

**ESTIMASI PARAMETER MODEL STATISTIK NONLINIER
PADA FUNGSI PRODUKSI *COBB-DOUGLAS* SECARA *LEAST SQUARE*
DENGAN ITERASI *MARQUARDT-LEVENBERG***

SKRIPSI

**OLEH
CINTIA TRISTANTI
NIM. 12610061**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**ESTIMASI PARAMETER MODEL STATISTIK NONLINIER
PADA FUNGSI PRODUKSI *COBB-DOUGLAS* SECARA *LEAST SQUARE*
DENGAN ITERASI *MARQUARDT-LEVENBERG***

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Cintia Trisanti
NIM. 12610061**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

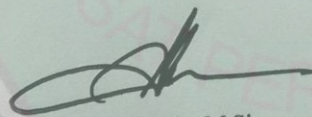
**ESTIMASI PARAMETER MODEL STATISTIK NONLINIER
PADA FUNGSI PRODUKSI COBB-DAUGLAS SECARA LEAST SQUARE
DENGAN ITERASI MARQUARDT-LEVENBERG**

SKRIPSI

Oleh
Cintia Trisanti
NIM. 12610061

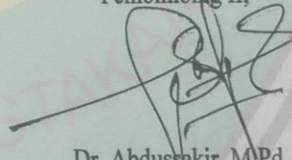
Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 20 Desember 2016

Pembimbing I,



Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Pembimbing II,



Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika



Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**ESTIMASI PARAMETER MODEL STATISTIK NONLINIER
PADA FUNGSI PRODUKSI COBB-DOUGLAS SECARA LEAST SQUARE
DENGAN ITERASI MARQUARDT-LEVENBERG**

SKRIPSI

Oleh
Cintia Trisanti
NIM. 12610061

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 27 Desember 2016

Penguji Utama : Dr. Sri Harini, M.Si

Ketua Penguji : Ir. Nanang Widodo, M. Si

Sekretaris Penguji : Abdul Aziz, M.Si

Anggota Penguji : Dr. Abdussakir, M.Pd

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika


Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Cintia Trisanti

NIM : 12610061

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Estimasi Parameter Model Statistik Nonlinier pada Fungsi
Produksi *Cobb-Douglas* secara *Least Square* dengan Iterasi
Marquardt-Levenberg

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 02 Januari 2017
Yang membuat pernyataan,



Cintia Trisanti
NIM. 12610061

MOTO

Kerjakanlah, Wujudkanlah, Raihlah dengan Bekerja Keras Bukan Hanya

Angan dalam Mimpi



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Dadang Sutrisno, ibunda Siti Jumiati, kakak tercinta Deden Sastra Saputra dan adik tercinta Aprilia Nurcah Yanti yang telah memberikan semangat kepada penulis, rasa kasih sayang yang tak terhingga, serta panjatan doa yang tiada henti dilantunkan dalam setiap doa untuk mewujudkan cita-cita penulis.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw, yang telah membimbing manusia dari jalan kegelapan menuju jalan yang terang benderang yaitu agama Islam.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis banyak mendapat saran, bimbingan, arahan, doa, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis sampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya serta penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus sebagai dosen pembimbing II yang telah memberikan saran dan bantuan dalam penulisan skripsi ini.

4. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Segenap sivitas akademik, Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
6. Ayah dan Ibu tercinta yang telah mencurahkan kasih sayang, doa, bimbingan, dan motivasi hingga terselesaikannya skripsi ini.
7. Saudara-saudara tersayang yang telah memberikan semangat kepada penulis.
8. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Desember 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص	xvi
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Batasan Masalah	4
1.5 Manfaat Penelitian	5
1.6 Sistematika Penulisan	6
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Model Statistik	8
2.1.1 Model Statistik Linier	8
2.1.2 Model Statistik Nonlinier	10
2.1.3 Transformasi Model Statistik Nonlinier ke Model Statistik Linier	12
2.2 Pengertian Estimasi Parameter dan Estimator	14
2.3 Ciri-ciri Penduga Parameter (Estimator) yang Baik	15
2.4 Analisis Regresi	19
2.5 Fungsi Produksi	20
2.6 Fungsi Produksi <i>Cobb-Dauglas</i>	21
2.7 Aljabar Matriks	25
2.7.1 Matriks	25

2.7.2	Vektor	26
2.7.3	Operasi Matriks	27
2.7.4	Perkalian Antar Matriks	27
2.7.5	Pendiferensialan Matriks	28
2.8	Deret Taylor	31
2.9	Metode Estimasi dengan <i>Least Square</i>	34
2.9.1	<i>Ordinary Least Square Estimator (OLSE)</i>	35
2.9.2	<i>Nonlinear Least Square (NLS)</i>	41
2.10	Uji Korelasi	42
2.10.1	Koefisien Determinasi	43
2.10.2	Hipotesis	44
2.10.3	Uji Anova	44
2.11	Uji Multikolinieritas	45
2.12	<i>Scatter Plot</i>	47
2.13	Uji Heteroskedastisitas	48
2.14	Hasil Penelitian Estimasi Parameter Iterasi <i>Newton-Raphson</i> dari Peneliti Terdahulu	42
2.15	Kajian Agama	54
BAB III METODE PENELITIAN		
3.1	Pendekatan Penelitian	55
3.2	Jenis dan Sumber Data	56
3.3	Variabel Penelitian	57
3.4	Analisis Data	57
3.5	<i>Flowchart</i>	58
BAB IV PEMBAHASAN		
4.1	Estimasi Parameter Iterasi <i>Marquardt-Levenberg</i>	57
4.2	Aplikasi Metode <i>Marquardt-Levenberg</i>	64
4.2.1	Analisis Data	64
4.2.2	Estimasi Parameter secara <i>Marquardt-Levenberg</i>	71
4.3	Perbandingan Hasil Iterasi	77
4.4	Kajian Estimasi dalam Agama	79
BAB V PENUTUP		
4.1	Kesimpulan	83
4.2	Saran	84
DAFTAR RUJUKAN		85
LAMPIRAN-LAMPIRAN		
RIWAYAT HIDUP		

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 <i>Flowchart</i> Penelitian	58
Gambar 4.1 <i>Output</i> Analisis Regresi	66
Gambar 4.2 <i>Plot Residual Versus the Fitted Values</i>	67
Gambar 4.3 <i>Output</i> Analisis Korelasi	67
Gambar 4.4 Grafik Kekonvergenan dari β_1 dengan Iterasi <i>Marquardt-Levenberg</i>	75
Gambar 4.5 Grafik Kekonvergenan β_2 dari dengan Iterasi <i>Marquardt-Levenberg</i>	75
Gambar 4.6 Grafik Kekonvergenan dari β_3 dengan Iterasi <i>Marquardt-Levenberg</i>	75
Gambar 4.7 Grafik Kekonvergenan dari β_1 dengan Iterasi <i>Marquardt-Levenberg</i>	77
Gambar 4.8 Grafik Kekonvergenan dari β_2 dengan iterasi <i>Marquardt-Levenberg</i>	77
Gambar 4.9 Grafik Kekonvergenan dari β_2 dengan iterasi <i>Marquardt-Levenberg</i>	77

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Parameter, Penduga, dan Statistiknya	15
Tabel 2.2 Jumlah dari Pangkat $a+b$ dan <i>Return to Scale</i>	23
Tabel 4.1 Tabel Bantu Korelasi Y dengan X_1	68
Tabel 4.2 Tabel Bantu Korelasi Y dengan X_2	70
Tabel 4.3 Hasil Iterasi <i>Marquardt-Levenberg</i> untuk Fungsi Produksi <i>Cobb-Gauglas</i> pada Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur)	74
Tabel 4.4 Hasil Iterasi <i>Marquardt-Levenberg</i> untuk Fungsi Produksi <i>Cobb-Gauglas</i> pada Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur)	76
Tabel 4.5 Hasil Perbandingan Fungsi Produksi <i>Cobb-Dauglas</i> Menggunakan Iterasi <i>Marquardt-Levenberg</i> , yang Dilihat dari Besarnya Nilai Lambda (λ)	78
Tabel 4.6 Hasil Perbandingan Fungsi <i>Cobb-Dauglas</i> dengan Menggunakan Iterasi <i>Marquardt-Levenberg</i> dan <i>Newton-Raphson</i> ...	79

ABSTRAK

Trisanti, Cintia. 2016. **Estimasi Parameter Model Statistik Nonlinier pada Fungsi Produksi Cobb-Douglas secara Least Square dengan Iterasi Marquardt-Levenberg**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Dr. Abdussakir. M.Pd

Kata Kunci: model statistik nonlinier, fungsi produksi *Cobb-Dauglas*, iterasi *Marquardt-Levenberg*.

Ekonometri adalah sebagian ilmu yang menggunakan analisis matematika dan teori statistik untuk menganalisis masalah-masalah dan fenomena-fenomena secara kualitatif. Dalam ekonometri ilmu statistik yang dapat dimanfaatkan adalah dalam mencari nilai parameter. Dalam statistik terdapat dua macam model yaitu model statistik linier dan model statistik nonlinier. Pada penelitian ini model statistik nonlinier yang digunakan adalah,

$$y = f(X, \beta) + \varepsilon$$

dengan mengasumsikan. Untuk mengestimasi parameter β adalah dengan menggunakan *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE) pada fungsi produksi *Cobb-Dauglas*,

$$Q = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

dengan.

Q = produksi; L = tenaga kerja; K = modal; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ = parameter

Untuk mendapatkan nilai estimasinya diselesaikan dengan menggunakan iterasi *Marquardt-Levenberg*. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bentuk umum dari estimasi parameter model statistik nonlinier dengan iterasi *Marquardt-Levenberg* sebagai berikut:

$$\hat{\beta}^{(n+1)} = \hat{\beta}^{(n)} + \left(P^{(n)T} P^{(n)} + \lambda I \right)^{-1} \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}}$$

Hasil dari estimasi tersebut diimplemendasikan terhadap data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dengan fungsi produksi *Cobb-Dauglass*. Setelah dibandingkan dengan iterasi *Newton-Raphson* pada penelitian sebelumnya diperoleh hasil terbaik yaitu iterasi *Marquardt-Levenberg* untuk

$$\beta_1 = 13,0461358, \beta_2 = 0,44858472, \beta_3 = 0,1432433 \quad S = 0,0121663$$

Sehingga dapat ditulis menjadi

$$y = 13,0461358 L^{0,44858472} K^{0,1432433}$$

ABSTRACT

Trisanti, Cintia. 2016. **The Estimation of Nonlinear Statistic Model Parameter in Least Square Cobb-Douglas Production Function Using Marquardt-Levenberg Iteration.** Thesis. Mathematics Department, Science and Technology Faculty, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University, Malang. Advisor: (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Dr. Abdussakir. M.Pd

Keywords: nonlinear statistic model, Cobb-Dauglas production function, Marquardt-Levenberg iteration.

Econometrics is partly a science that uses mathematical analysis and statistic theory to analyze the problems and phenomena qualitatively. In econometric statistic knowledge that can be utilized is in finding the value of the parameter. In the statistics there are two kinds of models are statistic models of linear and nonlinear statistic models. In this study the authors use nonlinear model. The study employs a nonlinear statistic model:

$$y = f(X, \beta) + \varepsilon$$

by assuming that $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. To estimate the β parameter is by using Nonlinear Least Square Estimator (NLSE) in the Cobb-Dauglas production function,

$$Q = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

where:

Q = output; L = labor; K = Capital; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ = parameter

To gain the estimation value, the study employs Marquardt-Levenberg Iteration. The result shows that the general form of nonlinear statistic model parameter estimation using Marquardt-Levenberg iteration is:

$$\hat{\beta}^{(n+1)} = \hat{\beta}^{(n)} + \left(P^{(n)T} P^{(n)} + \lambda I \right)^{-1} \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} \Bigg|_{\beta^{(n)}}$$

The result of the estimation is implemented toward the data of Industrial Metals, Metal Goods, Machinery and Electronics of 1993-2012 in East Java Province using Cobb=Dauglass production function. After comparing it with Newton-Raphson iteration in the previous study, the study shows the best result using Marquardt-Levenberg iteration in which

$$\beta_1 = 13,0461358, \beta_2 = 0,44858472, \beta_3 = 0,1432433 \quad S = 0,0121663$$

So, it can be written

$$y = 13,0461358 L^{0,44858472} K^{0,1432433}$$

ملخص

جينتيا تريستانتي، ٢٠١٦. تقدير مؤشر النماذج الإحصائية غير الخطية في وظيفة الإنتاج لجوب دوغلاس (Cobb Douglas) بأقل الساحة بعملية التكرار لمرقواند - ليفينبرغ (Marquandt-Levenberg). البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا بجامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانق. المشرف الأول: عبد العزيز الماجستير. المشرف الثاني: د. عبد الشاكر الماجستير.

الكلمات الأساسية: النماذج الإحصائية غير الخطية، وظيفة الإنتاج لجوب دوغلاس (Cobb Douglas)، بعملية التكرار لمرقواند - ليفينبرغ (Marquandt-Levenberg).

. الاقتصاد القياسي هو جزئيا العلم الذي يستخدم التحليل الرياضي والنظرية الإحصائية لتحليل المشكلات والظواهر نوعيا. في المعرفة الإحصائية الاقتصاد القياسي التي يمكن استخدامها هي في العثور على قيمة المعلمة. في الإحصاءات هناك نوعان من النماذج والنماذج الإحصائية من النماذج الإحصائية الخطية وغير الخطية. في هذه الدراسة استخدام الكتاب نموذج غير الخطية. في هذا البحث، يستخدم النماذج الإحصائية غير الخطية:

$$y = f(X, \beta) + \varepsilon$$

بالافتراض $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. لتقدير مؤشر β باستخدام تقدير أقل الساحة غير الخطية أقل (NLSE) في وظيفة الإنتاج لجوب دوغلاس (Cobb Douglas)،

$$Q = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

حيث:

Q : عدد الانتاجات; L : عدد الموظفين; K : عدد رأس المال

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$: المؤشرات

وللحصول على درجة التقدير فيحلها باستخدام عملية التكرار لمرقواند - ليفينبرغ (Marquandt-Levenberg). واستنادا إلى نتائج هذا البحث تم الحصول على الشكل العام من تقدير مؤشر النماذج الإحصائية غير الخطية بأقل الساحة بعملية التكرار لمرقواند - ليفينبرغ (Marquandt-Levenberg) كما يلي:

$$\hat{\beta}^{(n+1)} = \hat{\beta}^{(n)} + \left(P^{(n)T} P^{(n)} + \lambda I \right)^{-1} \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}}$$

تنفذ نتائج من ذلك التقدير إلى بيانات شركة المعادن، والآلات الميكانيكية، المنسوجات وغيرها (ILMTA) في السنة في محافظة جاوا الشرقية بوظيفة الإنتاج لجوب دوغلاس (Cobb Douglas). بعد مقارنتها مع عملية التكرار لنيوتن رافسون (Newton Rapshon) في البحث السابق نحصل على أفضل النتائج وهي عملية التكرار لمرقواند - ليفينبرغ (Levenberg-Marquandt) كما يلي:

$$\beta_1 = 13,0461358, \beta_2 = 0,44858472, \beta_3 = 0,1432433 \quad S = 0,0121663$$

لذلك يمكن أن يكتبه كما يلي:

$$y = 13,0461358 L^{0,44858472} K^{-0,1432433}$$





BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Statistik adalah ilmu yang mempelajari bagaimana merencanakan, mengumpulkan, menganalisis, menginterpretasi, dan mempresentasikan data (Harini dan Turmudi, 2008). Penggunaan metode statistik dalam penelitian ilmiah sebetulnya telah dirintis sejak tahun 1880 ketika F. Galton pertama kali menggunakan korelasi dalam penelitian ilmu hayat. Ketika itu, penggunaan metode statistik dalam penelitian biologi maupun sosial tidak dapat dikatakan lazim. Bahkan pada akhir abad ke-19, kecaman-kecaman pedas acapkali dilontarkan terhadap Karl Pearson yang memelopori penggunaan metode statistik dalam berbagai penelitian biologi maupun pemecahan persoalan yang bersifat sosio-ekonomi (Anton, 2004). Kini metode statistik banyak digunakan dalam penelitian ilmiah. Salah satunya dalam ekonometri, yang merupakan bagian dari ilmu ekonomi.

