F-INDEX PADA GRAF JACOBSON DARI RING BILANGAN BULAT MODULO $3p$

SKRIPSI

OLEH:
SHAHNAZ LATIFATUL JANNAH
NIM. 18610019

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

F-INDEX PADA GRAF JACOBSON DARI RING BILANGAN BULAT MODULO $3p$

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
SHAHNAZ LATIFATUL JANNAH
NIM. 18610019

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

F-INDEX PADA GRAF JACOBSON DARI RING BILANGAN BULAT MODULO $3p$

SKRIPSI

Oleh
Shahnaz Latifatul Jannah
NIM. 18610019

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 03 November 2023

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.	Ach. Nasichuddin, M.A.
NIP. 19870218 202321 1 018	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

F-INDEX PADA GRAF JACOBSON DARI RING BILANGAN BULAT MODULO $3p$

SKRIPSI

Oleh
Shahnaz Latifatul Jannah
NIM. 18610019

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal, 17 November 2023

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.	....
Anggota Penguji 1	: Intan Nisfulaila, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.	....
Anggota Penguji 3	: Ach. Nasichuddin, M.A.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Shahnaz Latifatul Jannah

NIM : 18610019

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : *F-Index* pada Graf Jacobson dari Ring Bilangan Bulat Modulo $3p$

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi ini merupakan karya saya sendiri, bukan plagiasi dari karya yang telah ditulis atau diterbitkan orang lain. Adapun pendapat atau temuan orang lain dalam tugas skripsi ini dikutip atau dirujuk sesuai kode etik penulisan karya ilmiah dan dicantumkan dalam daftar pustaka. Apabila dikemudian hari ternyata skripsi ini terdapat unsur-unsur plagiasi, maka saya bersedia untuk diproses sesuai dengan peraturan yang berlaku.

Malang, 17 November 2023
Yang membuat pernyataan,

10000 METERAI TEMPEL 03939AJX969434256

Shahnaz Latifatul Jannah
NIM. 18610019

MOTTO

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan, sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan"

(Q.S. Al-Insyirah: 5-6)

"Dan cukuplah Allah sebagai saksi"

(Q.S. Al-Fath: 28)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini dipersembahkan untuk:

Kedua orang tua tercinta yaitu Bapak Asdali dan Ibu Aminatus Zuhriya serta adik tercinta yaitu Dwi Putri Humairoh yang selalu mendo'akan, menasihati, dan memberi dukungan kepada penulis.

Seluruh guru dan dosen yang telah memberikan ilmu dan wawasannya kepada penulis, serta sahabat dan teman-teman yang telah memberi semangat kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji dan syukur kepada Allah SWT karena atas rahmatnya dapat menyelesaikan penelitian skripsi dengan judul "*F-Index* pada Graf Jacobson dari Ring Bilangan Bulat Modulo $3p$" sebagai salah satu syarat dalam mendapatkan gelar Sarjana Matematika (S. Mat) di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam semoga juga tetap tercurah kepada junjungan kita Nabi Besar Muhammad Saw yang telah membimbing kita dari zaman jahiliyah menuju zaman yang terang (Islam).

Dalam proses penyelesaiannya, penulis mendapat banyak pelajaran dan pengalaman baik secara langsung atau tidak dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terimakasih sebesar-besarnya disampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang senantiasa membimbing, menasihati, dan memberi arahan kepada penulis.
5. Ach. Nasichuddin, M.A., selaku dosen pembimbing II yang senantiasa membimbing, menasihati, dan memberi arahan kepada penulis.

6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang sudah memberikan ilmu dan arahan kepada penulis.
7. Bapak Asdali, Ibu Aminatus Zuhriya, dan Dwi Putri Humairoh yang selalu mendo'akan, memberi nasihat dan dukungan kepada penulis.
8. Seluruh teman program studi matematika angkatan 2018, terimakasih atas semua pengalamannya selama masa kuliah.
9. Semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu-persatu, terimakasih atas arahan, dukungan, dan bantuannya kepada penulis.

Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat baik bagi penulis maupun siapa saja yang membaca dan mempelajarinya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 17 November 2023

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Jannah, Shahnaz Latifatul, 2023. ***F-Index* pada Graf Jacobson dari Ring Bilangan Bulat Modulo $3p$**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Ach. Nasichuddin, M.A.

Kata kunci: *F-Index*, Graf Jacobson, Ring Bilangan Bulat Modulo $3p$.

Misalkan R adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan. Jacobson radical dinotasikan dengan $J(R)$ adalah irisan dari semua ideal maksimal pada R. Graf Jacobson dari R dinotasikan dengan $\mathfrak{J}_{\mathrm{R}}$ diartikan sebagai graf dengan himpunan titik $V(\mathfrak{J}_{\mathrm{R}}) = R \backslash J(R)$ sedemikian hingga dua titik yang berbeda $x, y \in V(\mathfrak{J}_{\mathrm{R}})$ adalah terhubung langsung jika dan hanya jika $1 - xy \notin U(R)$. Penelitian ini difokuskan untuk mencari rumus umum dari *F-Index* pada Graf Jacobson dari Ring Bilangan Bulat Modulo $3p$, dengan $p \geq 5$ dan p adalah bilangan prima. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini ialah seperti berikut:

$$F\left(\mathfrak{J}_{Z_{3p}}\right) = (2p-2)\cdot(p+1)^3 + (p-3)\cdot 3^3 + 2\cdot(p-1)^3 + 2^4.$$

ABSTRACT

Jannah, Shahnaz Latifatul, 2023. **On the F-Index of Jacobson Graph of the Integer Ring Modulo $3p$**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Ach. Nasichuddin, M.A.

Keywords: F-Index, Jacobson Graph, Integer Ring Modulo 3p.

Let (R) be a commutative ring with unity. Jacobson radical denoted by $J(R)$ is the intersection of all maximal ideals in R. Jacobson's graph of R denoted by is $\mathfrak{J}_{\mathrm{R}}$ defined as a graph with a set of points $V(\mathfrak{J}_{\mathrm{R}}) = R \setminus J(R)$ such that two distinct points $x, y \in V(\mathfrak{J}_{\mathrm{R}})$ is directly connected if and only if $1 - xy \notin U(R)$. This research is focused on finding the general formula of the F-Index on the Jacobson Graph of the Integer Ring Modulo $3p$, where $p \geq 5$ and p is prime. The results obtained from this study is as follows:

$$F\left(\mathfrak{J}_{Z_{3p}}\right) = (2p-2) \cdot (p+1)^3 + (p-3) \cdot 3^3 + 2 \cdot (p-1)^3 + 2^4.$$

مستخلص البحث

الجنة، شهنز لطيفة، ٢٠٢٣. ***F-Index* على الرسم البياني جاكوبسون للحلقة صحيحة *Modulo* $\boldsymbol{3p}$**. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) محمد نافع جوهري، الماجستير. (٢) أحمد ناصح الدين، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: *F-Index*، الرسم البياني جاكوبسون *(Jacobson)*، حلقة صحيحة *Modulo* $3p$.

تكون R الحلقة التبادلية ولها عناصر وحدنية. وأما جاكوبسون راديكال *(Jacobson Radical)* هو قطعت من العليا الذي يكون في الحلقة (R). والرسم البياني جاكوبسون *(Jacobson)* من الحلقة يسمى $\mathfrak{J}_{\mathrm{R}}$ ومعنها كلرسمى البياني مع المجموعة من النقاط $V(\mathfrak{J}_{\mathrm{R}}) = R \backslash J(R)$ حتى يصل ألى النقطتين المختلفتين $x, y \in V(\mathfrak{J}_{\mathrm{R}})$ وهو ستصل مباشرة إذا كانت $1 - xy \notin U(R)$. ويركز هذا البحث العلمي للبحث عن الصيغة العام من *F-Index* للرسم البياني جاكوبسون *(Jacobson)* من الحلقة صحيحة *Modulo* $3p$، و $p \geq 5$ و p هو العدد الرئيسي. والنتيجة من هذا البحث هو:

$$F\left(\mathfrak{J}_{Z_{3p}}\right) = (2p-2) \cdot (p+1)^3 (p-3) \cdot 3^3 + 2 \cdot (p-1)^3 + 2^4.$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu matematika memiliki cabang yang sangat banyak, salah satu cabang dari ilmu matematika adalah teori graf. Graf G adalah pasangan terurut dari dua himpunan yaitu terdiri dari himpunan berhingga yang takkosong $V(G)$ dari elemen yang disebut titik (*vertex*) dan himpunan berhingga $E(G)$ dari pasangan berurutan yang berbeda dari elemen $V(G)$ yang disebut sisi (*edge*) (Wilson, 2010).

Teori graf dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, seperti halnya membantu meringankan permasalahan orang lain. Allah berfirman dalam surah Al-Hujurat ayat 10 yang artinya:

"Sesungguhnya orang-orang mukmin itu bersaudara, karena itu damaikanlah antara kedua saudaramu (yang berselisih) dan bertakwalah kepada Allah agar kamu mendapat rahmat."

Ayat di atas menjelaskan tentang seluruh orang mukmin adalah bersaudara. Janganlah berbuat dzalim diantara keduanya. Orang yang membantu permasalahan saudaranya maka Allah akan membantu menyelesaikan masalahnya. Menurut Shihab (2005) ayat di atas menjelaskan bahwa persatuan dan kesatuan, serta hubungan harmonis antar anggota masyarakat kecil atau besar, akan melahirkan limpahan rahmat bagi mereka semua. Di sisi lain, perpecahan dan keretakan dalam hubungan dapat menyebabkan lahirnya bencana untuk mereka, yang pada puncaknya dapat melahirkan pertumpahan darah dan perang saudara.

Pada tahun 2015, Furtula dan Gutman meninjau indeks baru. Mereka membandingkan indeks tersebut dengan indeks Zagreb pertama dan menunjukkan bahwa indeks tersebut mirip dengan indeks Zagreb pertama. Indeks tersebut diistilahkan sebagai *Forgotten Topological index* atau *F-Index*. *Forgotten Topological index* atau *F-Index* diartikan sebagai jumlah pangkat tiga dari derajat setiap titik u pada graf G yang dilambangkan dengan $F(G) = \sum_{u \in V(G)} \deg(u)^3$ dimana $\deg(u)$ diartikan sebagai derajat titik u adalah jumlah titik yang terhubung langsung dengan titik u. Kemampuan prediksi *F-Index* bahkan lebih baik daripada indeks Zagreb pertama untuk faktor asentris dan entropi. Fakta ini memberikan alasan bahwa mengapa *F-Index* berguna untuk menguji sifat kimia dan farmakologi dari struktural molekul obat. Dengan demikian, *F-Index* ini menarik perhatian tidak hanya di dunia akademis tetapi juga di industri seperti teknik farmasi, dan lain sebagainya (Havare & Havare, 2020). Penelitian sebelumnya yang membahas tentang *F-Index* telah dilakukan oleh Akhter dan Imran (2017) yang membahas tentang Perhitungan *F-Index* dari Empat Operasi pada Graf. Havare dan Havare (2020) yang membahas tentang Perhitungan *F-Index* dan *Co-Index* untuk Nanomaterial Berbasis Karbon. Fajriyah (2020) yang membahas tentang *F-Index* pada Graf Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$ dan $4p$.

Suatu ring R adalah himpunan dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan (yang dinotasikan dengan $a + b$) dan perkalian (yang dinotasikan dengan ab) yang memenuhi sifat grup Abel terhadap penjumlahan, yang dilengkapi dengan sifat asosiatif terhadap perkalian, dan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan. Jika operasi perkalian pada ring bersifat komutatif maka ring tersebut disebut ring komutatif (Gallian, 2017).

Misalkan R adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan. Jacobson radical dinotasikan dengan $J(R)$ adalah irisan dari semua ideal maksimal pada R. Graf Jacobson dari R dinotasikan dengan $\mathfrak{J}_{\mathrm{R}}$ diartikan sebagai graf dengan himpunan titik $V(\mathfrak{J}_{\mathrm{R}}) = R \backslash J(R)$ sedemikian hingga dua titik yang berbeda $x, y \in V(\mathfrak{J}_{\mathrm{R}})$ adalah terhubung langsung jika dan hanya jika $1 - \overline{xy} \notin U(R)$ (Azimi, A, & M, 2012). Penelitian sebelumnya yang membahas tentang graf Jacobson telah dilakukan oleh Azimi, Erfanian, & Farrokhi (2012) yang membahas tentang Graf Jacobson pada Ring Komutatif. Novictor, Susilowati, & Fatmawati (2016) yang membahas tentang Karakteristik pada Graf Jacobson dari Ring $\mathbb{Z}_{3^n}$, untuk $n > 1$. Kamilah (2021) yang membahas tentang Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada Graf Jacobson dari Ring Bilangan Bulat Modulo $2p$.

Merujuk pada penelitian sebelumnya, penelitian mengenai *F-Index* dapat dikembangkan lagi dan digabungkan dengan graf Jacobson. Oleh karena itu, untuk membedakan dengan penelitian sebelumnya, penulis tertarik untuk mengambil judul "*F-Index* pada Graf Jacobson dari Ring Bilangan Bulat Modulo $3p$".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan rumus *F-Index* pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $3p$.

1.3 Tujuan Penelitian

Merujuk pada rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan rumus *F-Index* pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $3p$.

1.4 Manfaat Penelitian

Penulis mengharapkan bahwa penelitian ini dapat memberikan berbagai manfaat sebagai berikut:

1. Bagi penulis
    a. Untuk *mengupgrade* kajian pengetahuan mengenai teori graf khususnya *F-Index* pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $3p$.
    b. Untuk mengembangkan wawasan mengenai teori graf khususnya *F-Index* pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $3p$.
2. Bagi pembaca
    a. Untuk dijadikan sebagai sarana informasi mengenai teori graf khususnya *F-Index* pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $3p$.
    b. Untuk dijadikan sebagai bahan rujukan penelitian dalam matematika terutama dalam teori graf.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah yang akan dibahas pada penelitian ialah graf Jacobson pada ring bilangan bulat modulo $3p$ untuk p bilangan prima dan $p \geq 5$. Karena jika dimulai dari $p \geq 3$, maka tidak dapat ditemukan pola rumus *F-Index* nya.

1.6 Definisi Istilah

Dalam suatu penelitian perlu kiranya penulis tambahkan definisi istilah sebagai berikut:

1. *F-Index atau Forgotten Topological Index* merupakan indeks topologi yang diartikan sebagai jumlah pangkat tiga dari derajat setiap titik u pada graf G.
2. Jacobson radical dilambangkan dengan $J(R)$ adalah irisan dari semua ideal maksimal pada R.
3. Graf Jacobson pada R dinotasikan dengan $\mathfrak{J}_{\mathrm{R}}$ diartikan sebagai graf dengan himpunan titik $V(\mathfrak{J}_{\mathrm{R}}) = R \backslash J(R)$ sedemikian hingga dua titik yang berbeda $x, y \in V(\mathfrak{J}_{\mathrm{R}})$ adalah terhubung langsung jika dan hanya jika $1 - xy \notin U(R)$.
4. Suatu ring R adalah himpunan dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan (yang dinotasikan dengan $a + b$) dan perkalian (yang dinotasikan dengan ab) yang memenuhi sifat grup Abel terhadap penjumlahan, yang dilengkapi dengan sifat asosiatif terhadap perkalian, dan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

5. Jika a, b, c adalah bilangan-bilangan bulat, maka a disebut kongruen dengan b modulo c jika dan hanya jika c membagi $(a - b)$. Ditulis dengan $a \equiv b(mod\ c)$ jika dan hanya jika $c|a - b$.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Ring

Suatu ring R ialah suatu himpunan yang dilengkapi dengan dua operasi biner yakni suatu penjumlahan (yang kemudian dinotasikan dengan $a + b$) dan perkalian (yang dinotasikan dengan ab), hingga untuk keseluruhan dari a, b, c di R memenuhi:

1. Sifat komutatif penjumlahan, yakni $\forall a, b \in R$, maka $a + b = b + a$.
2. Sifat asosiatif penjumlahan, yakni $\forall a, b, c \in R$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Terdapat elemen identitas penjumlahan yaitu 0. Artinya, terdapat elemen 0 di R sehingga $a + 0 = a$ untuk semua $a \in R$.
4. Setiap $a \in R$ memiliki invers terhadap penjumlahan. Yaitu, terdapat elemen $-a \in R$ sehingga $a + (-a) = 0$.
5. Sifat asosiatif perkalian, yakni $\forall a, b, c \in R$, maka $a(bc) = (ab)c$.
6. Sifat distributif, yakni $\forall a, b, c \in R$, maka $a(b + c) = ab + ac$ dan $(b + c)a = ba + ca$ (Gallian, 2017).

