PELABELAN $L(2,1)$ PADA GRAF *SUPER CYCLE*

SKRIPSI

OLEH
LINA NIKMATUL KARIMAH
NIM. 12610103

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

PELABELAN $L(2,1)$ PADA GRAF *SUPER CYCLE*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Lina Nikmatul Karimah
NIM. 12610103

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

PELABELAN $L(2,1)$ PADA GRAF *SUPER CYCLE*

SKRIPSI

Oleh
Lina Nikmatul Karimah
NIM. 12610103

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 05 Desember 2016

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PELABELAN $L(2,1)$ PADA GRAF *SUPER CYCLE*

SKRIPSI

Oleh
Lina Nikmatul Karimah
NIM. 12610103

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 29 Desember 2016

Penguji Utama	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Ach. Nashichuddin, M.A	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Lina Nikmatul Karimah
NIM	: 12610103
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf *Super Cycle*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 05 Desember 2016
Yang membuat pernyataan,

Lina Nikmatul Karimah
NIM. 12610103

MOTO

فَإِذَا فَرَغْتَ فَٱنصَبْ ۝٧

“Maka apabila kamu telah selesai (dari suatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain’’ (QS. Al-Insyirah/94:7).

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Ali Sodiqin dan ibunda Siti Rohmah yang senantiasa mendoakan, memberi nasihat, dukungan, motivasi, dan restu kepada penulis dalam menuntut ilmu. Untuk kakak-kakak tersayang Muhimmatul Aliyah, Siti Choirul Bariyah, dan Umi Ngatifatun Nurul Aini yang senantiasa mendoakan dan memotivasi penulis. Untuk Ahmad Zainudin yang senantiasa mendoakan, mendukung, dan memotivasi penulis, serta adik tersayang Mudrikah Nurul Chitam yang selalu menemani penulis di saat suka maupun duka.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis banyak mendapat saran, bimbingan, arahan, doa, dan bantuan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.
4. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan saran dan bantuan dalam penulisan skripsi ini.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.

6. Ayah dan Ibu tercinta yang telah mencurahkan kasih sayang, doa, bimbingan, dan motivasi hingga terselesaikannya skripsi ini.
7. Saudara-saudara tersayang yang telah memberikan semangat kepada penulis.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2012 yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi dan terima kasih untuk kenang-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
9. Keluarga besar Pondok Pesantren Mahasiswa Tahfidz Al-Quran Al-Adzkiya' Nur Al-Shofa dan anggota kamar "Al-Rahman" yang telah memberikan dukungan, motivasi, dan kenangan yang tak terlupakan kepada penulis.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam penyelesaian skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Desember 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna yaitu sebagai berikut:

$\lambda(2,1)$	:	Minimal label terbesar pada pelabelan $L(2,1)$
C_n	:	Graf *cycle* dengan n titik
K_n	:	Graf komplit dengan n titik
P_n	:	Graf Lintasan dengan n titik
$\Delta(G)$	:	Derajat maksimum titik di graf G
$\mathrm{diam}(G)$	:	Diameter dari graf G
$E(G)$	:	Himpunan sisi dari graf G
Hn_r	:	Graf Hanoi dengan r cakram
$Sc(n, r_{n-1})$	:	Graf *super cycle* dengan n *cycle* dan hanoi ke r_{n-1}
$Sc(n, r)$	:	Graf *super cycle* dengan n *cycle* dan r hanoi
$V(G)$	:	Himpunan titik dari graf G
$cen(G)$	:	*Center* (pusat) dari graf G
$d(u, v)$	:	Jarak antara dua titik u dan v di graf G
$d(v)$	:	Derajat titik v
$e(v)$	:	Eksentrisitas dari suatu titik v pada graf terhubung G
$rc_k(G)$	:	Bilangan *radio k-chromatic* dari graf G
$rad(G)$	:	Radius dari graf G
$\delta(G)$	:	Derajat minimum titik di graf G

ABSTRAK

Karimah, Lina Nikmatul. 2016. **Pelabelan $L(2,\ 1)$ pada Graf *Super Cycle*.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Ach. Nashichuddin, MA.

Kata Kunci: Pelabelan $L(2,1)$, *Frequency Assigment Problem* (FAP), Graf *Super Cycle* $Sc(n,r)$.

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ $(\lambda_{2,1})$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$, untuk $n,r \in \mathbb{N}$. Langkah yang digunakan adalah melabeli setiap titik pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ untuk $n,r \in \mathbb{N}$ dengan aturan pelabalen $L(2,1)$, kemudian dari beberapa pola yang ditemukan, dibuat suatu konjektur yang dirumuskan menjadi suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti.

Hasil penelitian ini yaitu, untuk $r=1$, nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ adalah

$$\lambda_{2,1}\big(Sc(n,1)\big)=\begin{cases}4 & \text{jika } n=1\\ 5 & \text{jika } n>1, n \text{ genap}\\ 6 & \text{jika } n>1, n \text{ ganjil}\end{cases}$$

dan untuk $r>1$, nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ adalah $\lambda_{2,1}(Sc\ (n,r)) = 6$.

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengembangkan penelitian ini menggunakan pelabelan $L(3,2,1)$, $L(d,1)$, atau varian lain dari pelabelan $L(2,1)$.

ABSTRACT

Karimah, Lina Nikmatul. 2016. **$\boldsymbol{L(2,1)}$ Labeling on Super Cycle Graph.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Ach. Nashichuddin, MA.

Keywords: $L(2,1)$ Labeling, Frequency Assigment Problem (FAP), Super Cycle $Sc(n,r)$ Graph.

The purpose of this research is to minimize largest label on $L(2,1)$ labeling ($\lambda_{2,1}$) on super cycle $Sc(n,r)$ graph, for $n,r \in \mathbb{N}$. The steps are labeling each vertex on super cycle $Sc(n,r)$ graph for $n,r \in \mathbb{N}$ with ruling $L(2,1)$ labeling then from some of the found patterns, a conjecture is formulated into a theorem which is supported by sufficient evidence.

The results of this research are, for $r = 1$, the minimum largest label on $L(2,1)$ labeling ($\lambda_{2,1}$) on super cycle $Sc(n,r)$ graph is:

$$\lambda_{2,1}\big(Sc(n,1)\big) = \begin{cases} 4 & \text{if } n = 1 \\ 5 & \text{if } n > 1, n \text{ is even} \\ 6 & \text{if } n > 1, n \text{ is odd} \end{cases}$$

and for $r > 1$, minimum largest label on $L(2,1)$ labeling ($\lambda_{2,1}$) on super cycle $Sc(n,r)$ graph is $\lambda_{2,1}(Sc(n,r)) = 6$.

For the next research it is suggested to develop this research using $L(3,2,1)$ labeling, $L(d,1)$, or other varieties of $L(2,1)$ labeling.

ملخص

الكريمة، لنا نعمة. **التلوين $L(2,1)$ في المخططات $\boldsymbol{Super\ Cycle\ Sc(n,r)}$**، البحث الجامعي. شعبة الرياضيات ، كلية العلوم و التكنولوجية، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم بمالانق. المشرف : ١) الدكتور عبد الشاكر الماجستير، ٢) أحمد نصيح الدين الماجستير.

الكليمات الرئيسية : التلوين $L(2,1)$، *Frequency Assigment Problem* (FAP)، مخططات *Super Cycle* $Sc(n,r)$

يهدف هذا البحث على تعيين أقلّ بطاقة $(\lambda_{2,1})$ على المخططات *super cycle* $Sc(n,r)$، لـ $n,r \in \mathbb{N}$. الخطوة المستخدمة هي لتسمية كل رؤوس على مخططات *super cycle* $Sc(n,r)$ لـ $n,r \in \mathbb{N}$ بقواعد التلوين $L(2,1)$. ثم من تم العثور على بعض الأنماط، وقدم التخمين وضعت في نظرية الذي تدعمه أدلة كافية.

و الحاصل من هذا البحث هو لـ $r = 1$، أقلّ بطاقةمن التلوين $L(2,1)$ على المخططات *super cycle* $Sc(n,r)$ هى كما يلي

$$\lambda_{2,1}(Sc(n,1)) = \begin{cases} 4 & \text{if } n = 1 \\ 5 & \text{if } n > 1, n \text{ is even} \\ 6 & \text{if } n > 1, n \text{ is odd} \end{cases}$$

ولـ $r > 1$، أقلّ بطاقة من التلوين$L(2,1)$ على المخططات *super cycle* $Sc(n,r)$ هي $\lambda_{2,1}(Sc(n,r)) = 6.$

ترجو للباحثين الأخرين يستطيع أن يتعمق ويوسع البحث باستخدام التلوين $L(3,2,1)$، $L(d,1)$، أو إصدار من التلوين $L(2,1)$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Allah Swt. berfirman di dalam al-Quran surat al-Hujurat/49:13, yaitu:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقۡنَٰكُم مِّن ذَكَرٖ وَأُنثَىٰ وَجَعَلۡنَٰكُمۡ شُعُوبٗا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓاْۚ إِنَّ أَكۡرَمَكُمۡ
عِندَ ٱللَّهِ أَتۡقَىٰكُمۡۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٞ ١٣

"Hai manusia, sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah Swt. ialah orang yang paling takwa di antara kamu. Sesungguhnya Allah Swt. Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal"(QS. al-Hujurat/49:13).

Ayat tersebut membahas tentang prinsip dasar hubungan antar manusia. Karena itu, tidak lagi menggunakan panggilan yang ditujukan kepada orang-orang beriman, tetapi kepada seluruh manusia. Ayat tersebut menjelaskan bahwa tujuan Allah Swt. menciptakan manusia yang beraneka ragam, dengan berbagai bangsa dan suku adalah agar manusia saling mengenal. Semakin kuat pengenalan satu pihak kepada selainnya, semakin terbuka peluang untuk saling memberi manfaat. Oleh karena itu, ayat tersebut menekankan perlunya saling mengenal. Perkenalan itu dibutuhkan untuk saling menarik pelajaran dan pengalaman pihak lain guna meningkatkan ketakwaan kepada Allah Swt. yang dampaknya tercermin pada kedamaian dan kesejahteraan hidup di dunia dan akhirat (Shihab, 2012).

Saling mengenal dan menjalin hubungan baik dengan sesama manusia adalah basis yang sangat penting karena dengannya mampu menumbuhkan sikap persaudaraan yang merupakan pilar kehidupan bermasyarakat dan menjadi suatu kekuatan. Tidak hanya antar umat Islam namun dengan seluruh manusia di dunia, karena masing-masing individu memiliki karakteristik-karakteristik, kelebihan dan nilai positif yang dapat dituangkan ke dalam pemikiran, karya, maupun cara kerja sama.

Untuk mencapai tujuan tersebut diperlukan adanya komunikasi. Mulai tahun 1880 telah dikenal komunikasi nirkabel pertama di dunia yaitu penyampaian informasi jarak jauh tanpa menggunakan kabel. Jarak yang ditempuh mungkin dekat mungkin juga jauh. Komunikasi nirkabel dikembangkan untuk mempermudah komunikasi antara dua sistem yang berbeda (seperti telepon, komputer, radio, dan lain sebagainya).

Seiring berjalannya waktu semakin banyak jenis komunikasi yang menggunakan jaringan nirkabel. Masalah yang mendasar dari penggunaan jaringan tersebut adalah frekuensi radio yang tersedia untuk komunikasi nirkabel tidaklah cukup untuk memenuhi kebutuhan semua komunikasi. Sebagai contoh, di Amerika Serikat semua komunikasi Wi-Fi untuk band 2.4GHz hanya terbatas untuk 11 *channel*. Sehingga penting untuk menentukan langkah efisien untuk mendapatkan transmisi yang aman seperti telepon seluler, Wi-Fi, sistem keamanan, dan banyak lagi yang lain (Agnarsson dan Halldorsson, 2003).

Menentukan frekuensi radio untuk *transmitter* pada lokasi yang berbeda tanpa mengakibatkan adanya gangguan sekaligus meminimalkan rentang frekuensi yang dihasilkan disebut permasalahan *frequency assignment problem* (FAP). Model FAP pada teori graf adalah sebagai berikut: *transmitter* dilambangkan dengan titik-titik pada graf yang dihubungkan oleh sisi-sisi. Gangguan maksimum terjadi pada suatu *transmitter* diwakili oleh titik-titik yang terhubung langsung. Penyelesaian frekuensi untuk suatu *transmitter* dilakukan dengan cara menempatkan pelabelan ke titik-titik. Agar penetapan frekuensi untuk suatu *transmitter* dapat dilakukan secara efisien, harus ditetapkan pelabelan ke titik-titik sedemikian sehingga pelabelan titik-titik yang terhubung langsung memiliki selisih yang lebih besar, dan titik-titik yang tidak terhubung langsung memiliki selisih kecil dan juga harus diminimalkan pelabelan maksimal yang dapat ditetapkan (Mouly dan Pautet, 1992).

Dua *channel* yang cukup dekat dapat mengganggu satu sama lain atau beresonansi sehingga dapat merusak komunikasi. Gangguan tersebut dapat dicegah dengan pengaturan *channel* yang sesuai. Dalam mencari penyelesaian untuk permasalahan ini, Hale (1980) memformulasikan permasalahan tersebut ke dalam sebuah model pelabelan graf yang disebut sebagai pelabelan $L(2,1)$. Pelabelan ini adalah salah satu masalah pelabelan graf dimana titik-titik yang berdekatan harus memiliki selisih label minimal dua sedangkan titik-titik yang terhubung oleh lintasan dengan panjang dua harus memiliki label yang berbeda dengan selisih label minimal satu.

Kajian tentang pelabelan $L(2,1)$ telah banyak dikembangkan, diantaranya adalah penelitian yang dilakukan oleh Lum (2007) membahas tentang minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf dengan derajat maksimum Δ, kemudian Prasetyo (2011) membahas tentang minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf graf *cycle* C_n, graf *star* dan graf *wheel*, sehingga penulis tertarik untuk menemukan minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ untuk $n,r \in \mathbb{N}$. Perbedaan skripsi ini dengan penelitian sebelumnya adalah pada graf yang diteliti, yaitu graf *super cycle* $Sc(n,r)$, yang menarik dari graf *super cycle* $Sc(n,r)$ adalah graf ini diperoleh dari graf *cycle* C_n yang setiap titiknya merupakan graf hanoi Hn_r, kemudian apabila graf komplit Kn setiap titiknya diganti dengan graf *super cycle* $Sc(n,r)$ akan menjadi graf lain yang diberi nama graf komplit *cycle* $Kc(n,r)$.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis mengambil judul penelitian *"Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Super Cycle"*.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang dipecahkan dalam penelitian ini adalah berapa nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ untuk $n,r \in \mathbb{N}$?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ untuk $n,r \in \mathbb{N}$.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat sebagai berikut.

a. Bagi Peneliti

   Manfaat penelitian ini bagi peneliti yaitu sebagai pembelajaran untuk memahami serta menentukan nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada *super cycle* $Sc(n,r)$ sehingga dapat mengembangkan wawasan ilmu pengetahuan khususnya di bidang kajian teori graf dan aljabar.

b. Bagi Mahasiswa

Bagi mahasiswa, hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi landasan dasar untuk penelitian lanjutan terkait pelabelan radio dan $L(2,1)$.

c. Bagi Instansi

Bagi instansi, hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai sumbangan teori dalam pengembangan kajian dalam teori graf khususnya pada kajian pelabelan radio dan $L(2,1)$ pada graf.

1.5 Metode Penelitian

a. Jenis Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian pustaka (*library research*). Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf dan beberapa hasil penelitian sebelumnya terkait dengan pelabelan, terutama pelabelan $L(2,1)$. Selain dari literatur graf, dikaji pula buku-buku optimasi mengenai *Frequency Assignment Problem* (FAP).

b. Tahap Penelitian

Pola pembahasan penelitian ini dimulai dari hal-hal khusus (induktif) menuju pada suatu generalisasi yang bersifat deduktif. Secara garis besar langkah penelitian ini sebagai berikut:

1) Mengumpulkan berbagai literatur yang berhubungan dengan topik yang diteliti, yaitu mengenai graf, derajat titik, pusat, radius dan diameter, pelabelan radio, pelabelan $L(2,1)$, beberapa hasil pelabelan $L(2,1)$ pada beberapa graf, graf hanoi Hn_r, graf *super cycle* $Sc(n,r)$, masalah penentuan frekuensi dan keragaman dalam al-Quran.

2) Melabeli setiap titik pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ untuk $n,r \in \mathbb{N}$ dengan aturan pelabalen $L(2,1)$.
3) Menggunakan hasil pelabelan sebagai referensi untuk menentukan batas atas dari pelabelan $L(2,1)$.
4) Membuat konjektur berdasarkan pola yang ditemukan untuk masing-masing kasus.
5) Merumuskan konjektur sebagai suatu teorema.
6) Menghasilkan suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti.
7) Menulis laporan penelitian.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar pembahasan dalam penelitian ini tersaji secara sistematis dan mempermudah pembaca untuk memahaminya, penulis menggunakan sistematika sebagai berikut.

Bab I Pendahuluan

Bab ini membahas hal-hal yang melatarbelakangi penulisan, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan beberapa konsep (teori-teori) yang berhubungan dengan penelitian ini, yaitu mengenai graf, derajat titik, pusat, radius dan diameter, pelabelan radio, pelabelan $L(2,1)$, beberapa hasil pelabelan $L(2,1)$ pada beberapa graf, graf Hanoi Hn_r, graf *super cycle* $Sc(n,r)$, masalah penentuan frekuensi, dan keragaman dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Bab ini menjelaskan tentang berapa nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$.

Bab V Penutup

Bab ini menyimpulkan hasil penelitian dan beberapa saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

Definisi 1

Graf G terdiri atas himpunan tak kosong dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan pasangan tak berurutan dari objek -objek yang disebut sisi. Himpunan titik-titik dari graf G disebut himpunan titik di G, dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dari graf G disebut himpunan sisi di G, dinotasikan dengan $E(G)$. Jika v dan w adalah titik di G, maka sisi vw atau wv dikatakan menghubungkan v dan w (Wilson dan Watkins, 1990:10).

