penyelesaian Numerik Model *Predator-Prey* Tiga Spesies Menggunakan Metode Runge Kutta Orde 4”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana solusi numerik model *predator-prey* menggunakan metode Runge Kutta orde 4?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui solusi numerik model *predator-prey* menggunakan metode Runge Kutta orde 4.

1.4 Batasan Masalah

Pada skripsi ini akan dibahas tentang solusi numerik model *predator-prey*. Untuk menghindari terjadinya pembahasan yang meluas, maka penulis membatasi ruang lingkup permasalahan pada model persamaan tiga populasi yaitu dua *predator* dan satu *prey*.

1.5 Manfaat Penelitian

Penulisan skripsi ini diharapkan bermanfaat bagi:

1. Penulis

Sebagai pengembangan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari dalam mengkaji permasalahan tentang penyelesaian numerik sistem persamaan model *predator-prey*.

2. Pembaca

Sebagai tambahan wawasan dan informasi tentang model matematika dari salah satu model dalam matematika ekologi, yaitu model *predator-prey* dengan dua *predator* satu *prey*.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam menyelesaikan secara numerik model *predator-prey* adalah menggunakan pendekatan studi literatur atau *library research*. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan model.
2. Menentukan kondisi awal dan nilai parameter.
3. Mensubstitusikan model dalam rumus Runge Kutta.

4. Menghitung solusi model *predator-prey*.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar pembahasan dalam penelitian ini tersaji secara sistematis dan mempermudah pembaca untuk memahaminya, penulis menggunakan sistematika sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini terdiri atas teori-teori yang mendukung pembahasan. Teori tersebut meliputi sistem persamaan diferensial, metode Runge Kutta orde 4, dan analisis model Lotka-Volterra.

Bab III Pembahasan

Bab ini akan menguraikan keseluruhan langkah yang disebutkan dalam metode penelitian.

Bab IV Penutup

Bab ini akan memaparkan kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Sistem Persamaan Difrensial

Persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas disebut persamaan diferensial (Pamuntjak, 1990).

Contoh:

$$y' + xy = 5$$

Persamaan tersebut adalah persamaan yang mengandung satu turunan dengan variabel bebas x .

Berdasarkan jumlah variabel bebas, persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial adalah sebuah persamaan yang mengandung derivatif-derivatif atau diferensial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas, jika hanya satu atau lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial biasa (Kartono, 2012).

Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa adalah:

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^n) = 0 \quad (2.1)$$

Berdasarkan persamaan tersebut terdapat hubungan antara variabel bebas x dan variabel terikat y beserta derivatif-derivatifnya dalam bentuk himpunan persamaan yang secara identik sama dengan nol yang menyatakan model matematika dari fenomena perubahan yang terjadi (Kartono, 2012).

Orde suatu persamaan diferensial yaitu tingkat tertinggi turunan yang terdapat pada suatu persamaan diferensial. Persamaan diferensial linier pada orde n dalam variabel bergantung y dan variabel x , persamaannya berbentuk:

$$a_0(x) \left(\frac{d^n y}{dx^n} \right) + a_1(x) \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) + \dots + a_{n-1}(x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + a_n(x) y = F(x) \quad (2.2)$$

dengan a_0 tidak nol, diasumsikan $a_0, a_1, \dots, a_n$ dan F adalah fungsi-fungsi kontinu pada interval $a \leq x \leq b$ dan $a_0(x) \neq 0$ untuk setiap x pada $a \leq x \leq b$ (Ross, 1984).

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n buah fungsi yang tidak diketahui. Sistem persamaan diferensial biasa muncul secara alamiah dalam masalah yang melibatkan beberapa variabel bebas (misalnya $x_1, x_2, \dots, x_n$) yang masing-masing darinya merupakan sebuah fungsi dari satu variabel terikat (misalnya t) (Kartono, 2012).

Bentuk umum dari suatu sistem n persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, yang mana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap t (Kartono, 2012).

2.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linier dan Non Linier

$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^n) = 0$ dikatakan linier jika F adalah linier dan variabel-variabelnya adalah $x, y, y', y'', y''', \dots, y^n$. Secara umum persamaan diferensial biasa linier dapat diberikan sebagai berikut:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.4)$$

Menurut Baiduri (2012), persamaan (2.4) merupakan persamaan diferensial orde- n dikatakan linier jika memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

- Variabel-variabel terikat dan turunannya paling tinggi pangkat satu.
- Tidak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat dengan variabel terikat lainnya, atau turunan yang satu dengan turunan yang lainnya, atau variabel terikat dengan sebuah turunan.
- Variabel terikat y bukan merupakan fungsi transenden.

Dimisalkan bahwa koefisien-koefisien $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$ dan fungsi $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang I . Jika fungsi $f(x) = 0$ maka persamaan (2.4) disebut persamaan homogen. Jika fungsi $f(x) \neq 0$ maka persamaan (2.4) disebut persamaan nonhomogen atau tak homogen. Bila semua koefisien $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$ adalah suatu konstanta, maka persamaan (2.4) disebut persamaan linier koefisien konstanta, jika semua variabelnya berupa fungsi maka disebut persamaan linier koefisien variabel (Finizio dan Ladas, 1988).

Menurut Finizio dan Ladas (1988), sistem persamaan diferensial linier adalah suatu sistem yang memuat n persamaan diferensial dengan n fungsi yang tidak diketahui, yang mana n merupakan bilangan bulat positif yang lebih besar

sama dengan 2. Bentuk umum dari suatu sistem persamaan diferensial linier orde satu dengan n fungsi yang tidak diketahui adalah:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{aligned}\tag{2.5}$$

Bentuk persamaan (2.5) dapat ditulis secara singkat menjadi

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \\ i &= 1, 2, \dots, n\end{aligned}\tag{2.6}$$

Suatu sistem persamaan diferensial dikatakan linier apabila sistem tersebut terdiri dari lebih dari satu persamaan linier yang saling terkait. Sedangkan koefisiennya dapat berupa konstanta ataupun fungsi. Sedangkan sistem persamaan diferensial dikatakan nonlinier apabila sistem tersebut terdiri dari lebih dari satu persamaan nonlinier yang saling terkait (Boyce dan DiPrima, 1999).

2.3 Metode Runge Kutta

Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan metode deret Taylor tidak praktis, karena metode tersebut membutuhkan perhitungan turunan $f(x, y)$. Di samping itu, tidak semua fungsi mudah dihitung turunannya, terutama bagi fungsi yang bentuknya rumit. Semakin tinggi orde metode deret Taylor, maka semakin tinggi turunan fungsi yang harus dihitung. Selain itu, untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti diperlukan Δx atau h yang kecil, padahal penggunaan Δx yang kecil menyebabkan waktu hitungan yang lebih panjang.

Oleh karena itu, metode Runge Kutta merupakan alternatif dari metode deret Taylor yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan fungsi (Munir, 2010).

Bentuk umum dari metode Runge Kutta yaitu:

$$y_{i+1} = y_i + \varphi(x_i, y_i)h \quad (2.7)$$

dengan $\varphi(x_i, y_i)h$ adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rerata pada interval. Fungsi pertambahan dapat ditulis dalam bentuk umum:

$$\varphi = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n \quad (2.8)$$

dengan a adalah konstanta dan k adalah

$$k_1 = hf(x_r, y_r)$$

$$k_2 = hf(x_r + p_1h, y_r + q_{11}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_r + p_2h, y_r + q_{21}k_1 + q_{22}k_2)$$

$\vdots$

$$k_n = hf(x_r + p_{n-1}h, y_r + q_{n-1,1}k_1 + q_{n-1,2}k_2 + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1})$$

dengan p dan q adalah konstanta. Nilai k menunjukkan hubungan berurutan. Nilai k_1 muncul dalam persamaan untuk menghitung k_2 , yang keduanya juga muncul dalam persamaan untuk menghitung k_3 dan seterusnya. Hubungan berurutan ini membuat metode Runge Kutta menjadi efisien untuk hitungan komputer (Chapra dan Canale, 2010:725).

Ada beberapa tipe metode Runge Kutta yang bergantung pada nilai n yang dapat digunakan. Untuk $n = 1$ disebut metode Runge Kutta orde 1 atau disebut juga metode Euler, yang diperoleh dari $k_1 = f(x, y)$ dan persamaan (2.8).

$$\varphi = a_1k_1 = a_1f(x_i, y_i)$$

untuk $a_1 = 1$ maka persamaan (2.7) menjadi:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Dalam metode Runge Kutta, setelah nilai n ditetapkan, kemudian nilai a , p , q dicari dengan menyamakan persamaan (2.7) dengan suku-suku dari deret Taylor, selanjutnya dapat ditentukan metode Runge Kutta pada orde selanjutnya.

Chapra dan Canale (2010) merumuskan versi kedua dari persamaan (2.7) sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)h \quad (2.9)$$

yang mana:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (2.10)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) \quad (2.11)$$

Supaya dapat memakai persamaan (2.9), harus ditentukan harga-harga konstanta a_1, a_2, p_1 dan q_{11} . Deret Taylor orde kedua untuk y_{i+1} yang dinyatakan oleh y_i dan $f(x_i, y_i)$ ditulis sebagai persamaan:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)h^2}{2} \quad (2.12)$$

yang mana $f'(x_i, y_i)$ harus ditentukan oleh diferensi aturan rantai:

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad (2.13)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.13) ke dalam (2.12) memberikan:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right) h^2}{2} \quad (2.14)$$

Dengan menerapkan metode deret Taylor untuk memperluas persamaan (2.11) akan memberikan:

$$f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) = f(x_i, y_i) + p_1 h \frac{\partial f}{\partial x} + q_{11} k_1 h \frac{\partial f}{\partial y} + 0(h^2)$$

Hasil ini dapat disubstitusikan bersama-sama dengan persamaan (2.10) ke dalam persamaan (2.9) untuk memenuhi:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 h f(x_i, y_i) + a_2 h f(x_i, y_i) + a_2 p_1 h^2 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} h^2 f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y} + 0(h^3)$$

atau dengan mengumpulkan suku-sukunya, yaitu:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i, y_i))h + \left(a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y} \right) h^2 + 0(h^3) \quad (2.15)$$

Dengan membandingkan suku-suku yang serupa pada persamaan (2.14) dan persamaan (2.15), kemudian ditentukan supaya kedua persamaan tersebut ekuivalen. Maka yang berikut ini harus berlaku:

$$a_1 + a_2 = 1 \quad (2.16)$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2} \quad (2.17)$$

$$a_2 q_{11} = \frac{1}{2} \quad (2.18)$$

Karena terdapat tiga persamaan dengan empat konstanta yang tidak diketahui, maka harus menentukan sebuah harga dari salah satu konstanta tersebut untuk menentukan tiga yang lain. Misalkan dengan menyatakan sebuah harga untuk a_2 . Kemudian persamaan (2.16) sampai (2.18) dapat diselesaikan secara simultan untuk:

$$a_1 = 1 - a_2 \quad (2.19)$$

$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2} \quad (2.20)$$

Karena dapat dipilih sejumlah tak hingga harga untuk a_2 , maka terdapat sejumlah tak hingga metode Runge Kutta orde kedua. Ada tiga versi yang paling lazim digunakan yaitu dengan memasukkan variabel $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 1$ dan $a_2 = \frac{2}{3}$.

Jika a_2 dianggap $\frac{1}{2}$, persamaan (2.19) dan (2.20) dapat diselesaikan untuk $a_1 = \frac{1}{2}$ dan $p_1 = q_{11} = 1$. Parameter-parameter ini kemudian dimasukkan ke dalam persamaan (2.9) sehingga:

$$y_{i+1} = y_1 + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \right) h \quad (2.21)$$

yang mana:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1)$$

Jika dianggap $a_2 = 1$, maka $a_1 = 0$, $p_1 = q_{11} = \frac{1}{2}$ dan persamaan (2.9) menjadi:

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$

yang mana:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

Jika memilih $a_2 = \frac{2}{3}$ maka $a_1 = \frac{1}{3}$ dan $p_1 = q_{11} = \frac{3}{4}$, maka persamaan (2.9) menjadi:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2 \right) h$$

yang mana:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}hk_1\right)$$

Untuk metode Runge Kutta orde 3, dapat dilakukan penurunan yang serupa dengan penurunan metode orde dua. Hasil dari turunan ini adalah enam persamaan dengan delapan konstanta yang tidak diketahui. Menurut Chapra dan Canale (2010) versi yang umum digunakan adalah:

$$y_{i+1} = y_1 + \left(\frac{1}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3) \right) h$$

yang mana:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2)$$

Metode Runge Kutta yang terkenal dan banyak dipakai dalam praktik adalah metode Runge Kutta orde tiga dan metode Runge Kutta orde empat. Kedua metode tersebut terkenal karena tingkat ketelitian solusinya tinggi dibandingkan metode Runge Kutta orde sebelumnya, mudah diprogram, dan stabil.

