

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN BOUSSINESQ MENGGUNAKAN
METODE BEDA HINGGA IMPLISIT**

SKRIPSI

**OLEH
MAYA PUSPITA SARI
NIM. 12610065**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN BOUSSINESQ MENGGUNAKAN
METODE BEDA HINGGA IMPLISIT**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Maya Puspita Sari
NIM. 12610065**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN BOUSSINESQ MENGGUNAKAN
METODE BEDA HINGGA IMPLISIT**

SKRIPSI

Oleh
Maya Puspita Sari
NIM. 12610065

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 07 Oktober 2016

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004

Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika



Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN BOUSSINESQ MENGGUNAKAN
METODE BEDA HINGGA IMPLISIT**

SKRIPSI

Oleh
Maya Puspita Sari
NIM. 12610065

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

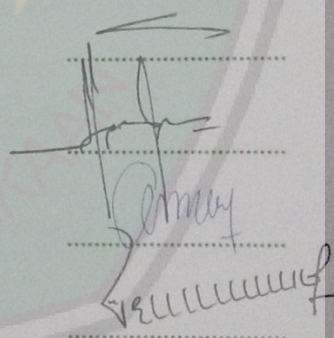
Tanggal 26 Oktober 2016

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si

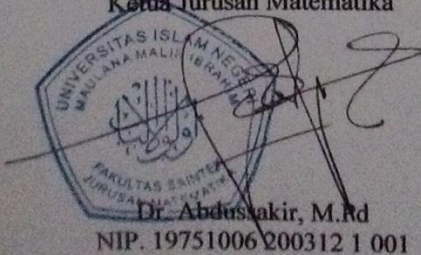
Ketua Penguji : Hairur Rahman, M.Si

Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si

Anggota Penguji : Evawati Alisah, M.Pd



Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Abdusakir, M.Ed
NIP. 197510062003121001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Maya Puspita Sari

NIM : 12610065

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Solusi Numerik Persamaan Boussinesq Menggunakan
Metode Beda Hingga Implisit

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 04 Oktober 2016
Yang membuat pernyataan,



Maya Puspita Sari
NIM. 12610065

MOTO

*“Janganlah belajar hanya untuk meraih kesuksesan, tapi belajarlah untuk
membesarkan jiwa”*



PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Teriring doa semoga skripsi ini bermanfaat dan menjadi kesuksesan dunia akhirat,
penulis persembahkan skripsi ini untuk:

Kedua orang tua penulis Bapak dan Ibu yang selalu menginspirasi penulis dengan kegigihan dan kesabarannya, yang selalu menyelipkan doa setiap harinya untuk penulis. Kedua saudara tersayang yang senantiasa memberikan motivasi dan semangat yang tiada tara. Semoga Allah selalu menyertai langkahnya dalam menggapai kesuksesan di dunia dan akhirat.

Aamiin.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur ke hadirat Allah Swt. atas limpahan rahmat, taufiq, dan hidayah-Nya sehingga penulisan skripsi dengan judul “*Solusi Numerik Persamaan Boussinesq Menggunakan Metode Beda Hingga Implisit*” ini dapat diselesaikan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam penulis haturkan kepada nabi Muhammad Saw, keluarga, dan para sahabat beliau.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak akan selesai tanpa adanya bantuan dari beberapa pihak. Pada kesempatan kali ini penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan arahan dengan sabar dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan banyak arahan dan bimbingan kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika dan dosen Jurusan Matematika terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya yang dapat dijadikan bekal di masa depan, terutama Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si, selaku dosen wali yang selalu mendukung penulis untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
7. Kedua orang tua penulis bapak Saimin dan ibu Mu'alimah beserta kedua kakak penulis, yang telah mengajarkan kesabaran, keikhlasan, dan rasa syukur dalam mencapai kesuksesan. Berkat doa dan ridha beliau, Allah memberi berbagai kemudahan kepada penulis. Berkat beliau juga penulis selalu bersemangat untuk menyelesaikan skripsi ini.
8. Sahabat Anggun Annisa, Sri Lestari Widyaningsih, Ainul Ma'rifah, Devi Lisa, dan Vennyta Agustin yang telah memberikan inspirasi, semangat, dan doa.
9. Sahabat-sahabat di Jurusan Matematika, khususnya keluarga "Math B" serta semua pihak yang terlibat, terima kasih telah berbagi ilmu di bangku kuliah.

Semoga skripsi ini memberikan manfaat kepada pembaca dan penulis secara pribadi.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Oktober 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR viii

DAFTAR ISI x

DAFTAR GAMBAR xii

DAFTAR TABEL xiii

ABSTRAK xiv

ABSTRACT xv

ملخص xvi

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	7

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Boussinesq	9
2.2 Metode Beda Hingga	12
2.2.1 Metode Beda Hingga Implisit	15
2.3 Deret Taylor	17
2.4 Kestabilan	19
2.5 <i>Error</i> atau Kesalahan (Galat)	19
2.6 Kajian Agama	21

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Diskritisasi Persamaan	25
3.2 Diskritisasi Syarat Awal dan Syarat Batas	31
3.3 Analisis Kestabilan	40
3.4 Simulasi dan Interpretasi	51
3.5 Analisis <i>Error</i>	64
3.6 Prinsip Mencari Solusi dalam Matematika dan Al-Quran	67

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	71
4.2 Saran	71

DAFTAR RUJUKAN	72
----------------------	----

LAMPIRAN-LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Sketsa Aliran Gelombang	11
Gambar 2.2 Skema Implisit	16
Gambar 3.1 Skema Nilai u dan Nilai η	32
Gambar 3.2 Simulasi Gelombang untuk $F = 0,25$ pada Selang Waktu Tertentu	59
Gambar 3.3 Simulasi Gelombang untuk $F = 0,25$	59
Gambar 3.4 Grafik 3D Simulasi Gelombang untuk $F = 0,25$	60
Gambar 3.5 Simulasi Gelombang untuk $F = 1,5$ pada Selang Waktu Tertentu	62
Gambar 3.6 Simulasi Gelombang untuk $F = 1,5$	62
Gambar 3.7 Grafik 3D Simulasi Gelombang untuk $F = 1,5$	63
Gambar 3.8 Perbandingan Grafik <i>Error</i> untuk $F = 0,25$	65
Gambar 3.9 Perbandingan Grafik <i>Error</i> untuk $F = 1,5$	65

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Nilai u	33
Tabel 3.2 Nilai η	33
Tabel 3.3 Perbandingan Nilai <i>Error</i> untuk $F = 0,25$	66
Tabel 3.4 Perbandingan Nilai <i>Error</i> untuk $F = 1,5$	66



ABSTRAK

Sari, Maya Puspita. 2016. **Solusi Numerik Persamaan Boussinesq Menggunakan Metode Beda Hingga Implisit**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Kata kunci: solusi numerik, persamaan Boussinesq, metode beda hingga implisit.

Skripsi ini bertujuan untuk menjelaskan solusi numerik persamaan Boussinesq menggunakan metode beda hingga implisit *Forward Time Central Space (FTCS)* yaitu skema beda maju untuk turunan terhadap waktu t dan beda pusat untuk turunan terhadap ruang x . Penulisan skripsi ini menggunakan metode kajian literatur atau kepustakaan.

Persamaan Boussinesq ini diselesaikan menggunakan metode beda hingga implisit dengan langkah-langkah sebagai berikut: melakukan diskritisasi pada persamaan Boussinesq dengan menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS. Selanjutnya melakukan linierisasi pada suku-suku nonlinier yang dihasilkan diskritisasi persamaan Boussinesq menggunakan deret Taylor. Lalu melakukan diskritisasi syarat awal dengan metode FTCS. Karena persamaan Boussinesq tidak memiliki kondisi batas, maka perlu dilakukan ekstrapolasi linier untuk mencari kondisi batas menggunakan deret Taylor orde satu. Kemudian mensubstitusikan nilai t dan x sesuai syarat awal dan syarat batasnya. Selanjutnya, persamaan hasil diskritisasi diubah menjadi bentuk matriks untuk mencari nilai u dan η . Setelah itu mensimulasikan hasil dari nilai η dan melakukan interpretasi grafik.

Hasilnya, pada saat *Froude Number* (F) kurang dari 1, maka akan menghasilkan tinggi gelombang yang lebih kecil daripada tinggi gundukan. Namun pada saat *Froude Number* (F) lebih dari 1, maka akan menghasilkan tinggi gelombang yang lebih besar daripada tinggi gundukan. Metode beda hingga skema implisit ini pun juga terbukti stabil tanpa syarat untuk menyelesaikan persamaan Boussinesq.

ABSTRACT

Sari, Maya Puspita. 2016. **Numerical Solution of Boussinesq Equation Using Implicit Finite Difference Method**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Keywords: numerical solution, Boussinesq equation, implicit finite difference method.

This thesis aims to explain the numerical solution of Boussinesq equations using implicit finite difference methods implementing Forward Time Central Space (FTCS) that are forward difference scheme for the derivative with respect to time t and central difference scheme for the derivative of the space x . The method used on this thesis is review of literature.

Boussinesq equations obtained using implicit finite difference methods with the following steps: the first step is discretizing the Boussinesq equations using finite difference implicit scheme FTCS. The second step is linearizing the nonlinear terms produced by discretizing process of Boussinesq equations using Taylor series. The third step is discretizing the initial conditions using FTCS method. Since Boussinesq equation has no boundary conditions, then the extrapolation to determine the boundary conditions using first order of Taylor series has to be done. Then substituting the value of t and x accordancing to the initial and boundary conditions. The equations obtained from the discretization process then transformed to matrix to determine the value of u and η . After that simulating the results of η values and interpreting the graphs.

As a result, when the Froude number (F) is less than 1, it generates a wave height smaller than the mound height. But when the Froude number (F) is more than 1, it generates a wave height greater than the mound height. Implicit finite difference method scheme has proved to be stable with no requirement to solve the Boussinesq equation.

ملخص

ساري، مايا فؤسفيتا. 2016. حل عددي لمعادلة Boussinesq باستخدام طريقة الفرق المحدود الضمني بحث جامعي. شعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (I) محمد جمهوري، الماجستير (II)، إيفواطي عليساه، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: الحل العددي، المعادلات Boussinesq، طريقة الفرق المحدودة الضمني.

تهدف هذه الأطروحة لشرح حل العددية لمعادلات Boussinesq ضمنية باستخدام طريقة الفرق المحدود Forward Time Central Space (FTCS) وأنها خطط الفرق الامامي وضعت لمشتقات لزم t الفروق الوسطي لمشتقات فضاء x . كتابة هذا بحث تستخدم طريقة مراجع.

يمكن تحديد الحل العددي للمعادلات Boussinesq باستخدام طريقة الفرق المحدودة الضمنية بخطوات التالية، نفذ تفريد على المعادلات Boussinesq باستخدام الفرق محدود FTCS مخطط ضمنية. ثم تخطيط اجراء غيرخطية ثم الحسولعليها تفريد FTCS باستخدام سلسلة تايلور. ثم القيام بتفريد الشروط الأولية بطريقة FTCS. لأن معادلة Boussinesq ليس لها شروط الحدود، فمن الضروري قيام ب بالاستقراء لتحديد شروط الحدود باستخدام سلسلة تايلور على رتبة أولى. ثم استبدال قيمة t و x بنسبة الى شروط اولي وشروط الحدود. وعلاوة على ذلك، فإن المعادلة من تفريد تغير الى شكل مصفوفة لتحديد قيمة u و η . ثم يحاكي نتائج القيم η وتفسير الرسوم البيانية.

ونتيجة لذلك، عندما يكون عدد $Froude$ (F) هو أقل من 1، أنه سيتم إنشاء ارتفاع موجة أصغر من تل الارتفاع. ولكن عندما يكون عدد $Froude$ (F) هو أكثر من 1، أنه سيتم إنشاء ارتفاع موجة أكبر من تل الارتفاع. طريقة الفرق محدود مخطط ضمني أثبت ذلك أيضا أن تكون مستقرة مع أي شرط نحل المعادلة Boussinesq.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah salah satu ilmu pasti yang mengkaji abstraksi ruang, waktu, dan angka. Matematika juga mendeskripsikan realitas alam semesta dalam bahasa lambang, sehingga suatu permasalahan dalam realitas alam akan lebih mudah dipahami (Aziz, 2006:v). Alam semesta sendiri memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79).

Dalam kehidupan sehari-hari, tidak dapat dipungkiri bahwa manusia pasti akan menghadapi berbagai permasalahan. Namun, seringkali manusia berputus asa tatkala mendapatkan kesulitan atau cobaan. Padahal Allah telah memberi janji bahwa di balik kesulitan, pasti ada jalan keluar yang begitu dekat. Dalam surat al-Insyirah, Allah Swt. berfirman,

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (QS. Al-Insyirah/5:94).

Ayat ini pun diulang setelah itu,

إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

“Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (QS. Al-Insyirah/6:94).

Al Hasan Al Bashri mengatakan bahwa ketika turun surat al-Insyirah ayat 5-6, Rasulullah Saw bersabda, *“Kabarkanlah bahwa akan datang pada kalian kemudahan. Karena satu kesulitan tidak mungkin mengalahkan dua kemudahan.”* Perkataan yang sama disampaikan oleh Qotadah. Qotadah mengatakan, *“Diceritakan pada kami bahwa Rasulullah Saw pernah memberi kabar gembira pada para sahabatnya dengan ayat di atas. Lalu beliau mengatakan, “Satu kesulitan tidak mungkin mengalahkan dua kemudahan”. Abdullah bin Mas’ud radhiyallahu ‘anhu pernah berkata, “Seandainya kesulitan masuk ke dalam suatu lubang, maka kemudahan pun akan mengikutinya karena Allah Swt. berfirman yang artinya, “Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (Hafizhahullah, 2014).*

Begitu juga kesulitan atau permasalahan dalam bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Permasalahan yang digambarkan dalam bentuk persamaan matematik, tidak semuanya dapat diselesaikan secara analitik. Sehingga diperlukan sebuah solusi numerik untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitung diselesaikan menggunakan sebuah metode yang disebut metode numerik. Hasilnya merupakan nilai perkiraan atau pendekatan dari selesaian analitik. Salah satu metode yang terdapat dalam metode numerik adalah metode beda hingga.

Metode beda hingga ini merupakan metode yang sangat umum digunakan dalam menyelesaikan masalah-masalah persamaan diferensial biasa maupun parsial yang didasarkan pada ekspansi deret Taylor. Penurunan beda hingga dapat dilakukan dari kiri, kanan, dan tengah yang dikenal dengan beda maju, beda

mundur, dan beda pusat. Terdapat 2 skema dalam metode beda hingga, yaitu skema eksplisit dan implisit. Penyelesaian dengan skema implisit lebih sulit dibandingkan dengan skema eksplisit. Skema implisit ini sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier seperti persamaan gelombang.

Salah satu persamaan gelombang adalah persamaan Boussinesq. Persamaan Boussinesq termasuk dalam persamaan gelombang nonlinier yaitu gelombang yang merambat karena ada pengaruh nonlinier dan biasanya terjadi di laut dangkal. Menurut Patirol (2010) persamaan Boussinesq menggambarkan aliran dangkal yang diturunkan dari persamaan Euler yang tak kompresibel dan tak rotasional. Ada dua parameter penting dalam pengembangan persamaan Boussinesq yaitu nonlinieritas dan dispersifitas. Model Boussinesq dapat digunakan untuk memprediksi elevasi gelombang di dalam pelabuhan dan interaksi gelombang di daerah dekat pantai. Pada umumnya persamaan Boussinesq berupa sebuah sistem persamaan diferensial parsial nonlinier yang sangat sulit dicari solusi analitiknya.

Pada penelitian sebelumnya, L.H Wiryanto (2010), menyelesaikan persamaan Boussinesq dengan menggunakan metode beda hingga prediktor-korektor, dengan skema Adam Bashforth untuk prediktor dan skema Adam-Moulton untuk korektor. Penggunaan metode beda hingga prediktor-korektor adalah untuk melihat efek dari *Froude Number* (F). Untuk $F < 1$, maka akan menghasilkan gelombang dengan tinggi gelombang lebih kecil daripada tinggi gundukan. Dari hasil penelitian yang dilakukan oleh L.H Wiryanto, tinggi gelombang yang dihasilkan tumbuh menuju angka 0,016. Namun, untuk $F > 1$

tinggi gelombang yang dihasilkan akan lebih besar daripada tinggi gundukan. Selanjutnya, Nafilah (2016) juga telah menyelesaikan persamaan Boussinesq dengan menggunakan metode *Lax-Wendroff*. Dengan menggunakan persamaan yang sama beserta parameter-parameternya yang diambil dari penelitian L.H Wiryanto, penelitian yang dilakukan oleh Nafilah menunjukkan bahwa terdapat riak-riak gelombang yang disebabkan adanya gundukan pada dasar laut dan nilai dari F yang berbeda-beda pada air akan menghasilkan tinggi gelombang permukaan yang berbeda. Sedangkan *error* pemotongan pertama dari model diskrit yang digunakan memiliki orde dua (Δx^2) dan orde satu (Δt).

Berdasarkan penjelasan di atas, maka penulis menyelesaikan persamaan Boussinesq menggunakan metode numerik yang lain. Karena persamaan Boussinesq yang dihasilkan berupa sistem persamaan diferensial parsial nonlinier, maka penulis menyelesaikan persamaan Boussinesq dengan menggunakan metode beda hingga. Terdapat 2 skema dalam metode beda hingga, yaitu skema eksplisit dan implisit. Skema eksplisit merupakan skema yang sederhana dan mudah dipahami. Namun skema ini mempunyai kelemahan, yaitu skema eksplisit akan menjadi tidak stabil jika diaplikasikan ke dalam sistem persamaan diferensial parsial nonlinier. Sehingga dalam penelitian ini, judul yang diangkat penulis adalah “Solusi Numerik Persamaan Boussinesq Menggunakan Metode Beda Hingga Implisit”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana solusi numerik persamaan Boussinesq menggunakan metode beda hingga implisit?
2. Bagaimana syarat kestabilan dari metode beda hingga implisit *Forward Time Central Space (FTCS)*?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui solusi numerik persamaan Boussinesq menggunakan metode beda hingga implisit.
3. Menentukan syarat kestabilan dari metode beda hingga implisit *Forward Time Central Space (FTCS)*.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat berupa:

1. Penjelasan tentang solusi numerik persamaan Boussinesq menggunakan metode beda hingga implisit.
2. Penjelasan tentang syarat kestabilan dari metode yang digunakan.
3. Pembahasan, pengetahuan, dan informasi pada penelitian yang terkait dengan persamaan Boussinesq.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Persamaan Boussinesq yang dibahas pada penelitian ini diambil dari Wiryanto (2010) dengan persamaannya sebagai berikut:

$$\eta_t + F(u_x + h_x) + \epsilon F u \eta_x = 0$$

$$F u_t + F^2 u_x + \eta_x = 0$$

dengan kondisi awal beserta parameter-parameternya yaitu:

$$\eta(x, 0) = 0 \qquad u(x, 0) = \frac{1}{\epsilon}$$

$$F = 0,25 \qquad F = 1,5$$

$$\Delta x = 0,15 \qquad \Delta t = 0,015$$

$$\epsilon = 0,1$$

$$h(x) = 0,0015 - \frac{0.1}{((x-28)^2+1)}$$

2. Skema yang digunakan yaitu skema beda hingga implisit FTCS (*Forward Time Central Space*).

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan menggunakan metode penelitian kepustakaan (*library research*). Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Diberikan persamaan Boussinesq beserta kondisi awal dan kondisi batasnya.
2. Melakukan diskritisasi persamaan Boussinesq dengan menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS (*Forward Time Central Space*) serta melakukan linierisasi pada suku-suku nonlinier yang dihasilkan diskritisasi persamaan Boussinesq menggunakan deret Taylor.

3. Melakukan diskritisasi syarat awal dengan metode FTCS serta melakukan ekstrapolasi linier untuk mencari kondisi batas menggunakan deret Taylor orde satu.
4. Mensimulasikan hasil dari nilai η menggunakan program MATLAB serta melakukan interpretasi grafik terhadap hasil simulasi dari solusi numerik persamaan Boussinesq.
5. Melakukan analisis *error* menggunakan *error* hampiran dan *error* relatif hampiran.

1.7 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan ini adalah sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini menguraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini menjelaskan tentang gambaran umum persamaan Boussinesq, metode beda hingga, deret Taylor, kestabilan, *error* (galat), serta kajian agama.

Bab III Pembahasan

Bagian ini menguraikan tentang gambaran umum diskritisasi persamaan Boussinesq, diskritisasi syarat awal dan syarat batas persamaan Boussinesq menggunakan deret Taylor, analisis kestabilan, simulasi dan interpretasi

persamaan Boussinesq dengan menggunakan metode beda hingga implisit, analisis *error*, serta prinsip mencari solusi dalam matematika dan al-Quran.

Bab IV Penutup

Bagian ini memuat kesimpulan dan saran dari hasil pembahasan penelitian yang telah dilakukan.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Boussinesq

Gelombang adalah gerak muka air secara periodik yang merambat sehingga membentuk puncak dan lembah yang pada dasarnya merupakan manifestasi dari gaya-gaya yang bekerja pada fluida. Gelombang terjadi untuk semua ukuran dan bentuk, tergantung dari besarnya gaya yang bekerja pada air. Pada perencanaan teknis bidang teknik pantai, gelombang merupakan faktor utama yang diperhitungkan karena akan menyebabkan gaya-gaya yang bekerja pada bangunan pantai. Hal yang terpenting dari gelombang adalah gelombang hanya dapat diprediksi, sehingga perhitungan gelombang menjadi sesuatu yang dibutuhkan di semua pelajaran teknik pantai (Patiroi, 2010).