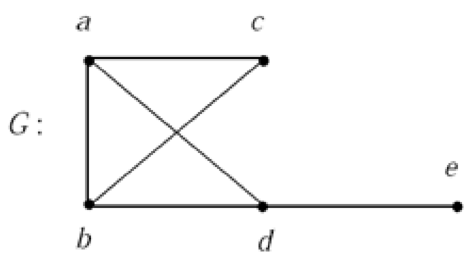
Definisi graf tersebut juga berlaku untuk kemungkinan beberapa sisi menghubungkan satu pasang titik atau suatu sisi menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri (Wilson dan Watkins, 1990:10).

Berikut ini diperlihatkan graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E.

$V = \{ a, b, c, d, e\}$

$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)$

Graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut:

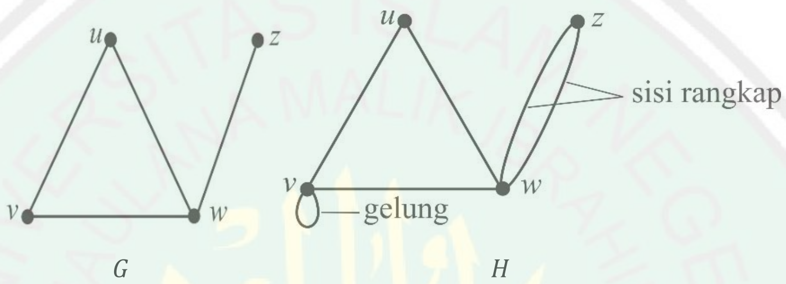


Gambar 2.1 Graf Terhubung G

Definisi 2

Dua sisi atau lebih yang menghubungkan satu pasang titik disebut sisi rangkap *(multiple edge)*, dan sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri disebut gelung *(loop)*. Graf yang tidak memuat gelung dan sisi rangkap disebut graf sederhana (Wilson dan Watkins, 1990:10).

Berikut ini diperlihatkan contoh graf sederhana G dan graf H.



Gambar 2.2 Graf Sederhana G dan Graf H

Pada Gambar 2.2 graf G adalah graf sederhana, karena tidak memuat sisi rangkap dan tidak memuat gelung.

Definisi 3

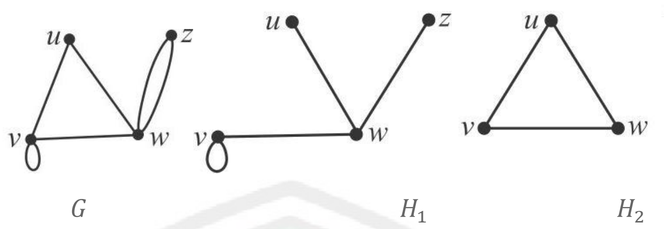
Misalkan G adalah suatu graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Graf bagian (subgraf) dari G adalah suatu graf yang setiap titiknya adalah anggota $V(G)$ dan setiap sisinya adalah anggota $E(G)$ (Wilson dan Watkins, 1990:11).

Sebagai contoh, diberikan graf G dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$V(G) = \{u, v, w, z\}$

$E(G) = \{uv, uw, vv, vw, wz, wz\}$

Maka subgraf dari G adalah sebagai berikut.



Gambar 2.3 Graf G dan Subgraf H_1, H_2

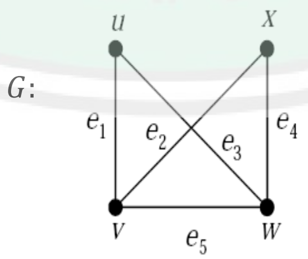
Pada Gambar 2.3, H_1 dan H_2 adalah subgraf dari G karena untuk setiap titik $v \in V(H_1)$, maka $v \in V(G)$, dan untuk setiap $e \in E(H_1)$, maka $e \in E(G)$.

2.1.1 Terhubung Langsung dan Terkait Langsung

Definisi 4

Misalkan v dan w merupakan titik dari suatu graf. Jika v dan w dihubungkan oleh sisi e, maka v dan w dikatakan terhubung langsung *(adjacent)*. Selain itu, v dan w dikatakan terkait langsung *(incident)* dengan e, dan e dikatakan terkait langsung dengan v dan w (Wilson dan Watkins, 1990:31).

Sebagai contoh diperlihatkan graf G yang memuat himpunan $V = \{u, v, w, x\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ berikut ini:



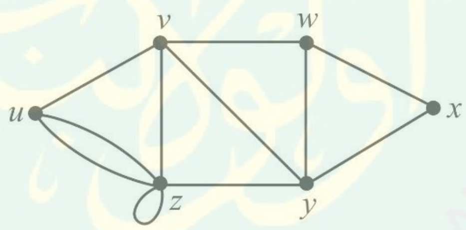
Gambar 2.4 Graf Terhubung G

Berdasarkan Gambar 2.4 tersebut, titik u dan e_1 serta e_1 dan v adalah terkait langsung dan titik u dan v adalah terhubung langsung.

2.1.2 Graf Terhubung

Suatu *walk* (jalan) yang panjangnya p dalam graf G adalah urutan k sisi G yang berbentuk $uv, vw, wx, \dots, yz,$ dan jalan ini dinotasikan dengan $uvwx \dots yz$, dan disebut jalan antara u dan z. Titik kedua setiap sisi adalah sama dengan titik pertama sisi berikutnya. Semua sisi dan titik dalam *walk* tidak perlu berbeda (boleh sama) (Wilson dan Watkins, 1990:34).

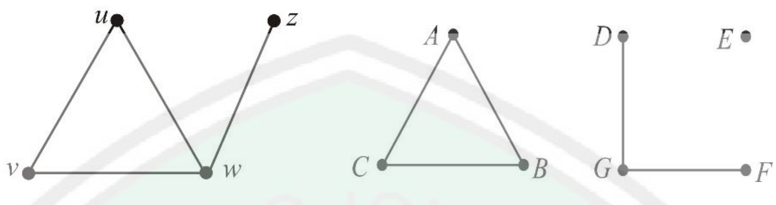
Jika semua sisi suatu jalan berbeda, maka jalan itu disebut *trail* (jejak). Jika semua titiknya berbeda, maka (jejak) itu disebut *path* atau lintasan. Suatu jalan tertutup dalam graf G merupakan urutan sisi G berbentuk $uv, vw, wx, \dots, yz, zu$. Jika semua sisinya berbeda maka jalan itu disebut jejak tertutup (*closed trail*), jika titik-titiknya juga berbeda jejak itu disebut *cycle* (sikel) (Wilson dan Watkins, 1990:35).



Gambar 2.5 Graf Terhubung G

Berdasarkan Gambar 2.5 di atas, $uvwxywvzzy$ adalah jalan antara u dan y, jalan tersebut juga merupakan jejak, tetapi jalan tersebut bukan suatu lintasan (karena titik y dan z ada dua), sedangkan pada jalan $uwxyz$ disebut lintasan karena tidak ada titik yang diulang. Jalan tertutup $uvwyvzu$ adalah jejak tertutup, $vwxyv$ dan $vwxyzv$ semuanya adalah *cycle*.

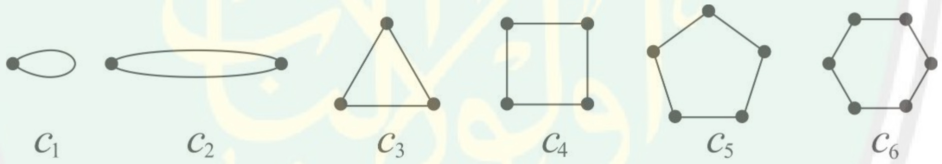
Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G. Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).



Gambar 2.6 (a) Graf Terhubung, (b) Graf Tidak Terhubung

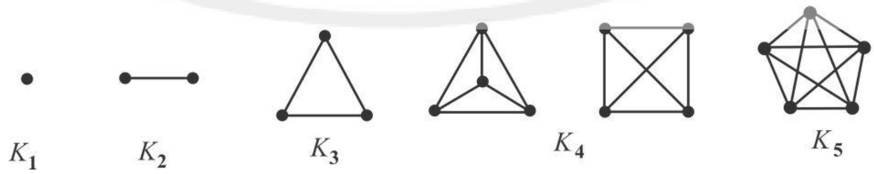
Graf *cycle* adalah graf yang terdiri dari suatu *cycle* tunggal (Wilson dan Watkins, 1990:36).

Graf *cycle* dengan n titik dinotasikan dengan C_n. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 2.7 berikut.



Gambar 2.7 Graf *Cycle*

Graf komplit dengan n titik dilambangkan dengan K_n, adalah graf yang setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan tepat satu sisi (Wilson dan Watkins, 1990:36).



Gambar 2.8 Graf Komplit

2.2 Derajat Titik

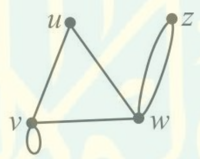
Budayasa (2007:10) mengatakan bahwa misalkan G sebuah graf dan v sebuah titik di G. Derajat titik v dilambangkan dengan $d_G(v)$ atau $d(v)$, adalah banyaknya sisi G yang terkait dengan titik v (dengan catatan setiap gelung dihitung dua kali). Derajat minimum titik di G dilambangkan dengan $\delta(G)$, didefinisikan sebagai berikut

$$\delta(G) = \text{minimum } \{d(v) | v \in V(G)\}$$

sedangkan derajat maksimum titik di G dilambangkan dengan $\Delta(G)$, didefinisikan sebagai berikut

$$\Delta(G) = \text{maksimum } \{d(v) | v \in V(G)\}$$

Sebagai contoh, diperlihatkan graf G berikut



Gambar 2.9 Graf G

dari Gambar 2.9 di atas dapat diketahui bahwa:

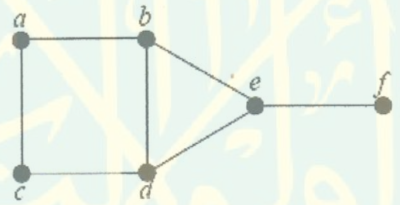
$d(u) = 2$, $d(v) = 4$, $d(w) = 4$, $d(z) = 2$, $\delta(G) = 2$, $\Delta(G) = 4$.

2.3 Pusat, Radius, dan Diameter

Chartand dan Lesniak (1986) mengatakan bahwa untuk suatu graf sederhana dan terhubung G, maka jarak $d(u, v)$ antara dua titik u dan v di G adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan u dan v di G. Jika tidak ada lintasan dari titik u ke v, maka didefinisikan jarak $d(u, v) = \infty$. Eksentrisitas $e(v)$ dari suatu titik v pada graf terhubung G adalah jarak terjauh (lintasan terpendek maksimal) dari titik v ke setiap titik di G dapat dituliskan $e(v) = \max\{d(u,v): u \in V(G)\}$. Titik v dikatakan titik eksentrik dari u jika jarak dari u ke v sama dengan eksentrisitas dari u atau $d(u,v) = e(u)$. Radius dari G adalah eksentrisitas minimum pada setiap titik di G, dapat ditulis sebagai $\text{rad } G = \min\{e(v), v \in V\}$. sedangkan diameter dari G, dinotasikan $\text{diam } G$ adalah eksentrisitas maksimum pada setiap titik di G, dapat dituliskan

$$\text{diam } G = \max\{e(v): v \in V\}$$

Titik v dikatakan titik *central* (titik pusat) jika $e(v) = rad(G)$. *Center* (pusat) dinotasikan dengan $cen(G)$ adalah subgraf pada G yang terbentuk dari titik *central*. Hal ini dapat dilihat pada contoh berikut.



Gambar 2.10 Graf Sederhana G

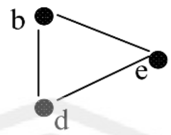
Berdasarkan Gambar 2.10 dapat dilihat eksentrisitas dan titik eksentrik di graf G sebagai berikut.

Tabel 2.1 Eksentrisitas dan Titik Eksentrik di Graf G

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
a	$e(a) = 3$	f
b	$e(b) = 2$	$c,\ f$
c	$e(c) = 3$	f
d	$e(d) = 2$	$a,\ f$
e	$e(e) = 2$	$a,\ c$
f	$e(f) = 3$	$a,\ c$

$d(a,b)$ = 2, rad G = 2, diam G = 3, titik pusat = $b,\ d,\ e$

Pusat (*center*) dari graf G dapat dilihat pada Gambar 2.11 berikut.



Gambar 2.11 Pusat dari Graf G

2.4 Pelabelan Radio

Istilah pelabelan radio merupakan perluasan dari pelabelan $L(2,1)$ yang diformulasikan oleh Hale (1980) dan dikenalkan sebagai pendekatan untuk menetapkan suatu frekuensi ke suatu *transmitter* radio.

Termotivasi oleh masalah penentuan frekuensi stasiun radio FM dari *Federal Communication Commission* Amerika Serikat, Chartrand dkk (2005) mengenalkan *radio k-coloring* dari suatu graf. Aturan pelabelannya adalah sebagai berikut: untuk sebarang bilangan asli k, $1 \leq k \leq diam(G)$, suatu *radio k-coloring* f dari graf G adalah pemasangan bilangan asli tersebut ke setiap titik di G sedemikian sehingga

$$|f(u) - f(v)| \geq 1 + k - d(u,v)$$

untuk setiap titik berbeda u dan v di G. Notasi $d(u,v)$ menyatakan jarak dari titik u ke titik v.

Rentang $rc_k(f)$ dari *radio k-coloring* f untuk G adalah bilangan asli terbesar yang menjadi label suatu titik di G. Rentang minimal *radio* k*-coloring* dari G disebut sebagai bilangan *radio k-chromatic* $rc_k(G)$ (Griggs dan Yeh, 1992).

2.5 Pelabelan $L(2,1)$

Pelabelan $L(2,1)$ dari suatu graf G merupakan pemetaan dari himpunan titik di graf G ke bilangan bulat tak negatif sedemikian sehingga jika jarak antara titik x dan y satu, maka selisih nilai fungsi pada titik x dan y lebih dari atau sama dengan dua, dan jika jarak antara titik x dan y dua, maka selisih nilai fungsi pada titik x dan y lebih dari atau sama dengan satu. Rentang dari pelabelan tersebut adalah label maksimum yang digunakan. Minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ dinotasikan dengan $\lambda_{2,1}$ (Shao, dkk, 2008).

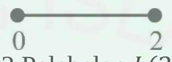
Pelabelan $L(2,1)$ dari suatu graf G dapat juga diartikan sebagai pemetaan dari himpunan titik di graf G ke bilangan bulat tak negatif sedemikian sehingga label dari titik-titik yang bertetangga memiliki selisih paling tidak dua, dan titik-titik yang berjarak dua memiliki label yang berbeda.

Konsep pelabelan titik dengan syarat berjarak dua dikemukakan pertama kali oleh Griggs dan Roberts (1992), yang muncul dari variasi masalah penetapan saluran yang dikemukakan oleh Hale (1980). Misal diberikan sejumlah *transmitter*. Harus ditetapkan saluran di masing-masing *transmitter* sedemikian sehingga adanya tumpang tindih frekuensi dapat dihindari. Untuk mengurangi tumpang tindih frekuensi, maka dua buah *transmitter* yang "dekat" harus diberi saluran yang berbeda, sedangkan dua *transmitter* yang sangat dekat harus diberi saluran dengan selisih minimal dua. "Graf gangguan" dapat dikonstruksi untuk masalah ini sedemikian sehingga *transmitter-transmitter* tersebut direpresentasikan menjadi titik-titik dari graf, dan terdapat suatu sisi yang menghubungkan dua *transmitter* yang berjarak "sangat dekat". Dua *transmitter* disebut "dekat" jika titik-titik yang merepresentasikan dua *transmitter* tersebut berjarak dua (Agnarsson dan Halldorsson, 2003).

2.6 Beberapa Hasil Pelabelan $L(2,1)$ pada Beberapa Graf

2.6.1 Graf Lintasan

Pertama diperlihatkan gambar P_2 sebagai berikut.



Gambar 2.12 Pelabelan $L(2,1)$ pada P_2

Dimulai dengan melakukan perlabelan terhadap salah satu titik dengan label 0. Maka titik kedua dilabeli dengan label paling minimal yang mungkin, yaitu label 2. Dengan demikian $\lambda_{2,1}(P_2) = 2$.

Selanjutnya diperlihatkan gambar P_3 berikut.

Gambar 2.13 Pelabelan $L(2,1)$ pada P_3

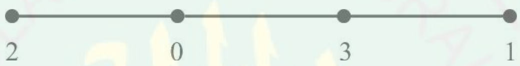
untuk P_3, dapat dilabeli titik paling kiri dengan label 0, yang tengah dengan label 3, dan yang paling kanan dengan label 1. Sehingga $\lambda_{2,1}(P_3) \leq 3$. Diklaim bahwa P_3 tidak dapat dilabeli hanya dengan bilangan $0, 1,$ dan 2. Label 1 tidak dapat digunakan dimanapun karena akan bertetangga dengan label $0, 1,$ atau 2, dimana semua kemungkinan tersebut bertentangan dengan syarat pelabelan $L(2,1)$. Sehingga label yang tersedia hanyalah label 0 dan 2 untuk melabeli tiga titik. Dengan prinsip sarang merpati, dua dari ketiga titik tersebut pasti memiliki label yang sama (Lum, 2007).

Sebelum dibahas pelabelan $L(2,1)$ pada P_4, diperlihatkan lemma berikut.

Lemma 1. Jika H adalah subgraf dari G, maka $\lambda_{2,1}(H) \leq \lambda_{2,1}(G)$.

Bukti. Misal $\lambda_{2,1}(G) = m$ dengan pelabelan sebagai berikut $f: V(G) \to \{0, 1, \dots, m\}$. Maka $g: V(H) \to \{0, 1, \dots, m\}$, yang didefinisikan sebagai $g(v) = f(v)$ untuk setiap $v \in V(H)$ adalah suatu pelabelan H yang menggunakan label tidak lebih dari m. Dengan demikian $\lambda_{2,1}(H) \leq m = \lambda_{2,1}(G)$. Gagasan utamanya ialah dapat dilakukan pelabelan terhadap H dengan menggunakan pelabelan dari G pada titik-titik yang bersesuaian (Lum, 2007).

Selanjutnya diperlihatkan gambar P_4 berikut.



