ANALISIS TRANSFORMASI LAPLACE PADA
STRING-BEAM MODEL

SKRIPSI

OLEH
LILIS SURYANI
NIM. 12610012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

ANALISIS TRANSFORMASI LAPLACE PADA
STRING-BEAM MODEL

SKRIPSI

OLEH
LILIS SURYANI
NIM. 12610012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

ANALISIS TRANSFORMASI LAPLACE PADA
STRING-BEAM MODEL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Lilis Suryani
NIM. 12610012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

ANALISIS TRANSFORMASI LAPLACE PADA
STRING-BEAM MODEL

SKRIPSI

Oleh
Lilis Suryani
NIM. 12610012

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 16 Agustus 2016

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si	Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19770521 200501 2 004	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ANALISIS TRANSFORMASI LAPLACE PADA
STRING-BEAM MODEL

SKRIPSI

Oleh
Lilis Suryani
NIM. 12610012

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 25 Agustus 2016

Penguji Utama	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Ketua Penguji	: Mohammad Jamhuri, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si	....
Anggota Penguji	: Ach. Nashichuddin, M.A	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Lilis Suryani
NIM	: 12610002
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Analisis Transformasi Laplace pada *String-Beam Model*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 16 Agustus 2016
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
TGL. 20
DB27BAEF070419568
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Lilis Suryani
NIM. 12610012

MOTO

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفۡسًا إِلَّا وُسۡعَهَا

“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya”

(QS. Al-Baqarah/2:286).

Allah first, and you’ll never be last.

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada kedua orang tua tercinta, Ayahanda yang selalu bekerja keras dan tanpa lelah untuk selalu membimbing, menjadi motivator terbaik dalam hidup dan Ibunda yang selalu sabar dan selalu memberikan dukungan moril. Hanya kata sederhana yaitu “terima kasih” atas segala pengorbanan dan doa yang telah diberikan kepada penulis.

Tak lupa pula untuk adik dan kakak sekeluarga yang selalu memberi semangat dan dukungan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, puji syukur bagi Allah Swt. atas limpahan rahmat, taufik, hidayah, dan karunia-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul "Analisis Transformasi Laplace pada *String-Beam Model*" ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bantuan, bimbingan, serta arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si, selaku dosen pembimbing I yang senantiasa memberikan doa, arahan, nasihat, motivasi dalam melakukan penelitian, serta pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan berbagai ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan

Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.

7. Bapak dan ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika khususnya angkatan 2012 kelas Matematika A, terima kasih atas kenangan-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai cita-cita.
9. Semua pihak yang secara langsung atau tidak langsung telah ikut memberikan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis hanya dapat berharap, di balik skripsi ini dapat ditemukan sesuatu yang dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas atau bahkan hikmah bagi penulis, pembaca, dan bagi seluruh mahasiswa.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Agustus 2016

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Suryani, Lilis. 2016. **Analisis Transformasi Laplace pada *String-Beam Model***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (II) Ach. Nashichuddin M.A

Kata Kunci: model *String-Beam*, linier, transformasi Laplace.

Model *String-Beam* adalah model dengan persamaan diferensial parsial yang menjelaskan mengenai fenomena vibrasi pada jembatan. Model yang digunakan pada penelitian ini adalah model linier homogen. Tujuan penelitian ini untuk menyelesaikan model *String-Beam* linier homogen dengan transformasi Laplace. Langkah-langkah dari penelitian ini adalah menganalisis bentuk transformasi Laplace untuk model *String-Beam*, menerapkan transformasi Laplace pada model *String-Beam* dengan masalah nilai awal dan nilai batas yang diberikan, dan menyelesaikan model untuk mendapatkan selesaian transformasi Laplace pada model *String-Beam*.

Hasil dengan metode transformasi Laplace untuk model *String-Beam* dalam penelitian ini diperoleh selesaian $V\ x,s$ dan $U\ x,s$. Sedangkan untuk invers transformasi Laplace pada penelitian ini tidak dapat diterapkan dalam menentukan $V\ x,t$ dan $U\ x,t$. Sehingga bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk menggunakan metode yang lain dalam mendapatkan $V\ x,t$ dan $U\ x,t$ sebagai hasil invers dari $V\ x,s$ dan $U\ x,s$.

ABSTRACT

Suryani, Lilis. 2016. **Analysis of Laplace Transform on String-Beam Model**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (II) Ach. Nashichuddin M.A

Keyword: String-Beam Model,linear, Laplace Transform.

String-Beam Model is a model with a partial differential equation which describes the phenomenon of vibration on the bridge. The model that used in this research is a model linear homogenous. The purpose of this research is solving String-Beam model linear homogenous using Laplace transform. The steps of this research are analyzing the form of Laplace transform for String-Beam model, applying the Laplace transform on String-Beam model with the given initial and boundary value problems, and solving the model to obtain the Laplace transform solution on String-Beam model.

The results using Laplace transform method for String-Beam model in this research obtain a solution $V(x,s)$ and $U(x,s)$. But for the inverse Laplace transform in this research cannot apply to determine $V(x,t)$ and $U(x,t)$. For further research, it is recommended to use other methods in obtaining $V(x,t)$ and $U(x,t)$ as a result of the inverse of $V(x,s)$ and $U(x,s)$.

ملخص

سوريانى، ليليس. ٢٠١٦. تحليل التحويل لابلاس على نموذج *String-Beam*. بحث جامعى. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: ارى كوسومستوتى، الماجستيرة، و احمد نسخ الدين، الماجستير

كلمات الرئيسية: نموذج *String-Beam*، الخطية، وتحويل لابلاس.

نموذج *String-Beam* هو نموذج مع المعادلات التفاضلية الجزئية التي تصف ظاهرة الجسر. النموذج المستخدم في هذه الدراسة هو النموذج الخطية المتجانسة. واما الغرض من هذه الدراسة لحل نموذج *String-Beam* الخطي المتجانس باستخدام التحويلات لابلاس. كانت الخطوات من هذه الدراسة هى لتحليل تحول لابلاس إلى نموذج *String-Beam*، وتطبيق تحويل لابلاس على النموذج *String-Beam* مع المشاكل القيمة الأولية وقيم الحد التعطى، وحل نموذج ليحصل على حلول من تحويل لابلاس على نموذج *String-Beam*.

النتائج بتحويل لابلاس لنموذج *String-Beam* في هذه الدراسة فشلت في الحصول على $V\ x,t$ و $U\ x,t$ كما الحل من المعادلة $U\ x,t$. لذلك للبحث المقبل، فمن المستحسن أن تستخدم بطريقة أخرى للحصول على $U\ x,t$ و$U\ x,t$ كنتيجة العكس $V\ x,s$ و $U\ x,s$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Quran diturunkan oleh Allah Swt. kepada nabi Muhammad Saw. untuk menjadi pedoman bagi manusia dalam menyelesaikan setiap perkara atau permasalahan. Sebagaimana firman Allah Swt. di dalam surat an-Naml/27:77-78, yang berbunyi:

وَإِنَّهُۥ لَهُدًى وَرَحْمَةٌ لِّلْمُؤْمِنِينَ ﴿٧٧﴾ إِنَّ رَبَّكَ يَقْضِى بَيْنَهُم بِحُكْمِهِۦ ۚ وَهُوَ ٱلْعَزِيزُ ٱلْعَلِيمُ ﴿٧٨﴾

"Dan Sesungguhnya Al qur'an itu benar-benar menjadi petunjuk dan rahmat bagi orang-orang yang beriman. Sesungguhnya Tuhanmu akan menyelesaikan perkara antara mereka dengan keputusan-Nya, dan Allah Maha Perkasa lagi Maha mengetahui" (QS. An-Naml/27:77-78).

Menurut tafsir Al-Qurthubi/Syaikh Imam Al-Qurtubi, yakni dalam ayat 77 tersebut terkandung makna bahwa sesungguhnya al-Quran adalah petunjuk dan rahmat bagi orang-orang beriman karena hanya orang-orang beriman yang mampu mengambil manfaat al-Quran. Sedangkan dalam ayat 78 terkandung makna bahwa Allah Swt. akan menyelesaikan perkara antara bangsa Israil lalu memberikan ganjaran kepada masing-masing mereka yang benar dan salah (Al-Qurthubi, 2009:587).

Dengan mengingat kutipan ayat di atas, maka terdapat selesaian untuk setiap masalah yang ada. Demikian pula dalam permasalahan vibrasi objek yang membutuhkan analisis secara matematika dalam selesaian dan interpretasinya. Cabang matematika yang mengkaji permasalahan seperti ini adalah matematika terapan. Menurut Wibowo (2014) matematika terapan merupakan cabang matematika yang berkenaan dengan penggunaan alat matematika abstrak guna memecahkan masalah-masalah konkret seperti masalah vibrasi pada jembatan. Tahap awal yang dilaksanakan adalah mengkonstruksi model matematika untuk vibrasi pada jembatan. Selanjutnya, model matematika ini disajikan dalam bentuk persamaan diferensial parsial yang terdiri dari persamaan *String* dan persamaan *Beam* dari jembatan. Penelitian ini menggunakan model Drábek, dkk (1999) yang selanjutnya dianalisis menggunakan transformasi Laplace.

Transformasi Laplace adalah suatu metode yang mentransformasikan persamaan diferensial dari domain waktu t menjadi domain baru dengan variabel bebas s yaitu domain frekuensi, dengan s adalah bilangan kompleks. Begitu pula sebaliknya, invers transformasi Laplace adalah transformasi dari domain frekuensi s menjadi domain waktu t (Effendy dan Sugiyono dalam Mandasari, 2015:2). Transformasi Laplace ditemukan oleh matematikawan Perancis Pierre Simon Laplace (1749-1827), yang juga dikenal untuk persamaan Laplace (Tang, 2011:103). Transformasi Laplace yang dibahas dalam penelitian ini adalah untuk mentransformasikan persamaan diferensial parsial model *String-Beam* ke dalam bentuk persamaan diferensial biasa.

Penelitian yang dilakukan merujuk pada beberapa penelitian terdahulu. Penelitian yang dilakukan oleh Dita dan Widodo (2013) menggunakan metode transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial pada persamaan aliran panas. Sehingga, dengan menggunakan metode tersebut diperoleh berbagai macam karakteristik logam penghantar listrik yang mempengaruhi perubahan panas dalam penghantar listrik. Penelitian yang dilakukan oleh Imran dan Mohyud-Din (2013) menggunakan transformasi Laplace dalam metode dekomposisi sangat efisien dalam menyelesaikan selesaian analitik untuk persamaan diferensial parsial orde tinggi. Penelitian yang dilakukan oleh Munawaroh, dkk (2014) menggunakan transformasi Laplace untuk menentukan selesaian dari model matematika sistem gerak pada rangkaian pegas gandeng dengan peredam dan gaya luar.

Melihat beberapa penelitian terdahulu yang menggunakan metode transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial, maka penelitian ini berupaya menganalisis dan memahami penerapan metode transformasi Laplace untuk mendapatkan selesaian model *String-Beam* dengan masalah nilai awal dan nilai batas yang diberikan.

Berdasarkan paparan di atas, maka fokus penelitian ini mengambil tema "Analisis Transformasi Laplace pada *String-Beam Model*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang dibahas adalah:

1. Bagaimana analisis transformasi Laplace untuk model *String-Beam*?
2. Bagaimana selesaian dari model *String-Beam* dengan masalah nilai awal dan nilai batas yang diberikan menggunakan hasil transformasi Laplace?
3. Bagaimana analisis keabsahan selesaian yang diperoleh untuk model *String-Beam* dengan transformasi Laplace?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengetahui analisis transformasi Laplace untuk model *String-Beam*.
2. Mengetahui selesaian dari model *String-Beam* dengan masalah nilai awal dan nilai batas yang diberikan menggunakan hasil transformasi Laplace.
3. Mengetahui analisis keabsahan selesaian yang diperoleh untuk model *String-Beam* dengan transformasi Laplace.