Ekonometri adalah sebagian ilmu yang menggunakan analisis matematika dan teori statistik untuk menganalisis masalah-masalah dan fenomena-fenomena secara kualitatif (Firdaus, 2004). Dalam ekonometri ilmu statistik yang dapat dimanfaatkan adalah dalam mencari nilai parameter. Dalam statistik terdapat dua macam model yaitu, model statistik linier dan model statistik nonlinier. Sifat nonlinier dalam suatu model dapat terjadi dalam parameter, nonlinier dalam variabel ataupun keduanya. Salah satu contoh model nonlinier dalam ekonometri adalah pada fungsi produksi *Cobb-Douglas*.

Seperti halnya model linier, estimasi parameter model nonlinier didasarkan pada minimisasi atau maksimisasi suatu fungsi objektif yaitu metode *Least Square Estimator* (LSE) dan *Maximum Likelihood Estimator* (MLE) (Aziz, 2010). Estimasi parameter dengan metode *nonlinear least square* dilakukan dengan meminimumkan residual *sum of squares*, yaitu *sum of squares error* yang memberikan titik paling minimum, sedangkan dalam *maximum likelihood* adalah dengan memaksimumkan *log likelihood function* yaitu *sum of squares error* yang memberikan titik maksimum pada *likelihood function*-nya.

Estimasi kedua metode tersebut akan menghasilkan nilai taksiran β yang sama. Perbedaannya terletak pada penaksiran σ^2 , di mana metode *nonlinear least square* menghasilkan penaksir yang *unbiased*, sedangkan penaksiran σ^2 dengan metode *maximum likelihood* menghasilkan penaksir yang *biased*. Beberapa metode estimasi *nonlinear least square* yang menggunakan *first order condition* adalah iterasi *Gauss-Newton* dan iterasi *Marquardt-Levenberg*, sedangkan yang menggunakan *second order condition* adalah iterasi *Newton-Raphson* dan *Quadratic-Hill-Climbing*. Sementara itu, dalam metode *maximum likelihood*, jenis iterasi yang digunakan adalah *Newton-Raphson*, *Method of Scoring*, dan *Berndt-Hall-Hausman*.

Dalam penelitian sebelumnya telah diteliti metode estimasi *nonlinear least square* dengan menggunakan iterasi *Gauss-Newton* dan *Newton-Rhapson* pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 Provinsi Jawa Timur yang memberikan hasil bahwa iterasi *Newton-Rhapson* lebih kecil dalam mencapai kekonvergenan dibandingkan dengan menggunakan iterasi *Gauss-Newton*.

Di dalam al-Quran terdapat ayat yang membahas mengenai estimasi atau pendugaan, Allah Swt. berfirman di dalam al-Quran surat al-Jaatsiyah ayat 24, yaitu:

وَقَالُوا مَا هِيَ إِلَّا حَيَاتُنَا الدُّنْيَا نَمُوتُ وَنَحْيَا وَمَا يُهْلِكُنَا إِلَّا الدَّهْرُ وَمَا لَهُم بِذَلِكَ مِنْ عِلْمٍ
 إِنْ هُمْ إِلَّا يَظُنُّونَ

Artinya: *Dan mereka berkata: “kehidupan ini tidak lain hanyalah kehidupan di dunia saja. Kita mati dan kita hidup dan tidak ada yang membiasakan kita selai masa”. Dan mereka sekali-kali tidak mempunyai pengetahuan tentang itu mereka tidak lain hanyalah menduga-duga saja.*

Pada ayat tersebut Allah Swt. menjelaskan bahwa orang-orang kafir dan musyrik mengingkari adanya hari kiamat dan hari kebangkitan. Menurut mereka, kehidupan yang sebenarnya adalah kehidupan di dunia ini saja, tidak ada kehidupan lain setelahnya dan yang mematikan mereka adalah masa. Semua perkataan orang-orang kafir dan musyrik tersebut tidak mempunyai dasar yang kuat, melainkan mereka hanya menduga-duga saja.

Berdasarkan uraian di atas, maka judul dalam penelitian ini adalah *“Estimasi Parameter Model Statistik Nonlinier pada Fungsi Produksi Cobb-Douglas secara Least Square dengan Iterasi Marquandt-Levenberg”*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana estimasi model statistik nonlinier fungsi produksi *Cobb-Douglas* menggunakan metode *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE) dengan iterasi *Marquardt-Levenberg* ?

1.3 Tujuan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui estimasi model statistik nonlinier fungsi produksi *Cobb-Douglas* menggunakan metode *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE) dengan iterasi *Marquardt-Levenberg*.

1.4 Batasan Masalah

Untuk membatasi masalah agar sesuai dengan apa yang dimaksudkan dan tidak menimbulkan masalah baru, maka peneliti memberikan batasan sebagai berikut:

1. Model statistik nonlinier yang digunakan adalah $y = f(X, \beta) + \varepsilon$ dengan, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$.
2. Iterasi yang digunakan adalah iterasi *Marquardt-Levenberg* yang mengadaptasi dari *Gauss-Newton*.
3. Data nonlinier diambil dari data Industri Logam, Mesin, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 Provinsi Jawa Timur dengan model *Cobb-Douglas*.
4. Nilai λ yang diberikan adalah 0,3 dan 0,09.
5. *Initial Value* yang diberikan adalah $\beta_1 = 0,7$; $\beta_2 = 0,3$; $\beta_3 = 1$.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Bagi Penulis
 - a. Sebagai bentuk penerapan ilmu matematika yang telah peneliti dapatkan dibangku kuliah.
 - b. Sebagai tambahan wawasan dan pengetahuan tentang proses estimasi model statistik nonlinier fungsi produksi *Cobb-Douglas* menggunakan metode *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE) dengan iterasi *Marquardt-Levenberg*.
 - c. Sebagai media untuk mengaplikasikan dan mengembangkan pengetahuan statistik, keterampilan pengolahan data dengan *software* terkait.
2. Bagi Pembaca
 - a. Sebagai salah satu pengetahuan dan wawasan bahwa ilmu matematika dapat digunakan di berbagai bidang termasuk dalam ekonometri.
 - b. Sebagai referensi mata kuliah ekonometri yang pernah mempelajari di bangku kuliah khususnya estimasi model statistik *nonlinear least square* dengan menggunakan metode estimasi parameter *Marquardt-Levenberg*.
 - c. Dapat digunakan sebagai inspirasi dan bahan referensi untuk penelitian selanjutnya pada bidang yang sama.
3. Bagi Instansi
 - a. Penelitian ini dapat mengembangkan wawasan keilmuan matematika.
 - b. Membandingkan penelitian yang sudah ada dengan metode lain.
 - c. Menerapkan dan mengaktualisasi ilmu matematika khususnya pada mata kuliah pilihan ekonometri.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar penulisan penelitian ini lebih terarah, mudah ditelaah, dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari lima bab. Masing-masing bab dibagi kedalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini akan diuraikan tentang kajian teori yang mendasari pembahasan serta yang berhubungan dengan penelitian. Konsep-konsep tersebut antara lain berisi tentang dasar-dasar teori seperti model statistik, metode estimasi parameter, pendiferensialan matriks, deret Taylor, metode estimasi dengan *least square*, *Least Square Estimastor* (LSE), iterasi *Marquardt-Levenberg* dan kajian keagamaan.

Bab III Metode Penelitian

Pada bab ini akan diuraikan tentang metode penelitian, antara lain jenis dan sumber data, variabel penelitian, metode analisis data yang berupa persiapan penelitian dan analisis data serta *flowchart* analisis data.

Bab IV Pembahasan

Pada bab ini akan diuraikan pembahasan tentang gambaran objek penelitian dan hasil pengolahan data dengan menggunakan metode nonlinier *least square* dengan iterasi *Marquardt-Levenberg* aplikasi dari

metode *nonlinear least square* dengan data *Cobb-Dauglas* dan estimasi dalam pandangan islam.

Bab IV Penutup

Bab ini akan diuraikan tentang hasil pokok dan kesimpulan dari analisis terhadap data yang diolah dan berisi saran-saran untuk pembaca dan peneliti selanjutnya.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Model Statistik

2.1.1 Model Statistik Linier

Menurut Muhammad Firdaus (2004), istilah linier dapat ditafsirkan dengan dua cara yang berbeda, yaitu sebagai berikut:

a. Linieritas dalam Variabel

Arti pertama dari linieritas adalah ekspektasi atau harapan bersyarat (*conditional expectation*) dari y adalah suatu fungsi linier dari X_i , misalkan:

$$E(y | X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.1)$$

Suatu fungsi $y = f(X)$ dikatakan linier dalam variabel X , jika X berpangkat satu. Sedangkan untuk persamaan berikut:

$$E(y | X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i^2 \quad (2.2)$$

bukan merupakan fungsi linier dalam variabel karena variabel X berpangkat dua. Akan tetapi fungsi tersebut dapat juga dikatakan sebagai fungsi linier jika X_i^2 diganti dengan Z_i atau nama lain yang berpangkat satu, seperti:

$$E(y | X_i) = \beta_1 + \beta_2 Z_i \quad (2.3)$$

b. Linieritas dalam Parameter

Arti linieritas yang kedua adalah ekspektasi atau harapan bersyarat (*conditional expectation*) dari y , $E(y | X_i)$ adalah sebuah fungsi linier dari parameter-parameternya, parameter β bisa saja linier atau bisa juga tidak

linier untuk variabel X -nya. Dalam hal ini, contoh linier dalam parameter adalah

$$E(y | X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i^2 \quad (2.4)$$

Sedangkan untuk persamaan berikut:

$$E(y | X_i) = \beta_1 + \beta_2^{\beta_3} X_i \quad (2.5)$$

Bukan merupakan fungsi linier dalam parameter karena β_2 tidak berpangkat satu. Dalam hal ini, $\beta_2^{\beta_3}$ tidak dapat diganti dengan β_4 (Firdaus, 2004).

Dari kedua interpretasi tersebut, linieritas dalam parameter relevan terhadap pembentukan teori regresi. Oleh karena itu, terminologi regresi “linier” akan selalu berarti sebuah regresi yang linier dalam parameter-parameternya. β -nya berpangkat satu saja. Parameter untuk variabel penjelasnya atau X -nya bisa saja linier atau tidak linier. Jadi, $E(y | X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i$ linier untuk keduanya, yaitu linier dalam variabel atau linier dalam parameter. Sedangkan $E(y | X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i^2$ linier dalam parameter akan tetapi tidak linier dalam variabel X (Gujarati, 2010).

Menurut Nicholson (2005), model regresi dengan respon tunggal dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon \quad (2.6)$$

dengan,

y = variabel dependen

β = koefisien regresi

X = variabel independen

ε = error

Jika pencarian variabel dependen dan nilai gabungan variabel independen yang dinyatakan dengan model secara komplit, maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_{1,1} + \beta_2 X_{1,2} + \dots + \beta_k X_{1,k} + \varepsilon_1 \\ y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_{2,1} + \beta_2 X_{2,2} + \dots + \beta_k X_{2,k} + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ y_n &= \beta_0 + \beta_1 X_{n,1} + \beta_2 X_{n,2} + \dots + \beta_k X_{n,k} + \varepsilon_n, \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dari persamaan (2.7) dapat dinotasikan dalam bentuk matriks yaitu,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{1,1} & \dots & x_{k,1} \\ 1 & x_{2,1} & \dots & x_{k,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n,1} & \dots & x_{n,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

yang dapat diringkas dalam persamaan umum menjadi

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (2.8)$$

dengan,

$$E(\varepsilon) = 0$$

$$\text{var}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma^2$$

2.1.2 Model Statistik Nonlinier

Persamaan nonlinier adalah persamaan dalam bentuk polinom yang variabelnya berderajat lebih dari satu atau kurang dari satu dan terjadi perkalian antara variabelnya. Model statistik nonlinier merupakan suatu fungsi yang menghubungkan variabel terikat Y dengan variabel bebas X yang sifatnya tidak konstan untuk setiap perubahan nilai X (Suharyadi dan Purwanto, 2009).

Pada model statistik nonlinier ada beberapa model yang dapat ditransformasikan dari bentuk awal nonlinier kemudian ditransformasikan ke

bentuk linier dan ada pula yang tidak dapat ditransformasikan ke bentuk linier seperti persamaan berikut:

$$y = \beta_0 + \exp(\beta_1 X) + \varepsilon \quad (2.9)$$

$$\ln(y) = \ln(\beta_0 + \exp(\beta_1 X) + \varepsilon) \quad (2.10)$$

Dari transformasi model persamaan (2.10) terlihat bahwa model tidak dapat dilinierkan karena $\exp(\beta_1 X)$ tidak dapat dipisahkan.

Menurut Syamsuddin (2006), pada umumnya realitas perekonomian dapat dilakukan dengan pendekatan secara linier atau ditransformasikan dalam bentuk linier. Namun demikian, banyak juga model nonlinier yang tidak bisa ditransformasikan ke bentuk linier. Oleh karena itu, diperlukan model nonlinier dalam pemecahannya. Tidak berbeda dengan model linier, estimasi model nonlinier didasarkan pada minimasi (*least square estimator*) atau maksimasi (*maksimum likelihood estimator*) fungsi objektif. Penaksiran terhadap parameter model nonlinier akan menghasilkan nilai yang berbeda untuk penaksiran yang sama karena *error random*-nya mempunyai fungsi power. Oleh karena itu, *least square estimator* diterapkan pada model nonlinier dengan melakukan suatu prosedur atau algoritma yang dapat menjamin bahwa penaksiran tersebut secara nyata memenuhi kriteria dari fungsi tujuan, yaitu memberikan *the sum of square error* pada titik yang paling minimum.

Menurut Syamsuddin (2006), dalam penentuan penaksiran pada model nonlinier diperlukan pengetahuan mengenai *static optimization theory*. Berdasarkan teori, untuk menentukan titik optimum yang diyakini solusi dalam penentuan penaksiran model nonlinier akan digunakan operasi *first* dan *second derivative test*. *Firs derivative test* digunakan dalam beberapa prosedur iterasi,

yaitu iterasi *Gauss-Newton* dan *Marquardt-Levenberg*, sedangkan yang menggunakan *second derivative test*, yaitu iterasi *Newton-Rephson* dan *Quadratic-Hill-Climbing*. Dari beberapa prosedur iterasi penulis hanya menggunakan salah satu dari beberapa bentuk prosedur iterasi yaitu diterapkan dalam menentukan metode iterasi *Marquardt-Levenberg*.

2.1.3 Transformasi Model Statistk Nonlinier ke Model Statistik Linier

Menurut Hasan (2002), terdapat beberapa macam bentuk nonlinier yang dapat ditransformasikan ke dalam bentuk linier, antara lain:

1. Bentuk Power

$$y_i = \beta_0 X_i^{\beta_1} \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.11)$$

Pada persamaan (2.11) dapat dilakukan dengan transformasi logaritma, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \ln(y_i) &= \ln(\beta_0 X_i^{\beta_1} \varepsilon_i) \\ &= \ln(\beta_0 X_i^{\beta_1}) + \ln \varepsilon_i, \\ &= \beta_1 \ln(\beta_0 X_i) + \ln \varepsilon_i, \\ &= \beta_1 \ln \beta_0 + \ln X_i + \ln \varepsilon_i, \end{aligned}$$

maka didapatkan

$$y_i^* = X_i \beta^* X_i + \varepsilon_i^* \quad (2.12)$$

Yang mana,

$$y_i^* = \ln y_i, \quad \beta^* = \beta_1 \ln \beta_0, \quad \varepsilon_i^* = \ln \varepsilon$$

Bentuk power ini setelah ditransformasikan termasuk dalam bentuk linier.

2. Bentuk Eksponensial

$$y_i = \exp(X_i \beta) \varepsilon_i \quad (2.13)$$

Dari persamaan (2.13) dilakukan dengan transformasi logaritma, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\ln(y_i) &= \ln(\exp(X_i\beta)\varepsilon_i) \\ &= \ln(\exp(X_i\beta)) + \ln \varepsilon_i, \\ &= (X_i\beta) \ln(\exp) + \ln \varepsilon_i, \\ &= (X_i\beta)(1) + \ln \varepsilon_i, \\ &= (X_i\beta) + \ln \varepsilon_i\end{aligned}$$

bentuk eksponensial ini merupakan model linier. Sehingga bentuk transformasi dari bentuk eksponensial dapat juga dikatakan sebagai model statistik linier jika,

$$y_i^* = X_i\beta + \varepsilon_i^*, \quad (2.14)$$

dengan,

$$y_i^* = \ln(y_i) \quad \text{dan} \quad \varepsilon_i^* = \ln \varepsilon_i$$

3. Bentuk Resiprokal

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1}{x_i} \right) + \varepsilon_i \quad (2.15)$$

Persamaan (2.15) merupakan model nonlinier pada variabel X karena variabel ini memasuki model secara terbaik atau resiproksi. Model ini linier dalam β_1 dan β_2 , akan tetapi model ini dapat juga dikatakan sebagai model linier dalam parameter dan linier dalam variabel jika dimisalkan $X_i^* = \frac{1}{x_i}$ sehingga diperoleh

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i^* + \varepsilon_i \quad (2.16)$$

2.2 Pengertian Estimasi Parameter dan Estimator

Salah satu konsep paling dasar adalah penarikan sampel (*sampling*). Sampel diambil dari suatu kelompok yang lebih besar yang disebut dengan populasi. Populasi sering dikatakan sebagai himpunan keseluruhan objek yang diselidiki, sedangkan sampel merupakan himpunan bagian populasi. Karakteristik atau konstanta dari suatu populasi disebut parameter, sedangkan suatu harga yang dihitung dari sampel dinamakan statistik. Parameter adalah hasil pengukuran yang menggambarkan karakteristik dari populasi (Harini dan Turmudi, 2008).