Gambar 2.14 Pelabelan $L(2,1)$ pada P_4

karena P_3 adalah subgraf dari P_4, maka dari lemma sebelumnya dapat diketahui bahwa $\lambda_{2,1}(P_4) \geq \lambda_{2,1}(P_3) = 3$. P_4 dapat dilabeli dengan susunan label $2 - 0 - 3 - 1$. Sehingga $\lambda_{2,1}(P_4) \geq 3$, artinya $\lambda_{2,1}(P_4) = 3$.

Teorema 1. $\lambda_{2,1}(P_n) = 4, \forall n \geq 5$.

Bukti. Terlebih dahulu ditunjukkan bahwa $\lambda_{2,1}(P_5) = 4$. P_5 dapat dilabeli dengan susunan label $2 - 0 - 3 - 1 - 4$, sehingga $\lambda_{2,1}(P_5) \leq 4$. Diklaim bahwa P_5 tidak dapat dilabeli hanya dengan label-label $0, 1, 2,$ dan 3. Label 1 dan 2 tidak dapat digunakan untuk melabeli sebarang titik kecuali titik-titik ujung (titik-titik yang berderajat satu) tanpa melanggar syarat pelabelan $L(2,1)$. Untuk menunjukkannya, misal titik di P_5 yang berderajat dua dilabeli dengan label 1. Sehingga hanya label 3 yang dapat digunakan untuk melabeli tetangga dari titik tersebut. Akan tetapi jika dua tetangganya sama-sama dilabeli dengan label 3, maka aturan jarak tidak terpenuhi. Dengan demikian tinggal dua label (0 dan 3) yang digunakan untuk melabeli tiga titik berderajat dua. Sekali lagi dengan prinsip sarang merpati, terdapat dua titik yang memiliki label yang sama, sehingga aturan pelabelan tidak terpenuhi. Diperoleh kesimpulan $\lambda_{2,1}(P_5) = 4$.

Selanjutnya ditunjukkan $\lambda_{2,1}(P_n) = 4$ untuk $n > 5$. Misal P_n adalah suatu lintasan dengan panjang lebih dari 5. Karena P_5 adalah subgraf dari lintasan tersebut, maka $\lambda_{2,1}(P_n) \geq \lambda_{2,1}(P_5) = 4$. P_n dapat dilabeli dengan susunan label seperti pada P_5 dan diulang-ulang (2, 0, 3, 1, 4, 2, 0, 3, …) tanpa merusak kriteria dan syarat pelabelan $L(2,1)$. Dengan demikian $\lambda_{2,1}(P_n) \leq 4$, sehingga dari dua ketaksamaan tersebut diperoleh $\lambda_{2,1}(P_n) = 4, \forall n \geq 5$ (Lum, 2007).

2.6.2 Graf Komplit

Teorema 2. $\lambda_{2,1}(K_n) = 2n - 2$

Bukti. Misal diberikan suatu K_n dengan titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_n$, fungsi $f: V(G) \rightarrow \{0,1,2, \dots, 2n-2\}$ yang didefinisikan sebagai $f(v_i) = 2i - 2$ merupakan suatu pelabelan $L(2,1)$ dari K_n. Dengan demikian, $\lambda_{2,1}(K_n) \leq 2n - 2$. Diklaim bahwa K_n tidak dapat dilabeli dengan label-label $0, 1, 2, \dots, 2n-3$. Dimiliki $2n - 2$ label yang akan digunakan untuk melabeli n titik. Dapat digambarkan kondisi ini sebagai $n - 1$ pasangan *disjoint* dari label berturutan dimana n titik harus dilabeli dengan label-label tersebut. Dengan menggunakan asas sarang merpati, satu dari pasangan-pasangan tersebut pasti memuat dua titik. Dengan demikian, karena dua titik tersebut terhubung langsung di K_n, maka kondisi tersebut bertentangan dengan syarat pelabelan $L(2,1)$. Sehingga, $\lambda_{2,1}(K_n) = 2n - 2$ (Lum, 2007).

2.6.3 Graf *Cycle*

Teorema 3. $\lambda_{2,1}(C_n) = 4, \forall n \geq 3$.

Bukti. Karena $C_3 = K_3$, maka dari Teorema 2 di halaman 19 diperoleh $\lambda_{2,1}(C_3) = 2(3) - 2 = 4$. C_4 dapat dilabeli dengan label-label yang tidak lebih dari 4 dengan susunan label 0 – 4 – 1 – 3, sehingga $\lambda_{2,1}(C_4) \leq 4$. Diklaim bahwa C_4 tidak dapat dilabeli dengan hanya bilangan-bilangan 0, 1, 2, dan 3. Karena setiap titik C_4 bertetangga dengan dua titik yang lain, maka tidak dapat digunakan label 1 dan 2. Sehingga tinggal label 0 dan 3 yang dapat digunakan untuk melabeli empat titik pada C_4. Sekali lagi menggunakan prinsip sarang merpati, pasti terdapat dua titik yang memiliki label sama, sehingga aturan pelabelan $L(2,1)$ tidak terpenuhi. Dengan demikian $\lambda_{2,1}(C_4) = 4$.

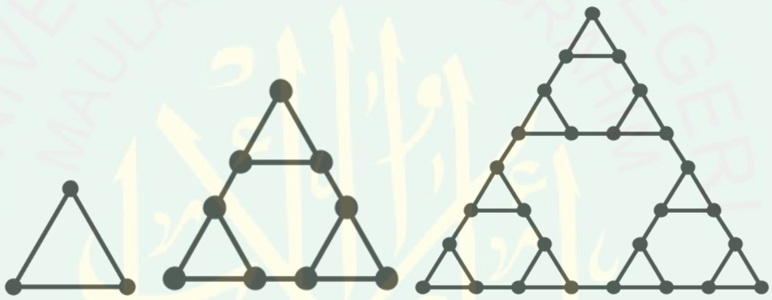
Selanjutnya diperlihatkan C_n dengan $n \geq 5$. Karena C_n memuat P_5 sebagai subgrafnya, maka $\lambda_{2,1}(C_n) \geq \lambda_{2,1}(P_5) = 4$. Sekarang harus ditunjukkan $\lambda_{2,1}(C_n) \leq 4$ dengan mendefinisikan suatu pelabelan pada C_n menggunakan bilangan tidak lebih dari 4 sebagai labelnya. Akan dibagi pembahasannya menjadi tiga kasus berbeda. Pertama, misal $n \equiv 0 \pmod 3$, maka dapat dilakukan pelabelan titik-titik C_n dengan susunan label 0, 2, 4, 0, 2, 4, …. Selanjutnya, misal $n \equiv 1 \pmod 3$, maka dapat dilakukan pelabelan C_n dengan susunan 0, 2, 4, 0, 2, 4, …, 0, 2, 4, 0, 3, 1, 4. Jika $n \equiv 2 \pmod 3$, maka dapat dilakukan pelabelan C_n dengan susunan 0, 2, 4, 0, 2, 4, …, 0, 2, 4, 1, 3 (Lum, 2007).

2.7 Graf Hanoi

Definisi 5

Graf Hanoi Hn_r adalah graf yang merepresentasikan *puzzle* menara Hanoi dengan tiga tiang dan *r* buah cakram. Graf ini juga dikenal sebagai salah satu kasus khusus dari *Sierpinski Gasket*. Graf ini sering dibahas dalam penelitian-penelitian graf fraktal dan optimasi jaringan (Jauhari, 2013).

Contoh graf Hanoi ditunjukkan pada Gambar 2.15 berikut.



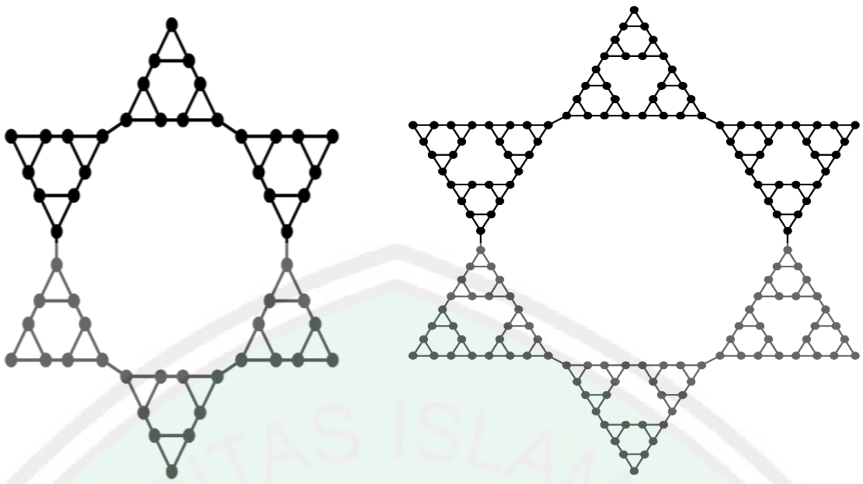
Gambar 2.15 (a) Graf Hn_1, (b) Graf Hn_2, (c) Graf Hn_3

2.8 Graf *Super Cycle* $Sc(n, r)$

Definisi 6

Graf *super cycle* $Sc(n, r)$ adalah graf yang diperoleh dari Cn dengan mengganti semua titiknya menjadi Hn_r, kemudian salah satu titik ujung Hn_r yang berderajat 2 dihubungkan dengan salah satu titik Hn_r lain yang juga berderajat 2 (Jauhari, 2013).

Contoh graf *super cycle* $Sc(n, r)$ ditunjukkan pada Gambar 2.16 berikut.

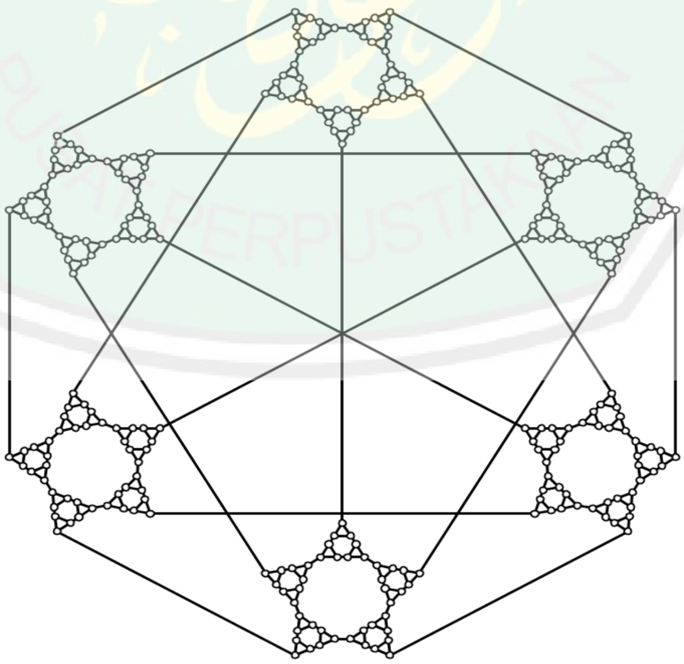


(a) (b)

Gambar 2.16 (a) Graf $Sc(6,2)$, (b) Graf $Sc(6,3)$

Apabila graf komplit Kn setiap titiknya diganti dengan graf *super cycle* $Sc(n, r)$ akan menjadi graf lain yang diberi nama graf komplit *cycle* $Kc(n, r)$ (Jauhari, 2013).

Contoh graf komplit *cycle* $Kc(n, r)$ ditunjukkan pada Gambar 2.17 berikut.



Gambar 2.17 Graf $Kc(6, 3)$

2.9 Masalah Penentuan Frekuensi

Permasalahan *frequency assignment problem* (FAP) yaitu menentukan frekuensi radio untuk *transmitter* pada lokasi yang berbeda tanpa mengakibatkan adanya gangguan sekaligus meminimalkan rentang frekuensi yang dihasilkan. FAP sangat berperan dalam jaringan nirkabel dan telah dipelajari dan menjadi masalah yang menarik. Perkembangan jaringan nirkabel begitu cepat dan pentingnya studi spektrum radio semakin meningkat sehubungan dengan pertumbuhan FAP yang signifikan (Mouly dan Pautet, 1992).

Banyak para peneliti telah memodelkan FAP sebagai permasalahan optimalisasi sebagai berikut: diberikan kumpulan *transmitter* untuk diselesaikan dengan operasi frekuensi dan kumpulan dari gangguan hambatan pada sepasang *transmitter*, ditentukan sebuah penetapan frekuensi yang memenuhi semua gangguan dan meminimalkan nilai yang diberikan sebagai fungsi objektif. Pada tahun 1980, Hale telah memodelkan FAP sebagai masalah pelabelan graf (khususnya secara umum masalah pewarnaan graf) dan merupakan bidang kajian yang sangat diminati pada penelitian saat ini.

Model FAP pada teori graf adalah sebagai berikut: *transmitter* dilambangkan dengan titik-titik pada graf yang dihubungkan oleh sisi-sisi. Gangguan maksimum terjadi pada suatu *transmitter* diwakili oleh titik-titik yang terhubung langsung. Beberapa gangguan masih terjadi pada *transmitter* yang dilambangkan oleh titik-titik di jarak dua, tiga, dan seterusnya. Penyelesaian frekuensi untuk suatu *transmitter* dengan cara penempatan pelabelan ke titik-titik. Agar penetapan frekuensi untuk suatu *transmitter* dapat dilakukan secara efisien, harus ditetapkan pelabelan ke titik-titik sedemikian sehingga pelabelan titik-titik yang terhubung langsung memiliki selisih yang lebih besar, dan titik-titik yang tidak terhubung langsung memiliki selisih kecil dan juga harus diminimalkan pelabelan maksimal yang dapat ditetapkan. Jenis pelabelan graf ini juga di sebut pelabelan *distance-constrained* (Mouly dan Pautet, 1992).

Pada tahun 1988, Robert mengusulkan FAP dengan dua level gangguan yang mana Griggs (1992) mengadaptasinya ke graf dan memperpanjang masalah graf umum pada pelabelan *distance-constrained* sebagai berikut: untuk bilangan bulat *non negative* $p_1, \dots, p_m$ dimana $L(p_1, \dots, p_m)$ pelabelan pada graf G adalah pengawanan titik-titik graf ke bilangan bulat tak negatif sedemikian sehingga titik-titik yang berjarak i dilabeli dengan selisih p_i. Ditentukan pelabelan maksimum ke setiap titik-titik pada graf yang dinamakan rentang pelabelan. Tujuan masalah tersebut adalah untuk membentuk pelabelan $L(p_1, \dots, p_m)$ dengan rentang terkecil. Terkadang rentang jarak mengakibatkan pengurangan pada jarak, misal $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_m \geq 1$. Tetapi, aplikasinya juga mudah pada kasus $p_1 = 0, p_2 = 1$. Masalah pelabelan *distance-constrained* terkait dengan masalah pewarnaan graf biasa pada graf. Jika $p_1 = \cdots = p_m = 1$, maka reduksi pewarnaan k^{th} pada graf kuasa G. Sangat banyak hasil dalam pewarnaan graf kuasa yang diterjemahkan ke dalam pelabelan *distance-constrained* dan sebaliknya (Jin dan Yeh, 2005).

Pelabelan *distance-constrained* yang lebih populer adalah pelabelan $L(2,1)$ pada graf. Masalah utama dalam pelabelan ini adalah dugaan dari Griggs dan Yeh (1992) yang menyatakan bahwa setiap graf G dengan derajat maksimum $\Delta \geq 2$ memiliki $L(2,1)$ pelabelan pada rentang tidak lebih dari Δ^2. Dugaan tersebut masih belum bisa diselesaikan hampir 16 tahun lamanya setelah dipublikasikan. Sebagian besar peneliti bekerja pada pelabelan $L(2,1)$ pada graf dan aspek algoritmanya.

Penelitian secara luas atas pelabelan $L(2,1)$ pada graf, varian mereka dan beberapa masalah pewarnaan lain juga semakin meningkat.

Versi lain pada FAP dideskripsikan pada graf G yang mana sisi e diberikan bilangan bulat positif $w(e)$ dan masalah pelabelan yang diberikan ke titik-titik pada graf dengan bilangan bulat positif sedemikian sehingga pelabelan pada titik-titik u dan v berbeda jika terhubung langsung dimana $w(uv)$ bilangan bulat terkecil. Selain pelabelan bilangan bulat, para peneliti juga melakukan pelabelan dengan bilangan riil dalam FAP. Dengan mengambil jarak yang berbeda antara sebarang dua bilangan Heuvel, dkk, mendiskusikan tentang FAP dan fokus pada pelabelan optimal *infinite triangular lattice*, *infinite square lattice*, dan *infinite line lattice* (Mouly dan Pautet, 1992).

Mouly dan Pautet (1992) mengatakan bahwa *frequency assignment problem* pertama kali muncul di tahun 1960. Perkembangan dari layanan nirkabel seperti telepon seluler pertama memulai proses kelangkaan frekuensi dalam spektrum radio. FAP yang juga dikenal sebagai *channel assignment problem*, berkembang dengan cukup cepat. Ada beberapa pemodelan dari FAP, namun ada dua kesamaan yang selalu ada, yaitu:

1. Suatu set alat komunikasi nirkabel (atau sebuah antena) harus ditunjukkan frekuensi seperti data transmisi dari dua ujung koneksi yang mungkin.
2. Frekuensi ditunjuk ke dua koneksi yang mungkin menimbulkan interferensi yang akan mengakibatkan hilangnya sinyal. Dua kondisi yang memungkinkan terjadinya interferensi:

a. Kedua frekuensi dekat dengan bidang elektromagnetik
b. Kedua koneksi berada dekat satu sama lain sehingga sinyal terinterferensinya cukup kuat untuk mengganggu sinyal asli.

2.10 Keragaman dalam Al-Quran.

Hardiwijono (2005) mengatakan bahwa manusia sebagai makhluk sosial yang membutuhkan kerjasama dalam menunjang kebutuhan dan keberlangsungan hidupnya, tidak bisa dilepaskan dari persekutuan dengan orang lain ataupun kelompok. Aristoteles memaknai manusia adalah *zoon politicon*, makhluk sosial, makhluk hidup yang membentuk masyarakat. Demi keberadaan dan penyempurnaan diri diperlukan membuat persekutuan-persekutuan. Kecenderungan alamiah tersebut, manusia membentuk suku-suku, bertindak dalam suku dan bertindak sebagaimana suku (Bagus, 2002:857).