1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan skripsi ini lebih terstruktur, maka batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Model yang digunakan adalah model *String-Beam* homogen dengan asumsi bahwa jika nilai u negatif maka *Beam* akan turun terus menerus sehingga untuk menahan agar *Beam* tidak turun terus menerus digunakan tanda $+$ pada persamaan $k(u-v)^{+} = 0$ (Ohene, dkk: 2012).
2. Penelitian ini tidak melihat berat dari panjang *String* maka untuk suku $W_1(x)$ tidak dipertimbangkan sehingga suku $W_2(x)$ pun begitu mengikuti *String*.
3. Untuk suku $f_1(x,t)$ dan $f_2(x,t)$ tidak dipertimbangkan karena pada penelitian ini tidak ada pengaruh dari energi eksternal terhadap *String* ataupun *Beam*.
4. Selesaian analitik hanya difokuskan ketika kondisi awal

$$v(x,0) = \sin x, v_t(x,0) = 0$$

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0$$

dan kondisi batas

$$v(0,t) = v(L,t) = 0$$

$$u(0,t) = u(L,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(L,t) = 0$$

5. Karena tingkat kompleksitas model yang dihadapi peneliti maka digunakan bantuan program Matlab atau Maple untuk beberapa perhitungan.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah untuk mengetahui dan memahami transformasi Laplace sebagai salah satu metode dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial khususnya pada model *String-Beam* dengan masalah nilai awal dan nilai batas yang diberikan.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian ini menggunakan kajian teoritis, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. a. Mentransformasikan ruas kiri dari model *String-Beam* secara Laplace.
   b. Mensubstitusikan kondisi awal pada hasil transformasi Laplace.
   c. Mendapatkan selesaian $V(x,s) = V_h(x,s) + V_p(x,s)$ dan $U(x,s)$ dengan cara substitusi kondisi-kondisi batasnya.
2. Mendapatkan selesaian $V(x,t)$ dan $U(x,t)$ dengan cara menginverskan $V(x,s)$ dan $U(x,s)$ pada langkah 1c.
3. Mengecek keabsahan selesaian.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar skripsi ini lebih terarah dan mudah dipahami, maka penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan, yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka, meliputi transformasi laplace, persamaan diferensial biasa, model *String-Beam*, penelitian terdahulu, serta membahas kajian Islam mengenai selesaian masalah dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan, meliputi analisis transformasi Laplace untuk model *String-Beam*, selesaian dari model dengan masalah nilai awal dan nilai batas yang diberikan, dan cek keabsahan selesaian yang telah diperoleh. Selain itu juga berisi tentang penjelasan transformasi Laplace di dalam al-Quran.

Bab IV Penutup, yang meliputi kesimpulan dan saran sebagai acuan untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Transformasi Laplace

Transformasi Laplace adalah suatu metode yang mentransformasikan persamaan diferensial dari domain waktu *t* menjadi domain baru dengan variabel bebas *s* yaitu domain frekuensi, dengan *s* adalah bilangan kompleks. Begitu pula sebaliknya, invers transformasi Laplace adalah transformasi dari domain frekuensi *s* menjadi domain waktu *t* (Effendy dan Sugiyono dalam Mandasari, 2015:2). Transformasi Laplace ditemukan oleh matematikawan Perancis Pierre Simon Laplace (1749-1827), yang juga dikenal untuk persamaan Laplace (Tang, 2011:103).

Transformasi Laplace dari fungsi $f(t)$ didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \qquad (2.1)$$

Dan ada atau tidaknya tergantung dari apakah hasil pada persamaan (2.1) ada (konvergen) atau tidak ada (divergen). Seringkali dalam praktiknya terdapat suatu bilangan riil s_0 sehingga integral pada persamaan (2.1) ada untuk $s > s_0$ dan tidak ada untuk $s \leq s_0$. Himpunan nilai $s > s_0$ sehingga persamaan (2.1) ada dinamakan daerah kekonvergenan (*range of convergence*) atau kewujudan (*existence*) dari $\mathcal{L}\{f(t)\}$ (Spiegel, 1994:106).

2.1.1 Syarat Cukup untuk Kewujudan Transformasi Laplace

Teorema 2.1.1.1

Jika $f(t)$ adalah kontinu secara sebagian-sebagian dalam setiap selang berhingga $0 \le t \le N$ dan eksponensial berorde γ untuk $t > N$, maka transformasi Laplace-nya $F(s)$ ada untuk semua $s > \gamma$ (Spiegel, 1999:2).

Bukti:

Untuk setiap bilangan positif N diperoleh,

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^N e^{-st} f(t)\, dt + \int_N^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{2.2}$$

Karena $f(t)$ adalah kontinu secara sebagian-sebagian dalam setiap selang terbatas $0 \le t \le N$, integral pertama di ruas kanan ada. Juga integral kedua di ruas kanan ada, karena $f(t)$ adalah eksponensial berorde γ untuk $t > N$. Untuk melihatnya perlu diamati bahwa dalam hal demikian,

$$\begin{aligned} \left|\int_N^\infty e^{-st} f(t)\, dt\right| &\leqq \int_N^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt \\ &\leqq \int_0^\infty e^{-st} |f(t)|\, dt \\ &\leqq \int_0^\infty e^{-st} M e^{\gamma t}\, dt = \frac{M}{s-\gamma} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Jadi transformasi Laplace ada untuk $s > \gamma$ (Spiegel, 1999:28).

2.1.2 Sifat-Sifat Transformasi Laplace

Transformasi Laplace suatu fungsi mempunyai beberapa sifat. Sifat-sifat tersebut antara lain:

a. Sifat Linier

Teorema 2.1.2.1

Jika c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta, sedangkan $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ adalah fungsi-fungsi dengan transformasi-transformasi Laplacenya masing-masing $F_1(s)$ dan $F_2(s)$, maka:

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

$$= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \qquad (2.4)$$

(Spiegel, 1999:3).

Bukti:

Misalkan $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\, dt$ dan $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\, dt$.

Maka jika c_1 dan c_2 adalah konstanta-konstanta,

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\}\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} c_1 f_1(t) dt + \int_0^\infty e^{-st} c_2 f_2(t) dt$$

$$= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t) dt$$

$$= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \qquad (2.5)$$

Contoh:

$$\mathcal{L}\{4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\} = 4\mathcal{L}\{t^2\} - 3\mathcal{L}\{\cos 2t\} + 5\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

$$= 4\left(\frac{2!}{s^3}\right) - 3\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + 5\left(\frac{s}{s+1}\right)$$

$$= \frac{8}{s^3} - \frac{3s}{s^2+4} + \frac{5}{s+1} \tag{2.6}$$

Simbol $\mathcal{L}$, yang mentransformasikan $f(t)$ ke dalam $F(s)$, sering disebut operator transformasi Laplace. Karena sifat $\mathcal{L}$ yang dinyatakan dalam teorema ini, dikatakan bahwa $\mathcal{L}$ adalah suatu operator linier atau bahwa ia memiliki sifat linear (Spiegel, 1999:12-13).

b. Sifat Translasi atau Pergeseran Pertama

Teorema 2.1.2.2

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

Bukti:

Karena $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)dt = F(s-a) \tag{2.7}$$

(Spiegel, 1999:13).

c. Sifat Translasi atau Pergeseran Kedua

Teorema 2.1.2.3

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ dan $g(t) = \begin{cases} f(t-a), & \text{jika } t > a \\ 0, & \text{jika } t < a \end{cases}$

maka $\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as} F(s)$ (2.8)

Bukti:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$$

$$= \int_0^a e^{-st} g(t)dt + \int_a^\infty e^{-st} g(t)dt$$

$$= \int_0^a e^{-st}(0)dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt \tag{2.9}$$

Misal $u = t - a$ maka $t = u + a$ dan $du = dt$, sehingga

$$\int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt = \int_0^\infty e^{-s(u+a)} f(u)du = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-su} f(u)du = e^{-sa}F(u) \qquad (2.10)$$

(Spiegel, 1999:14).

d. Sifat Pengubahan Skala

Teorema 2.1.2.4

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

Bukti:

Karena $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ maka $\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at)dt$

Misal $u = at$, $du = a\,dt$ atau $dt = \frac{du}{a}$, sehingga didapatkan

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at)dt = \int_0^\infty e^{-u\left(\frac{s}{a}\right)} f(u)\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-u\left(\frac{s}{a}\right)} f(u)du = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (2.11)$$

(Spiegel, 1999:14).

e. Transformasi Laplace dari Turunan-turunan

Teorema 2.1.2.5

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

Karena $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s)$, maka $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t) - s\cdot e^{-st}dt$$

$$= \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (2.12)$$

Jika $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ maka $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

Bukti:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt$$

$$= \left[e^{-st} f'(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -s \cdot e^{-st} f'(t)dt$$

$$= \left[e^{-st} f'(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$$

$$= \left(e^{-s.\infty} f'(\infty) - e^{-s.0} f'(0)\right) + s\left(\left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -s \cdot e^{-st} f(t)dt\right)$$

$$= \left(-1 \cdot f'(0)\right) + \left(s\left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty - s\left(\int_0^\infty -s\ e^{-st} f(t)\ dt\right)\right)$$

$$= \left(-1 \cdot f'(0)\right) + \left(\left(s \cdot e^{-s.\infty} f(\infty)\right) - \left(s \cdot e^{-s.0} f(0)\right) + s^2 \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt\right)$$

$$= \left(-f'(0)\right) + \left(-s\ f(0)\right) + s^2 \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt$$

$$= -f'(0) - s\ f(0) + s^2 F(t)$$

$$= s^2 F(t) - s\ f(0) - f'(0)$$

$$= s^2 F(s) - s\ f(0) - f'(0) \qquad (2.13)$$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - sf^{(n-1)}(0) \qquad (2.14)$$

(Spiegel, 1999:15).

f. Tansformasi Laplace dari Integral-integral

Teorema 2.1.2.6

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$

Bukti:

Misal $g(t) = \int_0^t f(u)du$ maka $g'(t) = f(t)$ dan $g(0) = 0$

Dengan transformasi Laplace pada kedua ruas, diperoleh:

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = s\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s} \qquad (2.15)$$

Jadi diperoleh $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$ (Spiegel, 1999:16).

g. Perkalian dengan t^n

Teorema 2.1.2.7

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1) F^n(s)$

Bukti:

Karena $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ maka menurut aturan Leibnitz untuk menurunkan di bawah tanda integral, diperoleh:

$$\frac{df}{ds} = f'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty -t\, e^{-st} f(t)dt$$

$$= -\int_0^\infty e^{-st} \{t f(t)\} dt = -\mathcal{L}\{t f(t)\} \tag{2.16}$$

Jadi $\mathcal{L}\{t f(t)\} = \frac{df}{ds} = -F'(s)$ (Spiegel, 1999:17).

h. Sifat Pembagian oleh t

Teorema 2.1.2.8

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty f(u)du$

Bukti:

Misal $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ maka $f(t) = t\, g(t)$.

Dengan menggunakan definisi transformasi Laplace untuk kedua bagian, maka diperoleh bentuk $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t g(t)\}$ atau $F(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{g(t)\}$ atau $F(s) = -\frac{dg}{ds}$. Selanjutnya dengan mengintegralkan diperoleh,

$$\int F(s) = \int -\frac{dg}{ds}$$

$$\int G(s) = -\int_{\infty}^{s} f(u)du = \int_{\infty}^{s} f(u)du \qquad (2.17)$$

Jadi $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_{s}^{\infty} f(u)du$ (Spiegel, 1999:18).

2.1.3 Invers Transformasi Laplace

Definisi 2.1.3.1

Jika transformasi Laplace suatu fungsi $f(t)$ adalah $F(s)$, yaitu jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $f(t)$ disebut suatu invers transformasi Laplace dari $F(s)$. Secara simbolis ditulis $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ dengan $\mathcal{L}^{-1}$ disebut operator invers transformasi Laplace.

a. Ketunggalan Invers Transformasi Laplace

Karena transformasi Laplace dari suatu fungsi-nol $\mathrm{N}(t)$ adalah nol maka jelas bahwa bila $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka juga $\mathcal{L}\{f(t) + \mathrm{N}(t)\} = F(s)$. Dengan demikian dapat diperoleh dua fungsi yang berbeda dengan transformasi Laplace yang sama.

Contoh:

$$f_1(t) = e^{-3t} \text{ dan } f_2(t) = \begin{cases} 0, & \forall\, t = 1 \\ e^{-3t}, & \forall\, t \neq 1 \end{cases}$$

Mengakibatkan $\mathcal{L}^{-1}\{f_1(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{f_2(t)\} = \dfrac{1}{s+3}$ (2.18)

Jika memperhitungkan fungsi-fungsi nol, maka terlihat bahwa invers transformasi Laplace tidak tunggal (Spiegel, 1999:42).

2.2 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial (PD) adalah persamaan yang mengandung turunan di dalamnya. Persamaan diferensial dibagi menjadi dua. Pertama, PD yang mengandung hanya satu variabel bebas, disebut persamaan diferensial biasa (PDB). Kedua, PD yang mengandung lebih dari satu variabel bebas, disebut persamaan diferensial parsial (PDP) (Effendy dan Sugiyono dalam Mandasari, 2015:15).

Berdasarkan sifat kelinieran (pangkat satu) dari peubah tak bebasnya, PD dapat dibedakan menjadi PD linier dan PD tidak linier. Bentuk umum PD linier order n diberikan:

$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ dengan $a_n(x) \neq 0$

$a_n(x), \cdots, a_0(x)$ disebut koefisien PD.

