

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN NAVIER-STOKES DUA DIMENSI  
DENGAN METODE BEDA HINGGA  
SKEMA *FORWARD TIME CENTRAL SPACE***

**SKRIPSI**

**OLEH  
SITI PATIMAH  
NIM. 12610095**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2016**

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN NAVIER-STOKES DUA DIMENSI  
DENGAN METODE BEDA HINGGA  
SKEMA *FORWARD TIME CENTRAL SPACE***

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh  
Siti Patimah  
NIM. 12610095**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2016**

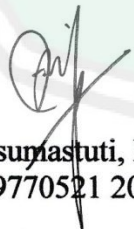
**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN NAVIER-STOKES DUA DIMENSI  
DENGAN METODE BEDA HINGGA  
SKEMA FORWARD TIME CENTRAL SPACE**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Siti Patimah**  
**NIM. 12610095**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 06 Oktober 2016

Pembimbing I,



**Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si**  
NIP. 19770521 200501 2 004

Pembimbing II,



**Fachrur Rozi, M.Si**  
NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika


**Dr. Abdussakir, M.Pd**  
NIP. 19751006 200312 1 001

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN NAVIER-STOKES DUA DIMENSI  
DENGAN METODE BEDA HINGGA  
SKEMA FORWARD TIME CENTRAL SPACE**

**SKRIPSI**

**Oleh  
Siti Patimah  
NIM. 12610095**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Tanggal 26 Oktober 2016

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Ketua Penguji : Hairur Rahman, M.Si

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

Anggota Penguji : Fachrur Rozi, M.Si



Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



**Dr. Abdussakir, M.Pd**  
NIP.19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Siti Patimah

NIM : 12610095

Jurusan : Matematika

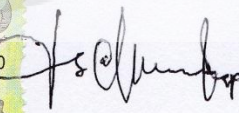
Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Solusi Numerik Persamaan *Navier-Stokes* Dua Dimensi dengan Metode Beda Hingga Skema *Forward Time Central Space*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 06 Oktober 2016  
Yang membuat pernyataan,



  
Siti Patimah  
NIM. 12610095

## MOTO

وَالَّذِينَ آمَنُوا وَعَمِلُوا الصَّالِحَاتِ وَءَامَنُوا بِمَا نُزِّلَ عَلَىٰ مُحَمَّدٍ وَهُوَ الْحَقُّ مِن رَّبِّهِمْ

كُفِّرَ عَنْهُمْ سَيِّئَاتِهِمْ وَأَصْلَحَ بَالَهُمْ

*“Dan orang-orang mukmin dan beramal soleh serta beriman kepada apa yang diturunkan kepada Muhammad dan itulah yang haq dari Tuhan mereka, Allah menghapuskan kesalahan-kesalahan mereka dan memperbaiki keadaan mereka”  
(QS. Muhammad/47:2).*



## PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Almarhum bapak Miftahuddin tercinta

yang telah mengajarkan kemandirian dan ketangguhan pada penulis.

*Emak* Maesaroh yang selalu mendoakan, memberi dukungan dan restunya kepada

penulis dalam menuntut ilmu. Adik tersayang Ayu Fatimah yang selalu

menyemangati dan memberi dukungan penuh sehingga penulis

dapat menyelesaikan kuliah dengan baik.

Serta bapak dan ibu asuh yang membantu membiayai dan senantiasa mendoakan

keberhasilan penulis.

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik, serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si dan Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan berbagai ilmu dan pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Ach. Nasichuddin, M.A, selaku dosen wali yang telah memberikan motivasi dan bimbingan selama kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
6. Seluruh dosen dan pegawai Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu dan bimbingan selama belajar.

7. Alm. bapak Miftahuddin dan *emak* Maesaroh dengan segala ketulusan doa dan usaha beliau yang tak pernah lelah memperjuangkan pendidikan dan segala kebutuhan penulis.
8. Saudara-saudara tersayang yang selalu mendukung dan memberikan semangatnya kepada penulis.
9. Bapak dan Ibu asuh yang senantiasa membimbing dan memberi asupan semangat untuk selalu belajar menjadi insan yang lebih baik.
10. Seluruh teman-teman Jurusan Matematika khususnya angkatan 2012 yang telah memberikan dukungan dan semangat luar biasa bersama-sama dalam mengarungi roda pembelajaran untuk meraih mimpi.
11. Seluruh teman-teman CONSISTENT dan mabna Ummu Salamah kamar 09 yang senantiasa menemani, mendoakan, serta menjadi tempat untuk berbagi.
12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang turut membantu dan memberikan semangat dalam penyelesaian skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas bagi penulis dan pembaca.

*Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Malang, Oktober 2016

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiii
<b>ABSTRAK</b> .....	xiv
<b>ABSTRACT</b> .....	xv
<b>ملخص</b> .....	xvi
 <b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	4
1.3 Tujuan Penelitian .....	4
1.4 Batasan Masalah .....	5
1.5 Manfaat Penelitian .....	5
1.6 Metode Penelitian .....	6
1.7 Sistematika Penulisan .....	7
 <b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Persamaan <i>Navier-Stokes</i> Dua Dimensi .....	8
2.2 Metode Beda Hingga Skema FTCS Persamaan <i>Navier-Stokes</i> Dua Dimensi .....	10
2.3 Metode Beda Hingga Skema Implisit .....	14
2.4 Deret Taylor .....	15
2.5 Kestabilan dan Kekonvergenan .....	16
2.5.1 Analisis Kestabilan .....	16
2.5.2 Analisis Kekonvergenan .....	17

2.6 Teori Umum Mekanika Fluida .....	17
2.7 Pandangan Islam Terhadap Teori Pendekatan dan Teori Fluida .....	19

### **BAB III PEMBAHASAN**

3.1 Skema Implisit FTCS pada Persamaan <i>Navier-Stokes</i> Dua Dimensi	24
3.1.1 Skema Implisit FTCS pada $x$ Momentum dan $y$ Momentum ..	24
3.1.2 Diskritisasi Kondisi Awal dan Kondisi Batas .....	42
3.1.3 Perhitungan Kecepatan dalam Bentuk Matriks .....	42
3.1.4 Contoh Aplikasi .....	46
3.2 Kestabilan dan Kekonvergenan Persamaan <i>Navier-Stokes</i> Dua Dimensi dengan Skema Implisit FTCS .....	52
3.2.1 Analisis Kestabilan .....	53
3.2.2 Analisis Kekonvergenan .....	64
3.3 Interpretasi Analisis Kestabilan dan Kekonvergenan dalam Memperoleh Solusi Numerik Persamaan <i>Navier-Stokes</i> Dua Dimensi dengan Skema Implisit FTCS .....	66
3.4 Pendekatan Solusi Numerik dalam Kajian Islam .....	75

### **BAB IV PENUTUP**

4.1 Kesimpulan .....	77
4.2 Saran .....	77

<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	78
-----------------------------	----

### **LAMPIRAN-LAMPIRAN**

### **RIWAYAT HIDUP**

## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Deret Fourier pada Analisis Kestabilan <i>von Neuman</i> .....	53
Tabel 3.2 Analisis Kestabilan Persamaan <i>Navier-Stokes</i> Dua Dimensi .....	63
Tabel 3.3 Grafik Solusi Numerik pada Persamaan $x$ Momentum .....	67
Tabel 3.4 Grafik Solusi Numerik pada Persamaan $y$ Momentum .....	68
Tabel 3.5 Grafik Solusi Numerik pada $x$ Momentum dan $y$ Momentum dengan $\Delta x = 0,1$ , $\Delta y = 0,1$ , dan $\Delta t = 0,01$ .....	69
Tabel 3.6 Nilai <i>Error</i> Maksimum untuk $u(x, y, t)$ dengan $\Delta t \rightarrow 0$ .....	71
Tabel 3.7 Nilai <i>Error</i> Maksimum untuk $u(x, y, t)$ dengan $\Delta x \rightarrow 0$ .....	72
Tabel 3.8 Nilai <i>Error</i> Maksimum untuk $u(x, y, t)$ dengan $\Delta y \rightarrow 0$ .....	73

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Jaringan Titik Hitung Skema Implisit .....	14
Gambar 3.1 Grafik Pertumbuhan <i>Error</i> $u(x, y, t)$ untuk $\Delta t \rightarrow 0$ .....	70
Gambar 3.2 Grafik Pertumbuhan <i>Error</i> $u(x, y, t)$ untuk $\Delta x \rightarrow 0$ .....	72
Gambar 3.3 Grafik Pertumbuhan <i>Error</i> $u(x, y, t)$ untuk $\Delta y \rightarrow 0$ .....	74



## ABSTRAK

Patimah, Siti. 2016. **Solusi Numerik Persamaan *Navier-Stokes* Dua Dimensi dengan Metode Beda Hingga Skema *Forward Time Central Space***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si (II) Fachrur Rozi, M.Si

**Kata Kunci:** Persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi, metode beda hingga, skema implisit FTCS.

Persamaan *Navier-Stokes* merupakan sistem persamaan diferensial parsial nonlinier yang kompleks. Persamaan seperti ini sangat rumit untuk dikaji secara eksak. Penelitian ini berupaya untuk menganalisis solusi numerik dengan metode beda hingga skema implisit *Forward Time Central Space* (FTCS). Langkah yang digunakan adalah memformulasikan solusi-solusi di setiap titik grid dari persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi untuk mencari kecepatan-kecepatan baru yaitu  $u_{i,j}^{n+1}$  dan  $v_{i,j}^{n+1}$ .

Berdasarkan hasil analisis, skema implisit FTCS stabil tanpa syarat dengan orde *error*  $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2)$  untuk persamaan  $u(x, y, t)$  dan orde *error*  $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2)$  untuk persamaan  $v(x, y, t)$ . Simulasi yang dilakukan menghasilkan grafik yang konvergen menuju nol dan bergerak dalam selang waktu  $\Delta t$ .

## ABSTRACT

Patimah, Siti. 2016. **Numerical Solution of Two Dimensional *Navier-Stokes* Equation Using *Forward Time Central Space* Scheme of Finite Difference Method**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

**Keywords:** Two dimensional *Navier-Stokes* equation, finite difference method, implicit FTCS scheme.

The *Navier-Stokes* equations is a system of complex and nonlinear partial differential equations. The equations are very complicated to be exactly examined. This research attempt to analyze the numerical solutions using implicit Forward Time Central Space (FTCS) scheme of finite difference methods. The step used is formulating the solutions at every point of the grid from the two dimensional *Navier-Stokes* equations to determine new velocities are  $u_{i,j}^{n+1}$  and  $v_{i,j}^{n+1}$ .

Based on the results of the analysis, the implicit FTCS scheme unconditionally stable with order errors  $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2)$  for  $u(x, y, t)$  equation and  $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2)$  for  $v(x, y, t)$ . The simulation obtained the graph that converges towards zero and respect to time interval  $\Delta t$ .

## ملخص

فاطمة، ستي. ٢٠١٦. الحل العددي للمعادلة *Navier-Stokes* ثنائي الأبعاد بطريقة الفرق المحدود مخطط *Forward Time Central Space*. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (I) أرى كوسوماستوتي الماجستير (II) فخرالرازي الماجستير.

الكلمات الرئيسية: المعادلة *Navier-Stokes* ثنائي الأبعاد، طريقة الفرق المحدود، مخطط الضمني. FTCS

معادلات *Navier-Stokes* هي نظام من المعادلات التفاضلية الجزئية من غير الخطية ومعقدة. المعادلات مثل هذا معقد للغاية لفحصها تحليلية. وتحاول هذه الدراسة تحليل الحلول العددية بطريقة الفرق المحدود المخطط الضمني *Forward Time Central Space* (FTCS). الخطوات المستخدمة لحل عند كل نقطة في الشبكة من معادلات *Navier-Stokes* ثنائي الأبعاد للبحث للسرعة الجديدة أي  $u_{i,j}^{n+1}$  و  $v_{i,j}^{n+1}$ . وبناء على نتائج التحليل، والمخطط الضمني FTCS مستقرة دون قيد أو شرط مع أخطاء النظام  $O(\Delta t) + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2)$  لمعادلة  $u(x, y, t)$  و  $O(\Delta t) + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2)$  لمعادلة  $v(x, y, t)$ . ويتم تلك المحاكاة حصلت على الرسم البياني يتقارب نحو الصفر إلى الفاصل الزمني  $\Delta t$ .

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Aliran fluida merupakan fenomena alam yang sering diamati dan menjadi sorotan para peneliti. Aliran fluida dapat diamati secara makroskopis dan mikroskopis. Adapun aliran fluida yang dapat diamati secara makroskopis di antaranya aliran angin di atmosfer, aliran air di sungai, dan pergerakan awan. Sedangkan aliran fluida yang dapat diamati secara mikroskopis salah satunya adalah aliran pembuluh darah. Permasalahan-permasalahan seperti fluida ini dapat dimodelkan dalam bentuk matematis agar lebih mudah untuk dipelajari dan dihitung penyelesaiannya.

Manusia merupakan makhluk yang memiliki banyak keterbatasan. Salah satunya adalah keterbatasan dalam menghitung. Allah berfirman dalam al-Quran surat Ibrahim/14:34, yaitu:

وَأَتَّكُم مِّن كُلِّ مَا سَأَلْتُمُوهُ وَإِن تَعُدُّوا نِعْمَتَ اللَّهِ لَا تَحْصُوهَا ۗ إِنَّ  
الْإِنسَانَ لَظَلُومٌ كَفَّارٌ ﴿٣٤﴾

*“Dan Dia telah memberikan kepadamu segala apa yang kamu mohon kepada-Nya. Dan jika kamu menghitung nikmat Allah, niscaya kamu tidak dapat menghitungnya. Sungguh manusia itu sangat zalim dan sangat mengingkari (nikmat Allah)” (QS. Ibrahim/14:34).*

Ayat di atas menjelaskan bahwa manusia tidak dapat menghitung nikmat yang Allah berikan. Hal itu disebabkan karena keterbatasan manusia dalam menghitung. Banyak hal di dunia ini yang tidak semuanya dapat dihitung secara tepat oleh manusia. Salah satunya ialah permasalahan dalam pemodelan

matematika. Dengan adanya keterbatasan, tidak semua model dapat dicari solusi eksaknya. Oleh karena itu dibutuhkan suatu metode untuk menghitung solusi sebuah model yang mendekati solusi eksaknya, yaitu metode numerik.

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan seperti dalam bidang teknik, fisika, kimia, dan ekonomi. Dalam skala makroskopis, dinamika fluida dapat dijelaskan dan dimodelkan dengan persamaan *Navier-Stokes* (Guo, dkk, 2006).

Persamaan *Navier-Stokes* adalah persamaan yang disajikan dalam bentuk sistem berpasangan yang menjelaskan pergerakan suatu fluida baik cairan maupun gas. Persamaan-persamaan ini menyatakan bahwa perubahan momentum partikel-partikel fluida bergantung pada gaya gesekan (*viskositas*) yang bekerja pada fluida. Dengan kata lain persamaan *Navier-Stokes* menjelaskan kesetimbangan gaya-gaya yang bekerja pada fluida. Persamaan *Navier-Stokes* merupakan sistem persamaan diferensial parsial nonlinier orde dua yang kompleks dengan memiliki satu atau lebih turunan-turunan parsial (Hapsoro dan Srigutomo, 2013).

Persamaan *Navier-Stokes* merupakan persamaan yang dapat diselesaikan secara eksak. Namun pada kenyataannya, dalam beberapa kasus untuk mencari penyelesaian secara eksak merupakan hal yang cukup rumit. Oleh karena itu, perlu dilakukan pendekatan numerik untuk menyelesaikannya sehingga lebih efisien. Metode penyelesaian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode beda hingga (*finite difference*) skema *Forward Time Central Space* (FTCS). Metode beda hingga adalah metode numerik yang menggunakan pendekatan solusi persamaan diferensial untuk menentukan fungsi diskrit yang memenuhi

keterkaitan antara turunan fungsi dalam ruang dan/atau waktu dengan syarat batas sepanjang tepi domain (LeVeque, 2007).

Solusi dan pemodelan aliran fluida dua dimensi secara numerik dan metode beda hingga telah banyak dikembangkan, salah satunya adalah penelitian yang dilakukan oleh Kusumastuti (2002) membahas solusi numerik persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi dengan kondisi batas  $u = v = 0$  menggunakan metode *Alternating Direct Implicit* (ADI) dengan fluida bersifat tak termampatkan. Suryono (2011) membahas simulasi numerik perpindahan panas aliran udara dengan metode ADI untuk menentukan solusi  $u$  dan  $v$ . Mutholi'ah (2008) menyatakan bahwa metode beda hingga skema implisit lebih mudah digunakan daripada skema *Crank-Nicholson* untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Kemudian Hasan (2015) menyatakan bahwa metode beda hingga skema implisit merupakan metode numerik dengan ketelitian yang tinggi. Oleh karena itu penulis meneliti bagaimana persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS.

Persamaan *Navier-Stokes* sering kali digunakan para peneliti di Badan Meteorologi, Klimatologi dan Geofisika (BMKG) untuk meramalkan keadaan alam terutama pada aliran fluida di atmosfer. Dengan adanya penelitian ini diharapkan penelitian ini dijadikan referensi dan dilanjutkan dengan tindakan untuk mengurangi dampak kerusakan alam.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis menyusun sebuah penelitian dengan judul “Solusi Numerik Persamaan *Navier-Stokes* Dua Dimensi dengan Metode Beda Hingga Skema *Forward Time Central Space*”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka dapat dibuat rumusan masalah penelitian sebagai berikut.

1. Bagaimana skema numerik implisit FTCS untuk persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi?
2. Bagaimana analisis kestabilan dan kekonvergenan persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi dengan skema implisit FTCS?
3. Bagaimana hasil interpretasi analisis kestabilan dan kekonvergenan dalam memperoleh solusi numerik persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi dengan skema implisit FTCS?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka dapat diketahui tujuan penelitian sebagai berikut.

1. Mengetahui skema numerik implisit FTCS untuk persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi.
2. Mengetahui analisis kestabilan dan kekonvergenan persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi dengan skema implisit FTCS.
3. Mengetahui hasil interpretasi analisis kestabilan dan kekonvergenan dalam memperoleh solusi numerik persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi dengan skema implisit FTCS.

### 1.4 Batasan Masalah

Beberapa batasan masalah yang terdapat dalam penelitian ini di antaranya sebagai berikut:

1. Persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi yang dibahas pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$x \text{ momentum: } \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$y \text{ momentum: } \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

dengan kondisi batas:

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, 1, t) = 0$$

$$v(0, y, t) = 0, \quad v(1, y, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = 0, \quad v(x, 1, t) = 0$$

(Scheffel, 2001)

2. Penelitian menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS.
3. Persamaan memiliki tiga variabel, dua variabel kecepatan dicari yaitu  $u$  dan  $v$ , dan satu variabel diketahui di semua titik grid yaitu  $p$  (tekanan).

### 1.5 Manfaat Penelitian

Beberapa manfaat yang terdapat dalam penelitian ini, di antaranya sebagai berikut.

1. Memperoleh penyelesaian secara numerik dari persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi sebagai tolak ukur kemampuan untuk diterapkan pada permasalahan di lapangan.
2. Menginformasikan simulasi persamaan *Navier-Stokes* untuk mengembangkan keilmuan khususnya matematika terapan.
3. Menjadi referensi yang dapat dikembangkan untuk penelitian lebih lanjut.

## 1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan penulis adalah studi literatur dengan mempelajari dan menelaah beberapa buku, jurnal, dan referensi lain yang mendukung penelitian ini. Penulis terlebih dahulu melakukan studi literatur mengenai analisis numerik terhadap persamaan *Navier-Stokes*. Solusi numerik dilakukan dengan metode beda hingga skema implisit FTCS.

Untuk mencari solusi persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diberikan persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi beserta kondisi awal dan kondisi batasnya.
2. Melakukan diskritisasi persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi dengan menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS.
3. Melakukan diskritisasi kondisi awal dan kondisi batas dengan metode beda hingga skema implisit FTCS.
4. Mensubstitusikan bentuk diskrit kondisi awal dan kondisi batas pada bentuk diskrit persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi.
5. Mensubstitusikan nilai  $x$ ,  $y$ , dan  $t$  sesuai kondisi awal dan kondisi batas.
6. Mengubah persamaan menjadi bentuk matriks-matriks untuk mencari nilai  $u$  dan  $v$ .
7. Melakukan analisis kestabilan dan kekonvergenan solusi persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi dengan skema implisit FTCS.
8. Mensimulasikan hasil dari analisis kestabilan dan kekonvergenan dalam memperoleh solusi numerik persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi dengan

skema implisit FTCS untuk mengetahui nilai  $u$  dan  $v$  baru menggunakan program MATLAB.

9. Melakukan interpretasi grafik terhadap hasil simulasi dari solusi numerik persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi.

### 1.7 Sistematika Penulisan

Agar pembahasan dalam penelitian ini tersaji secara sistematis dan mempermudah pembaca untuk memahaminya, penulis menggunakan sistematika sebagai berikut.

#### Bab I Pendahuluan

Bab ini membahas hal-hal yang melatarbelakangi penulisan, umusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

#### Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan mengenai landasan teori yang digunakan dalam penulisan, yaitu persamaan *Navier-Stokes*, metode beda hingga skema FTCS persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi, metode beda hingga skema implisit, deret Taylor, kestabilan dan kekonvergenan, teori umum mekanika fluida, dan pandangan Islam terhadap teori pendekatan dan teori fluida.

#### Bab III Pembahasan

Bab ini menjelaskan bagaimana mencari solusi numerik persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS.

#### Bab IV Penutup

Bab ini menyimpulkan hasil penelitian dan beberapa saran.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Persamaan *Navier-Stokes* Dua Dimensi

Mekanika Fluida adalah cabang dari ilmu fisika yang mempelajari mengenai zat fluida (cair, gas, dan plasma) dan gaya yang bekerja padanya. Mekanika fluida dapat dibagi menjadi statika fluida, ilmu yang mempelajari keadaan fluida saat diam; kinematika fluida, ilmu yang mempelajari fluida yang bergerak; dan dinamika fluida, ilmu yang mempelajari efek gaya pada fluida yang bergerak. Mekanika fluida, terutama dinamika fluida, adalah bidang penelitian utama dengan banyak hal yang belum terselesaikan atau hanya sebagian yang terselesaikan. Mekanika fluida dapat menjadi sangat rumit secara matematika dan sangat tepat untuk diselesaikan dengan metode numerik, biasanya dengan menggunakan perhitungan komputer. Dinamika fluida komputasi adalah salah satu disiplin yang dikhususkan untuk penyelesaian masalah mekanika fluida dengan pendekatan numerik. Pada penelitian ini dibahas mengenai serangkaian persamaan yang menjelaskan pergerakan dari suatu fluida seperti cairan dan gas yang disebut dengan persamaan *Navier-Stokes* (Kanginan, 2006).

Persamaan *Navier-Stokes* adalah sistem persamaan diferensial parsial nonlinier orde kedua yang menggambarkan aliran fluida yang ditemukan oleh ahli matematika Perancis, L.M.H. Navier (1758-1836) dan Sir George Gabriel Stokes (1819-1903). Persamaan tersebut merupakan sistem dari persamaan momentum dan persamaan kontinuitas yang dapat berlaku pada aliran fluida laminar atau turbulen (Munson, dkk, 2004:410).

Scheffel (2001) menyatakan bahwa persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan berikut:

$$\begin{aligned} x \text{ momentum: } \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ y \text{ momentum: } \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

dengan kondisi batas

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, 1, t) = 0$$

$$v(0, y, t) = 0, \quad v(1, y, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = 0, \quad v(x, 1, t) = 0$$

dengan

$u, v, p$  : variabel tak bebas

$x, y$  : variabel bebas berupa koordinat ruang

$t$  : variabel bebas berupa waktu

$Re$  : bilangan *Reynolds*

Definisi bilangan *Reynolds* ( $Re$ ):

$$Re = \frac{\rho u d}{\mu} \quad (2.2)$$

dengan  $u$  adalah kecepatan,  $d$  diameter pipa,  $\rho$  densitas fluida, dan  $\mu$  viskositas absolut fluida (Godwin dan Dugdale, 1986).

Bilangan *Reynolds* adalah nilai rata-rata beberapa parameter untuk transisi aliran fluida (Ding dan Kawahara, 1998). Dalam mekanika fluida, bilangan *Reynolds* merupakan perbandingan antara gaya inersia ( $\rho u d$ ) terhadap gaya viskositas ( $\mu$ ) yang mengkuantifikasi hubungan gaya tersebut dengan suatu kondisi aliran tertentu. Bilangan ini juga dapat mengidentifikasi jenis aliran yang berbeda, yaitu laminar dan turbulen.