Keragaman merupakan sesuatu yang sentral dalam pandangan al-Quran tentang masyarakat. Al-Quran mengakui keragaman ini dengan firman Allah Swt. dalam al-Quran surat al-Maidah/5:48 bahwa jika Allah Swt. menghendaki, tentu Allah Swt. akan menjadikan hanya satu umat. Namun manusia dijadikan berbangsa-bangsa dan bersuku-suku agar mereka saling mengenal, sebagaimana disebutkan di dalam al-Quran surat al-Hujurat/49:13, yaitu:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقۡنَٰكُم مِّن ذَكَرٖ وَأُنثَىٰ وَجَعَلۡنَٰكُمۡ شُعُوبٗا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓاْۚ إِنَّ أَكۡرَمَكُمۡ عِندَ ٱللَّهِ أَتۡقَىٰكُمۡۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٞ ١٣

"Hai manusia, sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah Swt. ialah orang yang paling takwa di antara kamu. Sesungguhnya Allah Swt. Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal"(QS. al-Hujurat/49:13).

Dalam tafsir al-Thabari (2009:767), ayat *”Hai manusia, sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan*”, maksudnya adalah bahwa Allah Swt. menciptakan kejadian manusia dari air mani laki-laki dan air mani perempuan. Pendapat ahli tafsir mengenai hal ini, diantaranya dalam tafsir al-Qurthubi (2009:101), maksud dari ayat ini yakni Adam dan Hawa. Sedangkan dalam tafsir al-Mishbah (2012) penggalan pertama ayat ini adalah pengantar untuk menegaskan bahwa semua manusia derajat kemanusiaannya sama di sisi Allah Swt. tidak ada perbedaan antara satu suku dan yang lain. Tidak ada juga perbedaan pada nilai kemanusiaan antara laki-laki dan perempuan karena semua diciptakan dari seorang laki-laki dan seorang perempuan.

Pada ayat *“Dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku*” dalam tafsir al-thabari (2009:768) dijelaskan bahwa maksud dari ayat ini adalah dijadikannya serasi, sebagian ada yang bernasab dengan sebagian lainnya dengan nasab yang jauh, dan sebagian ada yang bernasab dengan sebagian lainnya dengan nasab yang dekat. Orang yang bernasab dengan nasab yang jauh adalah warga bangsa-bangsa (suatu bangsa). Sedangkan orang yang bernasab dengan nasab yang dekat adalah warga kabilah atau suku (suatu kabilah atau suku).

Asy-Syu’uub adalah puncak kabilah, bentuk tunggalnya adalah *Sya’bun*. Dinamakan demikian, sebab mereka itu bercabang-cabang seperti bercabangnya dahan pohon. Al-Jauhari berkata,”*Asy-Sya’b* adalah sesuatu yang bercabang-cabang, yaitu kabilah-kabilah Arab dan non-Arab. Bentuk jamaknya adalah *Asy-Syu’uub*. Adapun *Asy-Syu’uubiyyah*, ia adalah kelompok yang memandang bahwa bangsa Arab itu tidak lebih baik dari pada non-Arab". Mujahid berkata, "*Asy-Syu'uub* adalah yang jauh dari sisi garis keturunannya. Sedangkan *al-Qabaa'il* tidak demikian". Dari Mujahid juga diriwayatkan bahwa *"Asy-Syu'uub* adalah garis keturunan terdekat". Pendapat ini pun dikemukakan oleh Qatadah. Pendapat yang pertama diriwayatkan dari Mujahid oleh Al-Mahdawi sedangkan pendapat yang kedua diriwayatkan dari Mujahid oleh Al-Mawardi (Al-Qurthubi, 2009:109-110).

Dalam tafsir al-mishbah, Shihab (2012) juga berpendapat bahwa kata *syu'uub* adalah bentuk jamak dari kata *sya'b*. Kata ini digunakan untuk menunjuk kumpulan dari sekian *qabiilah* yang bisa diterjemahkan suku yang merujuk pada satu kakek. *Qabiilah* atau suku pun terdiri dari sekian banyak kelompok yang dinamai *imaarah*, dan yang ini tediri lagi dari sekian banyak kelompok yang dinamai *bathn*. Di bawah *bathn* ada sekian *fakhdz* hingga akhinya sampai pada himpunan keluarga yang terkecil.

Pada ayat *"Supaya kamu saling mengenal"* dalam tafsir al-Thabari (2009:772) dijelaskan bahwa maksud ayat tersebut adalah supaya sebagian dari manusia mengenal sebagian lainnya dalam nasab. Artinya, Allah Swt. menjadikan bangsa-bangsa dan suku-suku ini untuk manusia, supaya manusia saling mengenal satu sama lain dalam hal kedekatan dan jauhnya kekerabatan.

Kata *ta'aarafu* terambil dari kata '*arafa* yang berarti mengenal. Kata yang digunakan ayat ini mengandung makna timbal balik. Dengan demikian, ia berarti saling mengenal. Semakin kuat pengenalan satu pihak kepada selainnya, semakin terbuka peluang untuk saling memberi manfaat. Karena itu, ayat di atas menekankan perlunya saling mengenal. Perkenalan itu dibutuhkan untuk saling menarik pelajaran dan pengalaman pihak lain guna meningkatkan ketakwaan kepada Allah Swt. yang dampaknya tercermin pada kedamaian dan kesejahteraan hidup di dunia dan akhirat (Shihab, 2012).

Ayat ini ditutup dengan "*Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu disisi Allah Swt. ialah orang yang paling takwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Swt. Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal"* artinya, orang yang paling mulia di sisi Allah Swt. adalah yang paling bertakwa kepada-Nya, dengan menunaikan segala kewajiban yang diwajibkan-Nya dan menjauhi segala bentuk kemaksiatan yang dilarang-Nya. Bukan orang yang tinggi nasab atau kedudukan sosialnya di dunia (Muhammad, 2009:773).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab III ini dijelaskan berapa nilai minimal dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$, sebagaimana dalam menentukannya akan dibagi pembahasan ke dalam dua kasus. Kasus yang pertama adalah saat $r=1$ dan kasus kedua adalah saat $r>1$, kedua kasus tersebut digunakan untuk sebarang nilai $n \in \mathbb{N}$.

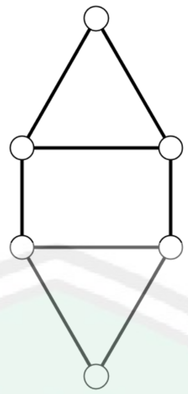
Untuk melabeli setiap titik pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ dengan $n,r \in \mathbb{N}$, harus diperhatikan label titik lain yang berjarak satu dan berjarak dua dengan menerapkan selisih pelabelan sesuai dengan pelabelan $L(2,1)$.

3.1 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf *Super Cycle* $Sc(n,r)$ untuk $r=1$

Untuk menentukan nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ (dinotasikan dengan $\lambda_{2,1}$) pada $Sc(n,1)$ dibagi pembahasan ke dalam dua kasus. Kasus yang pertama adalah saat n genap dan kasus kedua adalah saat n ganjil.

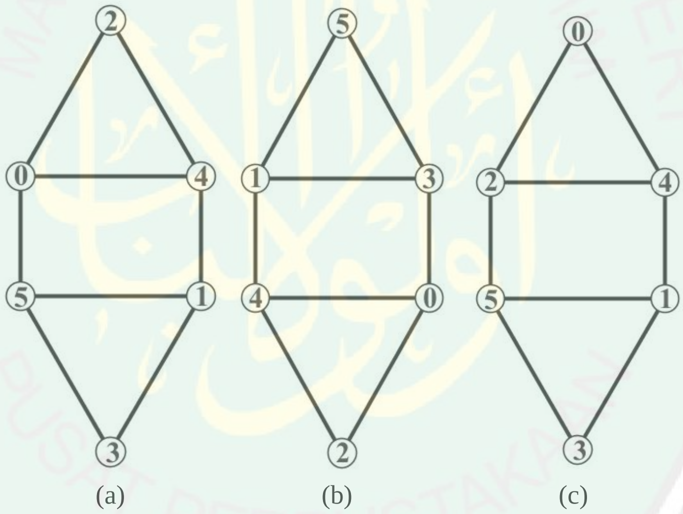
3.1.1 Kasus 1, Saat n Genap

Berikut ini dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(2,1)$ yang sebelumnya diperlihatkan terlebih dahulu gambar dari graf $Sc(2,1)$ sebagai berikut.



Gambar 3.1 Graf $Sc(2, 1)$

Contoh beberapa kemungkinan pelabelan $L(2, 1)$ pada graf $Sc(2, 1)$ adalah sebagai berikut:

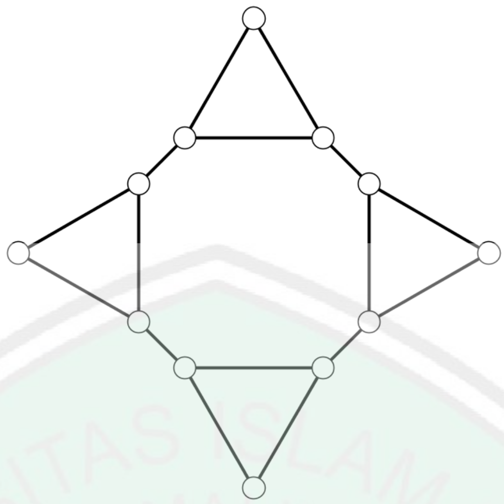


Gambar 3.2 Pelabelan $L(2, 1)$ pada Graf $Sc(2, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.2 di atas dapat diketahui bahwa

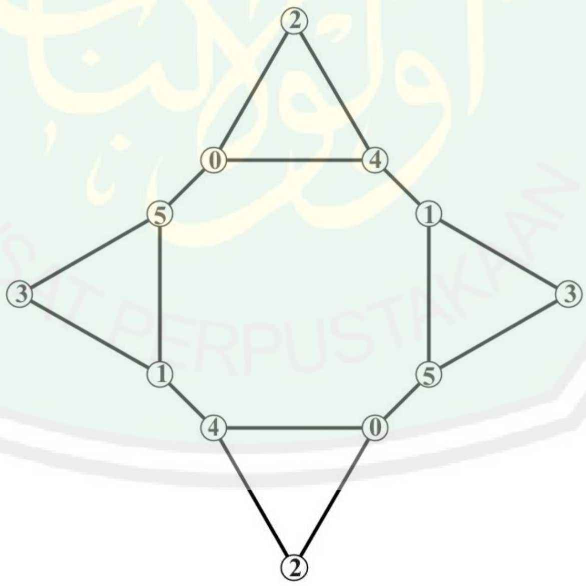
$$\lambda_{2,1}\big(Sc(2, 1)\big) = 5$$

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2, 1)$ pada graf $Sc(4, 1)$ yang sebelumnya diperlihatkan terlebih dahulu gambar dari graf $Sc(4, 1)$ sebagai berikut.

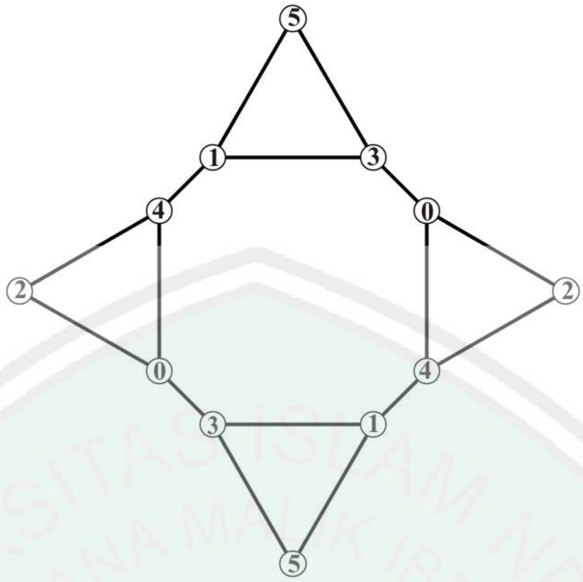


Gambar 3.3 Graf $Sc(4, 1)$

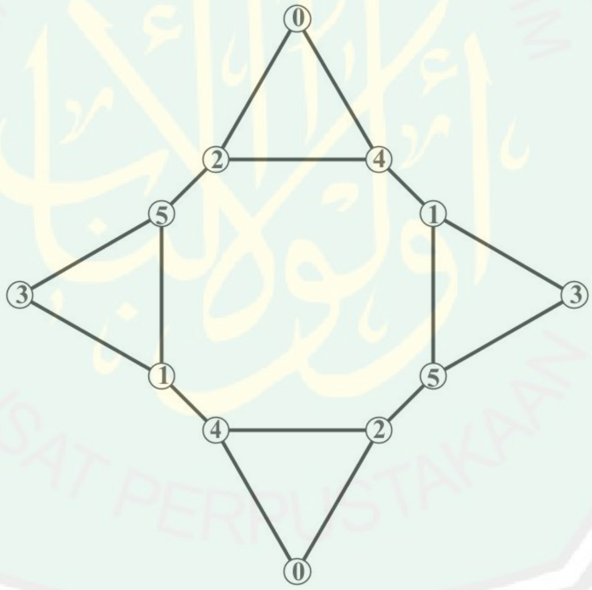
Pelabelan $L(2, 1)$ pada graf $Sc(4, 1)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.2 kemudian diputar searah jarum jam. Contoh beberapa kemungkinan pelabelan $L(2, 1)$ pada graf $Sc(4, 1)$ adalah sebagai berikut.



(a)



(b)



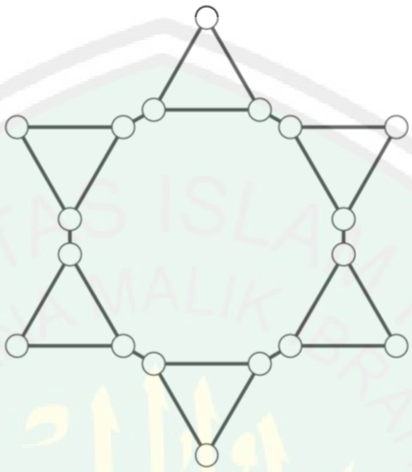
(c)

Gambar 3.4 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(4,1)$

Berdasarkan Gambar 3.4 di atas dapat diketahui bahwa

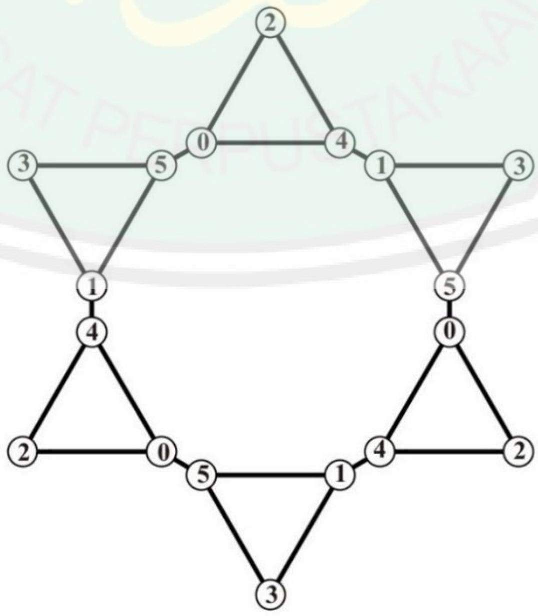
$$\lambda_{2,1}\big(Sc(4,1)\big) = 5$$

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(6,1)$ yang sebelumnya diperlihatkan terlebih dahulu gambar dari graf $Sc(6,1)$ sebagai berikut.

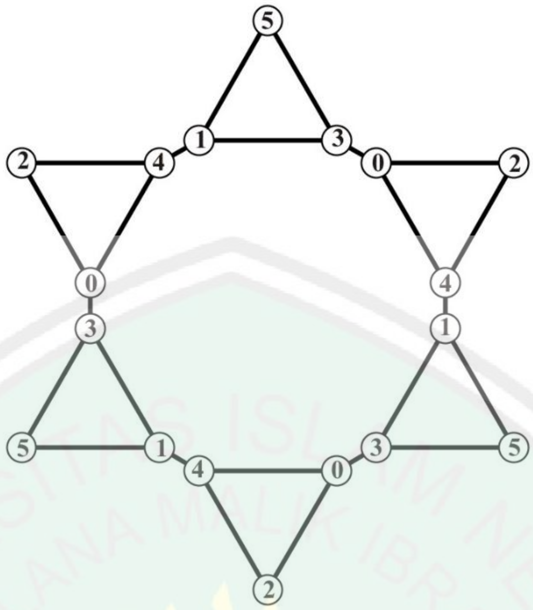


Gambar 3.5 Graf $Sc(6,1)$

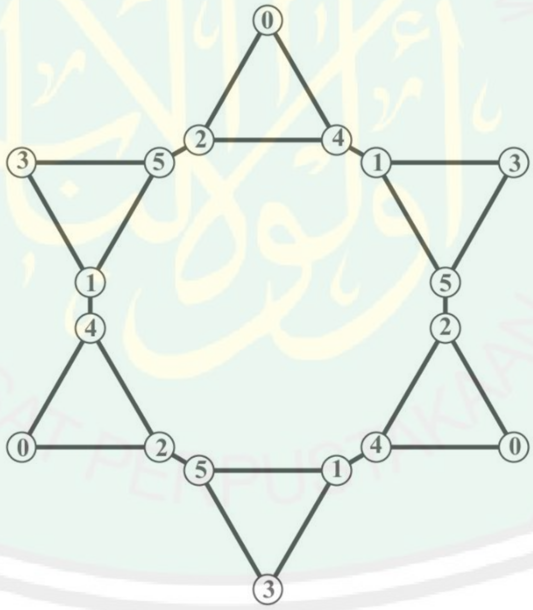
Pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(6,1)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.2 kemudian diputar searah jarum jam. Contoh beberapa kemungkinan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(6,1)$ adalah sebagai berikut.