Ada berbagai macam jenis gelombang di alam semesta. Salah satunya adalah gelombang nonlinier yaitu gelombang yang merambat karena ada pengaruh nonlinier dan biasanya terjadi di laut dangkal. Soliton adalah sebuah gelombang nonlinier yang memiliki dua sifat yaitu (1) terlokalisasi dan merambat tanpa perubahan bentuk maupun kecepatan serta (2) stabil melawan tumbukan dan mempertahankan identitasnya. Sifat pertama merupakan kondisi gelombang soliter (*solitary waves*) yang dikenal dalam hidrodinamika sejak abad ke-19 (Drazin dan Johnson, 1992:15).

Gelombang soliter adalah gelombang yang mempunyai bentuk tetap, teratur, dan tak terdispersi. Kecepatan perambatan gelombang soliter sangat tergantung pada besar kecilnya amplitudo yang dimiliki. Semakin besar amplitudo

suatu gelombang soliter, semakin cepat perambatannya. Jadi jika ada dua gelombang soliter yang merambat dengan amplitudo yang berbeda di mana gelombang soliter dengan amplitudo lebih besar berada di belakang, maka pada suatu saat kedua gelombang soliter tersebut berinteraksi setelahnya akan kembali ke bentuk semula (Sandi, 1994:114).

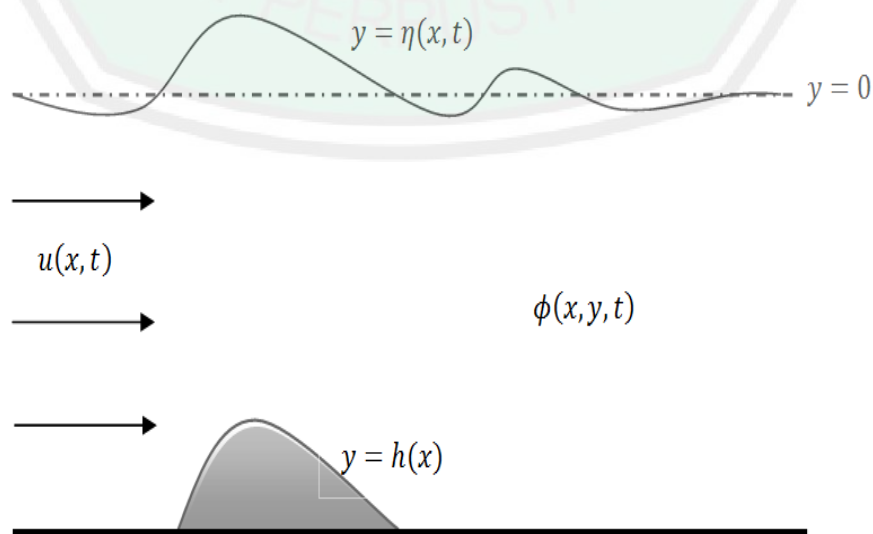
Gelombang soliter dapat dimodelkan menjadi persamaan diferensial parsial nonlinier. Model gelombang nonlinier pertama kali diteliti oleh John Scott R pada tahun 1834 secara eksperimental. Beberapa tahun kemudian Boussinesq berhasil menurunkan secara matematis persamaan gelombang yang diteliti John Scott R. Persamaan Boussinesq dapat menjelaskan nonlinieritas dan dispersifitas gelombang dan telah memberikan penjelasan yang cukup akurat terhadap fenomena transformasi gelombang di daerah pantai, termasuk transfer energinya (Patiroi, 2010).

Model aliran gelombang tersebut diperoleh dari fungsi potensial yaitu dengan mengaproksimasi masalah nilai batas persamaan Laplace dari fungsi potensial menjadi persamaan Boussinesq dengan asumsi bahwa fluida dangkal dan gelombang yang dihasilkan panjang tetapi amplitudonya kecil (Sukron, 2014).

Menurut Patiroi (2010) persamaan Boussinesq menggambarkan aliran air dangkal yang diturunkan dari persamaan Euler yang tak kompresibel dan tak rotasional. Ada dua parameter penting dalam pengembangan persamaan Boussinesq yaitu nonlinieritas dan dispersifitas. Model Boussinesq dapat digunakan untuk memprediksi elevasi gelombang di dalam pelabuhan dan interaksi gelombang di daerah dekat pantai.

Menurut Djohan (1997), persamaan Boussinesq merupakan model bagi persamaan gelombang air dua arah di atas dasar tak rata. Di atas dasar rata, persamaan Boussinesq mempunyai solusi gelombang berjalan periodik, yaitu gelombang yang menjalar tanpa berubah bentuk dan kecepatan yang disebut gelombang cnoidal.

Pada penelitian yang dilakukan oleh L.H Wiryanto (2010) diperoleh model aliran gelombang permukaan yang melalui sebuah gundukan. Model tersebut berupa sistem persamaan diferensial parsial nonlinier yang dapat dikategorikan sebagai persamaan Boussinesq. Pada penelitian sebelumnya, dijelaskan bahwa fluida mengalir seragam dan terdapat sebuah gundukan di bagian dasar sehingga mengganggu aliran yang melewatinya dan menghasilkan gelombang di permukaan cairan dengan $u(x, t)$ merupakan kecepatan gelombang dari sebelah kiri dan $y = h(x)$ merupakan fungsi gundukan. Oleh karena itu, aliran fluida secara alami akan mengalami sebuah gelombang permukaan yaitu $y = \eta(x, t)$ yang bergantung terhadap ruang dan waktu. Hal ini dijelaskan pada Gambar 2.1 berikut ini:



Gambar 2.1 Sketsa Aliran Gelombang

Adapun persamaan Boussinesq yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + F \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{dh(x)}{dx} \right) + \epsilon F u(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$F \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + F^2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

dengan kondisi awal beserta parameter-parameternya yaitu:

$$\eta(x, 0) = 0 \quad u(x, 0) = \frac{1}{\epsilon}$$

$$F = 0,25 \quad F = 1,5$$

$$\Delta x = 0,15 \quad \Delta t = 0,015$$

$$\epsilon = 0,1$$

$$h(x) = 0,0015 - \frac{0,1}{((x - 28)^2 + 1)}$$

dengan $\eta(x, t)$ adalah ketinggian permukaan fluida, $u(x, t)$ adalah kecepatan rata-rata pada aliran fluida, h_x adalah representasi dari gundukan pada dasar saluran berlaku pada saat $x \in [20, 35]$. F adalah *Froude number* dan ϵ adalah perbandingan dari amplitudo gelombang dengan kedalaman aliran (Sukron, 2014).

2.2 Metode Beda Hingga

Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitung. Berbagai permasalahan dalam bidang ilmu pengetahuan dan teknologi dapat digambarkan dalam bentuk persamaan matematik. Hasil penyelesaian numerik merupakan nilai perkiraan atau pendekatan dari selesaian analitik atau eksak. Karena merupakan nilai pendekatan, maka terdapat kesalahan terhadap nilai

eksak. Nilai kesalahan tersebut harus cukup kecil terhadap tingkat kesalahan yang diterapkan (Triatmodjo, 2002).

Salah satu metode numerik yang sering digunakan adalah metode beda hingga. Metode beda hingga merupakan metode yang sangat umum dalam menyelesaikan masalah-masalah persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial yang didasarkan pada ekspansi deret Taylor (Strauss, 2007). Penurunan beda hingga dapat dilakukan dari kiri, kanan, dan tengah yang akan digunakan untuk menentukan nilai fungsi pada titik tertentu yang dikenal dengan beda maju, beda mundur, dan beda pusat (Ross, 1984).

Adapun operator metode beda hingga menurut Strauss (2007) yaitu:
persamaan beda maju

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad (2.3)$$

persamaan beda mundur

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (2.4)$$

persamaan beda pusat

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.5)$$

Persamaan (2.3), (2.4), dan (2.5) dapat diperoleh dari ekspansi deret Taylor. Misalkan diberikan fungsi $u(x + \Delta x, t)$, $u(x - \Delta x, t)$, $u(x, t + \Delta t)$, $u(x, t - \Delta t)$ diaproksimasi ke dalam deret Taylor di sekitar $u(x, t)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) = & u(x, t) + u_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(x, t)\Delta x^2 \\ & + \frac{1}{6}u_{xxx}(x, t)\Delta x^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - u_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(x, t)\Delta x^2 \quad (2.7)$$

$$- \frac{1}{6}u_{xxx}(x, t)\Delta x^3 + \dots$$

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + u_t(x, t)\Delta t + \frac{1}{2}u_{tt}(x, t)\Delta t^2 \quad (2.8)$$

$$+ \frac{1}{6}u_{ttt}(x, t)\Delta t^3 + \dots$$

$$u(x, t - \Delta t) = u(x, t) - u_t(x, t)\Delta t + \frac{1}{2}u_{tt}(x, t)\Delta t^2 \quad (2.9)$$

$$- \frac{1}{6}u_{ttt}(x, t)\Delta t^3 + \dots$$

Turunan hampiran pertama terhadap x untuk beda maju, beda mundur, dan beda pusat dapat dilakukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor dari persamaan (2.6), (2.7), (2.8), dan (2.9) yang dipotong sampai orde tertentu. Turunan hampiran pertama terhadap x untuk beda pusat dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan (2.6) dengan persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) &= 2u_x(x, t)\Delta x - \frac{1}{6}u_{xxx}(x, t)\Delta x^3 + \dots \\ 2\Delta x u_x(x, t) &= u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) + \mathcal{O}(\Delta x)^3 \\ u_t(x, t) &= \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t)}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta x)^3 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Turunan hampiran pertama terhadap t untuk beda pusat dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan (2.8) dengan persamaan (2.9), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t) &= 2u_t(x, t)\Delta t - \frac{1}{6}u_{ttt}(x, t)\Delta t^3 + \dots \\ 2\Delta t u_t(x, t) &= u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)^3 \\ u_t(x, t) &= \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t)}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta x)^3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Jika digunakan indeks subskrip j untuk menyatakan titik diskrit pada arah x dan superskrip n untuk menyatakan titik diskrit pada arah t , maka persamaan (2.10) dan (2.11) dapat ditulis:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}$$

Adapun aproksimasi turunan kedua terhadap x untuk beda pusat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.6) dengan persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) &= 2u(x, t) - 2\frac{1}{2}u_{xx}(x, t)\Delta x^2 + \dots \\ u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) &= 2u(x, t) - u_{xx}(x, t)\Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \\ u_{xx}(x, t)\Delta x^2 &= u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t) + \mathcal{O}(\Delta t)^4 \\ u_{xx}(x, t) &= \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \end{aligned} \quad (2.12)$$

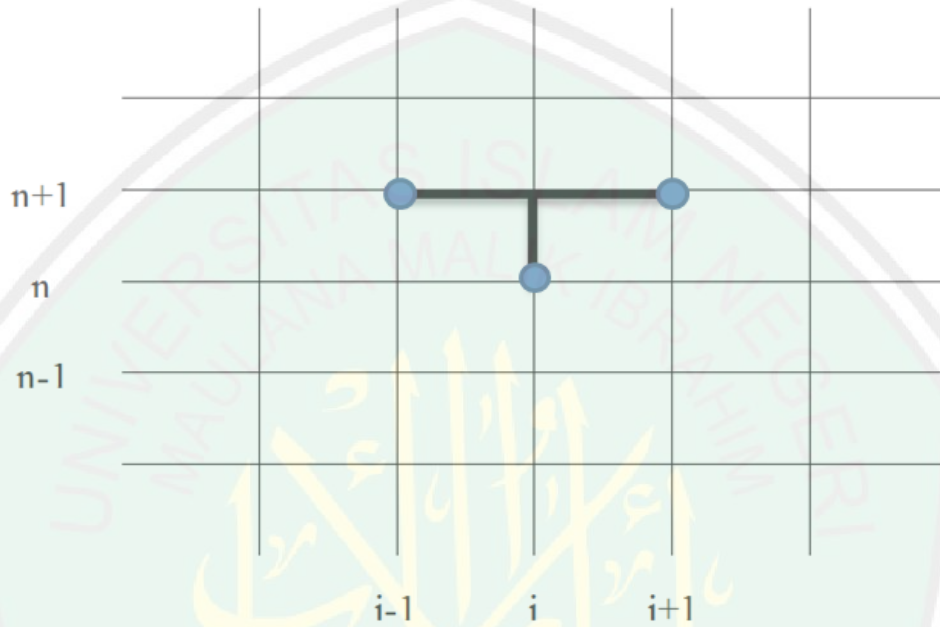
Jika digunakan indeks subskrip j untuk menyatakan titik diskrit pada arah x dan superskrip n untuk menyatakan titik diskrit pada arah t , maka persamaan (2.12) dapat ditulis:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.13)$$

2.2.1 Metode Beda Hingga Skema Implisit

Penyelesaian dengan menggunakan skema implisit lebih sulit dibandingkan dengan skema eksplisit. Tetapi skema implisit mempunyai kelebihan yang sangat penting yaitu bahwa skema tersebut stabil tanpa syarat. Langkah waktu Δt dapat diambil sembarang (besar) tanpa menimbulkan

ketidakstabilan. Pembatasan Δt hanya untuk menjaga kesalahan pemotongan (*truncation error*) dalam batas-batas yang dapat diterima. Berikut ini adalah contoh skema beda hingga implisit (Triatmodjo, 2002).



Gambar 2.2 Skema Implisit

Gambar 2.2 menunjukkan jaringan titik hitung dari skema implisit. Dari gambar tersebut, variabel di titik i pada waktu ke $n + 1$ dipengaruhi oleh variabel di titik i pada waktu ke n yang sudah diketahui nilainya serta variabel di titik $i - 1$ pada waktu ke $n + 1$ dan variabel di titik $i + 1$ pada waktu ke $n + 1$ yang belum diketahui nilainya.

Salah satu aproksimasi skema implisit dalam metode beda hingga adalah *Forward Time Central Space* (FTCS), yaitu aproksimasi yang menggunakan skema beda maju terhadap waktu dan skema beda pusat terhadap ruang. Oleh karena itu, dengan mensubstitusikan persamaan beda hingga skema implisit FTCS, secara umum persamaan tipe parabolik menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) &= 0 \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + f\left(x, u, \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}\right) &= 0\end{aligned}\quad (2.14)$$

2.3 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik terutama untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Persamaan deret Taylor dari $y = f(x)$ di sekitar x_0, y_0 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\end{aligned}\quad (2.15)$$

Asal dari persamaan (2.15) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots \\ f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + 4 \cdot 2a_4(x - x_0)^2 + \dots \\ f'''(x) &= 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 2a_4(x - x_0) + \dots \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$f^n(x) = n!(a_n) + (n+1)!a_{n+1}(x - x_0) + (n+2)!a_{n+2}(x - x_0)^2 + \dots$$

Kemudian, pada fungsi awal dan fungsi-fungsi turunan tersebut, jika ditetapkan $x = x_0$ maka:

$$\begin{aligned}f(x_0) &= a_0 \\ f'(x_0) &= a_1 \\ f''(x_0) &= 2!a_2\end{aligned}$$

$$f'''(x_0) = 3! a_3$$

$$\vdots$$

$$f^n(x_0) = n! a_n$$

Dengan memasukkan nilai a_0, a_1, a_2, a_3 dan seterusnya, maka deret Taylor pun terbukti seperti pada persamaan (2.15) (Purcell & Varberg, 1987).

Menurut Chapra dan Canale (1988) jika terdapat fungsi dari dua variabel independen u dan v , maka deret Taylor dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(u_{i+1}, v_{i+1}) &= f(u_i, v_i) + \frac{\partial f}{\partial u}(u_{i+1} - u_i) + \frac{\partial f}{\partial v}(v_{i+1} - v_i) \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} (u_{i+1} - u_i)^2 \right. \\ &+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} (u_{i+1} - u_i)(v_{i+1} - v_i) + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} (v_{i+1} - v_i)^2 \right] \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

dengan semua turunan parsial dihitung pada titik i . Jika semua suku orde-kedua dan yang lebih tinggi dibuang, maka persamaan (2.16) dapat dipecahkan untuk:

$$\Delta f(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| \Delta \tilde{u} + \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right| \Delta \tilde{v} \quad (2.17)$$

dengan $\tilde{u}$ dan $\tilde{v}$ masing-masing adalah taksiran galat-galat dalam u dan v .

Untuk n peubah bebas $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ yang mempunyai galat-galat $\Delta \tilde{x}_1, \Delta \tilde{x}_2, \dots, \Delta \tilde{x}_n$ berlaku hubungan umum berikut:

$$\Delta f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \cong \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta \tilde{x}_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta \tilde{x}_2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \Delta \tilde{x}_n \quad (2.18)$$

2.4 Kestabilan

Zauderer (2006) menyebutkan bahwa suatu permasalahan persamaan diferensial parsial dapat menjadi stabil dan tidak stabil. Suatu konsep kestabilan dan ketidakstabilan dapat diterapkan dalam skema beda hingga. Ketidakstabilan skema beda hingga menghasilkan kesalahan dalam aproksimasi numerik terhadap solusi nilai eksak dari masalah yang diberikan, sehingga solusi numerik kurang mendekati solusi eksak.

Salah satu metode untuk menganalisis kestabilan skema adalah stabilitas von Neumann. Stabilitas von Neumann di dekati dengan analisis forier, sehingga dengan menerapkan stabilitas von Neumann terhadap skema beda hingga, maka dapat dicari kestabilan dari persamaan beda dengan mensubstitusikan $U_j^n = \rho^n e^{iaj}$ ke dalam persamaan tersebut, yang mana superskrip i menunjukkan posisi, n menunjukkan waktu, j merupakan vector, dan untuk semua α dalam interval $[0, 2\pi]$. Syarat perlu dan cukup stabilitas von Neumann yaitu $|\rho| \leq 1$ (Zauderer, 2006).

2.5 Error atau Kesalahan (Galat)

Kesalahan numerik timbul dari penggunaan aproksimasi untuk menyatakan operasi dan besaran matematika yang pasti (Chapra dan Canale, 1988:56). Ada tiga macam kesalahan yaitu kesalahan bawaan, kesalahan pembulatan (*round-off error*), dan kesalahan pemotongan (*truncation error*) (Triatmodjo, 2002:2). Namun, dalam penelitian ini hanya ada kesalahan pembulatan dan kesalahan pemotongan.

Kesalahan pembulatan (*round-off error*) terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan. Kesalahan ini terjadi apabila bilangan perkiraan digunakan untuk menggantikan bilangan eksak (Triatmodjo, 2002:2-3). Dalam penelitian ini, kesalahan pembulatan terjadi pada saat perhitungan menggunakan program matlab dengan pembulatan 7 angka setelah koma.

Kesalahan pemotongan (*truncation error*) terjadi karena tidak dilakukannya perhitungan sesuai dengan prosedur matematik yang benar. Misalnya suatu proses tak berhingga diganti dengan proses berhingga. Dalam praktik, sulit diperhitungkan semua suku sampai tak berhingga. Apabila hanya diperhitungkan beberapa suku pertama saja, maka hasilnya tidak sama dengan solusi eksak. Kesalahan karena hanya memperhitungkan beberapa suku pertama disebut dengan kesalahan pemotongan (Triatmodjo, 2002:3). Dalam penelitian ini, kesalahan terjadi pada pemotongan orde pada penggunaan deret Taylor.

Salah satu tantangan metode numerik adalah menentukan taksiran galat tanpa mengetahui nilai sejatinya. Misalnya, metode numerik tertentu memakai pendekatan secara iterasi untuk menghitung jawaban. Dalam pendekatan yang demikian, suatu aproksimasi dibuat berdasarkan aproksimasi sebelumnya. Proses ini dilakukan secara berulang atau secara iterasi dengan maksud untuk menghitung hampiran yang lebih baik. Untuk kasus yang demikian, galat seringkali ditaksir sebagai selisih antara aproksimasi sebelumnya dengan aproksimasi sekarang. Jadi, persen galat relatifnya adalah:

$$\varepsilon_a = \frac{\text{hampiran sekarang} - \text{hampiran sebelumnya}}{\text{hampiran sekarang}} \times 100\% \quad (2.19)$$

Tanda-tanda pada nilai hampiran boleh positif atau negatif. Jika aproksimasinya (hampirannya) lebih besar daripada nilai sejati (aproksimasi sebelumnya lebih besar dari aproksimasi sekarang), maka galatnya negatif. Jika aproksimasinya lebih kecil daripada nilai sejati, maka galatnya positif. Hal ini juga berpengaruh pada penyebut yang mungkin lebih kecil dari nol yang juga akan menyebabkan galat yang negatif. Seringkali pada waktu melakukan komputasi, tanda galat tidak diperdulikan, tetapi lebih tertarik kepada apakah nilai mutlaknya lebih kecil daripada suatu toleransi ε_s yang telah ditetapkan sebelumnya. Oleh karena itu, seringkali berguna untuk menerapkan nilai mutlak untuk persamaan (2.19). Untuk kasus yang demikian, komputasi diulangi sampai:

$$|\varepsilon_a| < |\varepsilon_s| \quad (2.20)$$

Jika hubungan ini terus bertahan, hasilnya dianggap berada dalam tingkat penerimaan ε_s yang telah dirinci sebelumnya (Chapra & Canale, 1988:57-58).