## 2.2 Metode Beda Hingga Skema FTCS Persamaan *Navier-Stokes* Dua

### Dimensi

Strauss (1992:199) menyatakan bahwa metode beda hingga merupakan metode yang sangat umum dalam menyelesaikan masalah-masalah persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial, yang didasarkan pada ekspansi deret Taylor. Metode FTCS untuk menyelesaikan persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi (2.1) membutuhkan turunan parsial  $\frac{\partial}{\partial t}u(x, y, t)$  menggunakan beda maju untuk turunan waktu dan  $\frac{\partial}{\partial x}u(x, y, t)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}u(x, y, t)$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, y, t)$ , dan  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x, y, t)$  menggunakan beda pusat untuk turunan ruang begitupun untuk fungsi  $v(x, y, t)$ . Untuk memperoleh turunan beda hingga maka dilakukan ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

Jika diberikan fungsi  $u(x + \Delta x, y, t)$ ,  $u(x - \Delta x, y, t)$ ,  $u(x, y + \Delta y, t)$ ,  $u(x, y - \Delta y, t)$ ,  $u(x, y, t + \Delta t)$ , dan  $u(x, y, t - \Delta t)$ , maka ekspansi deret Taylor dari fungsi  $u(x + \Delta x, y, t)$  dan  $u(x - \Delta x, y, t)$  didekati di sekitar  $u(x, y, t)$  dinyatakan sebagai berikut:

$$u(x + \Delta x, y, t) = u(x, y, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t)\Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t)\Delta x^2 + \dots \quad (2.3)$$

dan

$$u(x - \Delta x, y, t) = u(x, y, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t)\Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t)\Delta x^2 - \dots \quad (2.4)$$

Ekspansi deret Taylor dari fungsi  $u(x, y + \Delta y, t)$  dan  $u(x, y - \Delta y, t)$  didekati di sekitar  $u(x, y, t)$  dinyatakan:

$$u(x, y + \Delta y, t) = u(x, y, t) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t)\Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t)\Delta y^2 + \dots \quad (2.5)$$

dan

$$u(x, y - \Delta y, t) = u(x, y, t) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t)\Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t)\Delta y^2 - \dots \quad (2.6)$$

Ekspansi deret Taylor dari fungsi  $u(x, y, t + \Delta t)$  dan  $u(x, y, t - \Delta t)$  didekati di sekitar  $u(x, y, t)$  dinyatakan:

$$u(x, y, t + \Delta t) = u(x, y, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t)\Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t)\Delta t^2 + \dots \quad (2.7)$$

dan

$$u(x, y, t - \Delta t) = u(x, y, t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t)\Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t)\Delta t^2 - \dots \quad (2.8)$$

Turunan hampiran pertama terhadap  $x$  untuk beda pusat dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan (2.3) dan persamaan (2.4), sehingga diperoleh:

$$u(x + \Delta x, y, t) - u(x - \Delta x, y, t) = 2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t)\Delta x + \dots \quad (2.9)$$

atau

$$2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) = u(x + \Delta x, y, t) - u(x - \Delta x, y, t) + \mathcal{O}(\Delta x)^3. \quad (2.10)$$

Sehingga dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, t) = \frac{u(x + \Delta x, y, t) - u(x - \Delta x, y, t)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^3. \quad (2.11)$$

Jika digunakan indeks  $i$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $x$ ,  $j$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $y$ , dan  $n$  untuk menyatakan titik diskrit pada  $t$ , maka persamaan (2.11) dapat ditulis:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x}. \quad (2.12)$$

Adapun aproksimasi turunan kedua terhadap  $x$  untuk beda pusat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.3) dengan persamaan (2.4) sebagai berikut:

$$u(x + \Delta x, y, t) + u(x - \Delta x, y, t) = 2u(x, y, t) + 2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t)\Delta x^2 + \dots \quad (2.13)$$

atau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t)\Delta x^2 = u(x + \Delta x, y, t) - 2u(x, y, t) + u(x - \Delta x, y, t) + \mathcal{O}(\Delta x)^4. \quad (2.14)$$

Sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) = \frac{u(x + \Delta x, y, t) - 2u(x, y, t) + u(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^4. \quad (2.15)$$

Jika digunakan indeks  $i$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $x$ ,  $j$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $y$ , dan  $n$  untuk menyatakan titik diskrit pada  $t$ , maka persamaan (2.15) dapat ditulis:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}. \quad (2.16)$$

Menggunakan cara yang sama turunan hampiran pertama terhadap  $y$  untuk beda pusat dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan (2.5) dan persamaan (2.6), sehingga diperoleh:

$$u(x, y + \Delta y, t) - u(x, y - \Delta y, t) = 2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t)\Delta y + \dots \quad (2.17)$$

atau

$$2\Delta y \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t) = u(x, y + \Delta y, t) - u(x, y - \Delta y, t) + \mathcal{O}(\Delta y)^3. \quad (2.18)$$

Sehingga dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y, t) = \frac{u(x, y + \Delta y, t) - u(x, y - \Delta y, t)}{2\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y)^3. \quad (2.19)$$

Jika digunakan indeks  $i$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $x$ ,  $j$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $y$ , dan  $n$  untuk menyatakan titik diskrit pada  $t$ , maka persamaan (2.19) dapat ditulis:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y}. \quad (2.20)$$

Begitu juga dengan turunan kedua terhadap  $y$  untuk beda pusat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.5) dengan persamaan (2.6) diperoleh:

$$u(x, y + \Delta y, t) + u(x, y - \Delta y, t) = 2u(x, y, t) + 2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \Delta y^2 + \dots \quad (2.21)$$

atau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \Delta y^2 = u(x, y + \Delta y, t) - 2u(x, y, t) + u(x, y - \Delta y, t) + \mathcal{O}(\Delta y)^4. \quad (2.22)$$

Sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) = \frac{u(x, y + \Delta y, t) - 2u(x, y, t) + u(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2} + \mathcal{O}(\Delta y)^4. \quad (2.23)$$

Jika digunakan indeks  $i$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $x$ ,  $j$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $y$ , dan  $n$  untuk menyatakan titik diskrit pada  $t$ , maka persamaan (2.23) dapat ditulis:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (2.24)$$

Adapun turunan pertama terhadap  $t$  untuk beda maju dilakukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor dari persamaan (2.7) yang dipotong sampai orde pertama sehingga diperoleh:

$$u(x, y, t + \Delta t) = u(x, y, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t)^2. \quad (2.25)$$

Atau dapat ditulis:

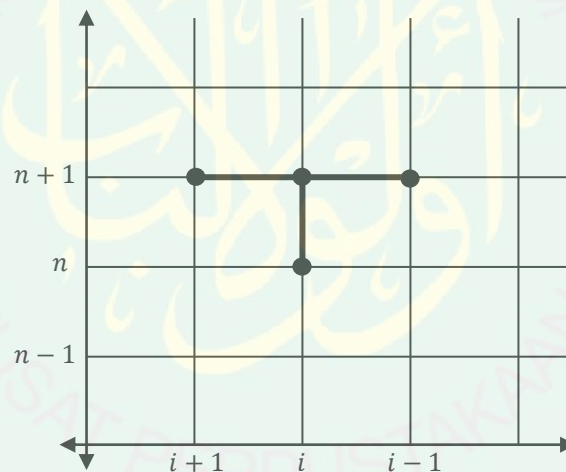
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \frac{u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)^2. \quad (2.26)$$

Jika digunakan indeks  $i$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $x$ ,  $j$  untuk menyatakan titik diskrit pada arah  $y$ , dan  $n$  untuk menyatakan titik diskrit pada  $t$ , maka persamaan (2.26) dapat ditulis:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}. \quad (2.27)$$

### 2.3 Metode Beda Hingga Skema Implisit

Dalam skema eksplisit, ruas kanan ditulis pada waktu  $n$  yang nilainya sudah diketahui. Sedang pada skema implisit ruas kanan ditulis pada waktu  $n + 1$  di mana nilainya belum diketahui. Penyelesaian dengan menggunakan skema implisit lebih sulit dibanding dengan skema eksplisit. Tetapi skema implisit mempunyai kelebihan yang sangat penting yaitu bahwa skema tersebut stabil tanpa syarat. Langkah waktu  $\Delta t$  dapat diambil sembarang (besar) tanpa menimbulkan ketidak-stabilan. Pembatasan  $\Delta t$  hanya untuk menjaga kesalahan pemotongan (*truncation error*) dalam batas-batas yang dapat diterima (Triatmodjo, 2002).



Gambar 2.1 Jaringan Titik Hitung Skema Implisit

Gambar 2.1 menunjukkan jaringan titik hitungan dari skema implisit. Dari gambar tersebut, variabel di titik  $i$  pada waktu ke  $n + 1$  dipengaruhi oleh variabel di titik  $i$  yang sudah diketahui nilainya serta variabel di titik  $i - 1$  pada waktu ke  $n + 1$  dan variabel di titik  $i + 1$  pada waktu ke  $n + 1$  yang belum diketahui nilainya.

## 2.4 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Persamaan deret Taylor dari  $y = f(x)$  di sekitar  $x_0, y_0$  adalah sebagai berikut:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (2.28)$$

Asal dari persamaan (2.28) adalah sebagai berikut:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3(2a_3(x - x_0)) + 4(2a_4(x - x_0)^2) + \dots$$

$$f'''(x) = 3(2a_3) + 4(2a_4(x - x_0)) + \dots$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = n!(a_n) + (n + 1)!a_{n+1}(x - x_0) + (n + 2)!a_{n+2}(x - x_0)^2 + \dots$$

Kemudian, pada fungsi awal dan fungsi-fungsi turunan tersebut, jika ditetapkan  $x = x_0$  maka:

$$f(x_0) = a_0$$

$$f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x_0) = 2! a_2$$

$$f'''(x_0) = 3! a_3$$

$$\vdots$$

$$f^n(x_0) = n! a_n.$$

Dengan memasukkan nilai  $a_0, a_1, a_2, a_3$  dan seterusnya, maka deret Taylor pun terbukti seperti pada persamaan (2.28) (Purcell dan Varberg, 1987).

Menurut Chapra dan Canale (1988) jika dimiliki fungsi dari dua variabel independen  $u$  dan  $v$ , maka deret Taylor dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(u_{i+1}, v_{i+1}) &= f(u_i, v_i) + \frac{\partial f}{\partial u}(u_{i+1} - u_i) + \frac{\partial f}{\partial v}(v_{i+1} - v_i) \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} (u_{i+1} - u_i)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} (u_{i+1} - u_i)(v_{i+1} - v_i) \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} (v_{i+1} - v_i)^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

dengan semua turunan parsial dihitung pada titik  $i$ . Jika semua suku orde-kedua dan yang lebih tinggi dibuang, maka persamaan (2.29) dapat dipecahkan untuk:

$$\Delta f(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| \Delta \tilde{u} + \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right| \Delta \tilde{v} \quad (2.30)$$

dengan  $\tilde{u}$  dan  $\tilde{v}$  masing-masing adalah taksiran galat-galat dalam  $u$  dan  $v$ .

## 2.5 Kestabilan dan Kekonvergenan

### 2.5.1 Analisis Kestabilan

Dalam menyelesaikan persamaan beda hingga perlu memperhatikan batas-batas nilai dari parameter yang dilibatkan dalam masalah. Oleh karena itu harus dilakukan analisis kestabilan persamaan beda hingga tersebut. Metode yang akan digunakan untuk menganalisis kestabilan persamaan beda dalam masalah ini adalah metode *von Neumann*. Dalam metode ini digunakan komponen Fourier  $u_i^n = \rho^n e^{I P(\Delta x) i}$  dengan  $I = \sqrt{-1}$ ,  $\rho^n$  merupakan amplitudo pada waktu  $n$  dan  $P$  merupakan gelombang (*wave number*) pada arah  $x$ .

Selanjutnya untuk  $u_{i,j}^n = \rho^n e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y j)}$ ,  $u_{i,j}^{n\pm 1} = \rho^{n\pm 1} e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y j)}$ ,  $u_{i\pm 1,j}^n = \rho^n e^{I(P\Delta x(i\pm 1) + Q\Delta y j)}$  dan  $u_{i,j\pm 1}^n = \rho^n e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y(j\pm 1))}$  dengan mendefinisikan sudut fase  $\theta = P\Delta x$  dan  $\omega = Q\Delta y$ . Komponen Fourier tersebut

kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan beda hingga yang akan digunakan dan selanjutnya akan ditentukan kondisi  $|\rho| \leq 1$ . Pada kondisi tersebut metode yang digunakan dikatakan stabil (Miersemann, 2012).

### 2.5.2 Analisis Kekonvergenan

Candra (2011:24) menyatakan bahwa solusi kriteria kekonvergenan dengan sendirinya akan terpenuhi jika  $\Delta x, \Delta y$ , dan  $\Delta t$  mendekati nol atau konvergen menuju nol. Artinya skema dikatakan konvergen terhadap Persamaan Diferensial Parsial (PDP) jika selisih antara persamaan tersebut dengan suku suku *truncation error* pada PDP menuju nol.

### 2.6 Teori Umum Mekanika Fluida

Mekanika fluida adalah disiplin ilmu bagian dari bidang mekanika terapan yang mengkaji perilaku dari zat-zat cair dan gas dalam keadaan diam ataupun bergerak (Munson, dkk, 2004:3). Mekanika fluida berkembang sejalan dengan perjalanan perkembangan peradaban manusia. Banyak aspek kehidupan manusia yang terkait dengan mekanika fluida, seperti transportasi, industri, aerodinamik bangunan, dan kesehatan. Ilmu mekanika fluida sudah ada sejak zaman pra sejarah. Hal tersebut dibuktikan dengan adanya beberapa hal yang berkaitan dengan permasalahan fluida (Olson dan Wright, 1993:5).

Banyak kriteria yang dapat digunakan untuk mengklasifikasikan fluida. Sebagai contoh, aliran dapat digolongkan sebagai aliran *steady* atau *unsteady*, laminar atau turbulen, dan dapat mampat atau tidak dapat mampat. Aliran disebut *steady* bila kondisi-kondisi dalam medan aliran tidak bervariasi terhadap waktu, aliran yang tidak demikian tentu saja disebut aliran *unsteady* atau tidak *steady*.

Aliran air yang konstan di dalam sebuah pipa bersifat *steady*, akan tetapi pada saat aliran katup alirannya sedang dibuka atau sedang ditutup aliran itu tidak *steady*. (Olson dan Wright, 1993:344).

Aliran dianggap tak dapat mampat (*incompressible*) bila perubahan kerapatan fluida dapat diabaikan. Semua aliran zat cair dan aliran gas pada kecepatan rendah boleh dianggap aliran yang tidak dapat mampat. Efek sifat dapat mampat suatu aliran gas menjadi penting hanya bila kecepatan aliran itu bertambah (Olson dan Wright, 1993:227).

Sebuah klasifikasi yang penting sekali adalah klasifikasi yang menggolongkan aliran sebagai aliran laminer atau turbulen. Perbedaan ini didasarkan pada karakteristik internal aliran dan menentukan analisis macam apa yang boleh diterapkan. Apabila sebuah aliran mempunyai kecepatan yang relatif rendah atau fluidanya sangat viskous, aliran yang demikian disebut aliran laminer. Aliran laminer bersifat *steady* menunjukkan bahwa di seluruh aliran air debit alirannya tetap atau kecepatan aliran tidak berubah menurut waktu. Untuk membedakan aliran apakah turbulen atau laminer, terdapat suatu angka tidak bersatuan yang disebut bilangan *Reynolds* (Olson dan Wright, 1993:330). Yilmaz (1982) menyatakan bahwa bilangan *Reynolds* tersebut akan mempengaruhi penurunan tekanan, sehingga menyebabkan aliran menjadi turbulen. Apabila  $Re < 2000$  maka aliran akan bersifat laminar dan akan menjadi turbulen jika  $Re > 4000$ . Sedangkan apabila  $2000 < Re < 4000$  maka disebut aliran kritis.

## 2.7 Pandangan Islam terhadap Teori Pendekatan dan Teori Fluida

Allah maha mengetahui atas segala sesuatu, ilmu-Nya meliputi segala sesuatu, dan Allah mampu menghitung jumlah segala sesuatu, tidak akan terlepas meski hanya sebesar biji sawi. Tidak ada satu daun pun yang jatuh kecuali Allah mengetahuinya dan tidak ada satu bijipun di kegelapan bumi, tidak ada yang basah dan tidak pula yang kering melainkan tertulis di kitab yang nyata (*lauh mahfud*) (Ghofar, 2008).

Begitu terperinci Allah mengatur semuanya. Bahkan segala sesuatu yang ada di jagat raya telah ditetapkan baik hukum, ketentuan, ukuran, ataupun sifatnya termasuk pola bilangan matematika dan berbagai macam aliran fluida. Pada penelitian ini dibahas aliran fluida yang dengan cara matematis menggunakan metode beda hingga. Apapun yang ada di dunia ini Allah telah mengaturnya, sehingga semua yang diciptakan memberi manfaat satu sama lain. Antara makhluk hidup, benda mati, yang ada di langit dan yang ada di bumi semua memiliki peran masing-masing yang telah tercatat rapi.

Allah berfirman dalam QS. al-A'raaf/7:57,

وَهُوَ الَّذِي يُرْسِلُ الرِّيحَ بُشْرًا بَيْنَ يَدَيْ رَحْمَتِهِ ۗ حَتَّىٰ إِذَا أَقْلَّتْ سَحَابًا  
ثِقَالًا سُقْنَهُ لِبَلَدٍ مَّيِّتٍ فَأَنْزَلْنَا بِهِ الْمَاءَ فَأَخْرَجْنَا بِهِ ۖ مِنْ كُلِّ الثَّمَرَاتِ ۗ كَذَٰلِكَ  
خُجِرَ الْمَوْتَىٰ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ ﴿٥٧﴾

“Dan Dialah yang meniupkan angin sebagai pembawa berita gembira sebelum kedatangan rahmat-Nya (hujan); hingga apabila angin itu telah membawa awan mendung, Kami halau ke suatu daerah yang tandus, lalu Kami turunkan hujan di daerah itu, maka Kami keluarkan dengan sebab hujan itu berbagai macam buah-buahan. Seperti itulah Kami membangkitkan orang-orang yang telah mati, mudah-mudahan kamu mengambil pelajaran” (QS. Al-A'raaf/7:57).

Dari ayat di atas, Ibnu Katsir menafsirkan bahwa hujan turun dan mendatangkan kebaikan bagi manusia. Ketika angin itu membawa awan yang bergumpal-gumpal mengandung air, sehingga digiring awan itu untuk menghidupkan tanah yang tandus. Dimana tidak ada tanaman dan pepohonannya, kemudian diturunkan hujan di tempat itu sehingga berbagai macam buah-buahan tumbuh di sana. Sebagaimana telah dihidupkan tanah yang mati dan tandus dengan air hujan (Ghofar, 2008).

Allah berfirman dalam QS. Yunus/10:57,

هُوَ الَّذِي يُسَيِّرُكُمْ فِي الْبَرِّ وَالْبَحْرِ ۗ حَتَّىٰ إِذَا كُنْتُمْ فِي الْفُلِكِ وَجَرِينَ بِهِم بِرِيحٍ طَيِّبَةٍ وَفَرِحُوا بِهَا جَاءَتْهَا رِيحٌ عَاصِفٌ وَجَاءَهُمُ الْمَوْجُ مِنْ كُلِّ مَكَانٍ وَظَنُّوا أَنَّهُمْ أُحِيطَ بِهِمْ ۗ دَعَوُا اللَّهَ مُخْلِصِينَ لَهُ الدِّينَ لَئِنِ أَجَبْتَنَا مِنْ هَذِهِ لَنَكُونَنَّ مِنَ الشَّاكِرِينَ ﴿٥٧﴾

*“Dialah Tuhan yang menjadikan kamu dapat berjalan di daratan, (berlayar) di lautan. Sehingga apabila kamu berada di dalam bahtera, dan meluncurlah bahtera itu membawa orang-orang yang ada di dalamnya dengan tiupan angin yang baik, dan mereka bergembira karenanya, datanglah angin badai, dan (apabila) gelombang dari segenap penjuru menimpanya, dan mereka yakin bahwa mereka telah terkepung (bahaya), maka mereka berdoa kepada Allah dengan mengikhlaskan ketaatan kepada-Nya semata-mata. (Mereka berkata): "Sesungguhnya jika Engkau menyelamatkan Kami dari bahaya ini, pastilah Kami akan Termasuk orang-orang yang bersyukur".(QS. Yunus/10:22).*

Ayat tersebut menjelaskan bahwa sudah sejak lama manusia memanfaatkan angin untuk membantu proses transportasi. Bahkan dalam berkembang biak seperti yang terjadi pada tumbuhan, angin sangat berperan penting. Manusia mengenal perahu layar sebagai alat transportasi air yang mengandalkan aliran angin sebagai penggerak. Selain itu, aliran air dan angin merupakan salah satu jenis aliran fluida yang merupakan unsur terpenting dalam

kehidupan. J. Yannev Ewusie juga berpendapat bahwa kekayaan akan spesies pada beberapa bagian habitat mungkin disebabkan arah tiupan angin atau arah arus air. Untuk menjaga keseimbangan dan kelestarian air di bumi, maka Allah Swt. menciptakan siklus air yang secara otomatis terus berjalan sesuai kehendak-Nya (Agustina, 2012).

Dari pemaparan di atas diketahui betapa pentingnya ilmu mengenai fluida dalam kehidupan manusia. Dalam penelitian ini penulis mengambil permasalahan fluida yang dinyatakan dalam bentuk persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi dimana persamaan tersebut diselesaikan secara numerik dengan metode beda hingga skema implisit FTCS. Konsep bilangan matematika telah lama ditunjukkan Allah Swt. dalam al-Quran. Konsep tersebut yaitu suatu ilmu hitung yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah yang ada dalam kehidupan. Konsep matematika yang telah diinformasikan dalam al-Quran salah satunya adalah konsep pendekatan. Dimana metode numerik ini merupakan metode yang memberikan solusi numerik yang mendekati solusi eksaknya.

Allah Swt. berfirman dalam dalam QS. ash-Shaffaat/37:147, yaitu:

وَأَرْسَلْنَاهُ إِلَىٰ مِائَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

“Dan kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih” (QS. Ash-Shaffaat/37:147).

Berdasarkan ayat tersebut dapat diketahui bahwasanya Allah Swt. telah memberikan petunjuk-Nya kepada umat manusia tentang konsep estimasi. Estimasi dalam ayat tersebut tidak disebutkan secara langsung, namun dari ayat tersebut tersirat makna hampiran atau kesan ketidakyakinan akan jumlah “seratus ribu atau lebih”. Menurut penulis, kata “*aw yaziidun*” dalam ayat tersebut memberikan kesan ketidakpastian jumlah orang yang disebutkan. Dapat diambil

kesimpulan bahwa jumlah orang yang dimaksud dalam ayat tersebut dimungkinkan lebih dari seratus ribu. Seratus ribu bukanlah jumlah yang sebenarnya melainkan jumlah hampiran atau taksiran (Abdussakir, 2014:95-96).

Dijelaskan juga mengenai “*aw yaziiduun*” (atau lebih), Ibnu Abbas dalam suatu riwayat yang bersumber darinya menyebutkan, bahkan lebih dari seratus ribu orang, jumlah mereka adalah seratus tiga puluh ribu orang. Riwayat lain yang bersumber darinya menyebutkan seratus tiga puluh ribu orang lebih beberapa ribu. Menurut riwayat lainnya lagi yang bersumberkan darinya adalah seratus empat puluh ribu lebih beberapa ribu orang. Hanya Allah lah yang maha mengetahui. Sa'id Ibnu Jubair menyebutkan lebih dari tujuh puluh ribu orang, yakni seratus tujuh puluh ribu orang (Ibnu-Katsir, 2007:39).

Allah berfirman dalam QS. Luqman/31:34,

إِنَّ اللَّهَ عِنْدَهُ عِلْمُ السَّاعَةِ وَيُنزِلُ الْغَيْثَ وَيَعْلَمُ مَا فِي الْأَرْحَامِ وَمَا تَدْرِي  
نَفْسٌ مَّاذَا تَكْسِبُ غَدًا وَمَا تَدْرِي نَفْسٌ بِأَيِّ أَرْضٍ تَمُوتُ إِنَّ اللَّهَ عَلِيمٌ

خَيْرٌ

“*Sesungguhnya Allah, hanya pada sisi-Nya sajalah pengetahuan tentang hari Kiamat; dan Dia-lah yang menurunkan hujan, dan mengetahui apa yang ada dalam rahim, dan tiada seorangpun yang dapat mengetahui (dengan pasti) apa yang akan diusahakannya besok, dan tiada seorangpun yang dapat mengetahui di bumi mana dia akan mati. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal.*”(QS. Luqman/31:34).

Dalam ayat di atas terdapat penjelasan bahwa manusia diwajibkan untuk berusaha, karena manusia tidak dapat mengetahui dengan pasti apa yang akan dilakukan atau yang akan diperolehnya. Terkadang ada beberapa hal yang dapat diketahui berdasarkan pengalaman dan penelitian, seperti mengetahui jenis kelamin (Al-Qurthubi, 2009:196). Mustafa Al-Maragi (1992:189) juga

menjelaskan bahwa Allah Swt. menurunkan hujan pada musimnya yang telah ditentukan-Nya, di tempat yang telah ditentukan oleh pengetahuan-Nya. Adapun mengenai para ahli ilmu falak, sekalipun mereka mengetahui kapan terjadinya gerhana matahari, gerhana bulan, dan musim penghujan melalui dalil *hisabiyah*, maka hal-hal tersebut bukanlah termasuk hal yang ghaib. Sebenarnya hal-hal tersebut merupakan tanda-tanda yang dapat dijangkau oleh pengetahuan manusia, terlebih lagi sebagian dari padanya terkadang termasuk ke dalam kategori *zan* (perkiraan) dan bukannya kategori *yakin* (pasti).

Dari beberapa pendapat di atas dapat disimpulkan bahwa jumlah umat nabi Yunus tidak dapat dikatakan secara pasti jumlahnya, melainkan hanya dapat ditaksir yaitu sekitar 100.000 orang atau lebih. Tanda-tanda pada alam yang dapat diketahui manusia dimana sebagiannya termasuk dalam kategori perkiraan atau pendekatan yang dijadikan ilmu pengetahuan dalam kehidupan. Sehingga dapat diketahui bahwa di dalam al-Quran juga mengandung konsep pendekatan.

## BAB III

### PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan bagaimana penyelesaian numerik persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS. Persamaan tersebut diselesaikan pada domain  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , dan  $0 \leq t \leq 1$ . Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi adalah: (3.1) menganalisis skema implisit FTCS pada persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi dan syarat awalnya, (3.2) analisis kestabilan skema implisit FTCS dan analisis kekonvergenan solusi numerik, dan (3.3) menerapkan hasil analisis masalah kestabilan dan kekonvergenan dalam mencari solusi numerik.

#### 3.1 Skema Implisit FTCS pada Persamaan *Navier-Stokes* Dua Dimensi

Pada subbab ini dibahas proses perhitungan skema implisit FTCS pada persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi yaitu: (3.1.1) skema implisit FTCS pada  $x$  momentum dan  $y$  momentum, (3.1.2) diskritisasi kondisi awal dan kondisi batas, (3.1.3) perhitungan kecepatan dalam bentuk matriks, dan (3.1.4) contoh aplikasi.

##### 3.1.1 Skema Implisit FTCS pada $x$ Momentum dan $y$ Momentum

Persamaan *Navier-Stokes* yang digunakan dalam penelitian ini adalah persamaan yang sudah dijelaskan pada persamaan (2.1) sebagai berikut:

$$x \text{ momentum: } \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$y \text{ momentum: } \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

dengan kondisi awal yang telah diberikan pada penelitian Kusumastusi (2002) sebagai berikut:

$$u(x, y, 0) = 0,03 \text{ dan } v(x, y, 0) = 0,03$$

$$p(x, y, t) = 0,01$$

$$Re = 50$$

kondisi batas:

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, 1, t) = 0$$

$$v(0, y, t) = 0, \quad v(1, y, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = 0, \quad v(x, 1, t) = 0.$$

Nilai  $p$  diketahui di semua titik grid, sehingga persamaan tersebut menjadi:

$$x \text{ momentum: } \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.1a)$$

$$y \text{ momentum: } \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (3.1b)$$

Persamaan (3.1a) dan (3.1b) didiskritisasikan menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS, sehingga diperoleh diskritisasi untuk persamaan  $x$  momentum (3.1a) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \right) + \left( \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) u_{i,j}^{n+1} + \left( \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) v_{i,j}^{n+1} \\ & = \frac{1}{Re} \left( \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dengan menguraikan persamaan (3.2) maka persamaan tersebut menjadi:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} u_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{\Delta t} u_{i,j}^n + \frac{1}{2\Delta x} u_{i,j}^{n+1} u_{i+1,j}^{n+1} - \frac{1}{2\Delta x} u_{i,j}^{n+1} u_{i-1,j}^{n+1} + \frac{1}{2\Delta y} v_{i,j}^{n+1} u_{i,j+1}^{n+1} \\ & \quad - \frac{1}{2\Delta y} v_{i,j}^{n+1} u_{i,j-1}^{n+1} \\ & = \frac{1}{Re(\Delta x)^2} u_{i+1,j}^{n+1} - \frac{2}{Re(\Delta x)^2} u_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{Re(\Delta x)^2} u_{i-1,j}^{n+1} \\ & \quad + \frac{1}{Re(\Delta y)^2} u_{i,j+1}^{n+1} - \frac{2}{Re(\Delta y)^2} u_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{Re(\Delta y)^2} u_{i,j-1}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Berdasarkan hasil diskritisasi di atas, persamaan (3.3) memiliki suku nonlinier yaitu:  $u_{i,j}^{n+1}u_{i+1,j}^{n+1}$ ,  $u_{i,j}^{n+1}u_{i-1,j}^{n+1}$ ,  $v_{i,j}^{n+1}u_{i,j+1}^{n+1}$ , dan  $v_{i,j}^{n+1}u_{i,j-1}^{n+1}$  yang akan mempersulit perhitungan solusi masalah ini. Oleh karena itu, menurut Feng dan Mitsui (1998) perlu dilakukan linierisasi menggunakan deret Taylor. Sehingga untuk suku-suku nonlinier menjadi:

**Linierisasi 1:** linierisasi pada suku nonlinier  $u_{i,j}^{n+1}u_{i+1,j}^{n+1}$

$$\begin{aligned} u(x, y, t + \Delta t)u(x + \Delta x, y, t + \Delta t) &= u(x, y, t)u(x + \Delta x, y, t) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}(u(x, y, t)u(x + \Delta x, y, t))(t + \Delta t - t). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sederhanakan persamaan (3.4) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} u(x, y, t + \Delta t)u(x + \Delta x, y, t + \Delta t) &= u(x, y, t)u(x + \Delta x, y, t) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}(u(x, y, t)u(x + \Delta x, y, t))(\Delta t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Kemudian diubah persamaan (3.5) ke dalam bentuk indeks, sehingga menjadi:

$$u_{i,j}^{n+1}u_{i+1,j}^{n+1} = u_{i,j}^n u_{i+1,j}^n + \frac{\partial}{\partial t}(u_{i,j}^n u_{i+1,j}^n)\Delta t \quad (3.6)$$

karena

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1 u_2) = \frac{\partial u_1}{\partial t} u_2 + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial t}$$

misalkan  $u_{i,j}^n = u_1$  dan  $u_{i+1,j}^n = u_2$ , maka

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{i,j}^n u_{i+1,j}^n) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^n (u_{i+1,j}^n) + u_{i,j}^n \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i+1,j}^n. \quad (3.7)$$