Unit pada suatu ring adalah identitas dari perkalian. Misal R adalah ring yang memiliki bentuk elemen identitas pada suatu perkalian (misal dinotasikan dengan e_1), maka elemen-elemen identitas pada suatu perkalian ini dinamakan atau dikenal sebagai elemen satuan. Suatu sub himpunan S dari suatu ring R dikatakan subring dari R jika S merupakan ring terhadap operasi yang sama seperti pada R. Suatu ring R dapat disebutkan sebagai ring komutatif jika operasi perkalian pada R memiliki bentuk sifat komutatif.

Contoh:

Himpunan $\mathbb{Z}_3$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan ring!

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa himpunan $\mathbb{Z}_3$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan ring, maka akan ditunjukkan pembuktian sebagai berikut:

Tabel 2.1 Tabel Cayley

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Dari tabel Cayley di atas, $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ merupakan ring jika memenuhi:

1. $a + b = b + a$

   Kita ambil $0,1,2 \in \mathbb{Z}_3$ sehingga:

   $0 + 1 = 1 + 0 = 1$

   $1 + 2 = 2 + 1 = 0$

   $2 + 0 = 0 + 2 = 2$

   Maka, operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}_3$ bersifat komutatif.

2. $(a + b) + c = a + (b + c)$

   Kita ambil $0,1,2 \in \mathbb{Z}_3$ sehingga:

   $(0 + 1) + 2 = 0 + (1 + 2) = 0$

   $(1 + 1) + 2 = 1 + (1 + 2) = 1$

$(2 + 1) + 2 = 2 + (1 + 2) = 2$

Maka, operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}_3$ bersifat asosiatif.

3. Himpunan $\mathbb{Z}_3$ mempunyai elemen identitas yaitu 0 terhadap operasi penjumlahan $(e = 0, a + e = e + a = a)$

   Kita ambil $0, 1, 2 \in \mathbb{Z}_3$ sehingga:

   $0 + 0 = 0 + 0 = 0$

   $1 + 0 = 0 + 1 = 1$

   $2 + 0 = 0 + 2 = 2$

4. Setiap unsur di $\mathbb{Z}_3$ memiliki invers, yaitu:

   $0 + 0 = 0 = e$, maka invers dari 0 adalah 0,

   $1 + 2 = 0 = e$, maka invers dari 1 adalah 2, dan

   $2 + 1 = 0 = e$, maka invers dari 2 adalah 1.

5. Operasi perkalian di $\mathbb{Z}_3$ bersifat asosiatif, yaitu $a(bc) = (ab)c$.

   Kita ambil $0{,}1{,}2 \in \mathbb{Z}_3$ maka:

   $0 \cdot (1 \cdot 2) = (0 \cdot 1) \cdot 2 = 0$

   $2 \cdot (1 \cdot 2) = (2 \cdot 1) \cdot 2 = 1$

   $1 \cdot (1 \cdot 2) = (1 \cdot 1) \cdot 2 = 2$

   Jadi operasi perkalian di $\mathbb{Z}_3$ bersifat asosiatif.

6. $a(b + c) = ab + ac$ dan $(b + c)a = ba + ca$

   Kita ambil $0{,}1{,}2 \in \mathbb{Z}_3$ sehingga:

   $0 \cdot (1 + 2) = (1 + 2) \cdot 0 = 0$

   $1 \cdot (0 + 1) = (0 + 1) \cdot 1 = 1$

   $1 \cdot (2 + 0) = (2 + 0) \cdot 1 = 2$

   Jadi, operasi perkalian terhadap penjumlahan di $\mathbb{Z}_3$ bersifat distributif.

Karena memenuhi syarat-syarat ring maka himpunan $\mathbb{Z}_3$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan ring.

2.1.1.1 Ideal

Misal R adalah suatu ring. Subring A di ring R disebut ideal, jika untuk setiap $a \in A$ dan $r \in R$ berlaku $ar \in A$ dan $ra \in A$. Suatu ideal A di R dikatakan ideal sejati di R jika $A \neq R$. Misalkan R adalah ring komutatif, sebuah ideal sejati A di R disebut ideal maksimal jika terdapat ideal sejati B di R dengan $A \subseteq B \subseteq$ R, maka $B = A$ atau $B = R$. Artinya, jika A adalah ideal maksimal maka tidak ada ideal sejati lain yang memuat A selain R (Gallian, 2017).

Contoh:

$\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}\}$

Diperoleh semua ideal dari $\mathbb{Z}_{15}$ yaitu:

$\langle\bar{0}\rangle = \{\bar{0}\}$

$\langle\bar{1}\rangle = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}\} = \mathbb{Z}_{15}$

$\langle\bar{2}\rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{13}\} = \mathbb{Z}_{15}$

$\langle\bar{3}\rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$

$\langle\bar{4}\rangle = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \bar{1}, \bar{5}, \bar{9}, \overline{13}, \bar{2}, \bar{6}, \overline{10}, \overline{14}, \bar{3}, \bar{7}, \overline{11}\} = \langle\bar{1}\rangle = \langle\bar{2}\rangle = \mathbb{Z}_{15}$

$\langle\bar{5}\rangle = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$

$\langle\bar{6}\rangle = \{\bar{0}, \bar{6}, \overline{12}, \bar{3}, \bar{9}\} = \langle\bar{3}\rangle$

$\langle\bar{7}\rangle = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}, \bar{6}, \overline{13}, \bar{5}, \overline{12}, \bar{4}, \overline{11}, \bar{3}, \overline{10}, \bar{2}, \bar{9}, \bar{1}, \bar{8}\} = \langle\bar{1}\rangle = \langle\bar{2}\rangle = \langle\bar{4}\rangle = \mathbb{Z}_{15}$

$\langle\bar{8}\rangle = \{\bar{0}, \bar{8}, \bar{1}, \bar{9}, \bar{2}, \overline{10}, \bar{3}, \overline{11}, \bar{4}, \overline{12}, \bar{5}, \overline{13}, \bar{6}, \overline{14}, \bar{7}\} = \langle\bar{1}\rangle = \langle\bar{2}\rangle = \langle\bar{4}\rangle =$

$\langle\bar{7}\rangle = \mathbb{Z}_{15}$

$\langle\bar{9}\rangle = \{\bar{0}, \bar{9}, \bar{3}, \overline{12}, \bar{6}\} = \langle\bar{3}\rangle = \langle\bar{6}\rangle$

$\langle\overline{10}\rangle = \{\bar{0}, \overline{10}, \bar{5}\} = \langle\bar{5}\rangle$

$\langle\overline{11}\rangle = \{\bar{0}, \overline{11}, \bar{7}, \bar{3}, \overline{14}, \overline{10}, \bar{6}, \bar{2}, \overline{13}, \bar{9}, \bar{5}, \bar{1}, \overline{12}, \bar{8}, \bar{4}\} = \langle\bar{1}\rangle = \langle\bar{2}\rangle = \langle\bar{4}\rangle =$

$\langle\bar{7}\rangle = \langle\bar{8}\rangle = \mathbb{Z}_{15}$

$\langle\overline{12}\rangle = \{\bar{0}, \overline{12}, \bar{9}, \bar{6}, \bar{3}\} = \langle\bar{3}\rangle = \langle\bar{6}\rangle = \langle\bar{9}\rangle$

$\langle\overline{13}\rangle = \{\bar{0}, \overline{13}, \overline{11}, \bar{9}, \bar{7}, \bar{5}, \bar{3}, \bar{1}, \overline{14}, \overline{12}, \overline{10}, \bar{8}, \bar{6}, \bar{4}, \bar{2}\} = \langle\bar{1}\rangle = \langle\bar{2}\rangle = \langle\bar{4}\rangle =$

$\langle\bar{7}\rangle = \langle\bar{8}\rangle = \langle\overline{11}\rangle = \mathbb{Z}_{15}$

$\langle\overline{14}\rangle = \{\bar{0}, \overline{14}, \overline{13}, \overline{12}, \overline{11}, \overline{10}, \bar{9}, \bar{8}, \bar{7}, \bar{6}, \bar{5}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}\} = \langle\bar{1}\rangle = \langle\bar{2}\rangle = \langle\bar{4}\rangle =$

$\langle\bar{7}\rangle = \langle\bar{8}\rangle = \langle\overline{11}\rangle = \langle\overline{13}\rangle = \mathbb{Z}_{15}$

Sehingga, dapat diketahui ideal maksimal dari ideal pada $\mathbb{Z}_{15}$ adalah $\langle\bar{3}\rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$ dan $\langle\bar{5}\rangle = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$ karena ideal-ideal tersebut tidak termuat pada ideal sejati lain.

2.1.1.2 Keterbagian

Definisi 2.1

Misalkan u, v adalah bilangan bulat, dengan $u \neq 0$. Bilangan u dikatakan membagi v jika terdapat bilangan bulat k sedemikian hingga $v = uk$ dan dinotasikan dengan $u|v$. Notasi $u|v$ dapat dibaca dengan u pembagi v (Gilbert & Gilbert, 2015).

Contoh:

$8|56$, karena terdapat $7 \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $56 = 8 \cdot 7$.

2.1.1.3 Kongruensi Modulo n

Definisi 2.2

Jika a, b, c adalah bilangan-bilangan bulat, maka a disebut kongruen dengan b modulo c jika dan hanya jika c membagi $(a - b)$. Ditulis dengan $a \equiv b(mod\ c)$ jika dan hanya jika $c|a - b$. Jika c tidak membagi $(a - b)$, maka disebut a tidak kongruen dengan b modulo c. Ditulis dengan $a \not\equiv b(mod\ c)$ jika dan hanya jika $c \nmid a - b$ (Handayani & Yulina, 2020).

Contoh:

$10 \equiv 4(mod\ 3)$ karena $3|10 - 4$ atau $3|6$.

$31 \not\equiv 5(mod\ 6)$ karena $6 \nmid 31 - 5$ atau $6 \nmid 26$.

Teorema 2.1

Jika p adalah bilangan prima, maka untuk setiap bilangan bulat a, nilai dari $a^p - a$ adalah kelipatan dari p yang dapat dinotasikan dengan $a^p \equiv a(mod\ p)$. Jika a tidak habis dibagi dengan p, maka Teorema Kecil Fermat setara dengan pernyataan bahwa $a^{p-1} - 1$ adalah kelipatan p, atau dalam persamaan $a^{p-1} \equiv 1(mod\ p)$ (Kraft & Washington, 2015).

Teorema 2.2

Misalkan $m_1, m_2, \dots, m_r$ adalah bilangan bulat positif dan setiap pasangnya adalah koprima (yang artinya FPB$\left(m_i, m_j\right) = 1$ jika $i \neq j$). Maka, untuk setiap bilangan bulat sistem kongruensi (Kraft & Washington, 2015):

$$x \equiv a_1(mod\ m_1)$$

$$x \equiv a_2(mod\ m_2)$$

$$\vdots$$

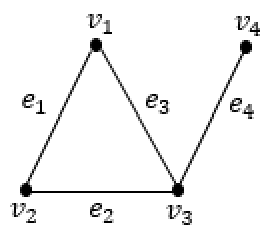
$$x \equiv a_r(mod\ m_r)$$

2.1.2 Graf

Graf G adalah pasangan terurut dari dua himpunan yakni terdiri dari himpunan berhingga yang takkosong $V(G)$ dari unsur yang dikenal dengan titik (*vertex*) dan himpunan yang berhingga $E(G)$ dari pasangan berurutan yang berbeda dari unsur $V(G)$ yang disebut sisi (*edge*) (Wilson, 2010).

Contoh:

Misalkan graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, maka diperoleh graf G seperti di bawah ini:



Gambar 2.1 Graf G

2.1.2.1 Graf Terhubung

Suatu graf G dikatakan terhubung jika setiap dua titik pada G terhubung langsung. Sedangkan lintasan pada suatu graf G adalah barisan sisi yang semua titiknya berbeda. Dengan kata lain, dua titik u dan v pada suatu graf dikatakan terhubung jika terdapat lintasan $u - v$ (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2016).

Contoh:

Misalkan suatu graf G pada Gambar 2.1 diketahui bahwa titik v_1 dan v_2 disebut graf terhubung karena kedua titik tersebut terdapat lintasan e_1. Titik v_1 dan v_3 disebut graf terhubung karena kedua titik tersebut terdapat lintasan e_3. Titik v_2 dan v_3 disebut graf terhubung karena kedua titik tersebut terdapat lintasan e_2. Dan titik v_3 dan v_4 disebut graf terhubung karena kedua titik tersebut terdapat lintasan e_4 atau dapat dikatakan bahwa kedua titik tersebut terhubung langsung.

2.1.2.2 Derajat Titik

Pada suatu derajat v ialah suatu jumlah sisi yang terhubung langsung dengan titik v, dan dilambangkan dengan $\deg(v)$ (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2016).

Contoh:

Dari graf G pada Gambar 2.1 diperoleh:

$\deg(v_1) = 2$, $\deg(v_2) = 2$, $\deg(v_3) = 2$, dan $\deg(v_4) = 1$

2.1.2.3 Jacobson Radical

Misal pada R ialah ring komutatif dengan unsur kesatuan. Jacobson radical dinotasikan dengan $J(R)$ adalah irisan-irisan dari semua ideal maksimal pada R (Azimi, A, & M, 2012).

Contoh:

Pada contoh sebelumnya, telah diketahui ideal maksimal pada $\mathbb{Z}_{15}$ yaitu $\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$ dan $\langle \bar{5} \rangle = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$. Sehingga, Jacobson radical dari $\mathbb{Z}_{15}$ adalah $J(\mathbb{Z}_{15}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\} \cap \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\} = \{\bar{0}\}$.

2.1.2.4 Graf Jacobson

Graf Jacobson pada R dinotasikan dengan $\mathfrak{J}_{\mathrm{R}}$ diartikan dengan sebagai graf dengan himpunan titik $V(\mathfrak{J}_{\mathrm{R}}) = R \backslash J(R)$ sedemikian hingga dua titik yang berbeda $x, y \in V(\mathfrak{J}_{\mathrm{R}})$ adalah terhubung secara langsung jika dan hanya jika $1 - \overline{xy}$ bukan anggota unit di R atau dinotasikan dengan $1 - \overline{xy} \notin U(R)$ (Azimi, A, & M, 2012).

Contoh:

Himpunan titik pada graf Jacobson dari ring $\mathbb{Z}_{15}$ yaitu:

$\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{15}} = \mathbb{Z}_{15} \backslash J(Z_{15}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}\}$

$U(\mathbb{Z}_{15}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$

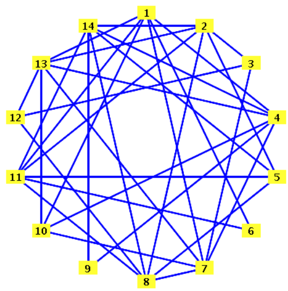
Kemudian, akan dicari titik-titik yang terhubung langsung melalui perhitungan tabel berikut:

Tabel 2.2 Tabel $1 - \overline{xy}$ dari $\mathbb{Z}_{15} \backslash J(\mathbb{Z}_{15})$

$\bar{x}$ \ $\bar{y}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\overline{13}$	$\overline{11}$	$\bar{9}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{13}$	$\bar{9}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$
$\bar{6}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{13}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{13}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{13}$	$\bar{7}$
$\bar{7}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\bar{3}$	$\overline{11}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\bar{5}$	$\overline{13}$	$\bar{6}$	$\overline{14}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\overline{14}$	$\bar{6}$	$\overline{13}$	$\bar{5}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{11}$	$\bar{3}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$
$\bar{9}$	$\bar{7}$	$\overline{13}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$	$\overline{13}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$	$\overline{13}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$
$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$
$\overline{11}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\overline{13}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$
$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$
$\overline{13}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$
$\overline{14}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\bar{0}$

Dari tabel di atas, diperoleh himpunan sisi pada $\Im_{\mathbb{Z}_{15}}$ adalah $E(\Im_{\mathbb{Z}_{15}}) = \{(1,4), (1,6), (1,7), (1,10), (1,11), (1,13), (2,3), (2,5), (2,8), (2,11), (2,13), (2,14), (3,7), (3,12), (4,7), (4,9), (4,10), (4,13), (4,14), (5,8), (5,11), (5,14) (6,11), (7,8), (7,10), (7,13)(8,11), (8,12), (8,14), (9,14), (10,13), (11,14), (12,13)\}$.