Menurut Hasan (2002), parameter adalah nilai yang mengikuti acuan keterangan atau informasi yang dapat menjelaskan batas-batas atau bagian-bagian tertentu dari suatu sistem persamaan. Menurut Harini dan Turmudi (2008), parameter adalah hasil pengukuran yang menggambarkan karakteristik dari populasi. Sedangkan penduga adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau manaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Penduga merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan populasi dari sampel, dalam hal ini sampel peubah acak (*random*) yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan pendugaan ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui. Secara umum, parameter diberi lambang β dan penduga diberi lambang $\hat{\beta}$.

Dalam statistika, estimasi adalah metode untuk mengetahui taksiran nilai-nilai suatu populasi dengan menggunakan nilai-nilai sampel statistik. Nilai-nilai populasi sering disebut dengan parameter populasi. Sedangkan nilai-nilai populasi sering disebut dengan statistik sampel. Estimasi (*estimation*) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau memperkirakan hubungan

parameter populasi yang tidak diketahui. Estimasi juga merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan informasi dari sampel. Dalam hal ini, peubah acak yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi, dengan estimasi ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002).

Penduga (estimator) adalah suatu nilai statistik (harga sampel) yang digunakan untuk menduga suatu parameter. Dengan penduga, dapat diketahui seberapa jauh suatu parameter populasi yang tidak diketahui berada di sekitar sampel (statistik sampel). Secara umum, parameter diberi lambang θ dan penduganya diberi lambang $\hat{\theta}$. Untuk lebih jelasnya perhatikan tabel berikut ini:

Tabel 2.1 Parameter, Penduga, dan Statistiknya

Parameter (θ)	Pendugaan ($\hat{\theta}$)	Statistik
μ (rata-rata populasi)	$\hat{\mu}$	\bar{x}
π (proporsi/persentase)	$\hat{\pi}$	ρ
σ^2 (varians)	$\hat{\sigma}^2$	S^2
σ (simpangan baku)	$\hat{\sigma}$	S
ρ (koefisien korelasi)	$\hat{\rho}$	r
β (koefisien regresi)	$\hat{\beta}$	b

(Sumber: Hasan, 2002:112)

Karena penduga merupakan fungsi dari nilai-nilai sampel, maka penduga termasuk peubah acak dan memiliki distribusi *sampling* (distribusi pemilihan sampel) (Hasan, 2002).

2.3 Ciri-Ciri Penduga Parameter (Estimator) yang Baik

Penduga parameter (estimator) adalah anggota peubah acak dari nilai statistik yang mungkin untuk suatu parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan pendugaan terhadap data dari sesuatu contoh disebut nilai duga (*estimate*) (Yitnosumarto, 1990).

Menurut Hasan (2002) dan Yinosumarto (1990), banyak ciri atau syarat untuk menentukan apakah sebuah penduga tergolong baik atau tidak. Suatu penduga dikatakan baik apabila memiliki ciri-ciri berikut:

1. Tidak Bias

Suatu estimasi dikatakan tidak bias bagi parameternya (β) jika nilai penduga sama dengan nilai yang diduga (parameternya). Misalkan terdapat parameter β , jika $\hat{\beta}$ merupakan penduga tidak bias dari parameter β , maka rata-rata sampel dari populasi nilainya sama dengan β

$$E(\hat{\beta}) = \beta \quad (2.17)$$

Sebaliknya, suatu penduga (β) disebut bias bagi parameternya jika nilai penduga tersebut tidak sama dengan nilai yang diduga (parameternya).

Misalkan $s^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n(n-1)}$ merupakan penduga yang bias dari σ^2 , sebab

$$E(S^2) \neq \sigma^2.$$

Besarnya bias dari penduga dapat dicari dengan rumus:

$$\text{bias (penduga)} = E(\text{penduga}) - \text{penduga} \quad (2.18)$$

Penduga bias dapat berupa:

- a. Penduga bias positif, apabila: $E(\hat{\beta}) > \beta$;
- b. Penduga bias negatif, apabila: $E(\hat{\beta}) < \beta$.

2. Efisien

Jika distribusi sampel dari dua statistik memiliki rata-rata atau ekspektasi yang sama, maka statistik dengan variansi yang lebih kecil disebut sebagai

estimator efisien dari mean, sementara statistik yang lain disebut estimator tak efisien. Adapun nilai-nilai yang berkorespondensi dengan statistik-statistik ini masing–masing disebut sebagai estimasi efisien dan estimasi tak efisien.

Menurut Hasan (2002), suatu penduga $(\hat{\beta})$ dikatakan efisien bagi parameter β apabila penduganya $(\hat{\beta})$ mempunyai varian yang lebih kecil. Apabila terdapat lebih dari satu penduga, estimasi yang efisien adalah jika penduganya mempunyai varian yang lebih kecil. Dua buah estimasi dapat dibandingkan efisiensinya dengan menggunakan efisien yang relatif (*relative efficiency*). Efisiensi relatif $\hat{\beta}_2$ terhadap $\hat{\beta}_1$ dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 R(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) &= \frac{E\left((\hat{\beta}_1 - \beta)^2\right)}{E\left((\hat{\beta}_2 - \beta)^2\right)} \\
 &= \frac{E\left(\hat{\beta}_1^2 - \hat{\beta}_1\beta - \beta\hat{\beta}_1 + \beta^2\right)}{E\left(\hat{\beta}_2^2 - \hat{\beta}_2\beta - \beta\hat{\beta}_2 + \beta^2\right)} \\
 &= \frac{E\left(\hat{\beta}_1^2\right) - 2E\left(\hat{\beta}_1\beta\right) + \beta^2}{E\left(\hat{\beta}_2^2\right) - 2E\left(\hat{\beta}_2\beta\right) + \beta^2} \\
 &= \frac{E\left(\hat{\beta}_1^2\right) - 2\beta E\left(\hat{\beta}_1\right) + \beta^2}{E\left(\hat{\beta}_2^2\right) - 2\beta E\left(\hat{\beta}_2\right) + \beta^2} \\
 &= \frac{E\left(\hat{\beta}_1^2\right) - 2\beta\beta + \beta^2}{E\left(\hat{\beta}_2^2\right) - 2\beta\beta + \beta^2} \\
 &= \frac{E\left(\hat{\beta}_1^2\right) - 2\beta^2 + \beta^2}{E\left(\hat{\beta}_2^2\right) - 2\beta^2 + \beta^2} \\
 &= \frac{E\left(\hat{\beta}_1^2\right) - \beta^2}{E\left(\hat{\beta}_2^2\right) - \beta^2} \\
 &= \frac{E\left(\hat{\beta}_1^2\right) - (E(\beta))^2}{E\left(\hat{\beta}_2^2\right) - (E(\beta))^2} \\
 &= \frac{\text{var}\left(\hat{\beta}_1\right)}{\text{var}\left(\hat{\beta}_2\right)}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Dengan keterangan bahwa jika $R > 1$ maka $\text{var } \hat{\beta}_1 > \text{var } \hat{\beta}_2$ artinya, secara relatif $\hat{\beta}_2$ lebih efisien daripada $\hat{\beta}_1$, dan jika $R < 1$ maka $\text{var } \hat{\beta}_1 < \text{var } \hat{\beta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\beta}_1$ lebih efisien daripada $\hat{\beta}_2$.

3. Konsisten

Suatu penduga dikatakan konsisten jika ukuran sampel semakin bertambah maka penduga akan mendekati parameterinya. Jika besarnya sampel menjadi tak berhingga maka penduga konsisten harus dapat memberi suatu penduga titik yang sempurna terhadap parameterinya. $\hat{\beta}$ merupakan penduga konsisten, jika dan hanya jika:

$$E(\hat{\beta} - \beta)^2 \rightarrow 0 \text{ jika } n \rightarrow \infty \quad (2.20)$$

Rata-rata sampel \bar{X} merupakan penduga μ yang konsisten karena:

1. Bias rata-ratanya = 0 untuk sembarang n .
2. $\text{var}(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ jika sampelnya $(n) \rightarrow \infty$

Serta jika ukuran sampel bertambah tak berhingga maka distribusi sampling penduga akan mengecil menjadi suatu garis tegak lurus di atas parameter yang sebenarnya dengan probabilitas sama dengan satu. Dengan catatan bahwa suatu penduga konsisten belum tentu merupakan penduga yang baik, karena konsisten hanya merupakan salah satu dari syarat.

2.4 Analisis Regresi

Menurut Sembiring (1995), regresi pertama kali diperkenalkan oleh seorang ilmuwan yang bernama Sir Francis Galton pada tahun 1887. Analisis

regresi adalah teknis analisis yang mencoba menjelaskan bentuk hubungan antara peubah-peubah yang mendukung sebab akibat. Prosedur analisisnya didasarkan atas distribusi probabilitas bersama peubah-peubahnya. Bila hubungan ini dapat dinyatakan dalam persamaan matematik, maka dapat memanfaatkan untuk keperluan lain misalnya peramalan.

Secara umum, dapat dikatakan bahwa analisis regresi berkenaan dengan studi ketergantungan suatu variabel, yaitu variabel tak bebas pada satu atau lebih variabel yang lain yaitu, variabel bebas dengan maksud menduga dan tak meramalkan nilai rata-rata hitung (*mean*) atau rata-rata (populasi) dari variabel tak bebas, dipandang dari segi nilai yang diketahui atau tetap (dalam pengambilan sampel berulang) dari variabel bebas (Firdaus, 2004).

Dengan menggunakan analisis regresi dalam penelitian, maka hal utama dari analisis regresi ini adalah untuk mendapatkan dugaan (ramalan) dari suatu variabel dengan menggunakan variabel lain yang diketahui. Analisis regresi memiliki dua jenis pilihan yaitu regresi linier dan regresi tak linier.

2.5 Fungsi Produksi

Menurut Suprayitno (2005), di dalam proses produksi, faktor produksi mempunyai hubungan yang sangat erat dengan produk yang dihasilkan. Produk sebagai *output* (keluaran) dari proses produksi sangat bergantung dari faktor produksi sebagai *input* (masukan) dalam proses produksi tersebut.

Sedangkan proses produksi tergantung pula dari faktor produksi yang masuk ke dalamnya. Hal ini berarti nilai produk yang dihasilkan tersebut tergantung dari nilai faktor produksi yang dikorbankan dalam proses produksinya.

Keterkaitan antara nilai produk (*output*) dengan nilai faktor produksi (*input*) dalam proses produksi itu disebut fungsi produksi (Suprayitno, 2005)

Untuk memproduksi suatu barang atau jasa, perusahaan memerlukan sumber atau faktor produksi yaitu, *input-input* yang dibutuhkan untuk menciptakan *output* produk. Secara matematik hubungan antara faktor produksi atau *input* dan hasil produksi atau *output* dirumuskan sebagai berikut:

$$Q = f(K, L, T, N) \quad (2.21)$$

dengan,

$Q =$ *Quanting* (*Output* atau Produk)

$K =$ *Capital* (modal)

$L =$ *Labour* (tenaga kerja)

$T =$ Teknologi

$N =$ *Nature* (Tanah atau Sumber Daya Alam)

$S =$ *Skill* (*Entrepreneur*)

Fungsi hubungan antara *input* dengan *output* diperoleh biaya produksi untuk masing-masing tingkat *output*. Fungsi produksi yang disusun dalam persamaan matematik di atas mengandung arti bahwa barang/jasa yang dihasilkan (Q) merupakan akibat dari masukan (K, L, R, T) yang diproses. Jika salah satu sumberdaya masukkan diubah maka keluaran (*output*) akan berubah (Suprayitno, 2005).

Menurut Suprayitno (2005), Terdapat empat jenis fungsi produksi, yaitu:

1. Fungsi produksi linier.
2. Fungsi produksi *fixed proportion*.
3. Fungsi produksi *Cobb-Douglas*.

4. Fungsi Produksi CES (*Constant Elasticity of Substitution*).

2.6 Fungsi Produksi *Cobb-Douglas*

Menurut Josep (2005), fungsi produksi yang umum digunakan dalam estimasi empiris adalah fungsi pangkat, yaitu dalam bentuk berikut ini,

$$Q = AK^aL^b \quad (2.22)$$

dengan,

Q = jumlah *output*

K = jumlah modal

L = jumlah tenaga kerja

A, a, b = parameter untuk diestimasi secara empiris

Persamaan (2.22) sering disebut sebagai fungsi produksi *Cobb-Dauglas*, karena fungsi ini pertama kali diperkenalkan oleh Charles W. Cobb dan Paul H. Dauglas pada tahun 1920-an.

Menurut Josep (2005), fungsi produksi *Cobb-Douglas* ini mempunyai beberapa ciri yang sangat berguna,

1. Produk marginal dari modal dan tenaga kerja bergantung pada jumlah modal dan tenaga kerja yang digunakan dalam produksi. Persamaan dari kedua produk marginal dapat ditulis sebagai berikut:

Persamaan produk marginal dari modal adalah,

$$\begin{aligned} MP_k &= \frac{dQ}{dK} \\ &= a(AK^{a-1}L^b) \\ &= a\left(\frac{AK^aL^b}{K}\right) \\ &= a\frac{Q}{K} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Demikian pula, persamaan produk marginal dari tenaga kerja adalah,

$$\begin{aligned}
 MP_L &= \frac{dQ}{dL} \\
 &= b(AK^a L^{b-1}) \\
 &= b(AK^a L^b L^{-1}) \\
 &= b\left(\frac{AK^a L^b}{L}\right) \\
 &= b\left(\frac{Q}{L}\right)
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

MP_K dan MP_L adalah positif dari produksi untuk modal dan tenaga kerja.

2. Pangkat dari *input* K dan L, yaitu a dan b menunjukkan elastisitas *output* dari modal dan tenaga kerja. Kedua elastisitas *output* tersebut adalah sebagai berikut:

Elastisitas *output* dari modal adalah.

$$E_K = \frac{dQ}{dK} \cdot \frac{K}{Q} = \frac{aQ}{K} \cdot \frac{K}{Q} = a \tag{2.25}$$

Demikian pula, elastisitas *output* dari tenaga kerja adalah,

$$E_L = \frac{dQ}{dL} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{bQ}{L} \cdot \frac{L}{Q} = b \tag{2.26}$$

Selain itu, jumlah dari pangkat, yaitu $a+b$ dapat mengukur *returns to scale*. Jika $a+b=1$, maka *constant return to scale*, $a+b>1$ maka *increasing returns to scale* dan $a+b<1$ maka *decreasing returns to scale* atau dapat diperinci dalam tabel berikut ini:

Tabel 2.2 Jumlah dari Pangkat $a+b$ dan *Return to Scale*

Jumlah dari pangkat $a+b$	<i>Return to scale</i>
Lebih kecil dari satu	Menurun
Sama dengan satu	Tetap
Lebih besar dari satu	Menaik

(Sumber: Josep (2005:37))

3. Fungsi produksi *Cobb-Dauglas* dapat diestimasi melalui analisis regresi dengan mentransformasikannya ke dalam bentuk logaritma yang linier, yaitu:

$$\begin{aligned}
 Q &= AK^aL^b \\
 \ln Q &= \ln(AK^aL^b) \\
 &= \ln(A) + \ln(K^aL^b) \\
 &= \ln(A) + \ln(K^a) + \ln(L^b) \\
 &= \ln(A) + a \ln(K) + b \ln(L)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

sehingga bentuk ini dapat ditransformasikan dalam bentuk linier.