Dengan mengubah  $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^n$  dan  $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i+1,j}^n$  ke dalam bentuk diskrit menjadi:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^n = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}$$

dan

(3.8)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i+1,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^n}{\Delta t}.$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (3.7) dan (3.8) ke dalam persamaan (3.6), sehingga menjadi:

$$u_{i,j}^{n+1}u_{i+1,j}^{n+1} = u_{i,j}^n u_{i+1,j}^n + \left[ \left( \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \right) u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n \left( \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^n}{\Delta t} \right) \right] \Delta t \quad (3.9)$$

Maka persamaan (3.7) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1}u_{i+1,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n u_{i+1,j}^n + u_{i+1,j}^n u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^n u_{i+1,j}^n \\ &= u_{i+1,j}^n u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n u_{i+1,j}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

**Linierisasi 2:** linierisasi pada suku nonlinier  $u_{i,j}^{n+1}u_{i-1,j}^{n+1}$  dengan cara yang sama diperoleh

$$\begin{aligned} u(x, y, t + \Delta t)u(x - \Delta x, y, t + \Delta t) \\ &= u(x, y, t)u(x - \Delta x, y, t) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} (u(x, y, t)u(x - \Delta x, y, t))(t + \Delta t - t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sederhanakan persamaan (3.11) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} u(x, y, t + \Delta t)u(x - \Delta x, y, t + \Delta t) \\ &= u(x, y, t)u(x - \Delta x, y, t) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} (u(x, y, t)u(x - \Delta x, y, t))(\Delta t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Kemudian ubah persamaan (3.12) ke dalam bentuk indeks, sehingga menjadi:

$$u_{i,j}^{n+1}u_{i-1,j}^{n+1} = u_{i,j}^n u_{i-1,j}^n + \frac{\partial}{\partial t} (u_{i,j}^n u_{i-1,j}^n) \Delta t \quad (3.13)$$

karena

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1 u_2) = \frac{\partial u_1}{\partial t} u_2 + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial t}$$

misalkan  $u_{i,j}^n = u_1$  dan  $u_{i-1,j}^n = u_2$ , maka

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{i,j}^n u_{i-1,j}^n) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^n (u_{i-1,j}^n) + u_{i,j}^n \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i-1,j}^n. \quad (3.14)$$

Dengan mengubah  $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^n$  dan  $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i-1,j}^n$  ke dalam bentuk diskrit menjadi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^n = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}$$

dan

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i-1,j}^n = \frac{u_{i-1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^n}{\Delta t}.$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (3.14) dan (3.15) ke dalam persamaan (3.13), sehingga menjadi:

$$u_{i,j}^{n+1} u_{i-1,j}^{n+1} = u_{i,j}^n u_{i-1,j}^n + \left[ \left( \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \right) u_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n \left( \frac{u_{i-1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^n}{\Delta t} \right) \right] \Delta t \quad (3.16)$$

Maka persamaan (3.16) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} u_{i-1,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n u_{i-1,j}^n + u_{i-1,j}^n u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n u_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n u_{i-1,j}^{n+1} - u_{i,j}^n u_{i-1,j}^n \\ &= u_{i-1,j}^n u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n u_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n u_{i-1,j}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

**Linierisasi 3:** linierisasi pada suku nonlinier  $v_{i,j}^{n+1} u_{i,j+1}^{n+1}$  dengan cara yang sama diperoleh

$$\begin{aligned} v(x, y, t + \Delta t) u(x, y + \Delta y, t + \Delta t) &= v(x, y, t) u(x, y + \Delta y, t) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} (v(x, y, t) u(x, y + \Delta y, t)) (t + \Delta t - t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Sederhanakan persamaan (3.18) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned}
v(x, y, t + \Delta t)u(x, y + \Delta y, t + \Delta t) \\
&= u(x, y, t)u(x, y + \Delta y, t) \\
&+ \frac{\partial}{\partial t}(u(x, y, t)u(x, y + \Delta y, t))(\Delta t).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Kemudian diubah persamaan (3.19) ke dalam bentuk indeks, sehingga menjadi:

$$v_{i,j}^{n+1}u_{i,j+1}^{n+1} = v_{i,j}^n u_{i,j+1}^n + \frac{\partial}{\partial t}(v_{i,j}^n u_{i,j+1}^n)\Delta t \tag{3.20}$$

karena

$$\frac{\partial}{\partial t}(vu) = \frac{\partial v}{\partial t}u + v \frac{\partial u}{\partial t}$$

maka

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_{i,j}^n u_{i,j+1}^n) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i,j}^n (u_{i,j+1}^n) + v_{i,j}^n \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j+1}^n. \tag{3.21}$$

Dengan mengubah  $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i,j}^n$  dan  $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j+1}^n$  ke dalam bentuk diskrit menjadi

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i,j}^n = \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t}$$

dan

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j+1}^n = \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j+1}^n}{\Delta t}.$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (3.21) dan (3.22) ke dalam persamaan (3.20), sehingga menjadi:

$$v_{i,j}^{n+1}u_{i,j+1}^{n+1} = v_{i,j}^n u_{i,j+1}^n + \left[ \left(\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t}\right) u_{i,j+1}^n + v_{i,j}^n \left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j+1}^n}{\Delta t}\right) \right] \Delta t. \tag{3.23}$$

Maka persamaan (3.23) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
v_{i,j}^{n+1}u_{i,j+1}^{n+1} &= v_{i,j}^n u_{i,j+1}^n + u_{i,j+1}^n v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n u_{i,j+1}^n + v_{i,j}^n u_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^n u_{i,j+1}^n \\
&= u_{i,j+1}^n v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n u_{i,j+1}^n + v_{i,j}^n u_{i,j+1}^{n+1}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

**Linierisasi 4:** linierisasi pada suku nonlinier  $v_{i,j}^{n+1}u_{i,j-1}^{n+1}$  dengan cara yang sama

diperoleh

$$\begin{aligned} v(x, y, t + \Delta t)u(x, y - \Delta y, t + \Delta t) &= v(x, y, t)u(x, y - \Delta y, t) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} (v(x, y, t)u(x, y - \Delta y, t))(t + \Delta t - t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sederhanakan persamaan (3.25) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} v(x, y, t + \Delta t)u(x, y - \Delta y, t + \Delta t) &= v(x, y, t)u(x, y - \Delta y, t) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} (v(x, y, t)u(x, y - \Delta y, t))(\Delta t). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Kemudian diubah persamaan (3.26) ke dalam bentuk indeks, sehingga menjadi:

$$v_{i,j}^{n+1}u_{i,j-1}^{n+1} = v_{i,j}^n u_{i,j-1}^n + \frac{\partial}{\partial t} (v_{i,j}^n u_{i,j-1}^n) \Delta t \quad (3.27)$$

karena

$$\frac{\partial}{\partial t} (vu) = \frac{\partial v}{\partial t} u + v \frac{\partial u}{\partial t}$$

maka

$$\frac{\partial}{\partial t} (v_{i,j}^n u_{i,j-1}^n) = \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_{i,j}^n (u_{i,j-1}^n) + v_{i,j}^n \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j-1}^n. \quad (3.28)$$

Dengan mengubah  $\left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_{i,j}^n$  dan  $\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j-1}^n$  ke dalam bentuk diskrit menjadi

$$\left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_{i,j}^n = \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t}$$

dan

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j-1}^n = \frac{u_{i,j-1}^{n+1} - u_{i,j-1}^n}{\Delta t}.$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (3.28) dan (3.29) ke dalam persamaan

(3.27), sehingga menjadi:

$$v_{i,j}^{n+1}u_{i,j-1}^{n+1} = v_{i,j}^n u_{i,j-1}^n + \left[ \left( \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \right) u_{i,j-1}^n + v_{i,j}^n \left( \frac{u_{i,j-1}^{n+1} - u_{i,j-1}^n}{\Delta t} \right) \right] \Delta t. \quad (3.30)$$

Maka persamaan (3.30) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{n+1}u_{i,j-1}^{n+1} &= v_{i,j}^n u_{i,j-1}^n + u_{i,j-1}^n v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n u_{i,j-1}^n + v_{i,j}^n u_{i,j-1}^{n+1} - v_{i,j}^n u_{i,j-1}^n \\ &= u_{i,j-1}^n v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n u_{i,j-1}^n + v_{i,j}^n u_{i,j-1}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Setelah itu, substitusikan persamaan (3.10), (3.17), (3.24), dan (3.31) ke dalam persamaan (3.3) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1}}{\Delta t} - \frac{u_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^{n+1}u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i,j}^n u_{i+1,j}^{n+1}) \\ - \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^{n+1}u_{i-1,j}^n - u_{i,j}^n u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j}^n u_{i-1,j}^{n+1}) \\ + \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^{n+1}u_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n u_{i,j+1}^{n+1} + v_{i,j}^n u_{i,j+1}^{n+1}) \\ - \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^{n+1}u_{i,j-1}^n - v_{i,j}^n u_{i,j-1}^{n+1} + v_{i,j}^n u_{i,j-1}^{n+1}) \\ = \frac{1}{Re(\Delta x)^2} u_{i+1,j}^{n+1} - \frac{2}{Re(\Delta x)^2} u_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{Re(\Delta x)^2} u_{i-1,j}^{n+1} \\ + \frac{1}{Re(\Delta y)^2} u_{i,j+1}^{n+1} - \frac{2}{Re(\Delta y)^2} u_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{Re(\Delta y)^2} u_{i,j-1}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Persamaan (3.32) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} u_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{\Delta t} u_{i,j}^n + \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1,j}^n u_{i,j}^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^n u_{i+1,j}^n) + \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^n u_{i+1,j}^{n+1}) \\
& - \frac{1}{2\Delta x} (u_{i-1,j}^n u_{i,j}^{n+1}) + \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^n u_{i-1,j}^n) - \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^n u_{i-1,j}^{n+1}) \\
& + \frac{1}{2\Delta y} (u_{i,j+1}^n v_{i,j}^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^n u_{i,j+1}^n) + \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^n u_{i,j+1}^{n+1}) \\
& - \frac{1}{2\Delta y} (u_{i,j-1}^n v_{i,j}^{n+1}) + \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^n u_{i,j-1}^n) - \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^n u_{i,j-1}^{n+1}) \\
& = \frac{1}{Re(\Delta x)^2} u_{i+1,j}^{n+1} - \frac{2}{Re(\Delta x)^2} u_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{Re(\Delta x)^2} u_{i-1,j}^{n+1} \\
& + \frac{1}{Re(\Delta y)^2} u_{i,j+1}^{n+1} - \frac{2}{Re(\Delta y)^2} u_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{Re(\Delta y)^2} u_{i,j-1}^{n+1}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Kemudian dikelompokkan untuk waktu  $n + 1$  berada di ruas kiri dan waktu  $n$  berada di ruas kanan, maka persamaan (3.33) menjadi:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} u_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1,j}^n u_{i,j}^{n+1}) + \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^n u_{i+1,j}^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta x} (u_{i-1,j}^n u_{i,j}^{n+1}) \\
& - \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^n u_{i-1,j}^{n+1}) + \frac{1}{2\Delta y} (u_{i,j+1}^n v_{i,j}^{n+1}) + \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^n u_{i,j+1}^{n+1}) \\
& - \frac{1}{2\Delta y} (u_{i,j-1}^n v_{i,j}^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^n u_{i,j-1}^{n+1}) - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} u_{i+1,j}^{n+1} \\
& + \frac{2}{Re(\Delta x)^2} u_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} u_{i-1,j}^{n+1} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} u_{i,j+1}^{n+1} \\
& + \frac{2}{Re(\Delta y)^2} u_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} u_{i,j-1}^{n+1} \\
& = \frac{1}{\Delta t} u_{i,j}^n + \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^n u_{i+1,j}^n) - \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^n u_{i-1,j}^n) \\
& + \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^n u_{i,j+1}^n) - \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^n u_{i,j-1}^n).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Sehingga persamaan (3.34) dapat ditulis menjadi berikut:

$$\begin{aligned}
& \left( -\frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} \right) u_{i,j-1}^{n+1} + \left( -\frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} \right) u_{i-1,j}^{n+1} \\
& + \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{u_{i+1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{2}{Re(\Delta x)^2} + \frac{2}{Re(\Delta y)^2} \right) u_{i,j}^{n+1} \\
& + \left( \frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} \right) u_{i+1,j}^{n+1} + \left( \frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} \right) u_{i,j+1}^{n+1} \\
& + \left( \frac{u_{i,j+1}^n}{2\Delta y} - \frac{u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) v_{i,j}^{n+1} \\
& = u_{i,j}^n \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{u_{i+1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) + v_{i,j}^n \left( \frac{u_{i,j+1}^n}{2\Delta y} - \frac{u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Persamaan (3.35) dapat disederhanakan menjadi:

$$a_1(u_{i,j-1}^{n+1}) + b_1(u_{i-1,j}^{n+1}) + c_1(u_{i,j}^{n+1}) + d_1(u_{i+1,j}^{n+1}) + e_1(u_{i,j+1}^{n+1}) + h_1(v_{i,j}^{n+1}) = z_1 \tag{3.36}$$

dengan

$$a_1 = -\frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2}$$

$$b_1 = -\frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2}$$

$$c_1 = \frac{1}{\Delta t} + \frac{u_{i+1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{2}{Re(\Delta x)^2} + \frac{2}{Re(\Delta y)^2}$$

$$d_1 = \frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2}$$

$$e_1 = \frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2}$$

$$h_1 = \frac{u_{i,j+1}^n}{2\Delta y} - \frac{u_{i,j-1}^n}{2\Delta y}$$

$$z_1 = u_{i,j}^n \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{u_{i+1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) + v_{i,j}^n \left( \frac{u_{i,j+1}^n}{2\Delta y} - \frac{u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right).$$

Untuk persamaan  $y$  momentum (3.1b) secara sama dengan metode diskritisasi pada  $x$  momentum dapat diperoleh diskritisasi persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \right) + \left( \frac{v_{i+1,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) u_{i,j}^{n+1} + \left( \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) v_{i,j}^{n+1} \\
& = \frac{1}{Re} \left( \frac{v_{i+1,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Sehingga dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} v_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{\Delta t} v_{i,j}^n + \frac{1}{2\Delta x} u_{i,j}^{n+1} v_{i+1,j}^{n+1} - \frac{1}{2\Delta x} u_{i,j}^{n+1} v_{i-1,j}^{n+1} + \frac{1}{2\Delta y} v_{i,j}^{n+1} v_{i,j+1}^{n+1} \\
& \quad - \frac{1}{2\Delta y} v_{i,j}^{n+1} v_{i,j-1}^{n+1} \\
& = \frac{1}{Re(\Delta x)^2} v_{i+1,j}^{n+1} - \frac{2}{Re(\Delta x)^2} v_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{Re(\Delta x)^2} v_{i-1,j}^{n+1} \\
& \quad + \frac{1}{Re(\Delta y)^2} v_{i,j+1}^{n+1} - \frac{2}{Re(\Delta y)^2} v_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{Re(\Delta y)^2} v_{i,j-1}^{n+1}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Berdasarkan hasil diskritisasi di atas, persamaan (3.38) juga memiliki suku nonlinier  $u_{i,j}^{n+1} v_{i+1,j}^{n+1}$ ,  $u_{i,j}^{n+1} v_{i-1,j}^{n+1}$ ,  $v_{i,j}^{n+1} v_{i,j+1}^{n+1}$ , dan  $v_{i,j}^{n+1} v_{i,j-1}^{n+1}$ . Oleh karena itu, perlu dilakukan linierisasi menggunakan deret Taylor. Sehingga untuk suku-suku nonlinier menjadi:

**Linierisasi 1:** linierisasi pada suku nonlinier  $u_{i,j}^{n+1} v_{i+1,j}^{n+1}$  dengan cara yang sama diperoleh

$$\begin{aligned}
& u(x, y, t + \Delta t) v(x + \Delta x, y, t + \Delta t) \\
& = u(x, y, t) v(x + \Delta x, y, t) \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial t} (u(x, y, t) v(x + \Delta x, y, t)) (t + \Delta t - t).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Sederhanakan persamaan (3.39) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned}
& u(x, y, t + \Delta t) v(x + \Delta x, y, t + \Delta t) \\
& = u(x, y, t) v(x + \Delta x, y, t) \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial t} (u(x, y, t) v(x + \Delta x, y, t)) (\Delta t).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Kemudian diubah persamaan (3.40) ke dalam bentuk indeks, sehingga menjadi:

$$u_{i,j}^{n+1}v_{i+1,j}^{n+1} = u_{i,j}^n v_{i+1,j}^n + \frac{\partial}{\partial t}(u_{i,j}^n v_{i+1,j}^n)\Delta t \quad (3.41)$$

karena

$$\frac{\partial}{\partial t}(uv) = \frac{\partial u}{\partial t}v + u \frac{\partial v}{\partial t}$$

maka

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{i,j}^n v_{i+1,j}^n) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^n (v_{i+1,j}^n) + u_{i,j}^n \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i+1,j}^n. \quad (3.42)$$

Dengan mengubah  $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^n$  dan  $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i+1,j}^n$  ke dalam bentuk diskrit, menjadi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^n = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}$$

dan

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i+1,j}^n = \frac{v_{i+1,j}^{n+1} - v_{i+1,j}^n}{\Delta t}.$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (3.42) dan (3.43) ke dalam persamaan (3.41), sehingga menjadi:

$$u_{i,j}^{n+1}v_{i+1,j}^{n+1} = u_{i,j}^n v_{i+1,j}^n + \left[ \left(\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}\right) v_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n \left(\frac{v_{i+1,j}^{n+1} - v_{i+1,j}^n}{\Delta t}\right) \right] \Delta t. \quad (3.44)$$

Maka persamaan (3.44) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1}v_{i+1,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n v_{i+1,j}^n + v_{i+1,j}^n u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n v_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n v_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^n v_{i+1,j}^n \\ &= v_{i+1,j}^n u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n v_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n v_{i+1,j}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

**Linierisasi 2:** linierisasi pada suku nonlinier  $u_{i,j}^{n+1}v_{i-1,j}^{n+1}$  dengan cara yang sama

diperoleh

$$\begin{aligned}
& u(x, y, t + \Delta t)v(x - \Delta x, y, t + \Delta t) \\
&= u(x, y, t)v(x - \Delta x, y, t) \\
&+ \frac{\partial}{\partial t}(u(x, y, t)v(x - \Delta x, y, t))(t + \Delta t - t).
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Sederhanakan persamaan (3.46) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned}
& u(x, y, t + \Delta t)v(x - \Delta x, y, t + \Delta t) \\
&= u(x, y, t)v(x - \Delta x, y, t) \\
&+ \frac{\partial}{\partial t}(u(x, y, t)v(x - \Delta x, y, t))(\Delta t).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Kemudian diubah persamaan (3.47) ke dalam bentuk indeks, sehingga menjadi:

$$u_{i,j}^{n+1}v_{i-1,j}^{n+1} = u_{i,j}^n v_{i-1,j}^n + \frac{\partial}{\partial t}(u_{i,j}^n v_{i-1,j}^n)\Delta t \tag{3.48}$$

karena

$$\frac{\partial}{\partial t}(uv) = \frac{\partial u}{\partial t}v + u \frac{\partial v}{\partial t}$$

maka

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{i,j}^n v_{i-1,j}^n) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^n (v_{i-1,j}^n) + u_{i,j}^n \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i-1,j}^n. \tag{3.49}$$

Dengan mediskritkan  $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^n$  dan  $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i-1,j}^n$  menjadi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^n = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}$$

dan

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i-1,j}^n = \frac{v_{i-1,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^n}{\Delta t}.$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (3.49) dan (3.50) ke dalam persamaan (3.48), sehingga menjadi:

$$u_{i,j}^{n+1}v_{i-1,j}^{n+1} = u_{i,j}^n v_{i-1,j}^n + \left[ \left(\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}\right) v_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n \left(\frac{v_{i-1,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^n}{\Delta t}\right) \right] \Delta t. \tag{3.51}$$

Maka persamaan (3.51) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1}v_{i-1,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n v_{i-1,j}^n + v_{i-1,j}^n u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n v_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n v_{i-1,j}^{n+1} - u_{i,j}^n v_{i-1,j}^n \\ &= v_{i-1,j}^n u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n v_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n v_{i-1,j}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

**Linierisasi 3:** linierisasi pada suku nonlinier  $v_{i,j}^{n+1}v_{i,j+1}^{n+1}$  dengan cara yang sama

diperoleh

$$\begin{aligned} v(x, y, t + \Delta t)v(x, y + \Delta y, t + \Delta t) &= v(x, y, t)v(x, y + \Delta y, t) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}(v(x, y, t)v(x, y + \Delta y, t))(t + \Delta t - t). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Sederhanakan persamaan (3.53) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} v(x, y, t + \Delta t)v(x, y + \Delta y, t + \Delta t) &= v(x, y, t)v(x, y + \Delta y, t) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}(u(x, y, t)v(x, y + \Delta y, t))(\Delta t). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Kemudian diubah persamaan (3.54) ke dalam bentuk indeks, sehingga menjadi:

$$v_{i,j}^{n+1}v_{i,j+1}^{n+1} = v_{i,j}^n v_{i,j+1}^n + \frac{\partial}{\partial t}(v_{i,j}^n v_{i,j+1}^n)\Delta t \quad (3.55)$$

karena

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_1 v_2) = \frac{\partial v_1}{\partial t} v_2 + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial t}$$

misalkan  $v_{i,j}^n = v_1$  dan  $v_{i,j+1}^n = v_2$ , maka

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_{i,j}^n v_{i,j+1}^n) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i,j}^n (v_{i,j+1}^n) + v_{i,j}^n \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i,j+1}^n \quad (3.56)$$

dengan

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i,j}^n = \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (3.57)$$

dan

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{i,j+1}^n = \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j+1}^n}{\Delta t}.$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (3.56) dan (3.57) ke dalam persamaan (3.55), sehingga menjadi:

$$v_{i,j}^{n+1}v_{i,j+1}^{n+1} = v_{i,j}^n v_{i,j+1}^n + \left[ \left( \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \right) v_{i,j+1}^n + v_{i,j}^n \left( \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j+1}^n}{\Delta t} \right) \right] \Delta t. \quad (3.58)$$

Maka persamaan (3.58) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{n+1}v_{i,j+1}^{n+1} &= v_{i,j}^n v_{i,j+1}^n + v_{i,j+1}^n v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n v_{i,j+1}^n + v_{i,j}^n v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^n v_{i,j+1}^n \\ &= v_{i,j+1}^n v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n v_{i,j+1}^n + v_{i,j}^n v_{i,j+1}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

**Linierisasi 4:** linierisasi pada suku nonlinier  $v_{i,j}^{n+1}v_{i,j-1}^{n+1}$  dengan cara yang sama

diperoleh

$$\begin{aligned} v(x, y, t + \Delta t)v(x, y - \Delta y, t + \Delta t) &= v(x, y, t)v(x, y - \Delta y, t) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} (v(x, y, t)v(x, y - \Delta y, t))(t + \Delta t - t). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Sederhanakan persamaan (3.60) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} v(x, y, t + \Delta t)v(x, y - \Delta y, t + \Delta t) &= v(x, y, t)v(x, y - \Delta y, t) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} (u(x, y, t)v(x, y - \Delta y, t))(\Delta t). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Kemudian diubah persamaan (3.61) ke dalam bentuk indeks, sehingga menjadi:

$$v_{i,j}^{n+1}v_{i,j-1}^{n+1} = v_{i,j}^n v_{i,j-1}^n + \frac{\partial}{\partial t} (v_{i,j}^n v_{i,j-1}^n) \Delta t \quad (3.62)$$

karena

$$\frac{\partial}{\partial t} (v_1 v_2) = \frac{\partial v_1}{\partial t} v_2 + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial t}$$

misalkan  $v_{i,j}^n = v_1$  dan  $v_{i,j-1}^n = v_2$ , maka

$$\frac{\partial}{\partial t} (v_{i,j}^n v_{i,j-1}^n) = \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_{i,j}^n (v_{i,j-1}^n) + v_{i,j}^n \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_{i,j-1}^n \quad (3.63)$$

dengan

$$\left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_{i,j}^n = \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (3.64)$$

dan

$$\left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_{i,j-1}^n = \frac{v_{i,j-1}^{n+1} - v_{i,j-1}^n}{\Delta t}.$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (3.63) dan (3.64) ke dalam persamaan (3.62), sehingga menjadi:

$$v_{i,j}^{n+1} v_{i,j-1}^{n+1} = v_{i,j}^n v_{i,j-1}^n + \left[ \left( \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \right) v_{i,j-1}^n + v_{i,j}^n \left( \frac{v_{i,j-1}^{n+1} - v_{i,j-1}^n}{\Delta t} \right) \right] \Delta t. \quad (3.65)$$

Maka persamaan (3.65) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{n+1} v_{i,j-1}^{n+1} &= v_{i,j}^n v_{i,j-1}^n + v_{i,j-1}^n v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n v_{i,j-1}^n + v_{i,j}^n v_{i,j-1}^{n+1} - v_{i,j}^n v_{i,j-1}^n \\ &= v_{i,j-1}^n v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n v_{i,j-1}^n + v_{i,j}^n v_{i,j-1}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Setelah itu, substitusikan persamaan (3.45), (3.52), (3.59), dan (3.66) ke dalam persamaan (3.38) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t} v_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{\Delta t} v_{i,j}^n + \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^{n+1} v_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n v_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n v_{i+1,j}^{n+1}) \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^{n+1} v_{i-1,j}^n - u_{i,j}^n v_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n v_{i-1,j}^{n+1}) \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^{n+1} v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n v_{i,j+1}^n + v_{i,j}^n v_{i,j+1}^{n+1}) \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^{n+1} v_{i,j-1}^n - v_{i,j}^n v_{i,j-1}^n + v_{i,j}^n v_{i,j-1}^{n+1}) \\ &= \frac{1}{Re(\Delta x)^2} v_{i+1,j}^{n+1} - \frac{2}{Re(\Delta x)^2} v_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{Re(\Delta x)^2} v_{i-1,j}^{n+1} \\ &\quad + \frac{1}{Re(\Delta y)^2} v_{i,j+1}^{n+1} - \frac{2}{Re(\Delta y)^2} v_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{Re(\Delta y)^2} v_{i,j-1}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Persamaan (3.67) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} v_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{\Delta t} v_{i,j}^n + \frac{1}{2\Delta x} (v_{i+1,j}^n u_{i,j}^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^n v_{i+1,j}^n) + \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^n v_{i+1,j}^{n+1}) \\
& - \frac{1}{2\Delta x} (v_{i-1,j}^n u_{i,j}^{n+1}) + \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^n v_{i-1,j}^n) - \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^n v_{i-1,j}^{n+1}) \\
& + \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j+1}^n v_{i,j}^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^n v_{i,j+1}^n) + \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^n v_{i,j+1}^{n+1}) \\
& - \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j-1}^n v_{i,j}^{n+1}) + \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^n v_{i,j-1}^n) - \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^n v_{i,j-1}^{n+1}) \\
& = \frac{1}{Re(\Delta x)^2} v_{i+1,j}^{n+1} - \frac{2}{Re(\Delta x)^2} v_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{Re(\Delta x)^2} v_{i-1,j}^{n+1} \\
& + \frac{1}{Re(\Delta y)^2} v_{i,j+1}^{n+1} - \frac{2}{Re(\Delta y)^2} v_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{Re(\Delta y)^2} v_{i,j-1}^{n+1}.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Kemudian dikelompokkan untuk waktu  $n + 1$  berada di ruas kiri dan waktu  $n$  berada di ruas kanan, maka persamaan (3.68) menjadi:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} v_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{2\Delta x} (v_{i+1,j}^n u_{i,j}^{n+1}) + \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^n v_{i+1,j}^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta x} (v_{i-1,j}^n u_{i,j}^{n+1}) \\
& - \frac{1}{2\Delta x} (v_{i-1,j}^{n+1} u_{i,j}^n) + \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j+1}^n v_{i,j}^{n+1}) + \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^n v_{i,j+1}^{n+1}) \\
& - \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j-1}^n v_{i,j}^{n+1}) - \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^n v_{i,j-1}^{n+1}) - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} v_{i+1,j}^{n+1} \\
& + \frac{2}{Re(\Delta x)^2} v_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} v_{i-1,j}^{n+1} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} v_{i,j+1}^{n+1} \\
& + \frac{2}{Re(\Delta y)^2} v_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} v_{i,j-1}^{n+1} \\
& = \frac{1}{\Delta t} v_{i,j}^n + \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^n v_{i+1,j}^n) - \frac{1}{2\Delta x} (u_{i,j}^n v_{i-1,j}^n) \\
& + \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^n v_{i,j+1}^n) - \frac{1}{2\Delta y} (v_{i,j}^n v_{i,j-1}^n).
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Sehingga persamaan (3.69) dapat ditulis menjadi berikut:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{v_{i,j}^n}{2\Delta x} \right) u_{i,j}^{n+1} + \left( -\frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} \right) v_{i,j-1}^{n+1} \\
& + \left( -\frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} \right) v_{i-1,j}^{n+1} \\
& + \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{v_{i,j+1}^n}{2\Delta y} - \frac{v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{2}{Re(\Delta x)^2} + \frac{2}{Re(\Delta y)^2} \right) v_{i,j}^{n+1} \\
& + \left( \frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} \right) v_{i+1,j}^{n+1} + \left( \frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} \right) v_{i,j+1}^{n+1} \\
& = v_{i,j}^n \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{v_{i,j+1}^n}{2\Delta y} - \frac{v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) + u_{i,j}^n \left( \frac{v_{i+1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right).
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Persamaan (3.70) dapat disederhanakan menjadi

$$c_2(u_{i,j}^{n+1}) + f_2(v_{i,j-1}^{n+1}) + g_2(v_{i-1,j}^{n+1}) + h_2(v_{i,j}^{n+1}) + k_2(v_{i+1,j}^{n+1}) + l_2(v_{i,j+1}^{n+1}) = z_2 \tag{3.71}$$

dengan

$$c_2 = \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x}$$

$$f_2 = -\frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2}$$

$$g_2 = -\frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2}$$

$$h_2 = \frac{1}{\Delta t} + \frac{v_{i,j+1}^n}{2\Delta y} - \frac{v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{2}{Re(\Delta x)^2} + \frac{2}{Re(\Delta y)^2}$$

$$k_2 = \frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2}$$

$$l_2 = \frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2}$$

$$z_2 = v_{i,j}^n \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{v_{i,j+1}^n}{2\Delta y} - \frac{v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) + u_{i,j}^n \left( \frac{v_{i+1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right).$$

Sehingga diperoleh bentuk diskrit dari persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi  $x$  momentum pada persamaan (3.36) dan  $y$  momentum pada persamaan (3.71).