Sehingga, dapat digambarkan $\Im_{\mathbb{Z}_{15}}$ sebagai berikut:



Gambar 2.2 Graf $\Im_{\mathbb{Z}_{15}}$

2.1.3 *F-Index* atau *Forgotten Topological Index*

Forgotten Topological index atau *F-Index* didefinisikan sebagai jumlah pangkat tiga dari derajat setiap titik u pada graf G yang dinotasikan dengan $F(G) = \sum_{u \in V(G)} \deg(u)^3$, dimana $\deg(u)$ didefinisikan sebagai derajat titik u yaitu banyaknya titik yang terhubung langsung dengan titik u. Kemampuan prediksi *F-Index* bahkan lebih baik daripada indeks Zagreb pertama untuk faktor asentris dan entropi. Fakta ini memberikan alasan bahwa mengapa *F-Index* berguna untuk menguji sifat kimia dan farmakologi dari struktural molekul obat. Dengan demikian, *F-Index* ini menarik perhatian tidak hanya di dunia akademis tetapi juga di industri seperti teknik farmasi, dan lain sebagainya (Havare & Havare, 2020).

Contoh:

Berdasarkan Gambar 2.2 diperoleh:

Tabel 2.3 Derajat Titik pada $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}_{15}}$

u	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\deg(u)$	6	6	3	6	4	2	6	6	2	4	6	3	6	6

Sehingga, *F-Index* pada $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}_{15}}$ tersebut adalah

$$\begin{aligned}\sum_{u\in V(G)} \deg(u)^3 &= \deg(1)^3+\deg(2)^3+\deg(3)^3+\deg(4)^3+\deg(5)^3+\\ &\quad \deg(6)^3+\deg(7)^3+\deg(8)^3+\deg(9)^3+\deg(10)^3+\\ &\quad \deg(11)^3+\deg(12)^3+\deg(13)^3+\deg(14)^3\\ &= 6^3+6^3+3^3+6^3+4^3+2^3+6^3+6^3+2^3+4^3+\\ &\quad 6^3+3^3+6^3+6^3\\ &= 8\cdot 6^3+2\cdot 3^3+2\cdot 4^3+2\cdot 2^3\\ &= 8\cdot 6^3+2\cdot 3^3+2\cdot 4^3+2^4\\ &= 1926\end{aligned}$$

Jadi, *F-Index* pada $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}_{15}}$ adalah 1926.

2.2 Persaudaraan dalam Al-Qur'an

Persaudaraan adalah suatu hal yang sangat penting dalam Islam. Sebagaimana terkandung dalam surah Al-Hujurat ayat 10, yang artinya:

"Sesungguhnya orang-orang mukmin itu bersaudara, karena itu damaikanlah antara kedua saudaramu (yang berselisih) dan bertakwalah kepada Allah agar kamu mendapat rahmat."

Menurut (Shihab, 2005), dalam penjelasan ayat diatas ialah persatuan dan jugakesatuan serta bentuk keharmonisan antara anggota masyarakat (kecil ataupun besar) akan membentuk suatu limpahan rahmatNya kepada semua umat manusia. Pun demikian sebaliiknya, munculnya perpecahan dalam suatu hubungan masyarakat (kecil ataupub besar) mampu mendatangkan bencana untuk umat manusia. Menurut (Az-Zuhaili, 2016), orang-orang beriman adalah saudara seagama, bukan saudara sedarah. Al-Qhurtubi pernah berkata, “Ikatan persaudaraan seagama lebih kuat dari ikatan persaudaraan sedarah. Karena ikatan persaudaraan sedarah bisa putus sebab perbedaan agama, sedangkan persaudaran seagama tidak bisa putus karena perbedaan nasab.” Dalam ayat ini terdapat dalil kebolehan penggunaan istilah saudara di antara orang-orang yang beriman dari sudut pandang agama. Barang siapa mengharapkan baiknya hubungan diantara dua orang yang bermusuhan dari kaum mukminin, ia harus mendamaikan hubungan diantara keduanya. Menurut (Hamka, 2015), ayat ini mengingatkan kita terhadap konsepsi orang beriman merupana saudara, hal ini sebagai dasar kehidupan manusia (ayat 29) pada surah Al-Fath, bentuk adanya sikap keras pada orang kafir muncuk karena faktor ikatan iman yang kuat dengan Allah swt dan saling menyayangi diantara orang-orang mukmin. Jadi, ayat 10 pada surah Al-Hujurat ini menjeleskan lebih positif lagi, bahwa orang yang telah menanamkan iman di dalam hatinya, tidak mungkin mereka akan bermusuhan. Menurut (Ath-Thabari, 2009), makna dua bersaudara dalam ayat ini adalah setiap ahli iman yang berperang. Kemudian maksud dari *“Dan bertakwalah kepada Allah supaya kamu mendapat rahmat”* artinya kita dituntut untuk selalu takut kepada Allah swt dimana kita diajarkan untuk mendamaikan dua ahli iman yang lagi ada dalam konflik atau perseteruan dengan cara yang adil. Disisi lainnya, tindakan menghindakan jiwa/kehidupan kita dalam hal kemaksiatan bertujuan mendapatkan rahmat dari Allah swt.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Untuk mencari *F-Index* pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $3p$, maka akan ditentukan terlebih dahulu untuk p adalah bilangan prima dan $p \geq 5$. Adapun, ring komutatif yang dipakai dalam proses penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. $\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}\}$
2. $\mathbb{Z}_{21} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \dots, \overline{20}\}$
3. $\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \dots, \overline{32}\}$
4. $\mathbb{Z}_{39} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \dots, \overline{38}\}$

Berikutnya, akan ditentukan ideal maksimal dari masing-masing ring komutatif tersebut. Kemudian, akan dicari Jacobson radicalnya yaitu irisan dari semua ideal maksimal pada ring komutatif tersebut. Setelah diketahui Jacobson radicalnya, kemudian akan menentukan graf Jacobson dari masing-masing ring komutatif tersebut. Dengan menggunakan tabel $1 - xy$ maka akan diketahui titik-titik yang terhubung langsung pada graf Jacobson tersebut. Kemudian, dicari *F-Index* pada graf Jacobson dari masing-masing ring komutatif tersebut dengan menggunakan rumus umum sebagai berikut:

$$F(G) = \sum_{u \in V(G)} \deg(u)^3$$

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah studi literatur atau studi kepustakaan. Studi literatur yaitu suatu teknik pengumpulan data dengan cara membaca buku, jurnal, karya ilmiah dan lain sebagainya. Hal ini dapat berguna untuk memperoleh kajian teoritis yang berhubungan dengan topik penelitian ini yaitu *F-Index* pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $3p$.

3.2 Pra Penelitian

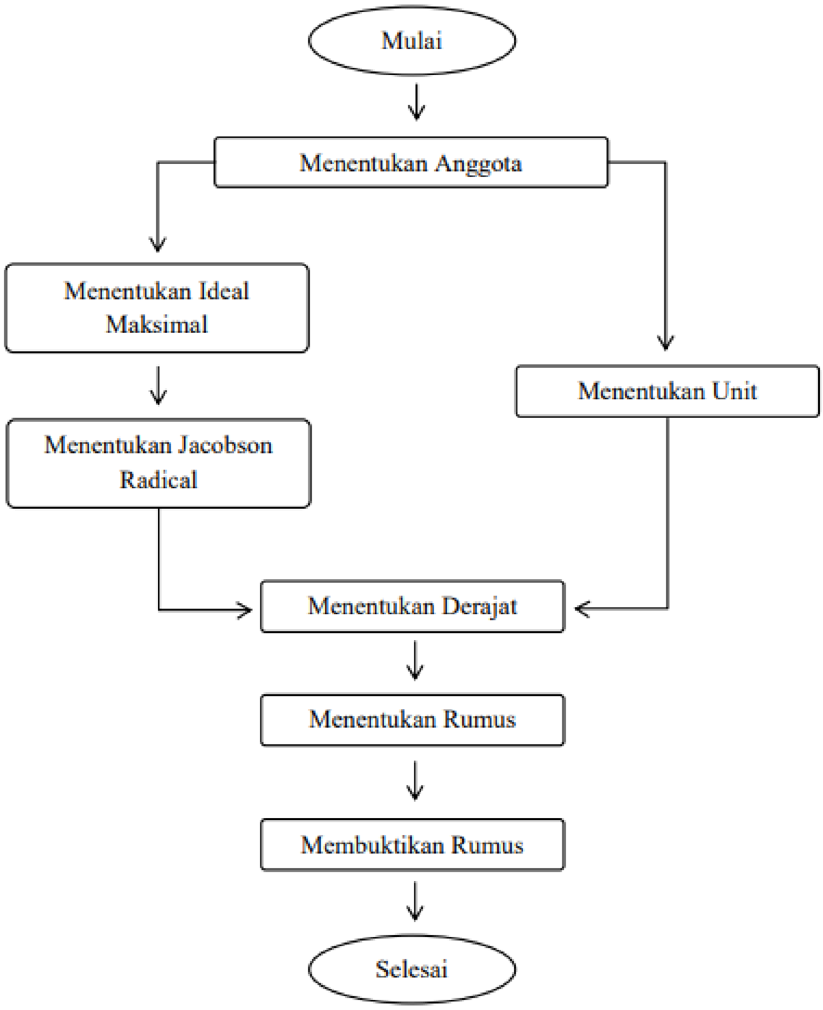
Dalam proses penelitian ini, penulis terlebih dahulu memahami konsep-konsep yang mendasari topik serta mencari berbagai sumber referensi yang berhubungan dengan penelitian ini. Sumber referensi dapat dicari melalui buku, jurnal, karya ilmiah, dan lain sebagainya. Langkah-langkah yang dilakukan peneliti adalah mempelajari dan memahami landasan teori mengenai ring, ideal, *F-Index*, teori graf, dan graf Jacobson, serta mengkaji beberapa ayat Al-Qur'an yang dapat direpresentasikan dengan topik penelitian ini. Peneliti juga mengamati $\mathbb{Z}_{3p}$ untuk $p = 2$ dan $p = 3$, karena untuk $p = 2$ pola untuk menentukan rumus *F-Index* nya tidak dapat ditemukan dan untuk $p = 3$ himpunan titiknya sama dengan $U(R)$ sehingga tidak ada titik-titik yang terhubung langsung. Oleh karena itu, peneliti membatasi penelitian ini pada $\mathbb{Z}_{3p}$ untuk p adalah bilangan prima dan $p \geq 5$.

3.3 Tahapan Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan komponen dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$, dengan p adalah bilangan prima dan $p \in 5,7,11,13$.
2. Menentukan ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{3p}$ untuk setiap $p \geq 5$, dengan p adalah bilangan prima.
3. Menentukan Jacobson radical dari $\mathbb{Z}_{3p}$ untuk setiap $p \geq 5$, dengan p adalah bilangan prima.
4. Menentukan unit dari $\mathbb{Z}_{3p}$ untuk setiap $p \geq 5$, dengan p adalah bilangan prima.
5. Menentukan derajat masing-masing titik pada $\mathbb{Z}_{3p}$ untuk setiap $p \geq 5$, dengan p adalah bilangan prima.
6. Menentukan rumus *F-Index* pada graf Jacobson dari $\mathbb{Z}_{3p}$ untuk setiap $p \geq 5$, dengan p adalah bilangan prima.
7. Membuktikan rumus *F-Index* pada graf Jacobson dari $\mathbb{Z}_{3p}$ untuk setiap $p \geq 5$, dengan p adalah bilangan prima.

Dari tahapan-tahapan di atas, maka dapat dibentuk diagram alir untuk menentukan *F-Index* pada Graf Jacobson dari Ring Bilangan Bulat Modulo $3p$ seperti di bawah ini:



Gambar 3.1 Diagram Alir

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 *F-Index* pada Graf Jacobson dari Ring $\mathbb{Z}_{3p}, p \in 5, 7, 11, 13$

Pada subbab ini akan membahas mengenai *F-Index* pada graf Jacobson dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$, dimana p adalah bilangan prima dan $p \geq 5$. Pada percobaan ini akan menggunakan ring $\mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_{21}, \mathbb{Z}_{33}, \mathbb{Z}_{39}$.

4.1.1 *F-Index* pada Graf Jacobson dari Ring $\mathbb{Z}_{15}$

Himpunan anggota pada ring bilangan bulat modulo 15 adalah $\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}\}$. Kemudian untuk mencari Jacobson Radical dari $\mathbb{Z}_{15}$, maka terlebih dahulu akan dicari ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{15}$. Diperoleh semua ideal dari $\mathbb{Z}_{15}$ yaitu:

$\langle\bar{0}\rangle = \{\bar{0}\}$

$\langle\bar{1}\rangle = \langle\bar{2}\rangle = \langle\bar{4}\rangle = \langle\bar{7}\rangle = \langle\bar{8}\rangle = \langle\overline{11}\rangle = \langle\overline{12}\rangle = \langle\overline{13}\rangle = \langle\overline{14}\rangle = Z_{15}$

$\langle\bar{3}\rangle = \langle\bar{6}\rangle = \langle\bar{9}\rangle = \langle\overline{12}\rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$

$\langle\bar{5}\rangle = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$

Sehingga, dapat diketahui ideal maksimal dari ideal pada $\mathbb{Z}_{15}$ adalah $\langle\bar{3}\rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$ dan $\langle\bar{5}\rangle = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$ karena ideal-ideal tersebut tidak termuat pada ideal sejati lain. Oleh karena itu, himpunan Jacobson Radical dari $\mathbb{Z}_{15}$ adalah $J(\mathbb{Z}_{15}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\} \cap \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\} = \{\bar{0}\}$.

Berdasarkan definisi pada graf Jacobson maka diperoleh himpunan titik dari $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}_{15}}$ adalah $V(\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}_{15}}) = \mathbb{Z}_{15} \backslash J(Z_{15}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, 11, 12,$

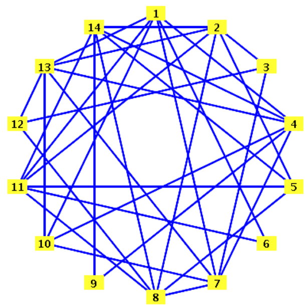
$13, \overline{14}\}$ dan unit dari ring $\mathbb{Z}_{15}$ adalah $U(\mathbb{Z}_{15}) = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$. Kemudian, akan dicari titik-titik yang terhubung langsung melalui perhitungan tabel berikut:

Tabel 4.1 Tabel $1 - \overline{xy}$ dari $\mathbb{Z}_{15} \setminus U(\mathbb{Z}_{15})$

$\bar{x}$ \ $\bar{y}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{11}$	$\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{13}$	$\overline{9}$	$\overline{5}$
$\overline{5}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$
$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$	$\overline{7}$
$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$
$\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{7}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{7}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$
$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$
$\overline{11}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{13}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$
$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$
$\overline{13}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$
$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$

Dari tabel di atas, diperoleh himpunan sisi pada $\Im_{\mathbb{Z}_{15}}$ adalah $E(\Im_{\mathbb{Z}_{15}}) = \{(1,4),$ $(1,6), (1,7), (1,10), (1,11), (1,13), (2,3), (2,5), (2,8), (2,11), (2,13), (2,14),$ $(3,7), (3,12), (4,7), (4,9), (4,10), (4,13), (4,14), (5,8), (5,11), (5,14),$ $(2,14), (3,7), (3,12), (4,7), (4,9), (4,10), (4,13), (4,14), (5,8), (5,11),$ $(5,14), (6,11), (7,8), (7,10), (7,13), (8,11), (8,12), (8,14), (9,14), (10,13),$ $(11,14), (12,13)\}$.