(a)



(b)



(c)

Gambar 3.6 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(6,1)$

Berdasarkan Gambar 3.6 di atas dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}\big(Sc(6,1)\big) = 5$$

Berdasarkan data di atas, karena $\lambda_{2,1}(Sc(2,1)) = 5$, $\lambda_{2,1}(Sc(4,1)) = 5$, dan $\lambda_{2,1}(Sc(6,1)) = 5$, maka diperoleh dugaan bahwa

$$\lambda_{2,1}(Sc(n,1)) = 6, \text{untuk } n \text{ genap}$$

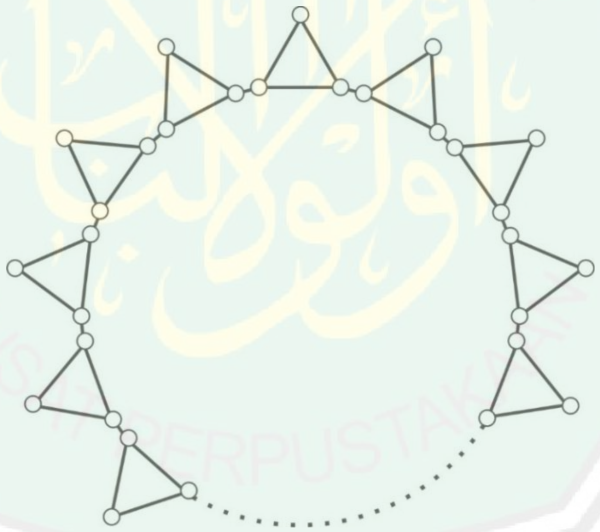
sehingga dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 3.1.1

Untuk sebarang graf *super cycle* $Sc(n,1)$ dengan n genap, maka minimal label terbesar untuk pelabelan $L(2,1)$ dari $Sc(n,1)$ adalah $\lambda_{2,1}(Sc(n,1)) = 5$.

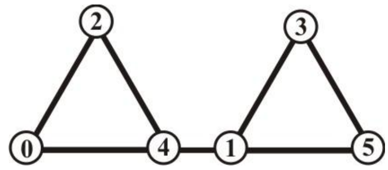
Bukti

Graf $Sc(n,1)$ untuk n genap dapat digambar sebagai berikut.



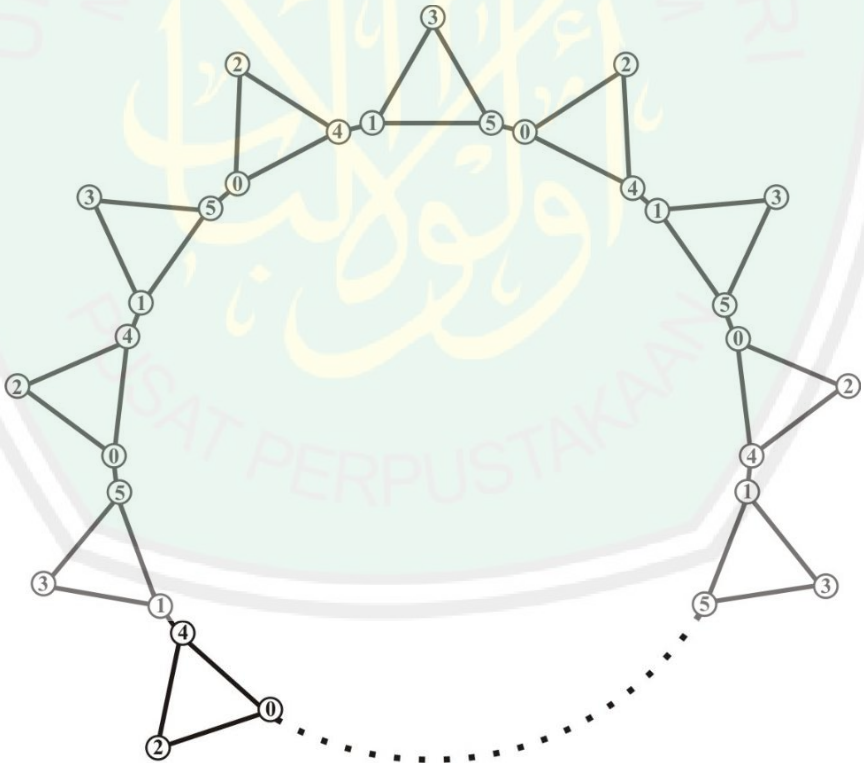
Gambar 3.7 Graf $Sc(n,1)$ untuk n Genap

Graf $Sc(n,1)$ dapat diambil sepasang subgraf Hanoi dan dilabeli sesuai aturan pelabelan $L(2,1)$ sebagai berikut.



Gambar 3.8 Pelabelan $L(2,1)$ pada Sepasang Subgraf Hanoi dari $Sc(n,1)$

Pelabelan tersebut adalah pelabelan $L(2,1)$ terkecil. Karena n genap, maka untuk masing-masing subgraf Hanoi dapat dipasang-pasangkan dan dilabeli tepat seperti di atas. Sehingga dalam melabeli $Sc(n,1)$ untuk n genap hanya perlu melabeli dua subgraf Hanoi dengan label 0, 2, 4 dan 1, 3, 5 kemudian label itu dikopi searah jarum jam seiring bertambahnya n tanpa perlu menambah lagi label, sehingga diperoleh pola sebagai berikut.

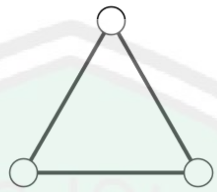


Gambar 3.9 Pelabelan $L(2,1)$ pada $Sc(n,1)$ untuk n Genap

Dengan demikian, $\lambda_{2,1}\big(Sc(n,1)\big) = 5$, untuk n genap.

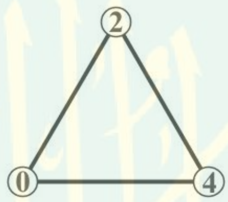
3.1.2 Kasus 2, Saat n Ganjil

Berikut ini dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(1,1)$ yang sebelumnya diperlihatkan terlebih dahulu gambar dari graf $Sc(1,1)$ sebagai berikut.



Gambar 3.10 Graf $Sc(1,1)$

Salah satu contoh pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(1,1)$ adalah sebagai berikut:

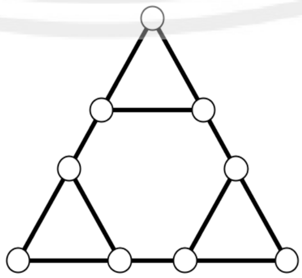


Gambar 3.11 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(1,1)$

Berdasarkan Gambar 3.11 di atas dapat diketahui bahwa

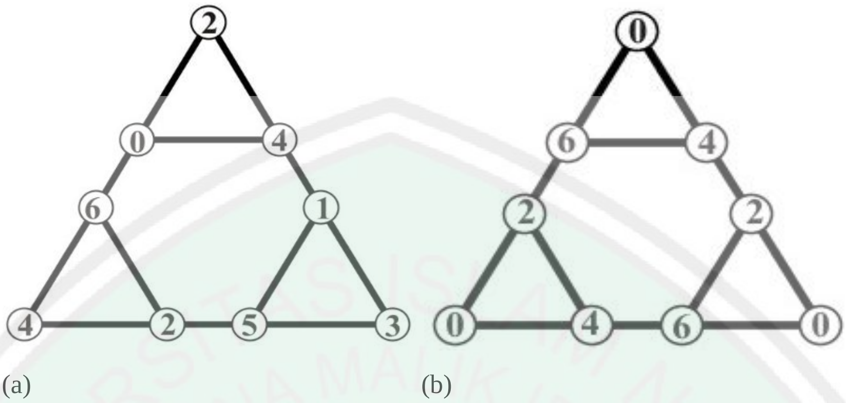
$$\lambda_{2,1}(Sc(1,1)) = 4.$$

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(3,1)$ yang sebelumnya diperlihatkan terlebih dahulu gambar dari graf $Sc(3,1)$ sebagai berikut.



Gambar 3.12 Graf $Sc(3,1)$

Contoh beberapa kemungkinan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(3,1)$ adalah sebagai berikut:

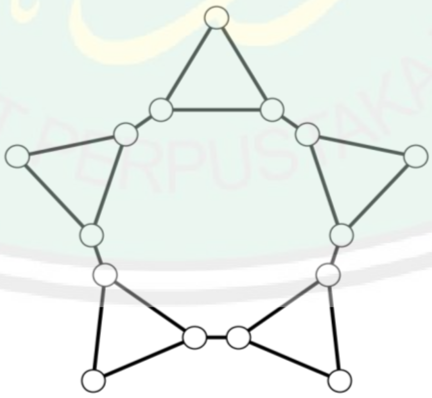


Gambar 3.13 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(3,1)$

Berdasarkan Gambar 3.13 di atas dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}(Sc(3,1)) = 6$$

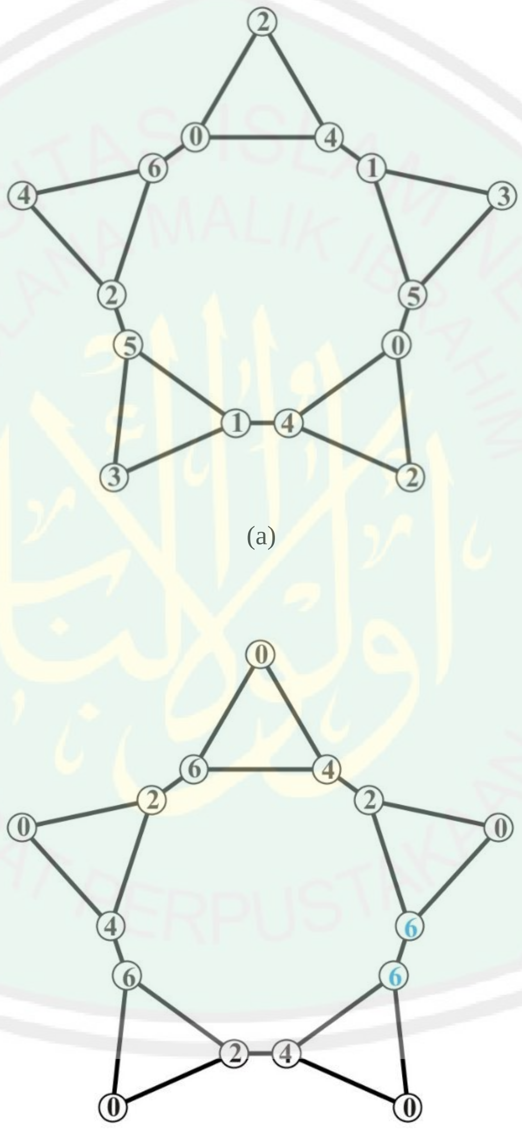
Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(5,1)$ yang sebelumnya diperlihatkan terlebih dahulu gambar dari graf $Sc(5,1)$ sebagai berikut.



Gambar 3.14 Graf $Sc(5,1)$

Pola pada Gambar 3.13 (b) bukan merupakan pola kunci, karena pada saat pola tersebut dikopi untuk $n \geq 5$, ada label yang sama pada titik yang berjarak satu, sehingga tidak memenuhi aturan pelabelan $L(2,1)$. Label tersebut adalah 6.

Pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(5,1)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.13 (a), kemudian pola tersebut diputar searah jarum jam. Berikut ini diperlihatkan contoh Gambar 3.15 (a) Pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(5,1)$, dan Gambar 3.15 (b) Bukan merupakan pelabelan $L(2,1)$.

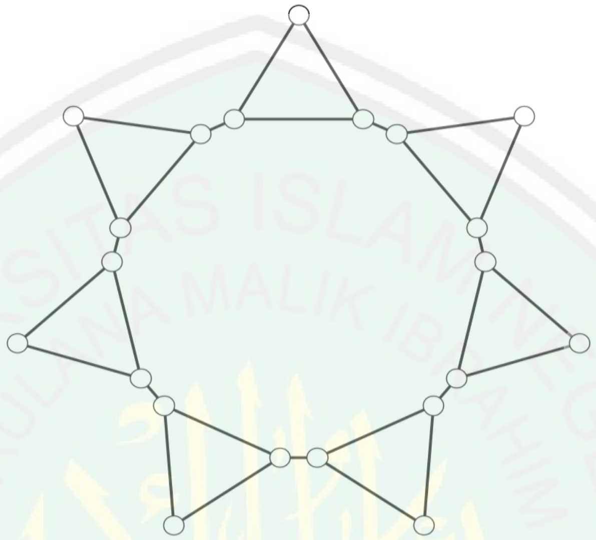


Gambar 3.15 (a) Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(5,1)$
(b) Bukan Pelabelan $L(2,1)$

Berdasarkan Gambar 3.15 (a) di atas dapat diketahui bahwa

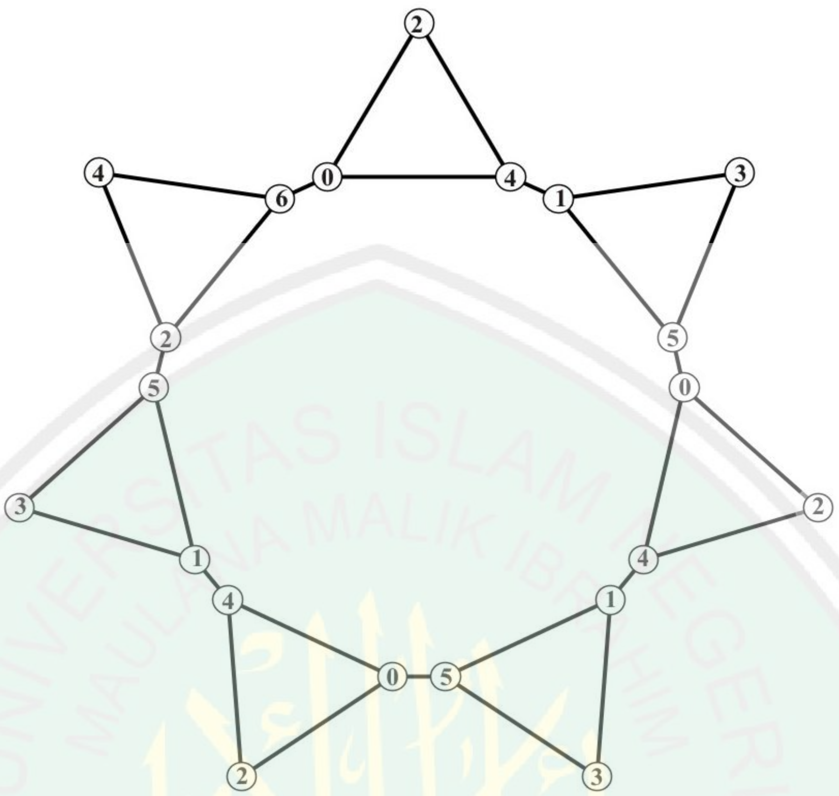
$$\lambda_{2,1}\big(Sc(5,1)\big) = 6$$

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(7,1)$ yang sebelumnya diperlihatkan terlebih dahulu gambar dari graf $Sc(7,1)$ sebagai berikut.



Gambar 3.16 Graf $Sc(7,1)$

Pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(7,1)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.13 (a) lalu pola tersebut diputar searah jarum jam hingga subgraf Hanoi yang ke $(n-1)$. Kemudian subgraf Hanoi yang ke-n dilabeli dengan label 2, 4 dan 6. Salah satu contoh kemungkinan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(7,1)$ adalah sebagai berikut.



Gambar 3.17 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(7,1)$

Berdasarkan Gambar 3.17 di atas dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}\big(Sc(7,1)\big) = 6$$

Berdasarkan data di atas, karena $\lambda_{2,1}\big(Sc(1,1)\big) = 4$ $\lambda_{2,1}\big(Sc(3,1)\big) = 6$, $\lambda_{2,1}\big(Sc(5,1)\big) = 6$, dan $\lambda_{2,1}\big(Sc(7,1)\big) = 6$, maka diperoleh dugaan bahwa

$$\lambda_{2,1}\big(Sc(n,1)\big) = \begin{cases} 4, \text{untuk } n = 1 \\ 6, \text{untuk } n > 1 \end{cases}$$

Sehingga dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

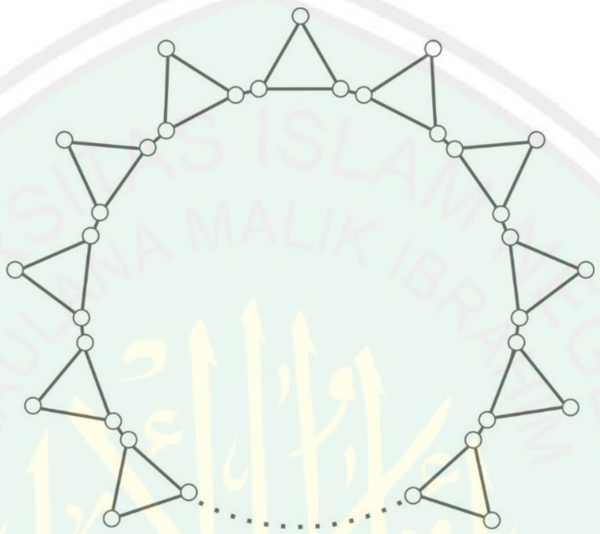
Teorema 3.1.2

Untuk sebarang graf *super cycle* $Sc(n,1)$ dengan n ganjil, maka minimal label terbesar untuk pelabelan $L(2,1)$ dari $Sc(n,2)$ adalah

$$\lambda_{2,1}\big(Sc(n,1)\big) = \begin{cases} 4, \text{untuk } n = 1 \\ 6, \text{untuk } n > 1 \end{cases}$$

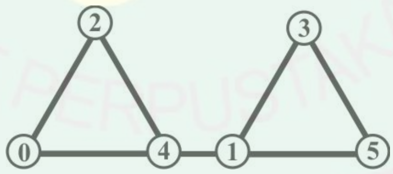
Bukti

Saat $n = 1$, berdasarkan Teorema dapat diketahui bahwa $\lambda_{2,1}\big(Sc(n,1)\big) = 4$, sedangkan saat $n > 1$, graf $Sc(n,1)$ untuk n ganjil dapat digambar sebagai berikut.



Gambar 3.18 Graf $Sc(n,1)$ untuk n Ganjil

Graf $Sc(n,1)$ dapat diambil sepasang subgraf Hanoi dan dilabeli sesuai aturan pelabelan $L(2,1)$ sebagai berikut.