Bila $f(x) = 0$ maka disebut PD linier homogen, sedangkan bila $f(x) \neq 0$ maka disebut PD linier tak homogen. Bila tidak dapat dinyatakan seperti bentuk di atas dikatakan PD tidak linier. Dari contoh terdahulu, persamaan Bernoulli dan Van Der Pol merupakan PD tidak linier (Mursita, 2009:190-191).

2.2.1 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

Suatu persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui disebut persamaan diferensial. Khususnya, suatu persamaan berbentuk

$$F = \left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (2.19)$$

yang mana $y^{(k)}$ menyatakan turunan y terhadap x yang ke k, disebut persamaan diferensial biasa berorde n.

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = k(x) \tag{2.20}$$

Bahwa y dan semua turunannya muncul dalam pangkat satu disebut suatu persamaan linier karena jika dituliskan dalam penulisan operator,

$$\left[D_x^n + a_1(x)D_x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D_x + a_n(x)\right]y = k(x) \tag{2.21}$$

operator dalam kurung siku adalah operator linier. Jadi, jika L menyatakan operator, f dan g berupa fungsi dan c konstanta,

$$L(f+g) = L(f) + L(g)$$
$$L(cf) = cL(f) \tag{2.22}$$

(Purcell dan Varberg, 1999:433-434)

2.2.2 Persamaan Diferensial Linear Orde Dua Homogen

Suatu persamaan diferensial linier orde kedua mempunyai bentuk,

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = k(x) \tag{2.23}$$

Misalkan $a_1(x)$, $a_2(x)$ adalah konstanta, dan $k(x)$ secara identik adalah nol (kasus homogen). Persamaan diferensial linier homogen orde kedua selalu mempunyai dua selesaian fundamental $u_1(x)$ dan $u_2(x)$, yang bebas satu sama lain (yakni, fungsi yang satu bukan kelipatan fungsi yang lainnya), dari kelinieran operator $D^2 + a_1D + a_2$,

$$C_1u_1(x) + C_2u_2(x) \tag{2.24}$$

adalah suatu selesaian juga (Purcell dan Varberg, 1999:441).

Persamaan bantu: karena $D_x(e^{rx}) = r \cdot e^{rx}$, bahwa e^{rx} merupakan suatu selesaian terhadap persamaan diferensial untuk suatu pilihan r yang sesuai. Untuk menguji kemungkinan, pertama menuliskan persamaan tersebut dalam bentuk operator

$$(D^2 + a_1 D + a_2)y = 0 \tag{2.25}$$

Sekarang

$$(D^2 + a_1 D + a_2)e^{rx} = D^2 \cdot (e^{rx}) + a_1 D \cdot (e^{rx}) + a_2 \cdot e^{rx}$$

$$= r^2 \cdot (e^{rx}) + a_1 r \cdot (e^{rx}) + a_2 \cdot e^{rx}$$

$$= e^{rx}(r^2 + a_1 r + a_2) \tag{2.26}$$

Dimisalkan ruas kanan adalah nol,

$$(r^2 + a_1 r + a_2) = 0 \tag{2.27}$$

Persamaan (2.27) disebut persamaan bantu untuk (2.25). Karena persamaan (2.27) merupakan suatu persamaan kuadrat biasa dan dapat diselesaikan dengan pemfaktoran atau jika perlu dengan rumus kuadrat. Terdapat tiga kasus yang ditinjau yaitu dua akar riil berlainan, akar tunggal berulang, atau akar-akar kompleks saling konjugat (Purcell dan Varberg, 1999:442).

(Akar-akar riil berlainan). Jika r_1 dan r_2 berlainan, akar-akar riil persamaan bantu, maka selesaian umum $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ adalah

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \tag{2.28}$$

Tetapi, apabila persamaan bantu mempunyai bentuk,

$$r^2 - 2r_1 \cdot r + r_1^2 = (r - r_1)^2 = 0 \tag{2.29}$$

Maka persamaan (2.29) akan menghasilkan selesaian fundamental tunggal $e^{r_1 x}$ dan harus mencari selesaian lain yang bebas dari selesaian tersebut. Selesaian yang demikian adalah $xe^{r_1 x}$, seperti yang akan dijabarkan sebagai berikut

$$(D^2 - 2r_1 D + r_1^2)xe^{r_1 x} = D^2 \cdot (xe^{r_1 x}) - 2r_1 D \cdot (xe^{r_1 x}) + r_1^2 \cdot xe^{r_1 x}$$

$$= (xr_1^2 \cdot e^{r_1 x} + 2r_1 \cdot e^{r_1 x}) - 2r_1 (xr_1 \cdot e^{r_1 x} + e^{r_1 x}) + r_1^2 \cdot xe^{r_1 x}$$

$$= 0 \tag{2.30}$$

(Akar berulang). Jika persamaan bantu mempunyai akar tunggal berulang r_1, maka selesaian umum terhadap $y''+a_1y'+a_2y=0$ adalah

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2x\cdot e^{r_1x} \tag{2.31}$$

Apabila persamaan bantu mempunyai akar-akar kompleks saling konjugat sebagai berikut:

$$(D^2+B^2)y=0 \tag{2.32}$$

dengan persamaan bantu $r^2+\beta^2=0$ dan akar-akar kompleks $\pm\beta i$. Selesaian-selesaian fundamentalnya secara mudah terlihat berupa $\sin\beta x$ dan $\cos\beta x$ (Purcell dan Varberg, 1999:443).

(Akar-akar kompleks saling konjugat). Jika persamaan bantu mempunyai akar-akar kompleks saling konjugat $\alpha\pm\beta i$, maka selesaian umum $y''+a_1y'+a_2y=0$ adalah

$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{2.33}$$

(Purcell dan Varberg, 1999:443)

2.2.3 Persamaan Diferensial Linier Orde Dua Tak Homogen

Persamaan linier tak-homogen umum dengan koefisien konstan,

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=k(x) \tag{2.34}$$

Selesaian persamaan (2.34) dapat direduksi atas tiga langkah:

1) Menentukan selesaian umum.

   $y_h=C_1u_1(x)+C_2u_2(x)+\cdots+C_nu_n(x)$ terhadap persamaan homogen.

2) Menentukan selesaian khusus y_p terhadap persamaan tak-homogen tersebut.

3) Menambahkan selesaian-selesaian dari langkah 1 dan 2. Menyatakan hasilnya sebagai suatu teorema formal.

Teorema 2.2.3.1

Jika y_p suatu selesaian khusus sebarang terhadap persamaan tak-homogen,

$$L(y) = \left(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n\right) y = k(x) \tag{2.35}$$

dan jika y_h adalah selesaian umum terhadap persamaan homogen yang berpadanan, maka

$$y = y_p + y_h \tag{2.36}$$

adalah selesaian umum dari (2.36) (Purcell dan Varberg, 1999:446).

Bukti:

Kelinieran operasi L merupakan elemen kunci dalam pembuktian. Andaikan y_p dan y_h adalah seperti yang dijelaskan, maka

$$L\left(y_p + y_h\right) = L\left(y_p\right) + L\left(y_h\right) = k(x) + 0 \tag{2.37}$$

Sehingga $y = y_p + y_h$ adalah suatu selesaian terhadap (2.34). Sebaliknya, andaikan y sebarang selesaian terhadap (2.34). Maka,

$$L\left(y - y_p\right) = L\left(y\right) + L\left(y_p\right) = k(x) - k(x) = 0 \tag{2.38}$$

Sehingga $y - y_p$ adalah suatu selesaian terhadap persamaan homogen. Maka dari itu $y = y_p + \left(y - y_p\right)$ dapat dituliskan sebagai y_p ditambah selesian terhadap persamaan homogen (Purcell dan Varberg, 1999:446).

2.2.3.1 Metode Koefisien Tak Tentu

Persamaan umum,

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = k(x) \tag{2.39}$$

Fungsi $k(x)$ berupa polinom, eksponen, sinus, dan cosinus.

Tabel 2.2 Metode Koefisien Tak Tentu (Sumber: Purcell dan Varberg, 1999)

$k(x)$	y_p
x^m	$A_m x^m + \cdots + A_1 x + A_0$
e^{ax}	Ae^{ax}
$x \cdot e^{ax}$	$Ae^{ax} + B\,x e^{ax}$
$\sin ax$	$A\cos ax + B\sin ax$

2.2.3.2 Metode Variasi Parameter

Metode yang lebih umum daripada metode koefisien tak-tentu adalah metode variasi parameter. Menurut Purcell dan Varberg (1999) jika $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ adalah selesaian bebas terhadap persamaan homogen dengan pemisalan $y_h = C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x)$, maka terdapat suatu selesaian khusus terhadap persamaan tak-homogen yang berbentuk

$$y_p = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x) \tag{2.40}$$

dengan

$$v_1' u_1 + v_2' u_2 = 0 \tag{2.41}$$

$$v_1' u_1' + v_2' u_2' = k(x) \tag{2.42}$$

2.3 Model *String-Beam*

Persamaan *String-Beam Model* adalah persamaan diferensial parsial yang menjelaskan mengenai fenomena jembatan. Model ini memuat $v(x,t)$ sebagai besar pergerakan dari vibrasi *String* dan $u(x,t)$ sebagai *Beam* dari jembatan. Suku nonlinier menyatakan hubungan *Beam* dan *String* yang menyebabkan kabel bergerak ke bawah. Oleh karena itu, diberikan tanda negatif di depan $k(u-v)^+$ pada persamaan pertama dan diberikan tanda positif di depan $k(u-v)^+$ pada persamaan kedua yang menyatakan hubungan *Beam* dan *String* yang menyebabkan kabel bergerak ke atas. Drábek dkk (1999) menyatakan model ini sebagai berikut:

$$m_1 v_{tt} - T v_{xx} + b_1 v_t - k(u-v)^+ = W_1(x) + f_1(x,t), \forall \text{ fungsi } W_1(x) \text{ dan } f_1(x,t)$$
$$m_2 u_{tt} + EI u_{xxxx} + b_2 u_t + k(u-v)^+ = W_2(x) + f_2(x,t), \forall \text{ fungsi } W_2(x) \text{ dan } f_2(x,t)$$
(2.43)

2.3.1 Penurunan Model *String-Beam*

Asumsi yang dibangun adalah $\alpha(x,t)$ adalah peluang partikel mendesak ke kanan, $\beta(x,t)$ adalah peluang partikel mendesak ke kiri, p adalah peluang partikel konsisten dengan arah desakan, q adalah peluang partikel melawan arah desakan. Peluang p dan q diasumsikan tidak berubah dan $p + q = 1$. Jadi jika partikel didesak dari kiri, p adalah peluang partikel bergerak ke arah kanan, dan q adalah peluang partikel berbalik arah ke kiri.