Berdasarkan literatur, metode Runge Kutta orde empat ini cukup disebut dengan “Metode Runge Kutta” saja tanpa memperinci orde atau jenisnya. Metode klasik Runge Kutta ini dapat didefinisikan oleh persamaan-persamaan berikut:

$$y_{i+1} = y_i + h(a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4) \quad (2.22)$$

yang mana:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1 + q_{22}k_2)$$

$$k_4 = f(x_i + p_3h, y_i + q_{31}k_1 + q_{32}k_2 + q_{33}k_3)$$

Persamaan Runge Kutta tersebut memiliki 13 konstanta. Untuk memperoleh nilai $a_1, a_2, a_3, a_4, p_1, p_2, p_3, q_{11}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}, q_{33}$ yaitu dengan cara menjabarkan k_1, k_2, k_3 , dan k_4 dalam bentuk deret Taylor. Dengan menjabarkan k_i yang hanya memiliki variabel y maka akan diperoleh:

$$k_1 = f \quad (2.23)$$

$$k_2 = f(y_i + q_{11}k_1) \quad (2.24)$$

$$= f + hq_{11}ff_y + \frac{h^2 q_{11}^2 f^2 f_{yy}}{2} + \frac{h^3 q_{11}^3 f^3 f_{yyy}}{6} + \dots$$

$$k_3 = f(y_i + q_{21}k_1 + q_{22}k_2) \quad (2.25)$$

$$= f(h(q_{21} + q_{22})ff_y + h^2 \left(q_{11}q_{22}ff_y^2 + \frac{1}{2}(q_{21} + q_{22})^2 f^2 f_{yy} \right) + h^3 \left(\frac{1}{2}q_{11}^2 q_{22}f^2 f_y f_{yy} + q_{21}(q_{21} + q_{22})q_{22}f^2 f_y f_{yy} + \frac{1}{6}(q_{21} + q_{22})^3 f^3 f_{yyy} \right) + \dots$$

$$k_4 = f(y_i + q_{31}k_1 + q_{32}k_2 + q_{33}k_3) \quad (2.26)$$

$$= f + h(q_{31} + q_{32} + q_{33})ff_y + h^2 \left(q_{11}q_{32}ff_y^2 + (q_{21} + q_{22})q_{33}ff_y^2 + \frac{1}{2}(q_{31} + q_{32} + q_{33})^2 f^2 f_{yy} \right) + h^3 \left(\frac{1}{2}q_{11}^2 q_{32}(q_{31} + q_{32} + q_{33})f^2 f_y f_{yy} + \frac{q_{33}(q_{21} + q_{22})^2 f^2 f_y f_{yy}}{2} + (q_{31} + q_{32} + q_{33})(q_{11}q_{32} + q_{33}(q_{21} + q_{22}))f^2 f_y f_{yy} + q_{33}q_{22}q_{11}ff_y^3 + \frac{1}{6}(q_{31} + q_{32} + q_{33})^3 f^3 f_{yyy} \right) \dots$$

Untuk mendapatkan nilai parameter $a_1, a_2, a_3, a_4, q_{11}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}, q_{33}$ yaitu dengan mensubstitusikan persamaan (2.23), (2.24), (2.25), dan (2.26) ke dalam persamaan (2.22). Kemudian menggunakan penyelesaian pendekatan deret Taylor untuk mendapatkan parameter tersebut sehingga diperoleh:

$$q_{11} = p_1$$

$$q_{21} + q_{22} = p_2$$

$$q_{31} + q_{32} + q_{33} = p_3$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$$

$$a_2 q_{11} + a_3 (q_{21} + q_{22}) + a_4 (q_{31} + q_{32} + q_{33}) = \frac{1}{2}$$

$$a_2 q_{11}^2 + a_3 (q_{21} + q_{22})^2 + a_4 (q_{31} + q_{32} + q_{33})^2 = \frac{1}{3}$$

$$a_2 q_{11}^3 + a_3 (q_{21} + q_{22})^3 + a_4 (q_{31} + q_{32} + q_{33})^3 = \frac{1}{4}$$

$$a_3 q_{22} q_{11} + a_4 q_{32} q_{11} + a_4 q_{33} (q_{21} + q_{22}) = \frac{1}{6}$$

$$a_3 q_{22} q_{11}^2 + a_4 q_{32} q_{11}^2 + a_4 q_{33} (q_{21} + q_{22})^2 = \frac{1}{12}$$

$$a_3 q_{11} q_{22} (q_{21} + q_{22}) + a_4 (q_{31} + q_{32} + q_{33}) (q_{11} q_{32} + q_{33} (q_{21} + q_{22})) = \frac{1}{8}$$

$$a_4 q_{33} q_{22} q_{11} = \frac{1}{24}$$

(2.27)

Persamaan (2.22) terdiri dari 11 persamaan dengan 13 parameter. Jika diambil tiga parameter bebasnya yaitu:

$$q_{11} = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2}, p_3 = 1 \quad (2.28)$$

maka, akan terbentuk Runge Kutta klasik sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.29)$$

yang mana:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

2.4 Galat

Menganalisis galat sangat penting dalam perhitungan yang menggunakan metode numerik. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya, semakin teliti solusi numerik yang didapatkan (Munir, 2010).

Misalkan $\hat{a}$ adalah nilai hampiran terhadap nilai sejati a , maka selisih $\varepsilon = a - \hat{a}$ disebut galat. Dalam praktik kadang sulit dicari nilai sejati a , karena itu galat ε sering dinormalkan terhadap solusi hampirannya, sehingga galat relatifnya dinamakan galat relatif hampiran. Galat relatif hampiran dirumuskan sebagai berikut:

$$\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{\hat{a}}$$

dengan,

ε_{RA} : galat relatif hampiran

ε : galat

$\hat{a}$: nilai hampiran terhadap nilai a sejati

Menurut Munir (2010), perhitungan galat relatif hampiran masih mengandung kelemahan sebab nilai ε tetap membutuhkan pengetahuan nilai a . Oleh karena itu, perhitungan galat relatif hampiran menggunakan pendekatan lain. Pada perhitungan numerik yang menggunakan pendekatan lelaran (*iteration*), ε_{RA} dihitung dengan cara:

$$\varepsilon_{RA} = \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots$$

dengan,

ε_{RA} : galat relatif hampiran

a_{r+1} : nilai hampiran lelaran sekarang

a_r : nilai hampiran lelaran sebelumnya

2.5 Analisis Model Lotka-Volterra

Model Lotka-Volterra tersusun dari pasangan persamaan diferensial yang mendeskripsikan *predator-prey* dalam kasus yang paling sederhana. Model ini membuat beberapa asumsi:

1. Populasi *prey* akan tumbuh secara eksponen ketika tidak adanya *predator*.
2. Populasi *predator* akan mati kelaparan ketika tidak adanya populasi *prey*.
3. *Predator* dapat mengkonsumsi *prey* dengan jumlah yang tak terhingga.
4. Tidak adanya lingkungan yang lengkap (dengan kata lain, kedua populasi berpindah secara acak melalui sebuah lingkungan yang homogen) (Neuhauser, 2004).

Selanjutnya bentuk verbal ini diterjemahkan ke dalam sebuah sistem persamaan diferensial. Diasumsikan x sebagai populasi *prey* dan y sebagai populasi *predator*, populasi *prey* berkurang ketika *predator* membunuhnya dan

bertahan hidup (tidak mengurangi populasi *prey*) ketika *predator* hanya menyerangnya.

Dimulai dengan memperhatikan apa yang terjadi pada populasi *predator* ketika tidak adanya *prey* sebagai sumber makanan, diharapkan laju populasi *predator* berkurang secara eksponensial, laju kematian *predator* tanpa adanya *prey* diasumsikan dengan c , sehingga persamaannya dideskripsikan seperti berikut:

$$\frac{dy}{dt} = -cy \quad (2.30)$$

Persamaan tersebut menggunakan hasil kali dari bilangan *predator* (y) dan kelajuan kematian *predator* (c). Laju perpindahan dari *prey* ke *predator* diasumsikan dengan α dan laju perpindahan dari *predator* ke *prey* diasumsikan dengan β . Untuk mendeskripsikan penurunan kelajuan (karena ada tanda negatif pada bagian kanan persamaan) dari populasi *predator* dengan pengaruh waktu. Dengan adanya *prey* bagaimanapun juga pengurangan ini dilawan oleh laju kelahiran *predator*, yang ditentukan oleh laju konsumsi (βxy) yang mana laju penyerangan (β) dikalikan dengan bilangan y dan bilangan x . Bilangan *predator* dan *prey* naik ketika pertemuan *predator* dan *prey* lebih sering, tetapi laju aktual dari konsumsi akan tergantung pada laju penyerangan (β). Persamaan populasi *predator* menjadi:

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy \quad (2.31)$$

Perkalian βy adalah tanggapan *predator* secara numerik atau peningkatan perkapita dari fungsi *prey* yang melimpah. Sedangkan perkalian βxy

menunjukkan bahwa kenaikan populasi *predator* sebanding dengan perkalian *prey* yang melimpah.

Beralih pada populasi *prey*, diharapkan tanpa serangan *predator*, populasi *prey* akan naik secara eksponensial. Persamaan berikut ini mendeskripsikan laju kenaikan populasi *prey* dengan pengaruh waktu, dengan r adalah laju pertumbuhan intrinsik *prey* dan x adalah jumlah dari populasi *prey*.

$$\frac{dx}{dt} = rx \quad (2.32)$$

Pada model Lotka-Volterra tersebut terdapat kelemahan yaitu fakta bahwa ketika tidak adanya *predator*, populasi *prey* akan tumbuh tanpa batas, untuk mengatasi hal ini digunakan model logistik yang merupakan sebuah model pertumbuhan populasi. Di hadapan *predator*, bagaimanapun juga populasi *prey* dicegah dari peningkatan eksponensial secara terus menerus, karena model *predator-prey* memiliki waktu yang kontinu dan mengisyaratkan tentang model pertumbuhan populasi maka termasuk dalam model logistik. Jadi persamaan tersebut menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (2.33)$$

dengan x merupakan laju pertumbuhan populasi dan K adalah daya kapasitas atau kemampuan menahan populasi agar tetap maksimum. Dengan adanya *predator* bagaimanapun juga kenaikan ini dilawan oleh laju kematian *prey* karena adanya penyerangan dari *predator*, yang ditentukan oleh laju konsumsi (αxy) dengan laju penyerangan (α) dikalikan dengan bilangan y dan bilangan x . Bilangan *predator* dan *prey* turun ketika pertemuan pertemuan *predator* dan *prey* lebih sering, tetapi

laju aktual dari konsumsi akan tergantung pada laju penyerangan (α). Persamaan populasi *prey* menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \beta xy\end{aligned}\tag{2.34}$$

Model persamaan (2.27) memuat fungsi logistik yang merupakan model pertumbuhan logistik atau model Verhulst atau kurva pertumbuhan logistik pada spesies tunggal dengan $\frac{x}{K} < 1$. Model tersebut termasuk model yang memiliki waktu kontinu, model logistik yang dimaksud dapat diformulasikan dengan

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Konstanta r diasumsikan positif. Konstanta r adalah laju pertumbuhan intrinsik karena perbandingan laju pertumbuhan untuk x diperkirakan sama dengan r . Konstanta positif K biasanya mengarah kepada daya kapasitas kesehatan lingkungan yaitu kemampuan menahan populasi agar tetap maksimum.

2.6 Kajian Al-Quran tentang Perintah untuk Menjaga Keseimbangan Alam

Ekologi adalah ilmu yang mempelajari interaksi antara organisme dengan lingkungannya. Ekologi diartikan sebagai ilmu yang mempelajari baik interaksi antar makhluk hidup maupun interaksi antara makhluk hidup dan lingkungannya. Pembahasan ekologi tidak lepas dari pembahasan ekosistem dengan berbagai komponen penyusunnya, yaitu faktor abiotik dan biotik. Faktor abiotik antara lain suhu air, kelembaban, cahaya, dan topografi, sedangkan faktor biotik adalah makhluk hidup yang terdiri dari manusia, hewan, tumbuhan, dan mikroba (Suzyanna, 2013).

Ekologi mempelajari bagaimana makhluk hidup dapat mempertahankan kehidupannya dengan mengadakan hubungan antar makhluk hidup dan dengan benda tak hidup di dalam tempat hidupnya atau lingkungannya. Lingkungan merupakan komponen yang sangat penting bagi kelangsungan hidup makhluk hidup. Dalam melangsungkan hidupnya, makhluk hidup dapat bertahan dengan memangsa makhluk lain. Proses makan dimakan pada makhluk hidup dapat dimodelkan dalam model matematika yang disebut model *predator-prey*. Untuk menjaga kelestarian makhluk hidup dari kepunahan, manusia yang dianugerahi akal wajib menjaga lingkungan agar tetap stabil dan rusak. Allah Swt. telah melarang manusia untuk merusak alam dalam surat al-A'raf/7:56, yaitu:

وَلَا تُفْسِدُوا فِي الْأَرْضِ بَعْدَ إِصْلَاحِهَا وَادْعُوهُ خَوْفًا وَطَمَعًا إِنَّ رَحْمَتَ اللَّهِ قَرِيبٌ مِّنَ الْمُحْسِنِينَ ﴿٥٦﴾

"Dan janganlah kamu membuat kerusakan di muka bumi, sesudah (Allah Swt.) memperbaikinya dan berdoalah kepada-Nya dengan rasa takut (tidak akan diterima) dan harapan (akan dikabulkan). Sesungguhnya rahmat Allah Swt. amat dekat kepada orang-orang yang berbuat baik" (QS. Al-A'raf/7:56).