Menurut Aziz (2010), terdapat bentuk fungsi *Cobb-Douglas* yang tidak dapat ditransformasikan yaitu:

$$Q = \beta_1 L^{\beta_2} C^{\beta_3} + \varepsilon \tag{2.28}$$

Bentuk ini tidak dapat ditransformasikan dalam bentuk fungsi linier. Dengan kata lain fungsi tersebut adalah fungsi produksi *Cobb-Douglas* nonlinier sehingga harus diestimasi dengan menggunakan teknik statistik nonlinier.

Adapun bentuk umum dari persamaan model statistik nonlinier adalah,

$$y = f(X, \beta) + \varepsilon \tag{2.29}$$

Dengan fungsi nonlinier dalam parameter β dan $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ yang merupakan asumsi kenormalan bahwa untuk setiap ε didistribusikan secara normal dengan,

Rata-rata	$E(\varepsilon_i) = 0$
Varians	$E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$
$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$	$E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad i \neq j$

catatan bahwa untuk dua variabel yang didistribusikan secara normal kovarians dan korelasinya nol berarti dua variabel tadi independen (bebas). Dengan asumsi

kenormalan, distribusi probabilitas penaksiran OLS dengan mudah diperoleh, karena merupakan sifat distribusi normal bahwa setiap fungsi linier dari variabel-variabel yang didistribusikan secara normal dengan sendirinya didistribusikan secara normal. Sehingga persamaan (2.29) dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_i = f(X_i, \beta) + \varepsilon_i \quad (2.30)$$

Dengan, $y_i = (y_1, y_2, \dots, y_i)$; $f(X_i, \beta) = [f(X_1, \beta), f(X_2, \beta), \dots, f(X_i, \beta)]$ adalah vektor dari variabel bebas dan $\varepsilon_i = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i)$ adalah *random error* (*independent identical distributed*). Dengan $\varepsilon_i \sim iid.N(0, \sigma^2)$ maka berakibat $y_i \sim iid.N(f(X_i, \beta), \sigma^2)$ dengan $f(X_i, \beta)$ adalah fungsi nonlinier dalam parameter β . Terdapat dua cara untuk menaksir parameter β pada model statistik nonlinier, yaitu dengan metode nonlinier *least square* (Aziz, 2010).

2.7 Aljabar Matriks

2.7.1 Matriks

Menurut Josep (2005), suatu matriks didefinisikan sebagai susunan angka atau bilangan, variabel atau parameter yang berbentuk empat persegi dan biasanya ditutup dengan tanda kurung. Tanda kurung yang menutupi matriks dapat berupa:

- a) Tanda kurung siku-siku, [].
- b) Tanda kurung biasa, ().
- c) Dua garis sejajar, || ||.

bilangan-bilangan (*entri*), variabel, atau parameter yang berada di dalam tanda kurung tersebut merupakan anggota atau elemen dari matriks. Elemen-elemen dari matriks penulisannya tidak dipisahkan dengan tanda koma, melainkan

ada jarak yang kosong. Pada umumnya suatu matriks dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & a_{M3} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Tetapi ada suatu cara lain yang lebih singkat dan sederhana untuk penulisan suatu matriks, yaitu:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] \text{ yang mana } \begin{pmatrix} i=1, 2, 3, \dots, N \\ j=1, 2, 3, \dots, N \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

a_{ij} terdiri dari bilangan real, dan ini merupakan lokasi atau tempat kedudukan dari elemen dalam suatu matriks. a_{ij} ini diartikan sebagai elemen pada baris ke- i dan pada kolom ke- j dari suatu matriks. Baris dibaca secara horizontal dan menurut ke bawah, sedangkan kolom dibaca secara vertikal dari arah kiri ke kanan.

2.7.2 Vektor

Menurut Josep (2005), suatu vektor didefinisikan sebagai suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris atau satu kolom saja. Dengan kata lain, bahwa vektor adalah matriks khusus yang berdimensi $n \times 1$ atau $1 \times n$. Kemudian perlu diketahui bahwa penulisan vektor sama seperti dengan penulisan pada matriks, yang membedakan adalah vektor baris diberi tanda aksent yang berupa tanda petik tunggal ($'$), dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\mathbf{v}' = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n] \text{ atau}$$

$$\mathbf{v}' = [v_j] \text{ dengan } j = 1, 2, 3, \dots, n$$

sedangkan pada vektor kolom tidak diberi tanda, dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \text{ atau } \mathbf{u} = [u_i] \text{ yang mana } i=1, 2, 3, \dots, n$$

2.7.3 Operasi Matriks

Adapun operasi matriks yaitu, dua matriks adalah setara jika keduanya memiliki ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian adalah sama. Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka $A = B$ jika dan hanya jika $(A)_{ij} = (B)_{ij}$ atau $a_{ij} = b_{ij}$ untuk ukuran semua i dan j (Anton dan Rorres, 2004).

2.7.4 Perkalian Antarmatriks

Menurut Josep (2005), dua buah matriks dapat dikalikan jika dan hanya jika jumlah kolom dari matriks pertama sama dengan jumlah baris dari matriks kedua. Kemudian hasil perkaliannya adalah suatu matriks yang mempunyai jumlah baris sama dengan baris matriks pertama dan jumlah kolom sama dengan kolom matriks kedua.

Jika dimisalkan matriks A berdimensi $m \times n$ dan matriks B berdimensi $p \times q$, maka perkalian AB dapat dilakukan jika dan hanya jika $n = p$ hasil kali AB berdimensi $m \times q$. Jika matriks hasil kali ini dimisalkan matriks C dengan elemen-elemennya ditunjukkan oleh c_{ij} , maka elemen-elemennya adalah jumlah dari hasil kali, yang diperoleh dari elemen dalam baris ke- i matriks A dan kolom ke- j matriks B , dapat dirumusan sebagai berikut:

untuk C_{11}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots \\ b_{21} & \dots \end{bmatrix}$$

untuk C_{12}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & b_{12} \\ \dots & b_{22} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

untuk C_{21}

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots \\ b_{21} & \dots \end{bmatrix}$$

Jadi, untuk mendapatkan C_{11} sesuai dengan petunjuk (2.33) adalah:

$$\begin{aligned} C_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ C_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ C_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Selanjutnya, untuk elemen C_{ij} lainnya dapat dilakukan dengan cara yang sama, yaitu mengalikan setiap pasangannya kemudian jumlahkan hasil kalinya.

Secara umum perkalian dua buah matriks, yaitu

$A = a_{ij}$ dan $B = b_{ij}$, maka $AB = C$, yang mana C dirumuskan sebagai berikut:

$$C = [c_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{jm} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}b_{j1} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{mj}b_{jn} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Atau $c_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$ yang mana $\begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, m \\ k = 1, 2, \dots, \dots q \end{pmatrix}$

2.7.5 Pendiferensialan Matriks

Menurut Josep (2005), di dalam aljabar matriks hanya dapat digunakan pada sistem persamaan linier. Oleh sebab itu, model ekonomi yang bentuk

persamaannya bukan linier, harus ditransformasikan terlebih dahulu kedalam bentuk persamaan linier.

Menurut Gujarati (2004), terdapat dua aturan dalam pendiferensialan matriks, yaitu:

1. Jika $a^T = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N]$ adalah suatu vektor baris dengan angka-angka, dan

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Adalah vektor kolom dari variabel-variabel x_1, x_2, \dots, x_N maka

$$\frac{\partial(a^T x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = a \quad (2.37)$$

Bukti:

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(a^T x)}{\partial x^T} &= \left[\frac{\partial(a^T x)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial(a^T x)}{\partial x_N} \right] \\ &= \left[\frac{\partial(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_N x_N)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_N x_N)}{\partial x_N} \right] \\ &= [a_1 \quad \dots \quad a_N] \end{aligned} \quad (2.38)$$

selanjutnya ditransposekan kembali, sehingga terbukti bahwa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(a^T x)}{\partial x} &= \left(\frac{\partial(a^T x)}{\partial x^T} \right)^T \\ &= (a^T)^T \\ &= a \end{aligned}$$

2. Perhatikan matriks $x^T Ax$ sedemikian sehingga,

$$x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial (x^T Ax)}{\partial x} = 2Ax \quad (2.40)$$

yang merupakan vektor kolom dari N elemen, atau

$$\frac{\partial (x^T Ax)}{\partial x} = 2x^T A \quad (2.41)$$

yang merupakan vektor baris dari N elemen.

Bukti:

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x^T Ax &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1N}x_N \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2N}x_N \\ \vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \cdots + a_{MN}x_N \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1N}x_N) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2N}x_N) \\ + \cdots + x_N(a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \cdots + a_{MN}x_N) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2x_1 + \cdots + a_{1N}x_Nx_1) + (a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2N}x_Nx_2) \\ + \cdots + (a_{M1}x_1x_N + a_{M2}x_2x_N + \cdots + a_{MN}x_N^2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

turunkan terhadap x elemen ke- k , yang mana $k = 1, 2, 3, \dots, N$ menghasilkan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x^T Ax)}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial(a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2x_1 + \dots + a_{1N}x_Nx_1) + (a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2N}x_Nx_2)}{\partial x_1} \\ \dots + (a_{M1}x_1x_N + a_{M2}x_2x_N + \dots + a_{MN}x_N^2) \\ \frac{\partial(a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2x_1 + \dots + a_{1N}x_Nx_1) + (a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2N}x_Nx_2)}{\partial x_2} \\ \dots + (a_{M1}x_1x_N + a_{M2}x_2x_N + \dots + a_{MN}x_N^2) \\ \vdots \\ \frac{\partial(a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2x_1 + \dots + a_{1N}x_Nx_1) + (a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2N}x_Nx_2)}{\partial x_N} \\ \dots + (a_{M1}x_1x_N + a_{M2}x_2x_N + \dots + a_{MN}x_N^2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N) + (a_{21}x_2 + \dots + a_{M1}x_N) \\ (a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N) + (a_{12}x_1 + \dots + a_{M2}x_N) \\ \vdots \\ (a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + 2a_{MN}x_N) + (a_{1N}x_1 + a_{2N}x_N) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N) + (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{M1}x_N) \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N) + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{M2}x_N) \\ \vdots \\ (a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N) + (a_{1N}x_1 + a_{2N}x_N + \dots + a_{MN}x_N) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N) \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N) \\ \vdots \\ (a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{M1}x_N) \\ (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{M2}x_N) \\ \vdots \\ (a_{1N}x_1 + a_{2N}x_N + \dots + a_{MN}x_N) \end{bmatrix} \\ &= Ax + A^T x \end{aligned}$$

karena A adalah matriks simetris, yang mana $A^T = A$, maka

$$\frac{\partial(x^T Ax)}{\partial x} = Ax + Ax = 2Ax$$

2.8 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan suatu pondasi dalam menyelesaikan masalah-masalah yang terkait dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan

diferensial. Jika perhitungan dengan fungsi yang sesungguhnya menghasilkan solusi sejati, maka perhitungan dengan fungsi hampiran menghasilkan solusi hampiran.

Andaikan f dan semua turunannya, f', f'', f''', \dots , kontinu di dalam selang $[a, b]$. Misalkan $x_0 \in [a, b]$, maka untuk nilai-nilai x disekitar x_0 dan $x \in [a, b]$, $f(x)$ dapat diperluas (*diekspansi*) ke dalam deret Taylor berikut:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^m}{m!} f^m(x_0) + R_n \quad (2.42)$$

Dengan, R_n merupakan kesalahan pemotongan yang diberikan dalam bentuk sebagai berikut:

$$R_n = f^{(n+1)}(x_1) \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} + f^{(n+2)}(x_2) \frac{\Delta x^2}{(n+2)!} + \dots \quad (2.43)$$

Munir (2010) menyatakan bahwa persamaan (2.43) merupakan penjumlahan dari suku-suku (*term*) yang disebut deret. Perhatikan bahwa deret Taylor ini panjangnya tidak berhingga sehingga untuk memudahkan penulisan suku-suku selanjutnya menggunakan tanda ellipsis (...). Jika dimisalkan $(x - x_0) = h$, maka $f(x)$ dapat juga dituliskan sebagai berikut:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^m}{m!} f^m(x_0) + R_n \quad (2.44)$$

Nugroho (2009) menyatakan bahwa suatu teori sederhana mengenai hampiran numerik untuk turunan dapat diperoleh melalui ekspansi deret Taylor dari $f(x+h)$ disekitar x sehingga:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^m}{m!} f^m(x) + R_n \quad (2.45)$$

Menurut Bambang (2002), persamaan (2.44) yang mempunyai suku banyak tak hingga akan memberikan perkiraan nilai suatu fungsi sesuai dengan penyelesaian eksaknya.

a. Memperhitungkan suku pertama (Orde Nol)

Apabila hanya memperhitungkan suku pertama dari ruas kanan maka persamaan (2.44) dapat ditulis dalam bentuk:

$$f(x_i) \approx f(x_{i+1}) \quad (2.46)$$

Pada persamaan (2.46) yang disebut sebagai perkiraan orde nol, nilai f pada titik (x_{i+1}) sama dengan nilai (x_i) , perkiraan tersebut benar jika fungsi yang diberikan adalah suatu konstan. Jika fungsi tidak konstan maka diperkirakan fungsi-fungsi dari deret Taylor berikutnya.

b. Memperhitungkan suku pertama (Orde 1)

Bentuk deret Taylor orde satu, yang memperhitungkan dua suku pertama dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) &= f(x_i) + f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} \\ f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} \end{aligned} \quad (2.47)$$

yang merupakan bentuk persamaan garis lurus (linier).

c. Memperhitungkan suku kedua (Orde 2)

Bentuk deret Taylor orde dua, yang memperhitungkan dua suku pertama dapat dituliskan dalam bentuk:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + f'' \frac{\Delta x^2}{2!} \quad (2.48)$$

atau dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} \\
 &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{(x-x_0)f''(x_0)(x-x_0)}{2!}
 \end{aligned}
 \tag{2.49}$$

2.9 Metode Estimasi dengan *Least Square*

Metode kuadrat terkecil adalah salah satu metode yang populer dalam mengestimasi nilai rata-rata (*central moments*) dari variabel *random*. Aplikasi pertama perataan kuadrat terkecil adalah data hitungan astronomi oleh Carl F. Gauss. Keunggulan dari sisi praktis makin nyata setelah berkembangnya komputer elektronik, formulasi teknik hitungan dalam notasi matriks, dan hubungannya dengan konsep kuadrat terkecil itu ke statistik (Firdaus, 2004).

Model fungsional umum tentang sistem yang akan diamati harus ditentukan terlebih dahulu sebelum merencanakan pengukuran. Model fungsional ini ditentukan menggunakan sejumlah variabel (baik parameter maupun pengamatan) dan hubungan di antara mereka (Firdaus, 2004).

Selalu ada jumlah minimum variabel bebas yang secara unik menentukan model tersebut. Sebuah model fisis, bisa saja memiliki beberapa model fungsional yang berlainan, tergantung dari tujuan pengukuran atau informasi yang diinginkan. Jumlah minimum variabel dapat ditentukan setelah tujuan pengukuran berhasil ditetapkan, tidak terikat pada jenis pengukuran yang perlu dilakukan (Firdaus, 2004).

2.9.1 *Ordinary Least Square Estimator (OLSE)*

Menurut Gurajati (2006), metode *Ordinary Least Square Estimator* (OLSE) atau metode kuadrat terkecil biasa dikemukakan oleh Carl Friedrich

Gauss, seorang ahli matematika bangsa Jerman. Dengan asumsi-asumsi tertentu, metode OLS mempunyai beberapa sifat statistik yang sangat menarik yang membuatnya menjadi satu metode analisis regresi paling kuat (*powerfull*).

Metode *Ordinary Least Square* (OLS) merupakan salah satu metode bagian dari kuadrat terkecil dan sering hanya disebut kuadrat terkecil saja. Metode ini sering digunakan oleh para ilmuwan atau peneliti dalam proses penghitungan suatu persamaan regresi sederhana. Dalam penggunaan regresi, terdapat beberapa asumsi dasar yang dapat menghasilkan estimator linier tidak bias yang terbaik dari model regresi yang diperoleh dari metode kuadrat terkecil atau biasa dikenal dengan regresi OLS agar estimasi koefisien regresi itu bersifat *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE).

Misalkan terdapat persamaan model statistik linier

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon \quad (2.50)$$

Dengan sejumlah n data observasi maka model ini dapat ditulis dalam bentuk matriks,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Variabel ε sangat memegang peran penting dalam model ekonometrika, akan tetapi variabel ini tidak dapat diteliti dan tidak pula tersedia informasi tentang bentuk distribusi kemungkinannya. Disamping asumsi distribusi probabilitasnya, beberapa asumsi yang diperlukan dalam menerapkan metode OLSE khususnya tentang statistiknya.