Sehingga, dapat digambarkan $\Im_{\mathbb{Z}_{15}}$ sebagai berikut:



Gambar 4.1 Graf $\Im_{\mathbb{Z}_{15}}$

Berdasarkan Gambar 4.1, maka dapat diketahui derajat titik pada $\Im_{\mathbb{Z}_{15}}$ adalah sebagai berikut:

Tabel 4.2 Derajat Titik pada $\Im_{\mathbb{Z}_{15}}$

u	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\deg(u)$	6	6	3	6	4	2	6	6	2	4	6	3	6	6

Sehingga, *F-Index* pada $\Im_{\mathbb{Z}_{15}}$ tersebut adalah

$$F\left(\Im_{Z_{15}}\right) = \sum_{u \in V(\Im_{Z_{15}})} \deg(u)^3$$

$$= \deg(\bar{1})^3 + \deg(\bar{2})^3 + \deg(\bar{3})^3 + \deg(\bar{4})^3 + \deg\left(\bar{5}\right)^3 +$$

$$\deg(\bar{6})^3 + \deg(\bar{7})^3 + \deg(\bar{8})^3 + \deg(\bar{9})^3 + \deg(\overline{10})^3 +$$

$$\deg(\overline{11})^3 + \deg(\overline{12})^3 + \deg(\overline{13})^3 + \deg(\overline{14})^3 + \deg\left(\overline{15}\right)^3$$

$$= 6^3 + 6^3 + 3^3 + 6^3 + 4^3 + 2^3 + 6^3 + 6^3 + 2^3 + 4^3 + 6^3 +$$

$$3^3 + 6^3 + 6^3$$

$$= 8 \cdot 6^3 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 2^3$$

$$= 8 \cdot 6^3 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 4^3 + 2^4$$

4.1.2 *F-Index* pada Graf Jacobson dari Ring $\mathbb{Z}_{21}$

Himpunan anggota pada ring bilangan bulat modulo 21 adalah $\mathbb{Z}_{21} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}\}$. Kemudian untuk mencari Jacobson Radical dari $\mathbb{Z}_{21}$, maka terlebih dahulu akan dicari ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{21}$. Diperoleh semua ideal dari $\mathbb{Z}_{21}$ yaitu:

$\langle\bar{0}\rangle = \{\bar{0}\}$

$\langle\bar{1}\rangle = \langle\bar{2}\rangle = \langle\bar{4}\rangle = \langle\bar{5}\rangle = \langle\bar{8}\rangle = \langle\overline{10}\rangle = \langle\overline{11}\rangle = \langle\overline{13}\rangle = \langle\overline{16}\rangle = \langle\overline{17}\rangle =$

$\langle\overline{19}\rangle = \langle\overline{20}\rangle = Z_{21}$

$\langle\bar{3}\rangle = \langle\bar{6}\rangle = \langle\bar{9}\rangle = \langle\overline{12}\rangle = \langle\overline{15}\rangle = \langle\overline{18}\rangle = \left\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}\right\}$

$\langle\bar{7}\rangle = \langle\overline{14}\rangle = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\}$

Sehingga, dapat diketahui ideal maksimal dari ideal pada $\mathbb{Z}_{21}$ adalah $\langle\bar{3}\rangle = \left\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}\right\}$ dan $\langle\bar{7}\rangle = \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\}$ karena ideal-ideal tersebut tidak termuat pada ideal sejati lain. Oleh karena itu, himpunan Jacobson Radical dari $\mathbb{Z}_{21}$ adalah $J(\mathbb{Z}_{21}) = \left\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}\right\} \cap \{\bar{0}, \bar{7}, \overline{14}\} = \{\bar{0}\}$.

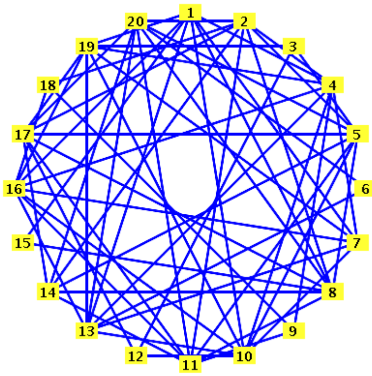
Berdasarkan definisi pada graf Jacobson maka diperoleh himpunan titik dari $\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{21}}$ adalah $V(\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{21}}) = \mathbb{Z}_{21} \backslash J(Z_{21}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}\}$ dan unit dari ring $\mathbb{Z}_{21}$ adalah $U(\mathbb{Z}_{21}) = \left\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\right\}$. Kemudian, akan dicari titik-titik yang terhubung langsung melalui perhitungan tabel berikut:

Tabel 4.3 Tabel $1 - \overline{xy}$ dari $\mathbb{Z}_{21} \setminus J(\mathbb{Z}_{21})$

$\bar{x}$ \ $\bar{y}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\overline{20}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\overline{19}$	$\overline{17}$	$\overline{15}$	$\overline{13}$	$\overline{11}$	$\bar{9}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{19}$	$\overline{15}$	$\overline{11}$	$\bar{7}$	$\bar{3}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\overline{17}$	$\overline{13}$	$\bar{9}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\overline{18}$	$\overline{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\overline{19}$	$\overline{14}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\overline{16}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$
$\bar{6}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{19}$	$\overline{13}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{19}$	$\overline{13}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{19}$	$\overline{13}$	$\bar{7}$
$\bar{7}$	$\overline{15}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\overline{15}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\overline{15}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\overline{15}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\overline{15}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\overline{15}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\overline{15}$	$\bar{8}$
$\bar{8}$	$\overline{14}$	$\bar{6}$	$\overline{19}$	$\overline{11}$	$\bar{3}$	$\overline{16}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\overline{13}$	$\bar{5}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\overline{15}$	$\bar{7}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{17}$	$\bar{9}$
$\bar{9}$	$\overline{13}$	$\bar{4}$	$\overline{16}$	$\bar{7}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$	$\bar{1}$	$\overline{13}$	$\bar{4}$	$\overline{16}$	$\bar{7}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$	$\bar{1}$	$\overline{13}$	$\bar{4}$	$\overline{16}$	$\bar{7}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$
$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\overline{13}$	$\bar{3}$	$\overline{14}$	$\bar{4}$	$\overline{15}$	$\bar{5}$	$\overline{16}$	$\bar{6}$	$\overline{17}$	$\bar{7}$	$\overline{18}$	$\bar{8}$	$\overline{19}$	$\bar{9}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\bar{9}$	$\overline{19}$	$\bar{8}$	$\overline{18}$	$\bar{7}$	$\overline{17}$	$\bar{6}$	$\overline{16}$	$\bar{5}$	$\overline{15}$	$\bar{4}$	$\overline{14}$	$\bar{3}$	$\overline{13}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$
$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$	$\bar{7}$	$\overline{16}$	$\bar{4}$	$\overline{13}$	$\bar{1}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$	$\bar{7}$	$\overline{16}$	$\bar{4}$	$\overline{13}$	$\bar{1}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$	$\bar{7}$	$\overline{16}$	$\bar{4}$	$\overline{13}$
$\overline{13}$	$\bar{9}$	$\overline{17}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\bar{7}$	$\overline{15}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\bar{5}$	$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\overline{16}$	$\bar{3}$	$\overline{11}$	$\overline{19}$	$\bar{6}$	$\overline{14}$
$\overline{14}$	$\bar{8}$	$\overline{15}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\overline{15}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\overline{15}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\overline{15}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\overline{15}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\overline{15}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\overline{15}$
$\overline{15}$	$\bar{7}$	$\overline{13}$	$\overline{19}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$	$\overline{13}$	$\overline{19}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$	$\overline{13}$	$\overline{19}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$
$\overline{16}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	$\overline{16}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\overline{14}$	$\overline{19}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\overline{13}$	$\overline{18}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$
$\overline{17}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\bar{3}$	$\bar{7}$	$\overline{11}$	$\overline{15}$	$\overline{19}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$
$\overline{18}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$
$\overline{19}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\overline{15}$	$\overline{17}$	$\overline{19}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$
$\overline{20}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\bar{0}$

Dari tabel di atas, diperoleh himpunan sisi pada $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}_{21}}$ adalah $E(\mathfrak{I}_{Z_{21}})$ ={(1,4), (1,7), (1,8), (1,10), (1,13), (1,15), (1,16), (1,19), (2,4), (2,5), (2,8), (2,11), (2,14), (2,17), (2,18), (2,20), (3,5), (3,12), (4,7), (4,9), (4,13), (4,16), (2,11), (2,14), (2,17), (2,18), (2,20), (3,5), (3,12), (4,7), (4,9), (4,13), (4,16), (4,19), (5,8), (5,10), (5,11), (5,14), (5,17), (5,20), (6,13), (6,20), (7,10), (7,13), (7,16), (7,19), (8, 11), (8,14), (8,15), (8,17), (8,20), (9,11), (9,18), (10,12), (10,13), (10,16), (10,19), (11,14), (11,16), (11,17), (11,20), (12,17), (13,16), (13,19), (13,20), (14,17), (14, 20), (16,18), (16,19), (17,19), (17,20)} .

Sehingga, dapat digambarkan $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}_{21}}$ sebagai berikut:



Gambar 4.2 Graf $\Im_{\mathbb{Z}_{21}}$

Berdasarkan Gambar 4.2, maka dapat diketahui derajat titik pada $\Im_{\mathbb{Z}_{21}}$ adalah sebagai berikut:

Tabel 4.4 Derajat Titik pada $\Im_{\mathbb{Z}_{21}}$

u	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$
deg (u)	8	8	3	8	8	2	6	8	3	8	8	3	8	6	2	8	8	3	8	8

Sehingga *F-Index* pada graf $\Im_{Z_{21}}$ sebagai berikut:

$$F(\Im_{Z_{21}}) = \sum_{u \in V(\Im_{Z_{21}})} \deg(u)^3$$

$$= \deg(\bar{1})^3 + \deg(\bar{2})^3 + \deg(\bar{3})^3 + \deg(\bar{4})^3 + \deg(\bar{5})^3 +$$

$$\deg(\bar{6})^3 + \deg(\bar{7})^3 + \deg(\bar{8})^3 + \deg(\bar{9})^3 + \deg(\overline{10})^3 +$$

$$\deg(\overline{11})^3 + \deg(\overline{12})^3 + \deg(\overline{13})^3 + \deg(\overline{14})^3 + \deg(\overline{15})^3 +$$

$$\deg(\overline{16})^3 + \deg(\overline{17})^3 + \deg(\overline{18})^3 + \deg(\overline{19})^3 + \deg(\overline{20})^3$$

$$= 8^3 + 8^3 + 3^3 + 8^3 + 8^3 + 2^3 + 6^3 + 8^3 + 3^3 + 8^3 + 8^3 +$$

$$3^3 + 8^3 + 6^3 + 2^3 + 8^3 + 8^3 + 3^3 + 8^3 + 8^3$$

$$= 12 \cdot 8^3 + 4 \cdot 3^3 + 2 \cdot 6^3 + 2 \cdot 2^3$$

$$= 12 \cdot 8^3 + 4 \cdot 3^3 + 2 \cdot 6^3 + 2^4$$

4.1.3 *F-Index* pada Graf Jacobson dari Ring $\mathbb{Z}_{33}$

Himpunan anggota pada ring bilangan bulat modulo 33 adalah $\mathbb{Z}_{33} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{27}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{30}, \overline{31}, \overline{32}\}$. Kemudian untuk mencari Jacobson Radical dari $\mathbb{Z}_{33}$, maka terlebih dahulu akan dicari ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{33}$. Diperoleh semua ideal dari $\mathbb{Z}_{33}$ yaitu:

$\langle\bar{0}\rangle = \{\bar{0}\}$

$\langle\bar{1}\rangle = \langle\bar{2}\rangle = \langle\bar{4}\rangle = \langle\bar{5}\rangle = \langle\bar{7}\rangle = \langle\bar{8}\rangle = \langle\overline{10}\rangle = \langle\overline{13}\rangle = \langle\overline{14}\rangle = \langle\overline{16}\rangle = \langle\overline{17}\rangle = \langle\overline{19}\rangle = \langle\overline{20}\rangle = \langle\overline{23}\rangle = \langle\overline{25}\rangle = \langle\overline{26}\rangle = \langle\overline{28}\rangle = \langle\overline{29}\rangle = \langle\overline{31}\rangle = \langle\overline{32}\rangle = Z_{33}$

$\langle\bar{3}\rangle = \langle\bar{6}\rangle = \langle\bar{9}\rangle = \langle\overline{12}\rangle = \langle\overline{15}\rangle = \langle\overline{18}\rangle = \langle\overline{21}\rangle = \langle\overline{24}\rangle = \langle\overline{27}\rangle = \langle\overline{30}\rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{24}, \overline{27}, \overline{30}\}$

$\langle\overline{11}\rangle = \langle\overline{22}\rangle = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}\}$

Sehingga, dapat diketahui ideal maksimal dari ideal pada $\mathbb{Z}_{33}$ adalah$\langle\bar{3}\rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{24}, \overline{27}, \overline{30}\}$ dan $\langle\overline{11}\rangle = \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}\}$ karena ideal-ideal tersebut tidak termuat pada ideal sejati lain. Oleh karena itu, himpunan Jacobson Radical dari $\mathbb{Z}_{33}$ adalah $J(\mathbb{Z}_{33}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{24}, \overline{27}, \overline{30}\} \cap \{\bar{0}, \overline{11}, \overline{22}\} = \{\bar{0}\}$.

Berdasarkan definisi pada graf Jacobson maka diperoleh himpunan titik dari $\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{21}}$ adalah $V(\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{33}}) = \mathbb{Z}_{33} \backslash J(Z_{33}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{27}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{30}, \overline{31}, \overline{32}\}$ dan unit dari ring $\mathbb{Z}_{33}$ adalah $U(\mathbb{Z}_{33}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19},$

$\overline{20}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{32}\}$. Kemudian, akan dicari titik-titik yang terhubung langsung melalui perhitungan tabel berikut:

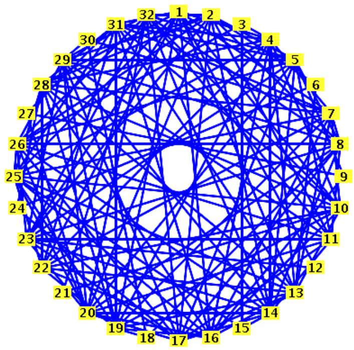
Tabel 4.5 Tabel $1-\overline{xy}$ dari $\mathbb{Z}_{33} \backslash J(\mathbb{Z}_{33})$