Ayat ini dengan jelas telah melarang manusia membuat kerusakan di muka bumi. Alam raya telah diciptakan dengan sangat harmonis, serasi dan sangat memenuhi kebutuhan makhluk hidup. Allah Swt. telah menjadikan alam raya ini supaya digunakan dengan baik oleh hamba-Nya. Meskipun perusakan alam telah dilarang oleh Allah Swt. melalui firman-Nya tetap saja ada sekelompok manusia yang hanya menuruti hawa nafsunya dan memenuhi kepentingan pribadinya tanpa memikirkan dampaknya terhadap makhluk lain, seperti menebang hutan tanpa izin sehingga berdampak pada kelestarian hewan-hewan penghuni hutan tersebut dan berakibat pula pada longsohnya tanah karena tidak adanya tumbuhan yang menopang kekuatan tanah. Banyak kerusakan-kerusakan alam yang lain akibat

ulah manusia seperti banjir, pembakaran hutan, dan pemanasan global. Kerusakan-kerusakan tersebut dapat berdampak pada keseimbangan alam sehingga proses interaksi antar makhluk hidup menjadi tidak harmonis.

Kerusakan lingkungan dapat terjadi karena tidak seimbangnya komponen atau elemen di lingkungan tersebut. Karena jika salah satu penyeimbang alam terganggu atau rusak, maka akan berpengaruh terhadap keseimbangan alam yang lain. Dewasa ini manusia kurang memperhatikan keseimbangan alam seperti menebang tumbuh-tumbuhan dan menggantinya dengan membangun bangunan-bangunan megah dan pusat perindustrian tanpa memperhatikan dampaknya terhadap keseimbangan alam. Jika tumbuhan semakin berkurang maka akan berdampak terhadap kelangsungan hidup manusia dan hewan sebagai *predator*, karena tumbuhan merupakan sumber makanan bagi keduanya. Jika pertumbuhan tumbuhan sebagai *prey* dan pertumbuhan manusia dan hewan sebagai *predator* tidak seimbang maka akan berdampak pada kepunahan makhluk hidup.

Sebagaimana Allah Swt. berfirman dalam al-Quran surat al-Qashash/28:77, yaitu:

وَابْتَغِ فِيمَا آتَاكَ اللَّهُ الدَّارَ الْآخِرَةَ ۖ وَلَا تَنْسَ نَصِيبَكَ مِنَ الدُّنْيَا ۚ وَأَحْسِنَ كَمَا
أَحْسَنَ اللَّهُ إِلَيْكَ ۖ وَلَا تَبْغِ الْفُسَادَ فِي الْأَرْضِ ۚ إِنَّ اللَّهَ لَا يُحِبُّ الْمُفْسِدِينَ ﴿٧٧﴾

“Dan carilah pada apa yang telah dianugerahkan Allah Swt. kepadamu (kebahagiaan) negeri akhirat, dan janganlah kamu melupakan bagianmu dari (kenikmatan) duniawi dan berbuat baiklah (kepada orang lain) sebagaimana Allah Swt. telah berbuat baik kepadamu, dan janganlah kamu berbuat kerusakan di (muka) bumi. Sesungguhnya Allah Swt. tidak menyukai orang-orang yang berbuat kerusakan” (QS. Al-Qashash/28:77).

Pada ayat tersebut telah dijelaskan bahwa Allah Swt. memerintahkan manusia untuk mencari kenikmatan akhirat dan juga tidak melupakan kenikmatan dunia. Salah satu kenikmatan dunia adalah diciptakannya alam yang indah dan

harmonis untuk dinikmati umat manusia. Semua yang dibutuhkan manusia telah disediakan di alam. Untuk memenuhi kebutuhannya kadang manusia serakah dalam mengambil kemanfaatan alam dan kurang memperhatikan kelestariannya sehingga timbul kerusakan-kerusakan seperti pembuangan limbah pabrik dengan sembarangan sehingga membuat air tercemar dan makhluk hidup di sekitarnya banyak yang mati, penebangan liar demi mengambil keuntungan pribadi, ditambah dengan pencemaran udara yang dapat menyebabkan pemanasan global sehingga mengakibatkan lapisan ozon bumi semakin menipis sehingga bumi semakin panas. Oleh karena itu, ayat tersebut mengingatkan tentang larangan keras membuat kerusakan di muka bumi dan Allah Swt. murka terhadap orang-orang yang membuat kerusakan.

Berdasarkan ayat-ayat tersebut, Allah Swt. telah memerintahkan manusia untuk menjaga keseimbangan dan kelestarian alam yang sebelumnya telah diciptakan dengan sempurna oleh Allah Swt. Cara menjaga keseimbangan alam yaitu dengan melestarikan lingkungan dan tidak melakukan kerusakan-kerusakan yang dapat menyebabkan dampak negatif terhadap lingkungan.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Model Persamaan Dua *Predator* Satu *Prey*

Dalam bab ini akan dibahas penyelesaian numerik model *predator-prey* yang berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinier dengan metode Runge Kutta orde 4. Model yang disusun oleh Alebraheem dan Hasan (2012) dalam karya ilmiah yang berjudul “*Persistence of Predators in a Two Predators-One Prey Model with Non-Periodic Solution*” terdiri dari tiga variabel bergantung yang dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= x(t)(1 - x(t)) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{1 + h_1 \alpha x(t)} - \frac{\beta x(t)z(t)}{1 + h_2 \beta x(t)}, \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -uy(t) + \frac{e_1 \alpha x(t)y(t)}{1 + h_1 \alpha x(t)} - \frac{e_1 \alpha}{1 + h_1 \alpha x(t)} y^2(t) - c_1 y(t)z(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= -wz(t) + \frac{e_2 \beta x(t)z(t)}{1 + h_2 \beta x(t)} - \frac{e_2 \beta}{1 + h_2 \beta x(t)} z^2(t) - c_2 y(t)z(t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

Dengan $x(t)$ adalah populasi *prey* dan $y(t)$ serta $z(t)$ menunjukkan populasi *predator* pada saat t (waktu). Sedangkan $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, dan $z(0) = z_0$ merupakan jumlah populasi *prey* dan *predator* pada saat $t = 0$. $r, k, \alpha, \beta, h_1, h_2, u, c_1, c_2, w, u, e_1$, dan e_2 adalah koefisien pada model (3.1). r menunjukkan jumlah kelahiran rata-rata *prey*, α dan β menunjukkan laju efisiensi untuk mencari dan menangkap *predator* y dan z , h_1 dan h_2 adalah laju pertumbuhan *predator*, c_1 dan c_2 adalah laju kompetisi persaingan antara *predator* y dan z , u dan w adalah laju kematian *predator* y dan z , e_1 dan e_2 adalah efisiensi yang mengubah konsumsi *prey* menjadi kelahiran *predator*.

3.2 Penyelesaian Numerik Model Dua Predator Satu Prey Menggunakan Metode Runge Kutta Orde 4

Nilai parameter dan nilai awal dari setiap variabel pada sistem persamaan

(3.1) diberikan pada Tabel 3.1 sebagai berikut:

Tabel 3.1 Nilai Parameter dan Nilai Awal Sistem Persamaan (3.1)

Variabel/ Parameter	Deskripsi	Nilai Parameter
$x(t)$	Banyaknya populasi mangsa (<i>prey</i>) terhadap waktu	0,5
$y(t)$	Banyaknya populasi pemangsa (<i>predator</i>) pertama terhadap waktu	0,2
$z(t)$	Banyaknya populasi pemangsa (<i>predator</i>) kedua terhadap waktu	0,2
r	Jumlah kelahiran rata-rata mangsa (<i>prey</i>)	0,75
α	Laju efisiensi untuk mencari dan menangkap pemangsa (<i>predator</i>) y	1,41
w	Laju kematian pemangsa (<i>predator</i>) z	0,65
h_1	Laju pertumbuhan pemangsa (<i>predator</i>)	0,005
h_2	Laju pertumbuhan pemangsa (<i>predator</i>)	0,004
e_1	Efisiensi yang mengubah konsumsi mangsa (<i>prey</i>) menjadi kelahiran pemangsa (<i>predator</i>) y	0,8
e_2	Efisiensi yang mengubah konsumsi mangsa (<i>prey</i>) menjadi kelahiran pemangsa (<i>predator</i>) z	0,79
β	Laju efisiensi untuk mencari dan menangkap pemangsa (<i>predator</i>) z	1,5
u	Laju kematian pemangsa (<i>predator</i>) y	0,55
c_1	Laju kompetisi persaingan antara pemangsa (<i>predator</i>) y dan z	0,08
c_2	Laju kompetisi persaingan antara pemangsa (<i>predator</i>) y dan z	0,05

(Alebraheem dan Hasan, 2012)

Penelitian ini menggunakan t (waktu) yang akan diselesaikan pada saat

$t = 0$ sampai $t = 0,5$ dengan ukuran langkah $h = 0.1$. Misalkan $f(x, y, z, t) =$

$\frac{dx(t)}{dt}$, $g(x, y, z, t) = \frac{dy(t)}{dt}$, dan $j(x, y, z, t) = \frac{dz(t)}{dt}$. Dengan mensubstitusikan

parameter-parameter tersebut maka sistem persamaan (3.1) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
f(x, y, z, t) &= x(1 - x) - \frac{1,41xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,5xz}{1 + 0,006x}, \\
g(x, y, z, t) &= 0,55y + \frac{1,128xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,128}{1 + 0,00705x}y^2 - 0,08yz, \\
j(x, y, z, t) &= -0,65z + \frac{1,185xz}{1 + 0,006x} - \frac{1,185}{1 + 0,006x}z^2 - 0,05yz
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Selanjutnya persamaan (3.2) akan dihitung menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dengan $h = 0,1$. Untuk iterasi yang pertama dengan $t_0 = 0, x_0 = 0,5, y_0 = 0,2$, dan $z_0 = 0,2$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0, y_0, z_0, t_0) \\
&= hf(0,5, 0,2, 0,2, 0) \\
&= 0,1 \left(x(1 - x) - \frac{1,41xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,5xz}{1 + 0,006x} \right) \\
&= -0,004005606682109 \\
l_1 &= hg(x_0, y_0, z_0, t_0) \\
&= hg(0,5, 0,2, 0,2, 0) \\
&= 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,128}{1 + 0,00705x}y^2 - 0,08yz \right) \\
&= -0,004575773398769 \\
m_1 &= hj(x_0, y_0, z_0, t_0) \\
&= hj(0,5, 0,2, 0,2, 0) \\
&= 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1 + 0,006x} - \frac{1,185}{1 + 0,006x}z^2 - 0,05yz \right) \\
&= -0,006111266201396
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= hf \left(x_0 + \frac{1}{2}k_1, y_0 + \frac{1}{2}l_1, z_0 + \frac{1}{2}m_1, t_0 + \frac{1}{2}h \right) \\
&= hf \left(0,5 + \frac{1}{2}(-0,004005606682109), 0,2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(-0,004575773398769), 0,2 + \frac{1}{2}(-0,006111266201396) \right) \\
&\quad hf(0,497997196658945, 0,197712113300616, \\
&\quad 0,196944366899302) \\
&\quad 0,1 \left(x(1-x) - \frac{1,41xy}{1+0,00705x} - \frac{1,5xz}{1+0,006x} \right) \\
&= -0,003502535722264 \\
l_2 &= hg \left(x_0 + \frac{1}{2}k_1, y_0 + \frac{1}{2}l_1, z_0 + \frac{1}{2}m_1, t_0 + \frac{1}{2}h \right) \\
&= hg \left(0,5 + \frac{1}{2}(-0,004005606682109), 0,2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(-0,004575773398769), 0,2 + \frac{1}{2}(-0,006111266201396) \right) \\
&= hg(0,497997196658945, 0,197712113300616, \\
&\quad 0,196944366899302) \\
&= 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1+0,00705x} - \frac{1,128}{1+0,00705x}y^2 - 0,08yz \right) \\
&= -0,004512166585350 \\
m_2 &= hj \left(x_0 + \frac{1}{2}k_1, y_0 + \frac{1}{2}l_1, z_0 + \frac{1}{2}m_1, t_0 + \frac{1}{2}h \right) \\
&= hj \left(0,5 + \frac{1}{2}(-0,004005606682109), 0,2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(-0,004575773398769), 0,2 + \frac{1}{2}(-0,006111266201396) \right) \\
&= hj(0,497997196658945, 0,197712113300616,
\end{aligned}$$

$$0,196944366899302)$$

$$= 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1 + 0,006x} - \frac{1,185}{1 + 0,006x} z^2 - 0,05yz \right)$$

$$= -0,005991063055289$$

$$k_3 = hf \left(x_0 + \frac{1}{2}k_2, y_0 + \frac{1}{2}l_2, z_0 + \frac{1}{2}m_2, t_0 + \frac{1}{2}h \right)$$

$$= hf \left(0,5 + \frac{1}{2}(-0,003502535722264), 0,2 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}(-0,004512166585350), 0,2 + \frac{1}{2}(-0,005991063055289) \right)$$

$$= hf(0,498248732138868, 0,197743916707325, \\ 0,197004468472356)$$

$$= 0,1 \left(x(1 - x) - \frac{1,41xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,5xz}{1 + 0,006x} \right)$$