Gambar 3.19 Pelabelan $L(2,1)$ pada Sepasang Subgraf Hanoi dari $Sc(n,1)$

Pelabelan tersebut adalah pelabelan $L(2,1)$ terkecil. Karena n ganjil, maka pada saat masing-masing subgraf Hanoi dipasang-pasangkan, ada satu subgraf Hanoi tersisa yang tidak memiliki pasangan yaitu subgraf Hanoi yang ke n. Subgraf Hanoi ini tidak dapat dilabeli dengan label seperti di atas karena diapit oleh subgraf Hanoi yang berlabel $0, 2, 4$ dan subgraf Hanoi lain yang berlabel $1, 3, 5$. Sehingga label terkecil yang tersisa untuk subgraf Hanoi ini hanya $2, 4, 6$. Maka cara melabeli $Sc(n, 1)$ untuk n ganjil adalah dengan mengkopi pelabelan di atas searah jarum jam hingga subgraf Hanoi yang ke $(n-1)$, selanjutnya untuk subgraf Hanoi yang ke n dapat dilabeli dengan $2, 4, 6$ sehingga diperoleh pola sebagai berikut.

Gambar 3.20 Pelabelan $L(2, 1)$ pada $Sc(n, 1)$ untuk n Ganjil

Dengan demikian, untuk n ganjil diperoleh

$$\lambda_{2,1}\big(Sc(n, 1)\big) = \begin{cases} 4, \text{untuk } n = 1 \\ 6, \text{untuk } n > 1 \end{cases}$$

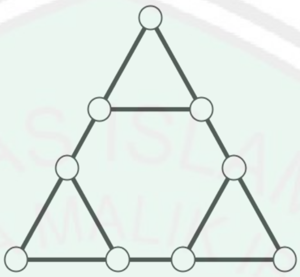
Berdasarkan penjelasan dan analisis di atas dapat disimpulkan bahwa

$$\lambda_{2,1}\big(Sc(n, 1)\big) = \begin{cases} 4 & \text{jika } n = 1 \\ 5 & \text{jika } n > 1, n \text{ genap} \\ 6 & \text{jika } n > 1, \text{n ganjil} \end{cases}$$

3.2 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf *Super Cycle* $Sc(n,r)$, untuk $r > 1$

3.2.1 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf *Super Cycle* $Sc(n,2)$

Berikut ini dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(1,2)$ yang sebelumnya diperlihatkan terlebih dahulu gambar dari graf $Sc(1,2)$ sebagai berikut.

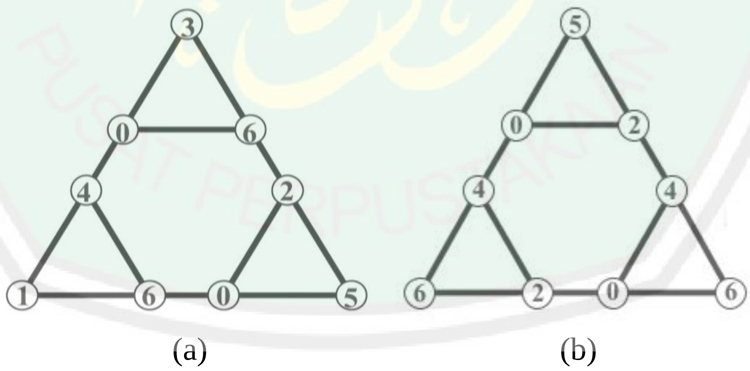


Gambar 3.21 Graf $Sc(1,2)$

Karena Gambar $Sc(1,2)$ sama dengan $Sc(3,1)$ maka dapat diketahui bahwa

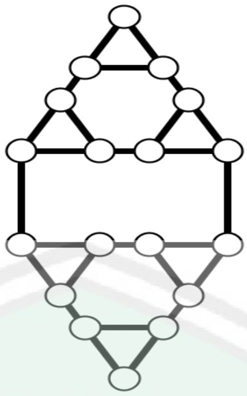
$$\lambda_{2,1}(Sc(1,2)) = 6$$

Contoh beberapa kemungkinan pelabelan $L(2,1)$ pada $Sc(1,2)$ adalah sebagai berikut:



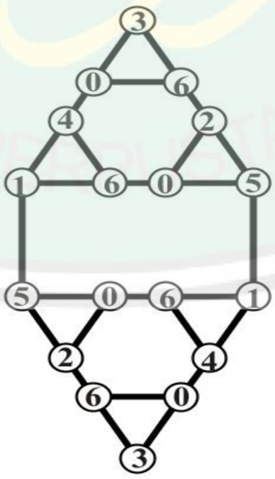
Gambar 3.22 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(1,2)$

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(2,2)$ yang sebelumnya diperlihatkan terlebih dahulu gambar dari graf $Sc(2,2)$ sebagai berikut.

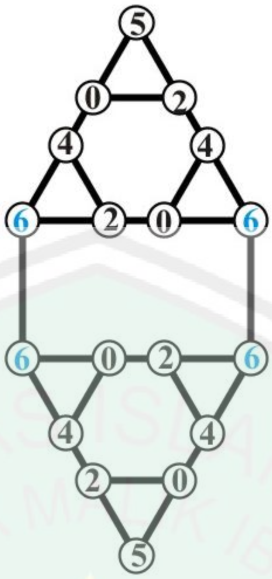


Gambar 3.23 Graf $Sc(2,2)$

Pola pada Gambar 3.22 (b) bukan merupakan pola kunci, karena pada saat pola tersebut dikopi untuk $n \geq 2$, ada label yang sama pada titik yang berjarak satu, sehingga tidak memenuhi aturan pelabelan $L(2,1)$. Label tersebut adalah 6. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(2,2)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.22 (a), kemudian pola tersebut diputar searah jarum jam. Berikut ini diperlihatkan contoh Gambar 3.24 (a) Pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(2,2)$, dan Gambar 3.24 (b) Bukan merupakan pelabelan $L(2,1)$.



(a)



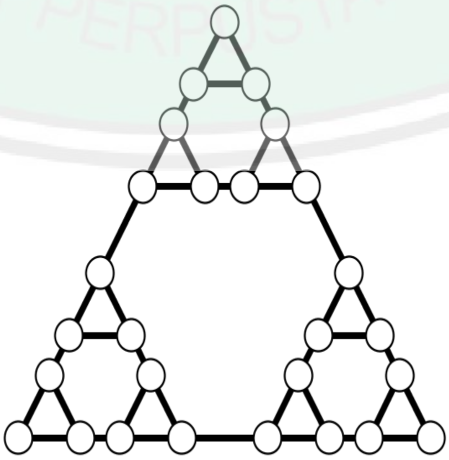
(b)

Gambar 3.24 (a) Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(2,2)$
(b) Bukan Pelabelan $L(2,1)$

Berdasarkan Gambar 3.24 (a) di atas dapat diketahui bahwa

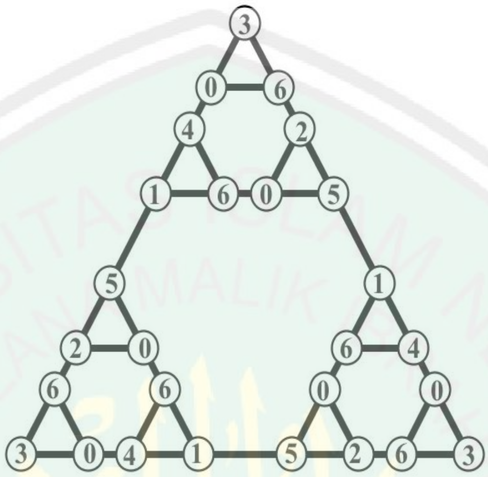
$$\lambda_{2,1}\big(Sc(2,2)\big) = 6$$

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(3,2)$ yang sebelumnya diperlihatkan terlebih dahulu gambar dari graf $Sc(3,2)$ sebagai berikut.



Gambar 3.25 Graf $Sc(3,2)$

Pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(3,2)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.22 (a) kemudian diputar searah jarum jam. Salah satu contoh pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(3,2)$ adalah sebagai berikut:



Gambar 3.26 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(3,2)$

Berdasarkan Gambar 3.26 di atas dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}(Sc(3,2)) = 6$$

Berdasarkan data di atas, karena $\lambda_{2,1}(Sc(1,2)) = 6$, $\lambda_{2,1}(Sc(2,2)) = 6$, dan $\lambda_{2,1}(Sc(3,2)) = 6$, maka diperoleh dugaan bahwa

$$\lambda_{2,1}(Sc(n,2)) = 6$$

sehingga dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

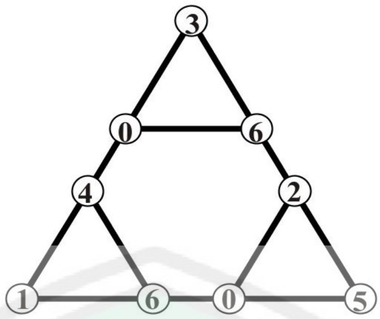
Teorema 3.2.1

Untuk sebarang graf *super cycle* $Sc(n,2)$ dengan $n \in \mathbb{N}$, maka minimal label terbesar untuk pelabelan $L(2,1)$ dari $Sc(n,2)$ adalah $\lambda_{2,1}(Sc(n,2)) = 6$.

Bukti

$Sc(n,2)$ pasti memuat $Sc(1,2)$ sebagai subgrafnya dan $Sc(1,2)$ memuat C_6 sebagai subgrafnya. Menurut Teorema, maka $\lambda_{2,1}(C_6) = 4$ dan 0, 2, 4 adalah label untuk C_6, sehingga dalam melabeli $Sc(1,2)$ akan ada titik-titik yang merupakan ujung dari $Sc(1,2)$ yang saling terhubung langsung dengan titik yang berlabel 0 dan 2, titik yang berlabel 0 dan 4, serta titik yang berlabel 2 dan 4. Perhatikan kasus untuk titik yang terhubung langsung dengan titik yang berlabel 0 dan 4. Label 0, 1, 3, 4, dan 5 tidak mungkin digunakan untuk melabeli titik tersebut karena rentangnya dengan titik yang berjarak satu kurang dari dua, sehingga tidak memenuhi aturan pelabelan $L(2,1)$. Label 2 juga tidak mungkin digunakan untuk melabeli titik tersebut karena rentangnya dengan titik yang berjarak dua sama, sehingga harus dilabeli dengan 6. Sama halnya dengan kasus untuk titik yang terhubung langsung dengan titik yang berlabel 2 dan 4. Label 1, 2, 3, 4, dan 5 tidak mungkin digunakan untuk melabeli titik tersebut karena rentangnya dengan titik yang berjarak satu kurang dari dua, sehingga tidak memenuhi aturan pelabelan $L(2,1)$. Label 0 juga tidak mungkin digunakan untuk melabeli titik tersebut karena rentangnya dengan titik yang berjarak dua sama, sehingga harus dilabeli dengan 6. Dengan demikian $\lambda_{2,1}(Sc(1,2)) = 6$.

Karena $\lambda_{2,1}(Sc(1,2)) = 6$, maka $Sc(n,2)$ dapat dilabeli dengan menempatkan sebarang label sesuai aturan pelabelan $L(2,1)$ menggunakan label 6 sebagai label yang paling besar. Salah satu pelabelan yang digunakan untuk melabeli $Sc(n,2)$ adalah dengan menempatkan label 1, 3, dan 5 sebagai ujung dari $Sc(1,2)$ seperti pola berikut.

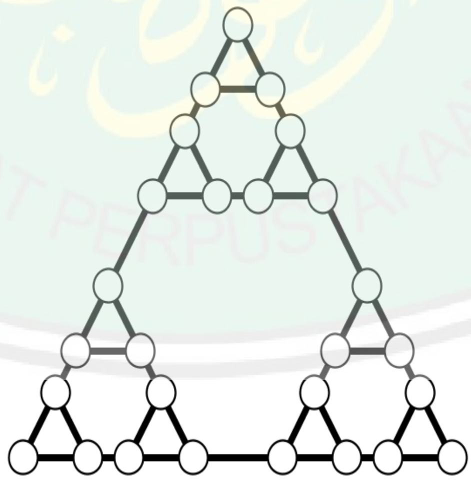


Gambar 3.27 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(1,2)$

Pelabelan $L(2,1)$ pada $Sc(n,2)$ dapat dilakukan dengan mengkopi hasil pelabelan $Sc(1,2)$ menggunakan pola tersebut tanpa perlu menambah lagi label. Dengan demikian, $\lambda_{2,1}\big(Sc(1,2)\big) = 6$ untuk $n \in \mathbb{N}$.

3.2.2 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf *Super Cycle* $Sc(n,3)$

Berikut ini dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(1,3)$ yang sebelumnya diperlihatkan terlebih dahulu gambar dari graf $Sc(1,3)$ yaitu sebagai berikut.

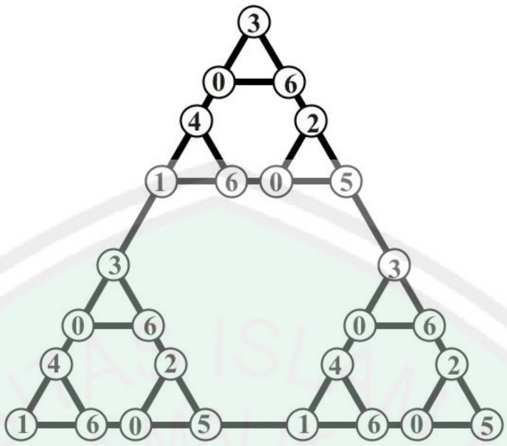


Gambar 3.28 Graf $Sc(1,3)$

Karena gambar $Sc(1,3)$ sama dengan $Sc(3,2)$ maka dapat diketahui bahwa

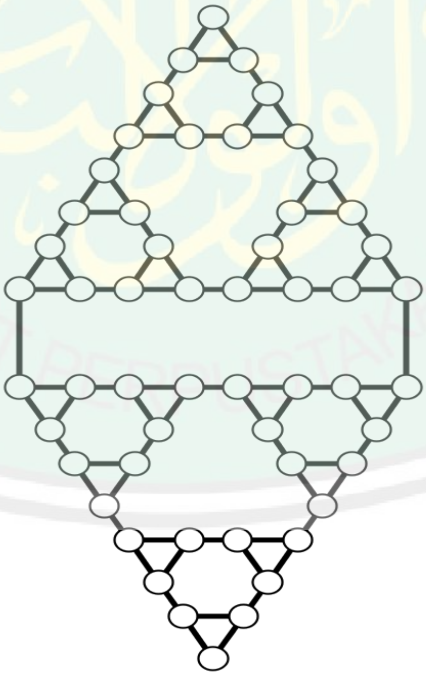
$$\lambda_{2,1}\big(Sc(1,3)\big) = 6$$

Salah satu contoh pelabelan $L(2,1)$ pada $Sc(1,3)$ adalah sebagai berikut.



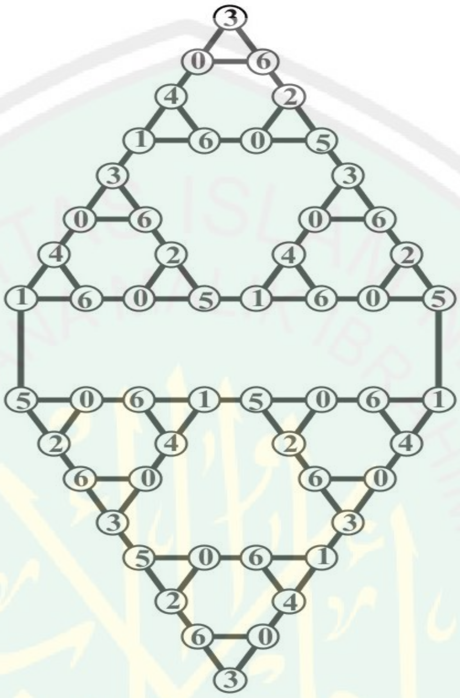
Gambar 3.29 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(1,3)$

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(2,3)$ yang sebelumnya diperlihatkan terlebih dahulu gambar dari $Sc(2,3)$ sebagai berikut.



Gambar 3.30 Graf $Sc(2,3)$

Pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(2,3)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.29 kemudian diputar searah jarum jam. Salah satu contoh pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(2,3)$ adalah sebagai berikut.

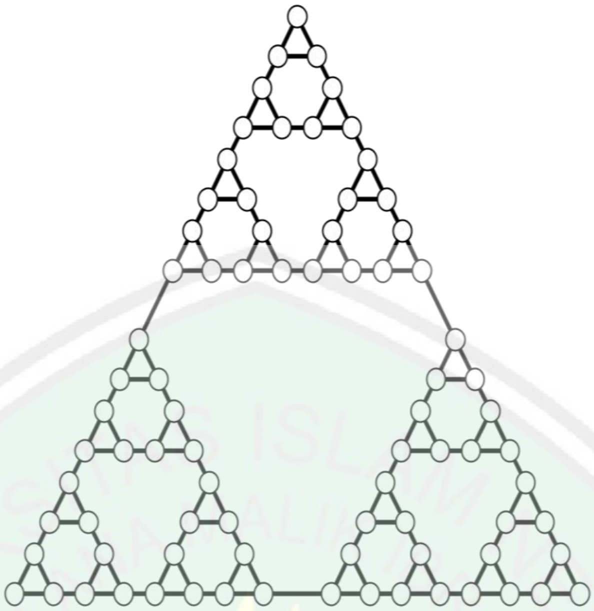


Gambar 3.31: Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(2,3)$

Berdasarkan Gambar 3.31 di atas dapat diketahui bahwa

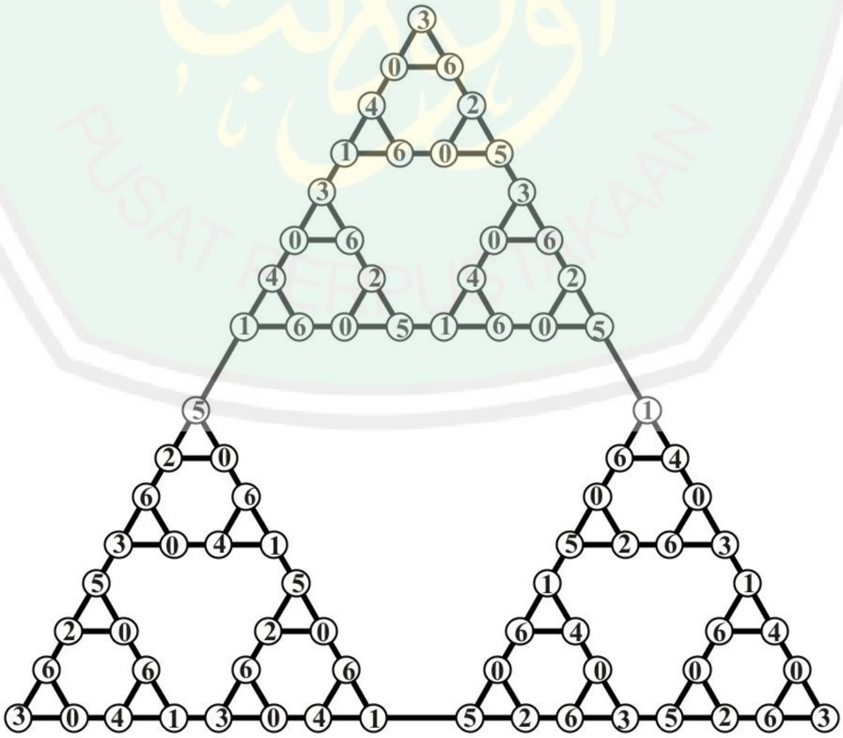
$$\lambda_{2,1}(Sc(2,3)) = 6$$

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(3,3)$ yang sebelumnya diperlihatkan terlebih dahulu gambar dari $Sc(3,3)$ sebagai berikut.



