

**SOLUSI NUMERIK MODEL *INOSITOL TRISPHOSPHATE RECEPTOR*
TIPE-2 MENGGUNAKAN METODE *HEUN***

SKRIPSI

**OLEH
RUHMAA MUFIDA
NIM. 12610101**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**SOLUSI NUMERIK MODEL *INOSITOL TRISPHOSPHATE RECEPTOR*
TIPE-2 MENGGUNAKAN METODE *HEUN***

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Ruhmaa Mufida
NIM. 12610101**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**SOLUSI NUMERIK MODEL *INOSITOL TRISPHOSPHATE RECEPTOR*
TIPE-2 MENGGUNAKAN METODE HEUN**

SKRIPSI

Oleh
Ruhmaa Mufida
NIM. 12610101

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 08 November 2016

Pembimbing I,

Pembimbing II,


Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001


Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika


Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**SOLUSI NUMERIK MODEL INOSITOL TRISPHOSPHATE RECEPTOR
TIPE-2 MENGGUNAKAN METODE HEUN**

SKRIPSI

Oleh
Ruhmaa Mufida
NIM. 12610101

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 30 November 2016

Penguji Utama : Mohammad Jamhuri, M.Si



.....

Ketua Penguji : Hairur Rahman, M.Si



.....

Sekretaris Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si



.....

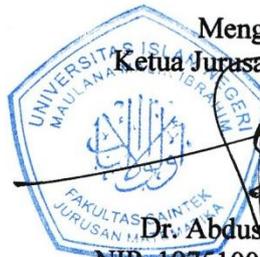
Anggota Penguji : Abdul Aziz, M.Si



.....

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika



Dr. Abdussakir, M.Ed

NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ruhmaa Mufida
NIM : 12610101
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Solusi Numerik Model *Inositol Trisphosphate Receptor*
Tipe-2 Menggunakan Metode *Heun*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 09 November 2016
Yang membuat pernyataan,



Ruhmaa Mufida
NIM. 12610101

MOTO

مَنْ عَرَفَ بُعْدَ السَّفَرِ اسْتَعَدَّ

*“Barang siapa mengetahui jauhnya perjalanan, maka ia akan
mempersiapkannya”*

(Muhafadzah Bahasa Arab)



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Almarhum ayahanda Bahauddin yang doanya tiada pernah berhenti mengalir untuk anak-anaknya hingga tutup usia, ibunda Aimmatun yang dengan penuh kesabaran dan keikhlasan mendoakan, memberi dukungan, motivasi, dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu serta selalu memberikan teladan yang baik bagi penulis.

Untuk kakak dan adik-adik tersayang M. Khatibul Umam, Rofiqotul Chusnaa, Rowaniqul Ulyaa, dan M. Khoirun Niam. Untuk segenap keluarga besar selama di Malang, keluarga besar Luklukil Maknun 3, keluarga besar CSS MoRA 2012, keluarga besar Matematika 2012, keluarga besar SIRLANG, serta keluarga besar DJ-Raa 56.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, segala puji syukur bagi Allah Swt. atas limpahan rahmat, taufik, hidayah, dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan dengan baik penyusunan skripsi yang berjudul “Solusi Numerik Model *Inositol Trisphosphate Receptor* Tipe-2 Menggunakan Metode *Heun*”.

Shalawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada nabi besar Muhammad Saw., yang telah menuntun umatnya dari zaman yang gelap ke zaman yang terang benderang yakni *ad-Diin al-Islam*.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dalam proses penyusunannya tidak mungkin dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, serta arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang senantiasa memberikan doa, arahan, nasihat, motivasi dalam melakukan penelitian, serta pengalaman yang berharga kepada penulis.

5. Abdul Aziz, M.Si selaku dosen pembimbing II yang senantiasa memberikan doa, saran, nasihat, dan motivasi dalam melakukan penelitian.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Almarhum. Bapak dan Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, nasihat, serta motivasi kepada penulis.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2012, terima kasih atas kenangan-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai cita-cita.
9. Semua pihak yang secara langsung atau tidak langsung telah ikut memberikan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis hanya dapat berharap, di balik skripsi ini dapat ditemukan sesuatu yang dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas atau bahkan hikmah bagi penulis, pembaca, dan bagi seluruh mahasiswa.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, November 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص	xvi
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	7
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Penurunan Model Matematika <i>Inositol Trisphosphate Receptor</i>	9
2.2 Persamaan Diferensial Biasa (PDB)	13
2.3 Sistem Persamaan Diferensial Biasa	14
2.4 Masalah Nilai Awal	16
2.5 Deret Taylor	17
2.6 Metode <i>Heun</i>	19
2.7 Metode <i>Heun</i> untuk Sistem	21
2.8 Galat untuk Metode <i>Heun</i>	22

2.9 Perspektif Al-Quran tentang Metode Numerik	23
--	----

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Model Matematika <i>Inositol Trisphosphate Receptor</i>	27
3.2 Solusi Model Matematika <i>Inositol Trisphosphate Receptor</i>	30
3.2.1 Formulasi Model Matematika <i>Inositol Trisphosphate Receptor</i> pada Metode <i>Heun</i>	30
3.2.2 Solusi Numerik Model Matematika <i>Inositol Trisphosphate</i> <i>Receptor</i> dengan Metode <i>Heun</i>	31
3.2.3 Solusi Analitik Model Matematika <i>Inositol Trisphosphate</i> <i>Receptor</i>	37
3.2.4 Simulasi Hasil dan Interpretasi	43
3.3 Analisis Perbandingan Solusi Numerik dan Solusi Analitik Model Matematika <i>Inositol Trisphosphate Receptor</i>	46
3.4 Etika Berhubungan Sosial dalam Pandangan Islam	54

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	57
4.2 Saran	59

DAFTAR RUJUKAN	60
-----------------------------	----

LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Nilai Parameter-parameter yang Digunakan dalam Model <i>Inositol Trisphosphate Receptor</i>	29
Tabel 3.2	Penjumlahan Semua Variabel dari Iterasi ke-1 sampai Iterasi ke-3 ..	46
Tabel 3.3	Nilai Galat dan Galat Relatif untuk Variabel R	47
Tabel 3.4	Nilai Galat dan Galat Relatif untuk Variabel O	48
Tabel 3.5	Nilai Galat dan Galat Relatif untuk Variabel A	49
Tabel 3.6	Nilai Galat dan Galat Relatif untuk Variabel I_1	50
Tabel 3.7	Nilai Galat dan Galat Relatif untuk Variabel I_2	51
Tabel 3.8	Nilai Galat dan Galat Relatif untuk Variabel S	53



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Skema Perpindahan dari A ke I	9
Gambar 2.2	Diagram Skema Model <i>Inositol Trisphosphate Receptor</i>	12
Gambar 2.3	Diagram Skema Model <i>Inositol Trisphosphate Receptor</i> yang Disederhanakan	13
Gambar 3.1	Solusi Numerik dan Solusi Analitik untuk Variabel R	43
Gambar 3.2	Solusi Numerik dan Solusi Analitik untuk Variabel O	44
Gambar 3.3	Solusi Numerik dan Solusi Analitik untuk Variabel A	44
Gambar 3.4	Solusi Numerik dan Solusi Analitik untuk Variabel I_1	45
Gambar 3.5	Solusi Numerik dan Solusi Analitik untuk Variabel I_2	45
Gambar 3.6	Solusi Numerik dan Solusi Analitik untuk Variabel S	46
Gambar 3.7	Galat untuk Variabel R	48
Gambar 3.8	Galat untuk Variabel A	49
Gambar 3.9	Galat untuk Variabel O	50
Gambar 3.10	Galat untuk Variabel I_1	51
Gambar 3.11	Galat untuk Variabel I_2	52
Gambar 3.12	Galat untuk Variabel S	53

ABSTRAK

Mufida, Ruhmaa. 2016. **Solusi Numerik Model *Inositol Trisphosphate Receptor Tipe-2* menggunakan Metode *Heun***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (2) Abdul Aziz, M.Si.

Kata kunci: solusi numerik, model matematika, *inositol trisphosphate receptor*, metode *Heun*

Penelitian ini membahas aplikasi metode *Heun* dalam penyelesaian model matematika *inositol trisphosphate receptor*. Metode *Heun* merupakan perbaikan dari metode Euler yang didekati menggunakan integral metode trapesium. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui solusi numerik model matematika *inositol trisphosphate receptor* menggunakan metode *Heun*. Model ini diselesaikan menggunakan metode *Heun* skema eksplisit. Pada penelitian ini juga diberikan solusi analitik model matematika *inositol trisphosphate receptor* untuk menguji keakuratan metode *Heun* dalam menyelesaikan model. Hasil yang diperoleh terbukti bahwa untuk nilai $h \leq 0,01$, metode *Heun* memberikan solusi yang akurat (nilai galat relatif kecil) dalam menyelesaikan model matematika *inositol trisphosphate receptor*.

ABSTRACT

Mufida, Ruhmaa. 2016. **The Numerical Solution of The Type-2 Inositol Trisphosphate Receptor Model Using Heun Method**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (2) Abdul Aziz, M.Si.

Keyword: numerical solution, mathematical modelling, inositol trisphosphate receptor, Heun method

This study discusses the Heun method application in solving the mathematical model of inositol trisphosphate receptor. Heun method is an improvement of Euler method that approximated using trapezoidal integral method. The purpose of this study is to determine the numerical solution of mathematical model of inositol trisphosphate receptor using Heun method. This model is solved using an explicit scheme Heun. In this study also provided analytic solutions of mathematical model of inositol trisphosphate receptor to test the accuracy of Heun methods in solving models. The results obtained proved that for value $h \leq 0,01$, Heun method provides an accurate solution (the relative error is small) in solving mathematical model of inositol trisphosphate receptor.

ملخص

مفيدا، رحى. ٢٠١٦. الحل العددي للنوع نماذج *Inositol Trisphosphate Receptor* ٢ باستخدام طريقة *Heun*. بحث جامعي. شعبة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) الدكتور عثمان فاكالاي الماجستير (٢) عبد العزيز الماجستير

الكلمة الرئيسية: الحل العددي، نمذجة الرياضيات، *inositol trisphosphate receptor*، طريقة *Heun*.

تتناول هذه الدراسة تطبيق طريقة *Heun* في حل نموذج الرياضية *Inositol Trisphosphate Receptor*. طريقة *Heun* هو تحسين طريقة *Euler* ويقترَب باستخدام تكامل شبه المنحرف. وكان الغرض من هذه الدراسة هو تحديد الحل العددي للنموذج رياضي من *inositol trisphosphate receptor* باستخدام طريقة *Heun*. يتم حل نموذج باستخدام طريقة مخطط واضح *Heun*. في هذه الدراسة قدمت أيضا حلول *inositol trisphosphate receptor* نماذج رياضية تحليلية لإختبار دقة طريقة *Heun* في حل النماذج. و إنتاج هذا البحث يعرف أن للصفوف $h \leq 0,01$ يوفر حلا دقيقة (قيمة الخطأ النسبي صغيرة) في حل نموذج رياضي من *inositol trisphosphate receptor*.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Bidang keilmuan matematika menduduki peranan penting dalam khazanah keilmuan-keilmuan yang lain. Dalam menduduki perannya yang penting tersebut matematika melahirkan suatu cabang keilmuan, yakni pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan cabang keilmuan matematika yang mengatasi suatu masalah dengan cara membawa suatu permasalahan ke dalam sudut pandang matematika, yang di antaranya dalam bentuk suatu sistem persamaan diferensial untuk kemudian diselesaikan dengan cara yang matematis.

Menghadapi realita kehidupan yang ternyata lebih rumit, ilmuwan matematika menemukan bahwa cara yang lazim digunakan (metode analitik) tidak cukup baik dalam mengatasi tiap-tiap masalah yang ada, sehingga lahirlah cara lain untuk menyelesaikan persoalan matematika, yaitu metode numerik. Jadi secara garis besar ilmu matematika, sistem persamaan diferensial biasa dapat diselesaikan dengan dua metode, yaitu metode analitik dan metode numerik. Menyelesaikan suatu sistem persamaan secara analitik dapat dimulai dengan menentukan nilai eigen dan vektor eigennya, atau menentukan matriks Jacobiannya terlebih dahulu apabila sistem persamaan dalam bentuk nonlinier. Metode numerik dilakukan sebagai langkah kedua jika diketahui suatu persamaan tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik, metode numerik juga biasa digunakan untuk mengamati suatu persamaan dari perubahan waktu ke waktu.

Salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan diferensial biasa adalah metode *Heun*. Metode *Heun* merupakan sebuah metode yang muncul karena adanya kelemahan pada metode Euler, yaitu galat (tingkat *error*) yang tinggi atau sebanding dengan nilai delitanya. Sehingga di dalam pengaplikasian metode *Heun*, metode Euler dijadikan sebagai solusi perkiraan awal (*predictor*), yang selanjutnya solusi perkiraan awal ini diperbaiki dengan metode *Heun* (*corrector*).

Metode numerik telah banyak digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan. Salah satu fenomena yang menarik untuk dikaji adalah fenomena dalam bidang ilmu fisiologi sel, yaitu komunikasi antar sel yang terjadi di dalam tubuh. Sel-sel di dalam tubuh saling memberi sinyal dan menerima respon untuk menyampaikan pesan yang datang dari dalam dan luar sel. Sehingga pesan dapat tersampaikan ke dalam sel dan mengaktifkan organ-organ sel untuk menjalankan tugas masing-masing. Fenomena ini erat kaitannya dengan firman Allah Swt. dalam kitab suci al-Quran surat al-Imran/3:112

ضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ الذَّلَّةُ أَيَّنَ مَا تُقْفُوا إِلَّا بِحَبْلٍ مِّنَ اللَّهِ وَحَبْلٍ مِّنَ النَّاسِ وَبَآؤُوا بِغَضَبٍ مِّنَ اللَّهِ
وَضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ الْمَسْكَنَةُ ذَلِكَ بِأَنَّهُمْ كَانُوا يَكْفُرُونَ بِآيَاتِ اللَّهِ وَيَقْتُلُونَ الْأَنْبِيَاءَ بِغَيْرِ حَقِّ ذَلِكَ
بِمَا عَصَوْا وَكَانُوا يَعْتَدُونَ - ١١٢ -

“Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka (berpegang) pada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia. Mereka mendapat murka dari Allah dan (selalu) diliputi kesengsaraan. Yang demikian itu karena mereka mengingkari ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi, tanpa hak (alasan yang benar). Yang demikian itu karena mereka durhaka dan melampaui batas.” (QS. Al-Imran/3:112).

Merujuk pada al-Quran surat al-Imran/3:112 tersebut, Allah Swt. telah memerintahkan kepada manusia untuk berpegang teguh pada perintah Allah Swt. dan memiliki hubungan yang baik dengan sesama manusia, dan jika demikian

Allah Swt. memberikan janji akan menghindarkan manusia dari suatu kehinaan. Sama halnya dengan sel-sel yang ada di dalam tubuh, jika mereka saling berinteraksi dengan baik, maka tujuan interaksi antar sel dalam tubuh akan tercapai. Sel-sel di dalam tubuh saling berbicara untuk menjalankan tugas masing-masing dan tunduk pada perintah Allah Swt.. Mereka berinteraksi untuk menyampaikan pesan dari eksternal maupun internal sel sehingga terjadilah proses-proses metabolisme dalam tubuh, dan organ-organ tubuh bekerja secara optimal.

Pada kasus yang terjadi dalam proses komunikasi sel, terdapat suatu keadaan di mana sel merespons sinyal yang masuk dengan cara meningkatkan konsentrasi kalsium yang kemudian direlai oleh jalur komunikasi sel sehingga terjadi pelepasan kalsium oleh *inositol trisphosphate*. *Inositol trisphosphate receptor* adalah kanal kalsium dalam sel yang terletak di retikulum endoplasma sel, yang memiliki peran penting dalam mengontrol konsentrasi kalsium dalam neurons. *Inositol trisphosphate receptor* merupakan suatu kanal kalsium tetramerik, yang terdiri dari empat sub-unit yang identik di mana masing-masing dari sub-unit memiliki empat situs pengikatan: satu untuk IP_3 , dua untuk aktivasi Ca^{2+} , dan satu untuk inaktivasi Ca^{2+} . Sneyd dan Dufour (2002) telah membangun model *inositol trisphosphate receptor* dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa yang bergantung waktu dengan melibatkan variabel-variabel; $R(t)$ adalah *receptor*, $O(t)$ adalah *open* (terbuka), $A(t)$ adalah *activation*, $I_1(t)$ adalah *inactivation*, $I_2(t)$ adalah *inactivation*, $S(t)$ adalah *shut*, dan tentunya didukung oleh parameter-parameter yang mendukung proses berlangsungnya siklus pada *inositol trisphosphate receptor*.

Penelitian tentang *inositol trisphosphate receptor* telah banyak dilakukan sebelumnya, di antaranya dilakukan oleh Sneyd dan Dufour (2002). Dalam artikelnya, mereka mencoba membangun model *inositol trisphosphate receptor* tipe-2 dan kemudian menyelesaikannya dengan menggunakan metode Euler. Pada penelitian-penelitian selanjutnya, para peneliti cenderung membandingkan model *inositol trisphosphate receptor* dari berbagai tipe, dan sebagian lagi mengolahnya dari sisi stokastik. Adapun penelitian mengenai solusi numerik menggunakan metode *Heun* dari model tersebut belum pernah dilakukan.

Penelitian terkait hal ini penting untuk terus dikembangkan terkait perannya dalam proses metabolisme dalam tubuh. Sehingga pada penelitian kali ini diselesaikan model *inositol trisphosphate receptor* tipe-2 beserta parameter-parameternya dengan menggunakan pendekatan metode numerik, dan menyajikannya dalam penelitian ini dengan judul “Solusi Numerik Model *Inositol Trisphosphate Receptor* Tipe-2 Menggunakan Metode *Heun*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis model matematika *inositol trisphosphate receptor*?
2. Bagaimana solusi model matematika *inositol trisphosphate receptor*?
3. Bagaimana tingkat akurasi metode *Heun* dalam menyelesaikan model matematika *inositol trisphosphate receptor*?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui analisis model matematika *inositol trisphosphate receptor*.
2. Untuk mengetahui solusi model matematika *inositol trisphosphate receptor*.
3. Untuk mengetahui keakuratan metode *Heun* dalam menyelesaikan model matematika *inositol trisphosphate receptor*.

1.4 Manfaat Penelitian

Dengan diadakannya penelitian ini diharapkan mampu menambah wawasan penulis terkait pengaplikasian keilmuan matematika dalam bidang imunologi dan biofisiologi, dan juga sebagai tambahan wawasan dan pengetahuan mengenai prosedur penyelesaian model matematika *inositol trisphosphate receptor* tipe-2 menggunakan metode *Heun*, serta dapat menemukan metode yang lebih mudah dan sederhana dalam menyelesaikan persamaan tersebut.