2.6 Kajian Agama

Dalam surat al- Insyirah, Allah Swt. berfirman:

﴿فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا﴾

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (QS. Al-Insyirah /5:94).

Ayat ini pun diulang setelah itu,

﴿إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا﴾

“Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (QS. Al-Insyirah/6:94).

Mengenai ayat di atas, ada beberapa faedah yang diambil:

1. Di balik satu kesulitan, ada dua kemudahan

Kata “*al ‘usr* (kesulitan)” yang diulang dalam surat al-Insyirah hanyalah satu. *Al ‘usr* dalam ayat pertama sebenarnya sama dengan *al ‘usr* dalam ayat berikutnya karena keduanya menggunakan *isim ma’rifah* (seperti kata yang diawali alif-lam). Sebagaimana kaidah dalam bahasa Arab, “Jika *isim ma’rifah* diulang, maka kata yang kedua sama dengan kata yang pertama. Terserah apakah *isim ma’rifah* tersebut menggunakan *alif-lam jinsi* ataukah *alif-lam ‘ahdiyah*.” Intinya, *al ‘usr* (kesulitan) pada ayat pertama sama dengan *al ‘usr* (kesulitan) pada ayat kedua.

Sedangkan kata “*yusra* (kemudahan)” dalam surat al-Insyirah itu ada dua. *Yusro* (kemudahan) pertama berbeda dengan *yusra* (kemudahan) kedua karena keduanya menggunakan *isim nakirah* (seperti kata yang tidak diawali alif-lam). Sebagaimana kaidah dalam bahasa Arab, “Secara umum, jika *isim nakirah* itu diulang, maka kata yang kedua berbeda dengan kata yang pertama.” Dengan demikian, kemudahan itu ada dua karena berulang. Ini berarti ada satu kesulitan dan ada dua kemudahan.

Dari sini, para ulama pun seringkali mengatakan, “*Satu kesulitan tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan*”. Asal perkataan ini dari hadits yang lemah, namun maknanya benar. Jadi, di balik satu kesulitan ada dua kemudahan.

2. Akhir berbagai kesulitan adalah kemudahan

Syaikh ‘Abdurrahman bin Nashir As Sa’di mengatakan, kata *al ‘usr* (kesulitan) menggunakan *alif-lam* dan menunjukkan segala macam kesulitan. Hal ini menunjukkan bahwa bagaimana pun sulitnya, akhir dari setiap kesulitan adalah kemudahan”. Dari sini, dapat diambil pelajaran, “badai pastilah berlalu (*after a storm comes a calm*), yaitu setelah ada kesulitan pasti ada jalan keluar.”

3. Di balik kesulitan, ada kemudahan yang begitu dekat

Dalam ayat di atas, digunakan kata *ma'a*, yang asalnya bermakna “bersama”. Artinya, “kemudahan akan selalu menyertai kesulitan”. Oleh karena itu, para ulama seringkali mendeskripsikan, “Seandainya kesulitan itu memasuki lubang binatang dhab (yang berlika-liku dan sempit), kemudahan akan turut serta memasuki lubang itu dan akan mengeluarkan kesulitan tersebut”. Padahal lubang binatang dhab begitu sempit dan sulit untuk dilewati karena berlika-liku (zig-zag). Namun, kemudahan akan terus menemani kesulitan, walaupun di medan yang sesulit apapun.

Allah Swt. berfirman:

.... سَيَجْعَلُ اللَّهُ بَعْدَ عُسْرٍ يُسْرًا ۖ

“... Allah kelak akan memberikan kelapangan sesudah kesempitan.” (QS. Ath Thalaq/7:65).

Ibnul Jauziy, Asy Syaukani dan ahli tafsir lainnya mengatakan, “Setelah kesempitan dan kesulitan, akan ada kemudahan dan kelapangan”. Ibnu Katsir mengatakan, “Janji Allah itu pasti dan tidak mungkin Dia mengingkarinya”.

Ibnu Rajab telah mengisyaratkan hal ini. Beliau berkata, “Jika kesempitan itu semakin terasa sulit dan semakin berat, maka seorang hamba akan menjadi putus asa. Demikianlah keadaan makhluk yang tidak dapat keluar dari kesulitan. Akhirnya, ia pun menggantungkan hatinya pada Allah semata. Inilah hakikat tawakkal pada-Nya. Tawakkal inilah yang menjadi sebab terbesar keluar dari kesempitan yang ada. Karena Allah sendiri telah berjanji akan mencukupi orang yang bertawakkal pada-Nya”. Sebagaimana Allah Swt. berfirman:

.... وَمَنْ يَتَوَكَّلْ عَلَى اللَّهِ فَهُوَ حَسْبُهُ ۖ

“...dan barang siapa yang bertawakal kepada Allah niscaya Allah akan mencukupkan (keperluan) nya...” (QS. Ath Thalaq:3).

Inilah rahasia yang sebagian manusia mungkin belum mengetahuinya. Jadi intinya, tawakkallah yang menjadi sebab terbesar seseorang keluar dari kesulitan dan kesempitan.

Selain itu, menurut tafsir As Sa'dy dalam surat al-Ankabut ayat 69 yaitu:

وَالَّذِينَ جَاهَدُوا فِينَا لَنَهْدِيَنَّهُمْ سُبُلَنَا وَإِنَّ اللَّهَ لَمَعَ الْمُحْسِنِينَ ﴿٦٩﴾

“Dan orang-orang yang berjihad untuk (mencari keridhaan) Kami, benar-benar akan Kami tunjukkan kepada mereka jalan-jalan kami. Dan sesungguhnya Allah benar-benar beserta orang-orang yang berbuat baik” (QS. Al-Ankabut:69).

Ini menunjukkan bahwa orang yang paling pantas untuk diberi taufiq (kebenaran) adalah *ahlul jihad*. Bahwa siapa saja yang berbuat ihsan dalam hal yang diperintahkan maka Allah akan menolongnya dan Allah akan memudahkan baginya sebab-sebab mendapatkan hidayah. Bahwa siapa saja yang bersungguh-sungguh dan bersemangat dalam *thalabul ilmi syar'i* maka akan sampai kepadanya hidayah (petunjuk) dan pertolongan untuk mendapatkan apa yang diinginkan. Demikian ini adalah urusan dan kuasa Allah di luar jangkauan kesungguhannya dan Allah akan memudahkan baginya perkara ilmu, karena *thalabul ilmi syar'i* adalah termasuk *jihad fiisabilillah*. Bahkan salah satu dari dua macam jihad yang tidak akan dapat menegakkannya kecuali orang-orang khusus, yaitu :

- a. jihad dengan ucapan dan lisan menghadapi orang kafir dan munafik dan
- b. mengajarkan perkara-perkara agama serta membantah penyimpangannya orang-orang yang menyelisihi kebenaran walaupun mereka dari kalangan orang islam.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini, akan dijelaskan tentang bagaimana penyelesaian numerik persamaan Boussinesq menggunakan metode beda hingga skema implisit *Forward Time Central Space (FTCS)*. Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan persamaan Boussinesq adalah diskritisasi persamaan Boussinesq dan syarat awal dengan skema beda maju untuk turunan terhadap waktu t dan beda pusat untuk turunan terhadap ruang x .

3.1 Diskritisasi Persamaan

Persamaan Boussinesq yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + F \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{dh(x)}{dx} \right) + \epsilon F u(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

$$F \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + F^2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

dengan kondisi awal beserta parameter-parameternya yaitu:

$$\eta(x, 0) = 0 \quad u(x, 0) = \frac{1}{\epsilon}$$

$$F = 0,25 \quad F = 1,5$$

$$\Delta x = 0,15 \quad \Delta t = 0,015$$

$$\epsilon = 0,1$$

$$h(x) = 0,0015 - \frac{0,1}{((x - 28)^2 + 1)}$$

Namun untuk menyederhakan penulisan, selanjutnya $u(x, t)$, $\eta(x, t)$, dan $h(x)$ dapat ditulis sebagai u , η , dan h . Maka untuk persamaan (3.1) dan (3.2) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + F \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dh}{dx} \right) + \epsilon F u \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (3.3)$$

$$F \frac{\partial u}{\partial t} + F^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (3.4)$$

Persamaan (3.3) dan (3.4) didiskritisasikan dengan menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS (*Forward Time Center Space*), sehingga diperoleh diskritisasi persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t} + F \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \left(\frac{dh}{dx} \right)_j \right) + \epsilon F u_j^{n+1} \left(\frac{\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$F \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) + F^2 \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \frac{\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (3.6)$$

dengan $u_j^n \sim u(j\Delta x, n\Delta t)$ dan $\eta_j^n \sim \eta(j\Delta x, n\Delta t)$ (Strauss, 2007).

Persamaan (3.5) dan (3.6) dapat ditulis seperti berikut:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \eta_j^{n+1} - \frac{\eta_j^n}{\Delta t} + \frac{F}{2\Delta x} u_{j+1}^{n+1} - \frac{F}{2\Delta x} u_{j-1}^{n+1} + F \left(\frac{dh}{dx} \right)_j \\ + \frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^{n+1} \eta_{j+1}^{n+1} - \frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^{n+1} \eta_{j-1}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{F}{\Delta t} u_j^{n+1} + \frac{F^2}{2\Delta x} u_{j+1}^{n+1} - \frac{F^2}{2\Delta x} u_{j-1}^{n+1} + \frac{1}{2\Delta x} \eta_{j+1}^{n+1} - \frac{1}{2\Delta x} \eta_{j-1}^{n+1} \\ = \frac{F}{\Delta t} u_j^n \end{aligned} \quad (3.8)$$

Kelompokkan waktu $n + 1$ di ruas kiri dan waktu n di ruas kanan. Maka persamaan (3.7) dan (3.8) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \eta_j^{n+1} + \frac{F}{2\Delta x} u_{j+1}^{n+1} - \frac{F}{2\Delta x} u_{j-1}^{n+1} + \frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^{n+1} \eta_{j+1}^{n+1} - \frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^{n+1} \eta_{j-1}^{n+1} \\ = \frac{\eta_j^n}{\Delta t} - F \left(\frac{dh}{dx} \right)_j \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\frac{F}{\Delta t} u_j^{n+1} + \frac{F^2}{2\Delta x} u_{j+1}^{n+1} - \frac{F^2}{2\Delta x} u_{j-1}^{n+1} + \frac{1}{2\Delta x} \eta_{j+1}^{n+1} - \frac{1}{2\Delta x} \eta_{j-1}^{n+1} = \frac{F}{\Delta t} u_j^n \quad (3.10)$$

Berdasarkan hasil dari diskritisasi di atas, pada persamaan (3.9) terdapat suku nonlinier $u_j^{n+1} \eta_{j+1}^{n+1}$ dan $u_j^{n+1} \eta_{j-1}^{n+1}$. Jika hal ini dibiarkan, maka akan menghasilkan persamaan-persamaan nonlinier, sehingga akan menyebabkan banyak kesulitan saat perhitungan solusi masalah ini. Oleh karena itu, dengan mengikuti Feng dan Mitsui (1998), maka perlu dilakukan linierisasi menggunakan deret Taylor. Maka untuk suku nonlinier $u_j^{n+1} \eta_{j+1}^{n+1}$ dapat ditulis:

$$\begin{aligned} u(x, t + \Delta t) \eta(x + \Delta x, t + \Delta t) \\ = u(x, t) \eta(x + \Delta x, t) + \frac{\partial}{\partial t} (u(x, t) \eta(x + \Delta x, t)) (t \\ + \Delta t - t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sederhanakan persamaan (3.11), sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} u(x, t + \Delta t) \eta(x + \Delta x, t + \Delta t) \\ = u(x, t) \eta(x + \Delta x, t) \\ + \frac{\partial}{\partial t} (u(x, t) \eta(x + \Delta x, t)) (\Delta t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ubah persamaan (3.12) ke dalam bentuk indeks, sehingga menjadi:

$$u_j^{n+1} \eta_{j+1}^{n+1} = u_j^n \eta_{j+1}^n + \frac{\partial}{\partial t} (u_j^n \eta_{j+1}^n) \Delta t \quad (3.13)$$

Karena,

$$\frac{\partial}{\partial t} (u\eta) = \frac{\partial u}{\partial t} \eta + u \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Maka,

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_j^n \eta_{j+1}^n) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n (\eta_{j+1}^n) + u_j^n \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{j+1}^n \quad (3.14)$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (3.14) ke dalam persamaan (3.13), sehingga menjadi:

$$u_j^{n+1} \eta_{j+1}^{n+1} = u_j^n \eta_{j+1}^n + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n (\eta_{j+1}^n) + u_j^n \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{j+1}^n \right] \Delta t$$

Ubah $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n$ dan $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{j+1}^n$ ke dalam bentuk diskrit, sehingga menjadi:

$$u_j^{n+1} \eta_{j+1}^{n+1} = u_j^n \eta_{j+1}^n + \left[\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) \eta_{j+1}^n + u_j^n \left(\frac{\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j+1}^n}{\Delta t} \right) \right] \Delta t \quad (3.15)$$

Maka persamaan (3.15) dapat ditulis menjadi:

$$u_j^{n+1} \eta_{j+1}^{n+1} = \eta_{j+1}^n u_j^{n+1} + u_j^n \eta_{j+1}^{n+1} - u_j^n \eta_{j+1}^n \quad (3.16)$$

Untuk suku nonlinier $u_j^{n+1} \eta_{j+1}^{n+1}$ dengan dihampiri menggunakan deret Taylor orde satu di sekitar $u_j^n \eta_{j+1}^n$ dapat ditulis:

$$\begin{aligned} u(x, t + \Delta t) \eta(x - \Delta x, t + \Delta t) \\ = u(x, t) \eta(x - \Delta x, t) + \frac{\partial}{\partial t} (u(x, t) \eta(x - \Delta x, t)) (t + \Delta t - t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sederhanakan persamaan (3.17), sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} u(x, t + \Delta t) \eta(x - \Delta x, t + \Delta t) \\ = u(x, t) \eta(x - \Delta x, t) \\ + \frac{\partial}{\partial t} (u(x, t) \eta(x - \Delta x, t)) (\Delta t) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ubah ke dalam bentuk indeks, sehingga menjadi:

$$u_j^{n+1}\eta_{j-1}^{n+1} = u_j^n\eta_{j-1}^n + \frac{\partial}{\partial t}(u_j^n\eta_{j-1}^n)\Delta t \quad (3.19)$$

Karena,

$$\frac{\partial}{\partial t}(u\eta) = \frac{\partial u}{\partial t}\eta + u\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Maka,

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_j^n\eta_{j-1}^n) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n(\eta_{j-1}^n) + u_j^n\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{j-1}^n \quad (3.20)$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (3.20) ke dalam persamaan (3.19), sehingga menjadi:

$$u_j^{n+1}\eta_{j-1}^{n+1} = u_j^n\eta_{j-1}^n + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n(\eta_{j-1}^n) + u_j^n\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{j-1}^n\right]\Delta t$$

Ubah $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n$ dan $\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{j-1}^n$ ke bentuk diskrit, sehingga menjadi:

$$u_j^{n+1}\eta_{j-1}^{n+1} = u_j^n\eta_{j-1}^n + \left[\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}\right)\eta_{j-1}^n + u_j^n\left(\frac{\eta_{j-1}^{n+1} - \eta_{j-1}^n}{\Delta t}\right)\right]\Delta t \quad (3.21)$$

Maka persamaan (3.21) dapat ditulis menjadi:

$$u_j^{n+1}\eta_{j-1}^{n+1} = \eta_{j-1}^n u_j^{n+1} + u_j^n\eta_{j-1}^{n+1} - u_j^n\eta_{j-1}^n \quad (3.22)$$

Setelah itu, substitusikan persamaan (3.16) dan persamaan (3.22) ke dalam persamaan (3.9), sehingga menjadi:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \eta_j^{n+1} + \frac{F}{2\Delta x} u_{j+1}^{n+1} - \frac{F}{2\Delta x} u_{j-1}^{n+1} \\
& + \frac{\epsilon F}{2\Delta x} [\eta_{j+1}^n u_j^{n+1} + u_j^n \eta_{j+1}^{n+1} - u_j^n \eta_{j+1}^n] \\
& - \frac{\epsilon F}{2\Delta x} [\eta_{j-1}^n u_j^{n+1} + u_j^n \eta_{j-1}^{n+1} - u_j^n \eta_{j-1}^n] \\
& = \frac{\eta_j^n}{\Delta t} - F h_x(x_j)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Persamaan (3.23) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \eta_j^{n+1} + \frac{F}{2\Delta x} u_{j+1}^{n+1} - \frac{F}{2\Delta x} u_{j-1}^{n+1} + \frac{\epsilon F}{2\Delta x} \eta_{j+1}^n u_j^{n+1} + \frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^n \eta_{j+1}^{n+1} \\
& - \frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^n \eta_{j+1}^n - \frac{\epsilon F}{2\Delta x} \eta_{j-1}^n u_j^{n+1} - \frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^n \eta_{j-1}^{n+1} \\
& + \frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^n \eta_{j-1}^n = \frac{\eta_j^n}{\Delta t} - F h_x(x_j)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Kelompokkan waktu $n + 1$ di ruas kiri dan waktu n di ruas kanan. Maka persamaan (3.24) menjadi:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \eta_j^{n+1} + \frac{F}{2\Delta x} u_{j+1}^{n+1} - \frac{F}{2\Delta x} u_{j-1}^{n+1} + \frac{\epsilon F}{2\Delta x} \eta_{j+1}^n u_j^{n+1} + \frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^n \eta_{j+1}^{n+1} \\
& - \frac{\epsilon F}{2\Delta x} \eta_{j-1}^n u_j^{n+1} - \frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^n \eta_{j-1}^{n+1} \\
& = \frac{\eta_j^n}{\Delta t} - F h_x(x_j) + \frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^n \eta_{j+1}^n - \frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^n \eta_{j-1}^n
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Persamaan (3.25) dapat ditulis menjadi berikut:

$$\begin{aligned}
& -\frac{F}{2\Delta x} u_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{\epsilon F}{2\Delta x} \eta_{j+1}^n - \frac{\epsilon F}{2\Delta x} \eta_{j-1}^n \right) u_j^{n+1} + \frac{F}{2\Delta x} u_{j+1}^{n+1} \\
& - \frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^n \eta_{j-1}^{n+1} + \frac{1}{\Delta t} \eta_j^{n+1} + \frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^n \eta_{j+1}^{n+1} \\
& = \left(\frac{\epsilon F}{2\Delta x} \eta_{j+1}^n - \frac{\epsilon F}{2\Delta x} \eta_{j-1}^n \right) u_j^n + \frac{\eta_j^n}{\Delta t} - F h_x(x_j)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Misalkan bahwa:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{F}{2\Delta x} & a_2 &= -\frac{F^2}{2\Delta x} \\
b_1 &= \left(\frac{\epsilon F}{2\Delta x} \eta_{j+1}^n - \frac{\epsilon F}{2\Delta x} \eta_{j-1}^n \right) & b_2 &= \frac{F}{\Delta t} \\
c_1 &= \frac{F}{2\Delta x} & c_2 &= \frac{F^2}{2\Delta x} \\
d_1 &= -\frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^n & d_2 &= -\frac{1}{2\Delta x} \\
e_1 &= \frac{1}{\Delta t} & f_2 &= \frac{1}{2\Delta x} \\
f_1 &= \frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^n & g_2 &= \frac{F}{\Delta t} u_j^n \\
g_1 &= \left(\frac{\epsilon F}{2\Delta x} \eta_{j+1}^n - \frac{\epsilon F}{2\Delta x} \eta_{j-1}^n \right) u_j^n + \frac{\eta_j^n}{\Delta t} - F h_x(x_j)
\end{aligned}$$

Maka hasil diskritisasi pada persamaan (3.10) dan (3.26), menjadi:

$$a_1 u_{j-1}^{n+1} + b_1 u_j^{n+1} + c_1 u_{j+1}^{n+1} + d_1 \eta_{j-1}^{n+1} + e_1 \eta_j^{n+1} + f_1 \eta_{j+1}^{n+1} = g_1 \quad (3.27)$$

$$a_2 u_{j-1}^{n+1} + b_2 u_j^{n+1} + c_2 u_{j+1}^{n+1} + d_2 \eta_{j-1}^{n+1} + f_2 \eta_{j+1}^{n+1} = g_2 \quad (3.28)$$

3.2 Diskritisasi Syarat Awal dan Syarat Batas

Hasil dari diskritisasi pada subbab di atas, selanjutnya dimasukkan nilai awal dengan syarat:

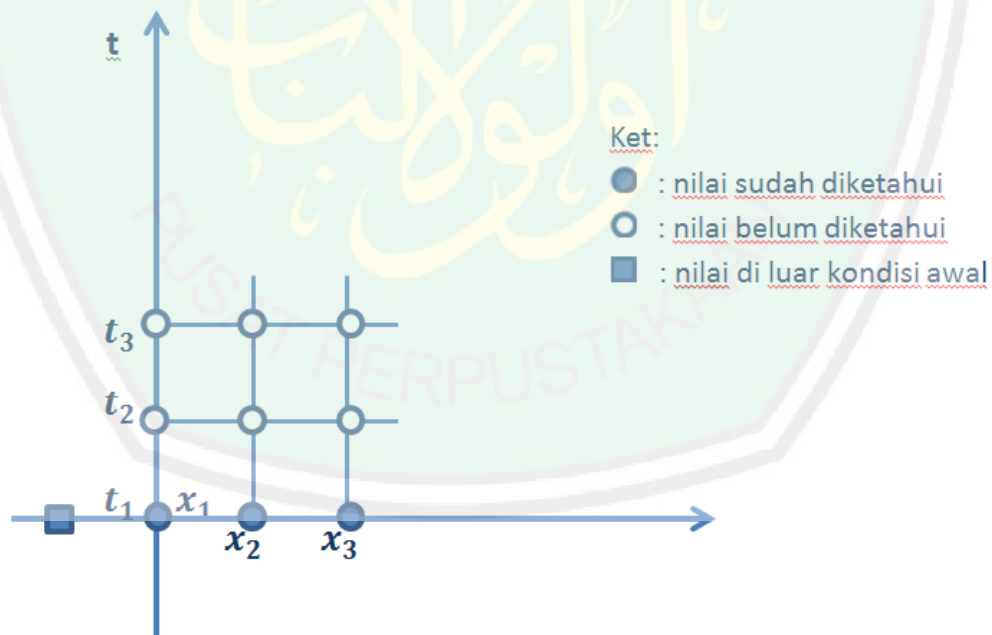
$$\eta(x, 0) = \eta_j^1 = 0 \quad F = 0,25$$

$$u(x, 0) = u_j^1 = \frac{1}{\epsilon} \quad \Delta x = 0,15$$

$$\Delta t = 0,015 \quad \epsilon = 0,1$$

$$h_x(x_j) = \frac{2x_j - 56}{\left(10 \left((x_j - 28)^2 + 1\right)^2\right)}$$

Fungsi $h(x)$ merupakan fungsi gundukan yang berlaku pada saat $x \in [20, 35]$ dan akan bernilai 0 untuk selain $x \in [20, 35]$. Selanjutnya substitusikan syarat awal untuk mencari nilai u dan nilai η yang belum diketahui. Nilai yang belum diketahui, akan dicari menggunakan nilai yang sudah diketahui sebelumnya. Maka untuk persamaan (3.27) dan (3.28) dapat dijelaskan dalam Gambar 3.1, dengan ● adalah nilai yang sudah diketahui berdasarkan kondisi awal yang diberikan. Karena suku dengan indeks terkecil adalah u_{j-1}^{n+1} , maka $\forall n = 1, 2, 3, \dots, N-1$ serta $\forall j = 2, 3, \dots, N-1$. Untuk indeks j dimulai dari 2, karena jika dimulai dari 1 maka suku terkecil tersebut akan menjadi u_0^{n+1} . Hal ini akan memunculkan nilai di luar domain. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada ilustrasi skema berikut ini:



Gambar 3.1 Skema Nilai u dan Nilai η

Persamaan (3.27) dan (3.28) juga dapat dijelaskan dalam Tabel 3.1 dan Tabel 3.2 dengan nilai yang sudah diketahui sesuai kondisi awal yang diberikan. Maka untuk mengisi nilai yang belum diketahui, digunakan persamaan (3.27) dan

(3.28) dengan $\forall n = 1, 2, 3, \dots, N - 1$ serta $\forall j = 2, 3, \dots, N - 1$. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Tabel 3.1 dan Tabel 3.2 di bawah ini:

Tabel 3.1 Nilai u

$u(x, t)$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	...	$n = N$
$j = 1$	$\frac{1}{\epsilon}$	*	**	...	**.. $(N - 1)$
$j = 2$	$\frac{1}{\epsilon}$	u_2^2	u_2^3	...	u_2^N
$j = 3$	$\frac{1}{\epsilon}$	u_3^2	u_3^3	...	u_3^N
$j = 4$	$\frac{1}{\epsilon}$	u_4^2	u_4^3	...	u_4^N
$j = 5$	$\frac{1}{\epsilon}$	u_5^2	u_5^3	...	u_5^N
$j = 6$	$\frac{1}{\epsilon}$	u_6^2	u_6^3	...	u_6^N
$j = 7$	$\frac{1}{\epsilon}$	u_7^2	u_7^3	...	u_7^N
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$j = M$	$\frac{1}{\epsilon}$	#	##	...	##.. $(N - 1)$

Tabel 3.2 Nilai η

$\eta(x, t)$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	...	$n = N$
$j = 1$	0	\$	\$\$	...	\$\$.. $(N - 1)$
$j = 2$	0	η_2^2	η_2^3	...	η_2^N
$j = 3$	0	η_3^2	η_3^3	...	η_3^N
$j = 4$	0	η_4^2	η_4^3	...	η_4^N
$j = 5$	0	η_5^2	η_5^3	...	η_5^N
$j = 6$	0	η_6^2	η_6^3	...	η_6^N
$j = 7$	0	η_7^2	η_7^3	...	η_7^N
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$j = M$	0	@	@@	...	@@.. $(N - 1)$

Oleh karena itu, untuk $n = 1$ dan $j = 2$ diperoleh bentuk persamaan (3.27) dan (3.28) yaitu:

$$a_1 u_1^2 + b_1 u_2^2 + c_1 u_3^2 + d_1 \eta_1^2 + e_1 \eta_2^2 + f_1 \eta_3^2 = g_1$$

$$a_2 u_1^2 + b_2 u_2^2 + c_2 u_3^2 + d_2 \eta_1^2 + f_2 \eta_3^2 = g_2$$

Namun muncul masalah baru yaitu nilai u_1^2 dan η_1^2 merupakan nilai yang terdapat pada batas kiri yang nilainya belum diketahui. Hal ini juga berlaku untuk nilai pada batas kanan u dan η . Maka untuk mencari nilai pada kondisi batas tersebut baik kiri maupun kanan perlu dilakukan ekstrapolasi linier. Ekstrapolasi linier tersebut menggunakan deret Taylor orde satu. Pada tabel u , nilai yang akan dicari adalah nilai pada batas kiri dan batas kanannya yaitu $u_1^2, u_1^3, u_1^4, \dots, u_1^N$ dan $u_M^2, u_M^3, u_M^4, \dots, u_M^N$. Untuk batas kirinya, nilai tersebut berada pada $j = 1$ dan $n = 1..N$, sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$u(x, t + \Delta t) \approx u(x + \Delta x, t) + \frac{\partial}{\partial x} u(x + \Delta x, t)(-\Delta x) + \frac{\partial}{\partial t} u(x + \Delta x, t)(\Delta t) \quad (3.29)$$

Lakukan penurunan menggunakan skema beda maju untuk turunan terhadap waktu t dan beda pusat untuk turunan terhadap ruang x , sehingga persamaan (3.29) menjadi:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x + \Delta x, t) + \frac{u(x + 2\Delta x, t) - u(x, t)}{2\Delta x}(-\Delta x) + \frac{u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x + \Delta x, t)}{\Delta t}(\Delta t) \quad (3.30)$$

Ubah persamaan (3.30) ke dalam bentuk indeks, sehingga menjadi:

$$u_j^{n+1} = u_{j+1}^n + \left(\frac{u_{j+2}^n - u_j^n}{2\Delta x} \right)(-\Delta x) + \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} \right)(\Delta t) \quad (3.31)$$

Maka persamaan (3.31) dapat ditulis menjadi:

$$u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1} = -\frac{u_{j+2}^n}{2} + \frac{u_j^n}{2} \quad (3.32)$$

Untuk batas kanannya, nilai pada tabel u tersebut berada pada $j = M$ dan $n = 1..N$, sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$u(x, t + \Delta t) \approx u(x - \Delta x, t) + \frac{\partial}{\partial x} u(x - \Delta x, t)(\Delta x) + \frac{\partial}{\partial t} u(x - \Delta x, t)(\Delta t) \quad (3.33)$$

Lakukan penurunan menggunakan skema beda maju untuk turunan terhadap waktu t dan beda pusat untuk turunan terhadap ruang x , sehingga persamaan (3.33) menjadi:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x - \Delta x, t) + \frac{u(x, t) - u(x - 2\Delta x, t)}{2\Delta x}(\Delta x) + \frac{u(x - \Delta x, t + \Delta t) - u(x - \Delta x, t)}{\Delta t}(\Delta t) \quad (3.34)$$

Ubah persamaan (3.34) ke dalam bentuk indeks, sehingga menjadi:

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n + \left(\frac{u_j^n - u_{j-2}^n}{2\Delta x} \right)(\Delta x) + \left(\frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{\Delta t} \right)(\Delta t) \quad (3.35)$$

Maka persamaan (3.35) dapat ditulis menjadi:

$$-u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1} = \frac{u_j^n}{2} - \frac{u_{j-2}^n}{2} \quad (3.36)$$

Hal yang sama juga dilakukan untuk tabel η pada kondisi batas kiri dan batas kanannya. Pada tabel η , nilai yang akan dicari adalah $\eta_1^2, \eta_1^3, \eta_1^4, \dots, \eta_1^N$ untuk batas kirinya dan $\eta_M^2, \eta_M^3, \eta_M^4, \dots, \eta_M^N$ untuk batas kanannya. Untuk batas kirinya, nilai tersebut berada pada $j = 1$ dan $n = 1..N$, sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$\eta(x, t + \Delta t) \approx \eta(x + \Delta x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \eta(x + \Delta x, t)(-\Delta x) + \frac{\partial}{\partial t} \eta(x + \Delta x, t)(\Delta t) \quad (3.37)$$

Lakukan penurunan menggunakan skema beda maju untuk turunan terhadap waktu t dan beda pusat untuk turunan terhadap ruang x , sehingga persamaan (3.37) menjadi:

$$\eta(x, t + \Delta t) = \eta(x + \Delta x, t) + \frac{\eta(x + 2\Delta x, t) - \eta(x, t)}{2\Delta x}(-\Delta x) + \frac{\eta(x + \Delta x, t + \Delta t) - \eta(x + \Delta x, t)}{\Delta t}(\Delta t) \quad (3.38)$$

Ubah persamaan (3.38) ke dalam bentuk indeks, sehingga menjadi:

$$\eta_j^{n+1} = \eta_{j+1}^n + \left(\frac{\eta_{j+2}^n - \eta_j^n}{2\Delta x} \right)(-\Delta x) + \left(\frac{\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j+1}^n}{\Delta t} \right)(\Delta t) \quad (3.39)$$

Maka persamaan (3.39) dapat ditulis menjadi:

$$\eta_j^{n+1} - \eta_{j+1}^{n+1} = -\frac{\eta_{j+2}^n}{2} + \frac{\eta_j^n}{2} \quad (3.40)$$

Untuk batas kanannya, nilai pada tabel u tersebut berada pada $j = M$ dan $n = 1..N$, sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$\eta(x, t + \Delta t) \approx \eta(x - \Delta x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \eta(x - \Delta x, t)(\Delta x) + \frac{\partial}{\partial t} \eta(x - \Delta x, t)(\Delta t) \quad (3.41)$$

Lakukan penurunan menggunakan skema beda maju untuk turunan terhadap waktu t dan beda pusat untuk turunan terhadap ruang x , sehingga persamaan (3.41) menjadi:

$$\begin{aligned} \eta(x, t + \Delta t) = & \eta(x - \Delta x, t) + \frac{\eta(x, t) - \eta(x - 2\Delta x, t)}{2\Delta x} (\Delta x) \\ & + \frac{\eta(x - \Delta x, t + \Delta t) - \eta(x - \Delta x, t)}{\Delta t} (\Delta t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ubah persamaan (3.42) ke dalam bentuk indeks, sehingga menjadi:

$$\eta_j^{n+1} = \eta_{j-1}^n + \left(\frac{\eta_j^n - \eta_{j-2}^n}{2\Delta x} \right) (\Delta x) + \left(\frac{\eta_{j-1}^{n+1} - \eta_{j-1}^n}{\Delta t} \right) (\Delta t) \quad (3.43)$$

Maka persamaan (3.43) dapat ditulis menjadi:

$$-\eta_{j-1}^{n+1} + \eta_j^{n+1} = \frac{\eta_j^n}{2} - \frac{\eta_{j-2}^n}{2} \quad (3.44)$$

Misalkan bahwa:

$$\begin{aligned} g_3 &= -\frac{u_{j+2}^n}{2} + \frac{u_j^n}{2} & g_4 &= \frac{u_j^n}{2} - \frac{u_{j-2}^n}{2} \\ g_5 &= -\frac{\eta_{j+2}^n}{2} + \frac{\eta_j^n}{2} & g_6 &= \frac{\eta_j^n}{2} - \frac{\eta_{j-2}^n}{2} \end{aligned}$$

Maka hasil ekstrapolasi pada persamaan (3.32), (3.36), (3.40), dan (3.44) menjadi:

$$u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1} = g_3 \quad (3.45)$$

$$-u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1} = g_4 \quad (3.46)$$

$$\eta_j^{n+1} - \eta_{j+1}^{n+1} = g_5 \quad (3.47)$$

$$-\eta_{j-1}^{n+1} + \eta_j^{n+1} = g_6 \quad (3.48)$$

Hasil di atas merupakan kondisi batas dari persamaan Boussinesq yaitu persamaan (3.45) dan (3.47) sebagai batas kiri, sedangkan persamaan (3.46) dan (3.48) sebagai batas kanan. Maka untuk $j = 1$ dan $n = 1$ sampai $n = N - 1$ pada batas kirinya diperoleh:

$$u_1^2 - u_2^2 = g_3$$

$$\eta_1^2 - \eta_2^2 = g_5$$

Untuk batas kananya dengan $j = M$ dan $n = 1$ sampai $n = N - 1$ diperoleh:

$$-u_{M-1}^2 + u_M^2 = g_4$$

$$-\eta_{M-1}^2 + \eta_M^2 = g_6$$

Selanjutnya untuk $n = 1$ dan $j = 2$ pada persamaan (3.27) dan persamaan (3.28) diperoleh:

$$a_1 u_1^2 + b_1 u_2^2 + c_1 u_3^2 + d_1 \eta_1^2 + e_1 \eta_2^2 + f_1 \eta_3^2 = g_1$$

$$a_2 u_1^2 + b_2 u_2^2 + c_2 u_3^2 + d_2 \eta_1^2 + f_2 \eta_3^2 = g_2$$

Untuk $n = 1$ dan $j = 3$ pada persamaan (3.27) dan persamaan (3.28) diperoleh:

$$a_1 u_2^2 + b_1 u_3^2 + c_1 u_4^2 + d_1 \eta_2^2 + e_1 \eta_3^2 + f_1 \eta_4^2 = g_1$$

$$a_2 u_2^2 + b_2 u_3^2 + c_2 u_4^2 + d_2 \eta_2^2 + f_2 \eta_4^2 = g_2$$

Untuk $n = 1$ dan $j = 4$ pada persamaan (3.27) dan persamaan (3.28) diperoleh:

$$a_1 u_3^2 + b_1 u_4^2 + c_1 u_5^2 + d_1 \eta_3^2 + e_1 \eta_4^2 + f_1 \eta_5^2 = g_1$$

$$a_2 u_3^2 + b_2 u_4^2 + c_2 u_5^2 + d_2 \eta_3^2 + f_2 \eta_5^2 = g_2$$

Untuk $n = 1$ dan $j = 5$ pada persamaan (3.27) dan persamaan (3.28) diperoleh:

$$a_1 u_4^2 + b_1 u_5^2 + c_1 u_6^2 + d_1 \eta_4^2 + e_1 \eta_5^2 + f_1 \eta_6^2 = g_1$$

$$a_2 u_4^2 + b_2 u_5^2 + c_2 u_6^2 + d_2 \eta_4^2 + f_2 \eta_6^2 = g_2$$

Untuk memudahkan perhitungan, kelompokkan terlebih dahulu persamaan-persamaan di atas menjadi seperti berikut:

$$u_1^2 - u_2^2 = g_3$$

$$a_1 u_1^2 + b_1 u_2^2 + c_1 u_3^2 + d_1 \eta_1^2 + e_1 \eta_2^2 + f_1 \eta_3^2 = g_1$$

$$a_1 u_2^2 + b_1 u_3^2 + c_1 u_4^2 + d_1 \eta_2^2 + e_1 \eta_3^2 + f_1 \eta_4^2 = g_1$$

$$a_1 u_3^2 + b_1 u_4^2 + c_1 u_5^2 + d_1 \eta_3^2 + e_1 \eta_4^2 + f_1 \eta_5^2 = g_1$$

$$a_1 u_4^2 + b_1 u_5^2 + c_1 u_6^2 + d_1 \eta_4^2 + e_1 \eta_5^2 + f_1 \eta_6^2 = g_1$$

$$\vdots$$

$$-u_{M-1}^2 + u_M^2 = g_4$$

$$\eta_1^2 - \eta_2^2 = g_5$$

$$a_2 u_1^2 + b_2 u_2^2 + c_2 u_3^2 + d_2 \eta_1^2 + f_2 \eta_3^2 = g_2$$

$$a_2 u_2^2 + b_2 u_3^2 + c_2 u_4^2 + d_2 \eta_2^2 + f_2 \eta_4^2 = g_2$$

$$a_2 u_3^2 + b_2 u_4^2 + c_2 u_5^2 + d_2 \eta_3^2 + f_2 \eta_5^2 = g_2$$

$$a_2 u_4^2 + b_2 u_5^2 + c_2 u_6^2 + d_2 \eta_4^2 + f_2 \eta_6^2 = g_2$$

$$\vdots$$

$$-\eta_{M-1}^2 + \eta_M^2 = g_6$$

Iterasi dilakukan sebanyak M . Untuk mempermudah perhitungan, persamaan di atas diubah ke dalam bentuk matriks seperti berikut ini:

$$AX = B \quad (3.49)$$

dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_1 & e_1 & f_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & d_1 & e_1 & f_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & e_1 & f_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & e_1 & f_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & e_1 & f_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_2 & 0 & f_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & d_2 & 0 & f_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 & 0 & f_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 & 0 & f_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

yang merupakan matriks tridiagonal berukuran $2M \times 2M$ dengan M merupakan panjang x dan

$$X = \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^3 \\ u_5^2 \\ u_6^2 \\ \vdots \\ u_M^2 \\ \eta_1^2 \\ \eta_2^2 \\ \eta_3^2 \\ \eta_4^2 \\ \eta_5^2 \\ \eta_6^2 \\ \vdots \\ \eta_M^2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} g_3 \\ g_1 \\ g_1 \\ g_1 \\ g_1 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_4 \\ g_5 \\ g_2 \\ g_2 \\ g_2 \\ g_2 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_6 \end{bmatrix}$$

yang merupakan matriks berukuran $2M \times 1$.

Kalikan kedua ruas dengan A^{-1} , sehingga persamaan (3.49) menjadi:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \quad (3.50)$$

Karena $A^{-1}A = I$, maka persamaan (3.50) menjadi:

$$X = A^{-1}B \quad (3.51)$$

Iterasi dilanjutkan sampai ke- N dengan menggunakan cara yang sama.

Penyelesaian dilakukan menggunakan bantuan program MATLAB R2010a, untuk memudahkan perhitungan.