$\overline{x}$ \ $\overline{y}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{32}$	$\overline{31}$	$\overline{30}$	$\overline{29}$	$\overline{28}$	$\overline{27}$	$\overline{26}$	$\overline{25}$	$\overline{24}$	$\overline{23}$	$\overline{22}$	$\overline{21}$	$\overline{20}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{32}$	$\overline{30}$	$\overline{28}$	$\overline{26}$	$\overline{24}$	$\overline{22}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{31}$	$\overline{29}$	$\overline{27}$	$\overline{25}$	$\overline{23}$	$\overline{21}$	$\overline{19}$	$\overline{17}$	$\overline{15}$	$\overline{13}$	$\overline{11}$	$\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{31}$	$\overline{28}$	$\overline{25}$	$\overline{22}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{31}$	$\overline{28}$	$\overline{25}$	$\overline{22}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{31}$	$\overline{28}$	$\overline{25}$	$\overline{22}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{30}$	$\overline{26}$	$\overline{22}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{31}$	$\overline{27}$	$\overline{23}$	$\overline{19}$	$\overline{15}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{32}$	$\overline{28}$	$\overline{24}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{29}$	$\overline{25}$	$\overline{21}$	$\overline{17}$	$\overline{13}$	$\overline{9}$	$\overline{5}$
$\overline{5}$	$\overline{29}$	$\overline{24}$	$\overline{19}$	$\overline{14}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{32}$	$\overline{27}$	$\overline{22}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{30}$	$\overline{25}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{28}$	$\overline{23}$	$\overline{18}$	$\overline{13}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{31}$	$\overline{26}$	$\overline{21}$	$\overline{16}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$
$\overline{6}$	$\overline{28}$	$\overline{22}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{31}$	$\overline{25}$	$\overline{19}$	$\overline{13}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{28}$	$\overline{22}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{31}$	$\overline{25}$	$\overline{19}$	$\overline{13}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{28}$	$\overline{22}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{31}$	$\overline{25}$	$\overline{19}$	$\overline{13}$	$\overline{7}$
$\overline{7}$	$\overline{27}$	$\overline{20}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{32}$	$\overline{25}$	$\overline{18}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{30}$	$\overline{23}$	$\overline{16}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{28}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{26}$	$\overline{19}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{31}$	$\overline{24}$	$\overline{17}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{29}$	$\overline{22}$	$\overline{15}$	$\overline{8}$
$\overline{8}$	$\overline{26}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{27}$	$\overline{19}$	$\overline{11}$	$\overline{3}$	$\overline{28}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{29}$	$\overline{21}$	$\overline{13}$	$\overline{5}$	$\overline{30}$	$\overline{22}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{31}$	$\overline{23}$	$\overline{15}$	$\overline{7}$	$\overline{32}$	$\overline{24}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{25}$	$\overline{17}$	$\overline{9}$
$\overline{9}$	$\overline{25}$	$\overline{16}$	$\overline{7}$	$\overline{31}$	$\overline{22}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	$\overline{28}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{25}$	$\overline{16}$	$\overline{7}$	$\overline{31}$	$\overline{22}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	$\overline{28}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{25}$	$\overline{16}$	$\overline{7}$	$\overline{31}$	$\overline{22}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	$\overline{28}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$
$\overline{10}$	$\overline{24}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{27}$	$\overline{17}$	$\overline{7}$	$\overline{30}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{23}$	$\overline{13}$	$\overline{3}$	$\overline{26}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{29}$	$\overline{19}$	$\overline{9}$	$\overline{32}$	$\overline{22}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{25}$	$\overline{15}$	$\overline{5}$	$\overline{28}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{31}$	$\overline{21}$	$\overline{11}$
$\overline{11}$	$\overline{23}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{23}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{23}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{23}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{23}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{23}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{23}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{23}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{23}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{23}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{23}$	$\overline{12}$
$\overline{12}$	$\overline{22}$	$\overline{10}$	$\overline{31}$	$\overline{19}$	$\overline{7}$	$\overline{28}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{25}$	$\overline{13}$	$\overline{1}$	$\overline{22}$	$\overline{10}$	$\overline{31}$	$\overline{19}$	$\overline{7}$	$\overline{28}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{25}$	$\overline{13}$	$\overline{1}$	$\overline{22}$	$\overline{10}$	$\overline{31}$	$\overline{19}$	$\overline{7}$	$\overline{28}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{25}$	$\overline{13}$
$\overline{13}$	$\overline{21}$	$\overline{8}$	$\overline{28}$	$\overline{15}$	$\overline{2}$	$\overline{22}$	$\overline{9}$	$\overline{29}$	$\overline{16}$	$\overline{3}$	$\overline{23}$	$\overline{10}$	$\overline{30}$	$\overline{17}$	$\overline{4}$	$\overline{24}$	$\overline{11}$	$\overline{31}$	$\overline{18}$	$\overline{5}$	$\overline{25}$	$\overline{12}$	$\overline{32}$	$\overline{19}$	$\overline{6}$	$\overline{26}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{7}$	$\overline{27}$	$\overline{14}$
$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{25}$	$\overline{11}$	$\overline{30}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{21}$	$\overline{7}$	$\overline{26}$	$\overline{12}$	$\overline{31}$	$\overline{17}$	$\overline{3}$	$\overline{22}$	$\overline{8}$	$\overline{27}$	$\overline{13}$	$\overline{32}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{23}$	$\overline{9}$	$\overline{28}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{19}$	$\overline{5}$	$\overline{24}$	$\overline{10}$	$\overline{29}$	$\overline{15}$
$\overline{15}$	$\overline{19}$	$\overline{4}$	$\overline{22}$	$\overline{7}$	$\overline{25}$	$\overline{10}$	$\overline{28}$	$\overline{13}$	$\overline{31}$	$\overline{16}$	$\overline{1}$	$\overline{19}$	$\overline{4}$	$\overline{22}$	$\overline{7}$	$\overline{25}$	$\overline{10}$	$\overline{28}$	$\overline{13}$	$\overline{31}$	$\overline{16}$	$\overline{1}$	$\overline{19}$	$\overline{4}$	$\overline{22}$	$\overline{7}$	$\overline{25}$	$\overline{10}$	$\overline{28}$	$\overline{13}$	$\overline{31}$	$\overline{16}$
$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{19}$	$\overline{3}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{21}$	$\overline{5}$	$\overline{22}$	$\overline{6}$	$\overline{23}$	$\overline{7}$	$\overline{24}$	$\overline{8}$	$\overline{25}$	$\overline{9}$	$\overline{26}$	$\overline{10}$	$\overline{27}$	$\overline{11}$	$\overline{28}$	$\overline{12}$	$\overline{29}$	$\overline{13}$	$\overline{30}$	$\overline{14}$	$\overline{31}$	$\overline{15}$	$\overline{32}$	$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{17}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{32}$	$\overline{15}$	$\overline{31}$	$\overline{14}$	$\overline{30}$	$\overline{13}$	$\overline{29}$	$\overline{12}$	$\overline{28}$	$\overline{11}$	$\overline{27}$	$\overline{10}$	$\overline{26}$	$\overline{9}$	$\overline{25}$	$\overline{8}$	$\overline{24}$	$\overline{7}$	$\overline{23}$	$\overline{6}$	$\overline{22}$	$\overline{5}$	$\overline{21}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{3}$	$\overline{19}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$
$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{31}$	$\overline{13}$	$\overline{28}$	$\overline{10}$	$\overline{25}$	$\overline{7}$	$\overline{22}$	$\overline{4}$	$\overline{19}$	$\overline{1}$	$\overline{16}$	$\overline{31}$	$\overline{13}$	$\overline{28}$	$\overline{10}$	$\overline{25}$	$\overline{7}$	$\overline{22}$	$\overline{4}$	$\overline{19}$	$\overline{1}$	$\overline{16}$	$\overline{31}$	$\overline{13}$	$\overline{28}$	$\overline{10}$	$\overline{25}$	$\overline{7}$	$\overline{22}$	$\overline{4}$	$\overline{19}$
$\overline{19}$	$\overline{15}$	$\overline{29}$	$\overline{10}$	$\overline{24}$	$\overline{5}$	$\overline{19}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{28}$	$\overline{9}$	$\overline{23}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{32}$	$\overline{13}$	$\overline{27}$	$\overline{8}$	$\overline{22}$	$\overline{3}$	$\overline{17}$	$\overline{31}$	$\overline{12}$	$\overline{26}$	$\overline{7}$	$\overline{21}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{30}$	$\overline{11}$	$\overline{25}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$
$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{27}$	$\overline{7}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{26}$	$\overline{6}$	$\overline{19}$	$\overline{32}$	$\overline{12}$	$\overline{25}$	$\overline{5}$	$\overline{18}$	$\overline{31}$	$\overline{11}$	$\overline{24}$	$\overline{4}$	$\overline{17}$	$\overline{30}$	$\overline{10}$	$\overline{23}$	$\overline{3}$	$\overline{16}$	$\overline{29}$	$\overline{9}$	$\overline{22}$	$\overline{2}$	$\overline{15}$	$\overline{28}$	$\overline{8}$	$\overline{21}$
$\overline{21}$	$\overline{13}$	$\overline{25}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{28}$	$\overline{7}$	$\overline{19}$	$\overline{31}$	$\overline{10}$	$\overline{22}$	$\overline{1}$	$\overline{13}$	$\overline{25}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{28}$	$\overline{7}$	$\overline{19}$	$\overline{31}$	$\overline{10}$	$\overline{22}$	$\overline{1}$	$\overline{13}$	$\overline{25}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{28}$	$\overline{7}$	$\overline{19}$	$\overline{31}$	$\overline{10}$	$\overline{22}$
$\overline{22}$	$\overline{12}$	$\overline{23}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{23}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{23}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{23}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{23}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{23}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{23}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{23}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{23}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{23}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{23}$
$\overline{23}$	$\overline{11}$	$\overline{21}$	$\overline{31}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{28}$	$\overline{5}$	$\overline{15}$	$\overline{25}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{22}$	$\overline{32}$	$\overline{9}$	$\overline{19}$	$\overline{29}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{26}$	$\overline{3}$	$\overline{13}$	$\overline{23}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{30}$	$\overline{7}$	$\overline{17}$	$\overline{27}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{24}$
$\overline{24}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$	$\overline{28}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$	$\overline{22}$	$\overline{31}$	$\overline{7}$	$\overline{16}$	$\overline{25}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$	$\overline{28}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$	$\overline{22}$	$\overline{31}$	$\overline{7}$	$\overline{16}$	$\overline{25}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$	$\overline{28}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$	$\overline{22}$	$\overline{31}$	$\overline{7}$	$\overline{16}$	$\overline{25}$
$\overline{25}$	$\overline{9}$	$\overline{17}$	$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{24}$	$\overline{32}$	$\overline{7}$	$\overline{15}$	$\overline{23}$	$\overline{31}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{22}$	$\overline{30}$	$\overline{5}$	$\overline{13}$	$\overline{21}$	$\overline{29}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{28}$	$\overline{3}$	$\overline{11}$	$\overline{19}$	$\overline{27}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{26}$
$\overline{26}$	$\overline{8}$	$\overline{15}$	$\overline{22}$	$\overline{29}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{17}$	$\overline{24}$	$\overline{31}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{19}$	$\overline{26}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\overline{28}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{16}$	$\overline{23}$	$\overline{30}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{18}$	$\overline{25}$	$\overline{32}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$	$\overline{20}$	$\overline{27}$
$\overline{27}$	$\overline{7}$	$\overline{13}$	$\overline{19}$	$\overline{25}$	$\overline{31}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{22}$	$\overline{28}$	$\overline{1}$	$\overline{7}$	$\overline{13}$	$\overline{19}$	$\overline{25}$	$\overline{31}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{22}$	$\overline{28}$	$\overline{1}$	$\overline{7}$	$\overline{13}$	$\overline{19}$	$\overline{25}$	$\overline{31}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{22}$	$\overline{28}$
$\overline{28}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{16}$	$\overline{21}$	$\overline{26}$	$\overline{31}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{13}$	$\overline{18}$	$\overline{23}$	$\overline{28}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\overline{25}$	$\overline{30}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$	$\overline{22}$	$\overline{27}$	$\overline{32}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{14}$	$\overline{19}$	$\overline{24}$	$\overline{29}$
$\overline{29}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{13}$	$\overline{17}$	$\overline{21}$	$\overline{25}$	$\overline{29}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{24}$	$\overline{28}$	$\overline{32}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$	$\overline{15}$	$\overline{19}$	$\overline{23}$	$\overline{27}$	$\overline{31}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$	$\overline{22}$	$\overline{26}$	$\overline{30}$
$\overline{30}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$	$\overline{22}$	$\overline{25}$	$\overline{28}$	$\overline{31}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$	$\overline{22}$	$\overline{25}$	$\overline{28}$	$\overline{31}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$	$\overline{22}$	$\overline{25}$	$\overline{28}$	$\overline{31}$
$\overline{31}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\overline{15}$	$\overline{17}$	$\overline{19}$	$\overline{21}$	$\overline{23}$	$\overline{25}$	$\overline{27}$	$\overline{29}$	$\overline{31}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{22}$	$\overline{24}$	$\overline{26}$	$\overline{28}$	$\overline{30}$	$\overline{32}$
$\overline{32}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{0}$

Dari tabel di atas, diperoleh himpunan sisi pada $\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{33}}$ adalah $E(\mathfrak{J}_{Z_{33}}) =$ $\{(1,4), (1,7), (1,10), (1,12), (1,13), (1,16), (1,19), (1,22), (1,23), (1,25), (1,28), (1,31), (2,5), (2,6), (2,8), (2,11), (2,14), (2,17), (2,20), (2,23), (2,26), (2,28), (2,29), (2,32), (3,4), (3,15), (3,26), (4,7), (4,10), (4,13), (4,14), (4,16), (4,19), (4,22), (4,25), (4,28), (4,31), (5,8), (5,9), (5,11), (5,14), (5,17), (5,20), (5,23), (5,26), (5,29), (5,31), (5,32), (6,13), (6,24), (7,8), (7,10), (7,13), (7,16), (7,19), (7,22), (7,25), (7,28), (7,30), (7,31), (8,11), (8,14), (8,17), (8,18), (8,20), (8,23), (8,26), (8.29), (8,32), (9,16), (9,27), (10,13), (10,16), (10,19), (10,21), (10,22), (10,25), (10,28), (10,31), (10,32), (11,14), (11,17), (11,20), (11,23), (11,26), (11,29),$

$(11,32)$, $(12,23)$, $(13,16)$, $(13,17)$, $(13,19)$, $(13,22)$, $(13,25)$, $(13,28)$, $(13,31)$, $(14,15)$, $(14,17)$, $(14,20)$, $(14,23)$, $(14,26)(14,29)$, $(14,32)$, $(15,25)$, $(16,19)$, $(16,20)$, $(16,22)$, $(16,25)$, $(16,31)(17,20)$, $(17,23)$, $(17,24)$, $(17,26)$, $(17,29)$, $(17,32)$, $(18,19)$, $(18,30)$, $(19,22)$, $(19,25)$, $(19,28)$, $(19,29)$, $(19,31)$, $(20,23)$, $(20,25)$, $(20,26)$, $(20,27)$, $(20,29)$, $(20,32)$, $(21,32)$, $(22,25)$, $(22,28)$, $(22,31)$, $(23,26)$, $(23,29)$, $(23,32)$, $(24,28)$, $(25,26)$, $(25,28)$, $(25,31)$, $(26,29)$, $(26,32)$, $(27,31)$, $(28,31)$, $(29,30)$, $(29,32)\}$.