1.5 Batasan Masalah

Dengan melihat permasalahan yang telah dipaparkan di atas, dalam penelitian ini terdapat batasan-batasan masalah di antaranya:

1. Model matematika *inositol trisphosphate receptor* yang digunakan adalah

$$\frac{dR(t)}{dt} = \phi_{-2}O(t) - \phi_2pR(t) + (k_{-1} + l_{-2})I_1(t) - \phi_1R(t) \quad (1.1)$$

$$\frac{dO(t)}{dt} = \phi_2pR(t) - (\phi_{-2} + \phi_4 + \phi_3)O(t) + \phi_{-4}A(t) + k_{-3}S(t) \quad (1.2)$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = \phi_4O(t) - \phi_{-4}A(t) - \phi_5A(t) + (k_{-1} + l_{-2})I_2(t) \quad (1.3)$$

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = \phi_1 R(t) - (k_{-1} + l_{-2})I_1(t) \quad (1.4)$$

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = \phi_5 A(t) - (k_{-1} + l_{-2})I_2(t) \quad (1.5)$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = \phi_3 O(t) - k_{-3}S(t) \quad (1.6)$$

dengan

$$\phi_1(c) = \frac{(k_1 L_1 + l_2)c}{L_1 + c(1 + \frac{L_1}{L_3})}, \quad \phi_4(c) = \frac{(k_4 L_5 + l_6)c}{L_5 + c}, \quad \phi_3(c) = \frac{k_3 L_5}{L_5 + c},$$

$$\phi_2(c) = \frac{k_2 L_3 + l_4 c}{L_3 + c(1 + \frac{L_3}{L_1})}, \quad \phi_{-4}(c) = \frac{L_1(k_{-4} + l_{-6})}{L_1 + c},$$

$$\phi_{-2}(c) = \frac{k_{-2} + l_{-4}c}{1 + \frac{c}{L_5}}, \quad \phi_5(c) = \frac{(k_1 L_1 + l_2)c}{L_1 + c},$$

dengan pengontrol model $R(t) + O(t) + A(t) + S(t) + I_1(t) + I_2(t) = 1$.

2. Nilai $c = 500$ nM dan $p = 10$ μ M.
3. Metode numerik yang digunakan adalah metode *Heun* skema eksplisit.

1.6 Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah jenis penelitian kepustakaan (*library research*) atau studi literatur. Literatur utama yang digunakan adalah artikel yang berjudul *A Dynamic Model of The Type-2 Inositol Trisphosphate Receptor* oleh Sneyd dan Dufour (2002) dan beberapa literatur pendukung yang lain.

Teknik kajian yang digunakan dalam pembahasan ini adalah penelitian kepustakaan (*Library Research*). Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan penelitian ini adalah:

1. Melakukan diskritisasi pada model matematika *inositol trisphosphate receptor* tipe-2 dengan menggunakan metode *Heun* skema eksplisit.
2. Melakukan simulasi dari metode yang digunakan dengan alat bantu *software* Matlab 2013a dan Maple 18.
3. Menginterpretasi hasil simulasi.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika yang digunakan dalam skripsi ini di antaranya yaitu:

Bab I Pendahuluan

Dalam bab pendahuluan berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Dalam bab kajian pustaka ini berisi dasar-dasar teori yang dibutuhkan dalam penyelesaian masalah solusi numerik model matematika *inositol trisphosphate receptor* tipe-2, yang di antaranya yaitu: penurunan model matematika *inositol trisphosphate receptor* tipe-2, masalah nilai awal, deret Taylor, metode *Heun*, metode *Heun* untuk sistem, dan perspektif al-Quran tentang metode numerik.

Bab III Pembahasan

Dalam bab pembahasan ini berisi tentang langkah-langkah dalam penyelesaian solusi numerik model *inositol trisphosphate receptor* tipe-2, simulasi dan interpretasi hasil, serta kajian keagamaan.

Bab IV Penutup

Dalam bab ini terdiri atas kesimpulan serta saran-saran yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.

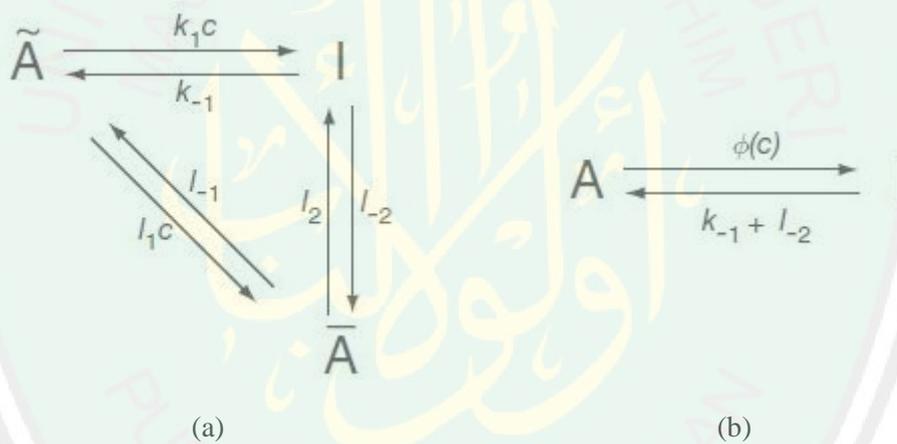


BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Penurunan Model Matematika *Inositol Trisphosphate Receptor*

Model matematika *inositol trisphosphate receptor* ini dipelajari dari proses terjadinya reaksi enzimatik dalam proses komunikasi sel. Persamaan Michaelis-Menten merupakan dasar bagi semua kinetik kerja enzim. Perhatikan gambar berikut, di mana *state* \bar{A} memainkan peranan yang sama dengan enzim *complex* dan \tilde{A} dianalogikan sebagai substrat.



Gambar 2.1 Skema Perpindahan dari A ke I

Dalam artikelnya, Sneyd dkk (2000) mengasumsikan bahwa Ca^{2+} memodulasi interkonversi antara \tilde{A} dan \bar{A} , dan interkonversi antara \tilde{A} dan \bar{A} adalah cepat dibandingkan dengan konversi \tilde{A} atau \bar{A} ke I. Sehingga diperoleh hubungan $c\bar{A} = L_1\tilde{A}$, dengan $L_1 = \frac{l_{-1}}{l_1}$, dan c dinotasikan sebagai $[Ca^{2+}]$. Maka, dengan memisalkan $A = \tilde{A} + \bar{A}$ dan menggunakan hukum aksi massa diperoleh

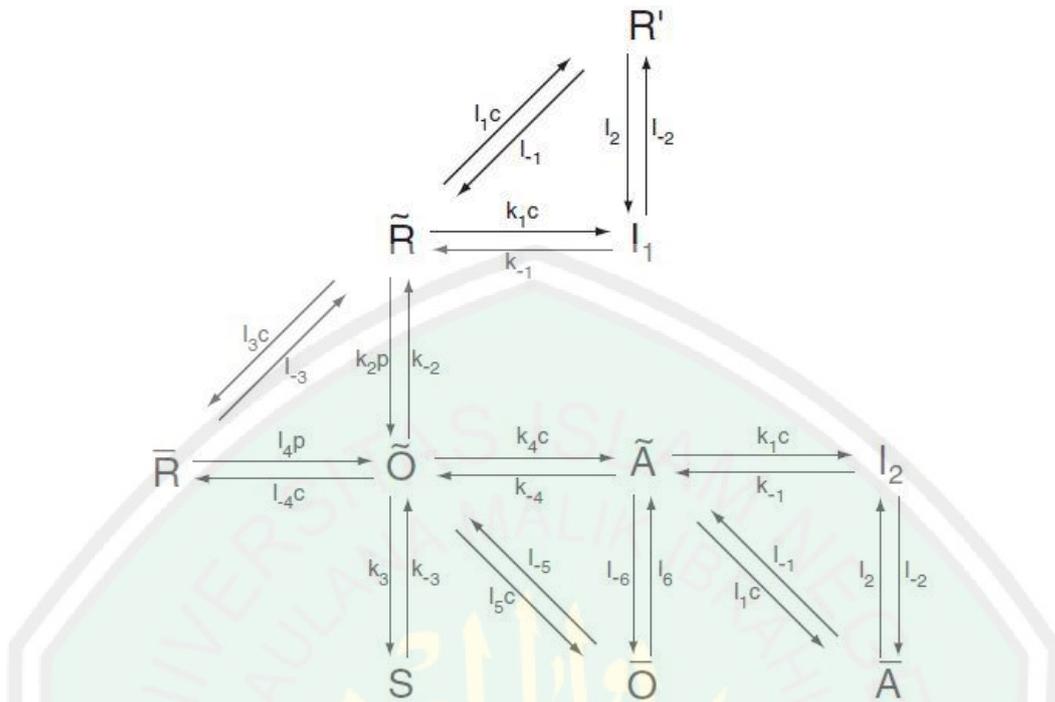
$$\frac{dA(t)}{dt} = k_{-1}I(t) + l_{-2}I(t) - (k_1c\tilde{A} + l_2\bar{A})$$

Kemudian dengan menggunakan $c\bar{A} = L_1\tilde{A}$ diperoleh

$$\frac{dA(t)}{dt} = (k_{-1} + l_{-2})I(t) - \phi(c)A(t)$$

dengan $\phi(c) = \frac{(k_1 l_1 + l_2)c}{(L_1 + c)}$ sehingga Gambar 2.1 (a) menjadi ekuivalen dengan Gambar 2.1 (b).

Manhas, dkk (2014) dalam artikelnya menyatakan: “Bahwa reseptor tersusun atas empat sub-unit yang identik dan masing-masing dari sub-unit memiliki empat situs pengikatan: satu untuk IP_3 , dua untuk *activation* Ca^{2+} , dan satu untuk *inactivation* Ca^{2+} ”. Sneyd dan Dufour (2002) telah membangun model *inositol trisphosphate receptor* dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa yang bergantung waktu dengan melibatkan variabel-variabel; $R(t)$ adalah *receptor*, $O(t)$ adalah *open*, $A(t)$ adalah *activation*, $I(t)$ adalah *inactivation*, $S(t)$ adalah *shut*. Pada kondisi awal, R tidak berikatan baik dengan Ca^{2+} ataupun dengan IP_3 . Apabila reseptor berikatan dengan Ca^{2+} maka reseptor menjadi inaktif, atau berada dalam kondisi I_1 , sebaliknya apabila reseptor berikatan dengan IP_3 maka reseptor menjadi terbuka, atau berada dalam kondisi O . Dalam kondisi ini reseptor siap berikatan dengan Ca^{2+} sehingga reseptor menjadi aktif, atau berada dalam kondisi A . Apabila reseptor tidak menemukan Ca^{2+} untuk diikat maka reseptor akan berikatan dengan IP_3 atau ion lain sehingga menempati tempatnya Ca^{2+} dan menyebabkan reseptor menjadi terhambat, atau berada dalam kondisi S . Dari kondisi A apabila reseptor berikatan dengan Ca^{2+} lagi, maka reseptor menjadi inaktif, atau berada dalam kondisi I_2 . Sneyd dan Flacke (2005) menambahkan bahwa pengikatan IP_3 dan Ca^{2+} oleh reseptor harus terjadi secara berurutan supaya reseptor menjadi aktif, atau berada dalam kondisi A . Secara lebih jelasnya perhatikan diagram skema berikut ini:



Gambar 2.2 Diagram Skema Model *Inositol Trisphosphate Receptor*

Dengan cara yang sama seperti pada Gambar 2.1, diasumsikan bahwa interkonversi antara \tilde{A} dan \bar{A} ($\tilde{A} \rightleftharpoons \bar{A}$) adalah cepat dibandingkan dengan konversi \tilde{A} atau \bar{A} ke I , dan secara sama untuk R ($\tilde{R} \rightleftharpoons \bar{R}$ dan $\tilde{R} \rightleftharpoons R'$) dan O ($\tilde{O} \rightleftharpoons \bar{O}$) (Sneyd dkk, 2000), sehingga diperoleh $c\tilde{R} = L_3\bar{R}$, $c\tilde{R} = L_1R'$, $c\tilde{O} = L_5\bar{O}$, dan $c\tilde{A} = L_1\bar{A}$, dengan $L_i = \frac{l_{-i}}{l_i}$ untuk $i = 1,3,5$ dan c dinotasikan sebagai $[Ca^{2+}]$. Maka dengan memisalkan $R = \tilde{R} + \bar{R} + R'$, $O = \tilde{O} + \bar{O}$, $A = \tilde{A} + \bar{A}$ dan menggunakan hukum aksi massa maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dR(t)}{dt} &= (k_{-2} + l_{-4}c)\tilde{O} - l_4p\bar{R} - k_2p\tilde{R} + (k_{-1} + l_{-2})I_1 - k_1c\tilde{R} - l_2R' \\ \frac{dO(t)}{dt} &= l_4p\bar{R} + k_2p\tilde{R} - (k_{-2} + l_{-4}c)\tilde{O} - k_4c\tilde{O} - k_3\tilde{O} - l_6\bar{O} + \\ &\quad (k_{-4} + l_{-6})\tilde{A} + k_{-3}S \\ \frac{dA(t)}{dt} &= (k_4c + k_3)\tilde{O} - (k_{-4} + l_{-6})\tilde{A} - k_1c\tilde{A} - l_2\bar{A} + (k_{-1} + l_{-2})I_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = k_1 c \tilde{R} + l_2 R' - (k_{-1} + l_{-2}) I_1$$

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = k_1 c \tilde{A} + l_2 \bar{A} - (k_{-1} + l_{-2}) I_2$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = k_3 \tilde{O} - k_{-3} S$$

Dengan p dinotasikan sebagai $[IP_3]$. Kemudian dengan menggunakan $c\tilde{R} = L_3\bar{R}$,

$c\tilde{R} = L_1R'$, $c\tilde{O} = L_5\bar{O}$, dan $c\tilde{A} = L_1\bar{A}$ diperoleh

$$\frac{dR(t)}{dt} = \phi_{-2}O(t) - \phi_2 pR(t) + (k_{-1} + l_{-2})I_1(t) - \phi_1 R(t)$$

$$\frac{dO(t)}{dt} = \phi_2 pR(t) - (\phi_{-2} + \phi_4 + \phi_3)O(t) + \phi_{-4}A(t) + k_{-3}S(t)$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = \phi_4 O(t) - \phi_{-4}A(t) - \phi_5 A(t) + (k_{-1} + l_{-2})I_2(t)$$

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = \phi_1 R(t) - (k_{-1} + l_{-2})I_1(t)$$

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = \phi_5 A(t) - (k_{-1} + l_{-2})I_2(t)$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = \phi_3 O(t) - k_{-3}S(t)$$

(2.2)

Dengan

$$\phi_1(c) = \frac{(k_1 L_1 + l_2)c}{L_1 + c(1 + \frac{L_1}{L_3})}, \quad \phi_4(c) = \frac{(k_4 L_5 + l_6)c}{L_5 + c}, \quad \phi_3(c) = \frac{k_3 L_5}{L_5 + c},$$

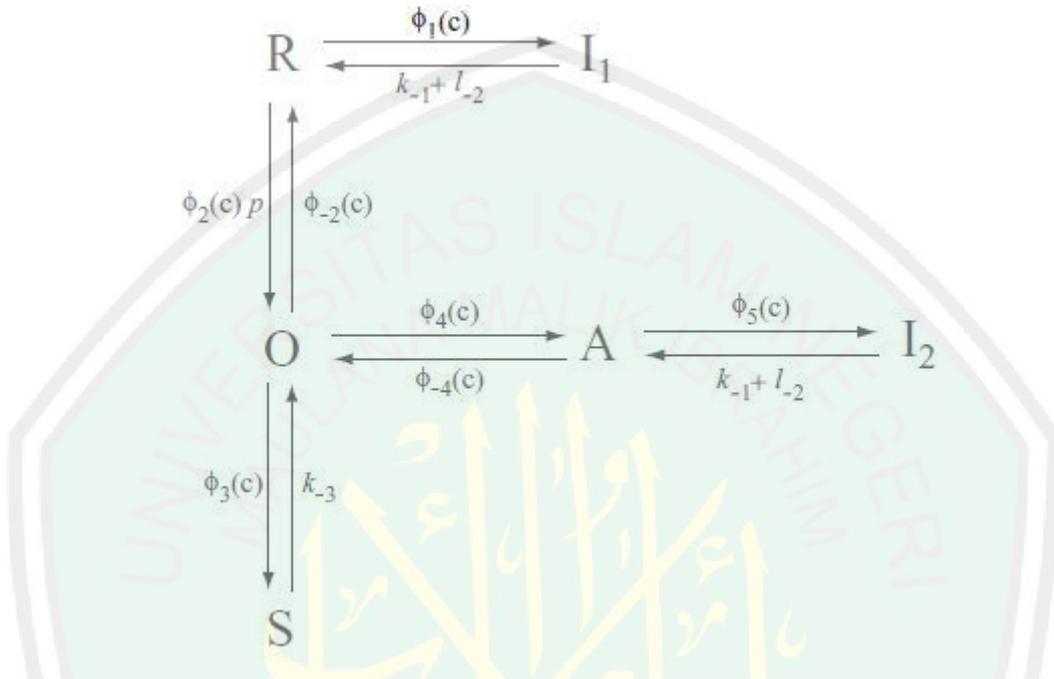
$$\phi_2(c) = \frac{k_2 L_3 + l_4 c}{L_3 + c(1 + \frac{L_3}{L_1})}, \quad \phi_{-4}(c) = \frac{L_1(k_{-4} + l_{-6})}{L_{-1} + c},$$

$$\phi_{-2}(c) = \frac{k_{-2} + l_{-4}c}{1 + \frac{c}{L_5}}, \quad \phi_5(c) = \frac{(k_1 L_1 + l_2)c}{L_1 + c},$$

dan

$$R(t) + O(t) + A(t) + S(t) + I_1(t) + I_2(t) = 1$$

Sistem persamaan (2.2) adalah model untuk perpindahan *inositol trisphosphate receptor* tipe-2 yang ekuivalen dengan Gambar 2.2 yang juga ekuivalen dengan gambar berikut ini,



Gambar 2.3 Diagram Skema Model *Inositol Trisphosphate Receptor* yang Disederhanakan

2.2 Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Persamaan diferensial biasa dapat diklasifikasikan berdasarkan pangkat/orde (*order*), linieritas, dan kondisi batas (*boundary condition*). Berdasarkan linieritasnya, persamaan diferensial biasa dapat dikelompokkan menjadi persamaan linier dan nonlinier. Contoh berikut merupakan persamaan diferensial biasa linier dan nonlinier.

$$\text{PDB linier :} \quad \frac{dy}{dx} + y = kx \quad (2.3)$$

$$\text{PDB nonlinier :} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y \frac{dy}{dx} = kx \quad (2.4)$$

Secara umum, bentuk persamaan diferensial biasa linier adalah sebagai berikut:

$$b_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + b_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + b_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + b_n(x)y = R(x) \quad (2.5)$$

Apabila nilai $R(x) = 0$, persamaan (2.5) disebut persamaan diferensial biasa linier homogen, sebaliknya bila $R(x) \neq 0$, disebut takhomogen atau heterogen (Sasongko, 2010).