Menurut Hasan (2003), berkaitan dengan model regresi yang telah dikemukakan sebelumnya, *Gauss* telah membuat asumsi mengenai variabel ε sebagai berikut:

1. Nilai rata-rata atau harapan dari ε adalah sama dengan nol atau

$$E(\varepsilon) = 0 \quad (2.52)$$

dengan, ε dan 0 adalah vektor kolom $N \times 1$ dan 0 adalah vektor nol.

$$E \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_2) \\ \vdots \\ E(\varepsilon_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Tidak terdapat korelasi serial atau autokorelasi antar variabel untuk setiap observasi. Dengan demikian dianggap bahwa tidak terdapat hubungan yang positif atau negatif antara ε_i dan ε_j dimana $i \neq j$. Heteroskedastisitas antar variabel ε untuk setiap observasi tidak ada, atau dikatakan bahwa setiap variabel ε memenuhi syarat homoskedastisitas. Artinya variabel ε mempunyai varian yang positif dan konstan yang nilainya σ^2 , yang ditulis:

$$\text{var}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma^2 \quad i = j \quad (2.53)$$

atau

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad i \neq j \quad (2.54)$$

Sehingga asumsi kedua ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \text{cov}(\varepsilon) &= E \left[(\varepsilon - E(\varepsilon)) (\varepsilon - E(\varepsilon))^T \right] \\ &= E(\varepsilon \varepsilon^T) \\ &= \sigma^2 I_n \end{aligned} \quad (2.55)$$

Menggunakan asumsi (2.53) dan (2.54) dengan notasi skalar dapat diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= E\left[(\boldsymbol{\varepsilon} - E(\boldsymbol{\varepsilon}))(\boldsymbol{\varepsilon} - E(\boldsymbol{\varepsilon}))^T\right] \\
 &= E\left[(\boldsymbol{\varepsilon} - E(\boldsymbol{\varepsilon}))(\boldsymbol{\varepsilon}^T - E(\boldsymbol{\varepsilon})^T)\right] \\
 &= E\left[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T - \boldsymbol{\varepsilon}E(\boldsymbol{\varepsilon})^T - E(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\varepsilon}^T - E(\boldsymbol{\varepsilon})E(\boldsymbol{\varepsilon})^T\right] \\
 &= E\left[\left(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T - (\boldsymbol{\varepsilon}E(\boldsymbol{\varepsilon})^T)^T - E(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\varepsilon}^T - E(\boldsymbol{\varepsilon})E(\boldsymbol{\varepsilon})^T\right)\right] \quad (2.56) \\
 &= E\left[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T - E(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\varepsilon}^T - E(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\varepsilon}^T - E(\boldsymbol{\varepsilon})E(\boldsymbol{\varepsilon})^T\right] \\
 &= E\left[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T - 0 - 0 - 0\right] \\
 &= E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T)
 \end{aligned}$$

Dalam matriks varian kovarian diperoleh:

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T) = E\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_2 & \dots & \boldsymbol{\varepsilon}_N \end{bmatrix}\right)$$

yang mana $\boldsymbol{\varepsilon}^T$ adalah transpose dari vektor kolom $\boldsymbol{\varepsilon}$, atau suatu vektor baris. Dengan melakukan perkalian, diperoleh:

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T) = E\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2 & \dots & \boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_N \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 & \dots & \boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_N\boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_N\boldsymbol{\varepsilon}_2 & \dots & \boldsymbol{\varepsilon}_N\boldsymbol{\varepsilon}_N \end{bmatrix}\right) \quad (2.57)$$

Dengan menggunakan operator harapan (E) untuk tiap unsur dalam matriks (2.57), diperoleh:

$$\begin{aligned}
 E(\varepsilon\varepsilon^T) &= \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1\varepsilon_1) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_1\varepsilon_N) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_2\varepsilon_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(\varepsilon_N\varepsilon_1) & E(\varepsilon_N\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_N\varepsilon_N) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \text{var}(\varepsilon_1) & \text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \dots & \text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_N) \\ \text{cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) & \text{var}(\varepsilon_2) & \dots & \text{cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{cov}(\varepsilon_N, \varepsilon_1) & \text{cov}(\varepsilon_N, \varepsilon_2) & \dots & \text{var}(\varepsilon_N) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Menurut asumsi homoskedastisitas, didapatkan

$$\begin{aligned}
 E(\varepsilon\varepsilon^T) &= \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} \\
 &= \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \sigma^2 I_N
 \end{aligned}$$

sehingga terbukti bahwa

$$\text{cov}(\varepsilon) = E\left[(\varepsilon - E(\varepsilon))(\varepsilon - E(\varepsilon))^T\right] = E(\varepsilon\varepsilon^T) = \sigma^2 I_n$$

3. Variabel X dan variabel ε adalah tidak saling tergantung untuk setiap observasi sehingga

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(x_i, \varepsilon_i) &= E\left[(x_i - E(x_i))(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i))\right] \\
 &= E\left[(x_i - \bar{x})(\varepsilon_i - 0)\right] \\
 &= E\left[(x_i - \bar{x})\varepsilon_i\right] \\
 &= (x_i - \bar{x})E(\varepsilon_i) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Dari ketiga asumsi diperoleh:

$$1. E(y) = X\beta \quad (2.60)$$

$$2. \text{cov}(y) = \sigma^2 I_n \quad (2.61)$$

Bukti:

1. Diberikan $y = X\beta + \varepsilon$ maka

$$\begin{aligned} E(y) &= E(X\beta) + E(e) \\ &= E(X)E(\beta) + 0 \\ &= XE(\beta) \\ &= X\beta \end{aligned} \quad (2.62)$$

Sehingga persamaan (2.60) terbukti bahwa $E(y) = X\beta$ (Gujarati, 1999:38).

2. Dari asumsi (2.52), (2.53) dan (2.54) dan $e = y - X\beta$ diperoleh,

$$\text{var}(y_i, y_j) = \sigma^2, \quad \forall i = j \quad (2.63)$$

atau

$$\text{cov}(y_i, y_j) = 0, \quad \forall i \neq j \quad (2.64)$$

Dari asumsi (2.63) dan (2.64) dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} \text{cov}(y) &= E\left[(y - E(y))(y - E(y))^T\right] \\ &= E\left[(y - X\beta)(y - X\beta)^T\right] \\ &= E\left[ee^T\right] \\ &= \sigma^2 I_n \end{aligned}$$

Misalkan sampel untuk y diberikan, maka aturan main yang memungkinkan dalam pemakaian sampel untuk mendapatkan taksiran dari β adalah dengan membuat $\varepsilon = y - X\beta$ sekecil mungkin. Dengan aturan main ini diharapkan akan menghasilkan komponen sistematis yang lebih berperan

daripada komponen stokastiknya, artinya hanya diperoleh sedikit informasi tentang y . dengan kata lain, x tidak mampu menjelaskan y (Aziz, 2010).

Untuk tujuan ini maka perlu memilih parameter β sehingga nilai fungsinya adalah

$$S = \varepsilon^T \varepsilon = (y - X\beta)^T (y - X\beta) \quad (2.65)$$

sekecil mungkin (minimal).

Karena pada persamaan (2.62) adalah skalar, sehingga komponen-komponennya juga skalar. Akibatnya, transpose skalarnya tidak mengubah nilai skalar tersebut. Sehingga S dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S &= (y - X\beta)^T (y - X\beta) \\ &= (y^T - X^T \beta^T) (y - X\beta) \\ &= y^T y - y^T X\beta - \beta^T X^T y + \beta^T X^T X\beta \\ &= y^T y - (y^T X\beta)^T - \beta^T X^T y + \beta^T X^T X\beta \\ &= y^T y - \beta^T X^T y - \beta^T X^T y + \beta^T X^T X\beta \\ &= y^T y - 2(\beta^T X^T y) + \beta^T X^T X\beta \end{aligned} \quad (2.66)$$

Untuk meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan pertama S terhadap β , yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \beta} &= \frac{\partial (y^T y - 2\beta^T X^T y + \beta^T X^T X\beta)}{\partial \beta} \\ &= 0 - 2 \frac{\partial (\beta^T X^T y)}{\partial \beta} + \frac{\partial (\beta^T X^T X\beta)}{\partial \beta} + \left(\frac{\partial (\beta^T X^T X\beta)}{\partial \beta^T} \right)^T \\ &= -2X^T y + X^T X\beta + (\beta^T X^T X)^T \\ &= -2X^T y + X^T X\beta + X^T X\beta \\ &= -2X^T y + 2(X^T X\beta) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Dan persamaan (2.67) disamadengankan nol sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 -2X^T y + 2(X^T X \beta) &= 0 \\
 2(X^T X \beta) &= 2X^T y \\
 X^T X \beta &= X^T y
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Dan hasil estimasi parameter β diperoleh dengan menyamakan hasil turunan ini dengan nol, sehingga pada saat hasil turunan jumlah kuadrat *error* disamakan dengan nol parameter β menjadi $\hat{\beta}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 -2X^T y + 2(X^T X \hat{\beta}) &= 0 \\
 2(X^T X \hat{\beta}) &= 2X^T y \\
 X^T X \hat{\beta} &= X^T y \\
 \hat{\beta} &= (X^T X)^{-1} X^T y
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Kemudian akan ditunjukkan bahwa $\hat{\beta}$ adalah estimasi parameter linier tak bias dari β , yaitu:

$$\begin{aligned}
 E(\hat{\beta}) &= E\left((X^T X)^{-1} X^T y\right) \\
 &= E\left((X^T X)^{-1} X^T (X\beta + e)\right) \\
 &= E\left((X^T X)^{-1} X^T X\beta + (X^T X)^{-1} X^T X e\right) \\
 &= E(I\beta + Ie) \\
 &= E(\beta + e) \\
 &= \beta + 0 \\
 &= \beta
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Dari hal ini maka terbukti bahwa $\hat{\beta}$ adalah estimasi linier tak bias dari β .

2.9.2 *Nonlinear Least Square* (NLS)

Menurut Aziz (2010), ada dua cara untuk menaksirkan β dengan metode *nonlinear least square*, yaitu:

1. $f(X, \beta)$ diaproksimasi dengan deret Taylor orde 1.

2. $S(\beta) = (y - f(X, \beta))^T (y - f(X, \beta))$ diaprokksi dengan deret Taylor orde 2.

Macam macam iterasi yang dikenal dalam model *nonlinear least square* adalah sebagai berikut:

1. *Gauss-Newton*

$$t_i = \frac{1}{2}, p_i = \left(Z(\beta^T)^T Z(\beta^T) \right)^{-1}, \gamma_i = \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^T} \quad (2.71)$$

2. *Newton-Raphson*

$$t_i = 1, p_i = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta \partial \beta^T} \Big|_{\beta^T} \right)^{-1}, \gamma_i = \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^T} \quad (2.72)$$

3. *Steepest-Descent*

$$t_i \text{ bervariasi}, p_i = I_k, \gamma_i = \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^T} \quad (2.73)$$

4. *Marquardt-Levenberg*

$$t_i \text{ bervariasi}, p_i = \left(Z(\beta^T)' Z(\beta^T) + \lambda_i I_k \right)^{-1}, \gamma_i = \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^T} \quad (2.74)$$

5. *Quadratic-Hill-Climbing*

$$t_i \text{ bervariasi}, p_i = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta \partial \beta^T} \Big|_{\beta^T} + \lambda_i I_k \right)^{-1}, \gamma_i = \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^T} \quad (2.75)$$

2.10 Uji Korelasi

Menurut Sudjana (2005), korelasi merupakan hubungan antara dua kejadian di mana kejadian yang satu dapat mempengaruhi eksistensi kejadian yang lain, misalkan kejadian X mempengaruhi kejadian Y.

Korelasi digunakan untuk mengetahui derajat hubungan linier antara satu variabel dengan variabel yang lain. Suatu variabel dikatakan memiliki hubungan dengan variabel lain jika perubahan satu variabel diikuti dengan perubahan variabel lain. Jika arah perubahannya searah maka kedua variabel memiliki korelasi positif. Sebaliknya, jika perubahannya berlawanan arah, kedua variabel tersebut memiliki korelasi negatif. Jika perubahan variabel tidak diikuti oleh perubahan variabel yang lain maka dikatakan bahwa variabel-variabel tersebut tidak saling berkorelasi. Besarnya perubahan suatu variabel yang diikuti dengan perubahan variabel yang lain dinyatakan dalam bentuk koefisien korelasi

Salah satu alat yang bisa digunakan untuk mengetahui korelasi antara variabel yang satu dengan variabel yang lain adalah dengan *Product Moment* (*Pearson*). *Product Moment* adalah perubahan antar variabel. Untuk mencari koefisien korelasi *Product Moment* digunakan rumus sebagai berikut:

$$r = \frac{n \sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{(n \sum X^2 - (\sum X)^2)(n \sum Y^2 - (\sum Y)^2)}} \quad (2.76)$$

2.10.1 Koefisien Determinasi

Koefisien determinasi adalah salah satu nilai statistik yang dapat digunakan untuk mengetahui apakah ada hubungan pengaruh antara dua variabel. Nilai koefisien determinasi menunjukkan persentase variansi nilai variabel dependen yang dapat dijelaskan oleh persamaan regresi yang dihasilkan. Misalkan r^2 pada suatu persamaan regresi yang menunjukkan hubungan pengaruh variabel Y (sebagai variabel tak bebas) dan variabel X (sebagai variabel independen) dari penghitungan tertentu adalah 0,85. Ini artinya bahwa variasi nilai Y yang dapat dijelaskan oleh persamaan regresi yang diperoleh adalah 85%. Sisanya, yaitu

15%, variasi variabel Y dipengaruhi oleh variabel lain yang berada di luar persamaan (model) (Algifari, 2000).

2.10.2 Hipotesis

Menurut Suharyadi (2009), hipotesis merupakan dugaan sementara yang perlu diuji kebenarannya. Dalam statistika mengenal dua hipotesis yaitu hipotesis nol (H_0) yang merupakan hipotesis pegangan sementara, sehingga memungkinkan untuk memutuskan apakah sesuatu yang diuji masih sebagaimana dispesifikasikan oleh H_0 atau tidak. Sedangkan hipotesis alternatif (H_1) merupakan alternatif dari H_0 yaitu keputusan apa yang harus ditentukan bila apa yang diuji tidak sebagaimana yang kita spesifikasikan oleh H_0 . Setiap hipotesis yang dibuat dalam penelitian perlu diuji kebenarannya. Sehingga bisa menentukan apakah hipotesis itu ditolak atau diterima.

2.10.3 Uji Anova

Menurut Hasan (2003), uji F dikenal juga dengan uji Anova (*Analysis Of Varians*) yaitu uji untuk melihat bagaimanakah pengaruh semua variabel prediktornya secara bersama-sama terhadap variabel terikatnya atau untuk menguji apakah model regresi yang kita buat baik (signifikan) atau tidak baik (nonsignifikan). Jika model signifikan maka model bisa digunakan untuk peramalan, sebaliknya jika nonsignifikan maka model regresi tidak bisa digunakan untuk peramalan. Hipotesis uji F adalah sebagai berikut:

$$1. H_0 : \beta = 0$$

$$H_1 : \beta \neq 0,$$

Tentukan taraf nyata

$$2. \text{Daerah kritik penerimaan : } f_{hitung} \leq f_{tabel}$$

Daerah kritik penolakan : $f_{hitung} > f_{tabel}$

3. Uji Statistik

$$f_{hitung} = \frac{\hat{\beta}^2 \sum (X - \bar{X})^2}{S^2}$$

4. Kesimpulan

$f_{hitung} \leq f_{tabel}$ H_0 diterima

$f_{hitung} > f_{tabel}$ H_0 ditolak

2.11 Uji Multikolinieritas

Multikolinieritas adalah adanya korelasi linier yang mendekati sempurna antar dua variabel bebas. Dengan *variance inflation factor* dan *tolerance*. r^2 yang merupakan koefisien korelasi diperoleh dari analisis regresi antara variabel terikat dengan tidak terikat dapat menentukan ada atau tidaknya multikolinieritas dalam data. Ketika r^2 mendekati satu dengan kata lain ada kolinieritas antar variabel terikat maka VIF akan naik. Jika VIF semakin membesar atau menuju 10 maka diduga tidak ada multikolinieritas. Namun jika VIF melebihi 10 maka ada multikolinieritas dalam data tersebut (Widarjono, 2010).