3.3 Analisis Kestabilan

Untuk mengetahui apakah metode yang digunakan stabil atau tidak, maka akan dilakukan analisis kestabilan von Neumann dengan cara mensubstitusikan $u_j^n = p^n e^{iaj}$, $\eta_j^n = q^n e^{iaj}$ dan $i = \sqrt{-1}$ pada persamaan yang telah didiskritkan. Akan tetapi, analisis kestabilan von Neumann hanya dapat digunakan untuk persamaan diferensial linier, sedangkan persamaan Boussinesq merupakan sistem

persamaan diferensial parsial nonlinier. Maka dengan mengikuti Feng dan Mitsui (1998), persamaan (3.3) harus diubah menjadi persamaan linier dengan mengubah $u\eta_x$ menjadi $\bar{u}\eta_x$, $\bar{u} = \max |u|$, sehingga persamaan (3.3) dan (3.4) menjadi:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + F \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dh}{dx} \right) + \epsilon F \bar{u} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (3.52)$$

$$F \frac{\partial u}{\partial t} + F^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (3.53)$$

Persamaan (3.52) dan (3.53) dapat ditulis:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + F \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon F \bar{u} \frac{\partial \eta}{\partial x} = F \frac{dh}{dx} \quad (3.54)$$

$$F \frac{\partial u}{\partial t} + F^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (3.55)$$

Persamaan (3.54) dan (3.55) didiskritkan menggunakan skema FTCS implisit menjadi:

$$\frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t} + F \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \epsilon F \bar{u} \left(\frac{\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) = -F h_x \quad (3.56)$$

$$F \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) + F^2 \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \frac{\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (3.57)$$

Persamaan (3.56) dan (3.57) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{1}{\Delta t} (\eta_j^{n+1} - \eta_j^n) + \frac{F}{2\Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + \frac{\epsilon F \bar{u}}{2\Delta x} (\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}) = -F h_x \quad (3.58)$$

$$\frac{F}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{F^2}{2\Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + \frac{1}{2\Delta x} (\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}) = 0 \quad (3.59)$$

Substitusikan $u_j^n = p^n e^{iaj}$ dan $\eta_j^n = q^n e^{iaj}$ dengan $i = \sqrt{-1}$. Maka persamaan (3.58) dan (3.59) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (q^{n+1} e^{iaj} - q^n e^{iaj}) + \frac{F}{2\Delta x} (p^{n+1} e^{ia(j+1)} - p^{n+1} e^{ia(j-1)}) \\ + \frac{\epsilon F \bar{u}}{2\Delta x} (q^{n+1} e^{ia(j+1)} - q^{n+1} e^{ia(j-1)}) = -F h_x \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{F}{\Delta t} (p^{n+1} e^{iaj} - p^n e^{iaj}) + \frac{F^2}{2\Delta x} (p^{n+1} e^{ia(j+1)} - p^{n+1} e^{ia(j-1)}) \\ + \frac{1}{2\Delta x} (q^{n+1} e^{ia(j+1)} - q^{n+1} e^{ia(j-1)}) = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Bagi persamaan (3.60) dan (3.61) dengan e^{iaj} untuk mendapatkan persamaan yang lebih sederhana, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (q^{n+1} - q^n) + \frac{F}{2\Delta x} (p^{n+1} e^{ia} - p^{n+1} e^{-ia}) \\ + \frac{\epsilon F \bar{u}}{2\Delta x} (q^{n+1} e^{ia} - q^{n+1} e^{-ia}) = -e^{-iaj} F h_x \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{F}{\Delta t} (p^{n+1} - p^n) + \frac{F^2}{2\Delta x} (p^{n+1} e^{ia} - p^{n+1} e^{-ia}) \\ + \frac{1}{2\Delta x} (q^{n+1} e^{ia} - q^{n+1} e^{-ia}) = 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Sederhanakan persamaan (3.62) dan (3.63), sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (q^{n+1} - q^n) + \frac{F}{2\Delta x} (e^{ia} - e^{-ia}) p^{n+1} + \frac{\epsilon F \bar{u}}{2\Delta x} (e^{ia} - e^{-ia}) q^{n+1} \\ = -e^{-iaj} F h_x \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\frac{F}{\Delta t} (p^{n+1} - p^n) + \frac{F^2}{2\Delta x} (e^{ia} - e^{-ia}) p^{n+1} + \frac{1}{2\Delta x} (e^{ia} - e^{-ia}) q^{n+1} = 0 \quad (3.65)$$

Karena $e^{ia} - e^{-ia} = (\cos a + i \sin a) - (\cos a - i \sin a) = 2 i \sin a$, maka persamaan (3.64) dan (3.65) menjadi:

$$\frac{1}{\Delta t} (q^{n+1} - q^n) + \frac{2iF \sin a}{2\Delta x} p^{n+1} + \frac{2i\epsilon F \bar{u} \sin a}{2\Delta x} q^{n+1} = -e^{-iaj} F h_x \quad (3.66)$$

$$\frac{F}{\Delta t} (p^{n+1} - p^n) + \frac{2iF^2 \sin a}{2\Delta x} p^{n+1} + \frac{2 i \sin a}{2\Delta x} q^{n+1} = 0 \quad (3.67)$$

Letakkan suku q^n dan p^n pada ruas kanan, sehingga diperoleh:

$$\frac{1}{\Delta t} q^{n+1} + \frac{2iF \sin a}{2\Delta x} p^{n+1} + \frac{2i\epsilon F \bar{u} \sin a}{2\Delta x} q^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} q^n - e^{-iaj} F h_x \quad (3.68)$$

$$\frac{F}{\Delta t} p^{n+1} + \frac{2iF^2 \sin a}{2\Delta x} p^{n+1} + \frac{2i \sin a}{2\Delta x} q^{n+1} = \frac{F}{\Delta t} p^n \quad (3.69)$$

Kalikan persamaan pertama dengan Δt dan persamaan kedua dengan $\frac{\Delta t}{F}$ untuk menyederhanakan persamaan (3.68) dan (3.69), sehingga menjadi:

$$i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin(a) p^{n+1} + \left(1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} \epsilon F \bar{u} \sin(a)\right) q^{n+1} = q^n - \Delta t e^{-iaj} F h_x \quad (3.70)$$

$$\left(1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin(a)\right) p^{n+1} + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F^{-1} \sin(a) q^{n+1} = p^n \quad (3.71)$$

Ubah persamaan (3.70) dan (3.71) ke dalam bentuk matriks, sehingga menjadi:

$$\begin{bmatrix} i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a & 1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} \epsilon F \bar{u} \sin a \\ 1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a & i \frac{\Delta t}{\Delta x} F^{-1} \sin a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^{n+1} \\ q^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^n \\ q^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Delta t e^{-iaj} F h_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Definisikan bahwa:

$$A = \begin{bmatrix} i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a & 1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} \epsilon F \bar{u} \sin a \\ 1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a & i \frac{\Delta t}{\Delta x} F^{-1} \sin a \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -\Delta t e^{-iaj} F h_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka persamaan (3.72) menjadi:

$$A \begin{bmatrix} p^{n+1} \\ q^{n+1} \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} p^n \\ q^n \end{bmatrix} + R \quad (3.73)$$

Kalikan A^{-1} di kedua ruas, sehingga menjadi:

$$A^{-1}A \begin{bmatrix} p^{n+1} \\ q^{n+1} \end{bmatrix} = A^{-1}Q \begin{bmatrix} p^n \\ q^n \end{bmatrix} + A^{-1}R \quad (3.74)$$

Karena $A^{-1}A = I$, maka persamaan (3.74) menjadi:

$$\begin{bmatrix} p^{n+1} \\ q^{n+1} \end{bmatrix} = A^{-1}Q \begin{bmatrix} p^n \\ q^n \end{bmatrix} + A^{-1}R \quad (3.75)$$

dengan:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \quad (3.76)$$

Misalkan bahwa $A = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{bmatrix}$, dengan:

$$\begin{aligned} w_1 &= i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a \\ w_2 &= 1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} \epsilon F \bar{u} \sin a \\ w_3 &= 1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a \\ w_4 &= i \frac{\Delta t}{\Delta x} F^{-1} \sin a \end{aligned} \quad (3.77)$$

Terlebih dahulu hitung:

$$\det(A) = w_1 w_4 - w_2 w_3 \quad (3.78)$$

Masukkan persamaan (3.77) ke dalam persamaan (3.78), sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \left(i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a \right) \left(i \frac{\Delta t}{\Delta x} F^{-1} \sin a \right) \\ &\quad - \left(1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} \epsilon F \bar{u} \sin a \right) \left(1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a \right) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Selesaikan persamaan (3.79) sedemikian hingga menjadi:

$$\det(A) = -1 - i \frac{\Delta t}{\Delta x} F (1 + \epsilon \bar{u}) \sin a - (1 - \epsilon F^2 \bar{u}) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a \quad (3.80)$$

Persamaan (3.80) dapat ditulis:

$$\det(A) = |A| = - \left[1 + (1 - \epsilon F^2 \bar{u}) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a \right] - i F (1 + \epsilon \bar{u}) \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a \quad (3.81)$$

Kemudian untuk:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} w_4 & -w_2 \\ -w_3 & w_1 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Masukkan persamaan (3.77) ke persamaan (3.82), sehingga menjadi:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} i \frac{\Delta t}{\Delta x} F^{-1} \sin a & - \left(1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} \epsilon F \bar{u} \sin a \right) \\ - \left(1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a \right) & i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Gunakan persamaan (3.81) dan (3.83) untuk mencari A^{-1} , sehingga diperoleh:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} i \frac{\Delta t}{\Delta x} F^{-1} \sin a & - \left(1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} \epsilon F \bar{u} \sin a \right) \\ - \left(1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a \right) & i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Maka dengan menggunakan persamaan (3.84) diperoleh:

$$A^{-1}Q = \begin{bmatrix} \frac{i \frac{\Delta t}{\Delta x} F^{-1} \sin a}{\det(A)} & - \left(\frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} \epsilon F \bar{u} \sin a}{\det(A)} \right) \\ - \left(\frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a}{\det(A)} \right) & \frac{i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a}{\det(A)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

Persamaan (3.85) menjadi:

$$A^{-1}Q = \begin{bmatrix} - \left(\frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} \epsilon F \bar{u} \sin a}{\det(A)} \right) & \frac{i \frac{\Delta t}{\Delta x} F^{-1} \sin a}{\det(A)} \\ \frac{i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a}{\det(A)} & - \left(\frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a}{\det(A)} \right) \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Kemudian untuk:

$$\begin{aligned}
 & A^{-1}R \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{i \frac{\Delta t}{\Delta x} F^{-1} \sin a}{\det(A)} & -\left(\frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} \epsilon F \bar{u} \sin a}{\det(A)} \right) \\ -\left(\frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a}{\det(A)} \right) & \frac{i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a}{\det(A)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta t e^{-iaj} F h_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.87)
 \end{aligned}$$

Maka persamaan (3.87) menjadi:

$$A^{-1}R = \begin{bmatrix} \frac{i \frac{\Delta t}{\Delta x} F^{-1} \sin a}{\det(A)} (-\Delta t e^{-iaj} F h_x) \\ \frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a}{\det(A)} (\Delta t e^{-iaj} F h_x) \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

Sederhanakan persamaan (3.88), sehingga menjadi:

$$A^{-1}R = \begin{bmatrix} -\frac{i \frac{\Delta t^2}{\Delta x} e^{-iaj} h_x \sin a}{\det(A)} \\ \frac{\Delta t e^{-iaj} F h_x + i \frac{\Delta t^2}{\Delta x} F^2 e^{-iaj} h_x \sin a}{\det(A)} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Berdasarkan uraian di atas, maka skema tersebut akan stabil jika:

$$\|A^{-1}Q\| \leq 1 \quad (3.90)$$

Misalkan bahwa $Z = A^{-1}Q$, maka:

$$Z = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} \epsilon F \bar{u} \sin a}{\det(A)} \right) & \frac{i \frac{\Delta t}{\Delta x} F^{-1} \sin a}{\det(A)} \\ \frac{i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a}{\det(A)} & -\left(\frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a}{\det(A)} \right) \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Untuk mencari nilai eigen dari Z didefinisikan:

$$|Z - \lambda I| = \left| \begin{vmatrix} -\left(\frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} \epsilon F \bar{u} \sin a}{\det(A)}\right) & \frac{i \frac{\Delta t}{\Delta x} F^{-1} \sin a}{\det(A)} \\ \frac{i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a}{\det(A)} & -\left(\frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a}{\det(A)}\right) \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| \quad (3.92)$$

Maka persamaan (3.92) menjadi:

$$|Z - \lambda I| = \left| \begin{vmatrix} -\left(\frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} \epsilon F \bar{u} \sin a}{\det(A)}\right) - \lambda & \frac{i \frac{\Delta t}{\Delta x} F^{-1} \sin a}{\det(A)} \\ \frac{i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a}{\det(A)} & -\left(\frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a}{\det(A)}\right) - \lambda \end{vmatrix} \right| \quad (3.93)$$

Selanjutnya persamaan (3.93) diselesaikan, sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} |Z - \lambda I| &= \left(\frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} \epsilon F \bar{u} \sin a}{\det(A)} \right) \left(\frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a}{\det(A)} \right) \\ &\quad + \lambda \left(\frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} \epsilon F \bar{u} \sin a}{\det(A)} \right) + \lambda \left(\frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F \sin a}{\det(A)} \right) + \lambda^2 \\ &\quad + \frac{\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a}{|A|^2} \end{aligned} \quad (3.94)$$

Sederhanakan persamaan (3.94) sedemikian hingga menjadi:

$$\begin{aligned} |Z - \lambda I| &= \frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F(1 + \epsilon \bar{u}) \sin a + (1 - \epsilon F^2 \bar{u}) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a}{|A|^2} \\ &\quad + \left(\frac{2 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F(1 + \epsilon \bar{u}) \sin a}{|A|} \right) \lambda + \lambda^2 \end{aligned} \quad (3.95)$$

Nilai eigen diperoleh dengan menyelesaikan:

$$\begin{aligned}
& \lambda^2 + \left(\frac{2 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F(1 + \epsilon \bar{u}) \sin a}{|A|} \right) \lambda \\
& + \frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F(1 + \epsilon \bar{u}) \sin a + (1 - \epsilon F^2 \bar{u}) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a}{|A|^2} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Misalkan persamaan karakteristik pada persamaan (3.96) sebagai:

$$\alpha \lambda^2 + \beta \lambda + \gamma = 0 \tag{3.97}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 \\
\beta &= \frac{2 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F(1 + \epsilon \bar{u}) \sin a}{|A|} \\
\gamma &= \frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F(1 + \epsilon \bar{u}) \sin a + (1 - \epsilon F^2 \bar{u}) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a}{|A|^2}
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Maka solusi yang diperoleh dengan menggunakan rumus abc adalah:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4\gamma} \tag{3.99}$$

dan

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4\gamma} \tag{3.100}$$

Terlebih dahulu hitung:

$$\begin{aligned}
\beta^2 - 4\gamma &= \left(\frac{2 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F(1 + \epsilon \bar{u}) \sin a}{|A|} \right)^2 \\
&- 4 \left(\frac{1 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F(1 + \epsilon \bar{u}) \sin a + (1 - \epsilon F^2 \bar{u}) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a}{|A|^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Sederhanakan persamaan (3.101) sedemikian hingga menjadi:

$$\beta^2 - 4\gamma = \frac{-(F^2(1 - \epsilon\bar{u})^2 + 4) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a}{|A|^2} \quad (3.102)$$

Substitusikan persamaaan (3.98) dan (3.102) ke persamaan (3.99), sehingga menjadi:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \frac{2 + i \frac{\Delta t}{\Delta x} F(1 + \epsilon\bar{u}) \sin a}{|A|} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-(F^2(1 - \epsilon\bar{u})^2 + 4) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a}{|A|^2}} \quad (3.103)$$

Sederhanakan persamaan (3.103) sedemikian hingga menjadi:

$$\lambda_1 = \frac{i \left[\sqrt{F^2(1 - \epsilon\bar{u})^2 + 4} - F(1 + \epsilon\bar{u}) \right] \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a - 2}{-2 \left[1 + (1 - \epsilon F^2 \bar{u}) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a \right] - 2iF(1 + \epsilon\bar{u}) \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a} \quad (3.104)$$

Karena syarat kestabilan $|\lambda_1| \leq 1$ maka $|\lambda_1|^2 \leq 1$, maka:

$$|\lambda_1|^2 = \left\| \frac{i \left[\sqrt{F^2(1 - \epsilon\bar{u})^2 + 4} - F(1 + \epsilon\bar{u}) \right] \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a - 2}{-2 \left[1 + (1 - \epsilon F^2 \bar{u}) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a \right] - 2iF(1 + \epsilon\bar{u}) \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a} \right\|^2 \quad (3.105)$$

Sederhanakan persamaan (3.105), sehingga menjadi:

$$|\lambda_1|^2 = \frac{(2F^2(1 + \epsilon^2\bar{u}^2) + 4 - 2F(1 + \epsilon\bar{u})\sqrt{F^2(1 - \epsilon\bar{u})^2 + 4}) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a + 4}{(4F^2(1 + \epsilon\bar{u})^2 + 8(1 - \epsilon F^2 \bar{u}) + 4(1 - \epsilon F^2 \bar{u})^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a + 4} \quad (3.106)$$

Karena nilai $\sin^2 a \in [0, 1]$, maka jika diambil nilai minimumnya yaitu pada $\sin^2 a = 0$, diperoleh:

$$|\lambda_1|^2 = \frac{4}{4} = 1 \leq 1 \quad (3.107)$$

Jika diambil maksimumnya yaitu pada nilai $\sin^2 a = 1$, maka diperoleh:

$$|\lambda_1|^2 = \frac{\left(4 + 2F^2(1 + \epsilon^2\bar{u}^2) - 2F(1 + \epsilon\bar{u})\sqrt{F^2(1 - \epsilon\bar{u})^2 + 4}\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} + 4}{\left(8 + 4F^2(1 + \epsilon^2\bar{u}^2) + 4(1 - \epsilon F^2\bar{u})^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} + 4} \quad (3.108)$$

Sampai di sini jelas bahwa pembilang pada persamaan (3.108) lebih kecil daripada penyebut, sehingga dapat disimpulkan bahwa $|\lambda_1| < 1$ selalu stabil tanpa syarat. Artinya jika dimasukkan sembarang nilai pada parameter-parameternya, maka skema tersebut akan tetap stabil tanpa syarat apapun.

Maka untuk persamaan (3.100) dengan cara yang sama diperoleh:

$$\lambda_2 = \frac{i \left[-\sqrt{F^2(1 - \epsilon\bar{u})^2 + 4} - F(1 + \epsilon\bar{u}) \right] \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a - 2}{-2 \left[1 + (1 - \epsilon F^2\bar{u}) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a \right] - 2iF(1 + \epsilon\bar{u}) \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a} \quad (3.109)$$

Karena syarat kestabilan $|\lambda_2| \leq 1$ maka $|\lambda_2|^2 \leq 1$, maka:

$$|\lambda_2|^2 = \left\| \frac{i \left[-\sqrt{F^2(1 - \epsilon\bar{u})^2 + 4} - F(1 + \epsilon\bar{u}) \right] \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a - 2}{-2 \left[1 + (1 - \epsilon F^2\bar{u}) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a \right] - 2iF(1 + \epsilon\bar{u}) \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin a} \right\| \quad (3.110)$$

Sederhanakan persamaan (3.110), sehingga menjadi:

$$|\lambda_2|^2 = \frac{\left(2F^2(1 + \epsilon^2\bar{u}^2) + 4 + 2F(1 + \epsilon\bar{u})\sqrt{F^2(1 - \epsilon\bar{u})^2 + 4}\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a + 4}{\left(4F^2(1 + \epsilon\bar{u})^2 + 8(1 - \epsilon F^2\bar{u}) + 4(1 - \epsilon F^2\bar{u})^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 a + 4} \quad (3.111)$$

Karena nilai $\sin^2 a \in [0, 1]$, maka jika diambil nilai minimumnya yaitu pada $\sin^2 a = 0$, diperoleh:

$$|\lambda_2|^2 = \frac{4}{4} = 1 \leq 1 \quad (3.112)$$

Jika diambil maksimumnya yaitu pada nilai $\sin^2 a = 1$, maka diperoleh:

$$|\lambda_2|^2 = \frac{\left(4 + 2F^2(1 + \epsilon^2\bar{u}^2) + 2F(1 + \epsilon\bar{u})\sqrt{F^2(1 - \epsilon\bar{u})^2 + 4}\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} + 4}{\left(8 + 4F^2(1 + \epsilon^2\bar{u}^2) + 4(1 - \epsilon F^2\bar{u})^2\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} + 4} \quad (3.113)$$

Persamaan (3.113) dapat ditulis:

$$|\lambda_2|^2 = \frac{\left(4 + 2F^2(1 + \epsilon^2\bar{u}^2) + 2F(1 + \epsilon\bar{u})\sqrt{F^2(1 - \epsilon\bar{u})^2 + 4}\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} + 4}{\left(4 + 2F^2(1 + \epsilon^2\bar{u}^2) + 2F^2(1 + \epsilon^2\bar{u}^2) + 4 + 4(1 - \epsilon F^2\bar{u})^2\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} + 4} \quad (3.114)$$

Manipulasi persamaan (3.114) sedemikian hingga menjadi:

$$|\lambda_2|^2 = \frac{4 + \left(4 + 2F^2(1 + \epsilon^2\bar{u}^2) + 2F(1 + \epsilon\bar{u})\sqrt{F^2(1 - \epsilon\bar{u})^2 + 4}\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}}{4 + \left(4 + 2F^2(1 + \epsilon^2\bar{u}^2) + 2F(1 + \epsilon\bar{u})\sqrt{F^2(1 - \epsilon\bar{u})^2 + 4}\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} + 4(1 - \epsilon F^2\bar{u})^2} \quad (3.115)$$

Persamaan (3.115) dapat ditulis ulang menjadi:

$$|\lambda_2|^2 = \frac{4 + \left(4 + 2F^2(1 + \epsilon^2\bar{u}^2) + 2F(1 + \epsilon\bar{u})\sqrt{F^2(1 - \epsilon\bar{u})^2 + 4}\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}}{4 + \left(4 + 2F^2(1 + \epsilon^2\bar{u}^2) + 2F(1 + \epsilon\bar{u})\sqrt{F^2(1 - \epsilon\bar{u})^2 + 4\epsilon\bar{u}F^2 + 4}\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} + 4(1 - \epsilon F^2\bar{u})^2\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}} \quad (3.116)$$

Sampai di sini jelas pula bahwa pembilang pada persamaan (3.116) lebih kecil daripada penyebut, sehingga dapat disimpulkan bahwa $|\lambda_2| < 1$ selalu stabil tanpa syarat. Artinya jika dimasukkan sembarang nilai pada parameter-parameternya, maka skema tersebut akan tetap stabil tanpa syarat apapun.