2.3 Sistem Persamaan Diferensial Biasa

Sistem persamaan diferensial biasa muncul secara alamiah dalam masalah yang melibatkan beberapa variabel tak bebas (misalnya: x_1, x_2, \dots, x_n), yang mana masing-masing darinya merupakan sebuah fungsi dari satu variabel bebas (misalnya t). Dalam proses penyempurnaan model, seringkali terdapat lebih dari satu variabel tak bebas yang bergantung pada satu variabel bebas agar mendapatkan deskripsi yang memadai dari suatu perilaku yang sedang dipelajari (Kartono, 2012).

Perhatikan persamaan-persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Neuhauser (1962) menuturkan bahwa himpunan persamaan di atas merupakan bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa. Dengan sisi kirinya merupakan suatu turunan dari $x_i(t)$ terhadap t , dan di sisi kanan adalah masing-masing fungsi g_i , yang bergantung pada variabel-variabel x_1, x_2, \dots, x_n dan pada t . Fungsi g_i merupakan fungsi homogen, jika parameter a_{ij} untuk setiap $1 \leq i$ dan $j \leq n$ adalah konstan dan

$$g_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$$

dapat dituliskan dalam bentuk matriks,

$$\frac{dx}{dt} = Bx(t) \quad (2.7)$$

dengan

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan solusi dari persamaan (2.7), langkah awal yang harus dilakukan adalah menemukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks B . Nilai eigen r_1, r_2, \dots, r_n adalah akar-akar dari persamaan polinomial derajat ke- n

$$\det(B - rI) = 0 \quad (2.8)$$

Untuk masing-masing nilai eigen r terdapat bilangan-bilangan ξ yang memenuhi:

$$B\xi = r\xi \text{ atau } (B - rI)\xi = 0 \quad (2.9)$$

Perilaku nilai eigen dan vektor eigen yang berkaitan menentukan perilaku dari solusi umum sistem (2.7). Jika diasumsikan B adalah matriks yang berisi bilangan-bilangan real, maka terdapat beberapa kemungkinan untuk nilai eigen dari matriks B sebagai berikut:

- Semua nilai eigen adalah bilangan real dan berbeda satu dengan yang lainnya.
- Terdapat beberapa nilai eigen yang berbentuk sepasang bilangan kompleks dan *conjugat*nya.
- Beberapa nilai eigen adalah bilangan real atau bilangan kompleks, atau kembar.

Jika keseluruhan n nilai eigen adalah real dan berbeda, maka yang berhubungan dengan masing-masing nilai eigen r_i adalah vektor eigen ξ_i yang

real, dan n vektor eigen $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}$ independen secara linier. Solusi yang bersesuaian dengan sistem persamaan (2.7) adalah:

$$x^{(1)}(t) = \xi^{(1)}e^{r_1 t}, \dots, x^{(n)}(t) = \xi^{(n)}e^{r_n t}$$

selanjutnya, akan ditentukan Wronskian dari solusi tersebut untuk menunjukkan bahwa solusi tersebut membentuk himpunan dasar sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}](t) &= \begin{bmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_1^{(n)} e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_n^{(n)} e^{r_n t} \end{bmatrix} \\ &= e^{(r_1 + \dots + r_n)t} \begin{bmatrix} \xi_1^{(1)} & \dots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \dots & \xi_n^{(n)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pertama, seperti diketahui bersama bahwa fungsi eksponen tidak pernah bernilai nol. Selanjutnya, karena vektor eigen $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ independen secara linier, maka determinan dari suku terakhir persamaan di atas adalah bukan nol. Sebagai konsekuensi, Wronskian $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}](t)$ tidak pernah nol; dengan demikian $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ membentuk himpunan solusi dasar. Maka, solusi umum untuk persamaan (2.7) adalah

$$x = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{r_n t} \quad (2.10)$$

2.4 Masalah Nilai Awal

Masalah nilai awal merupakan masalah penyelesaian suatu persamaan diferensial dengan syarat awal yang telah diketahui. Misal diberikan persamaan diferensial orde satu yaitu:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Penyelesaian persamaan di atas adalah $y = Ce^x$. Penyelesaian tersebut memberikan banyak kemungkinan untuk berbagai nilai koefisien C . Penyelesaian tunggal dapat diperoleh jika terdapat nilai x tertentu untuk fungsi $y(x)$ (Triatmodjo, 2002).

Masalah nilai awal pada persamaan diferensial biasa dapat dituliskan dalam bentuk,

$$y'(t) = f(y, t); y(0) = y_0 \quad (2.11)$$

dengan $f(y, t)$ fungsi terhadap y dan t , dan y_0 adalah keadaan awal. Pada persamaan (2.11) turunan pertama terhadap y diberikan sebagai fungsi y yang tidak diketahui dengan melakukan integrasi $f'(y, t)$.

Banyak contoh untuk masalah nilai awal persamaan diferensial biasa, antara lain:

- a. $y'(t) = 3y + 5; y(0) = 1$
- b. $y'(t) = ty + 1; y(0) = 0$
- c. $y' = z, z' = -y, y(0) = 1, z(0) = 0$ (Munir, 2008)

2.5 Deret Taylor

Munir (2008) mengatakan jika dimisalkan $f(x)$ dan semua turunannya ($f(x)'$, $f(x)''$, $f(x)'''$, ...) kontinu di dalam selang $[a, b]$. Misalkan $x_0 \in [a, b]$, maka untuk nilai-nilai x di sekitar x_0 dan $x \in [a, b]$, $f(x)$ dapat diperluas (diekspansi) ke dalam deret Taylor sebagaimana berikut:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1}-x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \dots + \frac{(x_{i+1}-x_i)^m}{m!} f^m(x_i) \quad (2.12)$$

Munir (2008) menyatakan bahwa persamaan (2.12) merupakan penjumlahan dari suku-suku (*term*) yang disebut deret. Jika dimisalkan $(x - x_0) = h$, maka persamaan (2.12) dapat juga ditulis sebagai:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{h}{1!}f'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \dots + \frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x_i) + R_m \quad (2.13)$$

dengan:

$f(x)$: fungsi di titik x_i

$f(x_{i+1})$: fungsi di titik x_{i+1}

$f', f'', \dots, f^{(m)}$: turunan pertama, kedua, . . . , ke- m dari fungsi

h : langkah ruang, yaitu jarak antara x_i dan x_{i+1}

R_m : kesalahan pemotongan

! : operator faktorial

Pada persamaan (2.13) kesalahan pemotongan R_m diberikan oleh bentuk berikut ini

$$R_m = f^{(n+1)}(x_i) \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} + f^{(n+2)}(x_i) \frac{\Delta x^{n+2}}{(n+1)!} + \dots \quad (2.14)$$

Persamaan (2.13) yang mempunyai suku sebanyak tak hingga akan memberikan perkiraan nilai suatu fungsi sesuai dengan penyelesaian eksaknya. Dalam praktik sulit memperhitungkan semua suku tersebut dan biasanya hanya diperhitungkan beberapa suku pertama saja (Triatmodjo, 2002), yaitu sebagai berikut:

a. Memperhitungkan satu suku pertama (*order nol*)

Apabila hanya diperhitungkan satu suku pertama dari ruas kanan, maka persamaan (2.13) dapat ditulis dalam bentuk

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) \quad (2.15)$$

pada persamaan (2.15) yang disebut sebagai perkiraan *order nol*, nilai f pada titik x_{i+1} sama dengan nilai pada x_i . Perkiraan tersebut adalah benar jika fungsi yang diperkirakan adalah suatu konstan. Jika fungsi tidak konstan, maka harus diperhitungkan suku-suku berikutnya dari deret Taylor.

b. Memperhitungkan dua suku pertama (*order satu*)

Bentuk deret Taylor *order satu*, yang memperhitungkan dua suku pertama, yaitu:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} \quad (2.16)$$

yang merupakan bentuk persamaan garis lurus (linier).

c. Memperhitungkan tiga suku pertama (*order dua*)

Deret Taylor yang memperhitungkan tiga suku pertama dari ruas kanan yaitu:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + f''(x_i) \frac{\Delta x}{2!} \quad (2.17)$$

2.6 Metode *Heun*

Metode prediktor-korektor (*predictor-corrector*) adalah satu himpunan dua persamaan untuk y_{n+1} . Persamaan pertama, yang disebut prediktor, digunakan untuk memprediksi (memperoleh aproksimasi pertama untuk) y_{n+1} ; persamaan kedua, yang disebut korektor, kemudian digunakan untuk memperoleh nilai hasil koreksi (aproksimasi kedua untuk) y_{n+1} . Secara umum, korektor bergantung pada nilai yang diprediksi (Bronson dan Costa, 2008).

Pada metode *Heun*, solusi dari metode Euler dijadikan sebagai solusi perkiraan awal (*predictor*). Selanjutnya solusi perkiraan awal ini diperbaiki dengan menggunakan metode *Heun* (*corrector*). Penyelesaian persamaan

diferensial dengan menggunakan metode *Heun* merupakan suatu proses mencari nilai fungsi y pada titik t tertentu dari persamaan diferensial biasa $f(t, y)$ (Munif dan Hidayatullah, 2003). Diberikan suatu persamaan diferensial orde satu yang mempunyai syarat awal $y(t_0) = y_0$,

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (2.18)$$

Persamaan (2.18) diintegrasikan pada kedua sisinya dengan batasan dari t_i sampai t_{i+1} dengan $h = t_{i+1} - t_i$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t) dt &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \\ y(t) \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \\ y(t_{i+1}) - y(t_i) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \\ y_{i+1} - y_i &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \\ y_{i+1} &= y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \end{aligned} \quad (2.19)$$

Selanjutnya, integral ruas kanan dapat didekati menggunakan kaidah trapesium, yaitu:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt &= \frac{[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})]}{2} (t_{i+1} - t_i) \\ &= \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Persamaan (2.19) disubstitusikan ke persamaan (2.20) sehingga diperoleh suatu formula yang dinamakan metode *Heun*:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})] \quad (2.21)$$

dengan:

i : 0, 1, 2, ..., n

y_{i+1} : hampiran sekarang

y_i : hampiran sebelumnya

h : ukuran langkah

Pada persamaan (2.21) suku ruas kanan mengandung y_{i+1} . Nilai dari y_{i+1} ini merupakan solusi perkiraan awal (*predictor*) yang dihitung dengan metode Euler, sehingga persamaan *Heun* pada persamaan (2.21) dapat ditulis kembali menjadi:

$$\begin{aligned} \text{Prediktor: } y_{i+1}^{(0)} &= y_i + hf(t_i, y_i) \\ \text{Korektor: } y_{i+1}^{(1)} &= y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1}^{(0)})] \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.7 Metode *Heun* untuk Sistem

Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu dengan dua variabel tak bebas:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x, y) \quad (2.23)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(t, x, y)$$

Dengan $h = t_{i+1} - t_i$, maka menurut Oktaviani, dkk (2014) algoritma metode *Heun* yang sesuai dengan persamaan (2.22) untuk persamaan (2.23) adalah:

$$\begin{aligned} \text{Prediktor: } x_{i+1}^{(0)} &= x_i + hf(t_i, x_i, y_i) \\ y_{i+1}^{(0)} &= y_i + hg(t_i, x_i, y_i) \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$x_{i+1}^{(1)} = x_i + \frac{h}{2} [f(t_i, x_i, y_i) + f(t_{i+1}, x_{i+1}^{(0)}, y_{i+1}^{(0)})] \quad (2.25)$$

Korektor:

$$y_{i+1}^{(1)} = y_i + \frac{h}{2} [g(t_i, x_i, y_i) + g(t_{i+1}, x_{i+1}^{(0)}, y_{i+1}^{(0)})]$$

2.8 Galat untuk Metode Heun

Selesaian numerik memberikan hasil dengan perkiraan atau pendekatan dari selesaian analitis atau eksak sehingga terdapat kesalahan (galat) terhadap nilai eksaknya. Galat adalah perbedaan antara nilai eksak dengan nilai hampiran, dapat ditulis:

$$\epsilon = z(t_i) - y_i \quad (2.26)$$

dengan:

$z(t_i)$: nilai eksak

y_i : nilai hampiran dari persamaan $z(t_i)$

ϵ : galat terhadap nilai eksak (Munir, 2008)

Besarnya suatu galat dapat dinyatakan dalam bentuk galat relatif yaitu dengan membandingkan kesalahan yang terjadi dengan nilai eksak.

$$\epsilon_R = \frac{\epsilon}{z(t_i)} \quad (2.27)$$

atau dalam bentuk persentase

$$\epsilon_R = \frac{\epsilon}{z(t_i)} \times 100\% \quad (2.28)$$

dengan ϵ_R adalah kesalahan relatif terhadap nilai eksak.

Dalam metode numerik, nilai eksak biasanya tidak diketahui, oleh karena itu galat dapat juga dinyatakan berdasarkan solusi hampirannya, sehingga galat relatifnya dinamakan galat relatif hampiran:

$$\epsilon_{RH} = \frac{\epsilon}{y_i} \quad (2.29)$$

Pada perhitungan numerik sering dilakukan pendekatan secara iterasi, dengan kesalahan numeriknya ialah:

$$\epsilon_{RH} = \frac{y_n^{(r+1)} - y_n^{(r)}}{y_n^{(r+1)}} \quad (2.30)$$

dengan

$y_n^{(r)}$: nilai hampiran pada iterasi ke- r

$y_n^{(r+1)}$: nilai hampiran pada iterasi ke- $r + 1$ (Sasongko, 2010)

Proses iterasi dihentikan apabila $|\epsilon_{RH}| < \epsilon_s$, ϵ_s adalah nilai galat yang diinginkan.

Nilai dari ϵ_s menentukan ketelitian suatu masalah, semakin kecil nilai ϵ_s maka semakin teliti solusinya, sehingga semakin banyak proses iterasinya.

2.9 Perspektif Al-Quran tentang Metode Numerik

Segala apapun bentuk masalahnya, selalu ada cara untuk menghadapinya.

Hal ini telah banyak ditegaskan oleh Allah Swt. dalam ayat-ayat al-Quran, salah satu di antaranya adalah dalam al-Quran surat al-Insyirah/94: 5-6

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا - ٥- إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا - ٦

“Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan, sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan.” (QS. Al-Insyirah/94:5-6)

Dalam tafsirnya Ibnu Katsir (2005) menyampaikan bahwa: “Allah Swt. memberitahukan bahwa bersama kesulitan itu terdapat kemudahan. Kemudian Dia mempertegas berita tersebut. Ibnu Jarir meriwayatkan dari Al-Hasan, dia berkata: “Nabi Muhammad Saw. pernah keluar rumah pada suatu hari dalam keadaan senang dan gembira, dan beliau juga dalam keadaan tertawa seraya bersabda:

لَنْ يَغْلِبَ عُسْرٌ يُسْرَيْنِ، لَنْ يَغْلِبَ عُسْرٌ يُسْرَيْنِ، فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا، إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

“Satu kesulitan itu tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan, satu kesulitan itu tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan, karena bersama

kesulitan itu pasti terdapat kemudahan, sesungguhnya bersama kesulitan itu terdapat kemudahan.””

Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa kesulitan itu dapat diketahui pada dua keadaan, yang mana kalimatnya dalam bentuk *mufrad* (tunggal). Sedangkan kemudahan (*al-yusr*) dalam bentuk *nakirah* (tidak ada ketentuannya) sehingga bilangannya bertambah banyak. Oleh karena itu, beliau bersabda, “Satu kesulitan itu tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan” (Katsir, 2005).

Berdasarkan pada pemaparan Ibnu Katsir tersebut, kemudian dalam pengaplikasian kehidupan saat ini, khususnya dalam bidang matematika, ada berbagai macam persoalan dalam matematika, namun keseluruhannya memiliki jalan yang lebih beraneka ragam untuk mendapatkan solusinya. Salah satu di antara sekian banyak metode yang mungkin untuk digunakan adalah metode numerik. Munir (2008) menyebutkan bahwa secara umum suatu persamaan terdapat dua solusi yaitu solusi analitik atau disebut solusi sesungguhnya dan solusi numerik yang disebut sebagai solusi hampiran.

Metode numerik adalah hasil dari jerih payah para ilmuwan matematika yang mencoba mencari metode yang dapat menyelesaikan suatu masalah yang tidak dapat diselesaikan secara analitik. Metode numerik adalah metode yang menggunakan nilai hampiran untuk mendekati solusi yang sebenarnya. Namun perhitungan dengan metode numerik secara manual memerlukan waktu yang lama dan berulang-ulang sehingga dibutuhkan ketelitian agar tidak terdapat kesalahan. Hal ini sejalan dengan firman Allah Swt. dalam al-Quran surat al-A’la/87:3 yang berbunyi:

وَالَّذِي قَدَّرَ فَهَدَىٰ - ٣

“Yang menentukan kadar (masing-masing) dan memberi petunjuk.”

(QS. Al-A'la/87:3)

Shihab (1996) menanggapi ayat tersebut bahwa segala sesuatu di alam ini memiliki ciri dan hukum-hukumnya. Matahari dan bulan yang beredar dan memancarkan sinar, hingga rumput yang hijau subur atau layu dan kering, dan semuanya telah ditetapkan oleh Allah Swt. sesuai ukuran dan hukum-hukumnya. Dalam ayat yang lain surat Maryam/19:94

لَقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا - ٩٤

“Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti” (QS. Maryam/19:94).

Menurut Shihab (2002) dari ayat di atas dapat diketahui bahwa Allah yang dilukiskan sebagai *ahshaahum* atau dalam istilah hadits *Asma' al-Husna* adalah *Al-muhshi* dipahami oleh banyak ulama sebagai Dia yang mengetahui kadar setiap peristiwa, baik yang dapat dijangkau oleh manusia maupun yang tidak, seperti hembusan nafas, dan rincian perolehan rizki. Allah Swt. adalah Dia yang mengetahui dengan amat teliti rincian segala sesuatu dari segi jumlah dan kadarnya, panjang dan lebarnya, jauh dan dekatnya, tempat dan waktunya, dan lain sebagainya.