Dengan memperhatikan persamaan ini,

$$\alpha(x,t+\Gamma) = p\alpha(x-\delta,t) + q\beta(x-\delta,t) \quad (2.44)$$

$$\beta(x,t+\Gamma) = p\beta(x+\delta,t) + q\alpha(x+\delta,t) \quad (2.45)$$

Maka, ekspansi deret Taylor untuk persamaan (2.44) adalah,

$$\alpha(x,t) + \Gamma\alpha_t(x,t) = p\left(\alpha(x,t) - \delta\alpha_x(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2\alpha_{xx}(x,t)\right) +$$
$$q\left(\beta(x,t) - \delta\beta_x(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2\beta_{xx}(x,t)\right) \quad (2.46)$$

Dari persamaan (2.46) kedua ruas dikurangi dengan $\alpha(x,t)$, maka

$$\Gamma\alpha_t(x,t) = (p-1)\alpha(x,t) + q\beta(x,t) - \delta p\alpha_x(x,t) - \delta q\beta_x(x,t) +$$
$$\frac{1}{2}\delta^2 p\alpha_{xx}(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 q\beta_{xx}(x,t) \quad (2.47)$$

Dari persamaan (2.47) orde keduanya dipotong dan suku $\delta q\beta_x\ x,t$ diabaikan, maka diperoleh

$$\Gamma\alpha_t\ x,t\ =\ p-1\ \alpha\ x,t\ +q\beta\ x,t\ -\delta p\alpha_x\ x,t \tag{2.48}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_t\ x,t\ =\frac{p-1}{\Gamma}\alpha\ x,t\ +\frac{q}{\Gamma}\beta\ x,t\ -\frac{p\delta}{\Gamma}\alpha_x\ x,t \tag{2.49}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_t\ x,t\ =\frac{-q}{\Gamma}\alpha\ x,t\ +\frac{q}{\Gamma}\beta\ x,t\ -\frac{1-q\ \delta}{\Gamma}\alpha_x\ x,t \tag{2.50}$$

Diasumsikan, $lim_{\Gamma\to 0}\frac{q}{\Gamma}=\lambda$ dan $lim_{\delta\to 0}\frac{1-q\ \delta}{\Gamma}=\gamma$ dengan λ dan γ berupa konstanta tak nol. Sehingga persamaan (2.50) menjadi,

$$\alpha_t\ x,t\ =-\lambda\alpha\ x,t\ +\lambda\beta\ x,t\ -\gamma\alpha_x\ x,t \tag{2.51}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\alpha}{\partial t}\ x,t\ +\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial x}\ x,t\ =-\lambda\alpha\ x,t\ +\lambda\beta\ x,t \tag{2.52}$$

Kemudian, ekspansi deret Taylor untuk persamaan (2.45) adalah,

$$\beta\ x,t\ +\Gamma\beta_t\ x,t\ =p\ \ \beta\ x,t\ +\delta\beta_x\ x,t\ +\frac{1}{2}\delta^2\beta_{xx}\ x,t\ \ +$$
$$q\ \ \alpha\ x,t\ +\delta\alpha_x\ x,t\ +\frac{1}{2}\delta^2\alpha_{xx}\ x,t \tag{2.53}$$

Dari persamaan (2.53) kedua ruas dikurangi dengan $\beta\ x,t$, maka

$$\Gamma\beta_t\ x,t\ =\ p-1\ \beta\ x,t\ +q\alpha\ x,t\ +\delta p\beta_x\ x,t\ +\delta q\alpha_x\ x,t\ +$$
$$\frac{1}{2}\delta^2 p\hat{a}_{xx}\ x,t\ +\frac{1}{2}\delta^2 q\alpha_{xx}\ x,t \tag{2.54}$$

Dari persamaan (2.54) orde keduanya dipotong dan suku $\delta q\alpha_x\ x,t$ diabaikan, maka diperoleh

$$\Gamma\beta_t\ x,t\ =\ p-1\ \beta\ x,t\ +q\alpha\ x,t\ +\delta p\beta_x\ x,t \tag{2.55}$$

$$\Leftrightarrow \beta_t\ x,t\ =\frac{p-1}{\Gamma}\beta\ x,t\ +\frac{q}{\Gamma}\alpha\ x,t\ +\frac{p\delta}{\Gamma}\beta_x\ x,t \tag{2.56}$$

$$\Leftrightarrow \beta_t\ x,t\ =\frac{-q}{\Gamma}\beta\ x,t\ +\frac{q}{\Gamma}\alpha\ x,t\ +\frac{1-q\ \delta}{\Gamma}\beta_x\ x,t \tag{2.57}$$

Diasumsikan, $lim_{\Gamma\to 0}\frac{q}{\Gamma}=\lambda$ dan $lim_{\delta\to 0}\frac{(1-q)\delta}{\Gamma}=\gamma$ di mana λ dan γ berupa konstanta tak nol. Sehingga persamaan (2.57) menjadi,

$$\beta_t(x,t)=-\lambda\beta(x,t)+\lambda\alpha(x,t)+\gamma\beta_x(x,t) \tag{2.58}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\beta}{\partial t}(x,t)-\gamma\frac{\partial\beta}{\partial x}(x,t)=-\lambda\beta(x,t)+\lambda\alpha(x,t) \tag{2.59}$$

Persamaan (2.52) dan (2.59) dikurangkan, sehingga menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha-\beta)+\gamma\frac{\partial}{\partial x}(\alpha+\beta)=-2\lambda(\alpha-\beta) \tag{2.60}$$

Persamaan (2.52) dan (2.59) dijumlahkan, sehingga menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha+\beta)+\gamma\frac{\partial}{\partial x}(\alpha-\beta)=0 \tag{2.61}$$

Persamaan (2.60) diturunkan terhadap x, sehingga menjadi

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}(\alpha-\beta)+\gamma\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha+\beta)=-2\lambda\frac{\partial}{\partial t}(\alpha-\beta) \tag{2.62}$$

Persamaan (2.61) diturunkan terhadap t, sehingga menjadi

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\alpha+\beta)+\gamma\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}(\alpha-\beta)=0 \tag{2.63}$$

Persamaan (2.62) dikalikan dengan γ, sehingga menjadi

$$\gamma\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}(\alpha-\beta)+\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha+\beta)=-2\lambda\gamma\frac{\partial}{\partial t}(\alpha-\beta) \tag{2.64}$$

Persamaan (2.64) dan (2.63) dikurangkan, sehingga menjadi

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\alpha+\beta)-\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha+\beta)=-2\lambda\gamma\frac{\partial}{\partial t}(\alpha-\beta) \tag{2.65}$$

Jika $v(x,t)=\alpha(x,t)+\beta(x,t)$, γ^2 bernilai T dan $2\lambda\gamma$ bernilai b_1 maka,

$$v_{tt}-Tv_{xx}+b_1v_t=0 \tag{2.66}$$

Dengan menggunakan asumsi dan cara yang sama pula maka dapat dicari penurunan persamaan kedua pada sistem (2.43) tetapi dengan ekspansi deret Taylor hingga orde 5 untuk persamaan (2.44) sebagai berikut,

$$\alpha(x,t) + \Gamma\alpha_t(x,t) = p\left(\alpha(x,t) - \delta\alpha_x(x,t) + \tfrac{1}{2}\delta^2\alpha_{xx}(x,t) - \tfrac{1}{6}\delta^3\alpha_{xxx}(x,t) + \tfrac{1}{24}\delta^4\alpha_{xxxx}(x,t) + \tfrac{1}{120}\delta^5\alpha_{xxxxx}(x,t)\right) + q\left(\beta(x,t) - \delta\beta_x(x,t) + \tfrac{1}{2}\delta^2\beta_{xx}(x,t) - \tfrac{1}{6}\delta^3\beta_{xxx}(x,t) + \tfrac{1}{24}\delta^4\beta_{xxxx}(x,t) + \tfrac{1}{120}\delta^5\beta_{xxxxx}(x,t)\right) \tag{2.67}$$

Dari (2.67) kedua ruas dikurangi dengan $\alpha(x,t)$, maka

$$\begin{aligned}\Gamma\alpha_t(x,t) = {} & (p-1)\alpha(x,t) + q\beta(x,t) - \delta p\alpha_x(x,t) - \delta q\beta_x(x,t) + \\ & \tfrac{1}{2}\delta^2 p\alpha_{xx}(x,t) + \tfrac{1}{2}\delta^2 q\beta_{xx}(x,t) - \tfrac{1}{6}\delta^3 p\alpha_{xxx}(x,t) - \tfrac{1}{6}\delta^3 q\beta_{xxx}(x,t) + \\ & \tfrac{1}{24}\delta^4 p\alpha_{xxxx}(x,t) + \tfrac{1}{24}\delta^4 q\beta_{xxxx}(x,t) + \tfrac{1}{120}\delta^5 p\alpha_{xxxxx}(x,t) + \\ & \tfrac{1}{120}\delta^5 q\beta_{xxxxx}(x,t)\end{aligned} \tag{2.68}$$

Dari (2.68) orde keempat dan kelimanya dipotong, suku $\frac{1}{6}\delta^3 q\beta_{xxx}(x,t)$ diabaikan, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\Gamma\alpha_t(x,t) = {} & (p-1)\alpha(x,t) + q\beta(x,t) - \delta p\alpha_x(x,t) - \delta q\beta_x(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 p\alpha_{xx}(x,t) \\ & + \frac{1}{2}\delta^2 q\beta_{xx}(x,t) - \frac{1}{6}\delta^3 p\alpha_{xxx}(x,t)\end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \alpha_t(x,t) = {} & \frac{p-1}{\Gamma}\alpha(x,t) + \frac{q}{\Gamma}\beta(x,t) - \frac{\delta p}{\Gamma}\alpha_x(x,t) - \frac{\delta q}{\Gamma}\beta_x(x,t) \\ & + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 p}{\Gamma}\alpha_{xx}(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 q}{\Gamma}\beta_{xx}(x,t) - \frac{1}{6}\frac{\delta^3 p}{\Gamma}\alpha_{xxx}(x,t)\end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \alpha_t(x,t) = {} & \frac{-q}{\Gamma}\alpha(x,t) + \frac{q}{\Gamma}\beta(x,t) - \frac{(1-q)\delta}{\Gamma}\alpha_x(x,t) - \frac{\delta q}{\Gamma}\beta_x(x,t) \\ & + \frac{1}{2}\frac{(1-q)\delta^2}{\Gamma}\alpha_{xx}(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 q}{\Gamma}\beta_{xx}(x,t) - \frac{1}{6}\frac{(1-q)\delta^3}{\Gamma}\alpha_{xxx}(x,t)\end{aligned} \tag{2.71}$$

Diasumsikan, $lim_{\Gamma\to 0}\frac{q}{\Gamma} = \lambda$, $lim_{\delta\to 0}\frac{(1-q)\delta}{\Gamma} = \gamma$, $lim\frac{\delta q}{\Gamma} = \zeta$, $lim\frac{(1-q)\delta^2}{\Gamma} = \eta$, $lim\frac{\delta^2 q}{\Gamma} = \xi$ dan $lim\frac{(1-q)\delta^3}{\Gamma} = \rho$ dengan $\lambda, \gamma, \zeta, \eta, \xi$, dan ρ berupa konstanta tak nol. Sehingga persamaan (2.71) menjadi,

$$\alpha_t \; x,t \; = -\lambda\alpha \; x,t \; + \lambda\beta \; x,t \; - \gamma\alpha_x \; x,t \; - \zeta\beta_x \; x,t \; + \frac{1}{2}\eta\alpha_{xx} \; x,t$$

$$+\frac{1}{2}\xi\beta_{xx} \; x,t \; - \frac{1}{6}\rho\alpha_{xxx} \; x,t \qquad (2.72)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\rho\frac{\partial^3\alpha}{\partial x^3} \; x,t \; - \frac{1}{2}\eta\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} \; x,t \; - \frac{1}{2}\xi\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} \; x,t \; + \tilde{a}\frac{\partial\alpha}{\partial x} \; x,t \; + \zeta\frac{\partial\beta}{\partial x} \; x,t \; + \frac{\partial\alpha}{\partial t} \; x,t \; = -\lambda\alpha \; x,t \; + \lambda\beta \; x,t \qquad (2.73)$$

Kemudian, ekspansi deret Taylor untuk persamaan (2.45) adalah,

$$\beta \; x,t \; + \Gamma\beta_t \; x,t \; = p \;\; \beta \; x,t \; + \delta\beta_x \; x,t \; + \frac{1}{2}\delta^2\beta_{xx} \; x,t \; + \frac{1}{6}\delta^3\beta_{xxx} \; x,t \; + \frac{1}{24}\delta^4\beta_{xxxx} \; x,t \; + \frac{1}{120}\delta^5\beta_{xxxxx} \; x,t \;\; + q \;\; \alpha \; x,t \; + \delta\alpha_x \; x,t \; + \frac{1}{2}\delta^2\alpha_{xx} \; x,t \; + \frac{1}{6}\delta^3\alpha_{xxx} \; x,t \; + \frac{1}{24}\delta^4\alpha_{xxxx} \; x,t \; + \frac{1}{120}\delta^5\alpha_{xxxxx} \; x,t \qquad (2.74)$$