Gambar 3.32 Graf $Sc(3,3)$

Pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(3,3)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.29 kemudian diputar searah jarum jam. Salah satu contoh pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(3,3)$ adalah sebagai berikut:



Gambar 3.33 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(3,3)$

Berdasarkan Gambar 3.33 di atas dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}(Sc(3,3)) = 6$$

Berdasarkan data di atas, karena $\lambda_{2,1}(Sc(1,3)) = 6$, $\lambda_{2,1}(Sc(2,3)) = 6$, dan $\lambda_{2,1}(Sc(3,3)) = 6$, maka diperoleh dugaan bahwa

$$\lambda_{2,1}(Sc(n,3)) = 6$$

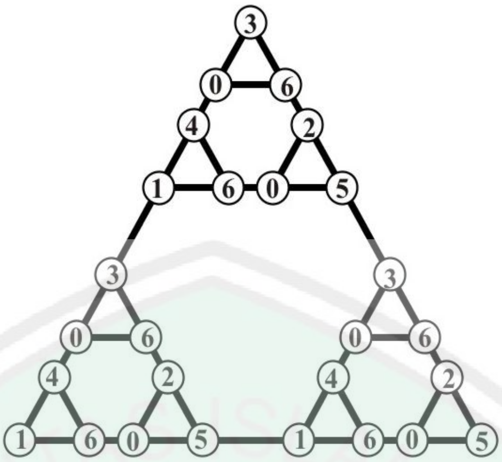
sehingga dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 3.2.2

Untuk sebarang graf *super cycle* $Sc(n,3)$ dengan $n \in \mathbb{N}$, maka minimal label terbesar untuk pelabelan $L(2,1)$ dari $Sc(n,3)$ adalah $\lambda_{2,1}(Sc(n,3)) = 6$.

Bukti

$Sc(n,3)$ pasti memuat $Sc(1,3)$ sebagai subgrafnya dan $Sc(1,3)$ memuat $Sc(1,2)$ sebagai subgrafnya. Karena $\lambda_{2,1}(Sc(1,2)) = 6$, maka $Sc(n,3)$ dapat dilabeli dengan menempatkan sebarang label sesuai aturan pelabelan $L(2,1)$ menggunakan label 6 sebagai label yang paling besar. Salah satu pelabelan yang digunakan untuk melabeli $Sc(n,3)$ adalah dengan menempatkan label 1, 3, dan 5 sebagai ujung dari $Sc(1,3)$ seperti pola berikut.

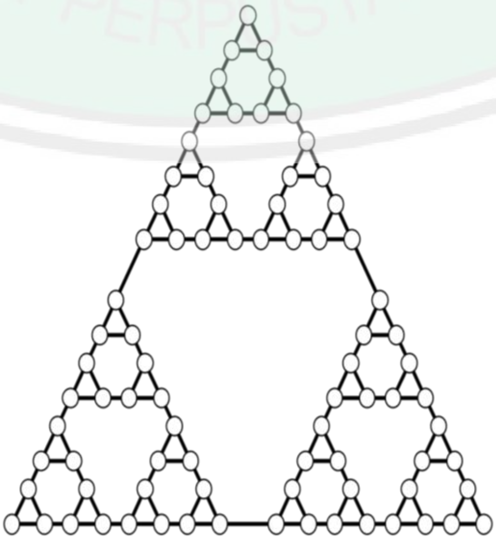


Gambar 3.34 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(1,3)$

Pelabelan $L(2,1)$ pada $Sc(n,3)$ dapat dilakukan dengan mengkopi hasil pelabelan $Sc(1,3)$ menggunakan pola tersebut, kemudian diputar searah jarum jam tanpa perlu menambah lagi label. Dengan demikian, $\lambda_{2,1}\big(Sc(n,3)\big) = 6$ untuk $n \in \mathbb{N}$.

3.2.3 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf *Super Cycle* $Sc(n,4)$

Berikut ini dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(1,4)$ yang sebelumnya akan diperlihatkan gambar $Sc(1,4)$ sebagai berikut.

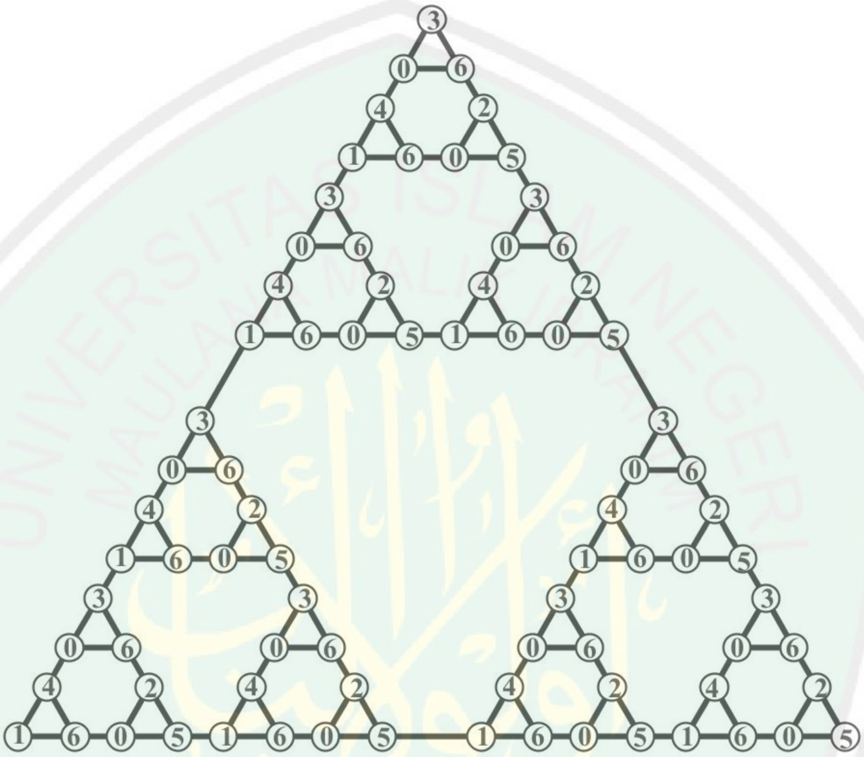


Gambar 3.35 Graf $Sc(1,4)$

Karena gambar $Sc(1,4)$ sama dengan $Sc(3,3)$ maka dapat diketahui bahwa

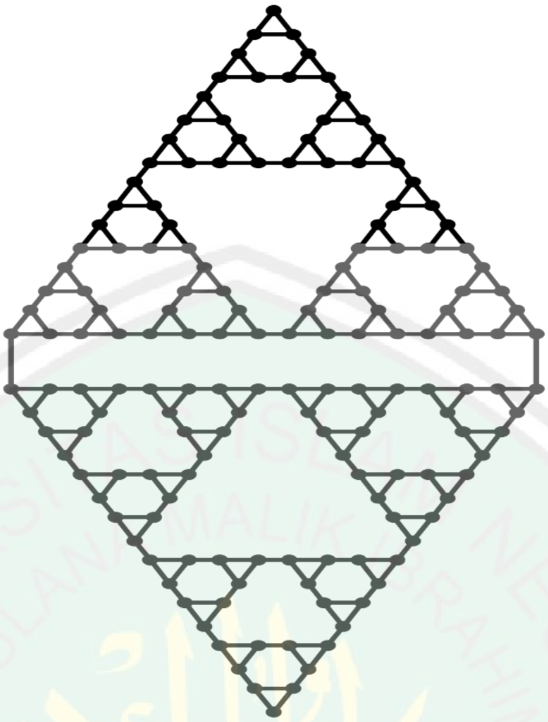
$$\lambda_{2,1}\big(Sc(1,4)\big) = 6$$

Salah satu contoh pelabelan $L(2,1)$ pada $Sc(1,4)$ adalah sebagai berikut.



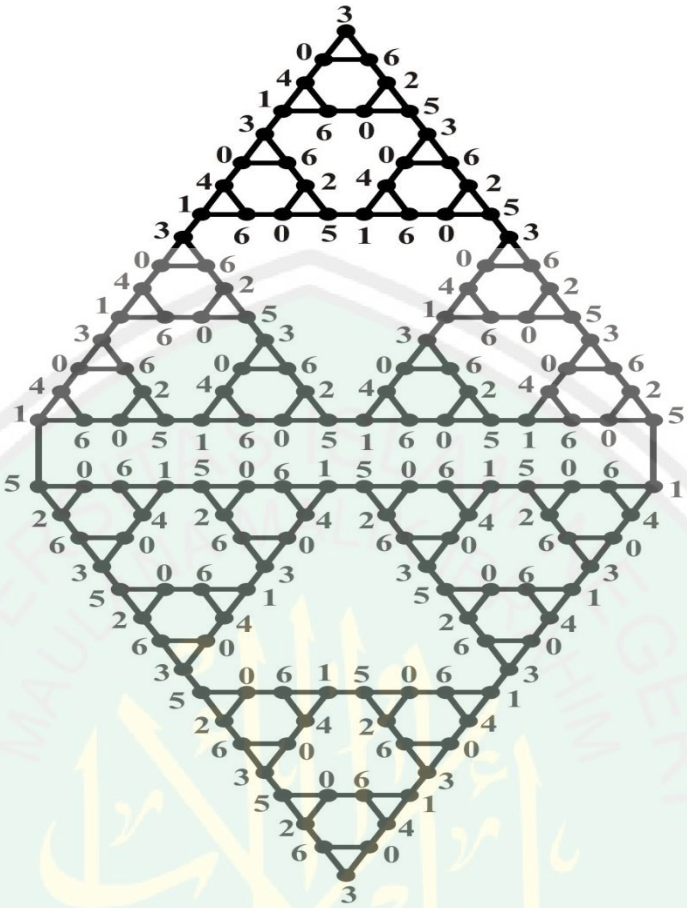
Gambar 3.36 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(1,4)$

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(2,4)$ yang sebelumnya akan diperlihatkan gambar dari $Sc(2,4)$ sebagai berikut.



Gambar 3.37 Graf $Sc(2,4)$

Pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(2,4)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.36 kemudian diputar searah jarum jam. Salah satu contoh pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(2,4)$ adalah sebagai berikut.

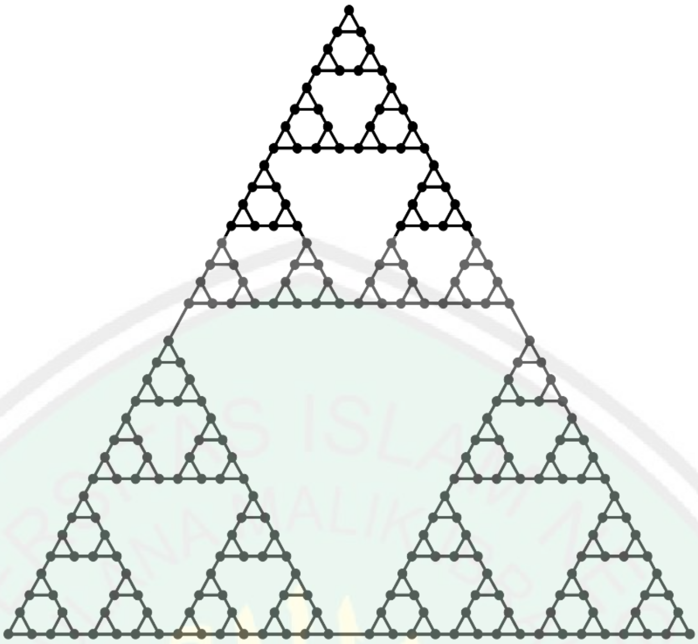


Gambar 3.38 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(2,4)$

Berdasarkan Gambar 3.38 di atas dapat diketahui bahwa

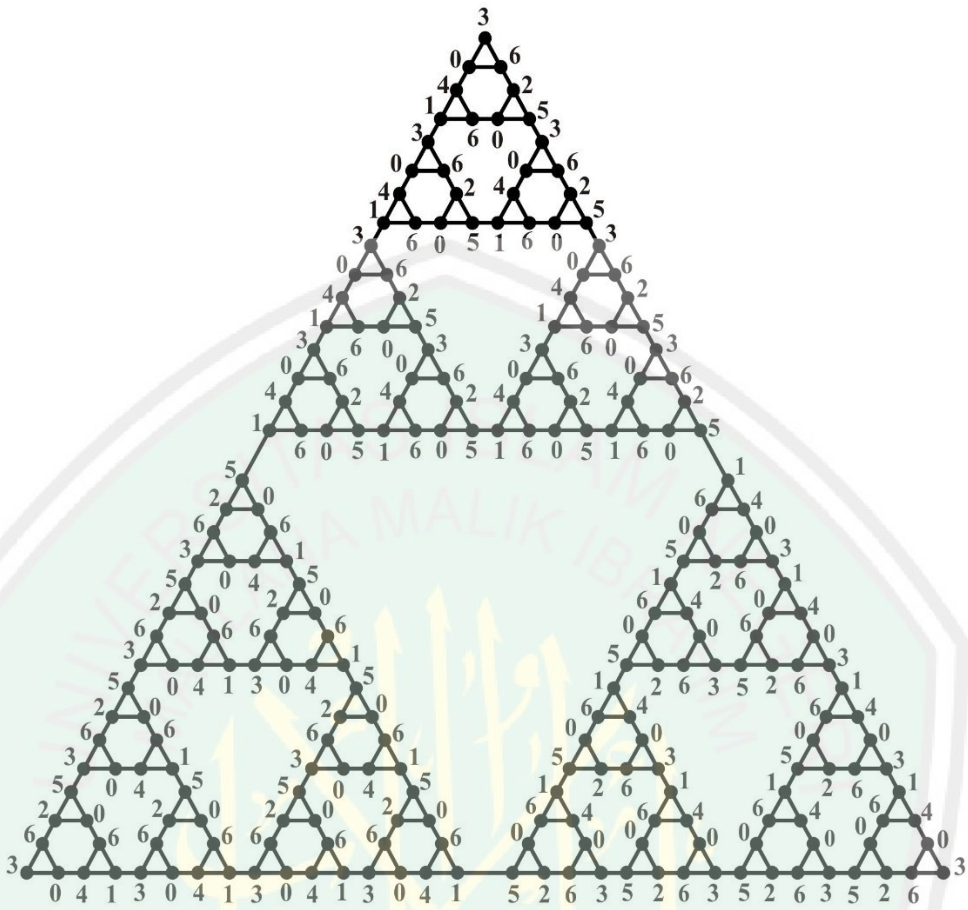
$$\lambda_{2,1}\big(Sc(2,4)\big) = 6$$

Selanjutnya dilakukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(3,4)$ yang sebelumnya akan diperlihatkan gambar dari $Sc(3,4)$ sebagai berikut.



Gambar 3.39 Graf $Sc(3,4)$

Pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(3,4)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.36 kemudian diputar searah jarum jam. Salah satu contoh pelabelan $L(2,1)$ pada graf $Sc(3,4)$ adalah sebagai berikut.



Gambar 3.40 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(3,4)$

Berdasarkan Gambar 3.40 di atas dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}\big(Sc(3,4)\big) = 6$$

Berdasarkan data di atas, karena $\lambda_{2,1}\big(Sc(1,4)\big) = 6$, $\lambda_{2,1}\big(Sc(2,4)\big) = 6$, dan $\lambda_{2,1}\big(Sc(3,4)\big) = 6$, maka diperoleh dugaan bahwa

$$\lambda_{2,1}\big(Sc(n,4)\big) = 6,$$

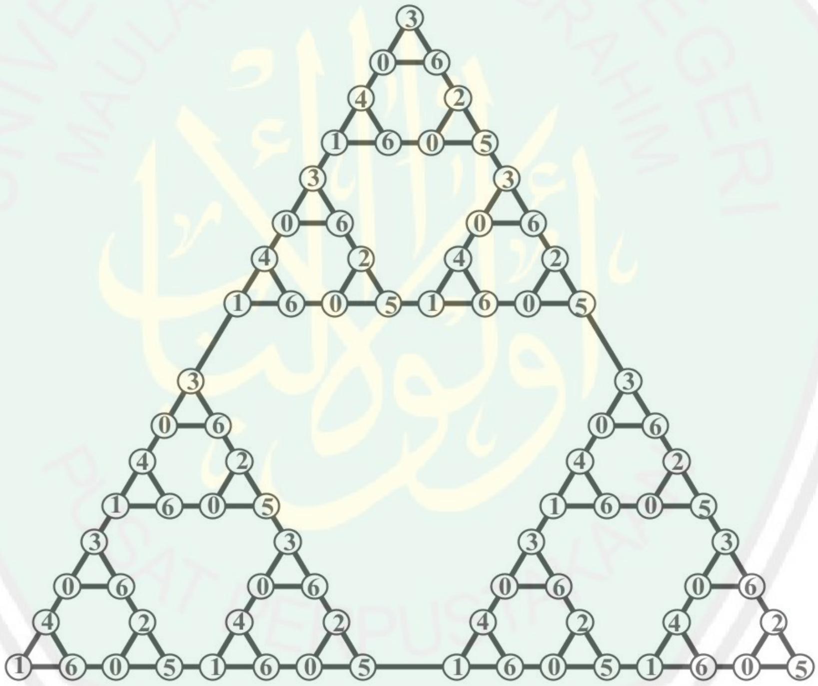
sehingga dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 3.2.3

Untuk sebarang graf *super cycle* $Sc(n,4)$ dengan $n \in \mathbb{N}$, maka minimal label terbesar untuk pelabelan $L(2,1)$ dari $Sc(n,4)$ adalah $\lambda_{2,1}\big(Sc(n,4)\big) = 6$.