Dalam perhitungan solusi numerik, terdapat satu tahap yang tidak dilakukan dalam pencarian solusi analitik, yakni analisis galat. Galat merupakan tingkat kesalahan perhitungan terhadap solusi analitik. Analisis galat dilakukan sebagai sebuah usaha untuk mendapatkan solusi yang paling mendekati dengan solusi analitiknya. Semakin kecil nilai galat maka solusi numeriknya semakin shahih. Hal ini merunut pada firman Allah Swt. dalam al-Quran surat al-Zalzalah/99:7-8

فَمَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَرَهُ -۷- وَمَنْ يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ شَرًّا يَرَهُ -۸-

“Maka barang siapa mengerjakan kebaikan seberat dzarah, niscaya dia akan melihat (balasan)nya. Dan barang siapa mengerjakan kejahatan seberat dzarah, niscaya dia akan melihat (balasan)nya.” (QS. Al-Zalzalah/99:7-8)

Ayat tersebut memberikan penegasan bahwasanya sekecil apapun kebaikan yang dikerjakan oleh seorang hamba akan mendapatkan balasan, dan sekecil apapun tindakan buruk yang dikerjakan oleh seorang hamba akan mendapatkan balasan pula. Allah Swt. sangat menghargai segala macam bentuk usaha hamba-Nya untuk memperbaiki diri serta mendekatkan diri kepada-Nya.



BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Model Matematika *Inositol Trisphosphate Receptor*

Sneyd dan Dufour (2002) dalam artikelnya merumuskan model matematika *inositol trisphosphate receptor* tipe-2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dR(t)}{dt} &= \phi_{-2}O(t) - \phi_2pR(t) + (k_{-1} + l_{-2})I_1(t) - \phi_1R(t) \\
 \frac{dO(t)}{dt} &= \phi_2pR(t) - (\phi_{-2} + \phi_4 + \phi_3)O(t) + \phi_{-4}A(t) + k_{-3}S(t) \\
 \frac{dA(t)}{dt} &= \phi_4O(t) - \phi_{-4}A(t) - \phi_5A(t) + (k_{-1} + l_{-2})I_2(t) \\
 \frac{dI_1(t)}{dt} &= \phi_1R(t) - (k_{-1} + l_{-2})I_1(t) \\
 \frac{dI_2(t)}{dt} &= \phi_5A(t) - (k_{-1} + l_{-2})I_2(t) \\
 \frac{dS(t)}{dt} &= \phi_3O(t) - k_{-3}S(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Misalkan:

$$\begin{aligned}
 f_1(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) &= \phi_{-2}O_i - \phi_2pR_i + (k_{-1} + l_{-2})I_{1i} - \phi_1R_i \\
 f_2(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) &= \phi_2pR_i - (\phi_{-2} + \phi_4 + \phi_3)O_i + \phi_{-4}A_i + k_{-3}S_i \\
 f_3(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) &= \phi_4O_i - \phi_{-4}A_i - \phi_5A_i + (k_{-1} + l_{-2})I_{2i} \\
 f_4(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) &= \phi_1R_i - (k_{-1} + l_{-2})I_{1i} \\
 f_5(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) &= \phi_5A_i - (k_{-1} + l_{-2})I_{2i} \\
 f_6(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) &= \phi_3O_i - k_{-3}S_i
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Dengan demikian persamaan (3.1) dapat juga dituliskan dalam bentuk seperti pada persamaan (2.6) sebagai berikut ini:

$$\begin{aligned}
\frac{dR(t)}{dt} &= f_1(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) \\
\frac{dO(t)}{dt} &= f_2(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) \\
\frac{dA(t)}{dt} &= f_3(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) \\
\frac{dI_1(t)}{dt} &= f_4(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) \\
\frac{dI_2(t)}{dt} &= f_5(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) \\
\frac{dS(t)}{dt} &= f_6(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Adapun variabel-variabel yang digunakan dalam model *inositol trisphosphate receptor tipe-2* adalah:

$R(t)$: adalah peluang banyaknya reseptor terhadap waktu

$O(t)$: adalah peluang banyaknya reseptor yang terbuka terhadap waktu

$A(t)$: adalah peluang banyaknya reseptor yang aktif terhadap waktu

$I_1(t)$: adalah peluang banyaknya reseptor yang tidak aktif karena tidak adanya IP_3 terhadap waktu

$I_2(t)$: adalah peluang banyaknya reseptor aktif yang dinonaktifkan oleh Ca^{2+} terhadap waktu

$S(t)$: adalah peluang banyaknya reseptor yang terbuka yang terhambat karena tidak berikatan dengan Ca^{2+} terhadap waktu

Dengan koefisien c dan p berturut-turut adalah $[Ca^{2+}]$ kalsium dan $[IP_3]$ *inositol trisphosphate*, sedangkan koefisien-koefisien yang berbentuk ϕ_j untuk setiap $j = \{-4, -2, 1, 2, 3, 4, 5\}$ merupakan suatu fungsi terhadap $Ca^{2+}(c)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\phi_1(c) &= \frac{(k_1L_1 + l_2)c}{L_1 + c(1 + \frac{L_1}{L_3})}, & \phi_4(c) &= \frac{(k_4L_5 + l_6)c}{L_5 + c}, & \phi_3(c) &= \frac{k_3L_5}{L_5 + c}, \\ \phi_2(c) &= \frac{k_2L_3 + l_4c}{L_3 + c(1 + \frac{L_3}{L_1})}, & \phi_{-4}(c) &= \frac{L_1(k_{-4} + l_{-6})}{L_1 + c}, \\ \phi_{-2}(c) &= \frac{k_{-2} + l_{-4}c}{1 + \frac{c}{L_5}}, & \phi_5(c) &= \frac{(k_1L_1 + l_2)c}{L_1 + c},\end{aligned}$$

dengan

$\phi_1(c)$: adalah laju pengikatan Ca^{2+} oleh reseptor

$\phi_2(c)$: adalah laju pengikatan IP_3 oleh reseptor

$\phi_{-2}(c)$: adalah laju pelepasan IP_3 dari *inositol trisphosphate receptor*

$\phi_3(c)$: adalah laju pengikatan IP_3 oleh reseptor

$\phi_4(c)$: adalah laju pengikatan Ca^{2+} oleh reseptor

$\phi_{-4}(c)$: adalah laju pelepasan Ca^{2+} oleh reseptor

$\phi_5(c)$: adalah laju pengikatan Ca^{2+} oleh reseptor

Fungsi-fungsi tersebut dibangun oleh parameter-parameter yang berguna dalam model sebagai berikut:

Tabel 3.1 Nilai Parameter-parameter yang Digunakan dalam Model *Inositol Trisphosphate Receptor* (Sneyd and Dufour, 2002)

Simbol	Nilai	Keterangan
k_1	$0,64s^{-1}(\mu M)^{-1}$	Laju pengikatan Ca^{2+}
k_2	$37,4s^{-1}(\mu M)^{-1}$	Laju pengikatan IP_3
k_3	$0,11s^{-1}(\mu M)^{-1}$	Laju pengikatan IP_3
k_4	$4s^{-1}(\mu M)^{-1}$	Laju pengikatan Ca^{2+}
L_1	$4 \mu M$	Laju pelepasan Ca^{2+} saat transisi sedang berlangsung
L_3	$0,025 \mu M$	Laju pelepasan Ca^{2+} saat transisi sedang berlangsung
L_5	$54,7 \mu M$	Laju pelepasan Ca^{2+} saat transisi sedang berlangsung
k_{-1}	$0,04 s^{-1}$	Laju perpindahan dari I_1 ke \tilde{R} dan dari I_2 ke \tilde{A}
k_{-2}	$1,4 s^{-1}$	Laju perpindahan dari \tilde{O} ke \tilde{R}
k_{-3}	$29,8 s^{-1}$	Laju perpindahan dari S ke \tilde{O}
k_{-4}	$0,54 s^{-1}$	Laju perpindahan dari \tilde{A} ke \tilde{O}

Tabel 3.1 Lanjutan

Simbol	Nilai	Keterangan
l_2	$1,7 s^{-1}$	Laju perpindahan dari R' ke I_1 dan dari \bar{A} ke I_2
l_4	$1,7s^{-1}(\mu M)^{-1}$	Laju pengikatan IP_3
l_6	$4707 s^{-1}$	Laju perpindahan dari \bar{O} ke \bar{A}
l_{-2}	$0,8 s^{-1}$	Laju perpindahan dari I_2 ke \bar{A} dan dari I_1 ke R'
l_{-4}	$2,5s^{-1}(\mu M)^{-1}$	Laju penurunan Ca^{2+}
l_{-6}	$11,4 s^{-1}$	Laju perpindahan dari \bar{A} ke \bar{O}

3.2 Solusi Model Matematika *Inositol Trisphosphate Receptor*

Dalam subbab ini penulis akan menyelesaikan model matematika *inositol trisphosphate receptor* dengan metode numerik, lebih tepatnya metode *Heun* skema eksplisit.

3.2.1 Formulasi Metode *Heun* pada Model Matematika *Inositol Trisphosphate Receptor*

Sebelum menyelesaikan sistem persamaan diferensial biasa dengan metode numerik, satu langkah awal yang penting yaitu diskritisasi dari sistem persamaannya. Setelah mengubah sistem persamaan ke dalam bentuk diskrit maka baru dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik. Pada subbab ini model pada persamaan (3.1) akan dibawa ke dalam bentuk diskrit dari formulasi *Heun* untuk sistem pada persamaan (2.23) dalam kajian pustaka. Dengan cara mengintegrasikan kedua ruas dari masing-masing persamaan dan menyelesaikan ruas kanannya dengan metode trapesium, maka untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$ diperoleh prediktor untuk sistem persamaan (3.1) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 R_{i+1}^{(0)} &= R_i + hf_1(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) \\
 O_{i+1}^{(0)} &= O_i + hf_2(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) \\
 A_{i+1}^{(0)} &= A_i + hf_3(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) \\
 I_{1i+1}^{(0)} &= I_{1i} + hf_4(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i)
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

$$I_{2i+1}^{(0)} = I_{2i} + hf_5(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i)$$

$$S_{i+1}^{(0)} = S_i + hf_6(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i)$$

dan korektor untuk sistem persamaan (3.1) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 R_{i+1}^{(1)} &= R_i + \frac{h}{2} [f_1(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) + \\
 &\quad f_1(t_{i+1}^{(0)}, R_{i+1}^{(0)}, O_{i+1}^{(0)}, A_{i+1}^{(0)}, I_{1i+1}^{(0)}, I_{2i+1}^{(0)}, S_{i+1}^{(0)})] \\
 O_{i+1}^{(1)} &= O_i + \frac{h}{2} [f_2(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) + \\
 &\quad f_2(t_{i+1}^{(0)}, R_{i+1}^{(0)}, O_{i+1}^{(0)}, A_{i+1}^{(0)}, I_{1i+1}^{(0)}, I_{2i+1}^{(0)}, S_{i+1}^{(0)})] \\
 A_{i+1}^{(1)} &= A_i + \frac{h}{2} [f_3(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) + \\
 &\quad f_3(t_{i+1}^{(0)}, R_{i+1}^{(0)}, O_{i+1}^{(0)}, A_{i+1}^{(0)}, I_{1i+1}^{(0)}, I_{2i+1}^{(0)}, S_{i+1}^{(0)})] \\
 I_{1i+1}^{(1)} &= I_{1i} + \frac{h}{2} [f_4(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) + \\
 &\quad f_4(t_{i+1}^{(0)}, R_{i+1}^{(0)}, O_{i+1}^{(0)}, A_{i+1}^{(0)}, I_{1i+1}^{(0)}, I_{2i+1}^{(0)}, S_{i+1}^{(0)})] \\
 I_{2i+1}^{(1)} &= I_{2i} + \frac{h}{2} [f_5(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) + \\
 &\quad f_5(t_{i+1}^{(0)}, R_{i+1}^{(0)}, O_{i+1}^{(0)}, A_{i+1}^{(0)}, I_{1i+1}^{(0)}, I_{2i+1}^{(0)}, S_{i+1}^{(0)})] \\
 S_{i+1}^{(1)} &= S_i + \frac{h}{2} [f_6(t_i, R_i, O_i, A_i, I_{1i}, I_{2i}, S_i) + \\
 &\quad f_6(t_{i+1}^{(0)}, R_{i+1}^{(0)}, O_{i+1}^{(0)}, A_{i+1}^{(0)}, I_{1i+1}^{(0)}, I_{2i+1}^{(0)}, S_{i+1}^{(0)})]
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dengan (0) dan (1) adalah simbol untuk membedakan prediktor dan korektor secara berturut-turut.

3.2.2 Solusi Numerik Model Matematika *Inositol Trisphosphate Receptor* dengan Metode *Heun*

Setelah mendapatkan model matematika *inositol trisphosphate receptor* dalam bentuk diskrit (metode *Heun*), maka persamaan yang baru telah siap untuk diselesaikan dengan metode *Heun*. Langkah-langkah dalam menyelesaikan persamaan model *inositol trisphosphate receptor* yaitu:

1. Menentukan besarnya koefisien-koefisien yang terdapat dalam sistem persamaan (3.1). Koefisien-koefisien tersebut dapat diperoleh dengan mensubstitusikan parameter-parameter pada Tabel 3.1 ke dalam fungsi-fungsi terhadap kalsium $\phi_j(c)$ (secara lengkap dalam lampiran), sehingga diperoleh koefisien-koefisien sebagai berikut:

$$\phi_1 = 0,294172185430464$$

$$\phi_2 = 2,837086092715232$$

$$\phi_3 = 0,109003623188406$$

$$\phi_4 = 44,617753623188406$$

$$\phi_5 = 1,432903225806452$$

$$\phi_{-2} = 2,625996376811594$$

$$\phi_{-4} = 2,310967741935484$$

untuk nilai $c = 0,5\mu\text{M}$ dan nilai $p = 10\mu\text{M}$ (Sneyd dan Dufour, 2002).

2. Menentukan besarnya variabel terikat pada saat $t = 0$, yaitu variabel $R(t)$, $O(t)$, $A(t)$, $S(t)$, $I_1(t)$, $I_2(t)$. Agar batas yang diberikan terpenuhi, maka dengan merujuk pada jurnal yang ditulis oleh Sneyd dan Dufour (2002) diambil nilai awal sebagai berikut: $R(0) = 1$, $O(0) = 0$, $A(0) = 0$, $S(0) = 0$, $I_1(0) = 0$, $I_2(0) = 0$.
3. Menentukan besarnya ukuran langkah (h). Pada penelitian kali ini diambil nilai $h = 0,001$.
4. Mencari prediktor dari masing-masing variabel dengan menggunakan persamaan yang sudah dibentuk dalam metode *Heun*, yaitu persamaan (3.4)

Untuk iterasi yang pertama ($t = 0,001$) dengan $t_i = t_0 = 0$,

$$R(t_i) = R(t_0) = R_0 = 1, O(t_i) = O(t_0) = O_0 = 0, A(t_i) = A(t_0) = A_0 = 0$$

$$I_1(t_i) = I_1(t_0) = I_{1_0} = 0, I_2(t_i) = I_2(t_0) = I_{2_0} = 0, \text{ dan}$$

$$S(t_i) = S(t_0) = S_0 = 0 \text{ maka diperoleh:}$$

$$\begin{aligned} R_1^{(0)} &= R_0 + (0,001)(2,625996376811594 \times O_0 - \\ &\quad 2,837086092715232 \times 10 \times R_0 + (0,04 - 0,8) \times I_{1_0} - \\ &\quad 0,294172185430464 \times R_0) \\ &= 1 + \\ &\quad (0,001)(2,625996376811594 \times 0 - 2,837086092715232 \times \\ &\quad 10 \times 1 + (0,04 - 0,8) \times 0 - 0,294172185430464 \times 1) \\ &= 0,971334966887417 \\ O_1^{(0)} &= O_0 + \\ &\quad (0,001)(2,837086092715232 \times 10 \times R_0 - \\ &\quad (2,625996376811594 + 44,617753623188406 + \\ &\quad 0,109003623188406) \times O_0 + 2,310967741935484 \times A_0 + \\ &\quad 29,8 \times S_0) \\ &= 0 + \\ &\quad (0,001)(2,837086092715232 \times 10 \times 1 - \\ &\quad (2,625996376811594 + 44,617753623188406 + \\ &\quad 0,109003623188406) \times 0 + 2,310967741935484 \times 0 + \\ &\quad 29,8 \times 0) \\ &= 0,028370860927152 \\ A_1^{(0)} &= A_0 + \\ &\quad (0,001)(44,617753623188406 \times O_0 - (2,310967741935484 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1,432903225806452) \times A_0 + (0,04 - 0,8) \times I_{2_0}) \\
& = 0 + \\
& (0,001)(44,617753623188406 \times 0 - \\
& (2,310967741935484 + 1,432903225806452) \times 0 + \\
& (0,04 - 0,8) \times 0) \\
& = 0 \\
I_{1_1}^{(0)} &= I_{1_0} + (0,001)(-(0,04 - 0,8) \times I_{1_0} + 0,294172185430464 \times R_0) \\
&= 0 + (0,001)(-(0,04 - 0,8) \times 0 + 0,294172185430464 \times 1) \\
&= 0,000294172185430 \\
I_{2_1}^{(0)} &= I_{2_0} + (0,001)(-(0,04 - 0,8) \times I_{2_0} + 1,432903225806452 \times A_0) \\
&= 0 + (0,001)(-(0,04 - 0,8) \times 0 + 1,432903225806452 \times 0) \\
&= 0 \\
S_1^{(0)} &= S_0 + (0,001)(0,109003623188406 \times O_0 + 29,8 \times S_0) \\
&= 0 + (0,001)(0,109003623188406 \times 0 + 29,8 \times 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

5. Setelah memperoleh nilai prediktor dari masing-masing variabel, selanjutnya akan dicari nilai korektor dari masing-masing variabel dengan menggunakan persamaan (3.5).