3.4 Simulasi dan Interpretasi

Simulasi dan interpretasi yang dilakukan pada subbab ini menggunakan hasil diskritisasi dan ekstrapolasi pada persamaan (3.27), (3.28), (3.45), (3.46), (3.47), dan (3.48) dengan menggunakan kondisi awal dan parameternya sebagai berikut:

$$\eta_j^1 = 0 \quad u_j^1 = \frac{1}{\epsilon}$$

$$F = 0,25 \quad F = 1,5$$

$$\Delta x = 0,15 \quad \Delta t = 0,015$$

$$\epsilon = 0,1$$

$$h_x(x_j) = \frac{2x_j - 56}{\left(10 \left((x_j - 28)^2 + 1\right)^2\right)}$$

Sebagai contoh, gunakan iterasi dari $j = 1$ sampai $j = 6$ untuk $n = 1$ dan $F = 0,25$ sehingga diperoleh nilai-nilai parameter sebagai berikut:

1. Untuk $j = 1$ diperoleh:

$$g_3 = -\frac{u_{j+2}^n}{2} + \frac{u_j^n}{2} = -\frac{u_3^1}{2} + \frac{u_1^1}{2} = 0$$

$$g_5 = -\frac{\eta_{j+2}^n}{2} + \frac{\eta_j^n}{2} = -\frac{\eta_3^1}{2} + \frac{\eta_1^1}{2} = 0$$

2. Untuk $j = 2$ diperoleh:

$$a_1 = -\frac{F}{2\Delta x} = -\frac{0,25}{2(0,15)} = -0,833$$

$$b_1 = \left(\frac{\epsilon F}{2\Delta x} \eta_{j+1}^n - \frac{\epsilon F}{2\Delta x} \eta_{j-1}^n \right) = \left(\frac{(0,1)(0,25)}{2(0,15)} \eta_3^1 - \frac{(0,1)(0,25)}{2(0,15)} \eta_1^1 \right) = 0$$

$$c_1 = \frac{F}{2\Delta x} = \frac{0,25}{2(0,15)} = 0,833$$

$$d_1 = -\frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^n = -\frac{(0,1)(0,25)}{2(0,15)} u_2^1 = -0,833$$

$$e_1 = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{0,015} = 66,66$$

$$f_1 = \frac{\epsilon F}{2\Delta x} u_j^n = \frac{(0,1)(0,25)}{2(0,15)} u_2^1 = 0,833$$

$$\begin{aligned}
g_1 &= \left(\frac{\epsilon F}{2\Delta x} \eta_{j+1}^n - \frac{\epsilon F}{2\Delta x} \eta_{j-1}^n \right) u_j^n + \frac{\eta_j^n}{\Delta t} - F h_x(x_j) \\
&= \left(\frac{(0,1)(0,25)}{2(0,15)} \eta_3^1 - \frac{(0,1)(0,25)}{2(0,15)} \eta_1^1 \right) u_2^1 + \frac{\eta_2^1}{0,015} - (0,25)(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$a_2 = -\frac{F^2}{2\Delta x} = -\frac{(0,25)^2}{2(0,15)} = 0,2$$

$$b_2 = \frac{F}{\Delta t} = \frac{0,25}{0,015} = 16,67$$

$$c_2 = \frac{F^2}{2\Delta x} = \frac{(0,25)^2}{2(0,15)} = 0,2$$

$$d_2 = -\frac{1}{2\Delta x} = -\frac{1}{2(0,15)} = -3,33$$

$$f_2 = \frac{1}{2\Delta x} = \frac{1}{2(0,15)} = 3,33$$

$$g_2 = \frac{F}{\Delta t} u_j^n = \frac{0,25}{0,015} u_2^1 = 166,67$$

Dengan cara yang sama, dapat diperoleh nilai-nilai untuk $j = 3$, $j = 4$ dan $j = 5$.

3. Untuk $j = 6$ diperoleh:

$$g_4 = \frac{u_j^n}{2} - \frac{u_{j-2}^n}{2} = \frac{u_6^1}{2} - \frac{u_4^1}{2} = 0$$

$$g_6 = \frac{\eta_j^n}{2} - \frac{\eta_{j-2}^n}{2} = \frac{\eta_6^1}{2} - \frac{\eta_4^1}{2} = 0$$

Nilai-nilai tersebut dimasukkan ke dalam persamaan (3.27), (3.28), (3.45), (3.46), (3.47) dan (3.48), sehingga:

Untuk $j = 1$ berlaku untuk persamaan batas kiri baik untuk u maupun η , sehingga untuk persamaan (3.45) dan (3.47) menjadi:

$$u_1^2 - u_2^2 = 0$$

$$\eta_1^2 - \eta_2^2 = 0$$

Untuk $j = 2$ sampai $j = 5$ berlaku untuk persamaan (3.27) sehingga menjadi:

$$j = 2 \rightarrow (-0,833)u_1^2 + (0)u_2^2 + (0,833)u_3^2 + (-0,833)\eta_1^2 + (66,66)\eta_2^2 + (0,833)\eta_3^2 = 0$$

$$j = 3 \rightarrow (-0,833)u_2^2 + (0)u_3^2 + (0,833)u_4^2 + (-0,833)\eta_2^2 + (66,66)\eta_3^2 + (0,833)\eta_4^2 = 0$$

$$j = 4 \rightarrow (-0,833)u_3^2 + (0)u_4^2 + (0,833)u_5^2 + (-0,833)\eta_3^2 + (66,66)\eta_4^2 + (0,833)\eta_5^2 = 0$$

$$j = 5 \rightarrow (-0,833)u_4^2 + (0)u_5^2 + (0,833)u_6^2 + (-0,833)\eta_4^2 + (66,66)\eta_5^2 + (0,833)\eta_6^2 = 0$$

Untuk $j = 2$ sampai $j = 5$ juga berlaku untuk persamaan (3.28), sehingga menjadi:

$$j = 2 \rightarrow (-0,2)u_1^2 + (16,67)u_2^2 + (0,2)u_3^2 + (-3,33)\eta_1^2 + (3,33)\eta_3^2 = 166,67$$

$$j = 3 \rightarrow (-0,2)u_2^2 + (16,67)u_3^2 + (0,2)u_4^2 + (-3,33)\eta_2^2 + (3,33)\eta_4^2 = 166,67$$

$$j = 4 \rightarrow (-0,2)u_3^2 + (16,67)u_4^2 + (0,2)u_5^2 + (-3,33)\eta_3^2 + (3,33)\eta_5^2 = 166,67$$

$$j = 5 \rightarrow (-0,2)u_4^2 + (16,67)u_5^2 + (0,2)u_6^2 + (-3,33)\eta_4^2 + (3,33)\eta_6^2 = 166,67$$

Untuk $j = 6$ berlaku untuk persamaan batas kanan baik untuk u maupun η , sehingga untuk persamaan (3.46) dan (3.48) menjadi:

$$-u_5^2 + u_6^2 = 0$$

$$-\eta_5^2 + \eta_6^2 = 0$$

Kemudian kelompokkan persamaan-persamaan di atas, sehingga menjadi seperti berikut:

$$u_1^2 - u_2^2 = 0$$

$$(-0,833)u_1^2 + (0)u_2^2 + (0,833)u_3^2 + (-0,833)\eta_1^2 + (66,66)\eta_2^2 + (0,833)\eta_3^2 = 0$$

$$(-0,833)u_2^2 + (0)u_3^2 + (0,833)u_4^2 + (-0,833)\eta_2^2 + (66,66)\eta_3^2 + (0,833)\eta_4^2 = 0$$

$$(-0,833)u_3^2 + (0)u_4^2 + (0,833)u_5^2 + (-0,833)\eta_3^2 + (66,66)\eta_4^2 + (0,833)\eta_5^2 = 0$$

$$(-0,833)u_4^2 + (0)u_5^2 + (0,833)u_6^2 + (-0,833)\eta_4^2 + (66,66)\eta_5^2 + (0,833)\eta_6^2 = 0$$

$$-u_5^2 + u_6^2 = 0$$

$$\eta_1^2 - \eta_2^2 = 0$$

$$(-0,2)u_1^2 + (16,67)u_2^2 + (0,2)u_3^2 + (-3,33)\eta_1^2 + (3,33)\eta_3^2 = 166,67$$

$$(-0,2)u_2^2 + (16,67)u_3^2 + (0,2)u_4^2 + (-3,33)\eta_2^2 + (3,33)\eta_4^2 = 166,67$$

$$(-0,2)u_3^2 + (16,67)u_4^2 + (0,2)u_5^2 + (-3,33)\eta_3^2 + (3,33)\eta_5^2 = 166,67$$

$$(-0,2)u_4^2 + (16,67)u_5^2 + (0,2)u_6^2 + (-3,33)\eta_4^2 + (3,33)\eta_6^2 = 166,67$$

$$-\eta_5^2 + \eta_6^2 = 0$$

Ubah persamaan-persamaan di atas ke dalam bentuk matriks, sehingga menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,833 & 0 & 0,833 & 0 & 0 & 0 & -0,833 & 66,66 & 0,833 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,833 & 0 & 0,833 & 0 & 0 & 0 & -0,833 & 66,66 & 0,833 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,833 & 0 & 0,833 & 0 & 0 & 0 & -0,833 & 66,66 & 0,833 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,833 & 0 & 0,833 & 0 & 0 & 0 & -0,833 & 66,66 & 0,833 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2 & 16,67 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & -3,33 & 0 & 3,33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2 & 16,67 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & -3,33 & 0 & 3,33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2 & 16,67 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & -3,33 & 0 & 3,33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2 & 16,67 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & -3,33 & 0 & 3,33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks B dan X menjadi:

$$X = \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \\ u_5^2 \\ u_6^2 \\ \eta_1^2 \\ \eta_2^2 \\ \eta_3^2 \\ \eta_4^2 \\ \eta_5^2 \\ \eta_6^2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 166,67 \\ 166,67 \\ 166,67 \\ 166,67 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, nilai matriks X dicari dengan menggunakan persamaan berikut ini:

$$X = A^{-1}B$$

Untuk memudahkan perhitungan dalam menyelesaikan persamaan di atas, maka digunakan bantuan program MATLAB, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} u_1^2 &= 10 & \eta_1^2 &= -7,27 \times 10^{-18} \\ u_2^2 &= 10 & \eta_2^2 &= -7,27 \times 10^{-18} \\ u_3^2 &= 10 & \eta_3^2 &= -1,30 \times 10^{-17} \\ u_4^2 &= 10 & \eta_4^2 &= 1,86 \times 10^{-17} \\ u_5^2 &= 10 & \eta_5^2 &= 5,90 \times 10^{-18} \\ u_6^2 &= 10 & \eta_6^2 &= 5,90 \times 10^{-18} \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk $n = 2$ dengan $F = 0,25$ dan $j = 1$ sampai $= 6$, dengan menggunakan cara yang sama, maka akan diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut:

$$u_1^3 - u_2^3 = 0$$

$$\begin{aligned} (-0,833)u_1^3 + (-4,84 \times 10^{-19})u_2^3 + (0,833)u_3^3 + (-0,833)\eta_1^3 + (66,66)\eta_2^3 \\ + (0,833)\eta_3^3 = 0 \end{aligned}$$

$$(-0,833)u_2^3 + (2,15 \times 10^{-18})u_3^3 + (0,833)u_4^3 + (-0,833)\eta_2^3 + (66,66)\eta_3^3 \\ + (0,833)\eta_4^3 = 0$$

$$(-0,833)u_3^3 + (1,58 \times 10^{-18})u_4^3 + (0,833)u_5^3 + (-0,833)\eta_3^3 + (66,66)\eta_4^3 \\ + (0,833)\eta_5^3 = 0$$

$$(-0,833)u_4^3 + (-1,05 \times 10^{-18})u_5^3 + (0,833)u_6^3 + (-0,833)\eta_4^3 + (66,66)\eta_5^3 \\ + (0,833)\eta_6^3 = 0$$

$$-u_5^3 + u_6^3 = 0$$

$$\eta_1^3 - \eta_2^3 = 0$$

$$(-0,2)u_1^3 + (16,66)u_2^3 + (0,2)u_3^3 + (-3,33)\eta_1^3 + (3,33)\eta_3^3 = 166,67$$

$$(-0,2)u_2^3 + (16,66)u_3^3 + (0,2)u_4^3 + (-3,33)\eta_2^3 + (3,33)\eta_4^3 = 166,67$$

$$(-0,2)u_3^3 + (16,66)u_4^3 + (0,2)u_5^3 + (-3,33)\eta_3^3 + (3,33)\eta_6^3 = 166,67$$

$$(-0,2)u_4^3 + (16,66)u_5^3 + (0,2)u_6^3 + (-3,33)\eta_4^3 + (3,33)\eta_6^3 = 166,67$$

$$-\eta_5^3 + \eta_6^3 = 0$$

Ubah persamaan-persamaan di atas ke dalam bentuk matriks, sehingga menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,833 & -4,84 \times 10^{-19} & 0,833 & 0 & 0 & 0 & -0,833 & 66,66 & 0,833 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,833 & 2,15 \times 10^{-18} & 0,833 & 0 & 0 & 0 & -0,833 & 66,66 & 0,833 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,833 & 1,58 \times 10^{-18} & 0,833 & 0 & 0 & 0 & -0,833 & 66,66 & 0,833 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,833 & -1,05 \times 10^{-18} & 0,833 & 0 & 0 & 0 & -0,833 & 66,66 & 0,833 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2 & 16,66 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & -3,33 & 0 & 3,33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2 & 16,66 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & -3,33 & 0 & 3,33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2 & 16,66 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & -3,33 & 0 & 3,33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2 & 16,66 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & -3,33 & 0 & 3,33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks B dan X menjadi:

$$X = \begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \\ u_4^3 \\ u_5^3 \\ u_6^3 \\ \eta_1^3 \\ \eta_2^3 \\ \eta_3^3 \\ \eta_4^3 \\ \eta_5^3 \\ \eta_6^3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -4,89 \times 10^{-16} \\ -8,51 \times 10^{-16} \\ 1,25 \times 10^{-15} \\ 3,83 \times 10^{-16} \\ 8,88 \times 10^{-16} \\ 2,90 \times 10^{-18} \\ 1,66 \times 10^2 \\ 1,66 \times 10^2 \\ 1,66 \times 10^2 \\ 1,66 \times 10^2 \\ -6,35 \times 10^{-18} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, nilai matriks X dicari dengan menggunakan persamaan berikut ini:

$$X = A^{-1}B$$

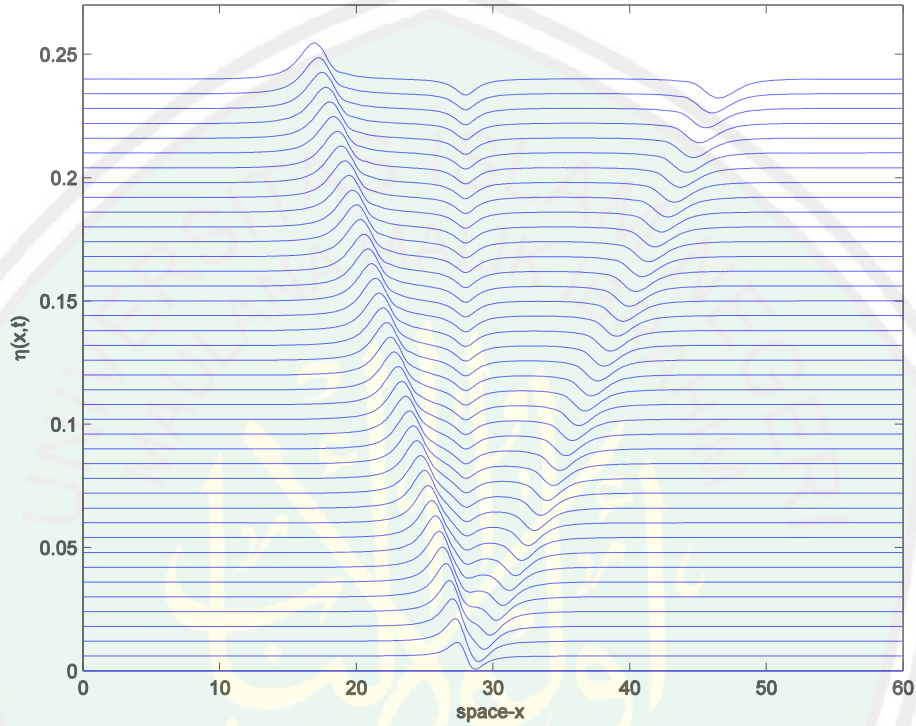
Untuk memudahkan perhitungan dalam menyelesaikan persamaan di atas, maka digunakan bantuan program MATLAB, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} u_1^3 &= 10 & \eta_1^3 &= -1,15 \times 10^{-17} \\ u_2^3 &= 10 & \eta_2^3 &= -1,44 \times 10^{-17} \\ u_3^3 &= 10 & \eta_3^3 &= -2,65 \times 10^{-17} \\ u_4^3 &= 10 & \eta_4^3 &= 3,68 \times 10^{-17} \\ u_5^3 &= 10 & \eta_5^3 &= 1,2 \times 10^{-17} \\ u_6^3 &= 10 & \eta_6^3 &= 5,65 \times 10^{-18} \end{aligned}$$

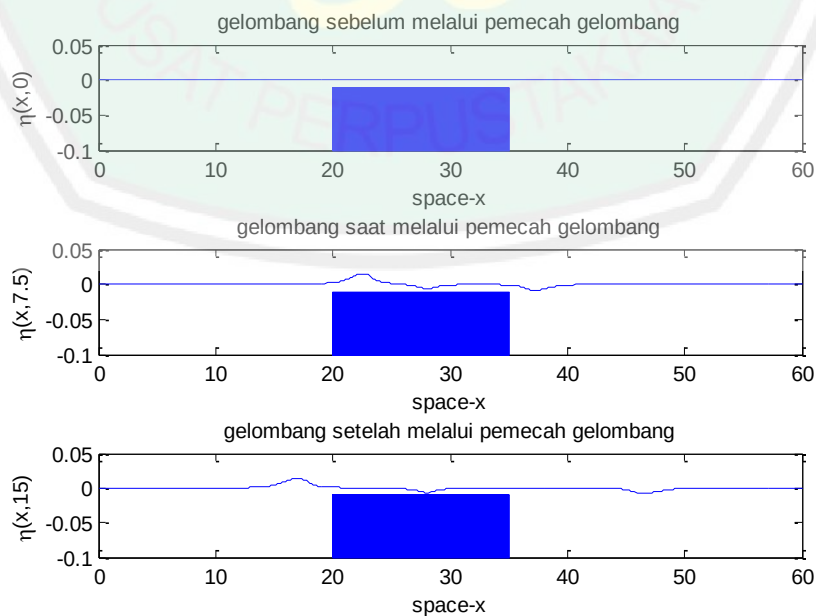
Untuk perhitungan selanjutnya, dihitung menggunakan bantuan program MATLAB hingga batas x dan t yang ditentukan.

Untuk lebih memahami proses skema tersebut, pada subbab ini akan dijelaskan tentang simulasi hasil dari nilai η menggunakan program MATLAB serta melakukan interpretasi grafik terhadap hasil simulasi tersebut. Nilai parameter-parameter yang digunakan dalam penelitian ini merujuk pada penelitian sebelumnya yaitu penelitian yang dilakukan oleh L.H Wiryanto (2010). Simulasi

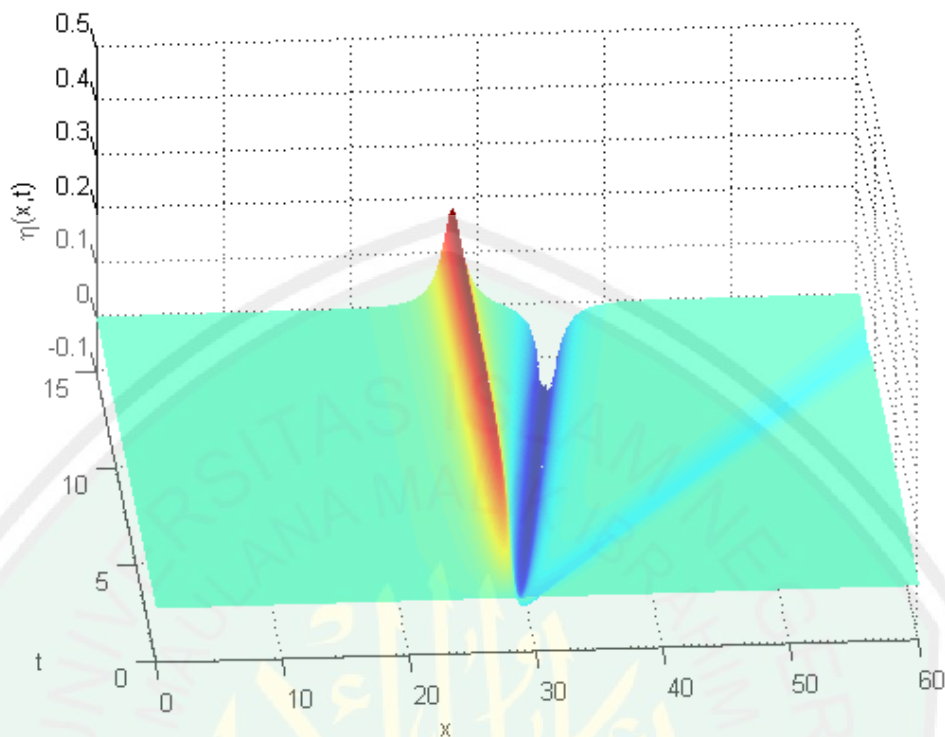
pertama, dilakukan dari persamaan (3.27) dan persamaan (3.28) dengan mengambil $\Delta x = 0,15$, $\Delta t = 0,015$, $\epsilon = 0,1$, dan $F = 0,25$, sehingga gelombang yang terjadi pada persamaan Boussinesq dapat dilihat sebagai berikut:



Gambar 3.2 Simulasi Gelombang untuk $F = 0,25$ pada Selang Waktu Tertentu



Gambar 3.3 Simulasi Gelombang untuk $F = 0,25$

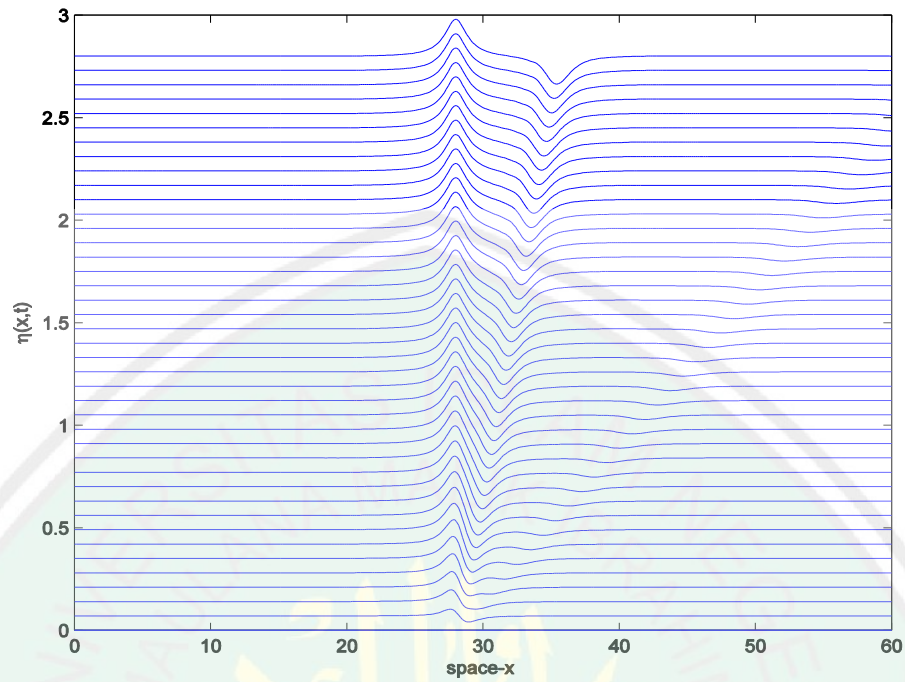


Gambar 3.4 Grafik 3D Simulasi Gelombang untuk $F = 0,25$

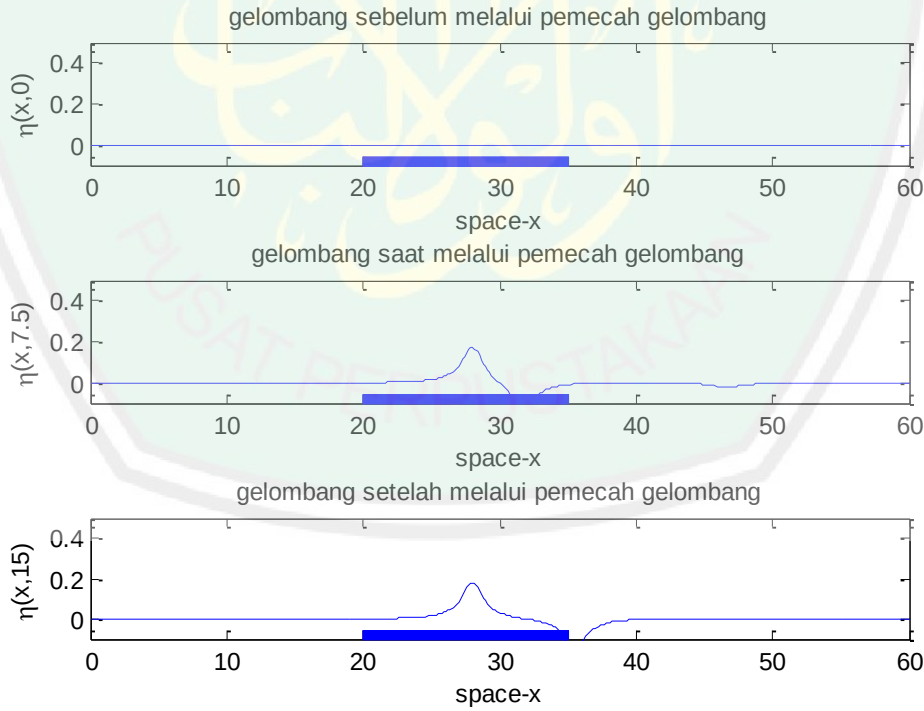
Gambar 3.3 menggambarkan bahwa terdapat sebuah aliran yang mengalami gangguan akibat adanya gundukan yang berada di $x = 20$ sampai $x = 35$ pada dasar laut sehingga muncul gelombang pada permukaannya. Dapat dilihat bahwa $\eta(x, 0)$ merupakan ilustrasi aliran sebelum melewati gundukan. Sebelum melewati gundukan pada aliran tersebut tidak terdapat gelombang. $\eta(x, 7,5)$ merupakan ilustrasi aliran pada saat melewati gundukan. Pada saat aliran melewati sebuah gundukan, maka akan menghasilkan gelombang pada permukaannya. $\eta(x, 15)$ merupakan kondisi setelah aliran melewati gundukan. Setelah melewati gundukan, gelombang tersebut berjalan ke dua arah yaitu ke arah kiri menuju $x = 0$ dan ke arah kanan menuju $x = 60$. Kedua gelombang tersebut berjalan menjauhi gundukan hingga mencapai atau melewati batas dan diteruskan ke masing-masing arahannya seperti yang terlihat pada Gambar 3.2.

Gambar 3.4 menggambarkan puncak dan lembah dari gelombang yang dihasilkan. Warna merah menggambarkan puncak gelombang dan warna biru tua menggambarkan lembah gelombang. Untuk $F = 0,25$ tinggi gelombang yang dihasilkan adalah sebesar 0,0138. Pada penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh L.H Wiryanto, hasil yang diperoleh adalah untuk $F < 1$ akan menghasilkan tinggi gelombang yang lebih kecil dari pada tinggi gundukan. Tinggi gundukan pada penelitian ini adalah sebesar 0,064. Jika dibandingkan dengan tinggi gelombang yang dihasilkan pada penelitian ini, maka dapat dikatakan bahwa tinggi gelombang lebih kecil daripada tinggi gundukan. Tinggi gelombang yang dihasilkan pada penelitian L.H Wiryanto untuk $F = 0,25$ adalah sebesar 0,016, sehingga selisihnya adalah 0,0022. Oleh karena itu, dengan membandingkan penelitian ini dengan penelitian L.H Wiryanto, maka dapat disimpulkan bahwa solusi dari penelitian ini konsisten dengan penelitian sebelumnya.

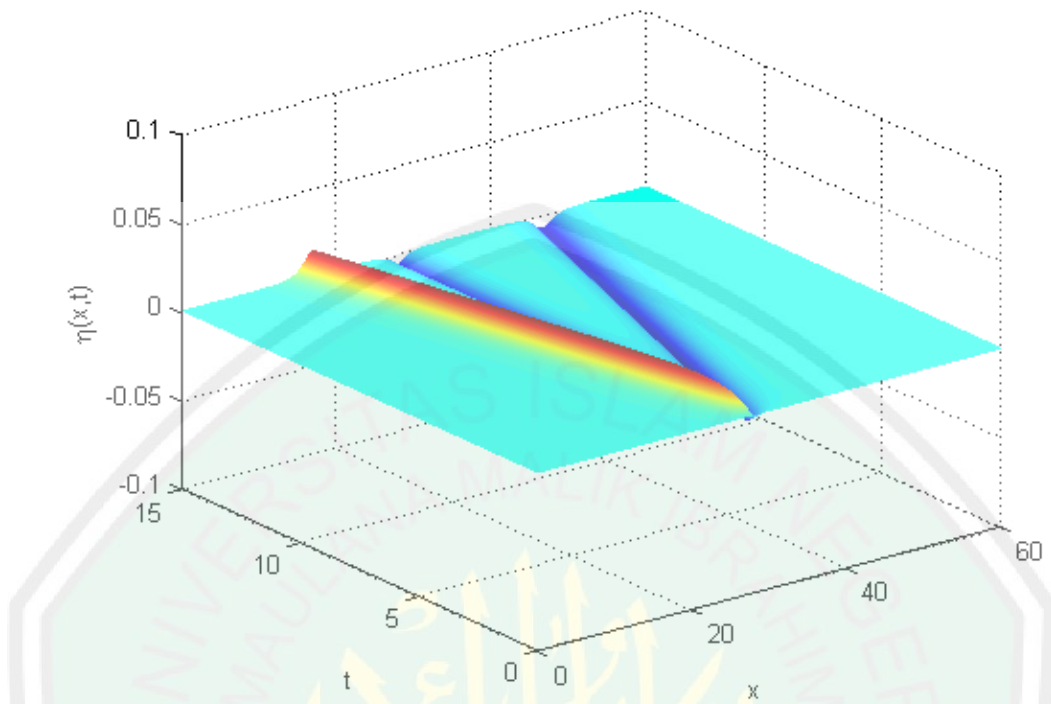
Simulasi kedua, dilakukan dari persamaan (3.27) dan persamaan (3.28) dengan mengambil $\Delta x = 0,15$, $\Delta t = 0,015$, $\epsilon = 0,1$, dan $F = 1,5$, sehingga gelombang yang terjadi pada persamaan Boussinesq dapat dilihat sebagai berikut.



Gambar 3.5 Simulasi Gelombang untuk $F = 1,5$ pada Selang Waktu Tertentu



Gambar 3.6 Simulasi Gelombang untuk $F = 1,5$



Gambar 3.7 Grafik 3D Simulasi Gelombang untuk $F = 1,5$

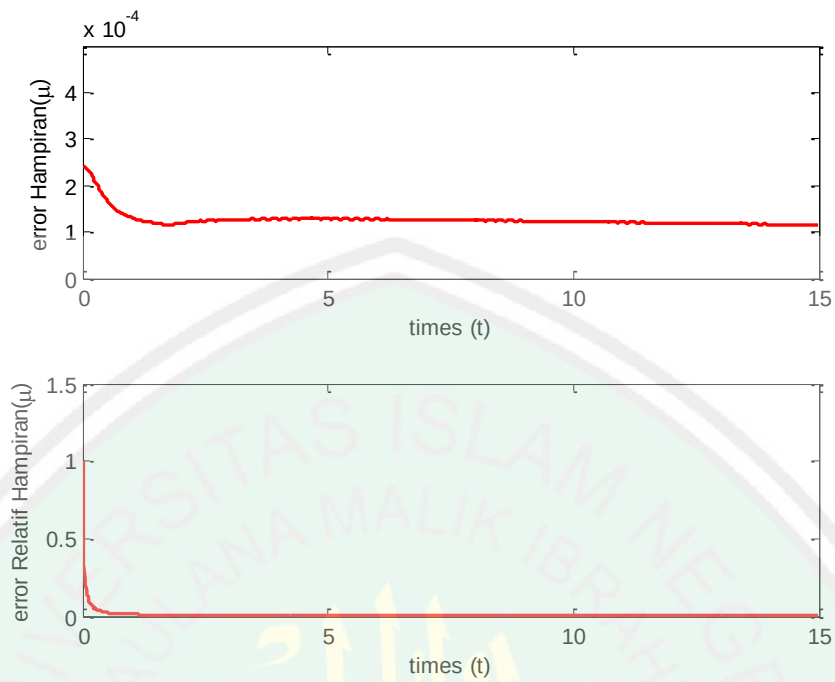
Gambar 3.6 menggambarkan bahwa terdapat sebuah aliran yang mengalami gangguan akibat adanya gundukan yang berada di sekitar $x = 20$ sampai $x = 35$ pada dasar laut, sehingga muncul gelombang pada permukaannya. $\eta(x, 0)$ merupakan ilustrasi aliran sebelum melewati sebuah gundukan, sehingga tidak terdapat gelombang pada permukaannya. $\eta(x, 7.5)$ merupakan ilustrasi aliran saat melewati sebuah gundukan. Ketika aliran tersebut melewati sebuah gundukan, maka akan menimbulkan gelombang pada permukaannya. $\eta(x, 15)$ merupakan ilustrasi setelah aliran melewati sebuah gundukan. Gelombang tersebut berjalan ke arah kanan menuju $x = 60$ seperti yang terlihat pada Gambar 3.5.

Gambar 3.7 menggambarkan puncak dan lembah dari gelombang yang dihasilkan. Warna merah menggambarkan puncak gelombang dan warna biru tua menggambarkan lembah gelombang. Untuk $F = 1,5$ tinggi gelombang yang

dihasilkan adalah sebesar 0,1793. Pada penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh L.H Wiryanto, hasil yang diperoleh adalah untuk $F > 1$ akan menghasilkan tinggi gelombang yang lebih besar daripada tinggi gundukan. Tinggi gundukan pada penelitian ini adalah sebesar 0,064. Jika dibandingkan dengan tinggi gelombang yang dihasilkan pada penelitian ini, maka dapat dikatakan bahwa tinggi gelombang lebih besar dari pada tinggi gundukan. Oleh karena itu, dapat dikatakan hasil yang diperoleh pada penelitian ini sama dengan hasil yang diperoleh pada penelitian L.H Wiryanto.

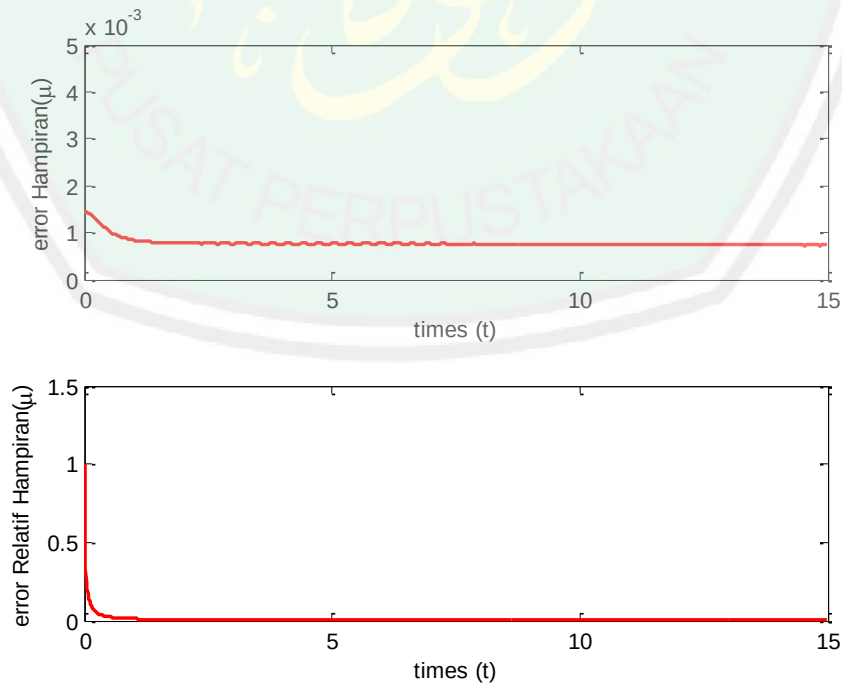
3.5 Analisis Error

Dikarenakan persamaan Boussinesq merupakan sistem persamaan diferensial parsial nonlinier, maka akan mengakibatkan sulitnya mencari solusi analitik untuk persamaan tersebut. Namun, jika dilihat dari metode yang digunakan yaitu metode beda hingga skema implisit FTCS, maka dapat diketahui bahwa *error* pemotongan yang dihasilkan mempunyai orde Δt untuk waktu dan Δx^2 untuk ruang. Akan tetapi, untuk lebih jelasnya dalam mengetahui *error*nya dapat digunakan *error* hampiran dan *error* relatif hampiran. Nilai *error* tersebut diperoleh berdasarkan nilai hampiran sebelumnya. Dengan menggunakan nilai absolut dalam menghitung *error*, maka perbandingan antara *error* hampiran dan *error* relatif hampiran pada saat $F = 0,25$ dapat dilihat seperti gambar berikut:



Gambar 3.8 Perbandingan Grafik Error untuk $F = 0,25$

Untuk $F = 1,5$, perbandingan *error* hampiran dan *error* relatif hampiran dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3.9 Perbandingan Grafik Error untuk $F = 1,5$

Untuk lebih jelasnya nilai *error* relatif dan *error* relatif hampiran dapat dilihat pada tabel di bawah ini:

Tabel 3.3 Perbandingan Nilai *Error* untuk $F = 0,25$

Waktu (t)	<i>Error</i> Hampiran	<i>Error</i> Relatif Hampiran
1	$1,31(10^{-4})$	$12,3(10^{-3})$
2	$1,19(10^{-4})$	$8,7(10^{-3})$
3	$1,26(10^{-4})$	$8,5(10^{-3})$
4	$1,26(10^{-4})$	$8,3(10^{-3})$
5	$1,28(10^{-4})$	$8,4(10^{-3})$
6	$1,27(10^{-4})$	$8,3(10^{-3})$
7	$1,26(10^{-4})$	$8,3(10^{-3})$
8	$1,24(10^{-4})$	$8,2(10^{-3})$
9	$1,22(10^{-4})$	$8,1(10^{-3})$
10	$1,22(10^{-4})$	$8,1(10^{-3})$
11	$1,21(10^{-4})$	$8,1(10^{-3})$
12	$1,19(10^{-4})$	$8,1(10^{-3})$
13	$1,18(10^{-4})$	$8,0(10^{-3})$
14	$1,16(10^{-4})$	$7,9(10^{-3})$
15	$1,15(10^{-4})$	$7,9(10^{-3})$

Tabel 3.4 Perbandingan Nilai *Error* untuk $F = 1,5$

Waktu (t)	<i>Error</i> Hampiran	<i>Error</i> Relatif Hampiran
1	$8,46(10^{-4})$	$12(10^{-3})$
2	$7,76(10^{-4})$	$7(10^{-3})$
3	$7,62(10^{-4})$	$5,5(10^{-3})$
4	$7,61(10^{-4})$	$5(10^{-3})$
5	$7,67(10^{-4})$	$4,8(10^{-3})$
6	$7,69(10^{-4})$	$4,6(10^{-3})$
7	$7,65(10^{-4})$	$4,5(10^{-3})$
8	$7,57(10^{-4})$	$4,4(10^{-3})$
9	$7,57(10^{-4})$	$4,3(10^{-3})$
10	$7,58(10^{-4})$	$4,3(10^{-3})$
11	$7,53(10^{-4})$	$4,3(10^{-3})$
12	$7,44(10^{-4})$	$4,2(10^{-3})$
13	$7,40(10^{-4})$	$4,2(10^{-3})$
14	$7,40(10^{-4})$	$4,1(10^{-3})$
15	$7,35(10^{-4})$	$4,1(10^{-3})$

Berdasarkan nilai pada tabel dan juga gambar yang ada di atas, dapat dilihat bahwa besarnya nilai *error* tidak melebihi 1 atau dalam artian $e \leq 1$, baik untuk *error* hampiran dan *error* relatif hampiran untuk $F = 0,25$ maupun *error*

hampiran dan *error* relatif hampiran untuk $F = 1,5$. Keempat nilai *error* tersebut semakin lama akan semakin kecil. Jika nilai *error* semakin lama semakin kecil, hal ini menunjukkan bahwa solusi numerik persamaan Boussinesq konvergen. Berdasarkan hal tersebut, dapat disimpulkan bahwa penggunaan skema beda hingga implisit FTCS dalam penyelesaian numerik persamaan Boussinesq sudah baik.

3.6 Prinsip Mencari Solusi dalam Matematika dan Al-Quran

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79).

Dari sini dapat difahami bahwa Allah menciptakan segala sesuatu sesuai dengan ukuran, setiap permasalahan mempunyai solusi, dan Allah tidak memberikan suatu cobaan pada seorang hamba melebihi kemampuannya. Hal ini dijelaskan dalam surat al-Qamar ayat 49 yang berbunyi:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

“*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*” (QS. Al-Qamar:49).

Selain itu juga terdapat dalam surat al-Furqan ayat 2:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ
وَحَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

“Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya” (QS. Al-Furqan:2).

Penelitian ini membahas tentang gelombang. Gelombang tersebut tentunya juga memiliki persamaan yang berbeda-beda. Permasalahan yang terjadi dalam bidang matematika, suatu sistem persamaan diferensial parsial nonlinier umumnya tidak memiliki solusi analitik atau solusi eksak. Hal ini mengakibatkan kesulitan dalam menganalisis persamaan tersebut. Seperti janji Allah bahwa di balik kesulitan akan ada kemudahan. Dalam surat ath-Thalaq Allah berfirman:

.... سَيَجْعَلُ اللَّهُ بَعْدَ عُسْرٍ يُسْرًا ﴿٦٥﴾

“... Allah kelak akan memberikan kelapangan sesudah kesempitan” (QS. Ath-Thalaq/7:65).

Hal ini untuk menguatkan dan mengajarkan manusia untuk selalu berusaha dan bersabar dalam menghadapi masalah dan kesulitan-kesulitan dalam kehidupan sehari-hari. Ibnu Rajab telah mengisyaratkan hal ini. Beliau berkata, “Jika kesempitan itu semakin terasa sulit dan semakin berat, maka seorang hamba akan menjadi putus asa dan demikianlah keadaan makhluk yang tidak dapat keluar dari kesulitan. Akhirnya, ia pun menggantungkan hatinya pada Allah semata. Inilah hakikat tawakkal pada-Nya. Tawakkal inilah yang menjadi sebab terbesar keluar dari kesempitan yang ada, karena Allah sendiri telah berjanji akan mencukupi orang yang bertawakkal pada-Nya”. Sebagaimana Allah Swt. berfirman,

.... وَمَنْ يَتَوَكَّلْ عَلَى اللَّهِ فَهُوَ حَسْبُهُ ﴿٣﴾

“...dan barang siapa yang bertawakkal kepada Allah niscaya Allah akan mencukupkan (keperluan) nya...” (QS. Ath-Thalaq:3).