Dari (2.74) kedua ruas dikurangi dengan $\beta \; x,t$, sehingga diperoleh

$$\Gamma\beta_t \; x,t \; = \; p-1 \;\; \beta \; x,t \; + q\alpha \; x,t \; + \delta p\beta_x \; x,t \; + \delta q\alpha_x \; x,t \; + \frac{1}{2}\delta^2 p\beta_{xx} \; x,t$$

$$+\frac{1}{2}\delta^2 q\alpha_{xx} \; x,t \; + \frac{1}{6}\delta^3 p\beta_{xxx} \; x,t \; + \frac{1}{6}\delta^3 q\alpha_{xxx} \; x,t$$

$$+\frac{1}{24}\ddot{a}^4 p\beta_{xxxx} \; x,t \; + \frac{1}{24}\delta^4 q\alpha_{xxxx} \; x,t \; + \frac{1}{120}\delta^5 p\beta_{xxxxx} \; x,t$$

$$+\frac{1}{120}\delta^5 q\alpha_{xxxxx} \; x,t \qquad (2.75)$$

Persamaan (2.75) orde keempat dan kelimanya dipotong, suku $\frac{1}{6}\delta^3 q\alpha_{xxx} \; x,t$ diabaikan, maka diperoleh

$$\Gamma\beta_t \; x,t \; = \; p-1 \;\; \beta \; x,t \; + q\alpha \; x,t \; + \delta p\beta_x \; x,t \; + \delta q\alpha_x \; x,t \; + \frac{1}{2}\delta^2 p\beta_{xx} \; x,t$$

$$+\frac{1}{2}\delta^2 q\alpha_{xx} \; x,t \; + \frac{1}{6}\delta^3 p\beta_{xxx} \; x,t \qquad (2.76)$$

$$\Leftrightarrow \beta_t \; x,t \; = \frac{p-1}{\Gamma}\beta \; x,t \; + \frac{q}{\Gamma}\alpha \; x,t \; + \frac{p\delta}{\Gamma}\beta_x \; x,t \; + \frac{q\delta}{\Gamma}\alpha_x \; x,t$$

$$+\frac{1}{2}\frac{p\delta^2}{\Gamma}\beta_{xx} \; x,t \; + \frac{1}{2}\frac{q\delta^2}{\Gamma}\alpha_{xx} \; x,t \; + \frac{1}{6}\frac{p\delta^3}{\Gamma}\beta_{xxx} \; x,t \qquad (2.77)$$

$$\Leftrightarrow \beta_t\ x,t\ = \frac{-q}{\Gamma}\beta\ x,t\ + \frac{q}{\Gamma}\alpha\ x,t\ + \frac{1-q\ \delta}{\Gamma}\beta_x\ x,t\ + \frac{q\delta}{\Gamma}\alpha_x\ x,t$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1-q\ \delta^2}{\Gamma}\beta_{xx}\ x,t\ + \frac{1}{2}\frac{q\delta^2}{\Gamma}\alpha_{xx}\ x,t\ + \frac{1}{6}\frac{1-q\ \delta^3}{\Gamma}\beta_{xxx}\ x,t \qquad (2.78)$$

Diasumsikan, $lim_{\Gamma\to 0}\frac{q}{\Gamma} = \lambda$, $lim_{\delta\to 0}\frac{1-q\ \delta}{\Gamma} = \gamma$, $lim\frac{\delta q}{\Gamma} = \zeta$, $lim\frac{1-q\ \delta^2}{\Gamma} = \eta$, $lim\frac{\delta^2 q}{\Gamma} = \xi$ dan $lim\frac{1-q\ \delta^3}{\Gamma} = \rho$ dengan λ, γ, ζ, η, ξ, dan ρ berupa konstanta tak nol. Sehingga persamaan (2.78) menjadi,

$$\beta_t\ x,t\ = -\lambda\beta\ x,t\ + \lambda\alpha\ x,t\ + \gamma\beta_x\ x,t\ + \zeta\alpha_x\ x,t\ + \frac{1}{2}\eta\beta_{xx}\ x,t\ +$$

$$\frac{1}{2}\xi\alpha_{xx}\ x,t\ + \frac{1}{6}\rho\beta_{xxx}\ x,t \qquad (2.79)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6}\rho\frac{\partial^3\beta}{\partial x^3}\ x,t\ - \frac{1}{2}\eta\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}\ x,t\ - \frac{1}{2}\xi\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}\ x,t\ - \gamma\frac{\partial\beta}{\partial x}\ x,t\ - \zeta\frac{\partial\alpha}{\partial x}\ x,t\ +$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}\ x,t\ = -\lambda\beta\ x,t\ + \lambda\alpha\ x,t \qquad (2.80)$$

Persamaan (2.73) dan (2.80) dikurangkan, sehingga menjadi

$$\frac{1}{6}\rho\frac{\partial^3}{\partial x^3}\ \alpha+\beta\ - \frac{1}{2}\eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ \alpha-\beta\ + \frac{1}{2}\xi\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ \alpha-\beta\ + \gamma\frac{\partial}{\partial x}\ \alpha+\beta\ +$$

$$\zeta\frac{\partial}{\partial x}\ \alpha+\beta\ + \frac{\partial}{\partial t}\ \alpha-\beta\ = -2\lambda\ \alpha-\beta \qquad (2.81)$$

Persamaan (2.73) dan (2.80) dijumlahkan, sehingga menjadi

$$\frac{1}{6}\rho\frac{\partial^3}{\partial x^3}\ \alpha-\beta\ - \frac{1}{2}\eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ \alpha+\beta\ - \frac{1}{2}\xi\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ \alpha+\beta\ + \gamma\frac{\partial}{\partial x}\ \alpha-\beta\ -$$

$$\zeta\frac{\partial}{\partial x}\ \alpha-\beta\ + \frac{\partial}{\partial t}\ \alpha+\beta\ = 0 \qquad (2.82)$$

Persamaan (2.81) diturunkan terhadap t, sehingga menjadi

$$\frac{1}{6}\rho\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial t}\ \alpha+\beta\ - \frac{1}{2}\eta\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\ \alpha-\beta\ + \frac{1}{2}\xi\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\ \alpha-\beta\ + \gamma\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\ \alpha+\beta\ +$$

$$\zeta\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\ \alpha+\beta\ + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\ \alpha-\beta\ = -2\lambda\frac{\partial}{\partial t}\ \alpha-\beta \qquad (2.83)$$

Persamaan (2.82) diturunkan terhadap x, sehingga menjadi

$$\frac{1}{6}\rho\frac{\partial^4}{\partial x^4}\ \alpha-\beta\ - \frac{1}{2}\eta\frac{\partial^3}{\partial x^3}\ \alpha+\beta\ - \frac{1}{2}\xi\frac{\partial^3}{\partial x^3}\ \alpha+\beta\ + \gamma\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ \alpha-\beta\ -$$

$$\zeta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ \alpha - \beta \ + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \ \alpha + \beta \ = 0 \tag{2.84}$$

Persamaan (2.83) dan (2.84) dijumlahkan, sehingga menjadi

$$\frac{1}{6}\rho \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial t} \ \acute{\alpha} + \beta \ - \frac{1}{2}\varsigma \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \ \alpha - \beta \ + \frac{1}{2}\xi \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \ \alpha - \beta \ + \gamma \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \ \alpha + \beta \ +$$

$$\zeta \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \ \alpha + \beta \ + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ \alpha - \beta \ + \frac{1}{6}\rho \frac{\partial^4}{\partial x^4} \ \alpha - \beta \ - \frac{1}{2}\varsigma \frac{\partial^3}{\partial x^3} \ \alpha + \beta \ - \frac{1}{2}\xi \frac{\partial^3}{\partial x^3} \ \alpha + \beta \ +$$

$$\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ \alpha - \beta \ - \zeta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ \alpha - \beta \ + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \ \alpha + \beta \ = -2\lambda \frac{\partial}{\partial t} \ \alpha - \beta \tag{2.85}$$

Persamaan (2.85) dapat ditulis menjadi

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \ \alpha - \beta \ + \frac{1}{6}\rho \frac{\partial^4}{\partial x^4} \ \alpha - \beta \ + 2\lambda \frac{\partial}{\partial t} \ \alpha - \beta \ + \frac{1}{6}\rho \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial t} \ \alpha + \beta \ -$$

$$\frac{1}{2}\eta \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \ \alpha - \beta \ + \frac{1}{2}\xi \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \ \alpha - \beta \ + \gamma \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \ \alpha + \beta \ + \zeta \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \ \alpha + \beta \ -$$

$$\frac{1}{2}\eta \frac{\partial^3}{\partial x^3} \ \alpha + \beta \ - \frac{1}{2}\xi \frac{\partial^3}{\partial x^3} \ \alpha + \beta \ + \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ \alpha - \beta \ - \zeta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ \alpha - \beta \ +$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \ \alpha + \beta \ = 0 \tag{2.86}$$

Dari persamaan (2.86) dilakukan pemotongan sehingga menjadi

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \ \alpha - \beta \ + \frac{1}{6}\rho \frac{\partial^4}{\partial x^4} \ \alpha - \beta \ + 2\lambda \frac{\partial}{\partial t} \ \alpha - \beta \ = 0 \tag{2.87}$$

Jika $u \ x,t \ = \alpha \ x,t \ - \beta \ x,t$, $\frac{1}{6}\rho$ bernilai EI dan 2λ bernilai b_2 maka,

$$u_{tt} + EIu_{xxxx} + b_2 u_t = 0 \tag{2.88}$$

Kemudian dengan memperhatikan massa dan berat per satuan panjang *String* dan *Beam* serta energi eksternal yang periodik maka terbentuk model *String-Beam* sebagai berikut:

$$m_1 v_{tt} - T v_{xx} + b_1 v_t - k \ u - v \ ^+ = W_1 \ x \ + f_1(x,t)$$

$$m_2 u_{tt} + EIu_{xxxx} + b_2 u_t + k \ u - v \ ^+ = W_2 \ x \ + f_2(x,t)$$

2.4 Penelitian Terdahulu

Penelitian yang dilakukan merujuk pada beberapa penelitian terdahulu. Penelitian yang dilakukan oleh Dita dan Widodo (2013) menggunakan metode transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial pada persamaan aliran panas. Sehingga, dengan menggunakan metode tersebut diperoleh berbagai macam karakteristik logam penghantar listrik yang mempengaruhi perubahan panas dalam penghantar listrik. Penelitian yang dilakukan oleh Imran dan Mohyud-Din (2013) menggunakan transformasi Laplace dalam metode dekomposisi sangat efisien dalam menyelesaikan selesaian analitik untuk persamaan diferensial parsial orde tinggi. Penelitian yang dilakukan oleh Munawaroh, dkk (2014) menggunakan transformasi Laplace untuk menentukan selesaian dari model matematika sistem gerak pada rangkaian pegas gandeng dengan peredam dan gaya luar.

2.5 Penyelesaian Masalah dalam Al-Quran

Seperti yang telah disampaikan sebelumnya bahwa al-Quran diturunkan oleh Allah Swt. kepada nabi Muhammad Saw. untuk menjadi pedoman bagi manusia dalam menyelesaikan setiap perkara atau permasalahan. Masalah adalah satu ciri dunia yang tidak akan pernah hilang, siapapun yang namanya masih hidup di bumi ini pasti akan menghadapi masalah mulai dari anak-anak hingga kakek-nenek.

Oleh karena itu pula, Allah Swt. telah mempersiapkan metode terbaik dalam menghadapi setiap masalah yaitu dengan sabar dan shalat, sebagaimana firman Allah Swt. di dalam surat al-Baqarah/2:153, yang berbunyi:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ ٱسْتَعِينُوا۟ بِٱلصَّبْرِ وَٱلصَّلَوٰةِ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ مَعَ ٱلصَّٰبِرِينَ ١٥٣

"Hai orang-orang yang beriman, jadikanlah sabar dan shalat sebagai penolongmu. Sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar" (QS. Al-Baqarah/2:153).

Dalam kutipan ayat di atas, Allah Swt. memerintahkan kaum mukminin untuk meminta pertolongan dalam segala urusan mereka baik dunia maupun akhirat, kesabaran adalah pengendalian dan penjagaan diri terhadap hal yang dibenci. Dan kesabaran ada tiga macam, yaitu sabar dalam ketaatan kepada Allah Swt. hingga mampu menunaikannya, sabar dari kemaksiatan kepada Allah Swt. hingga menjauhinya dan sabar atas takdir-takdir Allah Swt. yang memilukan agar tidak memakinya.

Kesabaran adalah pertolongan yang besar dari segala sesuatu, karena sama sekali tidak ada jalan bagi orang yang tidak bersabar untuk mendapatkan apa yang diinginkannya, khususnya dalam hal ketaatan yang sangat sulit dan berkesinambungan, di mana hal itu sangatlah membutuhkan kesabaran dan keberanian untuk merasakan kepahitan yang menyakitkan, namun jika pelakunya itu konsekuensi dengan kesabaran, niscaya dia akan memperoleh kemenangan, namun bila sebaliknya, niscaya dia tidak akan mendapatkan apa-apa kecuali kehampaan (As-Sa'di, 2007:238).

Sehingga diketahui bahwa kesabaran itu sangatlah dibutuhkan oleh seorang hamba, bahkan menjadi suatu yang darurat dalam setiap kondisi, oleh karena itu Allah Swt. memerintahkan dan mengabarkan bahwasanya Dia beserta orang-orang yang sabar.