$$\begin{aligned}
R_1^1 &= R_0 + \\
& \frac{0,001}{2} \left[(2,625996376811594 \times O_0 - 2,837086092715232 \times \right. \\
& 10 \times R_0 + (0,04 - 0,8) \times I_{1_0} - 0,294172185430464 \times R_0) + \\
& \left. (2,625996376811594 \times O_1^{(0)} - 2,837086092715232 \times 10 \times \right. \\
& \left. R_1^{(0)} + (0,04 - 0,8) \times I_{1_1}^{(0)} - 0,294172185430464 \times R_1^{(0)}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{0,001}{2} [(2,625996376811594 \times 0 - 2,837086092715232 \times \\
&10 \times 1 + (0,04 - 0,8) \times 0 - 0,294172185430464 \times 1) + \\
&(2,625996376811594 \times 0,028370860927152 - \\
&2,837086092715232 \times 10 \times 0,971334966887417 + \\
&(0,04 - 0,8) \times 0,000294172185430 - 0,294172185430464 \times \\
&0,971334966887417)] \\
&= 0,971783183390409 \\
O_1^1 &= O_0 + \\
&\frac{0,001}{2} [(2,837086092715232 \times 10 \times R_0 - \\
&(2,625996376811594 + 44,617753623188406 + \\
&0,109003623188406) \times O_0 + 2,310967741935484 \times A_0 + \\
&29,8 \times S_0) + (2,837086092715232 \times 10 \times R_1^{(0)} - \\
&(2,625996376811594 + 44,617753623188406 + \\
&0,109003623188406) \times O_1^{(0)} + 2,310967741935484 \times A_1^{(0)} + \\
&29,8 \times S_1^{(0)})] \\
&= 0 + \\
&\frac{0,001}{2} [(2,837086092715232 \times 10 \times 1 - \\
&(2,625996376811594 + 44,617753623188406 + \\
&0,109003623188406) \times 0 + 2,310967741935484 \times 0 + \\
&29,8 \times 0) + \\
&(2,837086092715232 \times 10 \times 0,971334966887417 - \\
&(2,625996376811594 + 44,617753623188406 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0,109003623188406) \times 0,028370860927152 + \\
& 2,310967741935484 \times 0 + 29,8 \times 0)] \\
& = 0,027292515899417 \\
A_1^1 &= A_0 + \\
& \frac{0,001}{2} [(44,617753623188406 \times O_0 - (2,310967741935484 + \\
& 1,432903225806452) \times A_0 + (0,04 - 0,8) \times I_{2_0}) + \\
& (44,617753623188406 \times O_1^{(0)} - (2,310967741935484 + \\
& 1,432903225806452) \times A_1^{(0)} + (0,04 - 0,8) \times I_{2_1}^{(0)})] \\
& = 0 + \\
& \frac{0,001}{2} [(44,617753623188406 \times 0 - (2,310967741935484 + \\
& 1,432903225806452) \times 0 + (0,04 - 0,8) \times 0) + \\
& (44,617753623188406 \times 0,028370860927152 - \\
& (2,310967741935484 + 1,432903225806452) \times 0 + \\
& (0,04 - 0,8) \times 0)] \\
& = 0,000632922041463 \\
I_{1_1}^1 &= I_{1_0} + \frac{0,001}{2} [(-0,04 - 0,8) \times I_{1_0} + 0,294172185430464 \times R_0) + \\
& (-0,04 - 0,8) \times I_{1_1}^{(0)} + 0,294172185430464 \times R_1^{(0)})] \\
& = 0 + \frac{0,001}{2} [(-0,04 - 0,8) \times 0 + 0,294172185430464 \times 1) + \\
& (-0,04 - 0,8) \times 0,000294172185430 + \\
& 0,294172185430464 \times 0,971334966887417)] \\
& = 0,000289832405395 \\
I_{2_1}^1 &= I_{2_0} + \frac{0,001}{2} [(-0,04 - 0,8) \times I_{2_0} + 1,432903225806452 \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_0) + \left(-(0,04 - 0,8) \times I_{2_1}^{(0)} + 1,432903225806452 \times A_1^{(0)} \right) \\
& = 0 + \frac{0,001}{2} [-(0,04 - 0,8) \times 0 + 1,432903225806452 \times 0] + \\
& \quad (-(0,04 - 0,8) \times 0 + 1,432903225806452 \times 0) \\
& = 0 \\
S_1^1 & = S_0 + \frac{0,001}{2} [(0,109003623188406 \times O_0 + 29,8 \times S_0) + \\
& \quad (0,109003623188406 \times O_1^{(0)} + 29,8 \times S_1^{(0)})] \\
& = S_0 + \frac{0,001}{2} [(0,109003623188406 \times 0 + 29,8 \times 0) + \\
& \quad (0,109003623188406 \times 0,028370860927152 + 29,8 \times 0)] \\
& = 0,000001546263317
\end{aligned}$$

6. Mengulangi lagi langkah 5 dengan menggunakan hasil dari iterasi sebelumnya sampai sebanyak iterasi yang diinginkan.

3.2.3 Solusi Analitik Model Matematika *Inositol Trisphosphate Receptor*

Solusi analitik dari model ini penting untuk diketahui untuk keperluannya sebagai tolak ukur keakuratan metode *Heun* dalam menyelesaikan model ini. Langkah awal untuk mendapatkan solusi analitik dari model matematika *inositol trisphosphate receptor* adalah dengan mensubstitusikan masing-masing koefisien dan konstanta ke dalam model, sehingga diperoleh model baru sebagai berikut ini:

$$\begin{aligned}
\frac{dR(t)}{dt} & = 2,625996376 O(t) - 28,66503312 R(t) + 0,84 I_1(t) \\
\frac{dO(t)}{dt} & = \frac{28,37086093 R(t) - 47,35275362 O(t) + 2,310967742 A(t) +}{29,8 S(t)} \\
\frac{dA(t)}{dt} & = 44,61775362 O(t) - 3,743870968 A(t) + 0,84 I_2(t) \\
\frac{dI_1(t)}{dt} & = 0,2941721854 R(t) - 0,84 I_1(t)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = 1,432903226 A(t) - 0,84 I_2(t)$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = 0,1090036232 O(t) - 29,8 S(t)$$

Persamaan (3.5) membentuk suatu sistem persamaan diferensial biasa linier orde satu yang homogen dengan koefisien konstan. Oleh karena itu, sistem persamaan (3.5) dapat ditulis ulang dalam bentuk matriks seperti pada persamaan (2.6)

$$\frac{dx(t)}{dt} = Bx(t) \quad (3.6)$$

dengan:

$$x(t) = \begin{bmatrix} R(t) \\ O(t) \\ A(t) \\ I1(t) \\ I2(t) \\ S(t) \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$B = \begin{bmatrix} -28,66503312 & 2,625996376 & 0 & 0,84 & 0 & 0 \\ 28,37086093 & -47,35275362 & 2,310967742 & 0 & 0 & 29,8 \\ 0 & 44,61775362 & -3,743870968 & 0 & 0,84 & 0 \\ 0,2941721854 & 0 & 0 & -0,84 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,432903226 & 0 & -0,84 & 0 \\ 0 & 0,1090036232 & 0 & 0 & 0 & -29,8 \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan solusi dari sistem persamaan (3.6), maka akan dicari nilai eigen dari matriks B dengan menggunakan formulasi pada persamaan (2.7) sebagai berikut:

$$\det(B - rI) = 0$$

dengan matriks I adalah matriks identitas dengan ukuran 6×6 :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nilai-nilai eigen r yang memenuhi untuk matriks B adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r_1 &= -52,701794650951925 \\ r_2 &= -25,752510175949524 \\ r_3 &= -29,763863709610631 \\ r_4 &= -2,192900204862581 \\ r_5 &= -0,000000000022968 \\ r_6 &= -0,830589066602449 \end{aligned}$$

Dan nilai vektor eigen untuk masing-masing nilai eigen yang memenuhi formulasi persamaan (2.8) adalah sebagai berikut:

	r_1	r_2	r_3
ξ_1	0,080469359958336	-0,368378027584170	-0,554637735350840
ξ_2	-0,736421201160938	-0,409963765057436	0,230279993878841
ξ_3	0,671455011970683	0,832941343716330	-0,395504899924583
ξ_4	-0,000456440962678	0,004349885606164	0,005640982024933
ξ_5	-0,018551807920303	-0,047908634258467	0,019593518163743
ξ_6	0,003505078110745	-0,011040802500957	0,694628141128374
	r_4	r_5	r_6
ξ_1	-0,003697071379029	-0,002423682208282	0,022116898198553
ξ_2	-0,037526566625075	-0,026185089785042	0,013284115497273
ξ_3	-0,686028484269603	-0,505554388901539	-0,004742242328300
ξ_4	0,000803884546133	-0,000848785585649	0,691342293319187
ξ_5	0,726596407262466	-0,862393469994382	-0,722051048885716
ξ_6	-0,000148169556337	-0,000095780861087	0,000049984334288

Dengan mensubstitusikan masing-masing vektor eigen dan nilai eigen yang saling bersesuaian ke dalam bentuk umum solusi sistem persamaan diferensial biasa pada formulasi persamaan (2.9), diperoleh solusi umum dari sistem persamaan (3.5) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} R(t) = & 0,080469359958336 C_1 e^{-52,701794650951925 t} - \\ & 0,368378027584170 C_2 e^{-25,752510175949524 t} - \\ & 0,554637735350840 C_3 e^{-29,763863709610631 t} - \\ & 0,003697071379029 C_4 e^{-2,192900204862581 t} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0,002423682208282 C5 e^{-0,00000000022968 t} + \\
& 0,022116898198553 C6 e^{-0,830589066602449t} \\
O(t) = & -0,736421201160938 C1 e^{-52,701794650951925 t} - \\
& 0,409963765057436 C2 e^{-25,752510175949524 t} + \\
& 0,230279993878841 C3 e^{-29,763863709610631t} - \\
& 0,037526566625075 C4 e^{-2,192900204862581t} - \\
& 0,026185089785042 C5 e^{-0,00000000022968 t} + \\
& 0,013284115497273 C6 e^{-0,830589066602449 t} \\
A(t) = & 0,671455011970683 C1 e^{-52,701794650951925 t} + \\
& 0,832941343716330 C2 e^{-25,752510175949524 t} - \\
& 0,395504899924583 C3 e^{-29,763863709610631t} - \\
& 0,686028484269603 C4 e^{-2,192900204862581t} - \\
& 0,505554388901539 C5 e^{-0,00000000022968 t} - \\
& 0,004742242328300 C6 e^{-0,830589066602449t} \\
I_1(t) = & -0,000456440962678 C1 e^{-52,701794650951925 t} + \\
& 0,004349885606164 C2 e^{-25,752510175949524 t} + \\
& 0,005640982024933 C3 e^{-29,763863709610631 t} + \\
& 0,000803884546133 C4 e^{-2,192900204862581t} - \\
& 0,000848785585649 C5 e^{-0,00000000022968 t} + \\
& 0,691342293319187 C6 e^{-0,830589066602449 t} \\
I_2(t) = & -0,018551807920303 C1 e^{-52,701794650951925 t} - \\
& 0,047908634258467 C2 e^{-25,752510175949524 t} + \\
& 0,019593518163743 C3 e^{-29,763863709610631 t} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0,726596407262466 C_4 e^{-2,192900204862581t} - \\
& 0,862393469994382 C_5 e^{-0,00000000022968t} - \\
& 0,722051048885716 C_6 e^{-0,830589066602449t} \\
S(t) = & 0,003505078110745 C_1 e^{-52,701794650951925t} - \\
& 0,011040802500957 C_2 e^{-25,752510175949524t} + \\
& 0,694628141128374 C_3 e^{-29,763863709610631t} - \\
& 0,000148169556337 C_4 e^{-2,192900204862581t} - \\
& 0,000095780861087 C_5 e^{-0,00000000022968t} + \\
& 0,000049984334288 C_6 e^{-0,830589066602449t}
\end{aligned}$$

Untuk mendapatkan solusi khususnya, maka perlu diketahui terlebih dahulu nilai dari masing-masing C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 , dan C_6 , yaitu dengan mensubstitusikan nilai awal dari masing-masing variabel yaitu pada saat $t = 0$, sebagaimana diketahui di awal pada saat $t = 0$ maka $R(0) = 1$, $O(0) = 0$, $A(0) = 0$, $I_1(0) = 0$, $I_2(0) = 0$, dan $S(0) = 0$. Sehingga diperoleh nilai-nilai C sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
C_1 &= 1,36052587 \\
C_2 &= -2,335496346 \\
C_3 &= -0,04428959611 \\
C_4 &= -0,951277668 \\
C_5 &= -0,715562893 \\
C_6 &= 0,01618205128
\end{aligned}$$

Dengan demikian solusi khususnya adalah

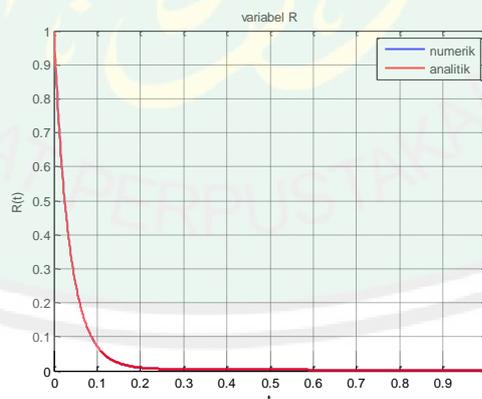
$$\begin{aligned}
R(t) = & 0,109480645965658 e^{-52,701794650951925t} + \\
& 0,860345537369516 e^{-25,752510175949524t} + \\
& 0,024564681286054 e^{-29,763863709610631t} + \\
& 0,003516941439872 e^{-2,192900204862581t} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0,001734297052671e^{-0,00000000022968 t} + \\
& 0,000357896780804e^{-0,830589066602449t} \\
O(t) = & -1,001920095395930e^{-52,701794650951925 t} + \\
& 0,957468875284044e^{-25,752510175949524 t} - \\
& 0,010199007921107e^{-29,763863709610631t} + \\
& 0,035698184787148e^{-2,192900204862581t} + \\
& 0,018677515941120e^{-0,00000000022968 t} + \\
& 0,000214964238186 e^{-0,830589066602449t} \\
A(t) = & 0,913531914327274e^{-52,701794650951925 t} - \\
& 1,945331464681819e^{-25,752510175949524 t} + \\
& 0,017516752277186e^{-29,763863709610631t} + \\
& 0,652603576697563e^{-2,192900204862581t} + \\
& 0,361755961091232e^{-0,00000000022968 t} - \\
& 0,0000767392085389 e^{-0,830589066602449t} \\
I_1(t) = & -0,000620999737851e^{-52,701794650951925 t} - \\
& 0,010159141938714e^{-25,752510175949524 t} - \\
& 0,000249836815548e^{-29,763863709610631t} - \\
& 0,000764717416386e^{-2,192900204862581t} + \\
& 0,000607359469204e^{-0,00000000022968 t} + \\
& 0,011187336442524 e^{-0,830589066602449t} \\
I_2(t) = & -0,025240214610843e^{-52,701794650951925 t} + \\
& 0,111890440252500e^{-25,752510175949524 t} - \\
& 0,000867789005846e^{-29,763863709610631t} - \\
& 0,691194935877817e^{-2,192900204862581t} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0,617096766293489e^{-0,00000000022968 t} _ \\
& 0,011684267099846 e^{-0,830589066602449t} \\
S(t) = & 0,004768749446039e^{-52,701794650951925 t} + \\
& 0,025785753897893 e^{-25,752510175949524 t} _ \\
& 0,030764799817216e^{-29,763863709610631t} + \\
& 0,000140950390021e^{-2,192900204862581t} + \\
& 0,000068537230053e^{-0,00000000022968 t} _ \\
& 0,000000808849061 e^{-0,830589066602449t}
\end{aligned}$$

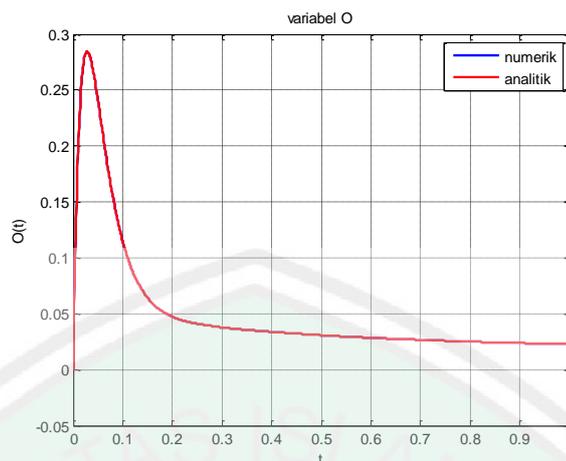
3.2.4 Simulasi Hasil dan Interpretasi

Dengan menggunakan alat bantu *software* Matlab 2013a dan Maple 18, penulis telah menyelesaikan solusi analitik dan solusi numerik dari model matematika *inositol trisphosphate receptor*, dan memvisualisasikan data hasil ke dalam bentuk grafik sebagai gambar-gambar berikut:



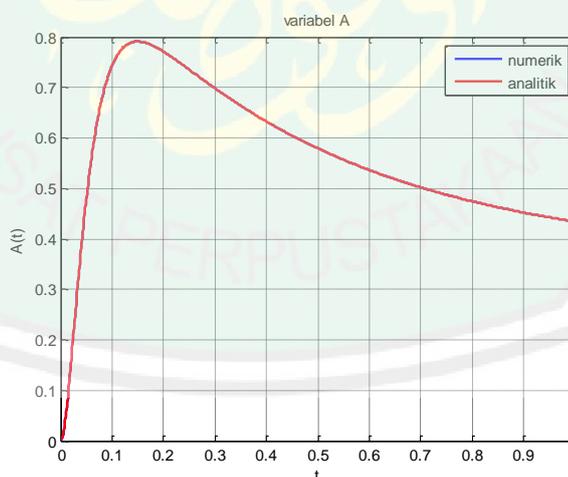
Gambar 3.1 Solusi Numerik dan Solusi Analitik untuk Variabel R

Dengan menggunakan nilai awal $R(0) = 1$, terlihat bahwa peluang reseptor berada dalam kondisi R mengalami penurunan secara dratis baik dari sisi analitik maupun dari sisi numerik. Dari Gambar 3.1 menunjukkan bahwa semakin besar nilai t nilai R semakin mendekati nol.



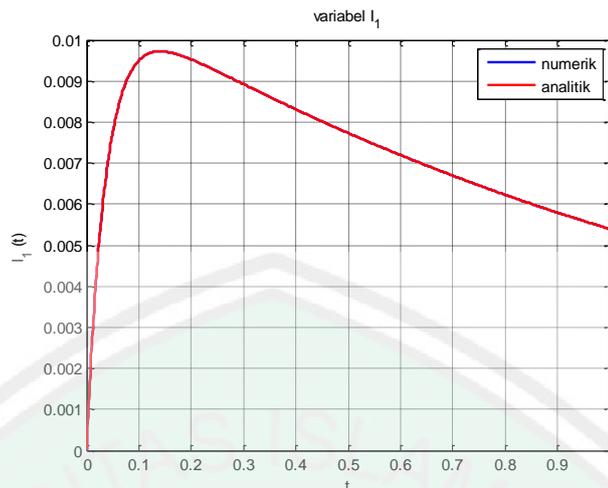
Gambar 3.2 Solusi Numerik dan Solusi Analitik untuk Variabel O

Dengan menggunakan nilai awal $O(0) = 0$, terlihat bahwa peluang reseptor berada dalam kondisi O mengalami kenaikan baik dari sisi analitik maupun dari sisi numerik. Dari Gambar 3.2 menunjukkan bahwa peluang reseptor berada dalam kondisi O mengalami peningkatan sampai pada puncak tertingginya yaitu 0,285 kemudian menurun lagi secara perlahan sampai pada titik terakhir untuk nilai $t = 1$ yaitu 0,195.