Menurut Widarjono (2010), Beberapa penyebab timbulnya gejala multikolinieritas pada model regresi adalah sebagai berikut:

1. Kebanyakan variabel ekonomi berubah sepanjang waktu. Besaran-besaran ekonomi dipengaruhi oleh faktor-faktor yang sama sehingga jika satu faktor mempengaruhi variabel dependen maka seluruh variabel cenderung berubah dalam satu arah.

2. Adanya penggunaan nilai lag dari variabel-variabel bebas tertentu dalam model regresi.
3. Adanya kendala dalam model atau populasi yang menjadi sampel.

2.12 Scatter Plot

Scatter Plot adalah alat untuk menganalisis hubungan antara dua variabel. Satu variabel di-plot pada sumbu horizontal dan yang lainnya di-plot pada sumbu vertikal. Ketika diagram *scatter plot* menunjukkan adanya hubungan, hal ini belum tentu menunjukkan antara kedua variabel tersebut memiliki hubungan sebab akibat. *Scatter plot* sangat berguna untuk mendeteksi korelasi (hubungan) antara dua variabel sekaligus juga memperlihatkan tingkat hubungantersebut (kuat atau lemah).

2.13 Uji Heteroskedastisitas

Uji heteroskedestisitas dapat dilakukan dengan mengamati diagram *scatter plot* antara variabel Y prediksi (*Fits*) dengan variabel residual. Jika *plot* menyebar merata diatas atau dibawah sumbu 0 tanpa membentuk pola tertentu maka tidak terdapat gejala heteroskedestisitas dalam data. Sebaliknya jika *plot* tidak menyebar merata diatas atau dibawah sumbu 0 serta membentuk pola tertentu maka terdapat gejala heteroskedisitas dalam data (Sunyoto, 2009).

2.14 Hasil Penelitian Estimasi Parameter Iterasi *Newton-Rephson* dari Peneliti Terdahulu

Penelitian sebelumnya membahas mengenai estimasi parameter model statistik nonlinier secara *least square* dengan menggunakan *iterasi Newton-*

Raphson, yang akan digunakan sebagai pembanding dengan hasil penelitian peneliti ini yaitu, estimasi parameter model statistik nonlinier secara *least square* dengan menggunakan iterasi *Marquardt-Levenberg*. Sehingga akan dihasilkan sebuah perbandingan dari kedua estimasi tersebut. Berikut ini adalah estimasi parameter iterasi *Newton Raphson*.

Menurut Ririn (2014), pada iterasi *Newton-Raphson* mula-mula fungsi objektif residual *sum of square* $S(\beta)$ akan diaproksimasikan dengan deret Taylor orde 2. Adapun bentuk deret Taylor orde 2 adalah:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{(x-x_0)f''(x_0)(x-x_0)}{2!} \end{aligned}$$

Sehingga aproksimasi $S(\beta)$ dengan nilai-nilai awal yang ditentukan dari iterasi pertama pada $\beta^{(1)}$, secara deret Taylor orde 2 yaitu:

$$S(\beta) = S(\beta^{(1)}) + \frac{S'(\beta^{(1)})^T (\beta - \beta^{(1)})}{1!} + \frac{(\beta - \beta^{(1)})^T S''(\beta^{(1)}) (\beta - \beta^{(1)})}{2!}$$

Sehingga dapat ditulis menjadi

$$S(\beta) = S(\beta^{(1)}) + S'(\beta^{(1)})^T (\beta - \beta^{(1)}) + \frac{1}{2} (\beta - \beta^{(1)})^T S''(\beta^{(1)}) (\beta - \beta^{(1)}) \quad (2.77)$$

dengan,

$$\begin{aligned} S'(\beta^{(1)}) &= \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \\ S''(\beta^{(1)}) &= \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \\ &= \frac{\partial}{\partial^T} \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(\beta) &= S(\beta^{(1)}) + \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \Big|_{\beta^{(1)}} (\beta - \beta^{(1)}) + \frac{1}{2} (\beta - \beta^{(1)})^T \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} (\beta - \beta^{(1)}) \\
&= S(\beta^{(1)}) + \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \Big|_{\beta^{(1)}} (\beta) - \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \Big|_{\beta^{(1)}} (\beta^{(1)}) + \frac{1}{2} \left((\beta^T) - (\beta^{(1)})^T \right) \\
&\quad \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} (\beta) - \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} \right) \\
&= S(\beta^{(1)}) + \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \Big|_{\beta^{(1)}} (\beta) - \frac{\partial S}{\partial \beta^T} \Big|_{\beta^{(1)}} (\beta^{(1)}) + \frac{1}{2} \left(\beta^T \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \beta - \beta^T \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} \right. \\
&\quad \left. - (\beta^{(1)})^T \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \beta + (\beta^{(1)})^T \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} \right)
\end{aligned}$$

Kemudian dilakukan turunan pada persamaan tersebut, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} &= 0 + \left(\frac{\partial S}{\partial \beta^T} \Big|_{\beta^{(1)}} \right)^T - 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \beta + \left(\beta^T \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right)^T \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} - \left((\beta^{(1)})^T \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right)^T + 0 \right) \\
&= \left(\frac{\partial S}{\partial \beta^T} \Big|_{\beta^{(1)}} \right)^T + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \beta + \beta \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} - \beta^{(1)} \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right) \\
&= \left(\frac{\partial S}{\partial \beta^T} \Big|_{\beta^{(1)}} \right)^T + \frac{1}{2} (2) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} (\beta - \beta^{(1)}) \right) \\
&= \left(\frac{\partial S}{\partial \beta^T} \Big|_{\beta^{(1)}} \right)^T + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} (\beta - \beta^{(1)}) \right)
\end{aligned} \tag{2.78}$$

karena

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \beta^T} \Big|_{\beta^{(1)}} \right)^T = \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}}$$

maka diperoleh

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right) (\beta - \beta^{(1)}) \quad (2.79)$$

Untuk meminimumkan maka disamadengankan nol, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right) (\beta - \beta^{(1)}) &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right) \beta - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right) \beta^{(1)} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right) \hat{\beta} &= - \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right) \beta^{(1)} \\ \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right) \hat{\beta} &= \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right) \beta^{(1)} - \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \\ \hat{\beta} &= \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right) \beta^{(1)} - \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \\ &= \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right) \beta^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \\ &= \beta^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \end{aligned}$$

maka dapat dikatakan sebagai bentuk iterasi kedua dari aproksimasi β .

Nilai-nilai aproksimasi β pada iterasi kedua ($\beta^{(2)}$) digunakan untuk mencari nilai-nilai $\beta^{(3)}$ sehingga diperoleh:

$$\beta^{(3)} = \beta^{(2)} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(2)}} \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(2)}} \quad (2.80)$$

Dengan demikian jika diteruskan maka akan diperoleh bentuk iterasi umum dari persamaan tersebut yang dapat dituliskan menjadi,

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}} \quad (2.81)$$

Iterasi inilah yang dikenal sebagai *Newton-Raphson* untuk *Nonlinier Least Square* (NLS).

2.15 Kajian Keagamaan

Al-Quran merupakan sumber dari segala sumber kehidupan dan ilmu pengetahuan. Al-Quran telah menjelaskan dimensi baru dan aktual terhadap studi mengenai fenomena jagad raya dan membantu manusia melakukan terobosan terhadap batas penghalang dari alam materi. Al-Quran membawa manusia kepada Allah Swt. melalui ciptaan-Nya dan realitas konkret yang terdapat di bumi dan di langit (Rahman, 2010).

Al-Quran merupakan kumpulan firman yang diberikan Allah Swt. sebagai satu kesatuan kitab yang tidak ada keraguan di dalamnya, selalu terjaga dari kesalahan, dan merupakan tuntunan membentuk ketakwaan manusia. Allah Swt, berfirman di dalam al-Quran surat al-Baqarah/2:185, yaitu:

شَهْرُ رَمَضَانَ الَّذِي أُنزِلَ فِيهِ الْقُرْآنُ هُدًى لِّلنَّاسِ وَبَيِّنَاتٍ مِّنَ الْهُدَىٰ
وَالْفُرْقَانِ ۚ فَمَن شَهِدَ مِنْكُمُ الشَّهْرَ فَلْيَصُمْهُ ۖ وَمَن كَانَ مَرِيضًا أَوْ عَلَىٰ سَفَرٍ فَعِدَّةٌ
مِّنْ أَيَّامٍ أُخَرَ ۗ يُرِيدُ اللَّهُ بِكُمُ الْيُسْرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ الْعُسْرَ وَلِتُكْمِلُوا الْعِدَّةَ
وَلِتُكَبِّرُوا اللَّهَ عَلَىٰ مَا هَدَاكُمْ وَلَعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ﴿١٨٥﴾

Artinya: (Beberapa hari yang ditentukan itu ialah) bulan Ramadhan, bulan yang di dalamnya diturunkan (permulaan) Al Quran sebagai petunjuk bagi manusia dan penjelasan-penjelasan mengenai petunjuk itu dan pembeda (antara yang hak dan yang bathil). karena itu, Barangsiapa di antara kamu hadir (di negeri tempat tinggalnya) di bulan itu, Maka hendaklah ia berpuasa pada bulan itu, dan Barangsiapa sakit atau dalam perjalanan (lalu ia berbuka), Maka (wajiblah baginya berpuasa), sebanyak hari yang ditinggalkannya itu, pada hari-hari yang lain. Allah menghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu. dan

hendaklah kamu mencukupkan bilangannya dan hendaklah kamu mengagungkan Allah atas petunjuk-Nya yang diberikan kepadamu, supaya kamu bersyukur.

Mengingat al-Quran adalah kitab suci dengan mu'jizat yang paling besar maka semua bentuk penjelasan-penjelasan dalam kehidupan manusia di dunia terdapat di dalam al-Quran, salah satunya adalah segala macam penjelasan mengenai ilmu pengetahuan termasuk matematika.

Menurut Abdussakir (2007), matematika telah diciptakan dan sengaja disediakan untuk menuntun manusia memahami kebesaran dan kekuasaan Allah Swt. alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah Swt. dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Matematika adalah bahasa simbol yang digunakan untuk menyederhanakan masalah dalam kehidupan. Dalam kehidupan sehari-hari pun tidak bias lepas dari matematika, meski hanya masalah sederhana. Begitu pentingnya ilmu matematika, maka para ahli terus mengembangkan matematika untuk dapat diterapkan di dalam menyederhanakan masalah. Hingga matematika memiliki cabang ilmu yang begitu banyak. Pada dasarnya ilmu matematika terdiri dari berbagai bidang ilmu, salah satu di antaranya adalah ilmu statistik.

Di dalam ilmu statistik terdapat sebuah teori dasar dari statistik inferensial yang dilandasi oleh teori peluang, yaitu teori estimasi atau teori perkiraan. Dalam kehidupan sehari-hari proses estimasi kerap kali dilakukan. Misalnya, bila Rudi akan menyeberang jalan dan melihat ada kendaraan yang akan lewat maka Rudi

akan membuat estimasi atau perkiraan tentang kecepatan kendaraan, lebar jalan, dan kecepatannya untuk membuat keputusan.

Di dalam al-Quran terdapat ayat yang membahas tentang estimasi, seperti pada surat al-Baqarah/2:78, yaitu:

وَمِنْهُمْ أُمِّيُونَ لَا يَعْلَمُونَ الْكِتَابَ إِلَّا أَمَانِي وَإِنَّهُمْ إِلَّا يُظُنُّونَ

Artinya: *dan diantara mereka ada yang buta huruf, tidak mengetahui Al kitab (Taurat), kecuali dongengan bohong belaka dan mereka hanya menduga-duga*

Dalam surat al-Baqarah/2:78 menjelaskan bahwa kebanyakan orang yahudi belum belajar menulis dan tidak bisa membaca tulisan sehingga mereka mudah sekali dibohongi. Selain itu mereka juga tidak mengetahui kabar tentang apa yang telah diketahui oleh orang-orang terdahulu. Dengan kondisi demikian ini mereka hanya dapat menduga hal-hal yang tidak diketahuinya (Abdurrahman, 2006:142).

Kaitannya metode estimasi dengan surat al-Baqarah/2:78 terletak pada lafadh “*yazhunnun*”. Menurut Ibnu ‘Abbas, Muhammad bin Ishak mengungkapkn dalam bukunya bahwa arti dari “*yazhunnun*” adalah mereka tidak mengetahui isi kitab tersebut dan mereka mengetahui kenabian (Muhammad) hanya melalui dugaan belaka. Mujahid, Qatadah, Abdul ‘Aliyah dan Rabi’ bin Annas mengatakan bahwa dugaan mereka itu hanyalah dusta belaka dan mereka hanya berprasangka buruk terhadap Allah Swt. tanpa sedikitpun kebenaran. Sesungguhnya manusia tidak mengetahui kebenaran yang mutlak atas sesuatu tetapi manusia hanya menduga atau menyangka saja. Pendugaan itu belum jelas kebenarannya. Oleh karena itu, hasil pendugaan itu harus diuji kebenarannya (Abdullah, 2007).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian

Pendekatan penelitian yang digunakan pada penelitian ini menggunakan pendekatan kepustakaan yang merujuk pada buku-buku yang berkaitan dan yang dibutuhkan dalam melakukan penelitian ini. Selain itu, peneliti juga mempelajari literatur lain, berupa jurnal dan referensi lain yang berkaitan dengan penelitian. Pada tahap ini juga dilakukan dilakukan penurunan rumus dan pengumpulan data yang dibutuhkan.

3.2 Jenis dan Sumber Data

Data yang diperoleh merupakan data sekunder yang ditunjukkan dalam lampiran, diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS) kota Malang yang beralamat di Jalan Raya Janti Barat no. 47 Malang Telp. (0341) 801164 Fax. (0341) 805872. Data yang digunakan pada penelitian ini adalah “Data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) mulai tahun 1993-2012 Provinsi Jawa Timur”. Sumber utama data ini dari Dinas Perindustrian dan Perdagangan mulai tahun 1993-2012 dalam skripsi Eva Kurniasih (2014).

3.3 Variabel Penelitian

Pada penelitian ini data yang digunakan adalah data fungsi produksi *Cobb-Dauglas* yang diklasifikasikan menjadi tiga kategori, yaitu:

1. Variabel *output* (Q) adalah jumlah produksi pada Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) mulai tahun 1993-2012 Provinsi Jawa Timur.
2. Variabel *input* (L) adalah jumlah tenaga kerja pada Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) mulai tahun 1993-2012 Provinsi Jawa Timur.
3. Variabel *input* (K) adalah jumlah modal pada Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) mulai tahun 1993-2012 Provinsi Jawa Timur.

3.4 Analisis Data

Adapun langkah-langkahnya adalah, sebagai berikut:

1. Menentukan bentuk estimasi parameter pada model statistik nonlinier dengan metode *Nonlinier Least Square* (NLS) menggunakan metode iterasi *Marquardt-Levenberg* yang diaproksimasi pada deret Taylor orde 1.
2. Aplikasi metode *Marquadt-Levenberg*.
 - a. Analisis Data.
 - 1) Uji Multikolinieritas
 - 2) Uji Heteroskedastisitas
 - 3) Uji Korelasi
 - b. Identifikasi model *Cobb-Dauglas* dengan langkah-langkah:
 - 1) Menentukan model data nonlinier (*Cobb-Dauglas*).
 - 2) Mengestimasi parameter.
 - 3) Menganalisis estimasi model statistik nonlinier pada implementasi data nonlinier (*Cobb-Dauglas*).

- 2 Membandingkan hasil parameter model statistik nonlinier pada implementasi data secara iterasi *Marquardt-Levenberg* dengan penelitian sebelumnya yaitu iterasi *Gauss-Newton*.
- 3 Membuat kesimpulan.



BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Estimasi Parameter pada Fungsi Produksi *Cobb-Dauglas* dengan Iterasi *Marquardt-Levenberg*

Pada sebagian masalah nonlinier, cara yang sering dilakukan dan ternyata berhasil adalah dengan menulis persamaan normal secara terinci dan mengembangkan suatu teknik iterasi untuk memecahkannya yang bergantung pada persamaan normal dan metode yang digunakan, diantaranya adalah metode *Gauss-Newton*, metode *Steepest-Descent* dan metode *Marquardt-Levenberg*. Hubungan antara ketiga metode iterasi ini adalah bahwa metode *Marquardt-Levenberg* merupakan jalan tengah antara metode *Gauss-Newton* dengan metode *Steepest-Descent*. Karena metode *Marquardt-Levenberg* merupakan metode yang mengadaptasi dari metode *Gauss-Newton* yaitu dengan meminimumkan fungsi jumlah kuadrat.