$$= -0,003523495922601$$

$$l_3 = hg \left(x_0 + \frac{1}{2}k_2, y_0 + \frac{1}{2}l_2, z_0 + \frac{1}{2}m_2, t_0 + \frac{1}{2}h \right)$$

$$= hg \left(0,5 + \frac{1}{2}(-0,003502535722264), 0,2 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}(-0,004512166585350), 0,2 + \frac{1}{2}(-0,005991063055289) \right)$$

$$= hg(0,498248732138868, 0,197743916707325, \\ 0,197004468472356)$$

$$= 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,128}{1 + 0,00705x} y^2 - 0,08yz \right)$$

$$= -0,004508115191422$$

$$\begin{aligned}
m_3 &= hj \left(x_0 + \frac{1}{2}k_2, y_0 + \frac{1}{2}l_2, z_0 + \frac{1}{2}m_2, t_0 + \frac{1}{2}h \right) \\
&= hj \left(0,5 + \frac{1}{2}(-0.003502535722264), 0,2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(-0.004512166585350), 0,2 + \frac{1}{2}(-0.005991063055289) \right) \\
&= hj(0,498248732138868, 0,197743916707325, \\
&\quad 0,197004468472356) \\
&= 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1 + 0,006x} - \frac{1,185}{1 + 0,006x}z^2 - 0,05yz \right) \\
&= -0,005988477510777 \\
k_4 &= hf(x_0 + k_3, y_0 + l_3, z_0 + m_3, t_0 + h) \\
&\quad hf(0,5 - 0,003523495922601, 0,2 - 0,004508115191422, 0,2 - \\
&\quad 0,005988477510777) \\
&= hf(0,496476504077399, 0,195491884808578, \\
&\quad 0,194011522489223) \\
&= 0,1 \left(x(1 - x) - \frac{1,41xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,5xz}{1 + 0,006x} \right) \\
&= -0,003043976357323 \\
l_4 &= hg(x_0 + k_3, y_0 + l_3, z_0 + m_3, t_0 + h) \\
&= hg(0,5 - 0,003523495922601, 0,2 - 0,004508115191422, 0,2 - \\
&\quad 0,005988477510777) \\
&= hg(0,496476504077399, 0,195491884808578, 0,194011522489223) \\
&= 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,128}{1 + 0,00705x}y^2 - 0,08yz \right) \\
&= -0,004441467472178
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_4 &= hj(x_0 + k_3, y_0 + l_3, z_0 + m_3, t_0 + h) \\
&= hj(0,5 - 0,003523495922601, 0,2 - 0,004508115191422, 0,2 - \\
&\quad 0,005988477510777) \\
&= hj(0,496476504077399, 0,195491884808578, \\
&\quad 0,194011522489223) \\
&= 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1 + 0,006x} - \frac{1,185}{1 + 0,006x} z^2 - 0,05yz \right) \\
&= -0,005867259710729
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= 0,5 + \frac{1}{6}(-0,004005606682109 + 2(-0,003502535722264) + \\
&\quad 2(-0,003523495922601) + (-0,003043976357323)) \\
&= 0,496483058945140 \\
y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\
&= 0,2 + \frac{1}{6}(-0,004575773398769 + 2(-0,004512166585350) + \\
&\quad 2(-0,004508115191422) - 0,004441467472178) \\
&= 0,195490365929252 \\
z_1 &= z_0 + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\
&= 0,2 + \frac{1}{6}(-0,006111266201396 + 2(-0,005991063055289) + \\
&\quad 2(-0,005988477510777) + (-0,005867259710729)) \\
&= 0,194010398825957
\end{aligned}$$

Untuk iterasi yang kedua dengan $t_1 = 0,1$, $x_1 = 0,496483058945140$, $y_1 = 0,195490365929252$, dan $z_1 = 0,194010398825957$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_1, y_1, z_1, t_1) \\
 &= hf(0,496483058945140, 0,195490365929252, \\
 &\quad 0,194010398825957) \\
 &= 0,1 \left(x(1-x) - \frac{1,41xy}{1+0,00705x} - \frac{1,5xz}{1+0,006x} \right) \\
 &= -0,003044151401091 \\
 l_1 &= hg(x_1, y_1, z_1, t_1) \\
 &= hg(0,496483058945140, 0,195490365929252, \\
 &\quad 0,194010398825957) \\
 &= 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1+0,00705x} - \frac{1,128}{1+0,00705x} y^2 - 0,08yz \right) \\
 &= -0,004441254095599 \\
 m_1 &= hj(x_1, y_1, z_1, t_1) \\
 &= hj(0,496483058945140, 0,195490365929252, \\
 &\quad 0,194010398825957) \\
 &= 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1+0,006x} - \frac{1,185}{1+0,006x} z^2 - 0,05yz \right) \\
 &= -0,005867048520684 \\
 k_2 &= hf \left(x_1 + \frac{1}{2}k_1, y_1 + \frac{1}{2}l_1, z_1 + \frac{1}{2}m_1, t_1 + \frac{1}{2}h \right) \\
 &= hf \left(0,496483058945140 + \frac{1}{2}(-0,003044151401091), \right. \\
 &\quad \left. 0,195490365929252 + \frac{1}{2}(-0,004441254095599), \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0,194010398825957 + \frac{1}{2}(-0,005867048520684)) \\
= & hf(0,494960983244594, 0,193269738881453, \\
& 0,191076874565615) \\
= & 0,1 \left(x(1-x) - \frac{1,41xy}{1+0,00705x} - \frac{1,5xz}{1+0,006x} \right) \\
= & -0,002588168579847 \\
l_2 = & hg \left(x_1 + \frac{1}{2}k_1, y_1 + \frac{1}{2}l_1, z_1 + \frac{1}{2}m_1, t_1 + \frac{1}{2}h \right) \\
= & hg \left(0,496483058945140 + \right. \\
& \frac{1}{2}(-0,003044151401091), 0,195490365929252 + \\
& \frac{1}{2}(-0,004441254095599), 0,194010398825957 + \\
& \left. \frac{1}{2}(-0,005867048520684) \right) \\
= & hg(0,494960983244594, 0,193269738881453, \\
& 0,191076874565615) \\
= & 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1+0,00705x} - \frac{1,128}{1+0,00705x}y^2 - 0,08yz \right) \\
= & -0,004371023053671 \\
m_2 = & hj \left(x_1 + \frac{1}{2}k_1, y_1 + \frac{1}{2}l_1, z_1 + \frac{1}{2}m_1, t_1 + \frac{1}{2}h \right) \\
= & hj \left(0,496483058945140 + \frac{1}{2}(-0,003044151401091), \right. \\
& 0,195490365929252 + \frac{1}{2}(-0,004441254095599), \\
& \left. 0,194010398825957 + \frac{1}{2}(-0,005867048520684) \right) \\
= & hj(0,494960983244594, 0,193269738881453,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0,191076874565615) \\
& = 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1 + 0,006x} - \frac{1,185}{1 + 0,006x} z^2 - 0,05yz \right) \\
& = -0,005744288137734 \\
k_3 & = hf \left(x_1 + \frac{1}{2} k_2, y_1 + \frac{1}{2} l_2, z_1 + \frac{1}{2} m_2, t_1 + \frac{1}{2} h \right) \\
& = hf \left(0,496483058945140 + \right. \\
& \quad \frac{1}{2} (-0,002588168579847), 0,195490365929252 + \\
& \quad \frac{1}{2} (-0,004371023053671), 0,194010398825957 + \\
& \quad \left. \frac{1}{2} (-0,005744288137734) \right) \\
& = hf(0,495188974655217, 0,193304854402417, \\
& \quad 0,191138254757090) \\
& = 0,1 \left(x(1 - x) - \frac{1,41xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,5xz}{1 + 0,006x} \right) \\
& = -0,002607598805461 \\
l_3 & = hg \left(x_1 + \frac{1}{2} k_2, y_1 + \frac{1}{2} l_2, z_1 + \frac{1}{2} m_2, t_1 + \frac{1}{2} h \right) \\
& = hg \left(0,496483058945140 + \frac{1}{2} (-0,002588168579847), \right. \\
& \quad 0,195490365929252 + \frac{1}{2} (-0,004371023053671), \\
& \quad \left. 0,194010398825957 + \frac{1}{2} (-0,005744288137734) \right) \\
& = hg(0,495188974655217, 0,193304854402417, \\
& \quad 0,191138254757090) \\
& = 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,128}{1 + 0,00705x} y^2 - 0,08yz \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -0,004367731666734 \\
m_3 &= hj \left(x_1 + \frac{1}{2}k_2, y_1 + \frac{1}{2}l_2, z_1 + \frac{1}{2}m_2, t_1 + \frac{1}{2}h \right) \\
&= hj \left(0,496483058945140 + \right. \\
&\quad \frac{1}{2}(-0,002588168579847), 0,195490365929252 + \\
&\quad \frac{1}{2}(-0,004371023053671), 0,194010398825957 + \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(-0,005744288137734) \right) \\
&= hj(0,495188974655217, 0,193304854402417, \\
&\quad 0,191138254757090) \\
&= 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1 + 0,006x} - \frac{1,185}{1 + 0,006x}z^2 - 0,05yz \right) \\
&= -0,005742413766250 \\
k_4 &= hf(x_1 + k_3, y_1 + l_3, z_1 + m_3, t_1 + h) \\
&\quad hf(0,496483058945140 - \\
&\quad 0,002607598805461, 0,195490365929252 - \\
&\quad 0,004367731666734, 0,194010398825957 - 0,005742413766250) \\
&= hf(0,493875460139679, \\
&\quad 0,191122634262518, 0,188267985059707) \\
&= 0,1 \left(x(1 - x) - \frac{1,41xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,5xz}{1 + 0,006x} \right) \\
&= -0,002172605566038 \\
l_4 &= hg(x_1 + k_3, y_1 + l_3, z_1 + m_3, t_1 + h) \\
&= hg(0,496483058945140 - 0,002607598805461, \\
&\quad 0,195490365929252 - 0,004367731666734,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0,194010398825957 - 0,005742413766250) \\
= & hg(0,493875460139679, 0,191122634262518, \\
& 0,188267985059707) \\
= & 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,128}{1 + 0,00705x} y^2 - 0,08yz \right) \\
= & -0,004295312744924 \\
m_4 = & hj(x_1 + k_3, y_1 + l_3, z_1 + m_3, t_1 + h) \\
= & hj(0,496483058945140 - \\
& 0,002607598805461, 0,195490365929252 - \\
& 0,004367731666734, 0,194010398825957 - 0,005742413766250) \\
= & hj(0,493875460139679, 0,191122634262518, \\
& 0,188267985059707) \\
= & 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1 + 0,006x} - \frac{1,185}{1 + 0,006x} z^2 - 0,05yz \right) \\
= & -0,005619445973949
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
x_2 = & x_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
= & 0,496483058945140 + \\
& \frac{1}{6}(-0,003044151401091 + 2(-0,002588168579847) + \\
& 2(-0,002607598805461) + (-0,002172605566038)) \\
= & 0,493881676988849 \\
y_2 = & y_1 + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\
= & 0,195490365929252 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6}(-0,004441254095599 + 2(-0,004371023053671) + \\
& 2(-0,004367731666734) - 0,004295312744924) \\
& = 0,191121353215697
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_2 &= z_1 + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\
&= 0,194010398825957 + \\
& \frac{1}{6}(-0,005867048520684 + 2(-0,005744288137734) + \\
& 2(-0,005742413766250) + (-0,005619445973949)) \\
&= 0,188267082442190
\end{aligned}$$