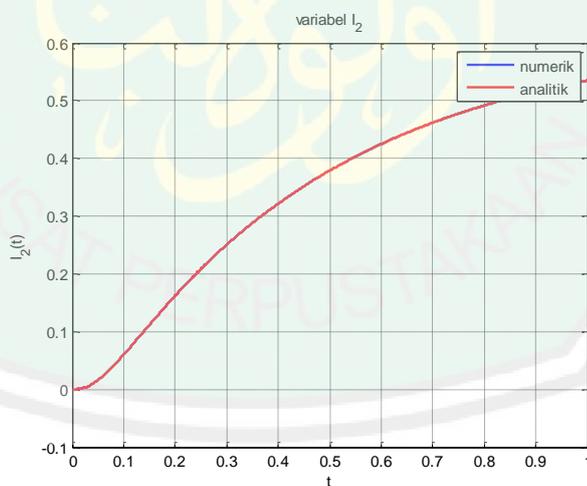
Gambar 3.3 Solusi Numerik dan Solusi Analitik untuk Variabel A

Dengan menggunakan nilai awal $A(0) = 0$, terlihat bahwa peluang reseptor berada dalam kondisi A mengalami kenaikan baik dari sisi analitik maupun dari sisi numerik di permukaan waktu hingga mencapai titik tertingginya yaitu 0,791 kemudian menurun secara perlahan.



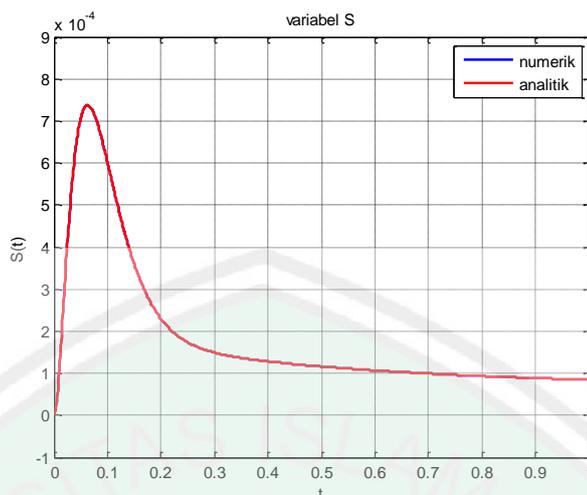
Gambar 3.4 Solusi Numerik dan Solusi Analitik untuk Variabel I_1

Dengan menggunakan nilai awal $I_1(0) = 0$, terlihat bahwa peluang reseptor berada dalam kondisi I_1 mengalami kenaikan baik dari sisi analitik maupun dari sisi numerik hingga titik tertingginya adalah 0,010. Nilai yang cukup kecil apabila dibandingkan dengan peluang tertinggi reseptor berada dalam kondisi R, O , ataupun A , dan menurun lagi secara perlahan menuju angka 0,005.



Gambar 3.5 Solusi Numerik dan Solusi Analitik untuk Variabel I_2

Dengan menggunakan nilai awal $I_2(0) = 0$, terlihat bahwa peluang reseptor berada dalam kondisi I_2 mengalami kenaikan baik dari sisi analitik maupun dari sisi numerik dan terus naik hingga pada $t = 1$ peluang reseptor berada dalam kondisi I_2 mencapai angka 0,535.



Gambar 3.6 Solusi Numerik dan Solusi Analitik untuk Variabel S

Dengan menggunakan nilai awal $S(0) = 0$, terlihat bahwa peluang reseptor berada dalam kondisi S meningkat dari nol sampai di titik tertinggi yaitu 0,0007. Kemudian menurun lagi hingga titik 0,0001. Peluang reseptor untuk berada dalam kondisi S relatif sangat kecil dibandingkan dengan kondisi inaktif yang lain I_1 dan I_2 .

3.3 Analisis Perbandingan Solusi Numerik dan Solusi Analitik Model Matematika *Inositol Trisphosphate Receptor*

Sebelum membandingkan hasil dari solusi numerik dan solusi analitik model ini, penulis akan menguji apakah solusi numerik dengan metode *Heun* sudah memenuhi pengontrol model yang diberikan, yaitu penjumlahan dari semua variabel sama dengan satu, yang akan penulis tampilkan dalam tabel berikut ini:

Tabel 3.2 Penjumlahan Semua Variabel dari Iterasi ke-1 sampai Iterasi ke-3

	Iterasi ke- i		
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
R_i	0,971783183390409	0,944431743317614	0,917916135335805
O_i	0,02792515899417	0,052557087992228	0,075913612318799
A_i	0,000632922041463	0,002432273718879	0,005306137502839
I_{1i}	0	0,000001777282602	0,000006933080488
I_{2i}	0,000289832405395	0,000571253883468	0,000844521526267
S_i	0,000001546263317	0,000005863805209	0,0000012660235802
Jumlah	1	1	1

Dengan demikian solusi numerik dengan metode *Heun* ini sudah memenuhi pengontrol yang diberikan. Penulis akan melanjutkan dengan membandingkan hasil solusi numerik dengan hasil solusi analitik untuk mengetahui tingkat keakuratan metode *Heun* dari solusi analitiknya.

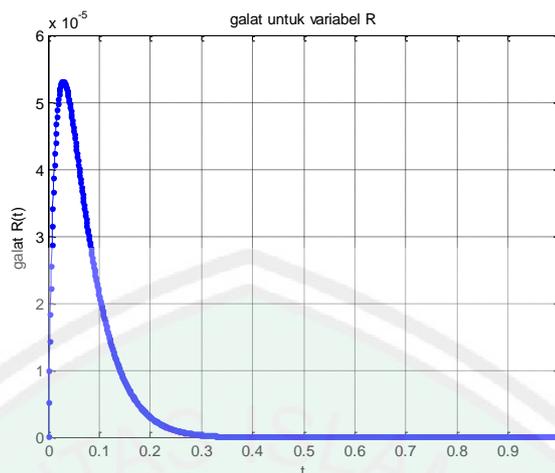
a. Galat untuk variabel R

Dengan mensubstitusikan nilai dari hasil solusi analitik dan nilai dari hasil solusi numerik pada persamaan (2.26) dan persamaan (2.27) diperoleh nilai galat dan nilai galat relatif dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.3 Nilai Galat dan Galat Relatif untuk Variabel R

t	Galat	Galat Relatif
0	0,000000000105425	0,000000000010543
0,001	0,000005176642195	0,000000532698019
0,002	0,000009952579085	0,000001053827769
0,003	0,000014353742947	0,000001563755865
0,004	0,000018404364259	0,000002062831191
0,005	0,000022127174073	0,000002551395386
0,006	0,000025543495146	0,000003029782811
0,007	0,000028673327629	0,000003498320524
0,008	0,000031535429606	0,000003957328262
0,009	0,000034147392802	0,000004407118445
0,1	0,000021005859026	0,000029091774119
0,2	0,000002968256302	0,000031714203609
0,3	0,000000336175649	0,000007970364260
0,4	0,000000034916983	0,000001002493969
0,5	0,000000004262705	0,000000135426223
0,6	0,000000001304591	0,000000045057257
0,7	0,000000000975366	0,000000036230202
0,8	0,000000000875462	0,000000034644727
0,9	0,000000000791079	0,000000033065389
1,0	0,000000000707781	0,000000031005915

Memperhatikan nilai galat relatif di atas yang nilainya kurang dari satu, serta nilai maksimum galat pada rentang $0 \leq t \leq 1$ yang mencapai angka 0,0000531432075085 maka solusi numerik untuk variabel R sudah dapat dikatakan mendekati solusi analitiknya. Secara lebih detail berikut ini adalah grafik untuk nilai galat dari variabel R .



Gambar 3.7 Galat untuk Variabel R

b. Galat untuk variabel O

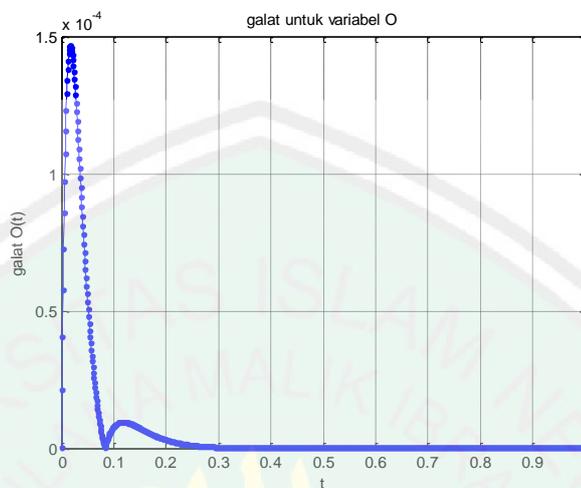
Dengan mensubstitusikan nilai dari hasil solusi analitik dan nilai dari hasil solusi numerik pada persamaan (2.26) dan persamaan (2.27) diperoleh nilai galat dan nilai galat relatif dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.4 Nilai Galat dan Galat Relatif untuk Variabel O

t	Galat	Galat Relatif
0	0,000000000407611	1
0,001	0,000021460597086	0,000785700210606
0,002	0,000040580290999	0,000771522623037
0,003	0,000057544189651	0,000757447856471
0,004	0,000072524935126	0,000743479803139
0,005	0,000085683127627	0,000729619477711
0,006	0,000097168105637	0,000715867410043
0,007	0,000107118677783	0,000702223987103
0,008	0,000115663809288	0,000688689538536
0,009	0,000122923265758	0,000675264365286
0,1	0,000007834897104	0,000068231673092
0,2	0,000003071596367	0,000064747377041
0,3	0,000000374944536	0,000009915053820
0,4	0,000000047704376	0,000001412521947
0,5	0,000000014059814	0,000000456389922
0,6	0,000000010455334	0,000000367565527
0,7	0,000000009522151	0,000000358671034
0,8	0,000000008717162	0,000000348347032
0,9	0,000000007875366	0,000000330907621
1,0	0,000000007028967	0,000000308093267

Memperhatikan nilai galat relatif di atas yang nilainya kurang dari satu, serta nilai maksimum galat pada rentang $0 \leq t \leq 1$ yang mencapai angka 0,000146495648036 maka solusi numerik untuk variabel O sudah dapat

dikatakan mendekati solusi analitiknya. Secara lebih detail berikut ini adalah grafik untuk nilai galat dari variabel O .



Gambar 3.8 Galat untuk Variabel O

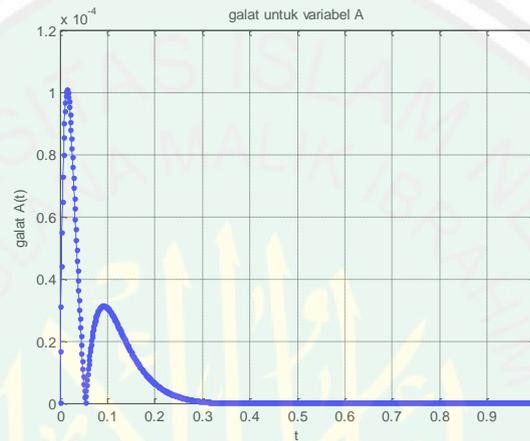
c. Galat untuk variabel A

Dengan mensubstitusikan nilai dari hasil solusi analitik dan nilai dari hasil solusi numerik pada persamaan (2.26) dan persamaan (2.27) diperoleh nilai galat dan nilai galat relatif dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.5 Nilai Galat dan Galat Relatif untuk Variabel A

t	Galat	Galat Relatif
0	0,000000000502897	1
0,001	0,000016571479915	0,026886452206459
0,002	0,000031160794352	0,012977646338261
0,003	0,000043930802186	0,008348361188757
0,004	0,000055033323140	0,006038926850308
0,005	0,000064609386875	0,004657375929110
0,006	0,000072789938322	0,003739715009295
0,007	0,000079696499144	0,003087088925641
0,008	0,000085441787987	0,002600069975699
0,009	0,000090130301985	0,002223420627438
0,1	0,000030554371796	0,000041108168303
0,2	0,000006234324105	0,000008082016541
0,3	0,000000564946170	0,000000808384421
0,4	0,000000115650341	0,000000182674744
0,5	0,000000184866814	0,000000318897692
0,6	0,000000184449116	0,000000343617191
0,7	0,000000173382312	0,000000345165855
0,8	0,000000159191244	0,000000335398534
0,9	0,000000143841694	0,000000317951273
1,0	0,000000128367595	0,000000295404685

Memperhatikan nilai galat relatif di atas yang nilainya lebih kecil dari satu, serta nilai maksimum galat pada rentang $0 \leq t \leq 1$ yang mencapai angka 0,000101015473275 maka solusi numerik untuk variabel A sudah dapat dikatakan mendekati solusi analitiknya, secara lebih detail berikut ini adalah grafik untuk nilai galat dari variabel A .



Gambar 3.9 Galat untuk Variabel A

d. Galat untuk variabel I_1

Dengan mensubstitusikan nilai dari hasil solusi analitik dan nilai dari hasil solusi numerik pada persamaan (2.26) dan persamaan (2.27) diperoleh nilai galat dan nilai galat relatif dalam bentuk tabel sebagai berikut:

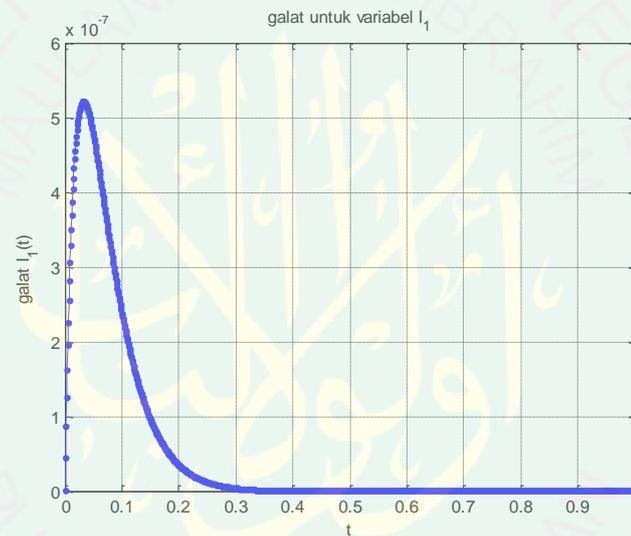
Tabel 3.6 Nilai Galat dan Galat Relatif untuk Variabel I_1

t	Galat	Galat Relatif
0	0,0000000000003227	1
0,001	0,000000044778377	0,000154473617353
0,002	0,000000086493825	0,000151387559832
0,003	0,000000125326260	0,000148377112057
0,004	0,000000161442285	0,000145437586499
0,005	0,000000194999000	0,000142566541628
0,006	0,000000226144554	0,000139761952438
0,007	0,000000255018657	0,000137021948261
0,008	0,000000281753073	0,000134344746471
0,009	0,000000306472072	0,000131728629707
0,1	0,000000238342060	0,000025089952772
0,2	0,000000034846152	0,000003656593834
0,3	0,000000003907266	0,000000437708686
0,4	0,000000000314642	0,000000037845808
0,5	0,000000000092103	0,000000011904053
0,6	0,000000000171472	0,000000023819469

Tabel 3.6 Lanjutan

0,7	0,000000000216920	0,000000032388128
0,8	0,000000000255466	0,000000040996387
0,9	0,000000000288950	0,000000049830221
1,0	0,000000000317282	0,000000058784500

Memperhatikan nilai galat relatif di atas yang nilainya kurang dari satu, serta nilai maksimum galat pada rentang $0 \leq t \leq 1$ yang mencapai angka 0,000000521216947 maka solusi numerik untuk variabel I_1 sudah dapat dikatakan mendekati solusi analitiknya. Secara lebih detail berikut ini adalah grafik untuk nilai galat dari variabel I_1 .

Gambar 3.10 Galat untuk Variabel I_1

e. Galat untuk variabel I_2

Dengan mensubstitusikan nilai dari hasil solusi analitik dan nilai dari hasil solusi numerik pada persamaan (2.26) dan persamaan (2.27) diperoleh nilai galat dan nilai galat relatif dalam bentuk tabel sebagai berikut:

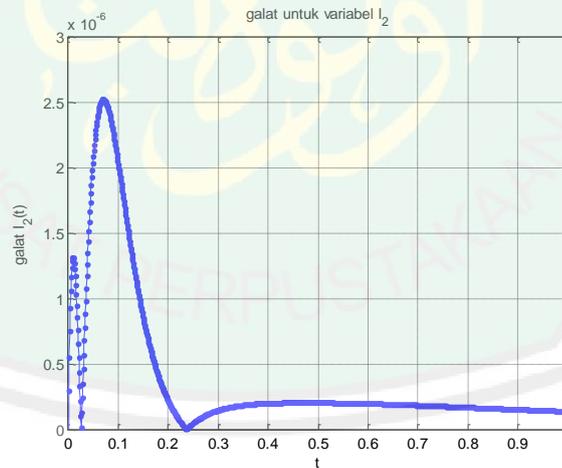
Tabel 3.7 Nilai Galat dan Galat Relatif untuk Variabel I_2

t	Galat	Galat Relatif
0	0,000000000048364	1
0,001	0,000000296240570	1
0,002	0,000000546007397	0,235014741125306
0,003	0,000000753451186	0,098022257450414
0,004	0,000000922462747	0,051643371803601

Tabel 3.7 Lanjutan

0,005	0,000001056645069	0,030891521665601
0,006	0,000001159332482	0,020003705583717
0,007	0,000001233608616	0,013669008912423
0,008	0,000001282323227	0,009706004339836
0,009	0,000001308107973	0,007090060462065
0,1	0,000002024964255	0,000033977286925
0,2	0,000000214004459	0,000001320532585
0,3	0,000000146465988	0,000000585788808
0,4	0,000000198368503	0,000000617570277
0,5	0,000000203128355	0,000000536685560
0,6	0,000000196157513	0,000000462017322
0,7	0,000000183861147	0,000000398272500
0,8	0,000000168796770	0,000000343438317
0,9	0,000000152548071	0,000000295911435
1,0	0,000000136166325	0,000000254577126

Memperhatikan nilai galat relatif di atas yang nilainya kurang dari satu, serta nilai maksimum galat pada rentang $0 \leq t \leq 1$ yang mencapai angka 0,000002518614934 maka solusi numerik untuk variabel I_2 sudah dapat dikatakan mendekati solusi analitiknya. Secara lebih detail berikut ini adalah grafik untuk nilai galat dari variabel I_2 .