Sehingga, dapat digambarkan $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}_{33}}$ sebagai berikut:



Gambar 4.3 Graf $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}_{33}}$

Berdasarkan Gambar 4.3, maka dapat diketahui derajat titik pada $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}_{33}}$ adalah sebagai berikut:

Tabel 4.6 Derajat Titik pada $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}_{33}}$

u	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$
$\deg(u)$	12	12	3	12	12	3	12	12	3	12	10	2	12	12	3	12	12	3	12	12	2	10	12	3	12	12	3	12	12	3	12	12

Sehingga *F-Index* pada graf $\mathfrak{I}_{Z_{33}}$ sebagai berikut:

$$F(\mathfrak{I}_{Z_{33}}) = \sum_{u \in V(\mathfrak{I}_{Z_{33}})} \deg(u)^3$$

$$= \deg(\bar{1})^3 + \deg(\bar{2})^3 + \deg(\bar{3})^3 + \deg(\bar{4})^3 + \deg(\bar{5})^3 +$$
$$\deg(\bar{6})^3 + \deg(\bar{7})^3 + \deg(\bar{8})^3 + \deg(\bar{9})^3 + \deg(\overline{10})^3 +$$
$$\deg(\overline{11})^3 + \deg(\overline{12})^3 + \deg(\overline{13})^3 + \deg(\overline{14})^3 + \deg(\overline{15})^3 +$$
$$\deg(\overline{16})^3 + \deg(\overline{17})^3 + \deg(\overline{18})^3 + \deg(\overline{19})^3 + \deg(\overline{20})^3 +$$
$$\deg(\overline{21})^3 + \deg(\overline{22})^3 + \deg(\overline{23})^3 + \deg(\overline{24})^3 + \deg(\overline{25})^3 +$$
$$\deg(\overline{26})^3 + \deg(\overline{27})^3 + \deg(\overline{28})^3 + \deg(\overline{29})^3 + \deg(\overline{30})^3 +$$
$$\deg(\overline{31})^3 + \deg(\overline{32})^3$$
$$= 12^3 + 12^3 + 3^3 + 12^3 + 12^3 + 3^3 + 12^3 + 12^3 + 3^3 + 12^3 +$$
$$10^3 + 2^3 + 12^3 + 12^3 + 3^3 + 12^3 + 12^3 + 3^3 + 12^3 +$$
$$12^3 + 2^3 + 10^3 + 12^3 + 3^3 + 12^3 + 12^3 + 3^3 + 12^3 +$$
$$12^3 + 3^3 + 12^3 + 12^3$$
$$= 20 \cdot 12^3 + 8 \cdot 3^3 + 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 2^3$$
$$= 20 \cdot 12^3 + 8 \cdot 3^3 + 2 \cdot 10^3 + 2^4$$

4.1.4 *F-Index* pada Graf Jacobson dari Ring $\mathbb{Z}_{39}$

Himpunan anggota pada ring bilangan bulat modulo 39 adalah $\mathbb{Z}_{39} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{27}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{30}, \overline{31}, \overline{32}, \overline{33}, \overline{34}, \overline{35}, \overline{36}, \overline{37}, \overline{38}\}$. Kemudian untuk mencari Jacobson Radical dari $\mathbb{Z}_{39}$, maka terlebih dahulu akan dicari ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_{39}$. Diperoleh semua ideal dari $\mathbb{Z}_{39}$ yaitu:

$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\}$

$\langle\bar{1}\rangle = \langle\bar{2}\rangle = \langle\bar{4}\rangle = \langle\bar{5}\rangle = \langle\bar{7}\rangle = \langle\bar{8}\rangle = \langle\overline{10}\rangle = \langle\overline{11}\rangle = \langle\overline{14}\rangle = \langle\overline{16}\rangle = \langle\overline{17}\rangle =$

$\langle\overline{19}\rangle = \langle\overline{20}\rangle = \langle\overline{22}\rangle = \langle\overline{23}\rangle = \langle\overline{25}\rangle = \langle\overline{28}\rangle = \langle\overline{29}\rangle = \langle\overline{31}\rangle = \langle\overline{32}\rangle =$

$\langle\overline{34}\rangle = \langle\overline{35}\rangle = \langle\overline{37}\rangle = \langle\overline{38}\rangle = Z_{39}$

$\langle\bar{3}\rangle = \langle\bar{6}\rangle = \langle\bar{9}\rangle = \langle\overline{12}\rangle = \langle\overline{15}\rangle = \langle\overline{18}\rangle = \langle\overline{21}\rangle = \langle\overline{24}\rangle = \langle\overline{27}\rangle = \langle\overline{30}\rangle =$

$\langle\overline{33}\rangle = \langle\overline{36}\rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{24}, \overline{27}, \overline{30}, \overline{33}, \overline{36}\}$

$\langle\overline{13}\rangle = \langle\overline{26}\rangle = \{\bar{0}, \overline{13}, \overline{26}\}$

Sehingga, dapat diketahui ideal maksimal dari ideal pada $\mathbb{Z}_{39}$ adalah$\langle\bar{3}\rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{24}, \overline{27}, \overline{30}, \overline{33}, \overline{36}\}$ dan $\langle\overline{13}\rangle = \{\bar{0}, \overline{13}, \overline{26}\}$ karena ideal-ideal tersebut tidak termuat pada ideal sejati lain. Oleh karena itu, himpunan Jacobson Radical dari $\mathbb{Z}_{39}$ adalah $J(\mathbb{Z}_{39}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{24}, \overline{27}, \overline{30}, \overline{33}, \overline{36}\} \cap \{\bar{0}, \overline{13}, \overline{26}\} = \{\bar{0}\}$.

Berdasarkan definisi pada graf Jacobson maka diperoleh himpunan titik dari $\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{39}}$ adalah $V(\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{39}}) = \mathbb{Z}_{39} \backslash J(Z_{39}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{27}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{30}, \overline{31}, \overline{32}, \overline{33}, \overline{34}, \overline{35}, \overline{36}, \overline{37}, \overline{38}\}$ dan unit dari ring $\mathbb{Z}_{39}$ adalah $U(\mathbb{Z}_{39}) = \left\{\begin{matrix}\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{32}, \\ \overline{34}, \overline{35}, \overline{37}, \overline{38}\end{matrix}\right\}$.

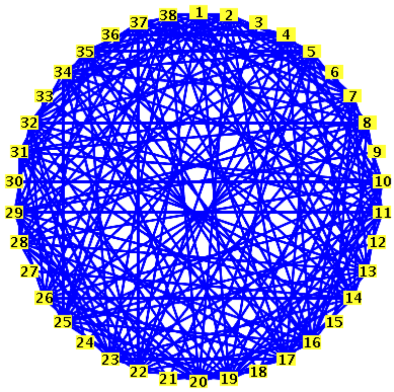
Kemudian, akan dicari titik-titik yang terhubung langsung melalui perhitungan tabel berikut:

Tabel 4.7 Tabel $1-\overline{xy}$ dari $\mathbb{Z}_{39}\backslash J(\mathbb{Z}_{39})$

x \ y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
1	0	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
2	38	36	34	32	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	37	35	33	31	29	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3
3	37	34	31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1	37	34	31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1	37	34	31	28	25	22	19	16	13	10	7	4
4	36	32	28	24	20	16	12	8	4	0	35	31	27	23	19	15	11	7	3	38	34	30	26	22	18	14	10	6	2	37	33	29	25	21	17	13	9	5
5	35	30	25	20	15	10	5	0	34	29	24	19	14	9	4	38	33	28	23	18	13	8	3	37	32	27	22	17	12	7	2	36	31	26	21	16	11	6
6	34	28	22	16	10	4	37	31	25	19	13	7	1	34	28	22	16	10	4	37	31	25	19	13	7	1	34	28	22	16	10	4	37	31	25	19	13	7
7	33	26	19	12	5	37	30	23	16	9	2	34	27	20	13	6	38	31	24	17	10	3	35	28	21	14	7	0	32	25	18	11	4	36	29	22	15	8
8	32	24	16	8	0	31	23	15	7	38	30	22	14	6	37	29	21	13	5	36	28	20	12	4	35	27	19	11	3	34	26	18	10	2	33	25	17	9
9	31	22	13	4	34	25	16	7	37	28	19	10	1	31	22	13	4	34	25	16	7	37	28	19	10	1	31	22	13	4	34	25	16	7	37	28	19	10
10	30	20	10	0	29	19	9	38	28	18	8	37	27	17	7	36	26	16	6	35	25	15	5	34	24	14	4	33	23	13	3	32	22	12	2	31	21	11
11	29	18	7	35	24	13	2	30	19	8	36	25	14	3	31	20	9	37	26	15	4	32	21	10	38	27	16	5	33	22	11	0	28	17	6	34	23	12
12	28	16	4	31	19	7	34	22	10	37	25	13	1	28	16	4	31	19	7	34	22	10	37	25	13	1	28	16	4	31	19	7	34	22	10	37	25	13
13	27	14	1	27	14	1	27	14	1	27	14	1	27	14	1	27	14	1	27	14	1	27	14	1	27	14	1	27	14	1	27	14	1	27	14	1	27	14
14	26	12	37	23	9	34	20	6	31	17	3	28	14	0	25	11	36	22	8	33	19	5	30	16	2	27	13	38	24	10	35	21	7	32	18	4	29	15
15	25	10	34	19	4	28	13	37	22	7	31	16	1	25	10	34	19	4	28	13	37	22	7	31	16	1	25	10	34	19	4	28	13	37	22	7	31	16
16	24	8	31	15	38	22	6	29	13	36	20	4	27	11	34	18	2	25	9	32	16	0	23	7	30	14	37	21	5	28	12	35	19	3	26	10	33	17
17	23	6	28	11	33	16	38	21	4	26	9	31	14	36	19	2	24	7	29	12	34	17	0	22	5	27	10	32	15	37	20	3	25	8	30	13	35	18
18	22	4	25	7	28	10	31	13	34	16	37	19	1	22	4	25	7	28	10	31	13	34	16	37	19	1	22	4	25	7	28	10	31	13	34	16	37	19
19	21	2	22	3	23	4	24	5	25	6	26	7	27	8	28	9	29	10	30	11	31	12	32	13	33	14	34	15	35	16	36	17	37	18	38	19	0	20
20	20	0	19	38	18	37	17	36	16	35	15	34	14	33	13	32	12	31	11	30	10	29	9	28	8	27	7	26	6	25	5	24	4	23	3	22	2	21
21	19	37	16	34	13	31	10	28	7	25	4	22	1	19	37	16	34	13	31	10	28	7	25	4	22	1	19	37	16	34	13	31	10	28	7	25	4	22
22	18	35	13	30	8	25	3	20	37	15	32	10	27	5	22	0	17	34	12	29	7	24	2	19	36	14	31	9	26	4	21	38	16	33	11	28	6	23
23	17	33	10	26	3	19	35	12	28	5	21	37	14	30	7	23	0	16	32	9	25	2	18	34	11	27	4	20	36	13	29	6	22	38	15	31	8	24
24	16	31	7	22	37	13	28	4	19	34	10	25	1	16	31	7	22	37	13	28	4	19	34	10	25	1	16	31	7	22	37	13	28	4	19	34	10	25
25	15	29	4	18	32	7	21	35	10	24	38	13	27	2	16	30	5	19	33	8	22	36	11	25	0	14	28	3	17	31	6	20	34	9	23	37	12	26
26	14	27	1	14	27	1	14	27	1	14	27	1	14	27	1	14	27	1	14	27	1	14	27	1	14	27	1	14	27	1	14	27	1	14	27	1	14	27
27	13	25	37	10	22	34	7	19	31	4	16	28	1	13	25	37	10	22	34	7	19	31	4	16	28	1	13	25	37	10	22	34	7	19	31	4	16	28
28	12	23	34	6	17	28	0	11	22	33	5	16	27	38	10	21	32	4	15	26	37	9	20	31	3	14	25	36	8	19	30	2	13	24	35	7	18	29
29	11	21	31	2	12	22	32	3	13	23	33	4	14	24	34	5	15	25	35	6	16	26	36	7	17	27	37	8	18	28	38	9	19	29	0	10	20	30
30	10	19	28	37	7	16	25	34	4	13	22	31	1	10	19	28	37	7	16	25	34	4	13	22	31	1	10	19	28	37	7	16	25	34	4	13	22	31
31	9	17	25	33	2	10	18	26	34	3	11	19	27	35	4	12	20	28	36	5	13	21	29	37	6	14	22	30	38	7	15	23	31	0	8	16	24	32
32	8	15	22	29	36	4	11	18	25	32	0	7	14	21	28	35	3	10	17	24	31	38	6	13	20	27	34	2	9	16	23	30	37	5	12	19	26	33
33	7	13	19	25	31	37	4	10	16	22	28	34	1	7	13	19	25	31	37	4	10	16	22	28	34	1	7	13	19	25	31	37	4	10	16	22	28	34
34	6	11	16	21	26	31	36	2	7	12	17	22	27	32	37	3	8	13	18	23	28	33	38	4	9	14	19	24	29	34	0	5	10	15	20	25	30	35
35	5	9	13	17	21	25	29	33	37	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	3	7	11	15	19	23	27	31	35	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
36	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37
37	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
38	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	0

Dari tabel di atas, diperoleh himpunan sisi pada $\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{39}}$ adalah $E\left(\mathfrak{J}_{Z_{39}}\right) =$ $\{$(1,4), (1,7), (1,10), (1,13), (1,14), (1,16), (1,19), (1,22), (1,25), (1,27), (1,28), (1,31), (1,34), (1,37), (2,5), (2,7), (2,8), (2,11), (2,14), (2,17), (2,20), (2,23), (2,26), (2,29), (2,32), (2,33), (2,35), (2,38), (3,9), (3,22), (3,35), (4,7), (4,10), (4,13), (4,16), (4,19), (4,22), (4,23), (4,25), (4,28), (4,31), (4,34), (4,36), (4,37), (5,8), (5,11), (5,14), (5,17), (5,20), (5,21), (5,23), (5,26), (5,29), (5,32), (5,34), (5,35), (5,38), (6,11), (6,24), (6,37), (7,10), (7,13), (7,15), (7,16), (7,19), (7,22), (7,25), (7,28), (7,31), (7,34), (7,37), (8,11), (8,14), (8,17), (8,18), (8,20), (8,23), (8,26), (8,29), (8,31), (8,32), (8,35), (8,38), (9,16), (9,29), (10,13), (10,16), (10,17), (10,19), (10,22), (10,25), (10,28), (10,30), (10,31), (10,34), (10,37), (11,14), (11,17), (11,19), (11,20), (11,23), (11,26), (11,29), (11,32), (11,35), (11,38), (12,25), (12,38), (13,16), (13,19), (13,22), (13,25), (13,28), (13,31), (13,34), (13,37), (14,17), (14,20), (14,23), (14,26), (16,19), (16,22), (16,22), (16,25), (16,28), (16,31), (16,34), (16,35), (16,37), (17,20), (17,23), (17,26), (17,29), (17,32), (17,35), (17,36), (17,38), (18,21), (18,34), (19,22), (19,24), (19,25), (19,28), (19,31), (19,34), (19,37), (20,23), (20,26), (20,28), (20,29), (20,32), (20,35), (20,38), (21,31), (22,25), (22,28), (22,29), (22,31), (22,34), (22,37), (23,26), (23,29), (23,30), (23,32), (23,35), (23,38), (24,32), (25,28), (25,31), (25,34), (25,37), (25,38), (26,29), (26,32), (26,35), (26,38), (28,31), (28,33), (28,37), (29,32), (29,35), (29,38), (30,36), (31,34), (31,37), (32,35), (32,37), (32,38), (34,37), (35,38)}.

Sehingga, dapat digambarkan $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}_{39}}$ sebagai berikut:



Gambar 4.4 Graf $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}_{39}}$

Berdasarkan Gambar 4.4, maka dapat diketahui derajat titik pada $\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}_{39}}$ adalah sebagai berikut:

Tabel 4.8 Derajat Titik pada $\Im_{\mathbb{Z}_{39}}$

u	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$
deg (u)	14	14	3	14	14	3	14	14	3	14	14	2	12	14	3	14	14	3	14

u	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$	$\overline{26}$	$\overline{27}$	$\overline{28}$	$\overline{29}$	$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{34}$	$\overline{35}$	$\overline{36}$	$\overline{37}$	$\overline{38}$
deg (u)	14	3	14	14	3	14	12	2	14	14	3	14	14	3	14	14	3	14	14

Sehingga *F-Index* pada graf $\Im_{Z_{39}}$ sebagai berikut:

$$F\left(\Im_{Z_{39}}\right) = \sum_{u\in V(\Im_{Z_{39}})} \deg(u)^3$$

$$= \deg(\bar{1})^3 + \deg(\bar{2})^3 + \deg(\bar{3})^3 + \deg(\bar{4})^3 + \deg\left(\bar{5}\right)^3 +$$

$$\deg(\bar{6})^3 + \deg(\bar{7})^3 + \deg(\bar{8})^3 + \deg(\bar{9})^3 + \deg(\overline{10})^3 +$$

$$\deg(\overline{11})^3 + \deg(\overline{12})^3 + \deg(\overline{13})^3 + \deg(\overline{14})^3 + \deg\left(\overline{15}\right)^3 +$$

$$\deg(\overline{16})^3 + \deg(\overline{17})^3 + \deg(\overline{18})^3 + \deg(\overline{19})^3 + \deg(\overline{20})^3 +$$

$$\deg(\overline{21})^3 + \deg(\overline{22})^3 + \deg(\overline{23})^3 + \deg(\overline{24})^3 + \deg\left(\overline{25}\right)^3 +$$

$$\deg(\overline{26})^3 + \deg(\overline{27})^3 + \deg(\overline{28})^3 + \deg(\overline{29})^3 + \deg(\overline{30})^3 +$$

$$\deg(\overline{31})^3 + \deg(\overline{32})^3 + \deg(\overline{33})^3 + \deg(\overline{34})^3 + \deg\left(\overline{35}\right)^3 +$$

$$\deg(\overline{36})^3 + \deg(\overline{37})^3 + \deg(\overline{38})^3$$

$$= 14^3 + 14^3 + 3^3 + 14^3 + 14^3 + 3^3 + 14^3 + 14^3 + 3^3 + 14^3 +$$

$$14^3 + 2^3 + 12^3 + 14^3 + 3^3 + 14^3 + 14^3 + 3^3 + 14^3 +$$

$$14^3 + 3^3 + 14^3 + 14^3 + 3^3 + 14^3 + 12^3 + 2^3 + 14^3 +$$

$$14^3 + 3^3 + 14^3 + 14^3 + 3^3 + 14^3 + 14^3 + 3^3 + 14^3 + 14^3$$

$$= 24 \cdot 14^3 + 10 \cdot 3^3 + 2 \cdot 12^3 + 2 \cdot 2^3$$

$$= 24 \cdot 14^3 + 10 \cdot 3^3 + 2 \cdot 12^3 + 2^4$$

4.2 *F-Index* pada Graf Jacobson dari Ring $\mathbb{Z}_{3p}$, $p \geq 5$

Pada subbab ini akan dibuktikan dugaan rumus umum *F-Index* pada graf Jacobson dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ dimana $p \geq 5$ dan p adalah bilangan prima. Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan pada subbab 4.1 diperoleh:

Tabel 4.9 Tabel Hasil Perhitungan pada Subbab 4.1

p	Ideal Maksimal di $\mathbb{Z}_{3p}$	Unit di $\mathbb{Z}_{3p}$	Jacobson Radical di $\mathbb{Z}_{3p}$	$V(\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{3p}})$	$F\left(\mathfrak{J}_{Z_{3p}}\right)$
5	$\langle\bar{3}\rangle$ dan $\langle\bar{5}\rangle$	$\{\bar{1},\bar{2},\bar{4},\bar{7},\bar{8},\overline{11},\overline{13},\overline{14}\}$	$\{\bar{0}\}$	$\mathbb{Z}_{15}\backslash\{\bar{0}\}$	$8\cdot 6^3+2\cdot 3^3+2\cdot 4^3+2^4$
7	$\langle\bar{3}\rangle$ dan $\langle\bar{7}\rangle$	$\{\bar{1},\bar{2},\bar{4},\bar{5},\bar{8},\overline{10},\overline{11},\overline{13},\overline{16},\overline{17},\overline{19},\overline{20}\}$	$\{\bar{0}\}$	$\mathbb{Z}_{21}\backslash\{\bar{0}\}$	$12\cdot 8^3+4\cdot 3^3+2\cdot 6^3+2^4$
11	$\langle\bar{3}\rangle$ dan $\langle\overline{11}\rangle$	$\{\bar{1},\bar{2},\bar{4},\bar{5},\bar{7},\bar{8},\overline{10},\overline{13},\overline{14},\overline{16},\overline{17},\overline{19},\overline{20},\overline{23},\overline{25},\overline{26},\overline{28},\overline{29},\overline{31},\overline{32}\}$	$\{\bar{0}\}$	$\mathbb{Z}_{33}\backslash\{\bar{0}\}$	$20\cdot 12^3+8\cdot 3^3+2\cdot 10^3+2^4$
13	$\langle\bar{3}\rangle$ dan $\langle\overline{13}\rangle$	$\left\{\bar{1},\bar{2},\bar{4},\bar{5},\bar{7},\bar{8},\overline{10},\overline{11},\overline{14},\overline{16},\overline{17},\overline{19},\overline{20},\overline{22},\overline{23},\overline{25},\overline{28},\overline{29},\overline{31},\overline{32},\overline{34},\overline{35},\overline{37},\overline{38}\right\}$	$\{\bar{0}\}$	$\mathbb{Z}_{39}\backslash\{\bar{0}\}$	$24\cdot 14^3+10\cdot 3^3+2\cdot 12^3+2^4$

Dari tabel di atas dapat diperoleh dugaan rumus seperti di bawah ini:

1. Ideal maksimal pada $\mathbb{Z}_{3p}$ adalah $\langle\bar{3}\rangle$ dan $\langle\bar{p}\rangle$.
2. Unit pada $\mathbb{Z}_{3p}$ adalah yang bukan kelipatan 3 dan p.
3. Jacobson radical pada $\mathbb{Z}_{3p}$ adalah $\{\bar{0}\}$.
4. Himpunan titik pada graf Jacobson dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ adalah $\mathbb{Z}_{3p}\backslash\{\bar{0}\}$.
5. F-Index pada graf Jacobson dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ adalah $(2p-2)\cdot(p+1)^3+(p-3)\cdot 3^3+2\cdot(p-1)^3+2^4$.

Sehingga, untuk mebuktikan dugaan rumus *F-Index* tersebut maka diperoleh beberapa lemma sebagai berikut:

Lemma 4.1

Misalkan p adalah bilangan prima, $p \geq 5$, maka $\mathbb{Z}_{3p}$ memiliki tepat dua ideal sejati tak nol berbeda, yaitu $\langle \bar{3} \rangle$ dan $\langle \bar{p} \rangle$. Sehingga $\langle \bar{3} \rangle$ dan $\langle \bar{p} \rangle$ masing-masing adalah ideal maksimal di $\mathbb{Z}_{3p}$.

Bukti:

Misalkan $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{3p}$, maka terdapat empat kasus untuk membuktikan bahwa $\langle \bar{3} \rangle$ dan $\langle \bar{p} \rangle$ masing-masing adalah ideal maksimal di $\mathbb{Z}_{3p}$, yaitu sebagai berikut:

Kasus 1

Untuk $x = \overline{3k}$, dengan $k = \{1,2,\dots,p-1\}$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \bar{x} \rangle = \langle \bar{3} \rangle$. Karena $\bar{x} = \overline{3k} = \bar{3} \cdot \bar{k}$ maka $\bar{x} \in \langle \bar{3} \rangle$, akibatnya $\langle \bar{x} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle$. Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa $\langle \bar{3} \rangle \subseteq \langle \bar{x} \rangle$. Perhatikan bahwa:

$$xa \equiv 3(mod\ 3p)$$

$$\leftrightarrow (3k)a \equiv 3(mod\ 3p)$$

memiliki solusi karena FPB$(3k, 3p)|3$. Artinya, terdapat $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{3p}$. Sehingga, $\bar{3} \in \langle \bar{x} \rangle$. Jadi, $\langle \bar{3} \rangle \subseteq \langle \bar{x} \rangle$. Karena $\langle \bar{x} \rangle \subseteq \langle \bar{3} \rangle$ dan $\langle \bar{3} \rangle \subseteq \langle \bar{x} \rangle$ maka $\langle \bar{x} \rangle = \langle \bar{3} \rangle$.

Kasus 2

Untuk $\bar{x} = \overline{3k-1}$, dengan $k = \{1,2,\dots,p\}$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \bar{x} \rangle = \mathbb{Z}_{3p}$. Perhatikan bahwa $\bar{x} \neq p$, sehingga FPB $(x, p) = 1$. Dengan demikian $\bar{x}$ adalah unit di $\mathbb{Z}_{3p}$. Jadi, $\langle \bar{x} \rangle = \mathbb{Z}_{3p}$.

Kasus 3

Untuk $\bar{x} = \bar{0}$. Karena $\bar{x} = \bar{0}$ maka jelas bahwa $\langle \bar{x} \rangle = \langle \bar{0} \rangle$.

Kasus 4

Untuk $\bar{x} = \bar{p}$. Karena p adalah bilangan prima dan $p \neq 3$ maka $3 \nmid p$, sehingga $\langle \bar{p} \rangle \notin \langle \bar{3} \rangle$. Persamaan $3a \equiv p(mod\ 3p)$ tidak memiliki solusi karena FPB $(3,3p) = 3$ dan $3 \nmid p$ artinya $\bar{3} \notin \langle \bar{p} \rangle$, sehingga $\langle \bar{3} \rangle \nsubseteq \langle \bar{p} \rangle$. Kemudian, akan ditunjukkan bahwa $\langle \bar{p} \rangle \neq \mathbb{Z}_{3p}$. Persamaan $pa \equiv 1(mod\ 3p)$ tidak memiliki solusi karena FPB $(p, 3p) = p$, dan $p \nmid 1$, artinya $\bar{1} \notin \langle \bar{p} \rangle$. Jadi, $\langle \bar{p} \rangle \neq \mathbb{Z}_{3p}$. Dengan demikian, $\langle \bar{p} \rangle$ adalah ideal sejati dari $\mathbb{Z}_{3p}$. Jadi, $\langle \bar{3} \rangle$ dan $\langle \bar{p} \rangle$ adalah ideal maksimal $\mathbb{Z}_{3p}$.

Lemma 4.2

Misalkan p adalah bilangan prima. Himpunan unit dari ring $\mathbb{Z}_{3p}$ adalah $U(\mathbb{Z}_{3p}) = \{x \in \mathbb{Z}_{3p} | x \notin \{\bar{0}, \bar{p}, \overline{2p}, \overline{3n}; n = 1,2, \dots, p-1\}\}$.

Bukti:

Perhatikan bahwa anggota ring $\mathbb{Z}_{3p} = \{0,1,2, \dots ,3p-1\}$.

1. Untuk $x = \bar{0}$, diperoleh $\bar{0} \cdot y = y \cdot \bar{0} = \bar{0} \neq \bar{1}, \forall y \in \mathbb{Z}_{3p}$. Jadi, $\bar{0} \notin U(\mathbb{Z}_{3p})$.
2. Untuk $x \neq \bar{0}$, $x \in U(\mathbb{Z}_{3p})$ jika dan hanya jika terdapat $y \in \mathbb{Z}_{3p}$ sedemikian hingga $xy = 1$, dengan kata lain $xy \equiv 1(mod\ 3p)$ memiliki solusi.

   Berdasarkan Definisi 2.2, terdapat $r \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga

   $xy \equiv 1(mod\ 3p) \leftrightarrow xy - 1 = (3p)r \leftrightarrow xy - (3p)r = 1$

   Misalkan $t \in \mathbb{Z}$, dengan $t = (x, 3p) \leftrightarrow t|x$ dan $t|3p$

   $$\leftrightarrow t|xy - (3p)s$$

   $$\leftrightarrow t|1$$

Berdasarkan Definisi 2.1, terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sedemikian hingga $1 = tk \leftrightarrow t = 1$ atau $t = -1$. Untuk $t = 1$, diperoleh $(x, 3p) = 1$.

3. Oleh karena itu, $x \in U(\mathbb{Z}_{3p})$ hanya dipenuhi jika dan hanya jika $(x, 3p) = 1$ Untuk $x = \bar{p}$, diperoleh $(x, 3p) = p \neq 1$ sehingga $x \notin U(\mathbb{Z}_{3p})$.
4. Untuk $x = \overline{2p}$, diperoleh $(x, 3p) = p \neq 1$ sehingga $x \notin U(\mathbb{Z}_{3p})$.
5. Untuk $x = \overline{3n}; n \in \{1,2, \dots, p-1\}$, diperoleh $(x, 3p) = p \neq 1$ sehingga $x \notin U(\mathbb{Z}_{3p})$.

   Faktor dari $3p$ adalah $1,3,$ dan p. Jika $x \in \mathbb{Z}_{3p}$ dengan $x \notin \{\overline{3n}; n = 1,2, \dots, p-1\} \cup \{\bar{0}, \bar{p}, \overline{2p}\}$, maka $(x, 3p) = 1$. Sehingga $(x, 3p) = 1, \forall x \notin \{\overline{3n}; n = 1,2, \dots, p-1\} \cup \{\bar{0}, \bar{p}, \overline{2p}\}$ dan terbukti bahwa $U(\mathbb{Z}_{3p}) = \{x \in \mathbb{Z}_{3p} | x \notin \{\bar{0}, \bar{p}, \overline{2p}, \overline{3n}; n = 1,2, \dots, p-1\}\}$.

Lemma 4.3

Misalkan p adalah bilangan prima, $p \geq 5$, maka Jacobson Radical dari $\mathbb{Z}_{3p}$ adalah $\{\bar{0}\}$.

Bukti:

Ambil $\bar{x} \in (\langle\bar{3}\rangle \cap \langle\bar{p}\rangle) = J(\mathbb{Z}_{3p})$. Akan dibuktikan bahwa $\bar{x} = \bar{0}$. Karena $\langle\bar{p}\rangle = \{\bar{0}, \bar{p}\}$ maka $\bar{x} = \bar{0}$ atau $\bar{x} = \bar{p}$. Perhatikan bahwa $\bar{p} \notin \langle\bar{3}\rangle$ karena $3a \equiv p (mod\ 3p)$ tidak memiliki solusi, jadi haruslah $\bar{x} \in \langle\bar{3}\rangle \cap \langle\bar{p}\rangle$ jika dan hanya jika $\bar{x} = \bar{0}$. Dengan demikian, $J(\mathbb{Z}_{3p}) = \{\bar{0}\}$.

Akibat Lemma 4.3

Misalkan p adalah bilangan prima dengan $p \geq 5$, maka $V\left(\Im_{\mathbb{Z}_{3p}}\right) = \mathbb{Z}_{3p} \backslash \{\bar{0}\}$.

Bukti:

Telah diketahui bahwa $V\left(\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{3p}}\right) = \mathbb{Z}_{3p} \setminus J(\mathbb{Z}_{3p})$, berdasarkan Lemma 4.2 jelas bahwa $V\left(\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{3p}}\right) = \mathbb{Z}_{3p} \setminus \{\bar{0}\}$.

Untuk mempermudah pembuktian yang selanjutnya, akan dilakukan beberapa penyesuaian dalam pembuktian. Misalkan:

$$V_1 \coloneqq \{p, 2p\},$$

$$V_2 \coloneqq \{3n \mid n = 1, 2, \dots, p-1\},$$

$$V_3 \coloneqq V - (V_1 \cup V_2).$$

Ingat bahwa untuk setiap $x, y \in V\left(\mathfrak{J}(\mathbb{Z}_{3\mathrm{p}})\right)$, x dan y akan terhubung langsung jika dan hanya jika $1 - xy \notin U(\mathbb{Z}_{3p})$ atau dengan kata lain saat $xy \equiv 1 (mod\ 3)$ atau $xy \equiv 1 (mod\ p)$.

Lemma 4.4

$\deg(\bar{p}) = \deg(\overline{2p}) = p - 1.$

Bukti:

Karena $\mathrm{FPB}(p, p) \neq 1$, maka $xp \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ tidak memiliki solusi.

Karena $\mathrm{FPB}(p, 3) = 1$, maka $xp \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ punya solusi tunggal. Misal solusi tersebut adalah s, maka untuk suatu $m \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, $s + 3m$ adalah solusi dari kongruensi tersebut. Dengan demikian terdapat p solusi untuk kongruensi tersebut. Karena $p^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$, maka dari definisi graf Jacobson terdapat $p - 1$ titik yang terhubung langsung dengan titik $\bar{p}$.

Selanjutnya, karena FPB$(2p, p) \neq 1$, maka $x(2p) \equiv 1(\text{mod } p)$ tidak memiliki solusi. Karena FPB$(2p, 3) = 1$, maka $x(2p) \equiv 1(\text{mod } 3)$ memiliki solusi tunggal. Misal solusi tersebut adalah s, maka untuk suatu $m \in \{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$, $s + 3m$ adalah solusi dari kongruensi tersebut. Dengan demikian terdapat p solusi untuk kongruensi tersebut. Karena $4p^2 \equiv 1(\text{mod } 3)$, maka dari definisi graf Jacobson terdapat $p - 1$ titik yang terhubung langsung dengan titik $\overline{2p}$.

Lemma 4.5

$1 - xv \notin U(\mathbb{Z}_{3p})$ mempunya tepat tiga solusi untuk setiap $v \in V_2$.

Bukti:

Misal $v = 3n$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$. Karena FPB$(v, 3) \neq 1$, maka $xv \equiv 1(\text{mod } 3)$ tidak memiliki solusi.

Karena FPB$(v, p) = 1$, maka $xv \equiv 1(\text{mod } p)$ punya solusi tunggal. Misal solusi tersebut adalah s, maka untuk suatu $m \in \{0, 1, 2\}$, $s + mp$ adalah solusi dari kongruensi tersebut. Dengan demikian terdapat tiga solusi untuk kongruensi tersebut.

Lemma 4.6

Misal $U \coloneqq \{v \in V_2 \mid v^2 \equiv 1(\text{mod } p)\}$. Maka $|U| = 2$.