Untuk iterasi yang ketiga dengan $t_2 = 0,2$, $x_2 = 0,493881676988849$, $y_2 = 0,191121353215697$, dan $z_2 = 0,188267082442190$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_2, y_2, z_2, t_2) \\
&= hf(0,493881676988849, 0,191121353215697, 0,188267082442190) \\
&= 0,1 \left(x(1-x) - \frac{1,41xy}{1+0,00705x} - \frac{1,5xz}{1+0,006x} \right) \\
&= -0,002172783287373
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_1 &= hg(x_2, y_2, z_2, t_2) \\
&= hg(0,493881676988849, 0,191121353215697, 0,188267082442190) \\
&= 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1+0,00705x} - \frac{1,128}{1+0,00705x} y^2 - 0,08yz \right) \\
&= -0,004295121776096
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= hj(x_2, y_2, z_2, t_2) \\
&= hj(0,493881676988849, 0,191121353215697, 0,188267082442190)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1 + 0,006x} - \frac{1,185}{1 + 0,006x} z^2 - 0,05yz \right) \\
&= -0,005619259715906 \\
k_2 &= hf \left(x_2 + \frac{1}{2} k_1, y_2 + \frac{1}{2} l_1, z_2 + \frac{1}{2} m_1, t_2 + \frac{1}{2} h \right) \\
&= hf \left(0,493881676988849 + \right. \\
&\quad \frac{1}{2} (-0,002172783287373), 0,191121353215697 + \\
&\quad \frac{1}{2} (-0,004295121776096), 0,188267082442190 + \\
&\quad \left. \frac{1}{2} (-0,005619259715906) \right) \\
&= hf(0,492795285345162, 0,188973792327649, \\
&\quad 0,185457452584237) \\
&= 0,1 \left(x(1-x) - \frac{1,41xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,5xz}{1 + 0,006x} \right) \\
&= -0,001758879770769 \\
l_2 &= hg \left(x_2 + \frac{1}{2} k_1, y_2 + \frac{1}{2} l_1, z_2 + \frac{1}{2} m_1, t_2 + \frac{1}{2} h \right) \\
&= hg \left(0,493881676988849 + \frac{1}{2} (-0,002172783287373), \right. \\
&\quad 0,191121353215697 + \frac{1}{2} (-0,004295121776096), \\
&\quad \left. 0,188267082442190 + \frac{1}{2} (-0,005619259715906) \right) \\
&= hg(0,492795285345162, 0,188973792327649, \\
&\quad 0,185457452584237) \\
&= 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,128}{1 + 0,00705x} y^2 - 0,08yz \right) \\
&= -0,004220020574452
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_2 &= hj \left(x_2 + \frac{1}{2}k_1, y_2 + \frac{1}{2}l_1, z_2 + \frac{1}{2}m_1, t_2 + \frac{1}{2}h \right) \\
&= hj \left(0,493881676988849 + \right. \\
&\quad \frac{1}{2}(-0,002172783287373), 0,191121353215697 + \\
&\quad \frac{1}{2}(-0,004295121776096), 0,188267082442190 + \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(-0,005619259715906) \right) \\
&= hj(0,492795285345162, 0,188973792327649, \\
&\quad 0,185457452584237) \\
&= 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1 + 0,006x} - \frac{1,185}{1 + 0,006x} z^2 - 0,05yz \right) \\
&= -0,005495605531053 \\
k_3 &= hf \left(x_2 + \frac{1}{2}k_2, y_2 + \frac{1}{2}l_2, z_2 + \frac{1}{2}m_2, t_1 + \frac{1}{2}h \right) \\
&= hf \left(0,493881676988849 + \frac{1}{2}(-0,001758879770769), \right. \\
&\quad 0,191121353215697 + \frac{1}{2}(-0,004220020574452), \\
&\quad \left. 0,188267082442190 + \frac{1}{2}(-0,005495605531053) \right) \\
&= hf(0,493002237103464, 0,189011342928471, 0,185519279676664) \\
&= 0,1 \left(x(1-x) - \frac{1,41xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,5xz}{1 + 0,006x} \right) \\
&= -0,001776945101590 \\
l_3 &= hg \left(x_2 + \frac{1}{2}k_2, y_2 + \frac{1}{2}l_2, z_2 + \frac{1}{2}m_2, t_1 + \frac{1}{2}h \right) \\
&= hg \left(0,493881676988849 + \frac{1}{2}(-0,001758879770769), \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0,191121353215697 + \frac{1}{2}(-0,004220020574452), \\
& 0,188267082442190 + \frac{1}{2}(-0,005495605531053)) \\
= & hg(0,493002237103464, 0,189011342928471, 0,185519279676664) \\
= & 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,128}{1 + 0,00705x}y^2 - 0,08yz \right) \\
= & -0,004217362795695 \\
m_3 = & hj \left(x_2 + \frac{1}{2}k_2, y_2 + \frac{1}{2}l_2, z_2 + \frac{1}{2}m_2, t_1 + \frac{1}{2}h \right) \\
= & hj \left(0,493881676988849 + \right. \\
& \frac{1}{2}(-0,001758879770769), 0,191121353215697 + \\
& \frac{1}{2}(-0,004220020574452), 0,188267082442190 + \\
& \left. \frac{1}{2}(-0,005495605531053) \right) \\
= & hj(0,493002237103464, 0,189011342928471, 0,185519279676664) \\
= & 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1 + 0,006x} - \frac{1,185}{1 + 0,006x}z^2 - 0,05yz \right) \\
= & -0,005494299790747 \\
k_4 = & hf(x_2 + k_3, y_2 + l_3, z_2 + m_3, t_2 + h) \\
= & hf(0,493881676988849 - 0,001776945101590, \\
& 0,191121353215697 - 0,004217362795695, \\
& 0,188267082442190 - 0,005494299790747) \\
= & hf(0,492104731887259, \\
& 0,186903990420002, 0,182772782651443)
\end{aligned}$$

$$= 0,1 \left(x(1-x) - \frac{1,41xy}{1+0,00705x} - \frac{1,5xz}{1+0,006x} \right)$$

$$= -0,001381844629410$$

$$l_4 = hg(x_2 + k_3, y_2 + l_3, z_2 + m_3, t_2 + h)$$

$$= hg(0,493881676988849 - 0,001776945101590,$$

$$0,191121353215697 - 0,004217362795695,$$

$$0,188267082442190 - 0,005494299790747)$$

$$= hg(0,492104731887259, 0,186903990420002,$$

$$0,182772782651443)$$

$$= 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1+0,00705x} - \frac{1,128}{1+0,00705x} y^2 - 0,08yz \right)$$

$$= -0,004140776298368$$

$$m_4 = hj(x_2 + k_3, y_2 + l_3, z_2 + m_3, t_2 + h)$$

$$= hj(0,493881676988849 - 0,001776945101590,$$

$$0,191121353215697 - 0,004217362795695,$$

$$0,188267082442190 - 0,005494299790747)$$

$$= hj(0,492104731887259, 0,186903990420002, 0,182772782651443)$$

$$= 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1+0,006x} - \frac{1,185}{1+0,006x} z^2 - 0,05yz \right)$$

$$= -0,005371069997481$$

Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$x_3 = x_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 0,493881676988849 +$$

$$\frac{1}{6}(-0,002172783287373 + 2(-0,001758879770769) +$$

$$\begin{aligned}
& 2(-0,001776945101590) + (-0,001381844629410)) \\
& = 0,492110630711932 \\
y_3 &= y_2 + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\
&= 0,191121353215697 + \\
& \quad \frac{1}{6}(-0,004295121776096 + 2(-0,004220020574452) + \\
& \quad 2(-0,004217362795695) - 0,004140776298368) \\
&= 0,186902909079904 \\
z_3 &= z_2 + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\
&= 0,188267082442190 + \\
& \quad \frac{1}{6}(-0,005619259715906 + 2(-0,005495605531053) + \\
& \quad 2(-0,005494299790747) + (-0,005371069997481)) \\
&= 0,182772059049359
\end{aligned}$$

Untuk iterasi yang keempat dengan $t_3 = 0,3$, $x_1 = 0,492110630711932$, $y_1 = 0,186902909079904$, dan $z_1 = 0,186902909079904$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_3, y_3, z_3, t_3) \\
&= hf(0,492110630711932, 0,186902909079904, 0,182772059049359) \\
&= 0,1 \left(x(1-x) - \frac{1,41xy}{1+0,00705x} - \frac{1,5xz}{1+0,006x} \right) \\
&= -0,001382022441834 \\
l_1 &= hg(x_3, y_3, z_3, t_3) \\
&= hg(0,492110630711932, 0,186902909079904, 0,182772059049359)
\end{aligned}$$

$$= 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,128}{1 + 0,00705x} y^2 - 0,08yz \right)$$

$$= -0,004140604873976$$

$$m_1 = hj(x_3, y_3, z_3, t_3)$$

$$= hj(0,492110630711932, 0,186902909079904, 0,182772059049359)$$

$$= 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1 + 0,006x} - \frac{1,185}{1 + 0,006x} z^2 - 0,05yz \right)$$

$$= -0,005370904971313$$

$$k_2 = hf \left(x_3 + \frac{1}{2}k_1, y_3 + \frac{1}{2}l_1, z_3 + \frac{1}{2}m_1, t_3 + \frac{1}{2}h \right)$$

$$= hf \left(0,492110630711932 + \frac{1}{2}(-0,001382022441834), \right.$$

$$0,186902909079904 + \frac{1}{2}(-0,004140604873976),$$

$$\left. 0,182772059049359 + \frac{1}{2}(-0,005370904971313) \right)$$

$$= hf(0,491419619491015, 0,184832606642916,$$

$$0,180086606563703)$$

$$= 0,1 \left(x(1-x) - \frac{1,41xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,5xz}{1 + 0,006x} \right)$$

$$= -0,001005915391971$$

$$l_2 = hg \left(x_3 + \frac{1}{2}k_1, y_3 + \frac{1}{2}l_1, z_3 + \frac{1}{2}m_1, t_3 + \frac{1}{2}h \right)$$

$$= hg \left(0,492110630711932 + \frac{1}{2}(-0,001382022441834), \right.$$

$$0,186902909079904 + \frac{1}{2}(-0,004140604873976),$$

$$\left. 0,182772059049359 + \frac{1}{2}(-0,005370904971313) \right)$$

$$= hg(0,491419619491015, 0,184832606642916,$$

$$\begin{aligned}
& 0,180086606563703) \\
& = 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,128}{1 + 0,00705x} y^2 - 0,08yz \right) \\
& = -0,004062080481168 \\
m_2 & = hj \left(x_3 + \frac{1}{2} k_1, y_3 + \frac{1}{2} l_1, z_3 + \frac{1}{2} m_1, t_3 + \frac{1}{2} h \right) \\
& = hj \left(0,492110630711932 + \frac{1}{2} (-0,001382022441834), \right. \\
& \quad 0,186902909079904 + \frac{1}{2} (-0,004140604873976), \\
& \quad \left. 0,182772059049359 + \frac{1}{2} (-0,005370904971313) \right) \\
& = hj(0,491419619491015, 0,184832606642916, \\
& \quad 0,180086606563703) \\
& = 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1 + 0,006x} - \frac{1,185}{1 + 0,006x} z^2 - 0,05yz \right) \\
& = -0,005247662622325 \\
k_3 & = hf \left(x_3 + \frac{1}{2} k_2, y_3 + \frac{1}{2} l_2, z_3 + \frac{1}{2} m_2, t_3 + \frac{1}{2} h \right) \\
& = hf \left(0,492110630711932 + \right. \\
& \quad \frac{1}{2} (-0,001005915391971), 0,186902909079904 + \\
& \quad \frac{1}{2} (-0,004062080481168), 0,182772059049359 + \\
& \quad \left. \frac{1}{2} (-0,005247662622325) \right) \\
& = hf(0,491607673015946, 0,184871868839320, 0,180148227738197) \\
& = 0,1 \left(x(1-x) - \frac{1,41xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,5xz}{1 + 0,006x} \right) \\
& = -0,001022756198543
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_3 &= hg \left(x_3 + \frac{1}{2}k_2, y_3 + \frac{1}{2}l_2, z_3 + \frac{1}{2}m_2, t_3 + \frac{1}{2}h \right) \\
&= hg \left(0,492110630711932 + \frac{1}{2}(-0,001005915391971), \right. \\
&\quad 0,186902909079904 + \frac{1}{2}(-0,004062080481168), \\
&\quad \left. 0,182772059049359 + \frac{1}{2}(-0,005247662622325) \right) \\
&= hg(0,491607673015946, 0,184871868839320, 0,180148227738197) \\
&= 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,128}{1 + 0,00705x}y^2 - 0,08yz \right) \\
&= -0,004059950793295 \\
m_3 &= hj \left(x_3 + \frac{1}{2}k_2, y_3 + \frac{1}{2}l_2, z_3 + \frac{1}{2}m_2, t_3 + \frac{1}{2}h \right) \\
&= hj \left(0,492110630711932 + \frac{1}{2}(-0,001005915391971), \right. \\
&\quad 0,186902909079904 + \frac{1}{2}(-0,004062080481168), \\
&\quad \left. 0,182772059049359 + \frac{1}{2}(-0,005247662622325) \right) \\
&= hj(0,491607673015946, 0,184871868839320, 0,180148227738197) \\
&= 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1 + 0,006x} - \frac{1,185}{1 + 0,006x}z^2 - 0,05yz \right) \\
&= -0,005246809977466 \\
k_4 &= hf(x_3 + k_3, y_3 + l_3, z_3 + m_3, t_2 + h) \\
&= hf(0,492110630711932 - 0,001022756198543, \\
&\quad 0,186902909079904 - 0,004059950793295, \\
&\quad 0,182772059049359 - 0,005246809977466) \\
&= hf(0,491087874513389, 0,182842958286609,
\end{aligned}$$

$$0,177525249071893)$$

$$= 0,1 \left(x(1-x) - \frac{1,41xy}{1+0,00705x} - \frac{1,5xz}{1+0,006x} \right)$$

$$= -0,0006635826166587755$$

$$l_4 = hg(x_3 + k_3, y_3 + l_3, z_3 + m_3, t_2 + h)$$

$$= hg(0,492110630711932 - 0,001022756198543,$$

$$0,186902909079904 -$$

$$0,004059950793295, 0,182772059049359 - 0,005246809977466)$$

$$= hg(0,491087874513389, 0,182842958286609,$$

$$0,177525249071893)$$

$$= 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1+0,00705x} - \frac{1,128}{1+0,00705x} y^2 - 0,08yz \right)$$

$$= -0,003980516769034$$

$$m_4 = hj(x_3 + k_3, y_3 + l_3, z_3 + m_3, t_2 + h)$$

$$hj(0,492110630711932 - 0,001022756198543,$$

$$= 0,186902909079904 - 0,004059950793295,$$

$$0,182772059049359 - 0,005246809977466)$$

$$= hj(0,491087874513389, 0,182842958286609,$$

$$0,177525249071893)$$

$$= 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1+0,006x} - \frac{1,185}{1+0,006x} z^2 - 0,05yz \right)$$

$$= -0,005124480523896$$

Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 x_4 &= x_3 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
 &= 0,492110630711932 + \\
 &\quad \frac{1}{6}(-0,001382022441834 + 2(-0,001005915391971) + \\
 &\quad 2(-0,001022756198543) + (-0,0006635826166587755)) \\
 &= 0,491093472672012 \\
 y_4 &= y_3 + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\
 &= 0,186902909079904 + \\
 &\quad \frac{1}{6}(-0,004140604873976 + 2(-0,004062080481168) + \\
 &\quad 2(-0,004059950793295) - 0,003980516769034) \\
 &= 0,182842045047915 \\
 z_4 &= z_3 + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\
 &= 0,182772059049359 + \\
 &\quad \frac{1}{6}(-0,005370904971313 + 2(-0,005247662622325) + \\
 &\quad 2(-0,005246809977466) + (-0,005124480523896)) \\
 &= 0,177524670600227
 \end{aligned}$$