### 3.1.2 Diskritisasi Kondisi Awal dan Kondisi Batas

Setelah diketahui bentuk diskrit dari persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi, selanjutnya dapat didefinisikan bentuk diskrit untuk kondisi awal dan kondisi batas pada  $x \in [0, 1]$ ,  $y \in [0, 1]$ , dan  $t \in [0, 1]$  untuk  $i = 1, 2, \dots, L - 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, M - 1$ , dan  $n = 1, 2, \dots, N - 1$ :

Kondisi awal

$$u(x, y, 0) = u(u_{i,j}^1) = 0,03$$

$$v(x, y, 0) = v(v_{i,j}^1) = 0,03$$

$$Re = 50$$

Kondisi batas:

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, 1, t) = 0$$

$$v(0, y, t) = 0, \quad v(1, y, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = 0, \quad v(x, 1, t) = 0$$

Sehingga:

$$u(0, y, t) = u_{1,y}^n = 0, \quad v(0, y, t) = v_{1,y}^n = 0$$

$$u(x, 0, t) = u_{x,1}^n = 0, \quad v(x, 0, t) = v_{x,1}^n = 0$$

$$u(1, y, t) = u_{L,y}^n = 0, \quad v(1, y, t) = v_{L,y}^n = 0$$

$$u(x, 1, t) = u_{x,M}^n = 0, \quad v(x, 1, t) = v_{x,M}^n = 0$$

### 3.1.3 Perhitungan Kecepatan dalam Bentuk Matriks

Untuk mencari nilai  $u$  dan nilai  $v$  yang belum diketahui, substitusikan syarat awal dan syarat batas yang diberikan. Nilai yang belum diketahui dicari menggunakan nilai yang sudah diketahui sebelumnya. Sehingga nilai yang belum diketahui pada persamaan (3.36) dan (3.71) dicari menggunakan nilai yang sudah diketahui berdasarkan kondisi awal yang diberikan. Karena suku dengan indeks yang terkecil adalah  $u_{i-1,j}^{n+1}$  dan  $u_{i,j-1}^{n+1}$  maka  $\forall n = 1, 2, 3, \dots, N - 1$ ,  $\forall i = 2, 3, \dots, L -$

1, dan  $\forall j = 2, 3, \dots, M - 1$ . Untuk indeks  $i$  dan  $j$  dimulai dari 2 karena jika dimulai dari 1 maka suku terkecil tersebut akan menjadi  $u_{0,j}^{n+1}$  dan  $u_{i,0}^{n+1}$ . Hal ini akan memunculkan nilai di luar domain. Oleh karena itu untuk persamaan (3.36) dan persamaan (3.71) ketika  $i = 2$ ,  $j = 2$ , dan  $n = 1$  diperoleh:

$$a_1 u_{2,1}^2 + b_1 u_{1,2}^2 + c_1 u_{2,2}^2 + d_1 u_{3,2}^2 + e_1 u_{2,3}^2 + h_1 v_{2,2}^2 = z_1$$

$$c_2 u_{2,2}^2 + f_2 v_{2,1}^2 + g_2 v_{1,2}^2 + h_2 v_{2,2}^2 + k_2 v_{3,2}^2 + l_2 v_{2,3}^2 = z_2$$

Untuk  $i = 3$ ,  $j = 2$ , dan  $n = 1$  pada persamaan (3.36) dan (3.71) diperoleh:

$$a_1 u_{3,1}^2 + b_1 u_{2,2}^2 + c_1 u_{3,2}^2 + d_1 u_{4,2}^2 + e_1 u_{3,3}^2 + h_1 v_{3,2}^2 = z_1$$

$$c_2 u_{3,2}^2 + f_2 v_{3,1}^2 + g_2 v_{2,2}^2 + h_2 v_{3,2}^2 + k_2 v_{4,2}^2 + l_2 v_{3,3}^2 = z_2$$

⋮

Untuk  $i = L - 1$ ,  $j = 2$ , dan  $n = 1$  pada persamaan (3.36) dan (3.71) diperoleh:

$$a_1 u_{L-1,1}^2 + b_1 u_{L-2,2}^2 + c_1 u_{L-1,2}^2 + d_1 u_{L,2}^2 + e_1 u_{L-1,3}^2 + h_1 v_{L-1,2}^2 = z_1$$

$$c_2 u_{L-1,2}^2 + f_2 v_{L-1,1}^2 + g_2 v_{L-2,2}^2 + h_2 v_{L-1,2}^2 + k_2 v_{L,2}^2 + l_2 v_{L-1,3}^2 = z_2$$

Untuk  $i = 2$ ,  $j = 3$ , dan  $n = 1$  pada persamaan (3.36) dan (3.71) diperoleh:

$$a_1 u_{2,2}^2 + b_1 u_{1,3}^2 + c_1 u_{2,3}^2 + d_1 u_{3,3}^2 + e_1 u_{2,4}^2 + h_1 v_{2,3}^2 = z_1$$

$$c_2 u_{2,3}^2 + f_2 v_{2,2}^2 + g_2 v_{1,3}^2 + h_2 v_{2,3}^2 + k_2 v_{3,3}^2 + l_2 v_{2,4}^2 = z_2$$

Untuk  $i = 3$ ,  $j = 3$ , dan  $n = 1$  pada persamaan (3.36) dan (3.71) diperoleh:

$$a_1 u_{3,2}^2 + b_1 u_{2,3}^2 + c_1 u_{3,3}^2 + d_1 u_{4,3}^2 + e_1 u_{3,4}^2 + h_1 v_{3,3}^2 = z_1$$

$$c_2 u_{3,3}^2 + f_2 v_{3,2}^2 + g_2 v_{2,3}^2 + h_2 v_{3,3}^2 + k_2 v_{4,3}^2 + l_2 v_{3,4}^2 = z_2$$

⋮

Untuk  $i = L - 1$ ,  $j = 3$ , dan  $n = 1$  pada persamaan (3.36) dan (3.71) diperoleh:

$$a_1 u_{L-1,2}^2 + b_1 u_{L-2,3}^2 + c_1 u_{L-1,3}^2 + d_1 u_{L,3}^2 + e_1 u_{L-1,4}^2 + h_1 v_{L-1,3}^2 = z_1$$

$$c_2 u_{L-1,3}^2 + f_2 v_{L-1,2}^2 + g_2 v_{L-2,3}^2 + h_2 v_{L-1,3}^2 + k_2 v_{L,3}^2 + l_2 v_{L-1,4}^2 = z_2$$

Untuk  $i = 2$ ,  $j = 4$ , dan  $n = 1$  pada persamaan (3.36) dan (3.71) diperoleh:

$$a_1 u_{2,3}^2 + b_1 u_{1,4}^2 + c_1 u_{2,4}^2 + d_1 u_{3,4}^2 + e_1 u_{2,5}^2 + h_1 v_{2,4}^2 = z_1$$

$$c_2 u_{2,4}^2 + f_2 v_{2,3}^2 + g_2 v_{1,4}^2 + h_2 v_{2,4}^2 + k_2 v_{3,4}^2 + l_2 v_{2,5}^2 = z_2$$

Untuk  $i = 3$ ,  $j = 4$ , dan  $n = 1$  pada persamaan (3.36) dan (3.71) diperoleh:

$$a_1 u_{3,3}^2 + b_1 u_{2,4}^2 + c_1 u_{3,4}^2 + d_1 u_{4,4}^2 + e_1 u_{3,5}^2 + h_1 v_{3,4}^2 = z_1$$

$$c_2 u_{3,4}^2 + f_2 v_{3,3}^2 + g_2 v_{2,4}^2 + h_2 v_{3,4}^2 + k_2 v_{4,4}^2 + l_2 v_{3,5}^2 = z_2$$

⋮

Untuk  $i = L - 1$ ,  $j = M - 1$ , dan  $n = 1$  pada persamaan (3.36) dan (3.71)

diperoleh:

$$a_1 u_{L-1, M-2}^2 + b_1 u_{L-2, M-1}^2 + c_1 u_{L-1, M-1}^2 + d_1 u_{L, M-1}^2 + e_1 u_{L, M-1}^2 + h_1 v_{L-1, L-1}^2 = z_1$$

$$c_2 u_{L-1, L-1}^2 + f_2 v_{L-1, M-2}^2 + g_2 v_{L-2, M-1}^2 + h_2 v_{L-1, M-1}^2 + k_2 v_{L, M-1}^2 + l_2 v_{L-1, M}^2 = z_2$$

Setiap suku yang memiliki indeks 1,  $L$ , dan  $M$  suku tersebut merupakan kondisi batas yang sudah diketahui nilainya yaitu nol di semua batas sehingga suku tersebut dapat dipindahkan ke ruas kanan. Kemudian untuk memudahkan perhitungan, kelompokkan terlebih dahulu persamaan-persamaan di atas menjadi seperti berikut:

$$c_{1,2,2}^2 + d_1 u_{3,2}^2 + e_1 u_{2,3}^2 + h_1 v_{2,2}^2 = z_1$$

$$b_1 u_{2,2}^2 + c_{1,3,2}^2 + d_1 u_{4,2}^2 + e_1 u_{3,3}^2 + h_1 v_{3,2}^2 = z_1$$

$$b_1 u_{3,2}^2 + c_{1,4,2}^2 + d_1 u_{5,2}^2 + e_1 u_{4,3}^2 + h_1 v_{4,2}^2 = z_1$$

⋮

$$a_1 u_{L-1, M-2}^2 + b_1 u_{L-2, M-1}^2 + c_{1, L-1, M-1}^2 + h_1 v_{L-1, M-1}^2 = z_1$$

$$c_2 u_{2,2}^2 + h_2 v_{2,2}^2 + k_2 v_{3,2}^2 + l_2 v_{2,3}^2 = z_2$$

$$c_2 u_{3,2}^2 + g_2 v_{2,2}^2 + h_2 v_{3,2}^2 + k_2 v_{4,2}^2 + l_2 v_{3,3}^2 = z_2$$

$$c_2 u_{4,2}^2 + g_2 v_{3,2}^2 + h_2 v_{4,2}^2 + k_2 v_{5,2}^2 + l_2 v_{4,3}^2 = z_2$$

⋮

$$c_2 u_{L-1, M-1}^2 + f_2 v_{L-1, M-2}^2 + g_2 v_{L-2, M-1}^2 + h_2 v_{L-1, M-1}^2 = z_2$$

Iterasi dilakukan sebanyak  $N$  kali. Selanjutnya, hasil di atas diubah ke dalam bentuk matriks, sehingga untuk persamaan (3.36) dan (3.71) dengan  $i = 2, 3, 4, \dots, L - 1$ ,  $j = 2, 3, 4, \dots, M - 1$ , dan  $n = 1$  diperoleh:

$$\begin{bmatrix}
 c_1 & d_1 & 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 b_1 & c_1 & d_1 & 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 a_1 & 0 & 0 & c_1 & d_1 & 0 & e_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & a_1 & 0 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & e_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & a_1 & 0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & c_1 & d_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & b_1 & c_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_2 & k_2 & 0 & l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_2 & h_2 & k_2 & 0 & l_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & g_2 & h_2 & 0 & 0 & l_2 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f_2 & 0 & 0 & h_2 & k_2 & 0 & l_2 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_2 & 0 & g_2 & h_2 & k_2 & 0 & l_2 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & f_2 & 0 & g_2 & h_2 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & h_2 & k_2 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & f_2 & 0 & g_2 & h_2 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{bmatrix} = A$$

Matriks di atas adalah matriks tridiagonal berukuran  $2(M - 2)^2 \times 2(L - 2)^2$  dengan  $L$  merupakan panjang  $x$  dan  $M$  panjang dari  $y$ .

$$\begin{bmatrix}
 u_{2,2}^2 \\
 \vdots \\
 u_{L-1,2}^2 \\
 u_{2,3}^2 \\
 \vdots \\
 u_{L-1,3}^2 \\
 u_{2,4}^2 \\
 \vdots \\
 u_{L-1,M-1}^2 \\
 v_{L-1,2}^2 \\
 \vdots \\
 v_{L-1,2}^2 \\
 v_{2,3}^2 \\
 \vdots \\
 v_{L-1,3}^2 \\
 v_{2,4}^2 \\
 \vdots \\
 v_{L-1,M-1}^2
 \end{bmatrix} = B$$

$$\begin{bmatrix}
 z_1 \\
 z_1 \\
 z_1 \\
 z_1 \\
 z_1 \\
 z_1 \\
 z_1 \\
 \vdots \\
 z_2 \\
 z_2 \\
 z_2 \\
 z_2 \\
 z_2 \\
 z_2 \\
 z_2 \\
 z_2 \\
 \vdots
 \end{bmatrix} = C$$

$$AB = C. \tag{3.72}$$

Kemudian kalikan kedua ruas dengan  $A^{-1}$ , sehingga persamaan (3.72) menjadi:

$$(A^{-1}A)B = A^{-1}C.$$

Karena  $A^{-1}A = I$ , maka:  $B = A^{-1}C$ .

Untuk menentukan nilai kecepatan-kecepatan baru  $(u_{i,j}^{n+1}, v_{i,j}^{n+1})$  ketika  $n = 2, \dots, N - 1$  maka dibuat matriks dengan langkah langkah yang sama seperti matriks di atas ketika  $n = 1$ . Yang selanjutnya penyelesaian dilakukan menggunakan bantuan program MATLAB R2013a untuk mempermudah perhitungan.

### 3.1.4 Contoh Aplikasi

Sebagai contoh aplikasinya, dengan mensubstitusikan kondisi awal dan kondisi batas yang bernilai nol di semua batas pada sistem persamaan di mana  $i, j$ , dan  $n$  dibatasi pada  $i = 1, 2, \dots, 5$ ,  $j = 1, 2, \dots, 5$ , dan  $n = 1, 2, 3$ .

Kondisi awal

$$u(u_{i,j}^1) = 0,03$$

$$v(v_{i,j}^1) = 0,03$$

$$Re = 50$$

$$\Delta t = 0,1$$

$$\Delta x = \Delta y = 0,25$$

Untuk mencari nilai kecepatan-kecepatan baru pada iterasi kedua atau ketika  $n = 2$  menggunakan nilai yang sudah diketahui pada iterasi sebelumnya yaitu ketika  $n = 1$ . Ketika  $i = 2$  dan  $j = 2$  diperoleh nilai-nilai sebagai berikut:

$$a_1 = -\frac{v_{2,2}^1}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} = -\frac{0,03}{2(0,25)} - \frac{1}{50(0,25)^2} = -0,38$$

$$b_1 = -\frac{u_{2,2}^1}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} = -\frac{0,03}{2(0,25)} - \frac{1}{50,2} = -0,38$$

$$c_1 = \frac{1}{\Delta t} + \frac{u_{2,1}^1}{2\Delta x} - \frac{u_{1,1}^1}{2\Delta x} + \frac{2}{Re(\Delta x)^2} + \frac{2}{Re(\Delta y)^2}$$

$$= \frac{1}{0,1} + \frac{0}{2(0,25)} - \frac{0}{2(0,25)} + \frac{2}{50(0,25)^2} + \frac{2}{50(0,25)^2}$$

$$= 11,34$$

$$d_1 = \frac{u_{2,2}^1}{2(\Delta x)} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} = \frac{0,03}{2(0,25)} - \frac{1}{50(0,25)^2} = -0,26$$

$$e_1 = \frac{v_{2,2}^1}{2(\Delta y)} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} = \frac{0,03}{2(0,25)} - \frac{1}{50(0,25)^2} = -0,26$$

$$h_1 = \frac{u_{2,3}^1}{2\Delta y} - \frac{u_{2,1}^1}{2\Delta y} = \frac{0,03}{2(0,25)} - \frac{0}{2(0,25)} = 0,06$$

$$z_1 = u_{2,2}^1 \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{u_{3,2}^1}{2\Delta x} - \frac{u_{1,2}^1}{2\Delta x} \right) + v_{2,2}^1 \left( \frac{u_{2,3}^1}{2\Delta y} - \frac{u_{2,1}^1}{2\Delta y} \right)$$

$$= 0,03 \left( \frac{1}{0,1} + \frac{0,03}{2(0,25)} - \frac{0}{2(0,25)} \right) + 0,03 \left( \frac{0,03}{2(0,25)} - \frac{0}{2(0,25)} \right)$$

$$= 0,3036$$

$$c_2 = \frac{v_{3,2}^1 - v_{1,2}^1}{2\Delta x} = \frac{0,03 - 0}{2(0,25)} = 0,06$$

$$f_2 = -\frac{v_{2,2}^1}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} = -\frac{0,03}{2(0,25)} - \frac{1}{50(0,25)^2} = -0,38$$

$$g_2 = \frac{u_{2,2}^1}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} = \frac{0,03}{2(0,25)} - \frac{1}{50(0,25)^2} = -0,38$$

$$h_2 = \frac{1}{\Delta t} + \frac{v_{2,3}^1}{2\Delta y} - \frac{v_{2,1}^1}{2\Delta y} + \frac{2}{Re(\Delta x)^2} + \frac{2}{Re(\Delta y)^2}$$

$$= \frac{1}{0,1} + \frac{0,03}{2(0,25)} - \frac{0}{2(0,25)} + \frac{2}{50(0,25)^2} + \frac{2}{50(0,25)^2}$$

$$= 11,34$$

$$k_2 = \frac{u_{2,2}^1}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} = \frac{0,03}{2(0,25)} - \frac{1}{50(0,25)^2} = -0,26$$

$$l_2 = \frac{v_{2,2}^1}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} = \frac{0,03}{2(0,25)} - \frac{1}{50(0,25)^2} = -0,26$$

$$z_2 = v_{2,2}^1 \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{v_{2,3}^1}{2\Delta y} - \frac{v_{2,1}^1}{2\Delta y} \right) + u_{2,2}^1 \left( \frac{v_{3,2}^1}{2\Delta x} - \frac{v_{1,2}^1}{2\Delta x} \right)$$

$$= 0,03 \left( \frac{1}{0,1} + \frac{0,03}{2(0,25)} - \frac{0}{2(0,25)} \right) + 0,03 \left( \frac{0,03}{2(0,25)} - \frac{0}{2(0,25)} \right)$$

$$= 0,3036$$

Dengan cara yang sama sampai  $i = 4$  dan  $j = 4$  maka untuk persamaan (3.36) dan persamaan (3.71) diperoleh:

Ketika  $i = 2$ ,  $j = 2$ , dan  $n = 1$

$$(11,34)u_{2,2}^2 + (-0,26)u_{3,2}^2 + (-0,26)u_{2,3}^2 + (0,06)v_{2,2}^2 = 0,3036$$

$$(0,06)u_{2,2}^2 + (11,34)v_{2,2}^2 + (-0,26)v_{3,2}^2 + (-0,26)v_{2,3}^2 = 0,3036$$

Ketika  $i = 3$ ,  $j = 2$ , dan  $n = 1$

$$(-0,38)u_{2,2}^2 + (11,28)u_{3,2}^2 + (-0,26)u_{4,2}^2 + (-0,26)u_{3,3}^2 + (0,06)v_{3,2}^2 = 0,3018$$

$$(0)u_{3,2}^2 + (-0,38)v_{2,2}^2 + (11,34)v_{3,2}^2 + (-0,26)v_{4,2}^2 + (-0,26)v_{3,3}^2 = 0,3018$$

Ketika  $i = 4$ ,  $j = 2$ , dan  $n = 1$

$$(-0,38)u_{3,2}^2 + (11,22)u_{4,2}^2 + (-0,26)u_{4,3}^2 + (0,06)v_{4,2}^2 = 0,3$$

$$(-0,06)u_{4,2}^2 + (-0,38)v_{3,2}^2 + (11,34)v_{4,2}^2 + (-0,26)v_{4,3}^2 = 0,3$$

Ketika  $i = 2$ ,  $j = 3$ , dan  $n = 1$

$$(-0,38)u_{2,2}^2 + (11,34)u_{2,3}^2 + (-0,26)u_{3,3}^2 + (-0,26)u_{2,4}^2 + (0)v_{2,3}^2 = 0,3018$$

$$(0,06)u_{2,3}^2 + (-0,38)v_{2,2}^2 + (11,28)v_{2,3}^2 + (-0,26)v_{3,3}^2 + (-0,26)v_{2,4}^2 = 0,3018$$

Ketika  $i = 3$ ,  $j = 3$ , dan  $n = 1$

$$(-0,38)u_{3,2}^2 + (-0,38)u_{2,3}^2 + (11,28)u_{3,3}^2 + (-0,26)u_{4,3}^2 + (-0,26)u_{3,4}^2 + (0)v_{3,3}^2$$

$$= 0,3$$

$$(0)u_{3,3}^2 + (-0,38)v_{3,2}^2 + (-0,38)v_{2,3}^2 + (11,28)v_{3,3}^2 + (-0,26)v_{4,3}^2 + (-0,26)v_{3,4}^2$$

$$= 0,3$$

Ketika  $i = 4$ ,  $j = 3$ , dan  $n = 1$

$$(-0,38)u_{4,2}^2 + (-0,38)u_{3,3}^2 + (11,22)u_{4,3}^2 + (-0,26)u_{4,4}^2 + (0)v_{4,3}^2 = 0,2982$$

$$(-0,06)u_{4,3}^2 + (-0,38)v_{4,2}^2 + (-0,38)v_{3,3}^2 + (11,28)v_{4,3}^2 + (-0,26)v_{4,4}^2 = 0,2982$$

Ketika  $i = 2$ ,  $j = 4$ , dan  $n = 1$

$$(-0,38)u_{2,3}^2 + (11,34)u_{2,4}^2 + (-0,26)u_{3,4}^2 + (-0,06)v_{2,4}^2 = 0,3$$

$$(0,06)u_{2,4}^2 + (-0,38)v_{2,3}^2 + (11,22)v_{2,4}^2 + (-0,26)v_{3,4}^2 = 0,3$$

Ketika  $i = 3$ ,  $j = 4$ , dan  $n = 1$

$$(-0,38)u_{3,3}^2 + (-0,38)u_{2,4}^2 + (11,28)u_{3,4}^2 + (-0,26)u_{4,4}^2 + (-0,06)v_{3,4}^2 = 0,2982$$

$$(0)u_{3,4}^2 + (-0,38)v_{3,3}^2 + (-0,38)v_{2,4}^2 + (11,22)v_{3,4}^2 + (-0,26)v_{4,4}^2 = 0,2982$$

Ketika  $i = 4$ ,  $j = 4$ , dan  $n = 1$

$$(-0,38)u_{4,3}^2 + (-0,38)u_{3,4}^2 + (11,22)u_{4,4}^2 + (-0,06)v_{4,4}^2 = 0,2964$$

$$(-0,06)u_{4,4}^2 + (-0,38)v_{4,3}^2 + (-0,38)v_{3,4}^2 + (11,22)v_{4,4}^2 = 0,2964$$

Kemudian untuk memudahkan perhitungan, dikelompokkan terlebih dahulu persamaan-persamaan di atas menjadi seperti berikut:

$$(11,34)u_{2,2}^2 + (-0,26)u_{3,2}^2 + (-0,26)u_{2,3}^2 + (0,06)v_{2,2}^2 = 0,3036$$

$$(-0,38)u_{2,2}^2 + (11,28)u_{3,2}^2 + (-0,26)u_{4,2}^2 + (-0,26)u_{3,3}^2 + (0,06)v_{3,2}^2 = 0,3018$$

$$(-0,38)u_{3,2}^2 + (11,22)u_{4,2}^2 + (-0,26)u_{4,3}^2 + (0,06)v_{4,2}^2 = 0,3$$

$$(-0,38)u_{2,2}^2 + (11,34)u_{2,3}^2 + (-0,26)u_{3,3}^2 + (-0,26)u_{2,4}^2 + (0)v_{2,3}^2 = 0,3018$$

$$(-0,38)u_{3,2}^2 + (-0,38)u_{2,3}^2 + (11,28)u_{3,3}^2 + (-0,26)u_{4,3}^2 + (-0,26)u_{3,4}^2 + (0)v_{3,3}^2 = 0,3$$

$$(-0,38)u_{4,2}^2 + (-0,38)u_{3,3}^2 + (11,22)u_{4,3}^2 + (-0,26)u_{4,4}^2 + (0)v_{4,3}^2 = 0,2982$$

$$(-0,38)u_{2,3}^2 + (11,34)u_{2,4}^2 + (-0,26)u_{3,4}^2 + (-0,06)v_{2,4}^2 = 0,3$$

$$(-0,38)u_{3,3}^2 + (-0,38)u_{2,4}^2 + (11,28)u_{3,4}^2 + (-0,26)u_{4,4}^2 + (-0,06)v_{3,4}^2 = 0,2982$$

$$(-0,38)u_{4,3}^2 + (-0,38)u_{3,4}^2 + (11,22)u_{4,4}^2 + (-0,06)v_{4,4}^2 = 0,2964$$

$$(0,06)u_{2,2}^2 + (11,34)v_{2,2}^2 + (-0,26)v_{3,2}^2 + (-0,26)v_{2,3}^2 = 0,3036$$

$$(0)u_{3,2}^2 + (-0,38)v_{2,2}^2 + (11,34)v_{3,2}^2 + (-0,26)v_{4,2}^2 + (-0,26)v_{3,3}^2 = 0,3018$$

$$(-0,06)u_{4,2}^2 + (-0,38)v_{3,2}^2 + (11,34)v_{4,2}^2 + (-0,26)v_{4,3}^2 = 0,3$$

$$(0,06)u_{2,3}^2 + (-0,38)v_{2,2}^2 + (11,28)v_{2,3}^2 + (-0,26)v_{3,3}^2 + (-0,26)v_{2,4}^2 = 0,3018$$

$$(0)u_{3,3}^2 + (-0,38)v_{3,2}^2 + (-0,38)v_{2,3}^2 + (11,28)v_{3,3}^2 + (-0,26)v_{4,3}^2 + (-0,26)v_{3,4}^2 = 0,3$$

$$(-0,06)u_{4,3}^2 + (-0,38)v_{4,2}^2 + (-0,38)v_{3,3}^2 + (11,28)v_{4,3}^2 + (-0,26)v_{4,4}^2 = 0,2982$$

$$(0,06)u_{2,4}^2 + (-0,38)v_{2,3}^2 + (11,22)v_{2,4}^2 + (-0,26)v_{3,4}^2 = 0,3$$

$$(0)u_{3,4}^2 + (-0,38)v_{3,3}^2 + (-0,38)v_{2,4}^2 + (11,22)v_{3,4}^2 + (-0,26)v_{4,4}^2 = 0,2982$$

$$(-0,06)u_{4,4}^2 + (-0,38)v_{4,3}^2 + (-0,38)v_{3,4}^2 + (11,22)v_{4,4}^2 = 0,2964$$