Gambar 3.11 Galat untuk Variabel I_2

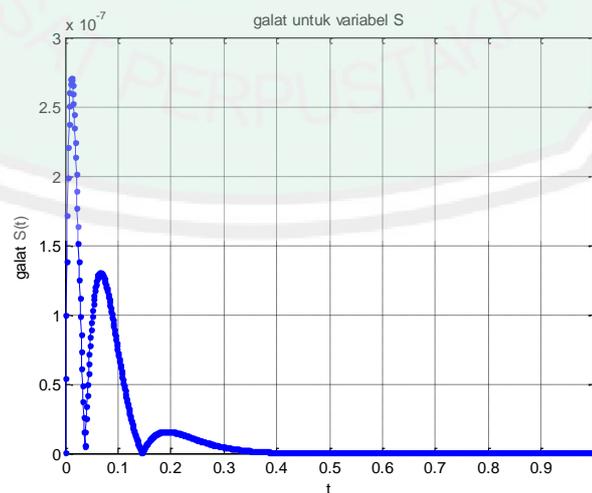
f. Galat untuk variabel S

Dengan mensubstitusikan nilai dari hasil solusi analitik dan nilai dari hasil solusi numerik pada persamaan (2.26) dan persamaan (2.27) diperoleh nilai galat dan nilai galat relatif dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.8 Nilai Galat dan Galat Relatif untuk Variabel S

t	Galat	Galat Relatif
0	0,000000000004149	1
0,001	0,000000053557893	0,035879747182449
0,002	0,000000099487194	0,017259143886510
0,003	0,000000138494707	0,011060339522732
0,004	0,000000171229734	0,007966757859353
0,005	0,000000198291856	0,006115200214222
0,006	0,000000220234348	0,004884616217090
0,007	0,000000237567364	0,004008845354688
0,008	0,000000250760922	0,003354808725589
0,009	0,000000260247699	0,002848574198295
0,1	0,000000072773441	0,000120905399586
0,2	0,000000015564941	0,000067739820977
0,3	0,000000004457079	0,000029817571291
0,4	0,000000000673873	0,000005247985994
0,5	0,000000000113445	0,000000976195950
0,6	0,000000000047280	0,000000442504382
0,7	0,000000000038160	0,000000384068306
0,8	0,000000000034458	0,000000369161299
0,9	0,000000000031086	0,000000351238979
1,0	0,000000000027740	0,000000327834615

Memperhatikan nilai galat relatif di atas yang nilainya kurang dari satu, serta nilai maksimum galat pada rentang $0 \leq t \leq 1$ yang mencapai angka 0,000000270287617 maka solusi numerik untuk variabel S sudah dapat dikatakan mendekati solusi analitiknya. Secara lebih detail berikut ini adalah grafik untuk nilai galat dari variabel S

Gambar 3.12 Galat untuk Variabel S

3.4 Etika Berhubungan Sosial dalam Pandangan Islam

Interaksi sosial berarti hubungan dinamis antara individu dengan individu, individu dengan kelompok dan kelompok dengan kelompok. Soerjono Soekanto (1990) mengatakan interaksi sosial adalah kunci dari seluruh kehidupan sosial, oleh karena itu tanpa interaksi sosial tidak akan mungkin terjadi kehidupan bersama. Dalam Islam, interaksi sosial disebut dengan *hablum minannaasi* (hubungan dengan sesama manusia).

Dalam Islam ada tiga hubungan yang harus dilakukan, yaitu hubungan kepada Allah Swt., hubungan kepada sesama manusia, dan hubungan kepada alam semesta. Ketiga hubungan ini harus seimbang dan bersinergi. Artinya, tidak diperbolehkan fokus pada satu bentuk hubungan saja. Hubungan kepada Allah Swt. dari sudut sosiologi disebut dengan hubungan vertikal dan hubungan sesama manusia disebut hubungan horizontal. Hubungan kepada sesama manusia dalam istilah sosiologi disebut dengan interaksi sosial. Hubungan kepada alam semesta yaitu tidak dibenarkan merusak lingkungan tetapi melestarikan dan menjaga dengan baik (Ghali, 2013).

Bentuk hubungan yang mencakup populer yaitu silaturahmi, yang artinya hubungan kasih sayang. Istilah yang lebih luas dari interaksi sosial yakni *ukhwah Islamiyah*. Artinya, persaudaraan yang dijalin sesama muslim. Salah satu firman Allah Swt. yang mendasari terbentuknya *ukhwah Islamiyah* tertulis dalam al-Quran surat al-Hujurat/49:10 yaitu:

–إِنَّمَا الْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ وَاتَّقُوا اللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ – ١٠

“*Sesungguhnya orang-orang mukmin itu bersaudara, karena itu damaikanlah antara kedua saudaramu (yang berselisih) dan bertakwalah kepada Allah agar kamu mendapat rahmat*” (QS. Al-Hujurat/49:10).

Dalam kitab tafsirnya, Ibnu Katsir (2004) menuturkan bahwa dalam firman Allah Swt., (إِنَّمَا الْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ) “*Sesungguhnya orang-orang mukmin itu bersaudara,*” maksudnya, seluruh kaum muslimin merupakan satu saudara karena agama. Sebagaimana Imam Ahmad meriwayatkan, Ahmad bin Al-Hajjaj memberitahu kami, ‘Abdullah memberitahu kami, Mush’ab bin Tsabit memberitahu kami, Abu Hazim memberitahuku, ia bercerita: ”Aku pernah mendengar Sahal bin Sa’ad As-Sa’idi menceritakan hadits dari Rasulullah Saw., beliau bersabda:

إِنَّ الْمُؤْمِنَ مِنْ أَهْلِ الْإِيمَانِ بِمَنْزِلَةِ الرَّأْسِ مِنَ الْجَسَدِ يَأْلَمُ الْمُؤْمِنُ لِأَهْلِ الْإِيمَانِ كَمَا يَأْلَمُ لِمَا فِي الرَّأْسِ

“*Sesungguhnya (hubungan) orang mukmin dengan orang-orang yang beriman adalah seperti (hubungan) kepala dengan seluruh badan. Seorang mukmin akan merasa sakit karena orang mukmin lainnya sebagaimana badan akan merasa sakit karena sakit pada kepala*” (Hadits ini diriwayatkan sendiri oleh Imam Ahmad)”

Dan firman-Nya (فَأَصْلِحُوا بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ) “*Karena itu, damaikanlah antara kedua saudaramu,*” yaitu dua golongan yang saling bertikai, (وَاتَّقُوا اللَّهَ) “*Dan bertakwalah kepada Allah,*” dalam seluruh urusan kalian, (لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ) “*Supaya kamu mendapat rahmat.*” Hal tersebut merupakan penegasan dari Allah Swt., di mana Dia akan memberikan rahmat kepada orang yang bertakwa kepada-Nya (Katsir, 2004).

Dalam membangun *ukhwah Islamiyah* yang baik, perlu adanya etika yang dibangun sehingga tercipta interaksi yang harmonis, kondusif, dan tidak terputus. Berkaitan dengan hal tersebut, Islam menjelaskan beberapa etika tersebut, antara lain:

- a. dilarang saling memfitnah,
- b. dilarang menghina atau menghujat sesama muslim,
- c. tidak berburuk sangka kepada orang lain,

- d. bersikap jujur dan adil,
- e. bersifat *tawaduk* dan rendah diri, dan
- f. berakhlak mulia,

Bustanuddin Agus (Sahrul, 2001) mengatakan bahwa seseorang yang berakhlak mulia akan mengantarkan bangsa itu menjadi baik dan dihormati dalam hubungan internasional. Tetapi apabila masyarakat dan bangsanya tidak berakhlak mulia maka bangsa itu tidak dihormati dan mengalami kehancuran. Perilaku atau berakhlak tidaklah cukup sebatas ungkapan tetapi harus dalam perilaku nyata. Berkaitan dengan soal akhlak itu, Asmaran (Sahrul, 2001) mengatakan berakhlak mulia merupakan asas kebahagiaan, keselarasan, keserasian, dan keseimbangan hubungan antara sesama manusia, baik pribadi maupun dengan lingkungannya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan, maka dapat diberikan kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika *inositol trisphosphate receptor* yang berbentuk sistem persamaan diferensial biasa yang bergantung waktu terdiri atas enam variabel; $R(t)$ adalah *receptor*, $O(t)$ adalah *open*, $A(t)$ adalah *activation*, $I_1(t)$ adalah *inactivation*, $I_2(t)$ adalah *inactivation*, dan $S(t)$ adalah *shut*. *Inositol trisphosphate receptor* berada dalam kondisi R apabila sedang tidak berikatan dengan Ca^{2+} ataupun IP_3 . Apabila selanjutnya reseptor berikatan dengan Ca^{2+} maka reseptor berada dalam kondisi I_1 , sebaliknya apabila berikatan dengan IP_3 maka reseptor menjadi terbuka dan berada dalam kondisi O . *Inositol trisphosphate receptor* hanya akan aktif (A) setelah melewati kondisi O yaitu setelah berikatan dengan Ca^{2+} dan kemudian reseptor akan dinonaktifkan lagi dengan cara berikatan dengan Ca^{2+} (I_1), apabila tidak terdapat Ca^{2+} maka reseptor akan berikatan dengan IP_3 dan menyebabkan reseptor berada dalam kondisi S . I_1 , I_2 , dan S ketiganya merupakan kondisi ketika reseptor menjadi inaktif atau terhambat sehingga menghalangi lalu lintas Ca^{2+} melalui reseptor. Dengan demikian pengikatan IP_3 dan Ca^{2+} harus terjadi secara berurutan sehingga reseptor dapat terbuka dan kemudian dapat dilalui oleh Ca^{2+} sehingga pesan-pesan kimia yang dibawa oleh Ca^{2+} dapat tersampaikan.

2. Model matematika *inositol trisphosphate receptor* dalam bentuk umum metode *Heun* sebagai berikut:

a. Prediktor

$$R_{i+1}^{(0)} = R_i + h(\phi_{-2}O_i - \phi_2pR_i + (k_{-1} + l_{-2})I_{1i} - \phi_1R_i)$$

$$O_{i+1}^{(0)} = O_i + h(\phi_2pR_i - (\phi_{-2} + \phi_4 + \phi_3)O_i + \phi_{-4}A_i + k_{-3}S_i)$$

$$A_{i+1}^{(0)} = A_i + h(\phi_4O_i - \phi_{-4}A_i - \phi_5A_i + (k_{-1} + l_{-2})I_{2i})$$

$$I_{1i+1}^{(0)} = I_{1i} + h(\phi_1R_i - (k_{-1} + l_{-2})I_{1i})$$

$$I_{2i+1}^{(0)} = I_{2i} + h(\phi_5A_i - (k_{-1} + l_{-2})I_{2i})$$

$$S_{i+1}^{(0)} = S_i + h(\phi_3O_i - k_{-3}S_i)$$

b. Korektor

$$R_{i+1}^{(k)} = R_i + \frac{h}{2} \left[(\phi_{-2}O_i - \phi_2pR_i + (k_{-1} + l_{-2})I_{1i} - \phi_1R_i) + (\phi_{-2}O_{i+1}^{(k-1)} - \phi_2pR_{i+1}^{(k-1)} + (k_{-1} + l_{-2})I_{1i+1}^{(k-1)} - \phi_1R_{i+1}^{(k-1)}) \right]$$

$$O_{i+1}^{(k)} = O_i + \frac{h}{2} \left[(\phi_2pR_i - (\phi_{-2} + \phi_4 + \phi_3)O_i + \phi_{-4}A_i + k_{-3}S_i) + (\phi_2pR_i^{(k-1)} - (\phi_{-2} + \phi_4 + \phi_3)O_i^{(k-1)} + \phi_{-4}A_i^{(k-1)} + k_{-3}S_i^{(k-1)}) \right]$$

$$A_{i+1}^{(k)} = A_i + \frac{h}{2} \left[(\phi_4O_i - \phi_{-4}A_i - \phi_5A_i + (k_{-1} + l_{-2})I_{2i}) + (\phi_4O_i^{(k-1)} - \phi_{-4}A_i^{(k-1)} - \phi_5A_i^{(k-1)} + (k_{-1} + l_{-2})I_{2i}^{(k-1)}) \right]$$

$$I_{1i+1}^{(k)} = I_{1i} + \frac{h}{2} \left[(\phi_1R_i - (k_{-1} + l_{-2})I_{1i}) + (\phi_1R_i^{(k-1)} - (k_{-1} + l_{-2})I_{1i}^{(k-1)}) \right]$$

$$I_{2i+1}^{(k)} = I_{2i} + \frac{h}{2} \left[(\phi_5A_i - (k_{-1} + l_{-2})I_{2i}) + (\phi_5A_i^{(k-1)} - (k_{-1} + l_{-2})I_{2i}^{(k-1)}) \right]$$

$$S_{i+1}^{(k)} = S_i + \frac{h}{2} \left[(\phi_3O_i - k_{-3}S_i) + (\phi_3O_i^{(k-1)} - k_{-3}S_i^{(k-1)}) \right]$$

3. Dengan memperhatikan nilai galat dan galat relatif yang diperoleh, maka dapat diketahui bahwa metode *Heun* memiliki keakuratan yang tinggi dalam menyelesaikan model matematika *inositol trisphosphate receptor*.

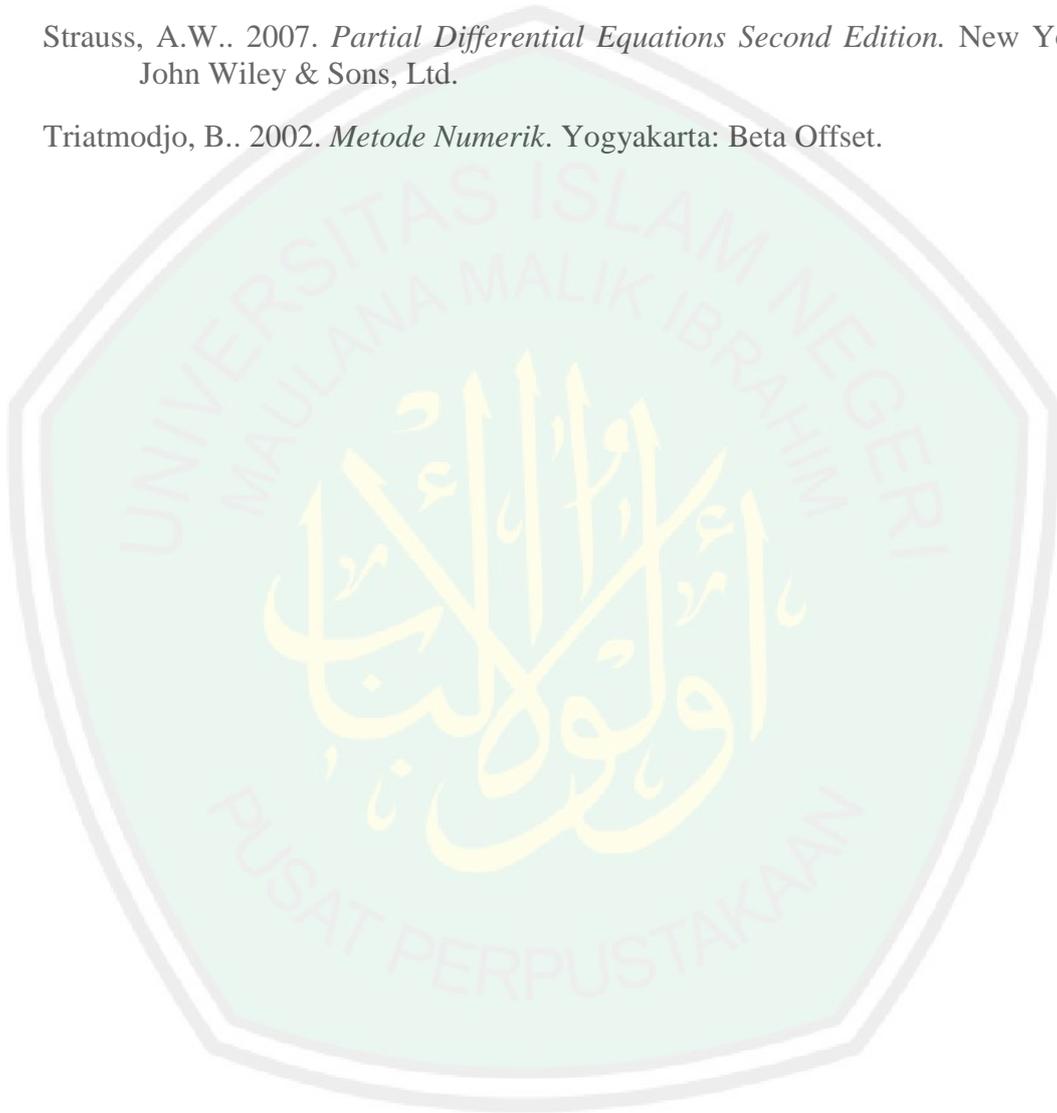
4.2 Saran

Pada penelitian ini penulis telah menyelesaikan solusi numerik model *inositol trisphosphate receptor* tipe-2 menggunakan metode *Heun* dan menguji keakuratannya dengan membandingkan antara solusi numerik dengan solusi analitiknya, namun tentunya masih terdapat banyak kekurangan dalam pemahaman modelnya dikarenakan oleh keterbatasan wawasan penulis, dan juga kelemahan pada solusi analitik dikarenakan oleh keterbatasan kemampuan penulis. Oleh sebab itu, pada penelitian selanjutnya sebaiknya diadakan penelitian yang lebih mendalam tentang analisis model *inositol trisphosphate receptor* dan dilanjutkan dengan menyelesaikannya menggunakan metode yang lain yang memiliki akurasi dan ketepatan yang lebih tinggi serta memperbaiki solusi analitik yang sudah ada.

DAFTAR RUJUKAN

- Boyce dan DiPrima. 2000. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Bronson, R. dan Costa, G.. 2008. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Erlangga.
- Ghali, S.. 2013. Islam dan Interaksi Sosial (Online). ([http:// iain-s.blogspot.co.id/2013/04/islam-dan-interaksi-sosial.html?m=1](http://iain-s.blogspot.co.id/2013/04/islam-dan-interaksi-sosial.html?m=1)). Diakses pada 02 November 2016.
- Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa, Model Matematika; Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Katsir, I.. 2003. *Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 2*. Terjemahan Abdullah bin Muhammad. Bogor: Pustaka Imam Syafi'i.
- Katsir, I.. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 7*. Terjemahan Abdullah bin Muhammad. Bogor: Pustaka Imam Syafi'i.
- Katsir, I.. 2005. *Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 8*. Terjemahan Abdullah bin Muhammad. Bogor: Pustaka Imam Syafi'i.
- Manhas, N., Sneyd, J., dan Pardasani, K.R.. 2014. Modelling the Transition from Simple to Complex Ca^{2+} Oscillations in Pancreatic Acinar Cells. *Biosci*, 39 (3): 463-484.
- Munif, A. dan Hidayatullah, A.P.. 2003. *Cara Praktis Penguasaan dan Penggunaan Metode Numerik*. Surabaya: Guna Widya.
- Munir, R.. 2008. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.
- Neuhauser, C.. 1962. *Calculus 3rd Edition for Biology and Medicine*. New Jersey: Prentice Hall.
- Oktaviani, R., Prihandono, B., dan Helmi. 2014. Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear dengan Metode Heun pada Model Lotka-Volterra. *Bimaster*, 3 (1): 29-38.
- Sahrul. 2001. *Sosiologi Islam*. Medan: IAIN PRESS.
- Sasongko, S.B.. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta: Andi Offset.
- Shihab, M.Q.. 1996. *Wawasan Al-Quran*. Bandung: Mizan.
- Shihab, M.Q.. 2002. *Tafsir Al-Mishbah Volume 8*. Jakarta: Lentera Hati.
- Sneyd, J., LeBau, A., dan Yule, D.. 2000. Traveling Waves of Calcium in Pancreatic Acinar Cells: Model Construction and Bifurcation Analysis. *Physica D*, 145: 158-179.