Bukti:

Sebelum membuktikan kardinalitas U, akan kita tentukan solusi dari

$$x^2 \equiv 1(mod\ p)$$

untuk suatu bilangan prima $p \geq 5$.

Diperoleh:

$$x^2 - 1 \equiv 0(mod\ p)$$

$$\leftrightarrow (x+1)(x-1) \equiv 0(mod\ p),$$

yang artinya $x + 1 \equiv 0(mod\ p)$ atau $x - 1 \equiv 0(mod\ p)$.

Dari $x + 1 \equiv 0(mod\ p)$ diperoleh:

$$x + 1 \equiv 0(mod\ p)$$

$$\rightarrow \quad x \equiv -1(mod\ p)$$

$$\rightarrow \quad x \equiv p - 1(mod\ p),$$

dan dari $x - 1 \equiv 0(mod\ p)$ diperoleh:

$$x - 1 \equiv 0(mod\ p)$$

$$\rightarrow \quad x \equiv 1(mod\ p)$$

Karena $x \in \mathbb{Z}_{3p}$, maka dari $x \equiv p - 1(mod\ p)$ diperoleh

$$x \in \{p-1, 2p-1, 3p-1\},$$

dan dari $x \equiv 1(mod\ p)$ diperoleh

$$x \in \{1, p+1, 2p+1\}.$$

Selanjutnya akan dibuktikan $|U| = 2$.

Kasus 1

Jika $p \equiv 1(mod\ 3)$, maka

$$p - 1 \equiv 0(mod\ 3),$$

$$2p - 1 \equiv 1(mod\ 3),$$

$$3p - 1 \equiv 2(mod\ 3),$$

$$1 \equiv 1(mod\ 3),$$

$p + 1 \equiv 2(mod\ 3)$, dan

$$2p + 1 \equiv 0(mod\ 3).$$

Dengan demikian, $U = \{p-1, 2p+1\}$.

Kasus 2

Jika $p \equiv 2(mod\ 3)$, maka

$$p-1 \equiv 1(mod\ 3),$$

$$2p-1 \equiv 0(mod\ 3),$$

$$3p-1 \equiv 2(mod\ 3),$$

$$1 \equiv 1(mod\ 3),$$

$$p+1 \equiv 0(mod\ 3), \text{ dan}$$

$$2p+1 \equiv 2(mod\ 3).$$

Dengan demikian, $U = \{2p-1, p+1\}$.

Akibat Lemma 4.6

$\left|\left\{v \in V_2 \middle| \deg_{\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}_{3p}}}(v) = 3\right\}\right| = p-3$ dan $\left|\left\{v \in V_2 \middle| \deg_{\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}_{3p}}}(v) = 2\right\}\right| = 2.$

Lemma 4.7

$\deg_{\mathfrak{I}_{\mathbb{Z}_{3p}}}(v) = p+1, \forall v \in V_3$

Bukti:

Menurut Teorema 2.1, $xv \equiv 1(mod\ p)$ memiliki solusi tunggal $x = v^{p-2}$ untuk setiap $v \in \mathbb{Z}_{3p} - \{0\}$. Sehingga terdapat tiga solusi dari ekuivalensi tersebut untuk setiap $v \in \mathbb{Z}_{3p} - \{0\}$. Misal

$$S_p(v) \coloneqq \left\{x \in \mathbb{Z}_{3p} : xv \equiv 1(\text{mod } p)\right\}$$

untuk setiap $v \in \mathbb{Z}_{3p}$. Maka

$$\left|S_p(v)\right| = 3, \forall v \in \mathbb{Z}_{3p} - \{0, p, 2p\}. \tag{1}$$

Menurut teorema yang sama, $yv \equiv 1(mod\ 3)$ memiliki solusi tunggal $y = v$ untuk setiap $v \in \mathbb{Z}_{3\text{p}} - \{0\}$. Misal

$$S_3(v) \coloneqq \{x \in \mathbb{Z}_{3p} : xv \equiv 1(\text{mod } 3)\}$$

untuk setiap $v \in \mathbb{Z}_{3\text{p}}$. Maka

$$|S_3(v)| = p, \forall v \in \mathbb{Z}_{3p} - \{0,3,6,\dots,3p-3\}. \qquad (2)$$

Selanjutnya, akan ditentukan $S_p(v) \cap S_3(v), \forall v \in V_3$.

Ambil sebarang $v \in V_3$. Ingat bahwa jika $vx \equiv 1(mod\ 3)$ maka $x \equiv 1(mod\ 3)$ atau $x \equiv 2(mod\ 3)$, dan menurut Teorema 2.1 terdapat tepat satu solusi $x \in \mathbb{Z}_{3\text{p}}$. Sedemikian sehingga, $vx \equiv 1(mod\ p)$.

Selanjutnya, akan ditentukan x sedemikian sehingga x memenuhi kedua kongruensi

$$vx \equiv 1(mod\ 3) \text{ dan } vx \equiv 1(mod\ p).$$

Karena 3 dan p koprima, maka dari Teorema 2.2 terdapat x tunggal sedemikian sehingga $vx \equiv 1(mod\ 3p)$.

Dari hasil di atas diperoleh:

$$|S_p(v) \cap S_3(v)| = 1, \forall v \in V_3. \qquad (3)$$

Mudah ditunjukkan bahwa $x^2 \equiv 1(mod\ 3), \forall x \in V_3$, artinya terdapat tepat satu unsur $x \in S_3(v)$ sedemikian sehingga $x = v$.

Dari $(1), (2), (3)$, dan definisi bahwa setiap titik di $\Im_{\mathbb{Z}_{3p}}$ tidak terhubung langsung dengan dirinya sendiri, maka

$$\begin{aligned} \deg_{\Im_{\mathbb{Z}_{3\text{p}}}}(v) &= |S_3(v)| + |S_p(v)| - |S_p(v) \cap S_3(v)| - 1 \\ &= p + 3 - 1 - 1 \\ &= p + 1 \end{aligned}$$

untuk setiap $v \in V_3$.

Teorema 4.1

F-Index pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $3p$, p adalah bilangan prima dan $p \geq 5$ adalah:

$$F\left(\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{3p}}\right) = 2 \cdot (p-1)^3 + (p-3) \cdot 3^3 + 2^4 + (2p-2) \cdot (p+1)^3$$

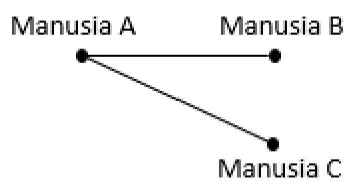
Bukti:

$$\begin{aligned} F\left(\mathfrak{J}_{Z_{3p}}\right) &= \textstyle\sum_{v \in V\left(\mathfrak{J}_{\mathbb{Z}_{3p}}\right)} \deg(v)^3 \\ &= \textstyle\sum_{v \in V_1} \deg(v)^3 + \sum_{v \in V_2} \deg(v)^3 + \sum_{v \in V_3} \deg(v)^3 \\ &= 2 \cdot (p-1)^3 + (p-1-2) \cdot 3^3 + 2 \cdot 2^3 + \big((3p-1) - (2) - \\ &\quad (p-1-2) - 2\big) \cdot (p+1)^3 \\ &= 2 \cdot (p-1)^3 + (p-3) \cdot 3^3 + 2^4 + (2p-2) \cdot (p+1)^3 \end{aligned}$$

4.3 *F-Index* pada Graf Jacobson dalam Pandangan Islam

F-Index pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $3p$ dapat dianalogikan dalam ajaran Islam. Seperti yang telah dijelaskan pada Q.S. Al-Hujurat ayat 10 di bab 1 dan bab 2 yang membahas tentang persaudaraan orang-orang mukmin, sehingga jika terjadi perselisihan diantara keduanya hendaklah kita untuk membantu mendamaikannya. Ukhuwah atau persaudaraan dapat diartikan sebagai keadaan dimana hati dan jiwa terikat oleh rantai aqidah. Ikatan ini mengartikan ukhuwah sebagai persaudaraan seiman. Dengan konsep persaudaraan yang di ajarkan oleh Allah dan Rasul-Nya, maka terciptalah hubungan persaudaraan antara manusia pada umumnya dan umat Islam pada khususnya yang selalu harmonis, karena ukhuwah Islamiyyah ialah istilah yang berkaitan dengan persaudaraan dan silaturahmi, sebab tujuan ukhuwah Islamiyyah ialah untuk membangun keharmonisan antar manusia. Membangun ukhuwah Islamiyyah merupakan sikap yang harus dimiliki oleh setiap muslim.

Persaudaraan dalam bentuk ukhuwah Islamiyyah dapat dianalogikan dengan graf Jacobson. Pada graf Jacobson dari R terdapat dua titik yang berbeda adalah terhubung langsung jika dan hanya jika $1 - xy$ bukan anggota unit di R. Sehingga, titik pada graf Jacobson tidak akan terhubung langsung jika himpunan titiknya merupakan anggota unit di R. Dalam ajaran Islam Allah memerintahkan kepada manusia untuk memperbanyak berbuat baik dan saling menghargai dan menjaga hubungan antar sesama manusia, karena kebaikan akan kembali ke diri kita sendiri. Sebaliknya, jika kita berbuat jahat kepada orang lain, maka kejahatan itu nantinya akan berbalik ke diri kita sendiri. Oleh karena itu, kita harus menjaga hubungan antar sesama orang-orang mukmin dengan sebaik-baiknya. Karena, jika kita berbuat baik kepada saudara kita sendiri, maka Allah-lah yang akan membantu dan mempermudah hidup kita. Hubungan antara manusia dengan manusia lainnya dapat direpresentasikan sebagai relasi antar himpunan titik dan himpunan sisi pada teori graf, maka dapat dibentuk suatu graf seperti berikut:



Gambar 4.5 Kajian Integrasi

Pada gambar di atas dapat dilihat bahwa terdapat dua titik berbeda yang terhubung langsung, titik pada teori graf yaitu manusia A dengan manusia B. Sisi yang menghubungkan titik pada manusia A dan manusia B direpresentasikan sebagai keterhubungan antara manusia dengan manusia lainnya. Sedangkan, titik pada manusia B dan manusia C dapat dikatakan graf yang tidak terhubung karena tidak terdapat sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut. Dalam ajaran islam, memutuskan tali persaudaraan atau memusuhi sesama umat Islam adalah perbuatan yang sangat tidak dianjurkan. Karena salah satu dampak yang diperoleh jika kita saling bermusuhan yaitu tidak akan masuk surga. Oleh karena itu, menjaga ukhuwah Islamiyyah sangat penting bagi umat muslim. Hal ini dapat dilakukan dengan cara memperkuat tali persaudaraan, membangun dialog yang baik, dan menghargai perbedaan.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pada pembahasan dalam penelitian ini, rumus umum *F-Index* pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $3p$, dengan p adalah bilangan prima dan $p \geq 5$ adalah sebagai berikut:

$$F\left(\mathfrak{J}_{Z_{3p}}\right) = 2 \cdot (p-1)^3 + (p-3) \cdot 3^3 + 2^4 + (2p-2) \cdot (p+1)^3$$

5.2 Saran

Pada penelitian ini hanya membahas mengenai *F-Index* pada graf Jacobson dari ring bilangan bulat modulo $3p$, dengan p adalah bilangan prima dan $p \geq 5$. Sehingga, penulis berharap pada penelitian selanjutnya untuk meneliti indeks topologi yang berbeda dari penelitian ini atau dengan indeks topologi yang sama namun graf dari ring yang berbeda dari penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Akhter, S., & Imran, M. (2017). Computing the Forgotten Topological index of Four Operations on Graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 70-79.

Ath-Thabari, A. J. (2009). *Tafsir Ath-Thabari Jilid 23.* Jakarta: Pustaka Azzam.

Azimi, A., Erfanian, A., & Farrokhi, M. (2012). The Jacobson Graph of Commutative Rings. *Algebra and Its Applications*, 1-15.

Az-Zuhaili, W. (2016). *Tafsir Al-Munir Jilid 13.* Jakarta: Gema Insani.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2016). *Graphs and Digraphs Sixth Edition.* New York: CRC Press.

Fajriyah, K.R. 2020. *F-Index pada Graf Total dari Ring Bilangan Bulat Modulo* 2p *dan* 4p. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim

Gallian, J. A. (2017). *Contemporary Abstract Algebra Ninth Edition.* America: Cengage Learning.

Gilbert, L., & Gilbert, J. (2015). *Elements of Modern Algebra Eighth Edition.* Stamford: Nelson Education, Ltd.

Hamka. (2015). *Tafsir Al-Azhar Jilid 9.* Jakarta: Gema Insani.

Handayani, R., & Yulina. (2020). *Teori Bilangan.* Kotabumi: Universitas Muhammadiyah Kotabumi.

Havare, O. C., & Havare, A. K. (2020). Computation of the Forgotten Topological Index and Co-Index for Carbon Base Nanomaterial. *Polycyclic Aromatic Compounds*, 1-13.

Kamilah, F.S. 2021. *Indeks Konektivitas Eksentrik Ediz pada Graf Jacobson dari Ring Bilangan Bulat Modulo* 2p. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Kraft, J. S., & Washington, L. C. (2015). *Elementary Number Theory.* New York: CRC Press.

Novictor, A., Susilowati, L., & Fatmawati. (2016). Jacobson Graph Construction of Ring $\mathbb{Z}$, for n>1. *Journal of Physics: Conference Series*, 1-7.

Shihab, M. Q. (2005). *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Qur'an.* Jakarta: Lentera Hati.

Thahir, M. S. (2009). *Al-Qur'an dan Terjemahnya.* Jakarta: Sygma Exagrafika.

Wilson, R. J. (2010). *Introduction to Graph Theory Fifth Edition.* England: Ashfourd Colour Press.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Shahnaz Latifatul Jannah, biasa dipanggil dengan nama Shahnaz atau Tifa lahir di Kabupaten Sumenep tanggal 19 Agustus 2000. Ia merupakan anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Asdali dan Ibu Aminatus Zuhriya yang berasal dari Dusun Jerok Porot, RT. 003/RW. 006, Desa Batang-Batang Daya, Kecamatan Batang-Batang, Kabupaten Sumenep.

Penulis memulai jenjang pendidikannya di TK Dharma Wanita Persatuan Batang-Batang pada tahun 2005-2006. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikannya di SDN Batang-Batang Daya II pada tahun 2006-2012. Kemudian, Sekolah Menengah Pertama ditempuh penulis di SMP Nurul Jadid Batang-Batang dan lulus pada tahun 2015. Setelah itu, penulis melanjutkan pendidikannya di MAN Sumenep dan pada saat itu juga penulis memilih untuk tinggal di Pondok Pesantren Al-Ulya MAN Sumenep dari tahun 2015-2018. Selanjutnya, penulis melanjutkan jenjang pendidikannya di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil Program Studi Matematika.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Shahnaz Latifatul Jannah
NIM	: 18610019
Fakultas / Jurusan	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	: *F-Index* pada Graf Jacobson dari Ring Bilangan Bulat Modulo $3p$
Pembimbing I	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
Pembimbing II	: Ach. Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	27 Juli 2022	Konsultasi Judul dan Bab I	1.
2.	01 Agustus 2022	Revisi Bab I	2.
3.	15 Agustus 2022	Konsultasi Bab II dan III	3.
4.	05 September 2022	Revisi Bab II dan III	4.
5.	07 September 2022	Konsultasi Kajian Agama	5.
6.	16 September 2022	Revisi Kajian Agama	6.
7.	20 November 2022	ACC Seminar Proposal	7.
8.	7 Februari 2023	Konsultasi Bab IV dan V	8.
9.	12 April 2023	Konsultasi Kajian Agama	9.
10.	11 Mei 2023	Revisi Kajian Agama	10.
11.	31 Agustus 2023	Revisi Bab IV dan V	11.
12.	01 September 2023	ACC Seminar Hasil	12.
13.	18 Oktober 2023	Revisi Seminar Hasil	13.

14.	19 Oktober 2023	ACC Revisi Seminar Hasil	14.
15.	10 November 2023	Revisi Skripsi	15.
16.	17 November 2023	ACC Skripsi	16.

Malang, 17 November 2023
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP.197411292000122005