Selanjutnya, hasil di atas diubah ke dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 11,34 & -0,26 & 0 & -0,26 & \dots & 0 & 0,06 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -0,38 & 11,28 & -0,26 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0,06 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -0,38 & 11,22 & 0 & \dots & -0,26 & 0 & 0 & 0,06 & 0 & \dots & 0 \\ -0,38 & 0 & 0 & 11,34 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -0,38 & 0 & \dots & 11,22 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -0,06 \\ 0,06 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 11,34 & -0,26 & 0 & -0,26 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -0,38 & 11,34 & -0,26 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -0,06 & 0 & \dots & 0 & 0 & -0,38 & 11,34 & 0 & \dots & -0,26 \\ 0 & 0 & 0 & 0,06 & \dots & 0 & -0,38 & 0 & 0 & 11,28 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -0,06 & 0 & 0 & -0,38 & 0 & \dots & 11,22 \end{bmatrix} = A$$

Matriks di atas merupakan matriks tridiagonal berukuran 18 x 18

$$\begin{bmatrix} u_{2,2}^2 \\ u_{3,2}^2 \\ u_{4,2}^2 \\ u_{2,3}^2 \\ \vdots \\ u_{4,4}^2 \\ v_{2,2}^2 \\ v_{3,2}^2 \\ v_{4,2}^2 \\ v_{2,3}^2 \\ \vdots \\ v_{4,4}^2 \end{bmatrix} = B \qquad \begin{bmatrix} 0,3036 \\ 0,3018 \\ 0,3 \\ 0,3018 \\ \vdots \\ 0,2964 \\ 0,3036 \\ 0,3018 \\ 0,3 \\ 0,3018 \\ \vdots \\ 0,2964 \end{bmatrix} = C$$

Dikarenakan  $AB = C$ , maka untuk mencari nilai-nilai kecepatan baru pada iterasi kedua ( $n = 2$ ) dapat dicari dengan  $B = A^{-1}C$  menggunakan bantuan program MATLAB R2013a untuk mempermudah perhitungan sehingga menghasilkan kecepatan-kecepatan baru ketika  $n = 2$  sebagai berikut:

$$u_{2,2}^2 = 0,0279$$

$$v_{2,2}^2 = 0,0279$$

$$\begin{array}{ll}
 u_{3,2}^2 = 0,0289 & v_{3,2}^2 = 0,0289 \\
 u_{4,2}^2 = 0,0282 & v_{4,2}^2 = 0,0282 \\
 u_{2,3}^2 = 0,0289 & v_{2,3}^2 = 0,0289 \\
 u_{3,3}^2 = 0,0299 & v_{3,3}^2 = 0,0299 \\
 u_{4,3}^2 = 0,0292 & v_{4,3}^2 = 0,0292 \\
 u_{2,4}^2 = 0,0282 & v_{2,4}^2 = 0,0282 \\
 u_{3,4}^2 = 0,0292 & v_{3,4}^2 = 0,0292 \\
 u_{4,4}^2 = 0,0285 & v_{4,4}^2 = 0,0285
 \end{array}$$

Untuk iterasi ketiga pada persamaan (3.36) dan (3.71) dilakukan langkah-langkah yang sama seperti pada perhitungan iterasi kedua. Hanya saja, pada iterasi ketiga untuk mencari nilai kecepatan-kecepatan barunya tidak lagi menggunakan nilai dari iterasi pertama ketika  $n = 1$  melainkan menggunakan nilai yang sudah diketahui pada iterasi sebelumnya yaitu ketika  $n = 2$ . Dengan langkah yang sama untuk iterasi ketiga diperoleh matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}
 11,3378 & -0,2641 & 0 & -0,2641 & \dots & 0 & 0,0578 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 -0,3778 & 11,2806 & -0,2622 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0,0598 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & -0,3765 & 11,2222 & 0 & \dots & -0,2616 & 0 & 0 & 0,0584 & 0 & \dots & 0 \\
 -0,3778 & 0 & 0 & 11,3398 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0006 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & -0,3771 & 0 & \dots & 11,2216 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -0,0584 \\
 0,0578 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 11,3378 & -0,2641 & 0 & -0,2641 & \dots & 0 \\
 0 & 0,0006 & 0 & 0 & \dots & 0 & -0,3778 & 11,3398 & -0,2622 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & -0,0578 & 0 & \dots & 0 & 0 & -0,3765 & 11,3384 & 0 & \dots & -0,2616 \\
 0 & 0 & 0 & 0,0598 & \dots & 0 & -0,3778 & 0 & 0 & 11,2806 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -0,0584 & 0 & 0 & -0,3771 & 0 & \dots & 11,2216
 \end{bmatrix} = A$$

Matriks di atas merupakan matriks tridiagonal berukuran  $18 \times 18$

$$\begin{bmatrix}
 u_{2,2}^3 \\
 u_{3,2}^3 \\
 u_{4,2}^3 \\
 u_{2,3}^3 \\
 \vdots \\
 u_{4,4}^3 \\
 v_{2,2}^3 \\
 v_{3,2}^3 \\
 v_{4,2}^3 \\
 v_{2,3}^3 \\
 \vdots \\
 v_{4,4}^3
 \end{bmatrix} = B
 \qquad
 \begin{bmatrix}
 0,2827 \\
 0,2906 \\
 0,2824 \\
 0,2906 \\
 \vdots \\
 0,2821 \\
 0,2827 \\
 0,2906 \\
 0,2824 \\
 0,2906 \\
 \vdots \\
 0,2821
 \end{bmatrix} = C$$

Dikarenakan  $AB = C$ , maka untuk mencari nilai-nilai kecepatan baru pada iterasi ketiga ( $n = 3$ ) dapat dicari dengan  $B = A^{-1}C$  menggunakan bantuan program MATLAB R2013a untuk mempermudah perhitungan sehingga menghasilkan kecepatan-kecepatan baru sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll} u_{2,2}^3 = 0,0261 & v_{2,2}^3 = 0,0261 \\ u_{3,2}^3 = 0,0278 & v_{3,2}^3 = 0,0278 \\ u_{4,2}^3 = 0,0266 & v_{4,2}^3 = 0,0266 \\ \vdots & \vdots \\ u_{4,4}^3 = 0,0272 & v_{4,4}^3 = 0,0272 \end{array}$$

Untuk mencari nilai iterasi selanjutnya juga dilakukan langkah-langkah yang sama seperti pada perhitungan iterasi kedua dan ketiga menggunakan nilai yang sudah diketahui pada iterasi sebelumnya. Pengulangan iterasi dilakukan dengan bantuan program MATLAB R2013a untuk mempermudah mencari nilai di iterasi berapapun yang diinginkan. Baik hasil perhitungan manual ataupun menggunakan bantuan MATLAB memiliki nilai yang sama, hal tersebut menunjukkan bahwa program yang dibuat sudah optimal. Untuk melihat hasil dari program MATLAB tersebut dapat dilihat pada Lampiran 1. Adapun untuk program MATLAB secara keseluruhan dapat dilihat pada Lampiran 2.

### **3.2 Kestabilan dan Kekonvergenan Persamaan *Navier-Stokes* Dua Dimensi dengan Skema Implisit FTCS**

Pada sub bab ini dibahas mengenai (3.2.1) analisis kestabilan dan (3.2.2) analisis kekonvergenan untuk mengetahui bagaimana kriteria kestabilan dan kekonvergenan pada persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi.

### 3.2.1 Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan metode beda hingga skema implisit FTCS pada persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi dalam penelitian ini menggunakan analisis kestabilan *von Neumann*, dengan cara mensubstitusikan deret Fourier ke dalam persamaan yang telah didiskritkan dengan mendefinisikan sudut fase dengan  $\theta = P\Delta x$ ,  $\omega = Q\Delta y$ , dan  $I = \sqrt{-1}$ . Adapun deret Fourier yang digunakan adalah sebagai berikut:

Tabel 3.1 Deret Fourier pada Analisis Kestabilan *von Neuman*

Komponen Fourier pada $u$	Komponen Fourier pada $v$
$u_{i,j}^n = \rho^n e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y j)}$ $= \rho^n e^{I(\theta i + \omega j)}$	$v_{i,j}^n = r^n e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y j)}$ $= r^n e^{I(\theta i + \omega j)}$
$u_{i,j-1}^{n+1} = \rho^{n+1} e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y (j-1))}$ $= \rho^{n+1} e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y j - Q\Delta y)}$ $= \rho^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j - \omega)}$	$v_{i,j-1}^{n+1} = r^{n+1} e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y (j-1))}$ $= r^{n+1} e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y j - Q\Delta y)}$ $= r^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j - \omega)}$
$u_{i-1,j}^{n+1} = \rho^{n+1} e^{I(P\Delta x (i-1) + Q\Delta y j)}$ $= \rho^{n+1} e^{I(P\Delta x i - P\Delta x + Q\Delta y j)}$ $= \rho^{n+1} e^{I(\theta i - \theta + \omega j)}$	$v_{i-1,j}^{n+1} = r^{n+1} e^{I(P\Delta x (i-1) + Q\Delta y j)}$ $= r^{n+1} e^{I(P\Delta x i - P\Delta x + Q\Delta y j)}$ $= r^{n+1} e^{I(\theta i - \theta + \omega j)}$
$u_{i,j}^{n+1} = \rho^{n+1} e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y j)}$ $= \rho^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j)}$	$v_{i,j}^{n+1} = r^{n+1} e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y j)}$ $= r^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j)}$
$u_{i+1,j}^{n+1} = \rho^{n+1} e^{I(P\Delta x (i+1) + Q\Delta y j)}$ $= \rho^{n+1} e^{I(P\Delta x i + P\Delta x + Q\Delta y j)}$ $= \rho^{n+1} e^{I(\theta i + \theta + \omega j)}$	$v_{i+1,j}^{n+1} = r^{n+1} e^{I(P\Delta x (i+1) + Q\Delta y j)}$ $= r^{n+1} e^{I(P\Delta x i + P\Delta x + Q\Delta y j)}$ $= r^{n+1} e^{I(\theta i + \theta + \omega j)}$
$u_{i,j+1}^{n+1} = \rho^{n+1} e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y (j+1))}$ $= \rho^{n+1} e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y j + Q\Delta y)}$ $= \rho^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j + \omega)}$	$v_{i,j+1}^{n+1} = r^{n+1} e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y (j+1))}$ $= r^{n+1} e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y j + Q\Delta y)}$ $= r^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j + \omega)}$

Setelah menentukan komponen Fourier di atas, kemudian disubstitusikan komponen-komponen tersebut ke dalam persamaan (3.1a) dan (3.1b) dalam bentuk diskrit. Namun sebelum itu Feng dan Mitsui (1998) mengatakan bahwa persamaan nonlinier harus diubah terlebih dahulu menjadi persamaan linier dengan mengubah  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  menjadi  $\bar{u} \frac{\partial u}{\partial x}$  dan  $v \frac{\partial u}{\partial y}$  menjadi  $\bar{v} \frac{\partial u}{\partial y}$  dimana  $\bar{u} = \max|u|$  dan  $\bar{v} = \max|v|$ . Untuk persamaan (3.1a) menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (3.73)$$

Sehingga diperoleh bentuk diskrit dari persamaan (3.73) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \left( \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \right) + \bar{u} \left( \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \bar{v} \left( \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \\ = \frac{1}{Re} \left( \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Kemudian disubstitusikan komponen Fourier pada persamaan (3.74) menjadi:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\rho^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j)} - \rho^n e^{I(\theta i + \omega j)}}{\Delta t} \right) + \bar{u} \left( \frac{\rho^{n+1} e^{I(\theta i + \theta + \omega j)} - \rho^{n+1} e^{I(\theta i - \theta + \omega j)}}{2\Delta x} \right) \\ + \bar{v} \left( \frac{\rho^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j + \omega)} - \rho^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j - \omega)}}{2\Delta y} \right) \\ = \frac{1}{Re} \left( \frac{\rho^{n+1} e^{I(\theta i + \theta + \omega j)} - 2\rho^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j)} + \rho^{n+1} e^{I(\theta i - \theta + \omega j)}}{\Delta x^2} \right. \\ \left. + \frac{\rho^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j + \omega)} - 2\rho^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j)} + \rho^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j - \omega)}}{\Delta y^2} \right). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Dengan membagi kedua ruas dengan  $e^{I(\theta i + \omega j)}$  maka persamaan persamaan (3.75) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} \right) + \bar{u} \left( \frac{\rho^{n+1} e^{I(\theta)} - \rho^{n+1} e^{I(-\theta)}}{2\Delta x} \right) + \bar{v} \left( \frac{\rho^{n+1} e^{I(\omega)} - \rho^{n+1} e^{I(-\omega)}}{2\Delta y} \right) \\
&= \frac{1}{Re} \left( \frac{\rho^{n+1} e^{I(\theta)} - 2\rho^{n+1} + \rho^{n+1} e^{I(-\theta)}}{\Delta x^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\rho^{n+1} e^{I(\omega)} - 2\rho^{n+1} + \rho^{n+1} e^{I(-\omega)}}{\Delta y^2} \right). \tag{3.76}
\end{aligned}$$

Persamaan (3.76) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \rho^{n+1} + \left( \bar{u} \left( \frac{e^{I(\theta)} - e^{I(-\theta)}}{2\Delta x} \right) \right) \rho^{n+1} + \left( \bar{v} \left( \frac{e^{I(\omega)} - e^{I(-\omega)}}{2\Delta y} \right) \right) \rho^{n+1} \\
&\quad - \left( \frac{e^{I(\theta)} + e^{I(-\theta)} - 2}{Re(\Delta x^2)} \right) \rho^{n+1} - \left( \frac{e^{I(\omega)} + e^{I(-\omega)} - 2}{Re(\Delta y^2)} \right) \rho^{n+1} \\
&= \frac{1}{\Delta t} \rho^n. \tag{3.77}
\end{aligned}$$

Karena  $\cos \theta = \frac{e^{I\theta} + e^{-I\theta}}{2}$  dan  $\sin \theta = \frac{e^{I\theta} - e^{-I\theta}}{2I}$ , maka persamaan (3.77) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \rho^{n+1} + \left( \bar{u} \left( \frac{I \sin \theta}{\Delta x} \right) \right) \rho^{n+1} + \left( \bar{v} \left( \frac{I \sin \omega}{\Delta y} \right) \right) \rho^{n+1} - \left( \frac{2 \cos \theta - 2}{Re(\Delta x^2)} \right) \rho^{n+1} \\
&\quad - \left( \frac{2 \cos \omega - 2}{Re(\Delta y^2)} \right) \rho^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \rho^n \tag{3.78}
\end{aligned}$$

maka

$$\rho^{n+1} \left( \frac{1}{\Delta t} + \bar{u} \left( \frac{I \sin \theta}{\Delta x} \right) + \bar{v} \left( \frac{I \sin \omega}{\Delta y} \right) - \frac{2 \cos \theta - 2}{Re(\Delta x^2)} - \frac{2 \cos \omega - 2}{Re(\Delta y^2)} \right) = \frac{1}{\Delta t} \rho^n. \tag{3.79}$$

Kemudian untuk persamaan (3.1b) disubstitusikan komponen-komponen Fourier dengan mengubah  $u \frac{\partial v}{\partial x}$  menjadi  $\bar{u} \frac{\partial v}{\partial x}$  dan  $v \frac{\partial v}{\partial y}$  menjadi  $\bar{v} \frac{\partial v}{\partial y}$  dimana  $\bar{u} = \max|u|$  dan  $\bar{v} = \max|v|$ . Sehingga persamaan (3.1b) menjadi:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \tag{3.80}$$

Sehingga diperoleh bentuk diskrit dari persamaan (3.80) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \right) + \bar{u} \left( \frac{v_{i+1,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \bar{v} \left( \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \\
& = \frac{1}{Re} \left( \frac{v_{i+1,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Kemudian disubstitusikan komponen Fourier pada persamaan (3.81) menjadi

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{r^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j)} - r^n e^{I(\theta i + \omega j)}}{\Delta t} \right) + \bar{u} \left( \frac{r^{n+1} e^{I(\theta i + \theta + \omega j)} - r^{n+1} e^{I(\theta i - \theta + \omega j)}}{2\Delta x} \right) \\
& + \bar{v} \left( \frac{r^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j + \omega)} - r^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j - \omega)}}{2\Delta y} \right) \\
& = \frac{1}{Re} \left( \frac{r^{n+1} e^{I(\theta i + \theta + \omega j)} - 2r^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j)} + r^{n+1} e^{I(\theta i - \theta + \omega j)}}{\Delta x^2} \right. \\
& \left. + \frac{r^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j + \omega)} - 2r^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j)} + r^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j - \omega)}}{\Delta y^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Dengan membagi kedua ruas dengan  $e^{I(\theta i + \omega j)}$  maka persamaan persamaan (3.82)

dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{r^{n+1} - r^n}{\Delta t} \right) + \bar{u} \left( \frac{r^{n+1} e^{I(\theta)} - r^{n+1} e^{I(-\theta)}}{2\Delta x} \right) + \bar{v} \left( \frac{r^{n+1} e^{I(\omega)} - r^{n+1} e^{I(-\omega)}}{2\Delta y} \right) \\
& = \frac{1}{Re} \left( \frac{r^{n+1} e^{I(\theta)} - 2r^{n+1} + r^{n+1} e^{I(-\theta)}}{\Delta x^2} \right. \\
& \left. + \frac{r^{n+1} e^{I(\omega)} - 2r^{n+1} + r^{n+1} e^{I(-\omega)}}{\Delta y^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.83}$$

atau

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} r^{n+1} + \left( \bar{u} \left( \frac{e^{I(\theta)} - e^{I(-\theta)}}{2\Delta x} \right) \right) r^{n+1} + \left( \bar{v} \left( \frac{e^{I(\omega)} - e^{I(-\omega)}}{2\Delta y} \right) \right) r^{n+1} \\
& - \left( \frac{e^{I(\theta)} + e^{I(-\theta)} - 2}{Re(\Delta x^2)} \right) r^{n+1} - \left( \frac{e^{I(\omega)} + e^{I(-\omega)} - 2}{Re(\Delta y^2)} \right) r^{n+1} \\
& = \frac{1}{\Delta t} r^n.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Karena  $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$  dan  $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ , maka persamaan (3.84) dapat ditulis

sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} r^{n+1} + \left( \bar{u} \left( \frac{I \sin \theta}{\Delta x} \right) \right) r^{n+1} + \left( \bar{v} \left( \frac{I \sin \omega}{\Delta y} \right) \right) r^{n+1} - \left( \frac{2 \cos \theta - 2}{Re(\Delta x^2)} \right) r^{n+1} \\ - \left( \frac{2 \cos \omega - 2}{Re(\Delta y^2)} \right) r^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} r^n \end{aligned} \quad (3.85)$$

maka

$$r^{n+1} \left( \frac{1}{\Delta t} + \bar{u} \left( \frac{I \sin \theta}{\Delta x} \right) + \bar{v} \left( \frac{I \sin \omega}{\Delta y} \right) - \frac{2 \cos \theta - 2}{Re(\Delta x^2)} - \frac{2 \cos \omega - 2}{Re(\Delta y^2)} \right) = \frac{1}{\Delta t} r^n. \quad (3.86)$$

Berdasarkan persamaan (3.80) dan (3.86), maka diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \rho^{n+1} \left( \frac{1}{\Delta t} + \bar{u} \left( \frac{I \sin \theta}{\Delta x} \right) + \bar{v} \left( \frac{I \sin \omega}{\Delta y} \right) - \frac{2 \cos \theta - 2}{Re(\Delta x^2)} - \frac{2 \cos \omega - 2}{Re(\Delta y^2)} \right) = \frac{1}{\Delta t} \rho^n \\ r^{n+1} \left( \frac{1}{\Delta t} + \bar{u} \left( \frac{I \sin \theta}{\Delta x} \right) + \bar{v} \left( \frac{I \sin \omega}{\Delta y} \right) - \frac{2 \cos \theta - 2}{Re(\Delta x^2)} - \frac{2 \cos \omega - 2}{Re(\Delta y^2)} \right) = \frac{1}{\Delta t} r^n. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Jika dimisalkan  $c = \frac{1}{\Delta t} + \bar{u} \left( \frac{I \sin \theta}{\Delta x} \right) + \bar{v} \left( \frac{I \sin \omega}{\Delta y} \right) - \frac{2 \cos \theta - 2}{Re(\Delta x^2)} - \frac{2 \cos \omega - 2}{Re(\Delta y^2)}$ , maka

persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho^{n+1} \\ r^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho^n \\ r^n \end{bmatrix}. \quad (3.88)$$

Atau dapat disederhanakan menjadi persamaan berikut:

$$\begin{bmatrix} \rho^{n+1} \\ r^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho^n \\ r^n \end{bmatrix}. \quad (3.89)$$

Selanjutnya dari persamaan (3.89) di atas dapat dianggap

$$A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Sehingga dapat dihitung

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Adj } A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}.$$

Maka berdasarkan persamaa (3.89) dapat dihitung

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c \Delta t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c \Delta t} \end{bmatrix} = B. \quad (3.90)$$

Untuk mendapatkan nilai eigen yaitu  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$ , maka dari persamaan (3.90) dapat dihitung determinan sebagai berikut:

$$\det(B - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{c \Delta t} - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{c \Delta t} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\left(\frac{1}{c \Delta t} - \lambda\right) \left(\frac{1}{c \Delta t} - \lambda\right) = 0$$

atau

$$\lambda^2 - 2 \frac{1}{c \Delta t} \lambda + \left(\frac{1}{c \Delta t}\right)^2 = 0. \quad (3.91)$$

Diperoleh akar-akar dari persamaan (3.91) sebagai berikut:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ = \frac{2 \frac{1}{c \Delta t} \pm \sqrt{\left(2 \frac{1}{c \Delta t}\right)^2 - 4 \left(\frac{1}{c \Delta t}\right)^2}}{2} \\ = \frac{2 \frac{1}{c \Delta t} \pm 2 \sqrt{\left(\frac{1}{c \Delta t}\right)^2 - \left(\frac{1}{c \Delta t}\right)^2}}{2}.$$

Sehingga diketahui bahwa persamaan (3.91) memiliki akar-akar yang sama yaitu

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{c} \frac{1}{\Delta t}.$$

Dengan  $I$  adalah bilangan imajiner dari  $\sqrt{-1}$  atau dapat disimbolkan dengan

$I = i = \sqrt{-1}$  maka,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\left( \frac{1}{\Delta t} + \bar{u} \left( \frac{i \sin \theta}{\Delta x} \right) + \bar{v} \left( \frac{i \sin \omega}{\Delta y} \right) - \frac{2 \cos \theta - 2}{Re(\Delta x^2)} - \frac{2 \cos \omega - 2}{Re(\Delta y^2)} \right) \Delta t}. \quad (3.92)$$

Karena nilai  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ ,  $-1 \leq \sin \omega \leq 1$ ,  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ , dan  $-1 \leq \cos \omega \leq 1$  maka kriteria kestabilan memiliki tiga kemungkinan dapat dianalisis sebagai berikut:

**Kasus 1.** Ketika  $\sin \theta = 1$ ,  $\sin \omega = 1$ ,  $\cos \theta = 1$ , dan  $\cos \omega = 1$  maka

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{\left( \frac{1}{\Delta t} + \bar{u} \left( \frac{i}{\Delta x} \right) + \bar{v} \left( \frac{i}{\Delta y} \right) - \frac{2-2}{Re(\Delta x^2)} - \frac{2-2}{Re(\Delta y^2)} \right) \Delta t} \\ &= \frac{1}{1 + \Delta t \bar{u} \left( \frac{i}{\Delta x} \right) + \Delta t \bar{v} \left( \frac{i}{\Delta y} \right)} \\ &= \frac{1}{1 + i \left( \frac{\Delta t \bar{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta t \bar{v}}{\Delta y} \right)}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Sebelumnya telah dijelaskan bahwa syarat kestabilan akan terpenuhi jika  $|\lambda_1| \leq 1$  dan  $|\lambda_2| \leq 1$ . Dari persamaan (3.93) dapat dinyatakan bahwa:

$$|\lambda_{1,2}| = \left| \frac{1}{1 + i \left( \frac{\Delta t \bar{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta t \bar{v}}{\Delta y} \right)} \right| \leq 1. \quad (3.94)$$

Jika

$$1 + i \left( \frac{\Delta t \bar{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta t \bar{v}}{\Delta y} \right) = Z$$

maka persamaan (3.94) menjadi:

$$|\lambda_{1,2}| = \left| \frac{1}{Z} \right| \leq 1. \quad (3.95)$$

Dari persamaan (3.94) diketahui bahwa penyebut merupakan bilangan kompleks yang nilainya dapat dicari menggunakan perhitungan modulus. Adapun konjugat dari  $Z$  adalah:

$$\bar{Z} = 1 - i \left( \frac{\Delta t \bar{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta t \bar{v}}{\Delta y} \right). \quad (3.96)$$

Sehingga diperoleh modulus dari  $Z$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |Z| &= Z\bar{Z} = \left( 1 + i \left( \frac{\Delta t \bar{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta t \bar{v}}{\Delta y} \right) \right) \left( 1 - i \left( \frac{\Delta t \bar{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta t \bar{v}}{\Delta y} \right) \right) \\ &= 1^2 - \left( i \left( \frac{\Delta t \bar{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta t \bar{v}}{\Delta y} \right) \right)^2 \\ &= 1 + \left( \frac{\Delta t \bar{u}}{\Delta x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\Delta t^2 \bar{u} \bar{v}}{\Delta x \Delta y} \right) + \left( \frac{\Delta t \bar{v}}{\Delta y} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Kemudian persamaan (3.97) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.95) menjadi:

$$|\lambda_{1,2}| = \left| \frac{1}{1 + \left( \frac{\Delta t \bar{u}}{\Delta x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\Delta t^2 \bar{u} \bar{v}}{\Delta x \Delta y} \right) + \left( \frac{\Delta t \bar{v}}{\Delta y} \right)^2} \right| \leq 1. \quad (3.98)$$

Persamaan (3.98) menunjukkan bahwa kondisi penyebut selalu bernilai lebih besar dari pembilang. Sehingga berdasarkan  $|\lambda_{1,2}|$  dapat disimpulkan bahwa metode implisit FTCS pada kasus  $\sin \theta = 1$ ,  $\sin \omega = 1$ ,  $\cos \theta = 1$ , dan  $\cos \omega = 1$  stabil tanpa syarat.

**Kasus 2.** Ketika  $\sin \theta = 0$ ,  $\sin \omega = 0$ ,  $\cos \theta = 0$ , dan  $\cos \omega = 0$  maka

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{\left( \frac{1}{\Delta t} - \frac{-2}{Re(\Delta x^2)} - \frac{-2}{Re(\Delta y^2)} \right) \Delta t} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{2\Delta t}{Re(\Delta x^2)} + \frac{2\Delta t}{Re(\Delta y^2)}}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Sebelumnya telah dijelaskan bahwa syarat kestabilan akan terpenuhi jika  $|\lambda_1| \leq 1$  dan  $|\lambda_2| \leq 1$ . Dari persamaan (3.99) dapat dinyatakan bahwa:

$$|\lambda_{1,2}| = \left| \frac{1}{1 + \frac{2\Delta t}{Re(\Delta x^2)} + \frac{2\Delta t}{Re(\Delta y^2)}} \right| \leq 1. \quad (3.100)$$

Terlihat bahwa persamaan (3.100) menunjukkan kondisi penyebut selalu bernilai lebih besar dari pembilang. Sehingga berdasarkan  $|\lambda_{1,2}|$  dapat disimpulkan bahwa metode implisit FTCS pada kasus  $\sin \theta = 0$ ,  $\sin \omega = 0$ ,  $\cos \theta = 0$ , dan  $\cos \omega = 0$  stabil tanpa syarat.