Lalu Allah Swt. memerintahkan untuk meminta pertolongan dengan shalat, karena shalat adalah tiang agama dan cahaya kaum mukminin, dan ia adalah penghubung antara seorang hamba dengan Tuhannya. Apabila shalat seorang hamba itu sempurna, ditambah dengan apa yang diwajibkan dan yang disunnahkan padanya, shalat yang terisi oleh kehadiran hati yang merupakan intinya, hingga seorang hamba bila mulai melaksanakan shalat, dia merasa masuk menemui Tuhannya dan berdiri berhadapan dengan-Nya sebagaimana berdirinya seorang pembantu yang bersopan santun dan penuh perhatian dengan apa yang ia bicarakan dan apa yang ia lakukan serta terbuai dalam bermunajat kepada Tuhannya dan berdoa kepada-Nya; tidak salah lagi bahwa shalat itu adalah sebesar-besar penolong dari segala perkara, karena shalat itu mencegah dari perbuatan keji dan mungkar, dan karena kehadiran hati di dalam shalat itu mengharuskan adanya sebuah karakter dalam hati seorang hamba yang mengajaknya kepada pelaksanaan perintah Tuhannya dan menjauhi larangan-Nya, inilah shalat yang diperintahkan oleh Allah Swt. untuk dijadikan penolong dalam segala perkara (As-Sa'di, 2007:238).

Dari tafsir di atas jelas bahwa dengan menggunakan metode tertentu maka apapun masalahnya baik untuk urusan dunia maupun akhirat memiliki selesaian. Sebagaimana firman Allah Swt. di dalam surat al-Insyirah/94:6, yaitu:

إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ٦

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan" (QS. Al-Insyirah/94:6).

Bahwa Allah Swt. memberitahukan bersama kesulitan itu terdapat kemudahan. Kemudian Dia mempertegas berita tersebut, Ibnu Jarir meriwayatkan dari al-Hasan, dia berkata:

> "Nabi Muhammad Saw. pernah keluar rumah pada suatu hari dalam keadaan senang dan gembira, dan beliau juga dalam keadaan tertawa seraya bersabda: *Satu kesulitan itu tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan, sesungguhnya bersama kesulitan itu pasti terdapat kemudahan"* (Ad-Dimasyqi, 2000:498).

Dari uraian di atas jelas bahwa tidak ada kesulitan dan kesempitan yang abadi, Allah Swt. akan memberikan kemudahan dan kelapangan setelahnya.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Bentuk Transformasi Laplace untuk Model *String-Beam*

Ketika diasumsikan model *String-Beam* adalah model linier, maka dapat direduksi menjadi bentuk sebagai berikut:

$$m_1 v_{tt} - T v_{xx} + b_1 v_t = 0$$

$$m_2 u_{tt} + EI u_{xxxx} + b_2 u_t = 0 \tag{3.1}$$

dengan,

m_1	:	Massa per satuan panjang *string* (Kgs^2/m) dengan formula
m_2	:	Massa per satuan panjang dek (Kgs^2/m) dengan formula
T	:	Ketegangan *string*
E	:	Modulus Young
I	:	Momen inersia dek
b_1	:	Koefisien damping pada *string*
b_2	:	Koefisien damping pada dek

dengan kondisi awal

$$v(x,0) = \sin x, v_t(x,0) = 0$$

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 \tag{3.2}$$

dan kondisi batas

$$v(0,t) = v_1(t), v(L,t) = v_2(t)$$

$$u(0,t) = u_1(t), u(L,t) = u_2(t), u_{xx}(0,t) = u_3(t), u_{xx}(L,t) = u_4(t) \tag{3.3}$$

Persamaan (3.1) dapat dihitung dengan menggunakan definisi dari transformasi Laplace, maka:

$$\mathcal{L}\{m_1 v_{tt}\} = \mathcal{L}\left\{m_1 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}\right\}$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dt$$

$$= m_1 \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dt$$

$$= m_1\left(\left[e^{-st}\cdot v_t\right]_0^\infty - \int_0^\infty v_t(-s\cdot e^{-st})dt \right)$$

$$= m_1\left(\left[-v_t\right] + s\int_0^\infty v_t\, e^{-st} dt\right)$$

$$= m_1\left(-v_t + s\left(\left[e^{-st}.v\right]_0^\infty - \int_0^\infty v.-se^{-st}dt\right)\right)$$

$$= m_1\left(-v_t + s\left(\left[-v\right] + s\int_0^\infty v.e^{-st}dt\right)\right)$$

$$= m_1\left(-v_t - sv + s^2\int_0^\infty v e^{-st} dt\right)$$

$$= m_1\left(-v_t - sv + s^2 V\right)$$

$$= m_1(s^2\ V(x,t) - s\,v(x,0) - v_t(x,0))$$

$$= m_1(s^2\ V(x,s) - s\,v(x,0) - v_t(x,0)) \qquad (3.4)$$

$$\mathcal{L}\{-Tv_{xx}\} = \mathcal{L}\left\{-T\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right\}$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\, T\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dt$$

$$= -T\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty e^{-st}\, v dt$$

$$= -T\frac{d^2}{dx^2}\ V(x,s) \qquad (3.5)$$

$$\mathcal{L}\{b_1 v_t\} = \mathcal{L}\left\{b_1\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right\}$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\, b_1\frac{\partial v}{\partial t} dt$$

$$= b_1 \int_0^\infty e^{-st}\, \frac{\partial v}{\partial t} dt$$

$$= b_1\left(\left[e^{-st}\cdot v\right]_0^\infty - \int_0^\infty v(-s\cdot e^{-st})dt \right)$$

$$= b_1\left(\left[-v\right] + s\int_0^\infty v e^{-st} dt\right)$$

$$= b_1\left(-v + sV\right)$$

$$= b_1(sV(x,t) - v(x,0))$$

$$= b_1(sV(x,s) - v(x,0)) \qquad (3.6)$$

$$\mathcal{L}\ m_2 u_{tt} \ = \mathcal{L}\ \ m_2 \frac{\partial^2 u\ \ x,t}{\partial t^2}$$

$$= \ {}_0^{\infty} e^{-st} m_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt$$

$$= m_2 \ {}_0^{\infty} e^{-st}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt$$

$$= m_2 \left(\left[e^{-st} \cdot u_t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u_t (-s \cdot e^{-st}) dt \right)$$

$$= m_2 \left(\left[-u_t \right] + s \int_0^{\infty} u_t\ e^{-st} dt \right)$$

$$= m_2 \left(-u_t + s \left(\left[e^{-st} . u \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u. - se^{-st} dt \right) \right)$$

$$= m_2 \left(-u_t + s \left(\left[-u \right] + s \int_0^{\infty} u.e^{-st} dt \right) \right)$$

$$= m_2 \left(-u_t - su + s^2 \int_0^{\infty} u.e^{-st} dt \right)$$

$$= m_2 \left(-u_t - su + s^2 U \right)$$

$$= m_2 (s^2\ U(x,t) - s\,u(x,0) - u_t(x,0))$$

$$= m_2 (s^2\ U(x,s) - s\,u(x,0) - u_t(x,0)) \tag{3.7}$$

$$\mathcal{L}\ EIu_{xxxx} \ = \mathcal{L}\ \ EI \frac{\partial^4 u\ \ x,t}{\partial x^4}$$

$$= \ {}_0^{\infty} e^{-st} EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} dt$$

$$= EI \frac{\partial^4}{\partial x^4}\ {}_0^{\infty} e^{-st} u dt$$

$$= EI \frac{d^4}{dx^4}\ U(x,s) \tag{3.8}$$

$$\mathcal{L}\ b_2 u_t \ = \mathcal{L}\ \ b_2 \frac{\partial u\ \ x,t}{\partial t}$$

$$= \ {}_0^{\infty} e^{-st} b_2 \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

$$= b_2 \ {}_0^{\infty} e^{-st}\ \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

$$= b_2\left(\left[e^{-st} \cdot u \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u(-s \cdot e^{-st})dt \right)$$
$$= b_2\left(\left[-u \right] + s\int_0^{\infty} u\, e^{-st} dt \right)$$
$$= b_2\left(-u + sU \right)$$
$$= b_2(sU(x,t) - u(x,0))$$
$$= b_2(sU(x,s) - u(x,0)) \qquad (3.9)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (3.4) sampai persamaan (3.9) pada persamaan (3.1) dan dengan mengenakan kondisi-kondisi awalnya maka diperoleh,

$$m_1 \;\; s^2 V \;\; x,s \;\; - s \, \sin x \;\; - 0 \;\;\; + \;\; T \frac{d^2}{dx^2} V \;\; x,s \;\;\; + \;\; b_1 \;\; sV \;\; x,s \;\; - \sin x \;\;\; = 0 \qquad (3.10a)$$

$$m_2 \;\; s^2 U \;\; x,s \;\; - s.0 - 0 \;\;\; + \;\; EI \frac{d^4}{dx^4} U(x,s) \;\; + \;\; b_2 \;\; sU \;\; x,s \;\; - 0 \;\;\; = 0 \qquad (3.10b)$$

persamaan (3.11a) dan (3.11b) dapat dijabarkan menjadi,

$$m_1 s^2 V \;\; x,s \;\; - m_1 s \;\sin x \;\;\; + \;\; T \frac{d^2}{dx^2} V(x,s) \;\; + \;\; b_1 sV \;\; x,s \;\; - b_1 \;\sin x \;\;\; = 0 \qquad (3.11a)$$

$$m_2 s^2 U \;\; x,s \;\; + EI \frac{d^4}{dx^4} U(x,s) + b_2 sU \;\; x,s \;\;\; = 0 \qquad (3.11b)$$

Sehingga bentuk transformasi Laplacenya adalah

$$T \frac{d^2}{dx^2} V \;\; x,s \;\; + (m_1 s^2 + b_1 s) V \;\; x,s \;\; - \;\; m_1 s + b_1 \;\; \sin x = 0 \qquad (3.12a)$$

$$EI \frac{d^4}{dx^4} U \;\; x,s \;\; + (m_2 s^2 + b_2 s) U \;\; x,s \;\;\; = 0 \qquad (3.12b)$$

3.2 Selesaian Analitik untuk Model *String-Beam* dengan Masalah Nilai Awal dan Nilai Batas yang Diberikan

Pada bagian ini, hasil transformasi Laplace pada (3.1) disubstitusikan untuk mendapatkan selesaian dari persamaan *String* yang disajikan pada subbab (3.2.1) dan persamaan *Beam* yang disajikan pada subbab (3.2.2).

3.2.1 Selesaian Persamaan *String* dari Model

Hasil transformasi Laplace untuk persamaan *String* (3.12a) dapat ditulis sebagai berikut,

$$T\frac{d^2}{dx^2}V(x,s) + (m_1 s^2 + b_1 s)V(x,s) = (m_1 s + b_1)\sin x \tag{3.13}$$

yang merupakan persamaan diferensial biasa non homogen.

Menurut Purcell dan Varberg (1999:446), selesaian umum untuk persamaan diferensial biasa didefinisikan sebagai berikut

$$V(x,s) = V_h(x,s) + V_p(x,s) \tag{3.14}$$

dengan $V_h(x,s)$ adalah selesaian umum dari persamaan homogen dan $V_p(x,s)$ adalah selesaian khusus dari persamaan non homogen. Bentuk homogen dari persamaan (3.14) adalah

$$T\frac{d^2}{dx^2}V(x,s) + (m_1 s^2 + b_1 s)V(x,s) = 0 \tag{3.15a}$$

Persamaan (3.15a) dapat ditulis dalam bentuk karakteristik sebagai berikut

$$Tm^2 + (m_1 s^2 + b_1 s)m = 0 \tag{3.15b}$$

Selanjutnya dihitung akar-akar m sebagai berikut

$$m_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{T(m_1 s^2 + b_1 s)}{T}} \tag{3.15c}$$

Artinya akar-akar m imajiner, sehingga dapat dinyatakan selesaian $V_h(x,s)$ sebagai berikut

$$V_h(x,s) = c_1\cos\left(\sqrt{\frac{T(m_1 s^2 + b_1 s)}{T}}\,x\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\frac{T(m_1 s^2 + b_1 s)}{T}}\,x\right) \tag{3.15d}$$

Sedangkan untuk $V_p(x,s)$, karena pada persamaan (3.14) $f(x) = (m_1 s + b_1)\sin x$ dengan menggunakan Tabel 2.1, maka $V_p(x,s)$ dapat ditulis sebagai berikut

$$V_p \;\; x,s \;\; = A\cos(x) + B\sin(x) \tag{3.16}$$

Selanjutnya dihitung koefisien A dan B dengan langkah-langkah sebagai berikut

$$\frac{d}{dx}V_p \;\; x,s \;\; = -A\sin(x) + B\cos(x) \tag{3.17a}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}V_p \;\; x,s \;\; = -A\cos \;\; x \;\; - B\sin(x) \tag{3.17b}$$