- Sneyd, J. dan Flacke, M. 2005. Review: Models of The Inositol Trishosphate Receptor. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 89: 207-245.
- Sneyd, J. dan Dufour, J. 2002. A Dynamic Model of The Type-2 Inositol Trisphosphate Receptor. *PNAS*, 99: 2398-2408.
- Soekanto, S.. 1990. *Sosiologi Suatu Pengantar*. Jakarta: Rajawali Press.
- Strauss, A.W.. 2007. *Partial Differential Equations Second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Ltd.
- Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset.



LAMPIRAN

1. Menghitung koefisien model

Program	<pre> k1=0.64; k11=0.04; k2=37.4; k22=1.4; k3=0.11; k33=29.8; k4=4; k44=0.54; L1=0.12; L3=0.025; L5=54.7; l2=1.7; l4=1.7; l6=4707; l22=0.8; l44=2.5; l66=11.4; c=0.01; p=10; phi1= ((k1*L1+l2)*c)/(L1+c*(1+L1/L3)); phi2= (k2*L3+l4*c)/(L3+c*(1+L3/L1)); phi22= (k22+l44*c)/(1+c/L5); phi3= (k3*L5)/(L5+c); phi4= ((k4*L5+l6)*c)/(L5+c); phi44= (L1*(k44+l66))/(L1+c); phi5= ((k1*L1+l2)*c)/(L1+c); </pre>
Output	<pre> phi1 = 0,294172185430464 phi2 = 2,837086092715232 phi22 = 2,625996376811594 phi3 = 0,109003623188406 phi4 = 44,617753623188406 phi44 = 2,310967741935484 phi5 = 1,432903225806452 </pre>

2. Mencari solusi numerik

```

dr=@(o,r,i1,t) phi22*o-phi2*p*r+(k11+l22)*i1-phi1*r;
do=@(r,o,a,s,t) phi2*p*r-(phi22+phi4+phi3)*o+phi44*a+k33*(s);
da=@(o,a,i2,t) phi4*o-phi44*a-phi5*a+(k11+l22)*i2;
di1=@(r,i1,t) phi1*r-(k11+l22)*i1;
di2=@(a,i2,t) phi5*a-(k11+l22)*i2;
ds=@(o,s,t) phi3*o-k33*s;
t=0:0.001:0.1; h=0.001;
r(1)=1; o(1)=0; a(1)=0; i1(1)=0; i2(1)=0; s(1)=0;
n=length(t);
for j=1:n-1
    v(1,j)=dr(o(j),r(j),i1(j),t(j));
    v(2,j)=do(r(j),o(j),a(j),s(j),t(j));
    v(3,j)=da(o(j),a(j),i2(j),t(j));
    v(4,j)=di1(r(j),i1(j),t(j));
    v(5,j)=di2(a(j),i2(j),t(j));
    v(6,j)=ds(o(j),s(j),t(j));

    w(1,j)=dr(o(j)+h*v(2,j),r(j)+h*v(1,j),i1(j)+h*v(4,j),t(j)+1);
    w(2,j)=do(r(j)+h*v(1,j),o(j)+h*v(2,j),a(j)+h*v(3,j),s(j)+h*v(6,j),t(j)+1);
    w(3,j)=da(o(j)+h*v(2,j),a(j)+h*v(3,j),i2(j)+h*v(5,j),t(j)+1);
    w(4,j)=di1(r(j)+h*v(1,j),i1(j)+h*v(4,j),t(j)+1);
    w(5,j)=di2(a(j)+h*v(3,j),i2(j)+h*v(5,j),t(j)+1);
    w(6,j)=ds(o(j)+h*v(2,j),s(j)+h*v(6,j),t(j)+1);
    r(j+1)=r(j)+(v(1,j)+w(1,j))*h/2;

```

```

o(j+1)=o(j)+(v(2,j)+w(2,j))*h/2;
a(j+1)=a(j)+(v(3,j)+w(3,j))*h/2;
i1(j+1)=i1(j)+(v(4,j)+w(4,j))*h/2;
i2(j+1)=i2(j)+(v(5,j)+w(5,j))*h/2;
s(j+1)=s(j)+(v(6,j)+w(6,j))*h/2;
end

```

3. Mencari nilai eigen dan vektor eigen untuk solusi analitik

```

Program
A=[-28.66503312 2.625996376 0 0.84 0 0
    28.37086093 -47.35275362 2.310967742 0 0 29.8
    0 44.61775362 -3.743870968 0 0.84 0
    0.2941721854 0 0 -0.84 0 0
    0 0 1.432903226 0 -0.84 0
    0 0.1090036232 0 0 0 -29.8];
B=eig(A);
[xy,D]=eig(A)
Keterangan: A adalah jacobian dari sistem persamaan model
             D adalah nilai eigen
             xy adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan
             masing-masing nilai eigen
xy =

Columns 1 through 2

    0.080469359958336   -0.368378027584170
   -0.736421201160938   -0.409963765057436
    0.671455011970683    0.832941343716330
   -0.000456440962678    0.004349885606164
   -0.018551807920303   -0.047908634258467
    0.003505078110745   -0.011040802500957

Columns 3 through 4

   -0.554637735350840   -0.003697071379029
    0.230279993878841   -0.037526566625075
   -0.395504899924583   -0.686028484269603
    0.005640982024933    0.000803884546133
    0.019593518163743    0.726596407262466
    0.694628141128374   -0.000148169556337

Columns 5 through 6

   -0.002423682208282    0.022116898198553
   -0.026185089785042    0.013284115497273
   -0.505554388901539   -0.004742242328300
   -0.000848785585649    0.691342293319187
   -0.862393469994382   -0.722051048885716
   -0.000095780861087    0.000049984334288

D =

Columns 1 through 2

   -52.701794650951925     0
         0   -25.752510175949524
         0     0
         0     0
         0     0
         0     0

```

Columns 3 through 4	
0	0
0	0
-29.763863609610631	0
0	-2.192900204862581
0	0
0	0
Columns 5 through 6	
0	0
0	0
0	0
0	0
-0.000000000022968	0
0	-0.830589066602449

4. Menampilkan plot untuk perbandingan solusi analitik dan numerik (Gambar 3.1 – Gambar 3.6)

t=0:0.001:0.004

```

RR=@(t) 0.109480645965658*exp(-
52.701794650951925*t)+0.860345537369516*exp(-
25.752510175949524*t)+(0.024564681286054)*exp(-
29.763863709610631*t)+0.003516941439872*exp(-
2.192900204862581*t)+0.001734297052671*exp(-
0.000000000022968*t)+0.000357896780804*exp(-
0.830589066602449*t)

oo=@(t) (-1.001920095395930)*exp(-
52.701794650951925*t)+0.957468875284044*exp(-
25.752510175949524*t)+(-0.010199007921107)*exp(-
29.763863709610631*t)+0.035698184787148*exp(-
2.192900204862581*t)+0.018677515941120*exp(-
0.000000000022968*t)+0.000214964238186*exp(-
0.830589066602449*t)

AA=@(t) 0.913531914327274*exp(-52.701794650951925*t)+(-
1.945331464681819)*exp(-
25.752510175949524*t)+0.017516752277186*exp(-
29.763863709610631*t)+0.652603576697563*exp(-
2.192900204862581*t)+0.361755961091232*exp(-
0.000000000022968*t)+(-0.0000767392085389)*exp(-
0.830589066602449*t)

II1=@(t) (-0.000620999737851)*exp(-52.701794650951925*t)+(-
0.010159141938714)*exp(-25.752510175949524*t)+(-
0.000249836815548)*exp(-29.763863709610631*t)+(-
0.000764717416386)*exp(-
2.192900204862581*t)+0.000607359469204*exp(-
0.000000000022968*t)+0.011187336442524*exp(-
0.830589066602449*t)

II2=@(t) (-0.025240214610843)*exp(-
52.701794650951925*t)+(0.111890440252500)*exp(-
25.752510175949524*t)+(-0.000867789005846)*exp(-
29.763863709610631*t)+(-0.691194935877817)*exp(-
2.192900204862581*t)+0.617096766293489*exp(-
0.000000000022968*t)+(-0.011684267099846)*exp(-
0.830589066602449*t)

SS=@(t) 0.004768749446039*exp(-

```

```

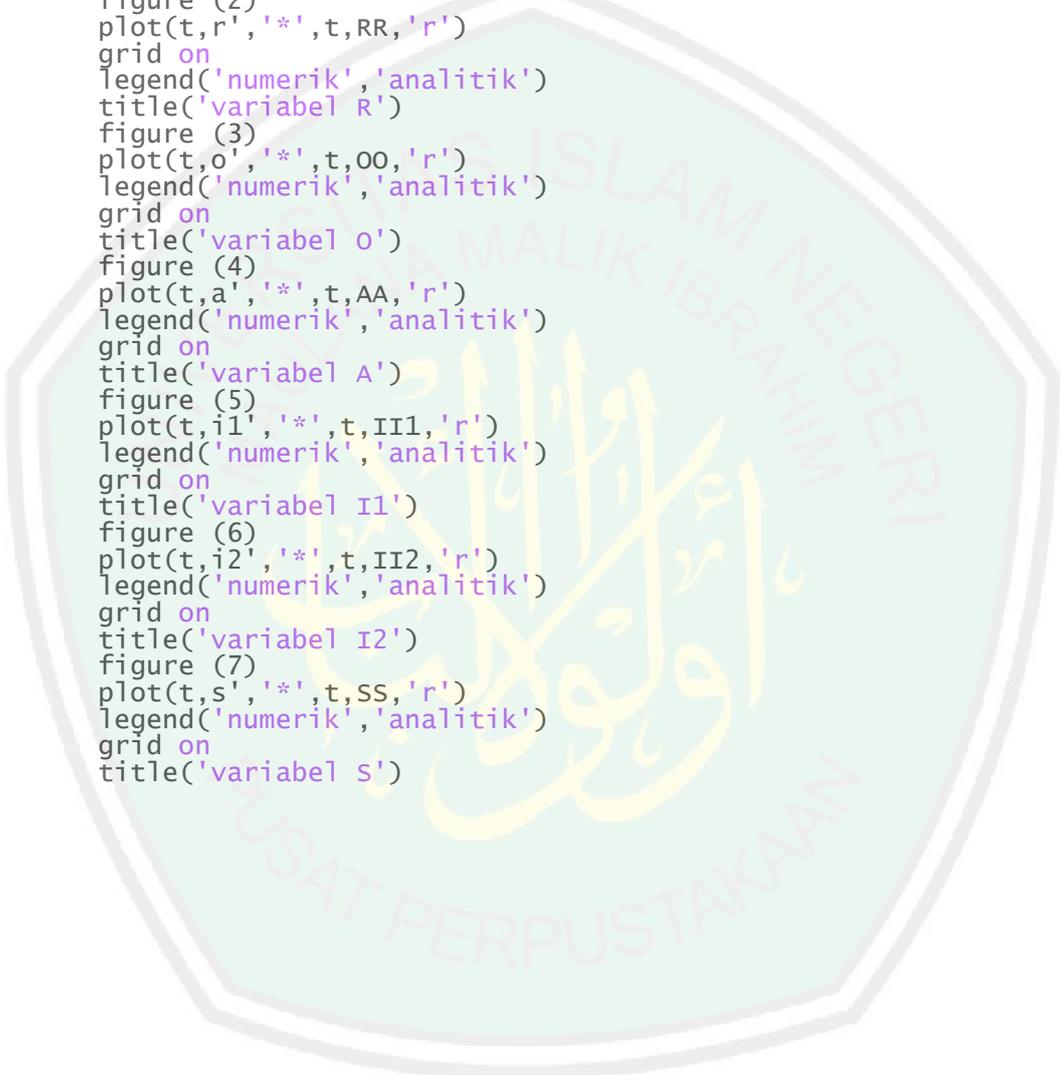
52.701794650951925*t)+0.025785753897893*exp(-
25.752510175949524*t)+(-0.030764799817216)*exp(-
29.763863709610631*t)+0.000140950390021*exp(-
2.192900204862581*t)+0.000068537230053*exp(-
0.00000000022968*t)+0.000000808849061*exp(-
0.830589066602449*t)

```

```

figure (1)
plot(t,r','r',t,o','g',t,a','b',t,i1','m',t,i2','k',t,s')
legend('r','o','a','i1','i2','s')
figure (2)
plot(t,r','*',t,RR,'r')
grid on
legend('numerik','analitik')
title('variabel R')
figure (3)
plot(t,o','*',t,oo,'r')
legend('numerik','analitik')
grid on
title('variabel o')
figure (4)
plot(t,a','*',t,AA,'r')
legend('numerik','analitik')
grid on
title('variabel A')
figure (5)
plot(t,i1','*',t,II1,'r')
legend('numerik','analitik')
grid on
title('variabel I1')
figure (6)
plot(t,i2','*',t,II2,'r')
legend('numerik','analitik')
grid on
title('variabel I2')
figure (7)
plot(t,s','*',t,ss,'r')
legend('numerik','analitik')
grid on
title('variabel s')

```



5. Penjumlahan semua variabel untuk iterasi-iterasi tertentu

	Iterasi ke- i		
	$i = 4$	$i = 6$	$i = 8$
R_i	0,917916135335805	0,867279871510148	0,819659905974229
O_i	0,075913612318799	0,117349679063623	0,152434918834443
A_i	0,005306137502839	0,013937096353608	0,025895764991012
I_{1i}	0,000844521526267	0,001367580346096	0,001860896868249
I_{2i}	0,000006933080488	0,000033148373409	0,000089014969313
S_i	0,000012660235802	0,000032624353116	0,000059498362754
Jumlah	1	1	1
	Iterasi ke- i		
	$i = 9$	$i = 10$	$i = 101$
R_i	0,796918412551391	0,774857724960211	0,072226499205525
O_i	0,167832014811458	0,181914323296650	0,114835696343783
A_i	0,032946783515743	0,040626905428152	0,743237099195587
I_{1i}	0,002096957481089	0,002326234640812	0,009499263798934
I_{2i}	0,000130834167031	0,000183190738007	0,059599610245121
S_i	0,000074997473287	0,000091620936168	0,000601831211049
Jumlah	1	1	1
	Iterasi ke- i		
	$i = 201$	$i = 301$	$i = 401$
R_i	0,009362359205943	0,004218156574662	0,003483046754631
O_i	0,047442775061895	0,037816058292488	0,033772532286494
A_i	0,771376015858391	0,698857745652013	0,633094425735473
I_{1i}	0,009529640707821	0,008926633376434	0,008313803306632
I_{2i}	0,162059418241938	0,250031923357873	0,321207785091503
S_i	0,000229790924012	0,000149482746531	0,000128406825269
Jumlah	1	1	1
	Iterasi ke- i		
	$i = 501$	$i = 601$	$i = 701$
R_i	0,003147625980436	0,002895409341594	0,002692136023632
O_i	0,030806597638297	0,028444827865564	0,026548435804454
A_i	0,579705901195641	0,536786822221160	0,502316116483889
I_{1i}	0,007737149289359	0,007198846990745	0,006697532810504
I_{2i}	0,378486514062687	0,424567246857744	0,461646421372074
S_i	0,000116211833582	0,000106846723195	0,000099357505449
Jumlah	1	1	1
	Iterasi ke- i		
	$i = 801$	$i = 901$	$i = 1001$
R_i	0,002526971283405	0,002392468582002	0,002282731269502
O_i	0,025024369667289	0,023799295816936	0,022814420026263
A_i	0,474633255731250	0,452401838581447	0,434548401327797
I_{1i}	0,006231438459332	0,005798690593794	0,005397380268483
I_{2i}	0,491490623459457	0,515519200481837	0,534872448333889
S_i	0,000093341399269	0,000088505943985	0,000084618774069
Jumlah	1	1	1

RIWAYAT HIDUP



Ruhmaa Mufida, lahir di Kabupaten Sleman pada tanggal 04 September 1994, biasa dipanggil Ruhmaa, tinggal di dusun Kiyudan, Rt. 02 Rw. 01 Selomartani Kecamatan Kalasan Kabupaten Sleman Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta, anak kedua dari lima bersaudara, pasangan alm. bapak Bahauddin dan ibu Aimmatun.

Pendidikan dasar ditempuh di SDN Mojoduwur 1 Kecamatan Ngetos Kabupaten Nganjuk yang ditamatkan pada tahun 2006. Pada tahun yang sama dia melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTs Tajul Ulum Brabo Tanggunharjo Grobogan dan pada tahun 2009 dia menamatkan pendidikannya, kemudian melanjutkan pendidikan menengah atas di lembaga yang sama MA Tajul Ulum dan menamatkan pendidikan tersebut pada tahun 2012. Pendidikan berikutnya dia tempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur Program Beasiswa Santri Berprestasi (PBSB) dengan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.



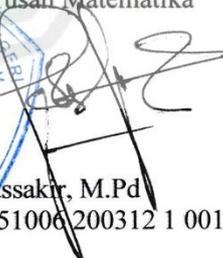
**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ruhmaa Mufida
Nim : 12610101
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Solusi Numerik Model *Inositol Trisphosphate Receptor*
Tipe-2 Menggunakan Metode *Heun*
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M.Si
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No.	Tanggal	Hal	TandaTangan
1.	08 Agustus 2016	Konsultasi Bab I	1.
2.	15 Agustus 2016	Konsultasi Bab II	2.
3.	22 Agustus 2016	Konsultasi Agama Bab I	3.
4.	26 Agustus 2016	Konsultasi Agama Bab II	4.
5.	02 September 2016	Revisi Bab I, Bab II, & Bab III	5.
6.	03 Oktober 2016	Konsultasi Bab III	6.
7.	10 Oktober 2016	Konsultasi Agama Bab III	7.
8.	17 Oktober 2016	Konsultasi Seluruh Bab	8.
9.	24 Oktober 2016	Revisi Agama Bab III	9.
10.	07 November 2016	ACC Keseluruhan	10.
11.	07 November 2016	ACC Agama Keseluruhan	11.

Malang, 08 November 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika


Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121001