**Kasus 3.** Ketika  $\sin \theta = -1$ ,  $\sin \omega = -1$ ,  $\cos \theta = -1$ , dan  $\cos \omega = -1$  maka

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{\left( \frac{1}{\Delta t} + \bar{u} \left( \frac{-i}{\Delta x} \right) + \bar{v} \left( \frac{-i}{\Delta y} \right) - \frac{-2-2}{Re(\Delta x^2)} - \frac{-2-2}{Re(\Delta y^2)} \right) \Delta t} \\ &= \frac{1}{1 + \Delta t \bar{u} \left( \frac{i}{\Delta x} \right) + \Delta t \bar{v} \left( \frac{i}{\Delta y} \right) + \frac{4\Delta t}{Re(\Delta x^2)} + \frac{4\Delta t}{Re(\Delta y^2)}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{4\Delta t}{Re(\Delta x^2)} + \frac{4\Delta t}{Re(\Delta y^2)} + i \left( \frac{\Delta t \bar{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta t \bar{v}}{\Delta y} \right)}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Sebelumnya telah dijelaskan bahwa syarat kestabilan akan terpenuhi jika  $|\lambda_1| \leq 1$  dan  $|\lambda_2| \leq 1$ . Dari persamaan (3.101) dapat dinyatakan bahwa:

$$|\lambda_{1,2}| = \left| \frac{1}{1 + \frac{4\Delta t}{Re(\Delta x^2)} + \frac{4\Delta t}{Re(\Delta y^2)} + i \left( \frac{\Delta t \bar{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta t \bar{v}}{\Delta y} \right)} \right| \leq 1. \quad (3.102)$$

Jika

$$1 + \frac{4\Delta t}{Re(\Delta x^2)} + \frac{4\Delta t}{Re(\Delta y^2)} + i \left( \frac{\Delta t \bar{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta t \bar{v}}{\Delta y} \right) = X$$

atau dapat ditulis

$$\frac{1}{Re^2(\Delta x^2)(\Delta y^2)}(Re^2(\Delta x^2)(\Delta y^2) + 4Re\Delta t(\Delta y^2) + 4Re\Delta t(\Delta x^2)) + i\left(\frac{\Delta t\bar{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta t\bar{v}}{\Delta y}\right) = X \quad (3.103)$$

maka persamaan (3.102) menjadi:

$$|\lambda_{1,2}| = \left|\frac{1}{X}\right| \leq 1. \quad (3.104)$$

Dari persamaan (3.102) diketahui bahwa penyebut merupakan bilangan kompleks yang nilainya dapat dicari menggunakan perhitungan modulus. Konjugat dari persamaan (3.103) adalah:

$$\bar{X} = \frac{1}{Re^2(\Delta x^2)(\Delta y^2)}(Re^2(\Delta x^2)(\Delta y^2) + 4Re\Delta t(\Delta y^2) + 4Re\Delta t(\Delta x^2)) - i\left(\frac{\Delta t\bar{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta t\bar{v}}{\Delta y}\right). \quad (3.105)$$

Sehingga diperoleh modulus dari  $X$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |X| &= X\bar{X} \\ &= \left(\frac{1}{Re^2(\Delta x^2)(\Delta y^2)}(Re^2(\Delta x^2)(\Delta y^2) + 4Re\Delta t(\Delta y^2) + 4Re\Delta t(\Delta x^2)) + i\left(\frac{\Delta t\bar{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta t\bar{v}}{\Delta y}\right)\right) \left(\frac{1}{Re^2(\Delta x^2)(\Delta y^2)}(Re^2(\Delta x^2)(\Delta y^2) + 4Re\Delta t(\Delta y^2) + 4Re\Delta t(\Delta x^2)) - i\left(\frac{\Delta t\bar{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta t\bar{v}}{\Delta y}\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{Re^2(\Delta x^2)(\Delta y^2)}(Re^2(\Delta x^2)(\Delta y^2) + 4Re\Delta t(\Delta y^2) + 4Re\Delta t(\Delta x^2)) + 4Re\Delta t(\Delta x^2)\right)^2 - \left(i\left(\frac{\Delta t\bar{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta t\bar{v}}{\Delta y}\right)\right)^2 \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + 2\left(\frac{4\Delta t}{Re(\Delta x)^2}\right) + 2\left(\frac{4\Delta t}{Re(\Delta y)^2}\right) + \left(\frac{4\Delta t}{Re(\Delta x)^2}\right)^2 + \left(\frac{4\Delta t}{Re(\Delta y)^2}\right)^2 \\
&\quad + 2\left(\frac{16\Delta t^2}{Re^2(\Delta x)^2(\Delta y)^2}\right) + \left(\frac{\Delta t \bar{u}}{\Delta x}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta t^2 \bar{u} \bar{v}}{\Delta x \Delta y}\right) + \left(\frac{\Delta t \bar{v}}{\Delta y}\right)^2.
\end{aligned}$$

Kemudian disubstitusikan persamaan (3.106) ke dalam persamaan (3.104) menjadi:

$$|\lambda_{1,2}| = \left| \frac{1}{|X|} \right| \leq 1 \quad (3.107)$$

dengan

$$\begin{aligned}
|X| &= 1 + 2\left(\frac{4\Delta t}{Re(\Delta x)^2}\right) + 2\left(\frac{4\Delta t}{Re(\Delta y)^2}\right) + \left(\frac{4\Delta t}{Re(\Delta x)^2}\right)^2 + \left(\frac{4\Delta t}{Re(\Delta y)^2}\right)^2 \\
&\quad + 2\left(\frac{16\Delta t^2}{Re^2(\Delta x)^2(\Delta y)^2}\right) + \left(\frac{\Delta t \bar{u}}{\Delta x}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta t^2 \bar{u} \bar{v}}{\Delta x \Delta y}\right) + \left(\frac{\Delta t \bar{v}}{\Delta y}\right)^2.
\end{aligned}$$

Persamaan (3.107) menunjukkan bahwa kondisi penyebut selalu bernilai lebih besar dari pembilang. Sehingga berdasarkan  $|\lambda_{1,2}|$  dapat disimpulkan bahwa metode implisit FTCS pada kasus  $\sin \theta = -1$ ,  $\sin \omega = -1$ ,  $\cos \theta = -1$ , dan  $\cos \omega = -1$  stabil tanpa syarat. Dari ketiga kasus di atas maka analisis kestabilan persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi dengan skema implisit FTCS dapat disimpulkan dalam sebuah tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2 Analisis Kestabilan Persamaan *Navier-Stokes* Dua Dimensi

$\cos \theta$	Nilai $\lambda_{1,2}$	Kriteria Stabil	Ket.
-1	$ \lambda_{1,2}  = \left  \frac{1}{1 + i\left(\frac{\Delta t \bar{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta t \bar{v}}{\Delta y}\right)} \right $	$ \lambda_{1,2}  \leq 1$	Stabil
0	$ \lambda_{1,2}  = \left  \frac{1}{1 + \frac{2\Delta t}{Re(\Delta x^2)} + \frac{2\Delta t}{Re(\Delta y^2)}} \right $		Stabil
1	$ \lambda_{1,2}  = \left  \frac{1}{1 + \frac{4\Delta t}{Re(\Delta x^2)} + \frac{4\Delta t}{Re(\Delta y^2)} + i\left(\frac{\Delta t \bar{u}}{\Delta x} + \frac{\Delta t \bar{v}}{\Delta y}\right)} \right $		Stabil

Berdasarkan tabel di atas dapat diketahui bahwa metode implisit FTCS untuk persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi stabil tanpa syarat di semua kondisi. Oleh karena itu berapapun nilai  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , dan  $\Delta t$  akan selalu memenuhi.

### 3.2.2 Analisis Kekonvergenan

Kekonvergenan metode beda hingga skema implisit FTCS dapat dicari dengan menggunakan ekspansi deret Taylor yang disubstitusikan ke dalam persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi yang telah didiskritkan yaitu pada persamaan (3.35) dan (3.70). Ekspansi deret Taylor yang digunakan dalam persamaan (3.35) diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 & \left( v_{i,j}^n u_{yt} + u_{i,j}^n u_{xt} - \frac{1}{Re} u_{yyt} - \frac{1}{Re} u_{xxt} + \frac{1}{2} u_{tt} + u_x u_t + u_y v_t \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t \\
 & + \left( \frac{3}{6} u_{ytt} + \frac{3}{6} u_{i,j}^n u_{xtt} + \frac{1}{2} u_x u_{tt} + \frac{1}{2} u_y v_{tt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t^2 \\
 & + \left( \frac{1}{2} u_{ttt} + \frac{1}{6} u_x u_{tt} + \frac{1}{6} u_y u_{tt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t^3 \\
 & + \left( \frac{1}{6} u_{xxx} + \frac{1}{6} u_{xxx} \Delta t u_t + \frac{1}{12} u_{xxx} \Delta t^2 u_{tt} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{36} u_{xxx} \Delta t^3 u_{ttt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta x^2 \\
 & + \left( \frac{1}{6} u_{yyy} v_{i,j}^n + \frac{1}{6} u_{yyy} \Delta t v_t + \frac{1}{12} u_{yyy} \Delta t^2 v_{tt} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{36} u_{yyy} \Delta t^3 v_{ttt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta y^2 \\
 & = \left( \frac{1}{Re} u_{yy} + \frac{1}{Re} u_{xx} - u_t - u_{i,j}^n u_x - v_{i,j}^n u_y \right) \Big|_{i,j}^n
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

Dari persamaan (3.108) dapat diketahui bahwa *truncation error* yang dihasilkan mempunyai orde  $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2)$ . Persamaan (3.108) dikatakan konvergen jika:

$$\begin{aligned}
& \lim_{(\Delta t, \Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \left( v_{i,j}^n u_{yt} + u_{i,j}^n u_{xt} - \frac{1}{Re} u_{yyt} - \frac{1}{Re} u_{xxt} + \frac{1}{2} u_{tt} + u_x u_t \right. \\
& \quad \left. + u_y v_t \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t \\
& \quad + \left( \frac{3}{6} u_{ytt} + \frac{3}{6} u_{i,j}^n u_{xtt} + \frac{1}{2} u_x u_{tt} + \frac{1}{2} u_y v_{tt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t^2 \\
& \quad + \left( \frac{1}{2} u_{ttt} + \frac{1}{6} u_x u_{tt} + \frac{1}{6} u_y u_{tt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t^3 \\
& \quad + \left( \frac{1}{6} u_{xxx} + \frac{1}{6} u_{xxx} \Delta t u_t + \frac{1}{12} u_{xxx} \Delta t^2 u_{tt} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{36} u_{xxx} \Delta t^3 u_{ttt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta x^2 \\
& \quad + \left( \frac{1}{6} u_{yyy} v_{i,j}^n + \frac{1}{6} u_{yyy} \Delta t v_t + \frac{1}{12} u_{yyy} \Delta t^2 v_{tt} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{36} u_{yyy} \Delta t^3 v_{ttt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta y^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.109}$$

Kemudian secara sama untuk ekspansi deret Taylor pada persamaan (3.70)

diperoleh:

$$\begin{aligned}
& \left( v_x u_t + v_{i,j}^n v_{yt} - \frac{1}{Re} u_{yyt} - \frac{1}{Re} v_{yyt} + \frac{1}{2} u_{tt} + v_{xt} + \frac{1}{2} v_{tt} + v_y v_t \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t \\
& \quad + \left( \frac{1}{2} v_x u_{tt} + \frac{3}{6} v_{ytt} + \frac{3}{6} v_{xtt} + \frac{1}{6} v_{ttt} + \frac{1}{2} v_{tt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t^2 \\
& \quad + \left( \frac{1}{6} v_x v_{ttt} + \frac{1}{6} v_{ttt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t^3 \\
& \quad + \left( \frac{1}{6} v_{xxx} \Delta x^2 u_{tt} + \frac{1}{36} v_{xxx} \Delta t^3 v_{ttt} + \frac{1}{6} u_{i,j}^n v_{xxx} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta x^2 \\
& \quad + \left( \frac{1}{6} v_{yyy} \Delta t v_t + \frac{1}{12} v_{yyy} \Delta t^2 v_{tt} + \frac{1}{36} v_{yyy} \Delta t^3 v_{ttt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta y^2 \\
& = \left( -v_{i,j}^n v_y + \frac{1}{Re} v_{yy} + \frac{1}{Re} v_{xx} - u_{i,j}^n v_x - v_t \right) \Big|_{i,j}^n.
\end{aligned} \tag{3.110}$$

Dari persamaan (3.110) dapat diketahui bahwa *truncation error* yang menghasilkan solusi konvergen adalah orde  $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2)$ . Persamaan (3.110) dikatakan konvergen jika:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{(\Delta t, \Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \left( v_x u_t + v_{i,j}^n v_{yt} - \frac{1}{Re} u_{yyt} - \frac{1}{Re} v_{yyt} + \frac{1}{2} u_{tt} + v_{xt} + \frac{1}{2} v_{tt} \right. \\
 & \quad \left. + v_y v_t \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t \\
 & \quad + \left( \frac{1}{2} v_x u_{tt} + \frac{3}{6} v_{ytt} + \frac{3}{6} v_{xtt} + \frac{1}{6} v_{ttt} + \frac{1}{2} v_{tt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t^2 \\
 & \quad + \left( \frac{1}{6} v_x v_{ttt} + \frac{1}{6} v_{ttt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t^3 \\
 & \quad + \left( \frac{1}{6} v_{xxx} \Delta x^2 u_{tt} + \frac{1}{36} v_{xxx} \Delta t^3 v_{ttt} + \frac{1}{6} u_{i,j}^n v_{xxx} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta x^2 \\
 & \quad + \left( \frac{1}{6} v_{yyy} \Delta t v_t + \frac{1}{12} v_{yyy} \Delta t^2 v_{tt} + \frac{1}{36} v_{yyy} \Delta t^3 v_{ttt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta y^2 \\
 & = 0.
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

Jika  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , dan  $\Delta t$  sangat kecil, maka jumlah dari limit persamaan (3.109) dan (3.111) akan semakin kecil karena berapapun nilai  $u_{xt}, u_{xx}, u_{yy}, \dots$  dan  $v_{xt}, v_{xx}, v_{yy}, \dots$  jika dikalikan dengan nilai dari  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , dan  $\Delta t$  akan ikut mengecil. Sehingga *truncation error* akan menuju nol untuk  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ , dan  $\Delta t \rightarrow 0$ . Untuk detail perhitungan analisis kekonvergenan dapat dilihat pada Lampiran 4.

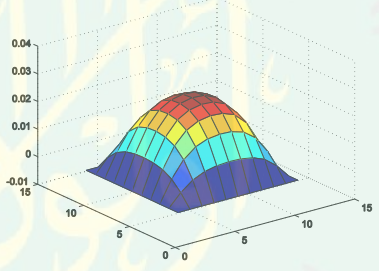
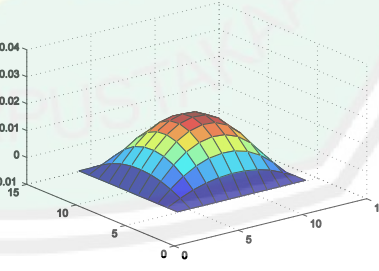
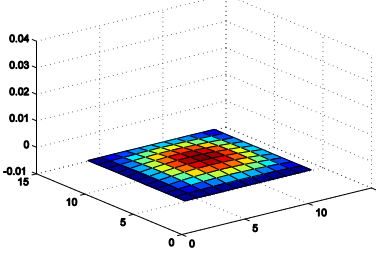
### 3.3 Interpretasi Analisis Kestabilan dan Kekonvergenan dalam Memperoleh Solusi Numerik Persamaan Navier-Stokes Dua Dimensi dengan Skema Implisit FTCS

Pada subbab ini simulasi dilakukan dengan menggunakan program MATLAB. Metode beda hingga skema implisit FTCS pada persamaan Navier-

*Stokes* dua dimensi stabil tanpa syarat sehingga berapapun nilai  $\Delta x, \Delta y$ , dan  $\Delta t$  akan selalu stabil. Simulasi ini dilakukan untuk analisis uji kestabilan dan kekonvergenan yang menunjukkan bahwa grafik stabil dalam kriteria kestabilan yang ditetapkan dan konvergen. Kestabilan ini juga dapat digunakan sebagai acuan bahwa *error* tidak berkembang saat diterapkan kriteria kestabilan.

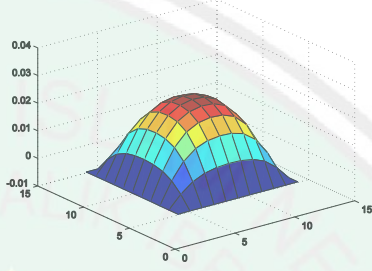
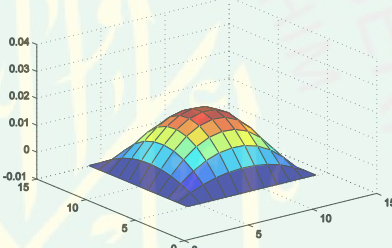
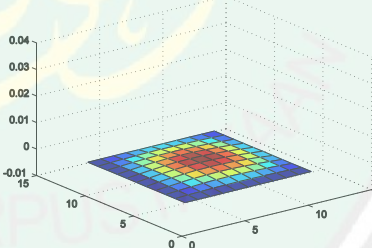
Simulasi dari persamaan  $x$  momentum dapat dilihat pada Tabel 3.3 yang menunjukkan deskripsi uji kestabilan dan kekonvergenan skema implisit FTCS sebagai berikut:

Tabel 3.3 Grafik Solusi Numerik pada Persamaan  $x$  Momentum

$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta t$	Grafik Solusi $u(x, y, t)$
0,1	0,1	0.05	
0,1	0,1	0.1	
0,1	0,1	0.5	

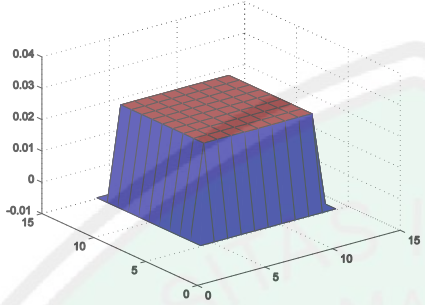
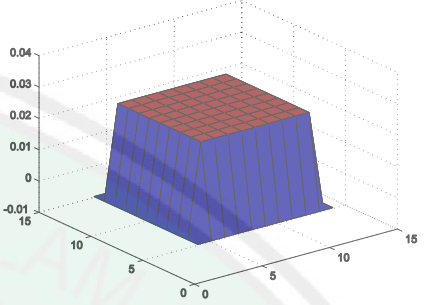
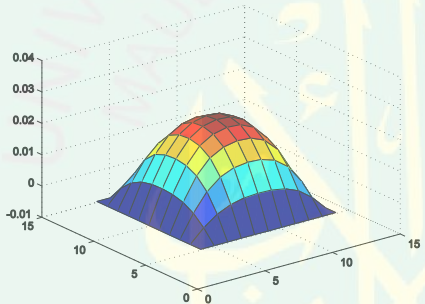
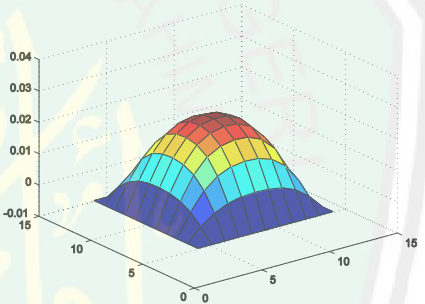
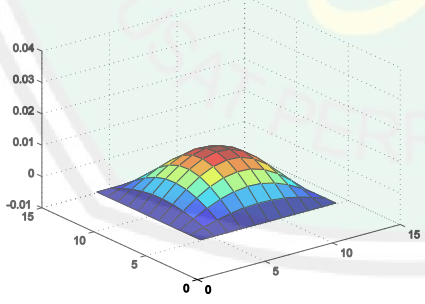
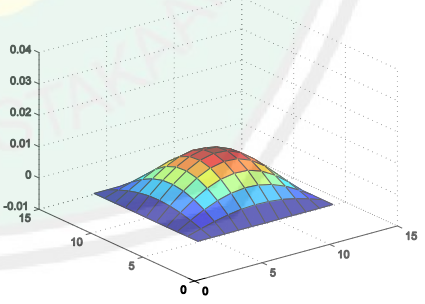
Selanjutnya ditunjukkan deskripsi uji kestabilan dan kekonvergenan untuk persamaan  $y$  momentum pada Tabel 3.4 sebagai berikut:

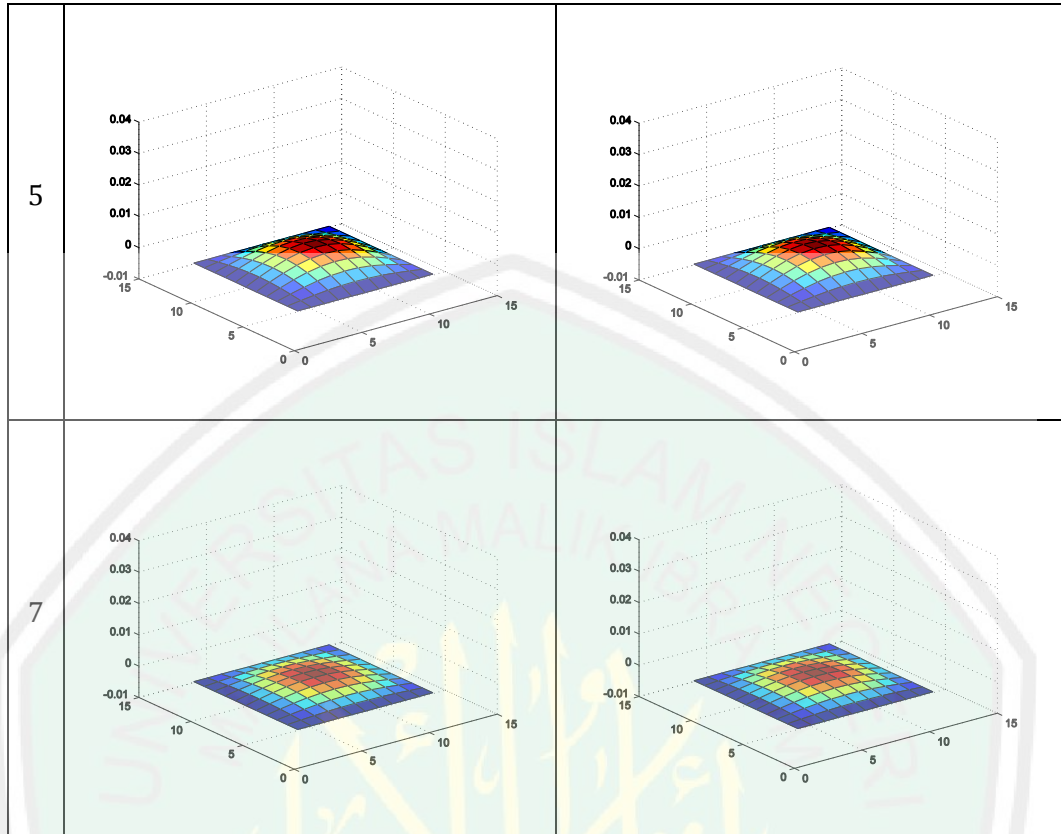
Tabel 3.4 Grafik Solusi Numerik pada Persamaan  $y$  Momentum

$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta t$	Grafik Solusi $v(x, y, t)$
0,1	0,1	0.05	
0,1	0,1	0.1	
0,1	0,1	0.5	

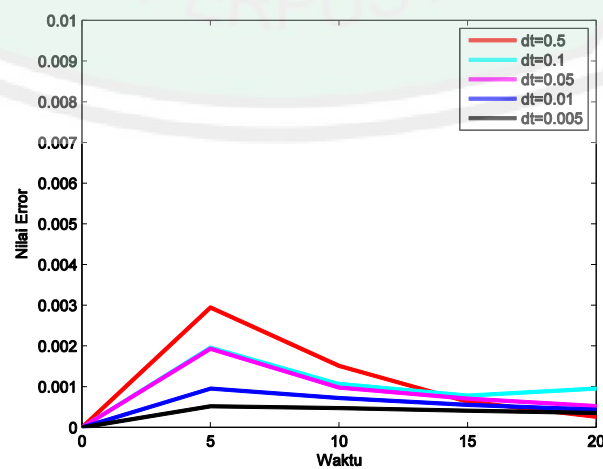
Dari Tabel 3.3 dan Tabel 3.4 menunjukkan bahwa solusi numerik persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS selalu stabil untuk setiap  $\Delta t \rightarrow 0$  dan konvergen menuju nol. Grafik pada Tabel 3.3 dan Tabel 3.4 juga menunjukkan bahwa solusi dari  $u(x, y, t)$  dan  $v(x, y, t)$  selalu memiliki nilai atau grafik yang sama saat keduanya dalam keadaan  $t$  yang sama. Hal tersebut dapat dilihat pada tabel perbandingan sebagai berikut:

Tabel 3.5 Grafik Solusi Numerik pada  $x$  Momentum dan  $y$  Momentum dengan  $\Delta x = 0,1$ ,  $\Delta y = 0,1$ , dan  $\Delta t = 0,01$

$t$	Grafik Solusi $u(x, y, t)$	Grafik Solusi $v(x, y, t)$
0		
1		
3		



Grafik solusi pada persamaan  $x$  momentum dan  $y$  momentum dengan metode skema implisit FTCS stabil untuk setiap  $\Delta t \rightarrow 0$ . Hal tersebut dapat ditunjukkan oleh pertumbuhan *error* yang semakin kecil. Deskripsi grafik pertumbuhan *error* maksimum untuk  $\Delta t \rightarrow 0$  dapat dilihat pada Gambar 3.1 sebagai berikut:



Gambar 3.1 Grafik Pertumbuhan *Error*  $u(x, y, t)$  untuk  $\Delta t \rightarrow 0$

Simulasi Gambar 3.1 didapatkan dari variasi partisi waktu  $\Delta t = 0,5$ ,  $\Delta t = 0,1$ ,  $\Delta t = 0,05$ ,  $\Delta t = 0,01$  dan  $\Delta t = 0,005$ . Hasil simulasi pada waktu yang cukup besar yakni  $t = 20$  menunjukkan bahwa  $\Delta t = 0,005$  memiliki *error* yang paling kecil jika dibandingkan dengan partisi waktu yang lain. Detail nilai-nilai *error* maksimum dari Gambar 3.1 di atas dapat dilihat pada Tabel 3.6 berikut:

Tabel 3.6 Nilai *Error* Maksimum untuk  $u(x, y, t)$  dengan  $\Delta t \rightarrow 0$

$\Delta t$	Waktu ( $t$ )		
	10	15	20
0,5	0,00151477687581400000	0,0006347729435683242	0,0002604216505217690
0,1	0,00107107256137000000	0,0007848564662185122	0,0009554989805267410
0,05	0,00097846180446978916	0,0007092359995000720	0,0005251959425371551
0,01	0,00072170321967746366	0,0005555876580078112	0,0004352738737413437
0,005	0,00047521877366901720	0,0004111877752280418	0,0003576092056566428

Grafik pertumbuhan *error* pada Gambar 3.1 dan nilai *error* pada Tabel 3.6 yang ditampilkan diambil dari titik diskrit  $u$  pada interval waktu  $t \in [0,20]$ . Perhitungan nilai *error* tersebut didapatkan berdasarkan selisih antara nilai hampiran sebelumnya dengan nilai sekarang yang diabsolutkan. Berdasarkan nilai-nilai tersebut dapat dilihat bahwa besarnya nilai *error* tidak melebihi 1 atau dalam artian  $e \leq 1$ . Nilai *error* dari kondisi  $\Delta t$  yang berbeda semakin lama akan semakin kecil mengikuti besarnya  $\Delta t \rightarrow 0$ . Hal ini menunjukkan bahwa solusi numerik persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi konvergen menuju nol.