Untuk iterasi yang kelima dengan $t_4 = 0,4$, $x_4 = 0,491093472672012$, $y_4 = 0,182842045047915$, dan $z_4 = 0,177524670600227$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_4, y_4, z_4, t_4) \\
 &= hf(0,491093472672012, 0,182842045047915, 0,177524670600227)
 \end{aligned}$$

$$= 0,1 \left(x(1-x) - \frac{1,41xy}{1+0,00705x} - \frac{1,5xz}{1+0,006x} \right)$$

$$= -0,0006637586645334703$$

$$l_1 = hg(x_4, y_4, z_4, t_4)$$

$$= hg(0,491093472672012, 0,182842045047915, 0,177524670600227)$$

$$= 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1+0,00705x} - \frac{1,128}{1+0,00705x} y^2 - 0,08yz \right)$$

$$= -0,003980362459229$$

$$m_1 = hj(x_4, y_4, z_4, t_4)$$

$$= hj(0,491093472672012, 0,182842045047915, 0,177524670600227)$$

$$= 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1+0,006x} - \frac{1,185}{1+0,006x} z^2 - 0,05yz \right)$$

$$= -0,005124333681249$$

$$k_2 = hf \left(x_4 + \frac{1}{2}k_1, y_4 + \frac{1}{2}l_1, z_4 + \frac{1}{2}m_1, t_4 + \frac{1}{2}h \right)$$

$$= hf \left(0,491093472672012 + \frac{1}{2}(-0,0006637586645334703), \right.$$

$$0,182842045047915 + \frac{1}{2}(-0,003980362459229),$$

$$0,177524670600227 + \frac{1}{2}(-0,005124333681249) \Big)$$

$$= hf(0,490761593339745, 0,180851863818300,$$

$$0,174962503759603)$$

$$= 0,1 \left(x(1-x) - \frac{1,41xy}{1+0,00705x} - \frac{1,5xz}{1+0,006x} \right)$$

$$= -0,0003217792912201367$$

$$\begin{aligned}
l_2 &= hg \left(x_4 + \frac{1}{2}k_1, y_4 + \frac{1}{2}l_1, z_4 + \frac{1}{2}m_1, t_4 + \frac{1}{2}h \right) \\
&= hg \left(0,491093472672012 + \frac{1}{2}(-0,000667586645334703), \right. \\
&\quad 0,182842045047915 + \frac{1}{2}(-0,003980362459229), \\
&\quad \left. 0,177524670600227 + \frac{1}{2}(-0,005124333681249) \right) \\
&= hg(0,490761593339745, 0,180851863818300, \\
&\quad 0,174962503759603) \\
&= 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,128}{1 + 0,00705x}y^2 - 0,08yz \right) \\
&= -0,003899602939497 \\
m_2 &= hj \left(x_4 + \frac{1}{2}k_1, y_4 + \frac{1}{2}l_1, z_4 + \frac{1}{2}m_1, t_4 + \frac{1}{2}h \right) \\
&= hj \left(0,491093472672012 + \frac{1}{2}(-0,0006637586645334703), \right. \\
&\quad 0,182842045047915 + \frac{1}{2}(-0,003980362459229), \\
&\quad \left. 0,177524670600227 + \frac{1}{2}(-0,005124333681249) \right) \\
&= hj(0,490761593339745, 0,180851863818300, \\
&\quad 0,174962503759603) \\
&= 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1 + 0,006x} - \frac{1,185}{1 + 0,006x}z^2 - 0,05yz \right) \\
&= -0,005002516698608 \\
k_3 &= hf \left(x_4 + \frac{1}{2}k_2, y_4 + \frac{1}{2}l_2, z_4 + \frac{1}{2}m_2, t_4 + \frac{1}{2}h \right) \\
&= hf \left(0,491093472672012 + \frac{1}{2}(-0,0003217792912201367), \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0,182842045047915 + \frac{1}{2}(-0,003899602939497), \\
& 0,177524670600227 + \frac{1}{2}(-0,005002516698608)) \\
= & hf(0,490932583026402, 0,180892243578167, \\
& 0,175023412250923) \\
= & 0,1 \left(x(1-x) - \frac{1,41xy}{1+0,00705x} - \frac{1,5xz}{1+0,006x} \right) \\
= & -0,0003375153451427055 \\
l_3 = & hg \left(x_4 + \frac{1}{2}k_2, y_4 + \frac{1}{2}l_2, z_4 + \frac{1}{2}m_2, t_4 + \frac{1}{2}h \right) \\
= & hg \left(0,491093472672012 + \frac{1}{2}(-0,0003217792912201367), \right. \\
& 0,182842045047915 + \frac{1}{2}(-0,003899602939497), \\
& 0,177524670600227 + \frac{1}{2}(-0,005002516698608)) \\
= & hg(0,490932583026402, 0,180892243578167, \\
& 0,175023412250923) \\
= & 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1+0,00705x} - \frac{1,128}{1+0,00705x}y^2 - 0,08yz \right) \\
= & -0,003897913481014 \\
m_3 = & hj \left(x_4 + \frac{1}{2}k_2, y_4 + \frac{1}{2}l_2, z_4 + \frac{1}{2}m_2, t_4 + \frac{1}{2}h \right) \\
= & hj \left(0,491093472672012 + \frac{1}{2}(-0,0003217792912201367), \right. \\
& 0,182842045047915 + \frac{1}{2}(-0,003899602939497), \\
& 0,177524670600227 + \frac{1}{2}(-0,005002516698608)) \\
= & hj(0,490932583026402, 0,180892243578167,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0,175023412250923) \\
& = 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1 + 0,006x} - \frac{1,185}{1 + 0,006x} z^2 - 0,05yz \right) \\
& = -0,005002023798737 \\
k_4 & = hf(x_4 + k_3, y_4 + l_3, z_4 + m_3, t_4 + h) \\
& = hf(0,491093472672012 - 0,0003375153451427055, \\
& \quad 0,182842045047915 - 0,003897913481014, \\
& \quad 0,177524670600227 - 0,005002023798737) \\
& = hf(0,490755957326869, 0,178944131566901, \\
& \quad 0,172522646801490) \\
& = 0,1 \left(x(1 - x) - \frac{1,41xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,5xz}{1 + 0,006x} \right) \\
& = -0,00001086767141740275 \\
l_4 & = hg(x_4 + k_3, y_4 + l_3, z_4 + m_3, t_4 + h) \\
& = hg(0,491093472672012 - 0,0003375153451427055, \\
& \quad 0,182842045047915 - 0,003897913481014, \\
& \quad 0,177524670600227 - 0,005002023798737) \\
& = hg(0,490755957326869, 0,178944131566901, \\
& \quad 0,172522646801490) \\
& = 0,1 \left(-0,55y + \frac{1,128xy}{1 + 0,00705x} - \frac{1,128}{1 + 0,00705x} y^2 - 0,08yz \right) \\
& = -0,003816713352214 \\
m_4 & = hj(x_4 + k_3, y_4 + l_3, z_4 + m_3, t_4 + h) \\
& = hj(0,491093472672012 - 0,0003375153451427055, \\
& \quad 0,182842045047915 - 0,003897913481014,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0,177524670600227 - 0,005002023798737) \\
& = hj(0,490755957326869, 0,178944131566901, \\
& \quad 0,172522646801490) \\
& = 0,1 \left(-0,65z + \frac{1,185xz}{1 + 0,006x} - \frac{1,185}{1 + 0,006x} z^2 - 0,05yz \right) \\
& = -0,004881491665919
\end{aligned}$$

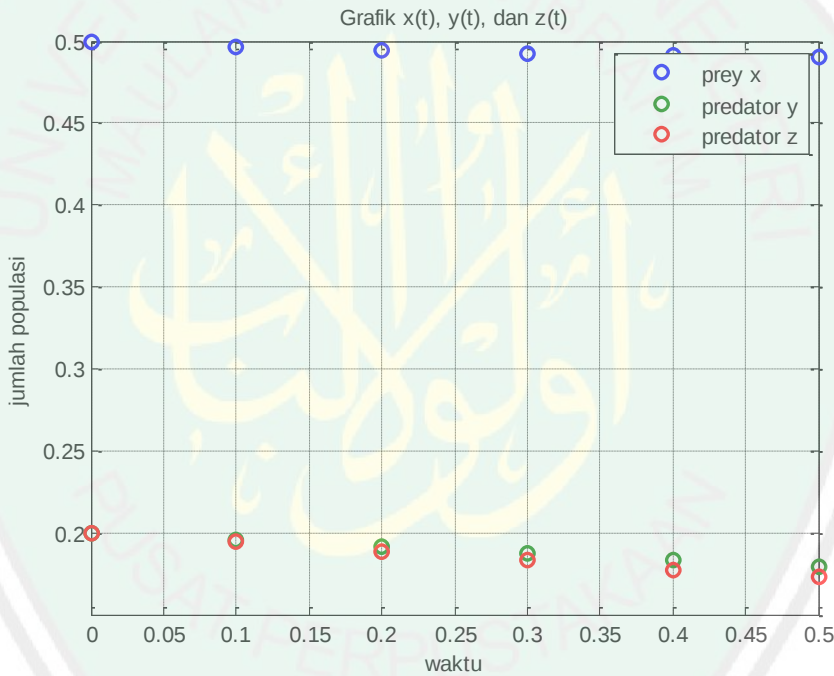
Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
x_5 &= x_4 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= 0,491093472672012 + \frac{1}{6}(-0,0006637586645334703 + \\
&\quad 2(-0,0003217792912201367) + 2(-0,0003375153451427055) + \\
&\quad (-0,00001086767141740275)) \\
&= 0,490761270070566 \\
y_5 &= y_4 + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\
&= 0,182842045047915 + \\
&\quad \frac{1}{6}(-0,003980362459229 + 2(-0,003899602939497) + \\
&\quad 2(-0,003897913481014) - 0,003816713352214) \\
&= 0,178943360272504 \\
z_5 &= z_4 + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\
&= 0,177524670600227 + \\
&\quad \frac{1}{6}(-0,005124333681249 + 2(-0,005002516698608) + \\
&\quad 2(-0,005002023798737) + (-0,004881491665919)) \\
&= 0,172522186209917
\end{aligned}$$

Tabel 3.2 Solusi $x(t), y(t)$, dan $z(t)$ Menggunakan Metode Runge Kutta Orde 4

		Variabel		
r	t	x_{r+1}	y_{r+1}	z_{r+1}
0	0,1	0,496483058945140	0,195490365929252	0,194010398825958
1	0,2	0,493881676988849	0,191121353215696	0,188267082442190
2	0,3	0,492110630711932	0,186902909079903	0,182772059049359
3	0,4	0,491093472672012	0,182842045047914	0,177524670600227
4	0,5	0,490761270070566	0,178943360272503	0,172522186209918

Pada tabel tersebut dapat digambarkan grafiknya menggunakan program Matlab R2013a sebagai berikut:



Gambar 3.1 Grafik $x(t), y(t)$, dan $z(t)$ Saat $t = 0.5$ Menggunakan Runge Kutta Orde 4

3.3 Analisis Galat Metode Runge Kutta Orde 4

Hasil penyelesaian numerik model *predator-prey* tiga spesies dengan metode Runge Kutta orde 4 telah ditunjukkan pada Tabel 3.2. Berdasarkan hasil perhitungan dengan metode tersebut besarnya ketelitian eksak tidak dapat diukur, hal ini disebabkan model *predator-prey* tiga spesies berbentuk sistem persamaan

diferensial nonlinier yang tidak dapat diselesaikan secara analitik atau tidak mempunyai solusi eksak. Oleh karena itu, tidak dapat dihasilkan galat sejatinya.