Penaksiran parameter pada *nonlinear least square* ditentukan dengan melakukan suatu algoritma yang dapat menjamin bahwa penaksir tersebut secara nyata memenuhi kriteria dari fungsi tujuan yaitu memberikan jumlah galat pada nilai yang paling minimum. Dalam penelitian ini model nonlinier yang digunakan adalah fungsi produksi *Cobb-Dauglas* pada persamaan (2.22).

Dengan memisalkan,

$$A = \beta_1, \quad a = \beta_2, \quad b = \beta_3$$

maka diperoleh model persamaan sebagai berikut:

$$Q = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3} \tag{4.1}$$

Misalkan,

$$[L \ K] = X \text{ dan } [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3]^T = \beta$$

maka persamaan (4.1) dapat dituliskan menjadi,

$$Q = f(X, \beta) \quad (4.2)$$

Sehingga persamaan (2.29) dapat dituliskan menjadi,

$$y = f(X, \beta) + \varepsilon \quad (4.3)$$

yang mana, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$

Iterasi *Marquardt-Levenberg* merupakan iterasi yang menggunakan *First Order Condition* (FOC) dari *Sum of Square Error* (SSE) dengan mengaproksimasi $f(X, \beta)$ di sekitar $f(X, \beta^{(0)})$ yang menggunakan deret Taylor orde 1, yaitu

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} \quad (4.4)$$

Sehingga persamaan (4.3) didekati dengan persamaan (4.4) menjadi:

$$\begin{aligned} f(X, \beta) &= f(X, \beta^{(0)}) + f'(X, \beta)(\beta - \beta^{(0)}) \\ &= f(X, \beta^{(0)}) + \left. \frac{\partial f(X, \beta)}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(0)}} (\beta - \beta^{(0)}) \\ &= f(X, \beta^{(0)}) + \left. \frac{\partial f(X, \beta)}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(0)}} \beta - \left. \frac{\partial f(X, \beta)}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

atau ditulis sebagai,

$$y = f^{(0)} + P^{(0)}\beta - P^{(0)}\beta^{(0)} \quad (4.6)$$

yang mana,

$$y = f(X, \beta)$$

$$P^{(0)} = \left. \frac{\partial f(X, \beta)}{\partial \beta^T} \right|_{\beta^{(0)}}$$

maka persamaan (4.6) diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y &= f(X, \beta) + \varepsilon \\ &= f^{(0)} + P^{(0)}\beta - P^{(0)}\beta^{(0)} + \varepsilon \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dari persamaan (4.7) dapat dikonstruksikan menjadi.

$$y - f^{(0)} + P^{(0)}\beta^{(0)} = P^{(0)}\beta + \varepsilon \quad (4.8)$$

Jika dimisalkan $y - f^{(0)} + P^{(0)}\beta^{(0)} = y^{(0)*}$, maka persamaan (4.8) dapat ditulis kembali menjadi,

$$y^{(0)*} = P^{(0)}\beta + \varepsilon \quad (4.9)$$

Pada persamaan (4.9) dikenal sebagai persamaan *pseudo-linear* yang dapat dilakukan estimasi parameter secara *Least Square* untuk iterasi $\beta^{(1)}$, yaitu

$$\begin{aligned} y^{(0)*} &= P^{(0)}\beta + \varepsilon \\ \varepsilon &= y^{(0)*} - P^{(0)}\beta \\ y^{(0)*} &= P^{(0)}\beta \\ P^{(0)\top} y^{(0)*} &= P^{(0)\top} P^{(0)}\beta \\ \left(P^{(0)\top} P^{(0)}\right)^{-1} P^{(0)\top} y^{(0)*} &= \left(P^{(0)\top} P^{(0)}\right)^{-1} P^{(0)\top} P^{(0)}\beta \\ \left(P^{(0)\top} P^{(0)}\right)^{-1} P^{(0)\top} y^{(0)*} &= \beta \end{aligned} \quad (4.10)$$

Selanjutnya setelah parameter β diperoleh, maka akan dicari fungsi $y^{(0)*} = P^{(0)}\beta$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\beta &= \left(P^{(0)\top} P^{(0)} \right)^{-1} P^{(0)\top} y^{(0)*} \\
&= \left(\left(P^{(0)\top} P^{(0)} \right)^{-1} P^{(0)\top} \right) \left(y - f^{(0)} + P^{(0)} \beta^{(0)} \right) \\
&= \left(P^{(0)\top} P^{(0)} \right)^{-1} P^{(0)\top} y - \left(P^{(0)\top} P^{(0)} \right)^{-1} P^{(0)\top} f^{(0)} \\
&\quad + \left(P^{(0)\top} P^{(0)} \right)^{-1} P^{(0)\top} P^{(0)} \beta^{(0)} \\
&= \left(P^{(0)\top} P^{(0)} \right)^{-1} P^{(0)\top} y - \left(P^{(0)\top} P^{(0)} \right)^{-1} P^{(0)\top} f^{(0)} + \beta^{(0)} \\
&= \left(P^{(0)\top} P^{(0)} \right)^{-1} P^{(0)\top} \left(y - f^{(0)} \right) + \beta^{(0)} \\
&= \beta^{(0)} + \left(P^{(0)\top} P^{(0)} \right)^{-1} P^{(0)\top} \left(y - f^{(0)} \right)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Karena persamaan (4.11) sulit untuk diselesaikan dengan penyelesaian secara numerik, maka setelah mendapatkan fungsi β selanjutnya akan mengaproksimasikan β pada iterasi pertama ($\beta^{(1)}$).

$$\beta^{(1)} = \beta^{(0)} + \left(P^{(0)\top} P^{(0)} \right)^{-1} P^{(0)\top} \left(y - f^{(0)} \right)$$

Nilai-nilai aproksimasi β pada ($\beta^{(0)}$) digunakan untuk mencari nilai-nilai $\beta^{(1)}$ dengan mengaproksimasi $f(X, \beta)$ disekitaran $f(X, \beta^{(1)})$, yaitu:

$$\begin{aligned}
f(X, \beta) &= f(X, \beta^{(1)}) + f'(X, \beta) \left(\beta - \beta^{(1)} \right) \\
&= f(X, \beta^{(1)}) + \left. \frac{\partial f(X, \beta)}{\partial \beta^\top} \right|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)} \right) \\
&= f(X, \beta^{(1)}) + \left. \frac{\partial f(X, \beta)}{\partial \beta^\top} \right|_{\beta^{(1)}} \beta - \left. \frac{\partial f(X, \beta)}{\partial \beta^\top} \right|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} \\
&= f^{(1)} + P^{(1)} \beta - P^{(1)} \beta^{(1)}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Sehingga persamaan (4.12) didapatkan fungsi y adalah:

$$\begin{aligned}
y &= f^{(1)} + \varepsilon \\
&= f^{(1)} + P^{(1)} \beta - P^{(1)} \beta^{(1)} + \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.13}$$

atau

$$\begin{aligned}y - f^{(1)} + P^{(1)}\beta^{(1)} &= P^{(1)}\beta + \varepsilon \\y^{(1)*} &= P^{(1)}\beta + \varepsilon\end{aligned}$$

Setelah β pada iterasi ke-1 didapatkan maka persamaan β diestimasi kembali dengan menggunakan metode *Least Square* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\beta &= \left(P^{(1)\top} P^{(1)}\right)^{-1} P^{(1)\top} y^{(1)*} \\&= \left(\left(P^{(1)\top} P^{(1)}\right)^{-1} P^{(1)\top}\right) \left(y - f^{(1)} + P^{(1)}\beta^{(1)}\right) \\&= \left(P^{(1)\top} P^{(1)}\right)^{-1} P^{(1)\top} y - \left(P^{(1)\top} P^{(1)}\right)^{-1} P^{(1)\top} f^{(1)} \\&\quad + \left(P^{(1)\top} P^{(1)}\right)^{-1} P^{(1)\top} P^{(1)}\beta^{(1)} \\&= \left(P^{(1)\top} P^{(1)}\right)^{-1} P^{(1)\top} y - \left(P^{(1)\top} P^{(1)}\right)^{-1} P^{(1)\top} f^{(1)} + \beta^{(1)} \\&= \left(P^{(1)\top} P^{(1)}\right)^{-1} P^{(1)\top} \left(y - f^{(1)}\right) + \beta^{(1)} \\&= \beta^{(1)} + \left(P^{(1)\top} P^{(1)}\right)^{-1} P^{(1)\top} \left(y - f^{(1)}\right)\end{aligned}\tag{4.14}$$

Pada persamaan (4.14) inilah yang dinamakan dengan iterasi ke-2 $\beta^{(2)}$,

$$\beta^{(2)} = \beta^{(1)} + \left(P^{(1)\top} P^{(1)}\right)^{-1} P^{(1)\top} \left(y - f^{(1)}\right)\tag{4.15}$$

Dengan demikian dapat diketahui bentuk iterasi umum dari persamaan tersebut yang dapat dituliskan menjadi,

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} + \left(P^{(n)\top} P^{(n)}\right)^{-1} P^{(n)\top} \left(y - f^{(n)}\right)\tag{4.16}$$

Menurut Donald (1963), Levenberg dan kemudian Marquard menggunakan metode iterasi deret Taylor Orde 1 yang digunakan juga oleh *Gauss Newton*. Langkah iterasi β ditentukan dengan memodifikasi

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} + \left(P^{(n)\top} P^{(n)}\right)^{-1} P^{(n)\top} \left(y - f^{(n)}\right)$$

menjadi,

$$\begin{aligned}\beta^{(n+1)} &= \beta^{(n)} + \left(P^{(n)\top} P^{(n)} + \lambda I \right)^{-1} P^{(n)\top} \left(y - f^{(n)} \right) \\ &= \beta^{(n)} + t \cdot P_n \gamma_n\end{aligned}\tag{4.17}$$

yang mana,

λ = skalar

I = matriks identitas

t = konstanta (bernilai sembarang)

P_n = matriks simetris $\left(\left(P^{(n)\top} P^{(n)} + \lambda I \right)^{-1} \right)$

γ_n = Gradien dari *objective function* $\left(\left. \frac{\partial f(X, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} \right)$

Jika persamaan (4.17) dilanjutkan dengan proses tersebut secara terus menerus akan didapatkan sifat β yang konvergen, yaitu:

$$\beta_{NLS} = \beta^{(n+1)} = \beta^{(n)}\tag{4.18}$$

yang dipenuhi oleh,

$$P^{(n)\top} Y - P^{(n)\top} f(X, \beta^{(n)}) = 0\tag{4.19}$$

atau

$$P^\top Y - P^\top f(X, \beta) = 0$$

$$P^\top (Y - f(X, \beta)) = 0$$

yang memenuhi syarat *First Order Condition* (FOC). Untuk mendapatkan nilai parameter β yang dapat meminimumkan nilai *sum of square error* yang dapat ditunjukkan dengan cara berikut:

$$\begin{aligned}
S &= \varepsilon^T \varepsilon \\
&= (y - f^{(n)})^T (y - f^{(n)}) \\
&= (y^T - f^{(n)T}) (y - f^{(n)}) \\
&= y^T y - y^T f^{(n)} - f^{(n)T} y + f^{(n)T} f^{(n)} \\
&= y^T y - (y^T f^{(n)})^T - f^{(n)T} y + f^{(n)T} f^{(n)} \\
&= y^T y - f^{(n)T} y - f^{(n)T} y + f^{(n)T} f^{(n)} \\
&= y^T y - 2f^{(n)T} y + f^{(n)T} f^{(n)}
\end{aligned}$$

kemudian diturunkan persamaan S terhadap β , yaitu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \beta^{(n)}} &= \frac{\partial (y^T y - 2f^{(n)T} y + f^{(n)T} f^{(n)})}{\partial \beta^{(n)}} \\
&= 0 - 2 \left(f^{(n)T} y \right) + \left(f^{(n)T} f^{(n)} \right) + \left(f^{(n)T} f^{(n)} \right)^T \\
&= -2 \left(f^{(n)T} y \right) + 2 \left(f^{(n)T} f^{(n)} \right) \\
&= -2 f^{(n)T} (y - f^{(n)}) \\
&= -2 \frac{\partial f^T}{\partial \beta^{(n)}} (y - f^{(n)}) \\
&= -2 P^{(n)T} (y - f^{(n)}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

sehingga,

$$\begin{aligned}
\beta^{(n+1)} &= \beta^{(n)} + \left(P^{(n)T} P^{(n)} + \lambda I \right)^{-1} P^{(n)T} (y - f^{(n)}) \\
&= \beta^{(n)} + \left(P^{(n)T} P^{(n)} + \lambda I \right)^{-1} \cdot 0 \\
&= \beta^{(n)}
\end{aligned}$$

artinya pada persamaan (4.19) terbukti bahwa dengan iterasi ini dijamin kekonvergenan suatu fungsi yang modelnya adalah nonlinier dapat dipenuhi.

Sehingga untuk estimasi parameter pada fungsi produksi *Cobb-Douglas*

$$Q = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

dengan menggunakan iterasi *Marquardt-Levenberg*, maka diperoleh hasil estimasi pada parameter β adalah:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} + \left(P^{(n)T} P^{(n)} + \lambda I \right)^{-1} \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}}$$

4.2 Aplikasi Metode *Marquardt Levenberg*

4.2.1 Analisis Data

1. Uji Multikolinieritas

Metode deteksi yang digunakan adalah Vif dan *Tolerance*. Dengan alat hitung Minitab, *output* yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

```

The regression equation is
produksi = 4145 + 0.0329 tenaga kerja - 0.034 modal

Predictor      Coef      SE Coef      T      P      VIF
Constant      4145      3226      1.28   0.216
tenaga kerja  0.03287   0.01666   1.97   0.065   2.2
modal         -0.0338   0.2094   -0.16  0.874   2.2

S = 8531.16   R-Sq = 30.5%   R-Sq(adj) = 22.4%

PRESS = 4213282314   R-Sq(pred) = 0.00%

Analysis of Variance

Source      DF      SS      MS      F      P
Regression  2      543745314  271872657  3.74  0.045
Residual Error  17  1237271813  72780695
Total      19  1781017128

Durbin-Watson statistic = 2.00826

Lack of fit test
Possible curvature in variable modal (P-Value = 0.032 )

```

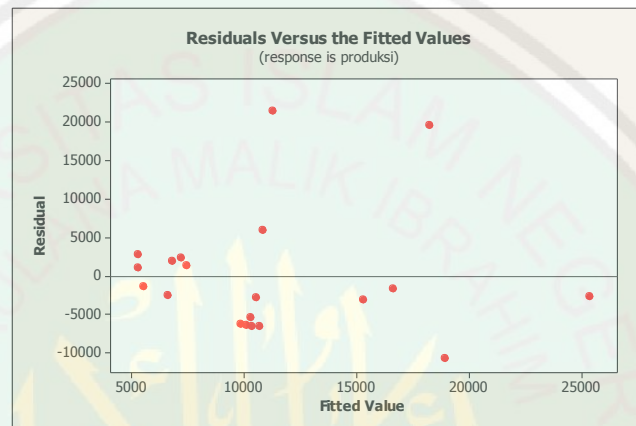
Gambar 4.1 *Output* Analisis Regresi

Untuk mendeteksi ada atau tidaknya mutikolinieritas dapat dilihat dari nilai VIF pada gambar 4.1. Dikatakan tidak ada gejala mutikolinieritas jika VIF < 10 (Wibisono, 2005). Dari hasil gambar *output* diatas terlihat bahwa VIF untuk

modal dan tenaga kerja adalah $2.2 < 10$, maka pada model regresi yang terbentuk tidak ada gejala multikolinieritas.

2. Uji Heteroskedastisitas

Setelah dilakukan uji Heteroskedastisitas dengan menggunakan Minitab didapatkan hasil *output* sebagai berikut:

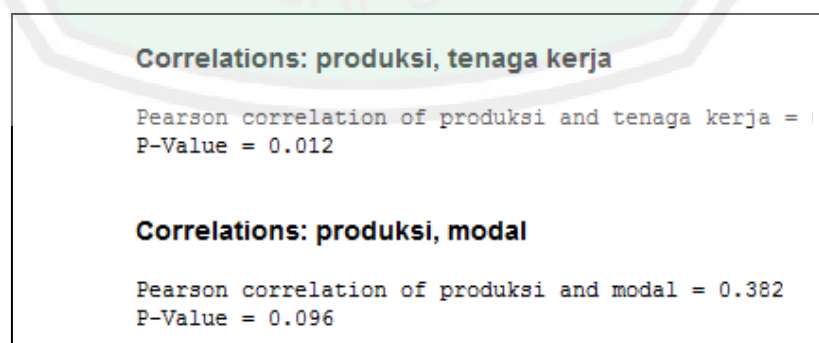


Gambar 4.2 *Plot* Residual Versus the Fitted Values

Terlihat bahwa, *plot* menyebar dibawah sumbu 0 tanpa membentuk pola tertentu. Dapat disimpulkan bahwa tidak ada gejala heteroskedastisitas.