Bukti

$Sc(n, 4)$ pasti memuat $Sc(1, 4)$ sebagai subgrafnya dan $Sc(1, 4)$ memuat $Sc(1, 2)$ sebagai subgrafnya. karena $\lambda_{2,1}(Sc(1, 2)) = 6$, maka $Sc(n, 4)$ dapat dilabeli dengan menempatkan sebarang label sesuai aturan pelabelan $L(2, 1)$ menggunakan label 6 sebagai label yang paling besar. Salah satu pelabelan yang digunakan untuk melabeli $Sc(n, 4)$ adalah dengan menempatkan label 1, 3, dan 5 sebagai ujung dari $Sc(1, 4)$ seperti pola berikut.



Gambar 3.41 Pelabelan $L(2, 1)$ pada Graf $Sc(1, 4)$

Pelabelan $L(2, 1)$ pada $Sc(n, 4)$ dapat dilakukan dengan mengkopi hasil pelabelan $Sc(1, 4)$ menggunakan pola tersebut, kemudian diputar searah jarum jam tanpa perlu menambah lagi label. Dengan demikian, $\lambda_{2,1}(Sc(n, 4)) = 6$ untuk $n \in \mathbb{N}$.

Berdasarkan data di atas, karena $\lambda_{2,1}\big(Sc(n,2)\big) = 6$, $\lambda_{2,1}\big(Sc(n,3)\big) = 6$, dan $\lambda_{2,1}\big(Sc(n,4)\big) = 6$, maka diperoleh dugaan bahwa

$$\lambda_{2,1}\big(Sc(n,r)\big) = 6, \text{ untuk } n, r \in \mathbb{N},\ r > 1$$

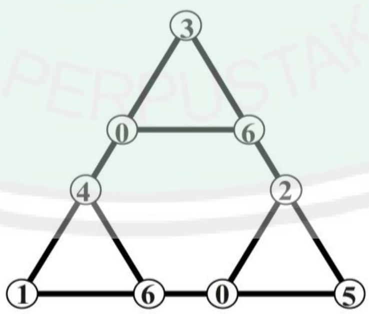
sehingga dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 3.2.4

Untuk sebarang graf *super cycle* $Sc(n,r)$ dengan $n, r \in \mathbb{N}$, $r > 1$, maka minimal label terbesar untuk pelabelan $L(2,1)$ dari $Sc(n,r)$ adalah $\lambda_{2,1}\big(Sc(n,r)\big) = 6$.

Bukti

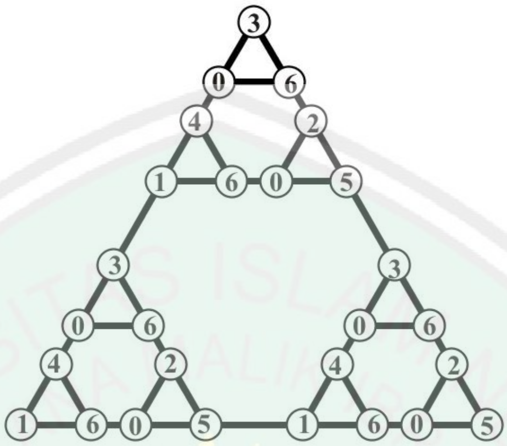
$Sc(n,r)$ untuk $n, r \in \mathbb{N}$, $r > 1$ pelabelannya dimulai dari saat $r = 2$. Pelabelan $L(2,1)$ pada $Sc(n,2)$ dilakukan dengan menempatkan sebarang label sesuai aturan pelabelan $L(2,1)$ menggunakan label 6 sebagai label yang paling besar. Salah satu pelabelan yang digunakan untuk melabeli $Sc(n,2)$ adalah dengan menempatkan label 1, 3, 5 sebagai ujung dari $Sc(1,2)$ yang merupakan subgraf dari $Sc(n,2)$ seperti pola berikut.



Gambar 3.42 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf $Sc(1,2)$

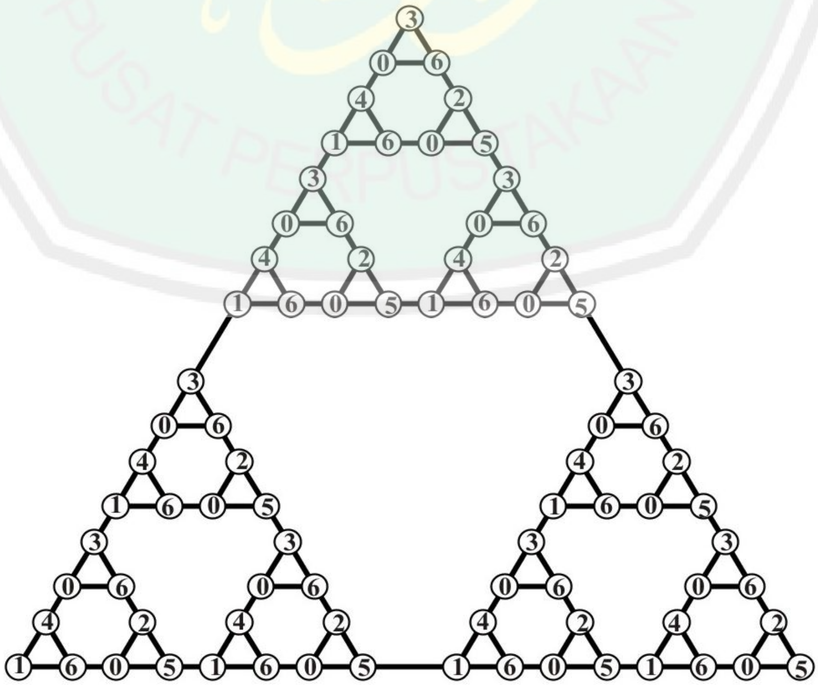
Kemudian pola tersebut dikopi searah jarum jam seiring bertambahnya n tanpa perlu menambah lagi label. Saat $r = 3$, pelabelan $L(2,1)$ pada

$Sc(n, 3)$ dimulai dari $n = 1$. Pelabelan pada $Sc(1, 3)$ diperoleh dari hasil mengkopi pelabelan $Sc(1, 2)$ seperti pola berikut.



Gambar 3.43 Pelabelan $L(2, 1)$ pada Graf $Sc(1, 3)$

Kemudian pola tersebut dikopi searah jarum jam seiring bertambahnya n tanpa perlu menambah lagi label. Demikian halnya saat $r = 4$. Pelabelan $L(2, 1)$ pada $Sc(n, 4)$ dimulai dari $n = 1$. Pelabelan pada $Sc(1, 4)$ diperoleh dari hasil mengkopi pelabelan $Sc(1, 3)$ seperti pola berikut.



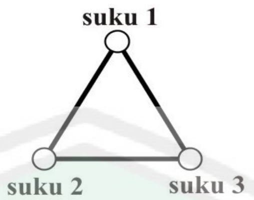
Gambar 3.44 Pelabelan $L(2, 1)$ pada Graf $Sc(1, 4)$

Kemudian pola tersebut dikopi searah jarum jam seiring bertambahnya n tanpa perlu menambah lagi label. Hal ini juga berlaku saat $r = 5, 6, 7, \dots, r_{n-1}, r_n$ untuk $r \in \mathbb{N}$. Saat $r = r_n$, pelabelan $L(2,1)$ pada $Sc(n, r_{n-1})$ dimulai dari $n = 1$. Pola pelabelan pada $Sc(1, r_n)$ diperoleh dari hasil mengkopi pelabelan $Sc(1, r_{n-1})$ kemudian pola tersebut dikopi searah jarum jam seiring bertambahnya n tanpa perlu menambah lagi label. Dengan demikian, $\lambda_{2,1}(Sc(n,r)) = 6$ untuk $r > 1$.

3.3 Integrasi Graf dengan Al-Quran

Pada al-Quran surat al-Hujarat/49:13 telah dijelaskan bahwa tujuan Allah Swt. menciptakan manusia yang beraneka ragam, dengan berbagai bangsa dan suku diantaranya adalah agar manusia saling mengenal. Artinya, Allah Swt. tidak hanya memerintahkan untuk menjaga hubungan baik dengan-Nya *(hablun min Allah)* namun juga hubungan baik dengan sesama manusia *(hablun min al-nas).* Keseimbangan menjalin hubungan baik dengan Allah Swt. dan sesama manusia merupakan prinsip dasar dalam menjalani kehidupan agar bahagia dunia dan akhirat.

Apabila direpresentasikan dalam bentuk graf, maka bangsa-bangsa dan suku-suku diasumsikan sebagai suatu titik, sehingga misal diberikan *n* macam bangsa atau suku maka terdapat *n* titik. Sedangkan bentuk hubungan “saling mengenal” dianggap sebagai suatu sisi yang menghubungkan setiap bangsa atau suku. Karena sebagaimana yang dijelaskan dalam al-Quran surat al-Hujarat/49:13 bahwa manusia harus saling mengenal, maka antara titik satu dengan titik lainnya juga harus saling terhubung. Sehingga jika keterhubungan antar bangsa atau suku itu digambarkan, diperoleh gambar sebagai berikut.



Gambar 3.45 Representasi Graf *Cycle* pada Hubungan Sesama Manusia

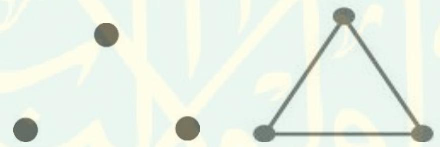
Gambar 3.45 tersebut adalah graf C_3 dan juga termasuk graf K_3 karena setiap dua titik yang berbeda terdapat sisi yang menghubungkan. Titik dalam suatu graf dapat diasumsikan menurut keperluan dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Jika suatu titik pada suatu graf diasumsikan sebagai suatu benda dan dihubungkan dengan semua sisi yang lain, maka hal ini memiliki artian bahwa suatu benda tersebut memiliki suatu hubungan. Hal ini dapat direpresentasikan dalam hubungan sesama manusia dengan suku 1 sebagai contoh yang terhubung dengan semua sisi yang lain yaitu suku 2 dan suku 3, demikian pula dengan suku 2 dan suku 3 yang saling terhubung dengan semua sisi yang lain, sehingga sebagaimana definisi graf komplit bahwa setiap dua titik yang berbeda harus harus ada sisi yang menghubungkan, demikian pula dengan suku satu dengan suku lain harus ada sisi yang menghubungkan, atau dengan kata lain sisi tersebut adalah *silaturrahim.*

Allah Swt. memerintahkan agar setiap manusia menyambung hubungan baik *(silaturrahim)* terlebih lagi hubungan antar umat Islam. Arti *silaturrahim* disini adalah ikatan yang mengikat sesama manusia berupa ikatan iman yang menuntut haknya agar dijaga dalam rasa saling mencintai karena Allah Swt. diantara mereka. Seperti dalam firman Allah Swt. dalam al-Quran surat al-Hujarat/49:10, yaitu:

إِنَّمَا ٱلْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا۟ بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ ۚ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ ﴿١٠﴾

"Orang-orang beriman itu sesungguhnya bersaudara, sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah kepada Allah, supaya kamu mendapat rahmat" (QS. al-Hujurat/49:10).

Silaturrahim baik dalam hubungan antar umat islam maupun antar manusia seluruhnya merupakan sesuatu yang harus dijalin. Dalam teori graf ini, manusia diasumskan sebagai himpunan titik. Apabila antar manusia tersebut menjalin *silaturrahim* dengan baik maka antar titik satu dengan tiik yang lain ada sisi yang menghubungkan namun jika antar manusia tersebut tidak menjalin tali *silaturrahim* atau tidak saling mengenal maka grafnya hanya terdiri dari titik saja dan tidak terdapa sisi yang menghubungkan antar titik tersebut, seperti diperlihatkan dalam contoh berikut.



(a) (b)

Gambar 3.46 (a) Representasi Manusia yang Tidak Menjalin *Silaturrahim*
(b) Representasi Manusia yang Menjalin *Silaturrahim*

Pada Gambar 3.46 (a) terlihat bahwa hanya ada tiga titik dan tidak mempunyai sisi. Hal ini dapat digambarkan bahwa antara manusia yang satu dengan manusia lainnya tidak terjalin *silaturrahim*. Pada Gambar 3.46 (b) terlihat ada tiga titik yang setiap titik satu dengan titik lainnya saling terhubung langsung. Hal ini dapat digambarkan bahwa antar manusia tersebut terjalin *silaturrahim* yang baik.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dijelaskan, dapat disimpulkan bahwa nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ untuk $r = 1$ adalah

$$\lambda_{2,1}\big(Sc(n,1)\big) = \begin{cases} 4 & \text{jika } n = 1 \\ 5 & \text{jika } n > 1, n \text{ genap} \\ 6 & \text{jika } n > 1, n \text{ ganjil} \end{cases}$$

dan nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ untuk $r > 1$ adalah

$$\lambda_{2,1}\big(Sc(n,r)\big) = 6.$$

4.2 Saran

Berdasarkan penelitian ini, maka bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengembangkan penelitian ini dengan menggunakan pelabelan $L(3,2,1)$, $L(d,1)$, atau varian lain dari pelabelan $L(2,1)$.

DAFTAR RUJUKAN

Agnarsson, G. dan Halldorsson, M.M. 2003. Coloring Powers of Planar Graphs. *SIAM J. Discrete Math*, 16(4): 651-662.

Al-Qurthubi. 2009. *Tafsir Al-Qurthubi*. Terjemahan Akhmad Khatib. Jakarta: Pustaka Azzam.

Bagus, L. 2002. *Kamus Filsafat*. Jakarta: Gramedia.

Budayasa, K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graphs & Digraphs*. California: Wadsworth.

Griggs, J. dan Yeh, R. 1992. Labelling Graphs with A Condition at Distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5(4): 586-595.

Hale, W. 1980. Frequency Assignment: Theory and Applications. *Proceedings of the IEEE*, 68(12): 1497-1514.

Hardiwijono, H. 2005. *Seri Sejarah Filsafat Barat 1*. Yogyakarta: Kanisius.

Jauhari, M.N. 2013. *Fungsi Iterasi dari Subdivisi dan Operasi Graf Garis pada Graf*. Tesis tidak dipublikasikan. Bandung: ITB.

Jin, X. dan Yeh, R. 2005. Graph Distance-Dependent Labeling Related to Code Assignment in Computer Networks. *Naval Research Logistics (NRL)*, 52(2): 159-164.

Lum, A. 2007. Upper Bounds On the $L(2,1)$-Labeling Number of Graphs with Maximum Degree Δ. (Online), (https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/lumaa.pdf), diakses 24 Juli 2016.

Mouly, M. dan Pautet, M. 1992. *The GSM System for Mobile Communications*. Palaiseau: Cell & Sys.

Muhammad, A.J. 2009. *Tafsir Al-Thabari*. Terjemahan Abdul Somad dan Abdurrahman Supandi. Jakarta: Pustaka Azzam.

Prasetyo, I.W. 2011. *Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Cycle, Graf Star dan Graf Wheel*. SKRIPSI. Surakarta: Universitas Sebelas Maret Surakarta.

Shao, Z., Yeh, R.K., dan Zhang, D. 2008. The $L(2,1)$-Labeling on Graphs and Frequency Assigment Problem. *Applied Mathematics Letters*, 21: 37-41.

Shihab, M.Q. 2012. *Tafsir Al-Mishbah.* Jakarta: Lentera Hati.

Wilson, R.J. dan Watkins, J.J. 1990. *Graphs: An Introductory Approach.* Canada: John Wiley & Sons.

RIWAYAT HIDUP

Lina Nikmatul Karimah dilahirkan di Grobogan pada tanggal 19 Desember 1993, merupakan anak ke-empat dari lima bersaudara, pasangan Bapak Ali Sodiqin dan Ibu Siti Rohmah. Pendidikan dasarnya ditempuh di kampung halamannya di MI Miftahul Huda Jambon yang ditamatkan pada tahun 2005.

Pada tahun yang sama dia melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTs Miftahul Huda Jambon yang ditamatkan pada tahun 2008. Pada tahun 2009 dia melanjutkan pendidikan menengah atas di MA Al-Muayyad Surakarta dan menamatkan pendidikan tersebut pada tahun 2012. Pendidikan berikutnya dia tempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur Program Beasiswa Santri Berprestasi (PBSB) dengan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lina Nikmatul Karimah
NIM : 12610103
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf *Super Cycle*
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan
1.	16 Mei 2016	Konsultasi Bab I dan II	1.
2.	17 Mei 2016	Konsultasi Agama Bab I dan II	2.
3.	26 Mei 2016	Konsultasi Bab III	3.
4.	27 Mei 2016	Konsultasi Bab III	4.
5.	30 Mei 2016	Revisi Agama Bab II	5.
6.	29 September 2016	Revisi Bab II	6.
7.	05 Oktober 2016	Konsultasi Bab III	7.
8.	14 Oktober 2016	Konsultasi Bab III	8.
9.	20 Oktober 2016	Konsultasi Bab III	9.
10.	28 Oktober 2016	Konsultasi Bab III	10.
11.	01 November 2016	Konsultasi Bab III	11.
12.	25 November 2016	Konsultasi Agama Keseluruhan	12.
13.	28 November 2016	ACC Agama Keseluruhan	13.
14.	21 November 2016	Konsultasi Bab III	14.
15.	02 Desember 2016	ACC Bab II, III, dan IV	15.
16.	05 Desember 2016	ACC Keseluruhan	16.

Malang, 05 Desember 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001