Dalam penyelesaian numerik ini galat yang digunakan adalah galat relatif hampiran. Galat relatif hampiran metode Runge Kutta orde 4 dirumuskan sebagai berikut:

$$\varepsilon_{RA} = \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}}$$

maka dapat dihasilkan galat relatif metode Runge Kutta orde 4 sebagai berikut:

Tabel 3.4 Galat Relatif $x(t)$
Variabel

r	t	x_{r+1}	Galat = $\frac{x_{r+1}-x_r}{x_{r+1}}$
0	0,1	0,496483058945140	0,007083708077235
1	0,2	0,493881676988849	0,005267216982317
2	0,3	0,492110630711932	0,003598878313917
3	0,4	0,491093472672012	0,002071210668685
4	0,5	0,490761270070566	0,0006769128325839266

Tabel 3.5 Galat Relatif $y(t)$
Variabel

r	t	y_{r+1}	Galat = $\frac{y_{r+1}-y_r}{y_{r+1}}$
0	0,1	0,195490365929252	0,023068318734336
1	0,2	0,191121353215696	0,022859887919615
2	0,3	0,186902909079903	0,022570243323444
3	0,4	0,182842045047914	0,022209683942907
4	0,5	0,178943360272503	0,021787255863944

Tabel 3.6 Galat Relatif $z(t)$
Variabel

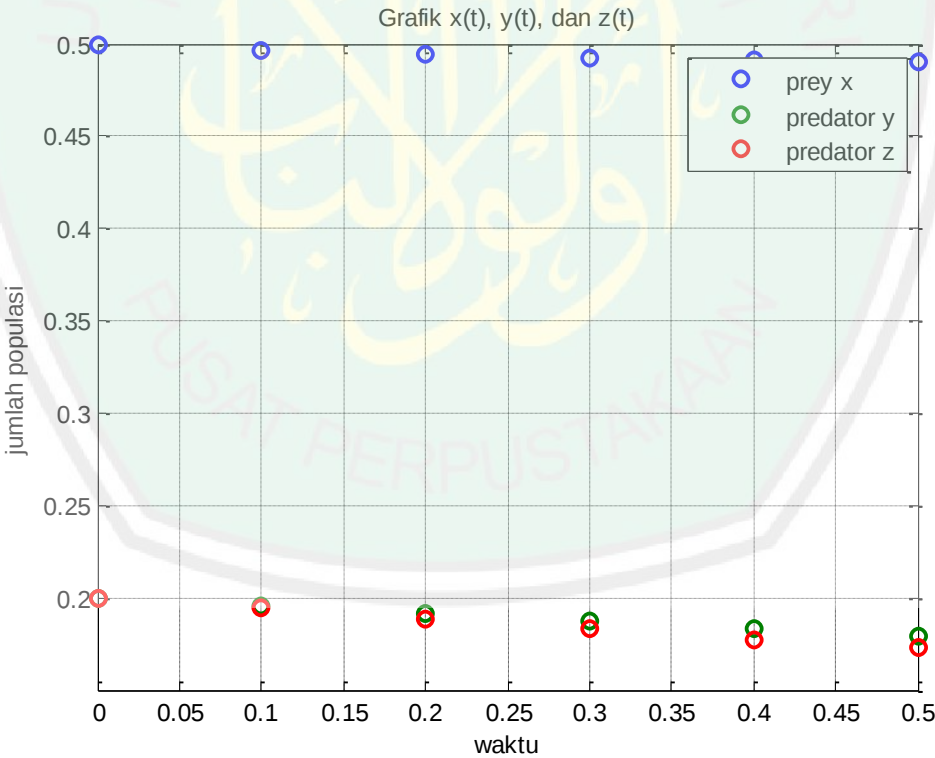
r	t	z_{r+1}	Galat = $\frac{z_{r+1}-z_r}{z_{r+1}}$
0	0,1	0,194010398825958	0,030872578017919
1	0,2	0,188267082442190	0,030506216536986
2	0,3	0,182772059049359	0,030064898439137
3	0,4	0,177524670600227	0,029558643491015
4	0,5	0,172522186209918	0,028996180144751

3.4 Interpretasi Grafik Solusi Model

Berdasarkan penelitian ini, nilai parameter dan nilai awal yang digunakan untuk memperoleh solusi numerik model *predator-prey* tiga spesies dengan menggunakan metode Runge Kutta Orde 4 mengacu pada penelitian yang dilakukan oleh Alebraheem dan Hasan (2012) seperti pada Tabel 3.1, yang mana penelitian tersebut dilakukan terhadap tiga spesies yang terdiri dari *prey x*, *predator y*, dan *predator z*.

Dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4 maka diperoleh grafik $x(t)$, $y(t)$, dan $z(t)$ pada saat t (waktu) dengan nilai parameter pada Tabel 3.1 sebagai berikut:

1. Kasus 1

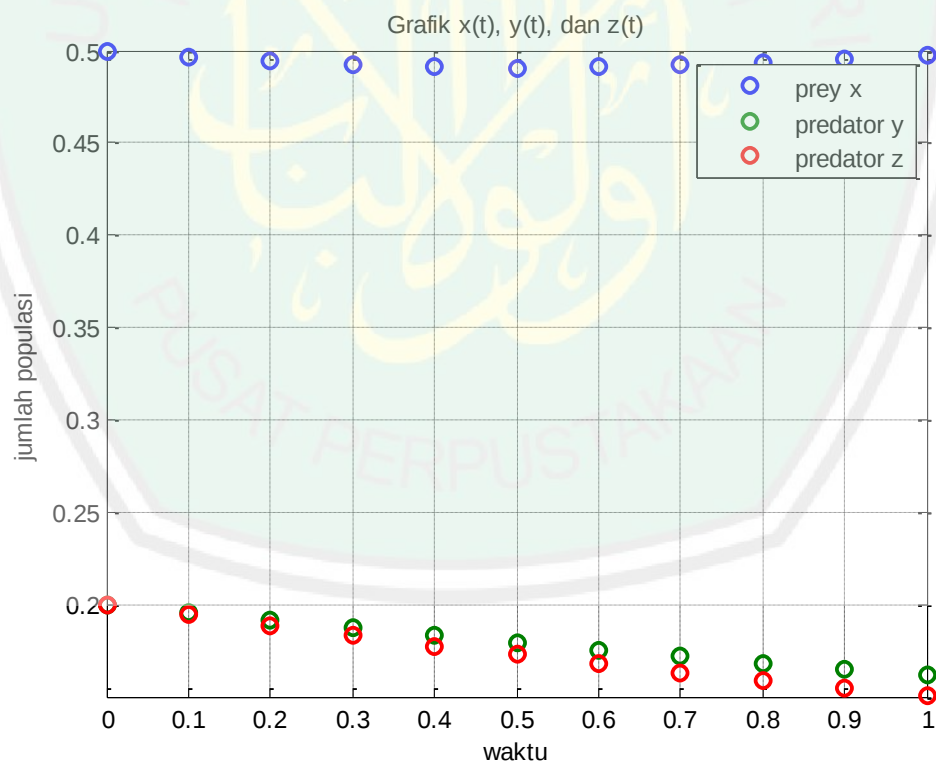


2.

Gambar 3.2 Grafik $x(t)$, $y(t)$, dan $z(t)$ pada Saat $t = 0,5$

Gambar 3.2 menunjukkan populasi $x(t)$, $y(t)$, dan $z(t)$ yang dimulai pada saat $t = 0$ dengan nilai parameter yang telah disajikan pada Tabel 3.1. dengan nilai awal $(x(0) = 0,5, y(0) = 0,2$ dan $z(0) = 0,2)$. Grafik pertumbuhan $x(t)$ bergerak turun terus-menerus yang dimulai pada saat $t = 0$ sampai $t = 0,5$ sebesar $0,490761270070566$. Grafik pertumbuhan predator $y(t)$ juga bergerak turun terus-menerus yang dimulai pada saat $t = 0$ hingga $t = 0,5$ yang mencapai $0,178943360272503$. Pergerakan grafik pertumbuhan $z(t)$ terus-menerus mengalami penurunan hingga $t = 0,5$ yang mencapai $0,172522186209918$.

2. Kasus 2

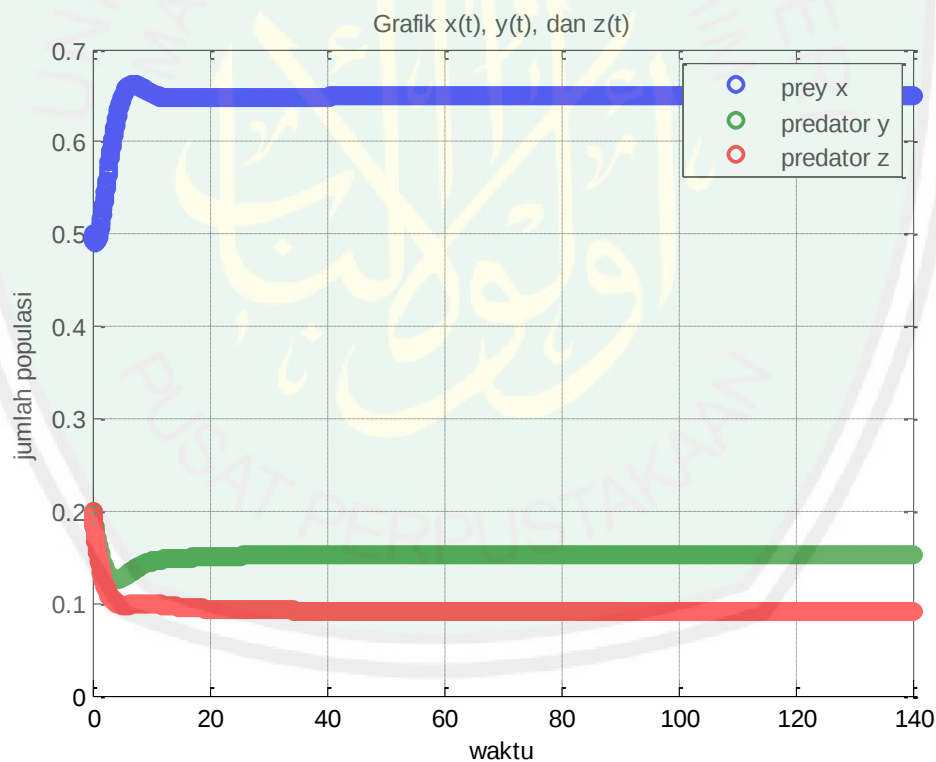


Gambar 3.3 Grafik $x(t)$, $y(t)$, dan $z(t)$ pada Saat $t = 1$

Gambar 3.2 menunjukkan populasi $x(t)$, $y(t)$, dan $z(t)$ yang dimulai pada saat $t = 0$ dengan nilai parameter yang telah disajikan pada Tabel 3.1.

dengan nilai awal $(x(0) = 0,5, y(0) = 0,2$ dan $z(0) = 0,2)$, grafik pertumbuhan $x(t)$ bergerak turun yang dimulai pada saat $t = 0$ sampai $t = 0,5$ yang mencapai $0,490761270070566$, kemudian mulai mengalami peningkatan sampai $t = 1$ yang mencapai $0,497366427407822$. Sedangkan grafik pertumbuhan predator $y(t)$ bergerak turun terus-menerus yang dimulai pada saat $t = 0$ hingga $t = 1$ yang mencapai $0,161924534315696$. Pergerakan grafik pertumbuhan $z(t)$ terus-menerus mengalami penurunan hingga $t = 1$ yang mencapai $0,150996370057924$.

3. Kasus 3



Gambar 3.4 Grafik $x(t), y(t)$, dan $z(t)$ pada Saat $t = 140$

Gambar 3.2 menunjukkan populasi $x(t), y(t)$, dan $z(t)$ yang dimulai pada saat $t = 0$ dengan nilai parameter yang telah disajikan pada Tabel 3.1. dengan nilai awal $(x(0) = 0,5, y(0) = 0,2$ dan $z(0) = 0,2)$. Grafik

pertumbuhan $x(t)$ bergerak naik yang dimulai pada saat $t = 0$ sampai $t = 7$ yang mencapai 0,6618902754261, kemudian mulai mengalami penurunan sampai $t = 140$ yang mencapai 0,6488624421025. Sedangkan grafik pertumbuhan *predator* $y(t)$ bergerak turun dimulai pada saat $t = 1$ hingga $t = 4$ yang mencapai 0,1254937485795, kemudian terus-menerus mengalami kenaikan sampai $t = 140$ sebesar 0,1525069076848. Pergerakan grafik pertumbuhan $z(t)$ terus-menerus mengalami penurunan hingga $t = 5,5$ yang mencapai 0,0979004521558, kemudian bergerak naik sampai $t = 140$ yang mencapai 0,0917437967410. Maka berdasarkan Gambar 3.1 tersebut perubahan populasi dari setiap variabel bergantung pada besar kecilnya parameter-parameter yang mempengaruhi pertumbuhan populasi tersebut.

Dari hasil analisis tersebut, dapat disimpulkan bahwa populasi *prey* dan *predator* mengalami ketidakseimbangan pada perkembangan *predator*. *Predator* pertama terus mengalami peningkatan, sebaliknya *predator* kedua terus-menerus mengalami penurunan dan menuju titik kepunahan. Maka perlu menjaga keseimbangan dari keduanya dengan tetap menjaga populasi *predator* dan *prey*, agar keduanya tetap hidup. Jika populasi *predator* dan *prey* tidak seimbang, maka akan merusak ekosistem keduanya, bahkan ekosistem dengan spesies yang lain. Maka sebagai manusia yang menjadi khalifah di muka bumi, sudah seharusnya untuk tetap menjaga keseimbangan keduanya. Allah Swt. berfirman dalam al-Quran surat al-Mulk/67:3, yaitu:

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَوَاتٍ طِبَاقًا ۚ مَا تَرَىٰ فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِن تَفَوتٍ ۚ فَارْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَىٰ مِن فُطُورٍ ﴿٣﴾

“Allah Swt. yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?” (QS. Al-Mulk/67:3).