Selanjutnya orde kesalahan pada analisis kekonvergenan yang telah dilakukan digunakan untuk menguji apakah *error* iterasi skema implisit FTCS memenuhi kriteria  $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2)$ . Sebagai contoh, analisis orde *error* terhadap waktu dilakukan ketika  $\Delta t = 0,1$  dan  $\Delta t = 0,05$  pada waktu ke-20 yang akan diuji apakah hasil iterasi yang memenuhi orde *error*  $\mathcal{O}(\Delta t)$  atau tidak. Dari

Tabel 3.6 nilai *error* maksimum dapat dihitung  $\frac{0,0009554989805267410}{0,0005251959425371551} = 1,8293 \approx 2$

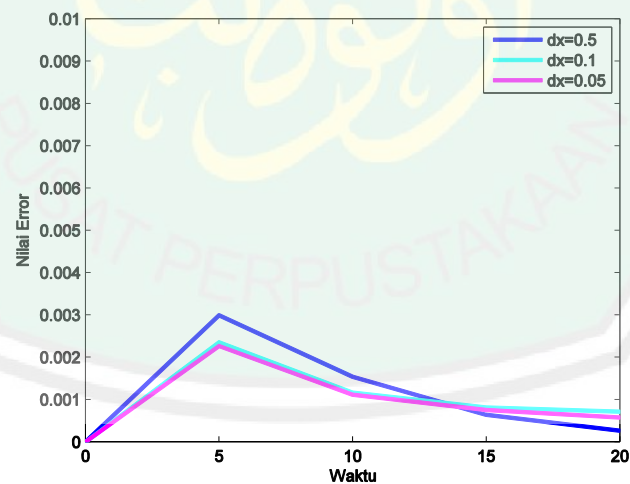
dimana  $\frac{0,1}{0,05} = 2$ . Hal ini menunjukkan bahwa prosedur iterasi dengan skema implisit FTCS pada persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi memenuhi kriteria  $O(\Delta t)$ .

Selanjutnya analisis *error* untuk suatu  $\Delta x$  dapat dilihat pada Tabel 3.7 sebagai berikut:

Tabel 3.7 Nilai *Error* Maksimum untuk  $u(x, y, t)$  dengan  $\Delta x \rightarrow 0$

$\Delta x$	Waktu ( $t$ )		
	10	15	20
0,5	0,00153769391422700000	0,0006369020858432470	0,0002598308950161081
0,1	0,00116120525688100000	0,0008091169749116223	0,0007136900267189945
0.05	0,00111482729480100000	0,0007522457304064874	0,0005718562530557005

Table 3.7 dapat digambarkan dalam bentuk grafik sebagai berikut:



Gambar 3.2 Grafik Pertumbuhan *Error*  $u(x, y, t)$  untuk  $\Delta x \rightarrow 0$

Secara sama, perhitungan nilai *error* tersebut didapatkan berdasarkan selisih antara nilai hampiran sebelumnya dengan nilai sekarang yang absolut. Nilai *error* tersebut diambil dari titik diskrit  $u$  pada interval waktu  $t \in [0, 20]$ .

Berdasarkan nilai pada Tabel 3.7 dan Gambar 3.2 di atas, dapat dilihat bahwa besarnya nilai *error* tidak melebihi 1 atau dalam artian  $e \leq 1$ .

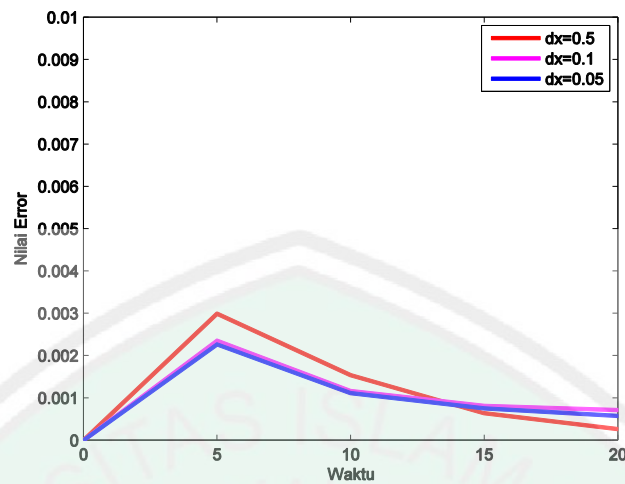
Selanjutnya analisis orde *error* terhadap ruang dilakukan ketika  $\Delta x = 0,1$  dan  $\Delta x = 0,05$  pada waktu ke-20 yang akan diuji apakah hasil iterasi tersebut memenuhi orde *error*  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$  atau tidak. Dari Tabel 3.7 nilai *error* maksimum dapat dihitung  $\left(\frac{0,0007136900267189945}{0,0005718562530557005}\right)^2 = (1,2480)^2$  kemudian dengan pembulatan ke atas sehingga  $(1,2480)^2 \approx (2)^2$  sementara  $\left(\frac{0,5}{0,1}\right)^2 = 4$ . Hal ini menunjukkan bahwa prosedur iterasi dengan skema implisit FTCS pada persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi memenuhi kriteria  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ .

Kemudian analisis *error* untuk suatu  $\Delta y$  dapat dilihat pada Tabel 3.8 sebagai berikut:

Tabel 3.8 Nilai *Error* Maksimum untuk  $u(x, y, t)$  dengan  $\Delta y \rightarrow 0$

$\Delta y$	Waktu ( $t$ )		
	10	15	20
0,5	0,00153769391422700000	0,0006369020858432470	0,0002598308950161081
0,1	0,00116120525688100000	0,0008091169749116223	0,0007136900267189945
0,05	0,00111482729480100000	0,0007522457304064874	0,0005718562530557005

Table 3.8 dapat digambarkan dalam bentuk grafik sebagai berikut:



Gambar 3.3 Grafik Pertumbuhan  $Error u(x, y, t)$  untuk  $\Delta y \rightarrow 0$

Secara sama, perhitungan nilai *error* tersebut didapatkan berdasarkan selisih antara nilai hampiran sebelumnya dengan nilai sekarang yang diabsolutkan. Nilai-nilai *error* tersebut diambil dari setiap titik diskrit  $u$  pada interval waktu  $t \in [0, 20]$ . Berdasarkan nilai pada Tabel 3.8 dan Gambar 3.3 di atas, dapat dilihat bahwa besarnya nilai *error* tidak melebihi 1 atau dalam artian  $e \leq 1$ .

Selanjutnya analisis orde *error* terhadap ruang dilakukan ketika  $\Delta y = 0,1$  dan  $\Delta y = 0,05$  pada waktu ke-20 yang akan diuji apakah hasil iterasi tersebut memenuhi orde *error*  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$  atau tidak. Dari Tabel 3.8 nilai *error* maksimum dapat dihitung  $\left(\frac{0,0007136900267189945}{0,0005718562530557005}\right)^2 = (1,2480)^2$  kemudian dengan pembulatan ke atas sehingga  $(1,2480)^2 \approx (2)^2$  sementara  $\left(\frac{0,5}{0,1}\right)^2 = 4$ . Hal ini menunjukkan bahwa prosedur iterasi dengan skema implisit FTCS pada persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi memenuhi kriteria  $\mathcal{O}(\Delta y^2)$ . Secara sama juga dilakukan analisis orde *error* pada solusi  $v(x, y, t)$  yang menunjukkan *truncation error* di orde  $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2)$ .

### 3.4 Pendekatan Solusi Numerik dalam Kajian Islam

Pada pendahuluan sudah dijelaskan mengenai banyaknya keterbatasan pada manusia. Perhitungan model matematika persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi merupakan salah satu permasalahan yang rumit untuk diselesaikan. Dengan keterbatasan manusia, model tersebut sulit dicari solusi eksaknya. Oleh karena itu digunakan metode numerik dalam penyelesaiannya.

Quthub (2004:187) menggambarkan tentang ilmu Allah yang mencakup segalanya dan menggambarkan pula keterbatasan manusia yang terhalang dari hal-hal ghaib. Meskipun Allah mengetahui apa yang akan terjadi dari mereka sebelum hal itu terwujud, tetapi apa yang terjadi atas diri mereka adalah sebagai akibat dari apa yang timbul dari mereka.

Sebagaimana Allah berfirman dalam QS. al-Insyirah/94:5

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾

“Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan” (QS. Al-Insyirah/94:5).

Merujuk dari ayat di atas bahwa di mana ada kesulitan maka ada kemudahan, begitupun dalam ilmu matematika. Jika dari suatu model sulit diperoleh solusi eksaknya, maka tetap harus berusaha dicari solusinya, karena dengan berusaha semaksimal mungkin maka akan ditemukan kemudahan. Penyelesaian yang digunakan untuk mempermudah dalam menentukan suatu solusi disebut dengan solusi pendekatan. Solusi pendekatan untuk model matematika adalah solusi yang menghampiri atau mendekati solusi eksak. Solusi pendekatan tidak tepat sama dengan solusi eksak, sehingga terdapat beda antara solusi eksak dan solusi pendekatannya yang disebut dengan *error* (Munir, 2010:5). Solusi pendekatan tersebut dapat diperoleh dengan metode yang dinamakan metode numerik.

Hasil dari metode numerik merupakan nilai perkiraan atau pendekatan dari penyelesaian eksak yang disebut dengan solusi numerik. Solusi numerik tergolong kategori *zan* (perkiraan) dan bukannya kategori *yakin* (pasti) sebagaimana yang telah dijelaskan dalam QS. Luqman ayat 34. Solusi numerik yang diperoleh dari perhitungan merupakan pendekatan tidak tepat sama dengan solusi eksaknya karena terdapat kesalahan antara kedua solusi tersebut sehingga solusi numerik dari persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi tergolong dalam kategori *zan* (perkiraan) dari solusi eksaknya.

Dijelaskan juga dalam firman Allah Swt. dalam QS. ash-Shaffaat/37:147 bahwa Allah Swt. telah mengajarkan suatu ilmu matematika mengenai taksiran dan pendekatan. Dengan adanya kedua konsep tersebut maka dapat memudahkan dalam mencari solusi dari suatu permasalahan yang sulit dipecahkan, seperti pencarian solusi numerik pada persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi tanpa mencari solusi eksaknya.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Skema numerik implisit *Forward Time Central Space* (FTCS) untuk persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi pada  $x$  momentum yaitu  $u^{n+1}$  memiliki bentuk diskrit sebagaimana disebutkan pada persamaan (3.36) sebagai berikut  $a_1(u_{i,j-1}^{n+1}) + b_1(u_{i-1,j}^{n+1}) + c_1(u_{i,j}^{n+1}) + d_1(u_{i+1,j}^{n+1}) + e_1(u_{i,j+1}^{n+1}) + h_1(v_{i,j}^{n+1}) = z_1$  dan pada  $y$  momentum yaitu  $v^{n+1}$  disebutkan pada persamaan (3.71) yaitu  $c_2(u_{i,j}^{n+1}) + f_2(v_{i,j-1}^{n+1}) + g_2(v_{i-1,j}^{n+1}) + h_2(v_{i,j}^{n+1}) + k_2(v_{i+1,j}^{n+1}) + l_2(v_{i,j+1}^{n+1}) = z_2$ .
2. Metode beda hingga skema implisit FTCS pada persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi bersifat stabil tanpa syarat dengan orde *truncation error*  $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2)$  dan konvergen jika  $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2)$  mendekati nol.
3. Hasil simulasi menunjukkan bahwa solusi numerik persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi stabil dan bergerak menuju nol dalam selang waktu  $\Delta t$  dengan nilai yang sama pada  $u^{n+1}$  dan  $v^{n+1}$  sehingga menghasilkan grafik yang sama.

#### 4.2 Saran

Berdasarkan penelitian ini, maka untuk selanjutnya solusi numerik persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi dapat dikaji lebih jauh agar interpretasi solusi dari persamaan tersebut jauh lebih aktual dengan menggunakan metode yang lebih akurat dan nilai awal yang berbentuk fungsi  $(x, y)$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- Al-Maragi, A.M. 1992. *Tafsir Al-Maragi*. Terjemahan Abu Bakar B. dkk. Semarang: Toha Putra.
- Al-Qurthubi, S.I. 2009. *Al Jami' li Ahkaam Al-Quran*. Terjemahan Fathurrahman Abdul Hamid, dkk. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Abdussakir. 2014. *Matematika dalam Al-Quran*. Malang. UIN-MALIKI PRESS.
- Agustina, Y. 2012. Udara (Angin) dalam Al-Qur'an. *Makalah*, (Online) (<http://yulilives.blogspot.co.id/2012/04/udara-angin-dalam-al-quran.html>), diakses Minggu 02 Oktober 2016.
- Candra, R. 2011. *Analisis Stabilitas Metode Forward Time Central Space da Lax Wendroff pada Simulasi Penyelesaian Persamaan Aduksi*. Skripsi tidak diublikasikan. Medan: Universitas Sumatera Utara.
- Chapra, S.C dan Canale, R.P. 1988. *Metode Numerik Jilid 1 Edisi Kedua*. Terjemahan I. Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.
- Ding, Y dan Kawahara, M. 1998. Linear Stability of Incompressible Fluid in Cavity Using Finite Element Method. *Int J Numer Meth FI*, 27: 139-157.
- Feng, B dan Mitsui, T. 1998. A Finite Difference Method for the Korteweg-de Vries and the Kadomtsev-Petviashvili Equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 90: 95-116.
- Ghofar, A.M. 2008. *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Imam Syafi'i.
- Godwin, P.B dan Dugdale, R.H. 1986. *Mekanika Fluida*. Edisi Ketiga. Jakarta: Erlangga.
- Guo, Z., Zhao, T.S, dan Shi, Y. 2006. Generalized Hydrodynamics Model for Fluid Flows, From Nanoscale to Macroscale. *J Phys Fluid*, 18: 67-107.
- Hapsoro, C.A dan Srigutomo, W. 2013. Pemodelan Aliran Fluida 2-D Pada Kasus Aliran Permukaan Menggunakan Metode Beda Hingga. *Jurnal Matematika & Sains*, 18 (3): 81-92.
- Hasan, M. 2015. *Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Numerik pada Persamaan Panas*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Ibnu-Katsir. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 6*. Terjemahan M. Abdul Ghoffar E. M. dan Abu Ihsan al-Atsari. Bogor: PT. Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

- Kanginan, M. 2006. Fisika 2. Jakarta: Erlangga.
- Kusumastuti, A. 2002. *Metode Artificial Compressible dalam Persamaan Navier-Stokes 2 Dimensi pada Lid Driven Cavity*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Brawijaya.
- LeVeque, R.J. 2007. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems. *SIAM*, 41: 1325-1330.
- Miersemann, E. 2012. Partial Differential Equations. *Lecture Notes*, (Online), (<http://www.math.unileipzig.de/~miersemann/pdebook.pdf>), diakses 26 Agustus 2016.
- Munson, B.R., Young. D.F, dan Okiishi, T.H. 2004. *MEKANIKA FLUIDA*. Jakarta: Erlangga.
- Mutholi'ah, E. 2008. *Analisis Perbandingan Metode Beda Hingga Skema Implisit dan Crank-Nicholson pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Olson, R.M dan Wright, S.J. 1993. *DASAR-DASAR MEKANIKA FLUIDA TEKNIK*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.
- Purcell, E.J dan Varberg, D. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analisis Edisi Kelima: Jilid 1. Terj. Dari Calculus with Analytics Geometry, Fifth Edition, oleh Susila, I.N., Kartasasmita, B, dan Rawuh*. Jakarta: Erlangga.
- Quthub, S. 2004. *Fi Zhilalil-Qur'an*. Terjemahan As'ad Yasin, dkk. Jakarta: Gema Insani Press.
- Scheffel, J. 2001. On Analytical Solution of the Navier-Stokes Equation. *J Fusion Plasma Physics Alven Laboratory Royal Institute of Technology*, 44: 32-42.
- Strauss, W.A. 1992. *Partial Differential Equations: An Introduction*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Suryono, F.R. 2011. Simulasi Numerik Perpindahan Panas Aliran Udara Ventilasi 2 Dimensi dengan Metode Beda Hingga. *Jurnal Mekanika*, 9 (2): 324-208.
- Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Yilmaz, T. 1982. Numerical Solution of Navier-Stokes Equation for Laminar Fluid Flow Ni Rows of Plates in Staggered Arrangement. *Int. J Heat Fluid Fl*, 3 (4): 201-206.

## Lampiran 1. Program Contoh Aplikasi Solusi Numerik Persamaan *Navier-Stokes* Dua Dimensi dengan Metode Implisit FTCS

```
clc,clear,clf

dx = 0.25;
dy = 0.25;
dt = 0.1;

Re = 50;

x = 0:dx:1;
y = 0:dy:1;
t = 0:dt:10;

M = length(y);
N = length(x);
T = length(t);

u = zeros(M,N);
v = zeros(M,N);

u(:, :, 1) = 0.03;
v(:, :, 1) = 0.03;

u(1, :, 1) = 0;
u(M, :, 1) = 0;
u(:, 1, 1) = 0;
u(:, N, 1) = 0;

v(1, :, 1) = 0;
v(M, :, 1) = 0;
v(:, 1, 1) = 0;
v(:, N, 1) = 0;

for n = 1:2
    [J,I] = meshgrid(2:M-1,2:N-1);

    uki = numel(I);
    ukj = numel(J);

    h1 = zeros((M-2)*(N-2));
    h2 = zeros((M-2)*(N-2));
    c2 = zeros((M-2)*(N-2));
    c1 = zeros((M-2)*(N-2));

    for i = 1:uki

        h1(i,i) = u(I(i),J(i)+1,n)/(2*dy)-u(I(i),J(i)-1,n)/(2*dy);
        c2(i,i) = (v(I(i)+1,J(i),n)-v(I(i)-1,J(i),n))/(2*dx);

        c1(i,i) = (1/dt)+(u(I(i)+1,J(i),n)/(2*dx))-u(I(i)-1,J(i),n)/(2*dx))+2/(Re*dx^2)+2/(Re*dy^2);
```

```

%e1 dan a1
if i<=uki-(N-2)
    c1(i,i+(N-2)) = (v(I(i),J(i),n)/(2*dy))-1/(Re*dy^2));
    c1(i+(M-2),i) = (-v(I(i),J(i)+1,n)/(2*dy))-
        (1/(Re*dy^2));
end

%b1 dan d1
if i<uki
    c1(i+1,i) = (-u(I(i)+1,J(i),n)/(2*dx))-1/(Re*dx^2);
    c1(i,i+1) = (u(I(i),J(i),n)/(2*dy))-1/(Re*dy^2);
end

if i<uki
    if mod(i,N-2)==0
        c1(i+1,i) = 0;
        c1(i,i+1) = 0;
    end
end

h2(i,i) = (1/dt)+(v(I(i),J(i)+1,n)/(2*dx))-
    (v(I(i),J(i)-1,n)/(2*dx))+(2/(Re*dx^2))+(2/(Re*dy^2));

%l2 dan f2
if i<=uki-(N-2)
    h2(i,i+(N-2)) = (v(I(i),J(i),n)/(2*dy))-1/(Re*dy^2);
    h2(i+(M-2),i) = (-v(I(i),J(i)+1,n)/(2*dy))-
        (1/(Re*dy^2));
end

%g2 dan k2
if i<uki
    h2(i+1,i) = (-u(I(i)+1,J(i),n)/(2*dx))-1/(Re*dx^2);
    h2(i,i+1) = (u(I(i),J(i),n)/(2*dy))-1/(Re*dy^2);
end
if i<uki
    if mod(i,N-2)==0
        h2(i+1,i) = 0;
        h2(i,i+1) = 0;
    end
end
end

```

```
A = [c1 h1;c2 h2];
```

```
And
```

```
C = zeros((M-2)*(N-2)*2,1);
```

```

for i = 1:uki
    C(i,1) = u(I(i),J(i),n)*((1/dt)+(u(I(i)+1,J(i),n)/(2*dx))-
        (u(I(i)-1,J(i),n)/(2*dx)))+...
        v(I(i),J(i),n)*(u(I(i),J(i)+1,n)/(2*dy)-u(I(i),J(i)-
        1,n)/(2*dy));
    C(uki+i,1) =
        v(I(i),J(i),n)*((1/dt)+v(I(i),J(i)+1,n)/(2*dy)-
        v(I(i),J(i)-1,n)/(2*dy))+...

```

```

        u(I(i),J(i),n)*(v(I(i)+1,J(i),n)/(2*dx)-v(I(i)-
        1,J(i),n)/(2*dx));

    end
    U = zeros(M,N);
    V = zeros(M,N);
    UV = A\C;
    U(2:N-1,2:M-1,n) = reshape(UV(1:uki),M-2,N-2);
    V(2:N-1,2:M-1,n) = reshape(UV(uki+1:2*uki),M-2,N-2);

    u(:, :, n+1) = U(:, :, n);
    v(:, :, n+1) = V(:, :, n);

end

```

Dari program contoh aplikasi tersebut diperoleh nilai dari iterasi pertama, kedua, dan ketiga sebagai berikut:

### Solusi $u(x, y, t)$

```

u(:, :, 1) =
    0         0         0         0         0
    0    0.0300    0.0300    0.0300    0
    0    0.0300    0.0300    0.0300    0
    0    0.0300    0.0300    0.0300    0
    0         0         0         0         0

u(:, :, 2) =
    0         0         0         0         0
    0    0.0279    0.0289    0.0282    0
    0    0.0289    0.0299    0.0292    0
    0    0.0282    0.0292    0.0285    0
    0         0         0         0         0

u(:, :, 3) =
    0         0         0         0         0
    0    0.0261    0.0278    0.0266    0
    0    0.0278    0.0297    0.0284    0
    0    0.0266    0.0284    0.0272    0
    0         0         0         0         0

```

**Solusi  $v(x, y, t)$**

$v(:, :, 1) =$

0	0	0	0	0
0	0.0300	0.0300	0.0300	0
0	0.0300	0.0300	0.0300	0
0	0.0300	0.0300	0.0300	0
0	0	0	0	0

$v(:, :, 2) =$

0	0	0	0	0
0	0.0279	0.0289	0.0282	0
0	0.0289	0.0299	0.0292	0
0	0.0282	0.0292	0.0285	0
0	0	0	0	0

$v(:, :, 3) =$

0	0	0	0	0
0	0.0261	0.0278	0.0266	0
0	0.0278	0.0297	0.0284	0
0	0.0266	0.0284	0.0272	0
0	0	0	0	0

0

**Lampiran 2. Program Solusi Numerik Persamaan Navier-Stokes Dua Dimensi dengan Metode Implisit FTCS**

```
clc,clear,clf

dx = 0.1;
dy = 0.1;
dt = 0.01;

Re = 50;

x = 0:dx:1;
y = 0:dy:1;
t = 0:dt:10;

M = length(y);
N = length(x);
T = length(t);

u = zeros(M,N);
v = zeros(M,N);

u(:, :, 1) = 0.03;
v(:, :, 1) = 0.03;

u(1, :, 1) = 0;
u(M, :, 1) = 0;
u(:, 1, 1) = 0;
u(:, N, 1) = 0;

v(1, :, 1) = 0;
v(M, :, 1) = 0;
v(:, 1, 1) = 0;
v(:, N, 1) = 0;

for n = 1:T
    [J,I] = meshgrid(2:M-1,2:N-1);

    uki = numel(I);
    ukj = numel(J);

    h1 = zeros((M-2)*(N-2));
    h2 = zeros((M-2)*(N-2));
    c2 = zeros((M-2)*(N-2));
    c1 = zeros((M-2)*(N-2));

    for i = 1:uki

        h1(i,i) = u(I(i),J(i)+1,n)/((2*dy))-u(I(i),J(i)-1,n)/(2*dy);
        c2(i,i) = (v(I(i)+1,J(i),n)-v(I(i)-1,J(i),n))/(2*dx);
```

```

c1(i,i) = (1/dt)+(u(I(i)+1,J(i),n)/(2*dx))-(u(I(i)-
1,J(i),n)/(2*dx))+(2/(Re*dx^2))+(2/(Re*dy^2));

%e1 dan a1
if i<=uki-(N-2)
    c1(i,i+(N-2)) = (v(I(i),J(i),n)/(2*dy))-(1/(Re*dy^2));
    c1(i+(M-2),i) = (-v(I(i),J(i)+1,n)/(2*dy))-
        (1/(Re*dy^2));
end

%b1 dan d1
if i<uki
    c1(i+1,i) = (-u(I(i)+1,J(i),n)/(2*dx))-(1/(Re*dx^2));
    c1(i,i+1) = (u(I(i),J(i),n)/(2*dy))-1/(Re*dy^2);
end

if i<uki
    if mod(i,N-2)==0
        c1(i+1,i) = 0;
        c1(i,i+1) = 0;
    end
end

h2(i,i) = (1/dt)+(v(I(i),J(i)+1,n)/(2*dx))-(v(I(i),J(i)-
1,n)/(2*dx))+(2/(Re*dx^2))+(2/(Re*dy^2));

%l2 dan f2
if i<=uki-(N-2)
    h2(i,i+(N-2)) = (v(I(i),J(i),n)/(2*dy))-(1/(Re*dy^2));
    h2(i+(M-2),i) = (-v(I(i),J(i)+1,n)/(2*dy))-
        (1/(Re*dy^2));
end

%g2 dan k2
if i<uki
    h2(i+1,i) = (-u(I(i)+1,J(i),n)/(2*dx))-(1/(Re*dx^2));
    h2(i,i+1) = (u(I(i),J(i),n)/(2*dy))-1/(Re*dy^2);
end
if i<uki
    if mod(i,N-2)==0
        h2(i+1,i) = 0;
        h2(i,i+1) = 0;
    end
end
end

```

```
A = [c1 h1;c2 h2];
```

And

```
C = zeros((M-2)*(N-2)*2,1);
```

```

for i = 1:uki
    C(i,1) = u(I(i),J(i),n)*((1/dt)+(u(I(i)+1,J(i),n)/(2*dx))-
        (u(I(i)-1,J(i),n)/(2*dx)))+...
        v(I(i),J(i),n)*(u(I(i),J(i)+1,n)/(2*dy)-u(I(i),J(i)-
        1,n)/(2*dy));
end

```

```

C(uki+i,1) =
    v(I(i),J(i),n)*((1/dt)+v(I(i),J(i)+1,n)/(2*dy)-
    v(I(i),J(i)-1,n)/(2*dy))+...
    u(I(i),J(i),n)*(v(I(i)+1,J(i),n)/(2*dx)-v(I(i)-
    1,J(i),n)/(2*dx));

end
U = zeros(M,N);
V = zeros(M,N);
UV = A\C;
U(2:N-1,2:M-1,n) = reshape(UV(1:uki),M-2,N-2);
V(2:N-1,2:M-1,n) = reshape(UV(uki+1:2*uki),M-2,N-2);

u(:, :, n+1) = U(:, :, n);
v(:, :, n+1) = V(:, :, n);

%Gambar 3D
figure(1)
surf(u(:, :, n))
zlim([-0.01 0.04])

figure(2)
surf(v(:, :, n))
zlim([-0.01 0.04])

pause (0.2)

% Mencari Nilai Error
aaa(:, :, n+1) = u(:, :, n+1)-u(:, :, n);
surf(aaa(:, :, n+1))

erormax(n) = max(max(abs(u(:, :, n+1)-u(:, :, n))));
plot([1:n],erormax, 'r', 'linewidth', 2);

end

%Gambar 2D
for i=1:length(t)+1

figure(3)
plot(x,u(:, i))
grid on
pause(0.2)

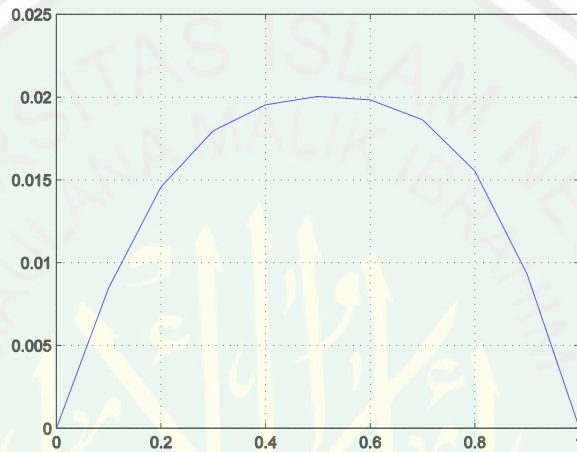
figure(4)
plot(y,v(:, i))
grid on
pause(0.2)

end