Substitusikan persamaan (3.17) dan (3.18b) ke persamaan (3.14b), diperoleh

$$T \;\; -A\cos \;\; x \;\; - B\sin(x) \;\; + (m_1s^2 + b_1s) \;\; A\cos(x) + B\sin(x) \;\; =$$

$$m_1s + b_1 \;\; \sin x \tag{3.18}$$

Dari sini dapat disimpulkan bahwa

$$-T + m_1s^2 + b_1s \;\; A = 0$$

Ini artinya $-T + m_1s^2 + b_1s = 0$ atau $A = 0$

Padahal $-T + m_1s^2 + b_1s \neq 0$ maka $A = 0$ (3.19)

dan

$$m_1s^2 + b_1s - T \;\; B = (m_1s + b_1)$$

$$B = \frac{m_1s + b_1}{m_1s^2 + b_1s - T} \tag{3.20}$$

Substitusikan hasil dari (3.20) dan (3.21) ke dalam (3.17), sehingga diperoleh

$$V_p \;\; x,s \;\; = 0.\cos(x) + \frac{m_1s + b_1}{m_1s^2 + b_1s - T}\sin(x)$$

$$V_p \;\; x,s \;\; = \frac{m_1s + b_1}{m_1s^2 + b_1s - T}\sin(x) \tag{3.21}$$

Substitusikan hasil dari (3.15d) dan (3.21) ke dalam (3.14), maka diperoleh selesaian umum sebagai berikut

$$V \;\; x,s \;\; = c_1\cos \;\; \frac{\overline{T(m_1s^2 + b_1s)}}{T}x \;\; + c_2\sin \;\; \frac{\overline{T(m_1s^2 + b_1s)}}{T}x \;\; +$$

$$\frac{m_1s + b_1}{m_1s^2 + b_1s - T}\sin(x) \tag{3.22}$$

Dalam hal ini, transformasi Laplace dari kondisi batasnya adalah

$$V(0,s) = V_1(s) \text{ dan } V(L,s) = V_2(s) \tag{3.23}$$

Sehingga diperoleh

$$V(0,s) = c_1 = V_1(s) \tag{3.24}$$

dan

$$V(L,s) = V_1(s)\cos\left(\frac{\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{T}L\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{T}L\right) + \frac{m_1s+b_1}{m_1s^2+b_1s-T}\sin(L) = V_2(s)$$

$$c_2 = \frac{-V_1(s)\cos\left(\frac{\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{T}L\right) - \frac{m_1s+b_1}{m_1s^2+b_1s-T}\sin(L) + V_2(s)}{\sin\left(\frac{\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{T}L\right)} \tag{3.25}$$

Dengan mensubstitusikan nilai c_1 dan c_2 maka diperoleh

$$V(x,s) = V_1(s)\cos\left(\frac{\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{T}x\right) + \frac{-V_1(s)\cos\left(\frac{\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{T}L\right) - \frac{m_1s+b_1}{m_1s^2+b_1s-T}\sin(L) + V_2(s)}{\sin\left(\frac{\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{T}L\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{T}x\right) + \frac{m_1s+b_1}{m_1s^2+b_1s-T}\sin(x) \tag{3.26}$$

Selanjutnya, untuk memperoleh selesaian dari persamaan *String* (3.1) maka dilakukan invers transformasi Laplace pada persamaan (3.26), akan tetapi pada kasus ini ada beberapa suku dari persamaan (3.26) yang tidak dapat diintegralkan seperti $\cos\left(\frac{\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{T}x\right)$ sehingga tidak diperoleh hasil dari invers transformasi Laplace sebagai selesaian akhir dari persamaan *String*.

3.2.2 Selesaian Persamaan *Beam* dari Model

Hasil transformasi Laplace untuk persamaan *Beam* (3.12b) merupakan persamaan diferensial biasa homogen. Menurut Purcell dan Varberg (1999:446), selesaian umum untuk persamaan diferensial biasa seperti persamaan (3.12b) adalah sebagai berikut,

Persamaan (3.12b) dapat ditulis dalam bentuk karakteristik berikut

$$EIm^4 + (m_2s^2 + b_2s)m = 0 \tag{3.27}$$

Selanjutnya dihitung akar-akar m sebagai berikut

$$m_{1,2} = \pm\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}},\ m_{3,4} = \pm i\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}} \tag{3.28}$$

Artinya akar-akar m riil dan imajiner, sehingga dapat dinyatakan selesaian $U(x,s)$ sebagai berikut

$$U(x,s) = c_1e^{\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}x} + c_2e^{-\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}x} +$$

$$c_3\cos\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}x + c_4\sin\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}x \tag{3.29}$$

Dalam hal ini, transformasi Laplace dari kondisi batasnya adalah

$$U(0,s) = U_1(s), U(L,s) = U_2(s), U_{xx}(0,s) = U_3(s), U_{xx}(L,s) = U_4(s) \tag{3.30}$$

Sehingga diperoleh

$$U(0,s) = c_1 + c_2 + c_3 = U_1(s) \tag{3.31}$$

dan

$$U(L,s) = c_1e^{\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}L} + c_2e^{-\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}L} +$$

$$c_3\cos\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}L + c_4\sin\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}L = U_2(s) \tag{3.32}$$

dan

$$U_{xx}(0,s) = \left(\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}\right)^2 c_1 + \left(\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}\right)^2 c_2 - \left(\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}\right)^2 c_3$$

$$= U_3(s) \tag{3.33}$$

dan

$$U_{xx}(L,s) = \left(\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}\right)^2 c_1\, e^{\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}L} + \left(\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}\right)^2 c_2\, e^{-\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}L} -$$

$$\left(\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}\right)^2 c_3 \cos\left(\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}L\right) - \left(\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}\right)^2 c_4 \sin\left(\sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}L\right)$$

$$= U_4(s) \tag{3.34}$$

Kemudian, dari persamaan (3.31) sampai dengan persamaan (3.34) akan terbentuk matriks sehingga diperoleh nilai c_1, c_2, c_3 dan c_4 sebagai berikut:

$$c_1 = \frac{U_2e^z}{2e^{2z}-2} - \frac{1}{2}\frac{U_3}{w^2(e^{2z}-1)} - \frac{U_1}{2e^{2z}-2} + \frac{1}{2}\frac{U_4e^z}{w^2(e^{2z}-1)}$$

$$c_2 = \frac{U_1e^{2z}}{2e^{2z}-2} - \frac{U_2e^z}{2e^{2z}-2} - \frac{1}{2}\frac{U_4e^z}{w^2(e^{2z}-1)} + \frac{1}{2}\frac{U_3e^{2z}}{w^2(e^{2z}-1)}$$

$$c_3 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}\frac{u_3}{w^2}$$

$$c_4 = \frac{1}{2}\frac{u_2}{\sin z} - \frac{1}{2}\frac{u_4}{w^2 \sin z} - \frac{1}{2}\frac{u_1\cos z}{\sin z} + \frac{1}{2}\frac{u_3\cos z}{w^2 \sin z}$$

dengan, $z = \sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}L$ dan $w = \sqrt[4]{\frac{-m_2s^2+b_2s}{EI}}$

Kemudian dengan mensubstitusikan nilai c_1, c_2, c_3 dan c_4 maka diperoleh

$$U(x,s) = \left(\frac{U_2e^z}{2e^{2z}-2} - \frac{1}{2}\frac{U_3}{w^2(e^{2z}-1)} - \frac{U_1}{2e^{2z}-2} + \frac{1}{2}\frac{U_4e^z}{w^2(e^{2z}-1)}\right)e^{wx} +$$

$$\left(\frac{U_1e^{2z}}{2e^{2z}-2} - \frac{U_2e^z}{2e^{2z}-2} - \frac{1}{2}\frac{U_4e^z}{w^2(e^{2z}-1)} + \frac{1}{2}\frac{U_3e^{2z}}{w^2(e^{2z}-1)}\right)e^{-wx} + \left(\frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}\frac{u_3}{w^2}\right)\cos wx +$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{u_2}{\sin z} - \frac{1}{2}\frac{u_4}{w^2 \sin z} - \frac{1}{2}\frac{u_1\cos z}{\sin z} + \frac{1}{2}\frac{u_3\cos z}{w^2 \sin z}\right)\sin wx \tag{3.35}$$

Selanjutnya, untuk memperoleh selesaian dari persamaan *Beam* (3.1) maka dilakukan invers transformasi Laplace pada persamaan (3.35), akan tetapi pada kasus ini ada beberapa suku dari persamaan (3.35) yang tidak dapat diintegralkan seperti $\cos\left(\sqrt[4]{\frac{-(m_2s^2+b_2s)}{EI}}L\right)$ sehingga tidak diperoleh hasil dari invers transformasi Laplace sebagai selesaian akhir dari persamaan *Beam*.

3.3 Analisis Keabsahan Selesaian untuk Model *String-Beam*

3.3.1 Analisis Keabsahan Selesaian untuk Persamaan *String*

Diketahui selesaian yang diperoleh (3.26) setelah kondisi batas dimasukkan adalah sebagai berikut,

$$V(x,s)=V_1(s)\cos\left(\frac{\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{T}x\right)+$$

$$\frac{-V_1(s)\cos\left(\frac{\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{T}L\right)-\frac{m_1s+b_1}{m_1s^2+b_1s-T}\sin(L)+V_2(s)}{\sin\left(\frac{\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{T}L\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{T}x\right)+$$

$$\frac{m_1s+b_1}{m_1s^2+b_1s-T}\sin(x)$$

Untuk membuktikan selesaian di atas benar maka dilakukan penurunan-penurunan pada selesaian (3.26) tersebut. Turunan dari $V(x,s)$ terhadap x adalah sebagai berikut

$$V(x,s)=-\frac{\frac{m_1s+b_1}{m_1s^2+b_1s-T}\sin(L)}{\sin\left(\frac{\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{T}L\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{T}x\right)+\frac{m_1s+b_1}{m_1s^2+b_1s-T}\sin(x)$$

$$\frac{dV}{dx}(x,s)=-\frac{(m_1s+b_1)\sin(L)\cos\left(\frac{\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{T}x\right)\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{(m_1s^2+b_1s-T)\sin\left(\frac{\sqrt{T(m_1s^2+b_1s)}}{T}L\right)T}+\frac{m_1s+b_1}{m_1s^2+b_1s-T}\cos(x)$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}\ \ x,s\ \ = \frac{m_1s+b_1\ \ \sin\ L\ \ \sin\ \sqrt{\frac{T\ m_1s^2+b_1s}{T}}x\ \ \ m_1s^2+b_1s}{m_1s^2+b_1s-T\ \ \sin\ \sqrt{\frac{T\ m_1s^2+b_1s}{T}}L\ \ T} - \frac{m_1s+b_1}{m_1s^2+b_1s-T}\sin\ x$$

Substitusi hasil penuruna di atas ke dalam persamaan (3.12a) maka diperoleh

$$T\ \ \frac{m_1s+b_1\ \ \sin\ L\ \ \sin\ \sqrt{\frac{T\ m_1s^2+b_1s}{T}}x\ \ \ m_1s^2+b_1s}{m_1s^2+b_1s-T\ \ \sin\ \sqrt{\frac{T\ m_1s^2+b_1s}{T}}L\ \ T} - \frac{m_1s+b_1}{m_1s^2+b_1s-T}\sin\ x\ \ \ +(m_1s^2 +$$

$$b_1s)\ \ -\frac{\frac{m_1s+b_1}{m_1s^2+b_1s-T}\sin\ L}{\sin\ \sqrt{\frac{T\ m_1s^2+b_1s}{T}}L}\sin\ \sqrt{\frac{T\ m_1s^2+b_1s}{T}}\ x\ \ +\frac{m_1s+b_1}{m_1s^2+b_1s-T}\sin\ x\ \ \ -\ m_1s+b_1\ \ \sin x=0$$

Sehingga diperoleh

$$-\frac{m_1s+b_1\ \ T}{m_1s^2+b_1s-T}\sin\ x\ \ +\frac{m_1s+b_1\ \ (m_1s^2+b_1s)}{m_1s^2+b_1s-T}\sin\ x\ \ -\ m_1s+b_1\ \ \sin x=0$$

Jadi, dengan terpenuhi bentuk dasarnya maka selesaian tersebut dikatakan benar.