Sesungguhnya Allah Swt. menciptakan segala sesuatu tidak lepas dari hukum-hukum serta peraturan-peraturan sehingga semuanya menjadi begitu rapi. Bagaimana susahnya penduduk sebuah planet, jika tidak ada keseimbangan antar planet, sehingga terjadi tabrakan antar planet. Diciptakan berbagai makhluk hidup dengan timbal balik satu dengan yang lain seperti manusia, binatang, dan tumbuhan dalam proses fotosintesis. Akan tetapi keserakahan manusia, yang merusak keseimbangan ekosistem di muka bumi ini. Kerusakan yang dapat menyebabkan kematian seluruh makhluk hidup, yang hal itu sangat merugikan semua makhluk hidup. Untuk menghindari kerusakan-kerusakan alam Allah Swt. memerintahkan manusia sebagai makhluk yang dikaruniai akal untuk menjaganya. Allah Swt. berfirman dalam al-Quran surat al-Baqarah/2:30, yaitu:

وَإِذْ قَالَ رَبُّكَ لِلْمَلٰٓئِكَةِ اِنِّیْ جَاعِلٌ فِی الْاَرْضِ خَلِیْفَةً ۗ قَالُوْۤا اَتَجْعَلُ فِیْهَا مَنْ یُّفْسِدُ فِیْهَا
وَدَسْفِیْكَ الدِّمَآءَ وَحَنُۢنُۤنْ نُّسَبِّحُ بِحَمْدِكَ وَنُقَدِّسُ لَكَ ۗ قَالَ اِنِّیْۤ اَعْلَمُ مَا لَا تَعْلَمُوْنَ ﴿۳۰﴾

“Ingatlah ketika Tuhanmu berfirman kepada para Malaikat: “Sesungguhnya Aku hendak menjadikan seorang khalifah di muka bumi.” mereka berkata: “Mengapa Engkau hendak menjadikan (khalifah) di bumi itu orang yang akan membuat kerusakan padanya dan menumpahkan darah, padahal kami senantiasa bertasbih dengan memuji Engkau dan mensucikan Engkau?” Tuhan berfirman: “Sesungguhnya Aku mengetahui apa yang tidak kamu ketahui” (QS. Al-Baqarah/2:30).

Ayat di atas menjelaskan bahwa Allah Swt. menciptakan manusia dengan dikaruniai kesempurnaan akal sebagai *khalifah* (pemimpin) di muka bumi ini. Manusia merupakan pemimpin bagi makhluk-makhluk lain seperti hewan dan tumbuhan. Tugas seorang pemimpin adalah memakmurkan rakyatnya yang dalam hal ini adalah makhluk hidup lain dengan cara melestarikannya dan menjaga

keseimbangan ekosistem. Cara melestarikan alam dapat dilakukan dengan hal-hal yang kecil seperti membuang sampah pada tempatnya dan tidak membungunya di sungai agar tidak menimbulkan bencana banjir, menetralsir pencemaran udara dengan menanam tumbuhan hijau, dan mengurangi pencemaran udara dengan cara mengurangi pemakaian kendaraan bermotor.

Berdasarkan paparan ayat-ayat tersebut dapat diambil kesimpulan bahwa Allah Swt. menciptakan segala sesuatu dengan seimbang, sama halnya dengan model *predator-prey*, jika salah satu punah maka akan mempengaruhi yang lain. Allah Swt. juga menegaskan bahwa setiap persoalan pasti ada solusinya bahkan yang berkaitan dengan ilmu matematika.

Setiap persamaan matematika memiliki kesulitan yang berbeda-beda dalam mencari solusinya. Oleh karena itu, metode yang digunakan juga berbeda. Begitupula manusia, masing-masing memiliki masalah yang berbeda. Allah Swt. menguji hamba-Nya pasti sesuai dengan kemampuannya. Dalam al-Quran surat al-Baqarah/2:286 dijelaskan bahwasanya Allah Swt. tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai kesanggupannya:

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا إِنْ نَسِينَا أَوْ
أَخْطَأْنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إَصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِنْ قَبْلِنَا رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا
لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ ۖ وَاعْفُ عَنَّا وَارْحَمْنَا ۖ أَنْتَ مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ
الْكَافِرِينَ ﴿٢٨٦﴾

“Allah Swt. tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami bersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebaskan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebaskan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami

memikulnya. beri ma'aflah kami, ampunilah kami, dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, Maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir" (Q.S. Al-Baqarah/2:286).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah Swt. tidak akan membebani hamba-Nya melainkan sesuai dengan kemampuannya. Menurut pandangan Islam setiap masalah ada beberapa penyelesaian yang dapat diambil jalan keluar atau solusi pemecahannya. Ketika suatu masalah itu sulit untuk diselesaikan dengan satu cara, maka hal tersebut pasti ada cara atau penyelesaian yang lain. Dalam Islam Allah Swt. memberikan alternatif untuk hamba-Nya dalam mengerjakan shalat. Allah Swt. tidak memaksa hamba-Nya untuk berdiri dalam melakukan shalat jika tidak mampu mengerjakannya. Apabila tidak dapat berdiri maka boleh shalat dengan duduk, apabila tidak dapat duduk maka boleh dengan tidur miring. Allah Swt. Sang Maha Bijaksana selalu menempatkan sesuatu pada tempatnya dan tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai kemampuannya. Begitu pula dengan permasalahan matematika, ada banyak kasus yang sulit dicari solusinya, salah satunya adalah persamaan nonlinier. Karena sulitnya mencari solusi eksaknya maka dibuatlah metode-metode numerik untuk mencari solusi hampirannya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab 3, maka dapat diambil kesimpulan bahwa dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial nonlinier pada model *predator-prey* tiga spesies dengan menggunakan metode Runge Kutta Orde 4 dapat dilakukan dengan beberapa tahap yakni: (1). Mengidentifikasi nilai parameter dan nilai awal pada sistem persamaan diferensial yaitu variabel $x(0)$, $y(0)$, dan $z(0)$, (2). Menentukan nilai t (waktu) dan besarnya h (ukuran langkah) yang akan ditentukan, (3). Menentukan formulasi metode Runge Kutta orde 4, (4). Menghitung nilai $k_1 - k_4$, $l_1 - l_4$, dan $m_1 - m_4$ dengan menggunakan formulasi yang telah ditentukan, dan (5). Menghitung solusi x_{i+1} , y_{i+1} , dan z_{i+1} dengan mensubstitusikan variabel-variabel yang telah diperoleh pada langkah 4 ke dalam formulasi metode Runge Kutta orde 4.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat dicari solusi model *predator-prey* tiga spesies dengan menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg atau metode berorde tinggi lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

- Alebraheem, J. dan Hasan.Y.A. 2012. Persistence of Predator in a Two Predators-One Prey Model with Non-Periodic Solution. *Applied Mathematical Sciences*, 6 (19): 943-956.
- Andayani, P. 2012. *Analisis Dinamik Model Predator Prey dengan Omnivora*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Brawijaya.
- Baiduri. 2012. *Persamaan Diferensial dan Matematika Model*. Malang: UMM Press.
- Boyce, W.E. dan DiPrima, R.C. 1999. *ODE Architect Companion*. New York: John Willey & Sons, Inc.
- Boyce, W.E. dan DiPrima, R.C. 2009. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems Ninth Edition*. New York: John Willey & Sons, inc.
- Chapra, S.C. dan Canale, R.P. 2010. *Numerical Methods for Engineers Sixth Edition*. New York: McGraw-Hill, inc.
- Conte, S.D dan Boor, C. 1980. *Elementary Numerical Analysis an Algorithmic Approach Third Edition*. New York: McGraw-Hill, inc.
- Didiharyono. 2016. Stability Analysis of One Prey Two Predator Model with Holling Type III Functional Response and Harvesting. *Journal of Math Sciences*, 1 (2): 50-54.
- Finizio, N. dan Ladas, G. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.
- Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa: Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Munir, R. 2010. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.
- Neuhauser, C. 2004. *Calculus for Biology and Medicine*. New Jersey: Pearson Education.
- Pamuntjak, R.J.S. 1990. *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: ITB.
- Ross, S.L. 1984. *Differential Equations Third Edition*. Singapore: John Willey & Sons, Inc.
- Skalski, T.S. dan Gilliam, J.F. 2001. Functional Responses with Predator Interference: Viable Alternatives to The Holling Type II Model. *Journal of Ecology*, 82 (11): 3083-3092.

Suzyanna. 2013. Interaksi antara *Predator-Prey* dengan Faktor Pemanen *Prey*.
Journal of Scientific Modeling & Computation, 1 (1): 58-66.



Lampiran 1: Program Gambar 3.1

```

clc,clf,clear
format long
dt = 0.1;
t = 0:dt:140;
n = length(t);

%parameter
r = 0.75;
alpha = 1.41;
w = 0.65;
h1 = 0.005;
h2 = 0.004;
c1 = 0.08;
c2 = 0.05;
e1 = 0.8;
e2 = 0.79;
beta = 1.5;
u = 0.55;

x(1) = 0.5;
y(1) = 0.2;
z(1) = 0.2;

f = @(x,y,z,t) (x*(1-x)-(alpha*x*y/(1+h1*alpha*x))-
beta*x*z/(1+h2*beta*x));
g = @(x,y,z,t) -u*y+(e1*alpha*x*y/(1+h1*alpha*x))-
(e1*alpha*y^2/(1+h1*alpha*x))-c1*y*z;
j = @(x,y,z,t) -w*z+(e2*beta*x*z/(1+h2*beta*x))-
(e2*beta*z^2/(1+h2*beta*x))-c2*y*z;

for i=1:n-1
    k1 = dt*f(x(i),y(i),z(i),t(i));
    l1 = dt*g(x(i),y(i),z(i),t(i));
    m1 = dt*j(x(i),y(i),z(i),t(i));

    k2 = dt*f(x(i)+(k1/2),y(i)+(l1/2),z(i)+(m1/2),t(i)+(dt/2));
    l2 = dt*g(x(i)+(k1/2),y(i)+(l1/2),z(i)+(m1/2),t(i)+(dt/2));
    m2 = dt*j(x(i)+(k1/2),y(i)+(l1/2),z(i)+(m1/2),t(i)+(dt/2));

    k3 = dt*f(x(i)+(k2/2),y(i)+(l2/2),z(i)+(m2/2),t(i)+(dt/2));
    l3 = dt*g(x(i)+(k2/2),y(i)+(l2/2),z(i)+(m2/2),t(i)+(dt/2));
    m3 = dt*j(x(i)+(k2/2),y(i)+(l2/2),z(i)+(m2/2),t(i)+(dt/2));

    k4 = dt*f(x(i)+k3,y(i)+l3,z(i)+m3,t(i)+dt);
    l4 = dt*g(x(i)+k3,y(i)+l3,z(i)+m3,t(i)+dt);
    m4 = dt*j(x(i)+k3,y(i)+l3,z(i)+m3,t(i)+dt);

    x(i+1) = x(i)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    y(i+1) = y(i)+(l1+2*l2+2*l3+l4)/6;
    z(i+1) = z(i)+(m1+2*m2+2*m3+m4)/6;

end

```

```
plot(t,x , 'o',t,y , 'o',t,z , 'o', 'LineWidth',2);
hold on
```

```
disp ('          t          x          y
z')
disp([t' x' y' z'])
legend ('prey x','predator y','predator z')
xlabel('waktu')
ylabel('jumlah populasi')
title('Grafik x(t), y(t), dan z(t)')
grid on
```



RIWAYAT HIDUP



Nuruddin Syauqi, lahir di Kab. Kediri pada tanggal 28 Maret 1993, biasa dipanggil Syauqi, tinggal di Dsn. Surowono Ds. Canggu Kec. Badas Kab. Kediri. Anak pertama dari Bapak Imam Ma'arif dan Ibu Tri Umi Kholifah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Islamiyah 1 Surowono dan lulus pada tahun 2006, setelah itu melanjutkan ke MTs N Model Pare dan lulus tahun 2009. Kemudian dia melanjutkan pendidikan ke MAN Krecek Pare dan lulus pada tahun 2012. Selanjutnya pada tahun 2012 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

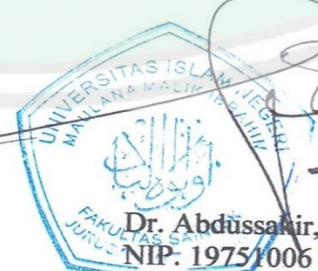
Jln. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nuruddin Syauqi
NIM : 12610098
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Numerik Model *Predator-Prey* Tiga
Spesies Menggunakan Metode Runge Kutta Orde 4
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M.Si
Pembimbing II : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan
1	15 April 2016	Konsultasi Bab I dan II	1.
2	21 April 2016	Revisi Bab II	2.
3	9 Mei 2016	Acc Bab I dan II	3.
4	4 Oktober 2016	Konsultasi Bab III	4.
5	10 Oktober 2016	Revisi Bab III	5.
6	14 Oktober 2016	Konsultasi Bab IV	6.
7	1 November 2016	Acc Bab III dan IV	7.
8	2 November 2016	Konsultasi Bab I, II, dan III Agama	8.
9	3 November 2016	Revisi Bab I, II, dan III Agama	9.
10	9 November 2016	Acc Agama	10.
11	9 November 2016	Acc Keseluruhan	11.

Malang, 9 November 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001