Oleh karena itu, sudah seharusnya manusia tidak boleh berputus asa dalam menghadapi berbagai permasalahan yang dihadapi dalam kehidupan sehari-hari, terutama dalam proses belajar. Kesulitan yang dihadapi dalam proses pembelajaran pasti akan ada jalan keluar baik itu berupa bantuan secara langsung maupun tidak langsung seperti buku atau literatur-literatur yang menjelaskan tentang penelitian-penelitian terlebih dahulu tentang masalah yang dihadapi.

Berdasarkan permasalahan yang dihadapi dalam penelitian ini dan menurut penelitian-penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh beberapa ahli, munculah sebuah metode pendekatan untuk mencari nilai yang mendekati nilai sebenarnya. Hal ini tentu akan sangat bermanfaat dan membantu orang-orang dalam menyelesaikan permasalahan di bidang matematika. Tentu saja pada jaman dahulu penelitian yang dilakukan tidak serta merta dapat mendapatkan metode tersebut. Oleh karena itu, sebagai pelajar harus dapat mengaplikasikan metode tersebut dengan benar dan sesuai dengan kaidah yang telah ditetapkan dalam penelitian sebelumnya.

Dalam surat al-Ankabut ayat 69 Allah berfirman:

وَالَّذِينَ جَاهَدُوا فِينَا لَنَهْدِيَنَّهُمْ سُبُلَنَا وَإِنَّ اللَّهَ لَمَعَ الْمُحْسِنِينَ ﴿٦٩﴾

“Dan orang-orang yang berjihad untuk (mencari keridhaan) Kami, benar-benar akan Kami tunjukkan kepada mereka jalan-jalan kami. dan sesungguhnya Allah benar-benar beserta orang-orang yang berbuat baik” (QS. Al-Ankabut:69).

Dalam ayat tersebut Allah menerangkan kepada manusia bahwa ketika orang itu bersungguh-sungguh maka pasti akan ditunjukkan cara-cara untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang dihadapi. Seperti dalam kasus ini, metode pendekatan ini disebut metode numerik. Dalam metode numerik terdapat berbagai macam metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan

permasalahan-permasalahan matematis sesuai dengan kondisi permasalahannya. Karena tidak semua metode dapat digunakan dan sesuai untuk diaplikasikan dalam permasalahan yang diteliti. Oleh karena itu, sebagai pelajar harus mempelajari metode-metode tersebut sehingga dapat menentukan metode mana yang cocok dan sesuai untuk diaplikasikan dalam permasalahan yang dihadapi.

Dalam kasus penelitian ini, penulis menggunakan metode beda hingga. Metode beda hingga itu sendiri dapat dibedakan menjadi dua skema yaitu skema eksplisit dan skema implisit. Karena persamaan yang digunakan berupa sistem persamaan diferensial parsial nonlinier, maka penulis memilih metode beda hingga skema implisit. Hal ini dikarenakan skema implisit dapat stabil tanpa syarat meskipun langkah-langkah penyelesaian skema implisit lebih sulit dibandingkan skema eksplisit.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan pada bab sebelumnya, dapat diperoleh kesimpulan berikut:

1. Hasil simulasi menunjukkan bahwa ketika *Froude Number* (F) kurang dari 1, tinggi gelombang yang dihasilkan adalah sebesar 0,0138 dan 0,1793 untuk *Froude Number* (F) lebih dari 1. Hal ini sesuai dengan hasil yang diperoleh dari penelitian L.H Wiryanto yang mengatakan bahwa untuk $F < 1$ akan menghasilkan tinggi gelombang yang lebih kecil daripada tinggi gundukan dan untuk $F > 1$ akan menghasilkan tinggi gelombang yang lebih besar daripada tinggi gundukan dengan tinggi gundukannya adalah sebesar 0,064. Jika dibandingkan dengan tinggi gelombang yang dihasilkan pada penelitian L.H Wiryanto untuk adalah sebesar 0,016 untuk $F < 1$, maka selisihnya adalah 0,0022. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa solusi dari penelitian ini konsisten dengan penelitian sebelumnya.
2. Metode beda hingga skema implisit FTCS untuk persamaan Boussinesq stabil tanpa syarat.

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk mencari solusi numerik persamaan Boussinesq menggunakan metode Crank-Nicholson.

DAFTAR RUJUKAN

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Azis, A. dan Abdussakir. 2006. *Analisis Matematis Terhadap Filsafat Al-Quran*. Malang: UIN Malang Press.
- Chapra, S.C., & Canale, R.P. 1988. *Metode Numerik Jilid 1, Edisi Kedua*. Terjemahan I. Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.
- Djohan, W. 1997. Dinamika Gelombang Cnoidal di Atas Dasar Tak Rata Menggunakan Persamaan Gelombang Dua Arah Boussinesq. *JMS*, 2: 87-98.
- Drazin, P.G dan Johnson, R.S. 1992. *Soliton: An Introduction*. New York: Cambridge University Press.
- Feng B. dan Mitsui, T. 1998. A Finite Difference Method for the Korteweg-de Vries and the Kadomtsev-Petviashvili Equations. *Journal of Computatioal and Applied Mathematics*, 90: 95-116.
- Hafizhahullah, M.R. 2014. Faedah Tafsir QS. Al Ankabut 69. (Online), (<http://salafy.or.id/blog/2014/11/18/faedah-tafsir-qs-al-ankabut-69/>), diakses 20 September 2016.
- Hamdi, S., Enright W. H., Ouellet Y., dan Schiesser W. E.. 2004. Method of Lines Solution of the Extended Boussinesq Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*: 1-17.
- Nafilah, N. 2016. *Solusi Numerik Persamaan Boussinesq Dengan Metode Lax-Wendroff*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Munir, R. 2008. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.
- Patiroi, A. 2010. *Pemodelan Numerik Persamaan Boussinesq Menggunakan Metode Elemen Hingga 2 Langkah Tylor Galerkin*. Tesis tidak diterbitkan. Yogyakarta: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada.
- Purcell, E.J. & Varberg, D. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Kelima: Jilid 1. Terj. dari Calculus with Analytics Geometry, Fifth Edition, oleh Susila, IN, B. Kartasmita & Rawuh*. Jakarta: Erlangga.

- Ross, S.L. 1984. *Differential Equations. Third Edition. New Edition*. New York: John Wiley & Sons. Inc.
- Sandi, S. 1994. *Gempita Tarian Kosmos*. Yogyakarta: Andi Offset.
- Strauss, A.W. 2007. *Partial Differential Equations an Introduction Second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Ltd.
- Sukron, M. 2014. *Penurunan Persamaan Boussinesq pada Gelombang yang Melalui Sebuah Gundukan*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Tuasikal, M.A. 2010. *Remaja Islam Mau Mengenal Islam*. (Online), (<https://remajaislam.com/144-1-kesulitan-mustahil-mengalahkan-2-kemudahan.html>), diakses 05 September 2016.
- Wiryanto, L.H. 2010. A Solitary-like Wave Generated by Flow Passing a Bump. *Conference on Mathematics, Statistic and its Application* (pp. 1176-1183). Kuala Lumpur: ICMSA: Proceeding of the 6th IMT-GT.
- Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.

**Lampiran 1. M-File Untuk Menggambarkan Simulasi Solusi Numerik
Persamaan Boussinesq Menggunakan Beda Hingga Skema Implisit untuk
 $F = 0,25$**

```
clc,clear
figure(1),clf
format long

dx=0.15;
dt=0.015;
x=-60:dx:120;
t=0:dt:40;
e=0.1;
F=0.25;
M=length(x);
N=length(t);
u=zeros(M,N);
eta=zeros(M,N);
u(:,1)=1/e;
eta(:,1)=0;

A1=zeros(M,M);
A2=zeros(M,M);
A3=zeros(M,M);
A4=zeros(M,M);
D=zeros(2*(M),1);
C=zeros(2*M,2*N);
hx=zeros(M,1);

for i=1:length(x)
    if x(i) >= 20 && x(i) <= 35
        hx(i)=(2*x(i) - 56)/(10*((x(i) - 28)^2 + 1)^2);
    else
        hx(i)=0;
    end
end

plot(x,eta(:,1),'b')
ylim([-0.02 0.03])
pause(0.01)

for n=1:N-1
    j=1;
    g3=-(u(j+2,n)/2)+u(j,n)/2;
    g4=-(eta(j+2,n)/2)+eta(j,n)/2;

    j=M;
    g5=u(j,n)/2-u(j-2,n)/2;
    g6=eta(j,n)/2-eta(j-2,n)/2;
```

```

for j=2:M-1
    a1=-F/(2*dx);
    b1=(e*F/(2*dx))*eta(j+1,n)-(e*F/(2*dx))*eta(j-1,n);
    c1=F/(2*dx);
    d1=(-e*F/(2*dx))*u(j,n);
    e1=1/dt;
    f1=(e*F/(2*dx))*u(j,n);
    g1=((e*F/(2*dx))*eta(j+1,n)-(e*F/(2*dx))*eta(j-1,n))*u(j,n)+(eta(j,n)/dt)-F*hx(j);
    a2=-(F^2)/(2*dx);
    b2=F/dt;
    c2=(F^2)/(2*dx);
    d2=-1/(2*dx);
    f2=1/(2*dx);
    g2=(F/dt)*u(j,n);

    A1(1,1)=1;
    A1(1,2)=-1;
    A1(M,M-1)=-1;
    A1(M,M)=1;

    A4(1,1)=1;
    A4(1,2)=-1;
    A4(M,M-1)=-1;
    A4(M,M)=1;

    A1(j,j-1)=a1;
    A2(j,j-1)=d1;
    A3(j,j-1)=a2;
    A4(j,j-1)=d2;

    A1(j,j)=b1;
    A2(j,j)=e1;
    A3(j,j)=b2;
    A4(j,j)=0;

    A1(j,j+1)=c1;
    A2(j,j+1)=f1;
    A3(j,j+1)=c2;
    A4(j,j+1)=f2;

    D(1,1)=g3;
    D(j,1)=g1;
    D(M+1,1)=g4;
    D(M,1)=g5;
    D(j+M,1)=g2;
    D(2*M,1)=g6;
end

A=[A1,A2;A3,A4];
C=A\D;

u(:,n+1) = C(1:M);
eta(:,n+1) = C(M+1:2*M);

```

```

        plot(x,eta(:,n+1),'b')
        ylim([-0.02 0.03])
        pause(0.01)
    end

```

```

clc,clear

```

```

load('x1.mat')
load('t1.mat')
load('u1.mat')
load('eta1.mat')

```

```

r1=find(x==0);
r2=find(x==60);
p1=find(t==15);

```

```

x=x(r1:r2);
t=t(1:p1);

```

```

eta=eta(r1:r2,1:p1);

```

```

figure(1),clf

```

```

plot(x,eta(:,1),'b')
xlim([x(1) x(end)])
hold on
pause(0.01)

```

```

k = 0;
plot(x,eta(:,1)+k*0.004,'b');
for n=1:p1-1;
    if mod(n,25)==0;
        k = k+1;
        plot(x,eta(:,n+1)+k*0.006,'b');
        xlim([x(1) x(end)]);
        pause(0.01);
    end
end

```

```

end
xlabel('space-x')
ylabel('\eta(x,t)')
ylim([0 0.27])

```

```

figure(2),clf

```

```

surf(x,t,eta')
zlim([-0.1 0.1])

```

```

shading interp
colormap(jet)
break

```

```

figure(3), clf
t1 = find(t==0);

```



```

subplot(3,1,1),plot(x,eta(:,t1))
ylim([-0.1 0.05]), xlim([x(1) x(end)])
ylabel('\eta(x,0)'), xlabel('space-x'), hold on
title('gelombang sebelum melalui pemecah gelombang')
H = area([20 35],[-0.01 -0.01],-0.1);
set(H,'FaceColor','b','Edgecolor','b')

t2 = find(t==7.5);
subplot(3,1,2), plot(x,eta(:,t2))
ylim([-0.1 0.05]), xlim([x(1) x(end)])
ylabel('\eta(x,7.5)'), xlabel('space-x'), hold on
title('gelombang saat melalui pemecah gelombang')
Hx = area([20 35],[-0.01 -0.01],-0.1);
set(Hx,'FaceColor','b','Edgecolor','b')

t3 = find(t==15);
subplot(3,1,3), plot(x,eta(:,t3))
ylim([-0.1 0.05]),xlim([x(1) x(end)])
ylabel('\eta(x,15)'), xlabel('space-x'), hold on
title('gelombang setelah melalui pemecah gelombang')
Hx = area([20 35],[-0.01 -0.01],-0.1);
set(Hx,'FaceColor','b','Edgecolor','b')

m = length(x);
s = length(t);

for n=1:length(t)-1
    errMax(n) = max(abs(eta(:,n+1)-eta(:,n)));
    errR(n)    = errMax(n)/max(abs(eta(:,n+1)));
end

figure(4), clf

subplot(2,1,1),plot(t(1:s-1),errMax,'r','linewidth',2), ylim([0
0.0005])
xlabel('times (t)')
ylabel('error Hampiran(\mu)')

subplot(2,1,2),plot(t(1:s-1),errR,'r','linewidth',2), ylim([0
1.5])
xlabel('times (t)')
ylabel('error Relatif Hampiran(\mu)')

```

**Lampiran 2. M-File Untuk Menggambarkan Simulasi Solusi Numerik
Persamaan Boussinesq Menggunakan Beda Hingga Skema
Implisit untuk $F = 1,5$**

```

clc,clear
figure(1),clf
format long

dx=0.15;
dt=0.015;
x=-60:dx:120;
t=0:dt:40;
e=0.1;
F=1.5;
M=length(x);
N=length(t);
u=zeros(M,N);
eta=zeros(M,N);
u(:,1)=1/e;
eta(:,1)=0;

A1=zeros(M,M);
A2=zeros(M,M);
A3=zeros(M,M);
A4=zeros(M,M);
D=zeros(2*(M),1);
C=zeros(2*M,2*N);
hx=zeros(M,1);

for i=1:length(x)
    if x(i) >= 20 && x(i) <= 35
        hx(i)=(2*x(i) - 56)/(10*((x(i) - 28)^2 + 1)^2);
    else
        hx(i)=0;
    end
end

plot(x,eta(:,1),'b')
ylim([-0.02 0.03])
pause(0.01)

for n=1:N-1
    j=1;
    g3=-(u(j+2,n)/2)+u(j,n)/2;
    g4=-(eta(j+2,n)/2)+eta(j,n)/2;

    j=M;
    g5=u(j,n)/2-u(j-2,n)/2;
    g6=eta(j,n)/2-eta(j-2,n)/2;

    for j=2:M-1
        a1=-F/(2*dx);
    end
end

```

```

b1=(e*F/(2*dx))*eta(j+1,n)-(e*F/(2*dx))*eta(j-1,n);
c1=F/(2*dx);
d1=(-e*F/(2*dx))*u(j,n);
e1=1/dt;
f1=(e*F/(2*dx))*u(j,n);
g1=((e*F/(2*dx))*eta(j+1,n)-(e*F/(2*dx))*eta(j-
1,n))*u(j,n)+(eta(j,n)/dt)-F*hx(j);
a2=-(F^2)/(2*dx);
b2=F/dt;
c2=(F^2)/(2*dx);
d2=-1/(2*dx);
f2=1/(2*dx);
g2=(F/dt)*u(j,n);

A1(1,1)=1;
A1(1,2)=-1;
A1(M,M-1)=-1;
A1(M,M)=1;

A4(1,1)=1;
A4(1,2)=-1;
A4(M,M-1)=-1;
A4(M,M)=1;

A1(j,j-1)=a1;
A2(j,j-1)=d1;
A3(j,j-1)=a2;
A4(j,j-1)=d2;

A1(j,j)=b1;
A2(j,j)=e1;
A3(j,j)=b2;
A4(j,j)=0;

A1(j,j+1)=c1;
A2(j,j+1)=f1;
A3(j,j+1)=c2;
A4(j,j+1)=f2;

D(1,1)=g3;
D(j,1)=g1;
D(M+1,1)=g4;
D(M,1)=g5;
D(j+M,1)=g2;
D(2*M,1)=g6;

end

A=[A1,A2;A3,A4];
C=A\D;

u(:,n+1) = C(1:M);
eta(:,n+1) = C(M+1:2*M);

plot(x,eta(:,n+1),'b')
ylim([-0.02 0.03])

```

```

        pause(0.01)
    end

    clc,clear

    load('x2.mat')
    load('t2.mat')
    load('u2.mat')
    load('eta2.mat')

    r3=find(x==0);
    r4=find(x==60);
    p2=find(t==15);

    x=x(r3:r4);
    t=t(1:p2);

    eta=eta(r3:r4,1:p2);

    figure(1),clf

    plot(x,eta(:,1),'b')
    xlim([x(1) x(end)])
    hold on
    pause(0.01)

    k = 0;
    plot(x,eta(:,1)+k*0.004,'b');
    for n=1:p2-1;
        if mod(n,25)==0;
            k = k+1;
            plot(x,eta(:,n+1)+k*0.07,'b');
            xlim([x(1) x(end)]);
            ylim([0 3])
            pause(0.01);
        end
    end
    xlabel('space-x')
    ylabel('\eta(x,t)')

    figure(2),clf

    surf(x,t,eta')
    zlim([-0.1 0.5])

    shading interp
    colormap(jet)
    break

    figure(3), clf
    t1 = find(t==0);
    subplot(3,1,1),plot(x,eta(:,t1))

```

```

ylim([-0.1 0.5]), xlim([x(1) x(end)])
ylabel('\eta(x,0)'), xlabel('space-x'), hold on
title('gelombang sebelum melalui pemecah gelombang')
Hx = area([20 35],[-0.06 -0.06],-0.1);
set(Hx,'FaceColor','b','Edgecolor','b')

t2 = find(t==7.5);
subplot(3,1,2), plot(x,eta(:,t2))
ylim([-0.1 0.5]), xlim([x(1) x(end)])
ylabel('\eta(x,7.5)'), xlabel('space-x'), hold on
title('gelombang saat melalui pemecah gelombang')
Hx = area([20 35],[-0.06 -0.06],-0.1);
set(Hx,'FaceColor','b','Edgecolor','b')

t3 = find(t==15);
subplot(3,1,3), plot(x,eta(:,t3))
ylim([-0.1 0.5]), xlim([x(1) x(end)])
ylabel('\eta(x,15)'), xlabel('space-x'), hold on
title('gelombang setelah melalui pemecah gelombang')
Hx = area([20 35],[-0.06 -0.06],-0.1);
set(Hx,'FaceColor','b','Edgecolor','b')

m = length(x);
s = length(t);

for n=1:length(t)-1
    errMax(n) = max(abs(eta(:,n+1)-eta(:,n)));
    errR(n) = errMax(n)/max(abs(eta(:,n+1)));
end

figure(4), clf

subplot(2,1,1), plot(t(1:s-1),errMax,'r','linewidth',2), ylim([0
0.005])
xlabel('times (t)')
ylabel('error Hampiran(\mu)')

subplot(2,1,2), plot(t(1:s-1),errR,'r','linewidth',2), ylim([0
1.5])
xlabel('times (t)')
ylabel('error Relatif Hampiran(\mu)')

```


RIWAYAT HIDUP



Maya Puspita Sari, lahir di kabupaten Banyuwangi Jawa Timur pada tanggal 5 Mei 1993, biasa dipanggil Maya, tinggal di Dusun Cendono RT 01 RW I Desa Kembiritan Kecamatan Genteng Kabupaten Banyuwangi. Anak ketiga dari tiga bersaudara pasangan bapak Saimin dan ibu Mu'alimah.

Pendidikan dasar ditempuh di SDN 01 Wringinrejo dan lulus pada tahun 2006. Setelah itu melanjutkan ke SMP Negeri 02 Srono dan lulus tahun 2009. Aktif mengikuti kegiatan Palang Merah Remaja (PMR) selama menempuh pendidikan SMP. Kemudian melanjutkan pendidikan ke SMA Negeri 01 Gambiran dan lulus tahun 2012 serta aktif mengikuti organisasi sekolah Study Kerohanian Islam (SKI). Selanjutnya, pada tahun 2012 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jln. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Maya Puspita Sari
NIM : 12610065
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Solusi Numerik Persamaan Boussinesq Menggunakan Metode Beda Hingga Implisit
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II : Evawati Alisah, M.Pd

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan	
1	15 Maret 2016	Konsultasi Bab I dan II	1.	
2	28 April 2016	Konsultasi Kajian Agama		2.
3	29 April 2016	Revisi Bab II dan III	3.	
4	18 Mei 2016	Revisi Kajian Agama		4.
5	25 Mei 2016	Acc Bab I, II	5.	
6	26 Mei 2016	Acc Kajian Agama		6.
7	22 Agustus 2016	Konsultasi Bab III	7.	
8	01 September 2016	Konsultasi Kajian Agama		8.
9	23 September 2016	Konsultasi Bab I, II, III, dan IV	9.	
10	27 September 2016	Revisi Kajian Agama		10.
11	28 September 2016	Revisi Bab I, II, III, Bab IV, dan Abstrak	11.	
12	04 Oktober 2016	Acc Keseluruhan Kajian Agama		12.
13	04 Oktober 2016	Acc Bab I, II, III, IV, dan Abstrak	13.	

Malang, 07 Oktober 2016

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd

NIP. 19751006 2003121 001