```

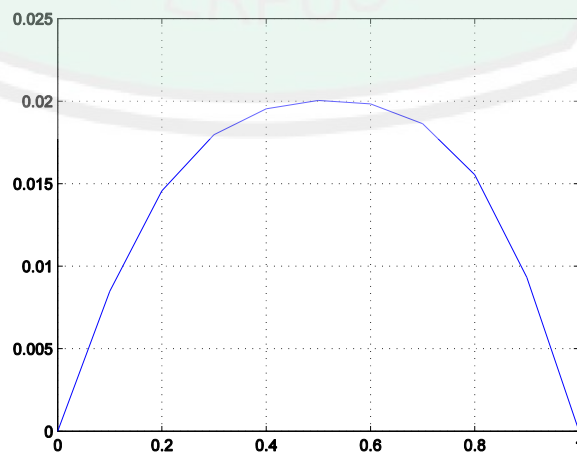
### Lampiran 3. Gambar Dua Dimensi Solusi Numerik Persamaan *Navier-Stokes*

Solusi numerik persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi  $u(x, y, t)$  ketika  $\Delta x = 0,1$ ,  $\Delta y = 0,1$ , dan  $\Delta t = 0,1$  dalam bentuk dua dimensi dapat dipresentasikan sebagai berikut:



**Gambar** Grafik Solusi Numerik  $x$  Momentum Dua Dimensi

Kemudian, untuk solusi numerik persamaan *Navier-Stokes* dua dimensi  $v(x, y, t)$  ketika  $\Delta x = 0,1$ ,  $\Delta y = 0,1$ , dan  $\Delta t = 0,1$  dalam bentuk dua dimensi dapat dipresentasikan sebagai berikut:



**Gambar** Grafik Solusi Numerik  $y$  Momentum Dua Dimensi

#### Lampiran 4. Program Pertumbuhan *Error*

```

clc, clear

%Error dt
t=[0 5 10 15 20];

e1=[0.0000000000000000 0.0029441752373870000 0.00151477687581400000
0.0006347729435683242 0.0002604216505217690]; % dt=0.5
e2=[0.0000000000000000 0.0019611687330870000 0.00107107256137000000
0.0007848564662185122 0.0009554989805267410]; % dt=0.1
e3=[0.0000000000000000 0.0019376152759160000 0.00097846180446978916
0.0007092359995000720 0.0005251959425371551]; % dt=0.05
e4=[0.0000000000000000 0.0009552649442241788 0.00072170321967746366
0.0005555876580078112 0.0004352738737413437]; % dt=0.01
e5=[0.0000000000000000 0.0005213044892673050 0.00047521877366901720
0.0004111877752280418 0.0003576092056566428]; % dt=0.005

figure(1)
plot(t,e1,'y',t,e2,'c',t,e3,'m',t,e4,'b',t,e5,'k','LineWidth',2),y
lim([0 0.01])

legend('dt=0.5','dt=0.1','dt=0.05','dt=0.01','dt=0.005')

xlabel('Waktu')
ylabel('Nilai Error')

%Error dx=dy
x=[0 5 10 15 20];

e1=[0.0000000000000000 0.0029937248205060000 0.00153769391422700000
0.0006369020858432470 0.0002598308950161081]; % dx=0.5
e2=[0.0000000000000000 0.0023537770766820000 0.00116120525688100000
0.0008091169749116223 0.0007136900267189945]; % dx=0.1
e3=[0.0000000000000000 0.0022627781375150000 0.00111482729480100000
0.0007522457304064874 0.0005718562530557005]; % dx=0.05

figure(2)
plot(x,e1,'r',x,e2,'m',x,e3,'b','LineWidth',2),ylim([0 0.01])

legend('dx=0.5','dx=0.1','dx=0.05')

xlabel('Waktu')
ylabel('Nilai Error')

```

## Lampiran 5. Proses Perhitungan Analisis Kekonvergenan

Kekonvergenan metode beda hingga skema implisit FTCS dapat dicari dengan menggunakan ekspansi deret Taylor yang disubstitusikan ke dalam persamaan (3.35) dan (3.70). Ekspansi deret Taylor yang digunakan dalam kedua persamaan tersebut yaitu:

$$\begin{aligned}
 u_{i,j}^n &= u_{i,j}^n \\
 u_{i,j-1}^{n+1} &= u_{i,j}^n - \Delta y u_y \Big|_{i,j}^n + \Delta t u_t \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 u_{yy} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{i,j}^n - \Delta y \Delta t u_{yt} \Big|_{i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta y^3 u_{yyy} \Big|_{i,j}^n \\
 &\quad + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta y^2 \Delta t u_{yyt} \Big|_{i,j}^n - \frac{3}{6} \Delta y t^2 u_{ytt} \Big|_{i,j}^n + \dots \\
 u_{i-1,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n - \Delta x u_x \Big|_{i,j}^n + \Delta t u_t \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{i,j}^n - \Delta x \Delta t u_{xt} \Big|_{i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} \Big|_{i,j}^n \\
 &\quad + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_{i,j}^n - \frac{3}{6} \Delta x t^2 u_{xtt} \Big|_{i,j}^n + \dots \\
 u_{i,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \Delta t u_t \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{i,j}^n + \dots \\
 u_{i+1,j}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \Delta x u_x \Big|_{i,j}^n + \Delta t u_t \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{i,j}^n + \Delta x \Delta t u_{xt} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} \Big|_{i,j}^n \\
 &\quad + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} \Big|_{i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta x t^2 u_{xtt} \Big|_{i,j}^n + \dots \\
 u_{i,j+1}^{n+1} &= u_{i,j}^n + \Delta y u_y \Big|_{i,j}^n + \Delta t u_t \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 u_{yy} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_{i,j}^n + \Delta y \Delta t u_{yt} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta y^3 u_{yyy} \Big|_{i,j}^n \\
 &\quad + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_{i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta y^2 \Delta t u_{yyt} \Big|_{i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta y t^2 u_{ytt} \Big|_{i,j}^n + \dots \\
 u_{i,j+1}^n &= u_{i,j}^n + \Delta y u_y \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 u_{yy} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta y^3 u_{yyy} \Big|_{i,j}^n + \dots \\
 u_{i,j-1}^n &= u_{i,j}^n - \Delta y u_y \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 u_{yy} \Big|_{i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta y^3 u_{yyy} \Big|_{i,j}^n + \dots \\
 u_{i+1,j}^n &= u_{i,j}^n + \Delta x u_x \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} \Big|_{i,j}^n + \dots \\
 u_{i-1,j}^n &= u_{i,j}^n - \Delta x u_x \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} \Big|_{i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} \Big|_{i,j}^n + \dots
 \end{aligned}$$

dan

$$v_{i,j}^n = v_{i,j}^n$$

$$v_{i,j-1}^{n+1} = v_{i,j}^n - \Delta y v_y \Big|_{i,j}^n + \Delta t v_t \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 v_{yy} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 v_{tt} \Big|_{i,j}^n - \Delta y \Delta t v_{yt} \Big|_{i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta y^3 v_{yyy} \Big|_{i,j}^n \\ + \frac{1}{6} \Delta t^3 v_{ttt} \Big|_{i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta y^2 \Delta t v_{yyt} \Big|_{i,j}^n - \frac{3}{6} \Delta y t^2 v_{ytt} \Big|_{i,j}^n + \dots$$

$$v_{i-1,j}^{n+1} = v_{i,j}^n - \Delta x v_x \Big|_{i,j}^n + \Delta t v_t \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 v_{xx} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 v_{tt} \Big|_{i,j}^n - \Delta x \Delta t v_{xt} \Big|_{i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 v_{xxx} \Big|_{i,j}^n \\ + \frac{1}{6} \Delta t^3 v_{ttt} \Big|_{i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t v_{xxt} \Big|_{i,j}^n - \frac{3}{6} \Delta x t^2 v_{xtt} \Big|_{i,j}^n + \dots$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n + \Delta t v_t \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 v_{tt} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 v_{ttt} \Big|_{i,j}^n + \dots$$

$$v_{i+1,j}^{n+1} = v_{i,j}^n + \Delta x v_x \Big|_{i,j}^n + \Delta t v_t \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 v_{xx} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 v_{tt} \Big|_{i,j}^n + \Delta x \Delta t v_{xt} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 v_{xxx} \Big|_{i,j}^n \\ + \frac{1}{6} \Delta t^3 v_{ttt} \Big|_{i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t v_{xxt} \Big|_{i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta x t^2 v_{xtt} \Big|_{i,j}^n + \dots$$

$$v_{i,j+1}^{n+1} = v_{i,j}^n + \Delta y v_y \Big|_{i,j}^n + \Delta t v_t \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 v_{yy} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 v_{tt} \Big|_{i,j}^n + \Delta y \Delta t v_{yt} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta y^3 v_{yyy} \Big|_{i,j}^n \\ + \frac{1}{6} \Delta t^3 v_{ttt} \Big|_{i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta y^2 \Delta t v_{yyt} \Big|_{i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta y t^2 v_{ytt} \Big|_{i,j}^n + \dots$$

$$v_{i,j+1}^n = v_{i,j}^n + \Delta y v_y \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 v_{yy} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta y^3 v_{yyy} \Big|_{i,j}^n + \dots$$

$$v_{i,j-1}^n = v_{i,j}^n - \Delta y v_y \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 v_{yy} \Big|_{i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta y^3 v_{yyy} \Big|_{i,j}^n + \dots$$

$$v_{i+1,j}^n = v_{i,j}^n + \Delta x v_x \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 v_{xx} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 v_{xxx} \Big|_{i,j}^n + \dots$$

$$v_{i-1,j}^n = v_{i,j}^n - \Delta x v_x \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 v_{xx} \Big|_{i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 v_{xxx} \Big|_{i,j}^n + \dots$$

Untuk analisis kekonvergenan pada persamaan  $x$  momentum, maka ekspansi deret Taylor di atas di substitusikan pada persamaan (3.35) yaitu:

$$\left( -\frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} \right) u_{i,j-1}^{n+1} + \left( -\frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} \right) u_{i-1,j}^{n+1} \\ + \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{u_{i+1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{2}{Re(\Delta x)^2} + \frac{2}{Re(\Delta y)^2} \right) u_{i,j}^{n+1} \\ + \left( \frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} \right) u_{i+1,j}^{n+1} + \left( \frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} \right) u_{i,j+1}^{n+1} \\ + \left( \frac{u_{i,j+1}^n}{2\Delta y} - \frac{u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) v_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n \left( \frac{1}{\Delta x} + \frac{u_{i+1,j}^n}{\Delta x} - \frac{u_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right) + v_{i,j}^n \left( \frac{u_{i,j+1}^n}{2\Delta y} - \frac{u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right).$$

Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \left( -\frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} \right) \left( u_{i,j}^n - \Delta y u_{y,i,j}^n + \Delta t u_{t,i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 u_{yy,i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt,i,j}^n - \Delta y \Delta t u_{yt,i,j}^n \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{6} \Delta y^3 u_{yyy,i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt,i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta y^2 \Delta t u_{yyt,i,j}^n - \frac{3}{6} \Delta y t^2 u_{ytt,i,j}^n + \dots \right) \\
& + \left( -\frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} \right) \left( u_{i,j}^n - \Delta x u_{x,i,j}^n + \Delta t u_{t,i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx,i,j}^n \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt,i,j}^n - \Delta x \Delta t u_{xt,i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx,i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt,i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt,i,j}^n \right. \\
& \quad \left. - \frac{3}{6} \Delta x t^2 u_{xtt,i,j}^n + \dots \right) \\
& + \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{\left( u_{i,j}^n + \Delta x u_{x,i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx,i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx,i,j}^n + \dots \right)}{2\Delta x} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\left( u_{i,j}^n - \Delta x u_{x,i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx,i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx,i,j}^n + \dots \right)}{2\Delta x} + \frac{2}{Re(\Delta x)^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{Re(\Delta y)^2} \right) \left( u_{i,j}^n + \Delta t u_{t,i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt,i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt,i,j}^n + \dots \right) \\
& + \left( \frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} \right) \left( u_{i,j}^n + \Delta x u_{x,i,j}^n + \Delta t u_{t,i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx,i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt,i,j}^n \right. \\
& \quad \left. + \Delta x \Delta t u_{xt,i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx,i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt,i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt,i,j}^n \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{6} \Delta x t^2 u_{xtt,i,j}^n + \dots \right) \\
& + \left( \frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} \right) \left( u_{i,j}^n + \Delta y u_{y,i,j}^n + \Delta t u_{t,i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 u_{yy,i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt,i,j}^n \right. \\
& \quad \left. + \Delta y \Delta t u_{yt,i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta y^3 u_{yyy,i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt,i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta y^2 \Delta t u_{yyt,i,j}^n \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{6} \Delta y t^2 u_{ytt,i,j}^n + \dots \right) \\
& + \left( \frac{\left( u_{i,j}^n + \Delta y u_{y,i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 u_{yy,i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta y^3 u_{yyy,i,j}^n + \dots \right)}{2\Delta y} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\left( u_{i,j}^n - \Delta y u_{y,i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 u_{yy,i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta y^3 u_{yyy,i,j}^n + \dots \right)}{2\Delta y} \right) \left( v_{i,j}^n + \Delta t v_{t,i,j}^n \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \Delta t^2 v_{tt,i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 v_{ttt,i,j}^n + \dots \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u_{i,j}^n \left( \frac{1}{\Delta x} + \frac{\left( u_{i,j}^n + \Delta x u_x |_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} |_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} |_{i,j}^n + \dots \right)}{2\Delta x} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left( u_{i,j}^n - \Delta x u_x |_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} |_{i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} |_{i,j}^n + \dots \right)}{2\Delta x} \right) \\
&\quad + v_{i,j}^n \left( \frac{\left( u_{i,j}^n + \Delta y u_y |_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 u_{yy} |_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta y^3 u_{yyy} |_{i,j}^n + \dots \right)}{2\Delta y} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left( u_{i,j}^n - \Delta y u_y |_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 u_{yy} |_{i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta y^3 u_{yyy} |_{i,j}^n + \dots \right)}{2\Delta y} \right).
\end{aligned}$$

Kemudian disederhanakan sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
&\left( v_{i,j}^n u_{yt} + u_{i,j}^n u_{xt} - \frac{1}{Re} u_{yyt} - \frac{1}{Re} u_{xxt} + \frac{1}{2} u_{tt} + u_x u_t + u_y v_t \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t \\
&\quad + \left( \frac{3}{6} u_{ytt} + \frac{3}{6} u_{i,j}^n u_{xtt} + \frac{1}{2} u_x u_{tt} + \frac{1}{2} u_y v_{tt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t^2 \\
&\quad + \left( \frac{1}{2} u_{ttt} + \frac{1}{6} u_x u_{tt} + \frac{1}{6} u_y u_{tt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t^3 \\
&\quad + \left( \frac{1}{6} u_{xxx} + \frac{1}{6} u_{xxx} \Delta t u_t + \frac{1}{12} u_{xxx} \Delta t^2 u_{tt} + \frac{1}{36} u_{xxx} \Delta t^3 u_{ttt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta x^2 \\
&\quad + \left( \frac{1}{6} u_{yyy} v_{i,j}^n + \frac{1}{6} u_{yyy} \Delta t v_t + \frac{1}{12} u_{yyy} \Delta t^2 v_{tt} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{36} u_{yyy} \Delta t^3 v_{ttt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta y^2 \\
&= \left( \frac{1}{Re} u_{yy} + \frac{1}{Re} u_{xx} - u_t - u_{i,j}^n u_x - v_{i,j}^n u_y \right) \Big|_{i,j}^n.
\end{aligned} \tag{1}$$

Dari persamaan (1) dapat diketahui bahwa *truncation error* yang dihasilkan mempunyai orde  $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2)$ . Kemudian persamaan (1) dikurangi persamaan awal pada  $x$  momentum, sehingga persamaan (1) dikatakan konvergen jika:

$$\begin{aligned}
& \lim_{(\Delta t, \Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \left( v_{i,j}^n u_{yt} + u_{i,j}^n u_{xt} - \frac{1}{Re} u_{yyt} - \frac{1}{Re} u_{xxt} + \frac{1}{2} u_{tt} + u_x u_t + u_y v_t \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t \\
& + \left( \frac{3}{6} u_{ytt} + \frac{3}{6} u_{i,j}^n u_{xtt} + \frac{1}{2} u_x u_{tt} + \frac{1}{2} u_y v_{tt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t^2 \\
& + \left( \frac{1}{2} u_{ttt} + \frac{1}{6} u_x u_{tt} + \frac{1}{6} u_y u_{tt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t^3 \\
& + \left( \frac{1}{6} u_{xxx} + \frac{1}{6} u_{xxx} \Delta t u_t + \frac{1}{12} u_{xxx} \Delta t^2 u_{tt} + \frac{1}{36} u_{xxx} \Delta t^3 u_{ttt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta x^2 \\
& + \left( \frac{1}{6} u_{yyy} v_{i,j}^n + \frac{1}{6} u_{yyy} \Delta t v_t + \frac{1}{12} u_{yyy} \Delta t^2 v_{tt} \right. \\
& \left. + \frac{1}{36} u_{yyy} \Delta t^3 v_{ttt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta y^2 = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Untuk analisis kekonvergenan pada persamaan  $y$  momentum maka ekspansi deret Taylor di atas disubstitusikan ke dalam persamaan (3.70), yaitu:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{v_{i,j}^n}{2\Delta x} \right) u_{i,j}^{n+1} + \left( -\frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} \right) v_{i,j-1}^{n+1} + \left( -\frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} \right) v_{i-1,j}^{n+1} \\
& + \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{v_{i,j+1}^n}{2\Delta y} - \frac{v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{2}{Re(\Delta x)^2} + \frac{2}{Re(\Delta y)^2} \right) v_{i,j}^{n+1} \\
& + \left( \frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} \right) v_{i+1,j}^{n+1} + \left( \frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} \right) v_{i,j+1}^{n+1} \\
& = v_{i,j}^n \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{v_{i,j+1}^n}{2\Delta y} - \frac{v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) + u_{i,j}^n \left( \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right).
\end{aligned}$$

Menjadi persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{v_{i,j}^n + \Delta x v_x |_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 v_{xx} |_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 v_{xxx} |_{i,j}^n + \dots}{2\Delta x} \right. \\
& \quad \left. - \frac{v_{i,j}^n - \Delta x v_x |_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 v_{xx} |_{i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 v_{xxx} |_{i,j}^n + \dots}{2\Delta x} \right) \left( u_{i,j}^n + \Delta t u_t |_{i,j}^n \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} |_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 v_{ttt} |_{i,j}^n + \dots \right) \\
& + \left( -\frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} \right) \left( v_{i,j}^n - \Delta y v_y |_{i,j}^n + \Delta t v_t |_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 v_{yy} |_{i,j}^n \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \Delta t^2 v_{tt} |_{i,j}^n - \Delta y \Delta t v_{yt} |_{i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta y^3 v_{yyy} |_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 v_{ttt} |_{i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta y^2 \Delta t v_{yyt} |_{i,j}^n \right. \\
& \quad \left. - \frac{3}{6} \Delta y t^2 v_{ytt} |_{i,j}^n + \dots \right) \\
& + \left( -\frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} \right) \left( v_{i,j}^n - \Delta x v_x |_{i,j}^n + \Delta t v_t |_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 v_{xx} |_{i,j}^n \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \Delta t^2 v_{tt} |_{i,j}^n - \Delta x \Delta t v_{xt} |_{i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 v_{xxx} |_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 v_{ttt} |_{i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t v_{xxt} |_{i,j}^n \right. \\
& \quad \left. - \frac{3}{6} \Delta x t^2 v_{xtt} |_{i,j}^n + \dots \right) \\
& + \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{v_{i,j}^n + \Delta y v_y |_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 v_{yy} |_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta y^3 v_{yyy} |_{i,j}^n + \dots}{2\Delta y} \right. \\
& \quad \left. - \frac{v_{i,j}^n - \Delta y v_y |_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 v_{yy} |_{i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta y^3 v_{yyy} |_{i,j}^n + \dots}{2\Delta y} + \frac{2}{Re(\Delta x)^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{Re(\Delta y)^2} \right) \left( v_{i,j}^n + \Delta t v_t |_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 v_{tt} |_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 v_{ttt} |_{i,j}^n + \dots \right) \\
& + \left( \frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{Re(\Delta x)^2} \right) \left( v_{i,j}^n + \Delta x v_x |_{i,j}^n + \Delta t v_t |_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 v_{xx} |_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 v_{tt} |_{i,j}^n \right. \\
& \quad \left. + \Delta x \Delta t v_{xt} |_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 v_{xxx} |_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 v_{ttt} |_{i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t v_{xxt} |_{i,j}^n \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{6} \Delta x t^2 v_{xtt} |_{i,j}^n + \dots \right) \\
& + \left( \frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} - \frac{1}{Re(\Delta y)^2} \right) \left( v_{i,j}^n + \Delta y v_y |_{i,j}^n + \Delta t v_t |_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 v_{yy} |_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 v_{tt} |_{i,j}^n \right. \\
& \quad \left. + \Delta y \Delta t v_{yt} |_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta y^3 v_{yyy} |_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 v_{ttt} |_{i,j}^n + \frac{3}{6} \Delta y^2 \Delta t v_{yyt} |_{i,j}^n \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{6} \Delta y t^2 v_{ytt} \Big|_{i,j}^n + \dots \Big) \\
& = v_{i,j}^n \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{v_{i,j}^n + \Delta y v_y \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 v_{yy} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta y^3 v_{yyy} \Big|_{i,j}^n + \dots}{2\Delta y} \right. \\
& \quad \left. - \frac{v_{i,j}^n - \Delta y v_y \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta y^2 v_{yy} \Big|_{i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta y^3 v_{yyy} \Big|_{i,j}^n + \dots}{2\Delta y} \right) \\
& \quad + u_{i,j}^n \left( \frac{v_{i,j}^n + \Delta x v_x \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 v_{xx} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 v_{xxx} \Big|_{i,j}^n + \dots}{2\Delta x} \right. \\
& \quad \left. - \frac{v_{i,j}^n - \Delta x v_x \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 v_{xx} \Big|_{i,j}^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 v_{xxx} \Big|_{i,j}^n + \dots}{2\Delta x} \right).
\end{aligned}$$

Kemudian disederhanakan sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
& \left( v_x u_t + v_{i,j}^n v_{yt} - \frac{1}{Re} u_{yyt} - \frac{1}{Re} v_{yyt} + \frac{1}{2} u_{tt} + v_{xt} + \frac{1}{2} v_{tt} + v_y v_t \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t \\
& \quad + \left( \frac{1}{2} v_x u_{tt} + \frac{3}{6} v_{ytt} + \frac{3}{6} v_{xtt} + \frac{1}{6} v_{ttt} + \frac{1}{2} v_{tt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t^2 \\
& \quad + \left( \frac{1}{6} v_x v_{ttt} + \frac{1}{6} v_{ttt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t^3 \\
& \quad + \left( \frac{1}{6} v_{xxx} \Delta x^2 u_{tt} + \frac{1}{36} v_{xxx} \Delta t^3 v_{ttt} + \frac{1}{6} u_{i,j}^n v_{xxx} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta x^2 \\
& \quad + \left( \frac{1}{6} v_{yyy} \Delta t v_t + \frac{1}{12} v_{yyy} \Delta t^2 v_{tt} + \frac{1}{36} v_{yyy} \Delta t^3 v_{ttt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta y^2 \\
& = \left( -v_{i,j}^n v_y + \frac{1}{Re} v_{yy} + \frac{1}{Re} v_{xx} - u_{i,j}^n v_x - v_t \right) \Big|_{i,j}^n.
\end{aligned} \tag{3}$$

Dari persamaan (3) dapat diketahui bahwa *truncation error* yang dihasilkan mempunyai orde  $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta y^2)$ . Kemudian persamaan (3) dikurangi persamaan awal pada  $y$  momentum, sehingga persamaan (3) dikatakan konvergen jika:

$$\begin{aligned}
& \lim_{(\Delta t, \Delta x, \Delta y) \rightarrow 0} \left( v_x u_t + v_{i,j}^n v_{yt} - \frac{1}{Re} u_{yyt} - \frac{1}{Re} v_{yyt} + \frac{1}{2} u_{tt} + v_{xt} + \frac{1}{2} v_{tt} + v_y v_t \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t \\
& + \left( \frac{1}{2} v_x u_{tt} + \frac{3}{6} v_{ytt} + \frac{3}{6} v_{xtt} + \frac{1}{6} v_{ttt} + \frac{1}{2} v_{tt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t^2 \\
& + \left( \frac{1}{6} v_x v_{ttt} + \frac{1}{6} v_{ttt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta t^3 \\
& + \left( \frac{1}{6} v_{xxx} \Delta x^2 u_{tt} + \frac{1}{36} v_{xxx} \Delta t^3 v_{ttt} + \frac{1}{6} u_{i,j}^n v_{xxx} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta x^2 \\
& + \left( \frac{1}{6} v_{yyy} \Delta t v_t + \frac{1}{12} v_{yyy} \Delta t^2 v_{tt} + \frac{1}{36} v_{yyy} \Delta t^3 v_{ttt} \right) \Big|_{i,j}^n \Delta y^2 = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Jika  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  dan,  $\Delta t$  sangat kecil, maka jumlah dari limit persamaan (2) dan (4) akan semakin kecil karena berapapun nilai  $u_{xt}, u_{xx}, u_{yy}, \dots$  dan  $v_{xt}, v_{xx}, v_{yy}, \dots$  jika dikalikan dengan nilai dari  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  dan  $\Delta t$  akan ikut mengecil. Sehingga *truncation error* akan menuju nol untuk  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ , dan  $\Delta t \rightarrow 0$ .

## RIWAYAT HIDUP



Siti Patimah, lahir di Cianjur pada tanggal 22 November 1993. Anak pertama dari dua bersaudara, pasangan Alm. Bapak Miftahuddin dan Ibu Maesaroh. Memiliki seorang adik perempuan bernama Ayu Fatimah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Nyalindung 03 yang ditamatkan pada tahun 2006. Pada tahun yang sama dia melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP Terpadu Al-Ma'shum Mardiyah yang ditamatkan pada tahun 2009. Kemudian dia melanjutkan pendidikan menengah atas di yayasan yang sama, SMA Terpadu Al-Ma'shum Mardiyah yang ditamatkan pada tahun 2012. Selanjutnya, pada tahun 2012 pendidikan berikutnya dia tempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi.



**KEMENTERIAN AGAMA RI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI**  
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Siti Patimah  
NIM : 12610095  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika  
Judul Skripsi : Solusi Numerik Persamaan *Navier-Stokes* Dua Dimensi dengan Metode Beda Hingga Skema *Forward Time Central Space*  
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si  
Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan
1.	03 Maret 2016	Konsultasi Bab I dan II	1.
2.	28 Maret 2016	Konsultasi Agama Bab I dan II	2.
3.	13 April 2016	Konsultasi Bab III	3.
4.	13 April 2016	Revisi Agama Bab I dan II	4.
5.	20 April 2016	Konsultasi Agama Bab III	5.
6.	26 Agustus 2016	Konsultasi Bab III	6.
7.	08 September 2016	Konsultasi Bab I, II dan III	7.
8.	29 September 2016	Revisi Bab I, II dan III	8.
9.	03 Oktober 2016	Konsultasi Bab III	9.
10.	05 Oktober 2016	Konsultasi Agama Bab III	10.
11.	06 Oktober 2016	Konsultasi Bab III dan IV	11.
12.	06 Oktober 2016	ACC Agama Keseluruhan	12.
13.	07 Oktober 2016	ACC Keseluruhan	13.

Malang, 07 Oktober 2016  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001