3.3.2 Analisis Keabsahan Selesaian untuk Persamaan *Beam*

Diketahui selesaian yang diperoleh (3.35) setelah kondisi batas dimasukkan adalah sebagai berikut,

$$U\ \ x,s\ \ = \frac{U_2e^z}{2e^{2z}-2}-\frac{1}{2}\frac{U_3}{w^2\ \ e^{2z}-1}-\frac{U_1}{2e^{2z}-2}+\frac{1}{2}\frac{U_4e^z}{w^2\ \ e^{2z}-1}\ \ e^{wx}+\ \frac{U_1e^{2z}}{2e^{2z}-2}-\frac{U_2e^z}{2e^{2z}-2}-$$

$$\frac{1}{2}\frac{U_4e^z}{w^2\ \ e^{2z}-1}+\frac{1}{2}\frac{U_3e^{2z}}{w^2\ \ e^{2z}-1}\ \ e^{-wx}+\ \frac{1}{2}u_1-\frac{1}{2}\frac{u_3}{w^2}\ \ \cos wx+\ \frac{1}{2}\frac{u_2}{\sin z}-\frac{1}{2}\frac{u_4}{w^2\sin z}-$$

$$\frac{1}{2}\frac{u_1\cos z}{\sin z}+\frac{1}{2}\frac{u_3\cos z}{\mathrm{w}^2\sin z}\ \ \sin wx$$

Untuk membuktikan selesaian di atas benar maka dilakukan penurunan-penurunan pada selesaian (3.35) tersebut yang kemudian disubstitusi ke dalam persamaan (3.12b) maka diperoleh

$$EI\frac{d^4}{dx^4}U\ \ x,s\ \ + (m_2s^2 + b_2s)U\ \ x,s\ \ = 0$$

$$EI(0) + (m_2s^2 + b_2s)(0) = 0$$

Jadi, dengan terpenuhi bentuk dasarnya maka selesaian tersebut dikatakan benar.

3.4 Transformasi Laplace dalam Al-Quran

Sebagaimana uraian sebelumnya, bahwa Allah Swt. telah mempersiapkan metode terbaik dalam menghadapi setiap masalah yaitu salah satunya dengan sabar. Kesabaran adalah pertolongan yang besar dari segala sesuatu, karena sama sekali tidak ada jalan bagi orang yang tidak bersabar untuk mendapatkan apa yang diinginkannya termasuk mendapatkan selesaian untuk masalah yang tengah dihadapi.

Sabar dalam hal ini bukan berarti pasrah dan menyerah pada nasib. Sabar adalah kegigihan untuk tetap berpegang teguh kepada ketetapan Allah Swt. (ketetapan hati dalam menerima ketentuan Allah Swt., karena apapun yang menimpa adalah ketentuan-Nya). Jadi kesabaran itu adalah sebuah proses aktif, kolaborasi antara ridlo (rela menerima takdir Allah Swt.) dan ikhtiar (mencari selesaian). Kesabaran bukan proses diam dan pasif, melainkan proses aktif, yaitu akal aktif, tubuh aktif dan iman yang aktif. Justru dari masalah yang disikapi dengan kesabaran akan turun rahmat dan petunjuk dari Allah.

Seperti halnya pada model *String-Beam*, yaitu model dengan persamaan diferensial parsial yang menjelaskan fenomena dawai gantung. Model ini memuat $v(x,t)$ sebagai besar pergerakan dari vibrasi *string* dan $u(x,t)$ sebagai pergerakan dek dari jembatan. Dibutuhkan proses aktif dalam menghadapi model ini yaitu aktif dalam mencari penyelesaiannya. Salah satu metode penyelesaian yang dapat digunakan adalah transformasi Laplace. Transformasi Laplace sendiri adalah suatu metode yang mentransformasikan persamaan diferensial dari domain waktu *t* menjadi domain baru dengan variabel bebas *s*.

Kembali pada hakikat dan makna sabar dalam menghadapi masalah yaitu, bukan hanya semata-mata menerima permasalahan tetapi juga berikhtiar untuk menyelesaikan permasalahan yang sedang dihadapi tersebut. Transformasi Laplace dalam penelitian ini merupakan salah satu wujud ikhtiar untuk menyelesaikan model *String-Beam*. Sebagaimana firman Allah Swt. di dalam surat al-Insyirah/94:6, yaitu:

إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ٦

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan" (QS. Al-Insyirah/94:6).

Bahwa Allah Swt. memberitahukan bersama kesulitan itu terdapat kemudahan. Kemudian Dia mempertegas berita tersebut, Ibnu Jarir meriwayatkan dari al-Hasan, dia berkata:

> "Nabi Muhammad Saw. pernah keluar rumah pada suatu hari dalam keadaan senang dan gembira, dan beliau juga dalam keadaan tertawa seraya bersabda: *Satu kesulitan itu tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan, sesungguhnya bersama kesulitan itu pasti terdapat kemudahan" (Ad-Dimasyqi, 2000:498).*

Dari uraian di atas jelas bahwa tidak ada kesulitan dan kesempitan yang abadi, Allah Swt. akan memberikan kemudahan dan kelapangan setelahnya. Hal ini berarti setiap masalah pasti memiliki penyelesaian.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan di atas diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Hasil analisis transformasi Laplace yang diterapkan untuk persamaan *String* dan persamaan *Beam* berturut-turut disajikan dalam bentuk berikut:

$$T\frac{d^2}{dx^2}V(x,s) + (m_1s^2+b_1s)V(x,s) - (m_1s+b_1)\sin x = 0$$

$$EI\frac{d^4}{dx^4}U(x,s) + (m_2s^2+b_2s)U(x,s) = 0$$

2. Selesaian yang diperoleh untuk persamaan *String* sebagai berikut:

$$V(x,s) = V_1(s)\cos\left(\sqrt{\frac{T(m_1s^2+b_1s)}{T}}\,x\right) +$$

$$\frac{-V_1(s)\cos\left(\sqrt{\frac{T(m_1s^2+b_1s)}{T}}\,L\right) - \frac{m_1s+b_1}{m_1s^2+b_1s-T}\sin(L) + V_2(s)}{\sin\left(\sqrt{\frac{T(m_1s^2+b_1s)}{T}}\,L\right)}\sin\left(\sqrt{\frac{T(m_1s^2+b_1s)}{T}}\,x\right)$$

$$+\frac{m_1s+b_1}{m_1s^2+b_1s-T}\sin(x),$$

Dan untuk persamaan *Beam* diperoleh selesaian sebagai berikut:

$$U(x,s) = \left(\frac{U_2e^z}{2e^{2z}-2} - \frac{1}{2}\frac{U_3}{w^2(e^{2z}-1)} - \frac{U_1}{2e^{2z}-2} + \frac{1}{2}\frac{U_4e^z}{w^2(e^{2z}-1)}\right)e^{wx} +$$

$$\left(\frac{U_1e^{2z}}{2e^{2z}-2} - \frac{U_2e^z}{2e^{2z}-2} - \frac{1}{2}\frac{U_4e^z}{w^2(e^{2z}-1)} + \frac{1}{2}\frac{U_3e^{2z}}{w^2(e^{2z}-1)}\right)e^{-wx} +$$

$$\left(\frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}\frac{u_3}{w^2}\right)\cos wx + \left(\frac{1}{2}\frac{u_2}{\sin z} - \frac{1}{2}\frac{u_4}{w^2\sin z} - \frac{1}{2}\frac{u_1\cos z}{\sin z} + \frac{1}{2}\frac{u_3\cos z}{w^2\sin z}\right)\sin wx$$

untuk $z = \sqrt[4]{\frac{-(m_2s^2+b_2s)}{EI}}\,L$ dan $w = \sqrt[4]{\frac{-(m_2s^2+b_2s)}{EI}}$

3. Dari hasil pembahasan penelitian ini disimpulkan bahwa selesaian $V(x,s)$ dan $U(x,s)$ terbukti benar karena memenuhi bentuk dasarnya.

4.2 Saran

Dalam penelitian ini invers transformasi Laplace untuk $V(x,s)$ dan $U(x,s)$ gagal mendapatkan $V(x,t)$ dan $U(x,t)$. Oleh karena itu, disarankan penelitian selanjutnya untuk menggunakan metode yang lain dalam mendapatkan $V(x,t)$ dan $U(x,t)$ sebagai hasil invers dari $V(x,s)$ dan $U(x,s)$ nya

DAFTAR RUJUKAN

Al-Qurthubi. 2009. *Tafsir Al Qurthubi*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Ad-Dimasyqi, A.F.I. 2000. *Tafsir Ibnu Katsir Juz 5*. Terjemahan B.A. Bakar. Bandung: Sinar baru Algensindo.

As-Sa'di, A. 2007. *Tafsir As-sa'di*. Jakarta: Pustaka Sahifa.

Dita, M.F. & Widodo, B. 2013. Karakteristik Aliran Panas dalam Logam Penghantar Listrik. *Jurnal Teknik Pomits*, 1 (1): 1-5.

Drábek, P., Leinfelder, H., & Tajcová, G. 1999. Coupled String-Beam Equations As a Model of Suspension Bridges. *Applications of Mathematics*, 44 (2): 97-142.

Imran, N. & Mohyud-Din, S.T.. 2013. Decomposition Method For Fractional Partial Differential Equation (PDEs) Using Laplace Transformation. *International Journal of Physical Sciences*, 8 (16): 684-688.

Kusumastuti, A. 2015. *Simulasi Numerik Model Gelombang Torsi Verktikal*. Tesis tidak dipublikasikan. Malang: Program Pascasarjana Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya.

Mandasari, R. 2015. *Transformasi Laplace pada Persamaan Telegraf*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Munawaroh, Z., Chotim, M., & Wuryanto. 2014. Selesaian Sistem Osilasi Dua Derajat Kebebasan pada Rangkaian Pegas Gandeng dengan Peredam dan Gaya Luar. *Unnes Journal of Mathematics*, 3 (1): 1-5.

Mursita, D. 2009. *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains.

Ohene, K.R. 2012. "A Mathematical Model of a Suspension Bridge–Case Study: Adomi Bridge, Atimpoku, Ghana". *Global Advanced Research Journal of Engineering, Technology, and Innovation*. 1(3), 047-062.

Purcell, E.J. & Varberg, D.. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2, Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.

Spiegel, M.R. 1994. *Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuwan*. Jakarta: Erlangga.

Spiegel, M.R. 1999. *Transformasi Laplace*. Jakarta: Erlangga.

Tang, K.T. 2011. *Mathematical Methods for Engineers and Scientists 1,2,3*. Terjemahan I. Muttaqien. Bandung: Jurusan Fisika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Gunung Djati.

Wibowo, H.B. 2014. *Cabang Pembagian Ilmu Matematika*. (Online), (http://hadiberantaswibowo.blogspot.co.id/2014/12/cabang-pembagian-ilmu-matematika.html), diakses 17 Oktober 2015.

Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics, Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Lampiran 1: Program Matlab untuk Mencari Nilai c_1, c_2, c_3 dan c_4

```
clc,clear all
syms z w U1 U2 U3 U4

A=[1 1 1 0; exp(z) exp(-z) cos(z) sin(z);...
    w^2 w^2 -w^2 0;...
    w^2*exp(z) w^2*exp(-z) -(w^2)*cos(z) -
(w^2)*sin(z)];
B=[U1; U2;...
    U3; U4];

C=inv(A);

D=C*B
```

RIWAYAT HIDUP

Lilis Suryani dilahirkan di Tarakan pada tanggal 01 November 1994, anak tengah dari 3 bersaudara, putri dari pasangan bapak Sumarto dan ibu Sulastri. Pendidikan pertama diselesaikan di kampung halaman di SDN 024 Tarakan yang ditamatkan pada tahun 2006.

Pada tahun yang sama dia melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMPN 2 Tarakan dan diselesaikan pada tahun 2009, kemudian dia melanjutkan pendidikan menengah atas di SMAN 1 Tarakan dan menamatkan pendidikan tersebut pada tahun 2012. Jenjang pendidikan berikutnya ditempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SNMPTN Undangan dengan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

Dia dapat dihubungi via email: lilis.suryani318@gmail.com

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lilis Suryani
Nim : 12610012
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Analisis Transformasi Laplace Pada *String-Beam Model*
Pembimbing I : Ari Kusumastuti M.Pd M.Si
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	04 Desember 2015	Konsultasi Bab I & Bab II	1.
2.	07 Desember 2015	Konsultasi Agama Bab I & Bab II	2.
3.	01 Februari 2016	Revisi Bab I & Bab II	3.
4.	05 Februari 2016	Revisi Agama Bab I & II	4.
5.	22 Juli 2016	Konsultasi Bab III	5.
6.	29 Juli 2016	Konsultasi Bab IV	6.
7.	03 Agustus 2016	Revisi Bab III & Bab IV	7.
8.	04 Agustus 2016	Konsultasi Agama Bab III & IV	8.
9.	05 Agustus 2016	Konsultasi Bab III	9.
10.	09 Agustus 2016	Revisi Agama Bab III	10.
11.	12 Agustus 2016	Konsultasi Bab IV	11.
12.	14 Agustus 2016	Revisi Agama Bab IV	12.
13.	15 Agustus 2016	ACC Keseluruhan	13.
14.	15 Agustus 2016	ACC Agama Keseluruhan	14.

Malang, 16 Agustus 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001