3. Uji Korelasi

Dengan alat hitung Minitab, *output* yang dihasilkan adalah sebagai berikut:



Gambar 4.3 *output* Analisis Korelasi

1) Tabel Korelasi Y dengan X_1 Tabel 4.1 Tabel Bantu korelasi Y dengan X_1

Tahun	Tenaga Kerja (X_1)	Jumlah Produksi (Y)	X_1^2	Y^2	X_1Y
2012	473786	8250	$2,24473.10^{11}$	68062500	3908734500
2011	445857	37759	$1,98788.10^{11}$	1425742081	16835114463
2010	392282	14915	$1,53885.10^{11}$	222457225	5850886030
2009	349565	12125	$1,22196.10^{11}$	147015625	4238475625
2008	713379	22673	$5,0891.10^{11}$	514064929	16174442067
2007	230025	32685	52911500625	1068309225	7518367125
2006	212334	16780	45085727556	281568400	3562964520
2005	205439	4108	42205182721	16875664	843943412
2004	200367	7689	40146934689	59120721	1540621863
2003	195483	3720	38213603289	13838400	727196760
2002	192412	4854	37022377744	23561316	933967848
2001	186537	3619	34796052369	13097161	675077403
2000	178765	3525	31956925225	12425625	630146625
1999	105933	8749	11221800489	76545001	926807817
1998	80610	4060	6497972100	16483600	327276600
1997	101229	9567	10247310441	91527489	968457843
1996	84607	8657	7158344449	74943649	732442799
1995	46317	4098	2145264489	16793604	189807066
1994	39817	6345	1585393489	40259025	252638865
1993	38857	8087	1509866449	65399569	314236559
Jumlah	4473601	222265	$1,57096.10^{12}$	4248090809	67151605790

a. Perhitungan Koefisien Korelasi tenaga kerja (X_1) dan jumlah produksi (Y)

$$\begin{aligned}
 r_{x_1y} &= \frac{n \sum X_1Y - \sum X_1 \sum Y}{\sqrt{(n \sum X_1^2 - (\sum X_1)^2)(n \sum Y^2 - (\sum Y)^2)}} \\
 &= \frac{20(67151605790) - (4473601)(222265)}{\sqrt{(20(1,57096.10^{12}) - (4473601)^2)(20(4248090809) - (222265)^2)}} \\
 &= \frac{1,34303.10^{12} - 9,94325.10^{11}}{\sqrt{(1,1406.10^{13})(35560085955)}} \\
 &= \frac{3,48707.10^{11}}{8,36867.10^{11}} \\
 &= 0,552535668
 \end{aligned}$$

Jadi perhitungan koefisien korelasi secara manual antara tenaga kerja (X_1) dengan jumlah produksi (Y) sebesar 0,547535668 dengan korelasi positif. Hal ini berarti antara tenaga kerja dengan jumlah produksi memiliki arah atau gerakan yang searah yakni peningkatan jumlah tenaga kerja diikuti dengan peningkatan dari jumlah produksi. Semakin banyak tenaga kerja, maka semakin tinggi jumlah produksi yang dihasilkan.

Koefisien determinan atau koefisien penentu variabel X_1 terhadap Y dengan rumus yaitu,

$$KP = r^2 = (0,552535668)^2 = 0,30 = 30\%$$

Artinya bahwa pengaruh tenaga kerja terhadap jumlah produksi sebesar 30% dan sisanya 70% ditentukan oleh variabel lain.

b. Uji Hipotesis dan Pengambilan Keputusan

Hipotesis masalah berdasarkan kasus ini adalah adanya hubungan korelasi yang positif antara variabel tenaga kerja (X_1) dengan variabel jumlah produksi (Y). Atau dapat dituliskan seperti berikut ini:

H_0 = tidak terdapat hubungan yang positif dan signifikan antara variabel tenaga kerja (X_1) dengan variabel jumlah produksi (Y)

H_1 = terdapat hubungan yang positif dan signifikan antara variabel tenaga kerja (X_1) dengan variabel jumlah produksi (Y).

Diketahui bahwa $r_{hitung} = 0,552 > r_{tabel} = 0,444$, maka H_0 ditolak. Artinya terdapat korelasi antara jumlah produksi dengan tenaga kerja. Semakin banyak tenaga kerja, maka semakin banyak juga hasil produksi yang didapatkan.

2) Tabel Korelasi Y dengan X_2 Tabel 4.2 Tabel Bantu korelasi Y dengan X_2

Tahun	Modal (X_2)	Jumlah Produksi (Y)	X_2^2	Y^2	X_2Y
2012	18053	8250	325910809	68062500	148937250
2011	11389	37759	129709321	1425742081	430037251
2010	6565	14915	43099225	222457225	97916975
2009	5939	12125	35271721	147015625	72010375
2008	67001	22673	4489134001	514064929	1519113673
2007	11837	32685	140114569	1068309225	386892345
2006	7654	16780	58583716	281568400	128434120
2005	5408	4108	29246464	16875664	22216064
2004	5098	7689	25989604	59120721	39198522
2003	4953	3720	24532209	13838400	18425160
2002	3673	4854	13490929	23561316	17828742
2001	4664	3619	21752896	13097161	16879016
2000	4470	3525	19980900	12425625	15756750
1999	5980	8749	35760400	76545001	52319020
1998	6761	4060	45711121	16483600	27449660
1997	9780	9567	95648400	91527489	93565260
1996	5432	8657	29506624	74943649	47024824
1995	6785	4098	46036225	16793604	27804930
1994	9087	6345	82573569	40259025	57657015
1993	6454	8087	41654116	65399569	52193498
Jumlah	206983	222265	5733706819	4248090809	3271660450

a. Perhitungan Koefisien Korelasi modal (X_2) dan jumlah produksi (Y)

$$\begin{aligned}
 r_{x_1y} &= \frac{n \sum X_2 Y - \sum X_2 \sum Y}{\sqrt{(n \sum X_2^2 - (\sum X_2)^2)(n \sum Y^2 - (\sum Y)^2)}} \\
 &= \frac{20(3271660450) - (206983)(222265)}{\sqrt{(20(5733706819) - (206983)^2)(20(4248090809) - (222265)^2)}} \\
 &= \frac{65433209000 - 46005076495}{\sqrt{(71832174092)(35560085955)}} \\
 &= \frac{19428132505}{50540659721} \\
 &= 0,382405993
 \end{aligned}$$

Koefisien determinan atau koefisien penentu variabel X_1 terhadap Y dengan rumus yaitu,

$$KP = r^2 = (0,382405993)^2 = 0,147459 = 14\%$$

artinya bahwa pengaruh tenaga kerja terhadap jumlah produksi sebesar 14% dan sisanya 86% ditentukan oleh variabel lain.

b. Uji Hipotesis dan Pengambilan Keputusan

Hipotesis masalah berdasarkan kasus ini adalah adanya hubungan korelasi yang positif antara modal (X_2) dengan variabel jumlah jumlah produksi (Y). Atau dapat dituliskan seperti berikut ini:

H_0 = tidak terdapat hubungan yang positif dan signifikan antara variabel modal (X_2) dengan variabel jumlah produksi (Y).

H_1 = terdapat hubungan yang positif dan signifikan antara variabel modal (X_2) dengan variabel jumlah produksi (Y).

Diketahui bahwa $r_{hitung} = 0,382 < r_{tabel} = 0,444$, maka H_0 diterima. Artinya tidak terdapat korelasi antara produksi dengan modal. Karena semakin kecil atau tingginya modal yang digunakan tidak berpengaruh sedikit atau banyak produksi yang akan dihasilkan.

4.2.2 Estimasi Parameter secara Iterasi *Marquard-Levenberg*

Dalam penelitian ini, data yang digunakan adalah data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) Tahun 1993 sampai 2012 di Provinsi Jawa Timur. Data tersebut berupa matriks LKy yang berukuran 20x3. Kolom pertama dan kedua masing-masing menunjukkan *input* yang digunakan dalam proses produksi yaitu tenaga kerja (L) dan kapital (K). Sedangkan kolom ketiga menunjukkan *output* (y). Selengkapnya disajikan pada matriks berikut

$$LKy = \begin{pmatrix} 473786 & 18053 & 8250 \\ 445857 & 11389 & 37759 \\ 392282 & 6565 & 14915 \\ 349565 & 5939 & 13135 \\ 713379 & 67001 & 22673 \\ 230025 & 11837 & 32685 \\ 212334 & 7654 & 16780 \\ 205439 & 5408 & 4108 \\ 200367 & 5098 & 7689 \\ 195483 & 4953 & 3720 \\ 192412 & 3673 & 4854 \\ 186537 & 4664 & 3619 \\ 178705 & 4470 & 3525 \\ 105933 & 5980 & 8749 \\ 80610 & 6761 & 4060 \\ 101229 & 9780 & 9567 \\ 94607 & 5432 & 8657 \\ 46317 & 6785 & 4098 \\ 39817 & 9087 & 6345 \\ 38857 & 6454 & 8087 \end{pmatrix}$$

Data eksperimen akan diuji dalam fungsi produksi *Cobb-Douglas*. Bentuk fungsi produksi *Cobb-Douglas* yang digunakan adalah

$$y = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

Selanjutnya berdasarkan data sampel dan fungsi produksi tersebut akan dilakukan penaksiran parameter-parameter β secara berulang dengan menggunakan metoda *Least Square Estimation* (LSE) melalui proses iterasi *Marquadt-Levenberg*. Bentuk umum iterasinya adalah

$$\beta^{(n+1)} = \beta^n + t_n P_n \gamma_n$$

Dengan γ_n untuk LSE adalah

$$\gamma_n = \left. \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}}$$

Iterasi yang digunakan dalam *Least Square Estimation* (LSE) adalah iterasi *Marquandt-Levenberg*. Perhitungan dilakukan untuk mendapatkan taksiran nilai parameter β dan S (fungsi objektif) yang diminimumkan, yaitu $S = (y - f(X, \beta))^T (y - f(X, \beta))$, serta f (fungsi terhadap X dan β), yang bentuk fungsinya sesuai dengan model fungsi produksi *Cobb-Douglas*.

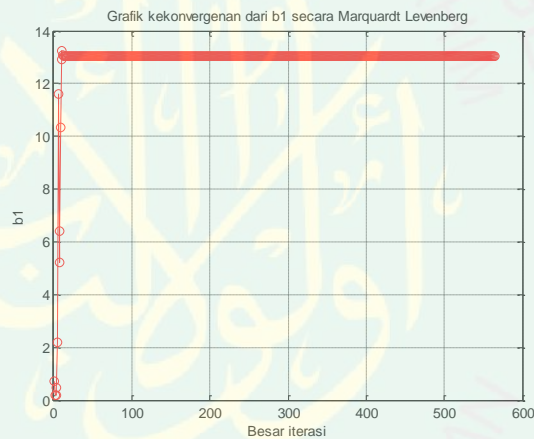
Hasil *output* dari data fungsi produksi *Cobb-Douglas* pada data produksi Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) pada tahun 1993 sampai 2012 di provinsi Jawa Timur dengan menggunakan iterasi *Marquandt-Levenberg* dengan mengambil nilai $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, dan t_n dari skripsi Ririn (2014) yang akan digunakan sebagai pembanding. Berdasarkan output Matlab pada Lampiran, hasil perhitungan iterasi *Marquardt-Levenberg* yang diperoleh akan disajikan dalam bentuk tabel-tabel berikut:

1. Untuk *Initial Value* $\beta_1 = 0,7$; $\beta_2 = 0,3$; $\beta_3 = 1$ dan $\lambda = 0,3$

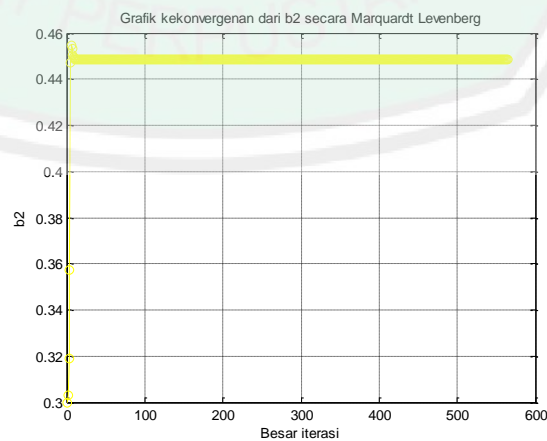
Tabel 4.3 Hasil Iterasi *Marquardt Levenberg* untuk Fungsi Produksi *Cobb-Dauglas* pada Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993 sampai 2012 di Provinsi Jawa Timur

Iterasi	β_1	β_2	β_3	λ	S
0	0,7	0,3	1	,3	
50	13,0461371	0,4485847	0,1432434		1,2166317372152
100	13,0461490	0,4485846	0,1432434		1,2166317372152
150	13,0461488	0,4485846	0,1432434		1,2166317372152
200	13,0461245	0,4485848	0,1432433		1,2166317372152
340	13,0461472	0,4485846	0,1432434		1,2166317372152
460	13,0461596	0,4485845	0,1432434		1,2166317372152
565	13,0461472	0,4485846	0,1432434		1,2166317372152

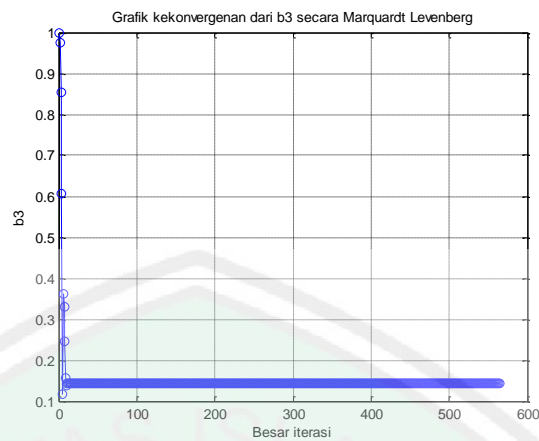
Berikut ini adalah grafik dari tabel 4.3,



Gambar 4.4. Grafik Kekonvergenan dari β_1 dengan iterasi *Marquardt-Levenberg*



Gambar 4.5. Grafik Kekonvergenan dari β_2 dengan iterasi *Marquardt-Levenberg*



Gambar 4.6. Grafik Kekonvergenan dari β_3 dengan iterasi *Marquardt-Levenberg*

Pada grafik 4.4, 4.5, dan 4.6, dengan menggunakan iterasi *Marquardt-Levenberg* diperoleh nilai optimum (konvergen) pada iterasi ke-565. Hasil *Nonlinier Least Square* (NLS) untuk fungsi produksi *Cobb-Douglas* pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dengan iterasi *Marquardt-Levenberg* adalah:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 13,0461472 & \beta_3 &= 0,1432434 \\ \beta_2 &= 0,4485846 & S &= 0,0121663\end{aligned}$$

Dengan demikian, model *Cobb-Dauglas* pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dianggap optimum (konvergen) menurut iterasi *Marquardt-Levenberg* adalah sebagai berikut:

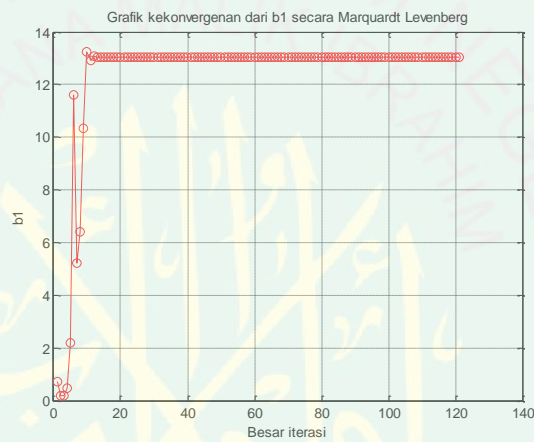
$$y = 13,0461472 L^{0,4485846} K^{0,1432434}$$

2. Untuk *Initial Value* $\beta_1 = 0,7$; $\beta_2 = 0,3$; $\beta_3 = 1$ dan $\lambda = 0,09$

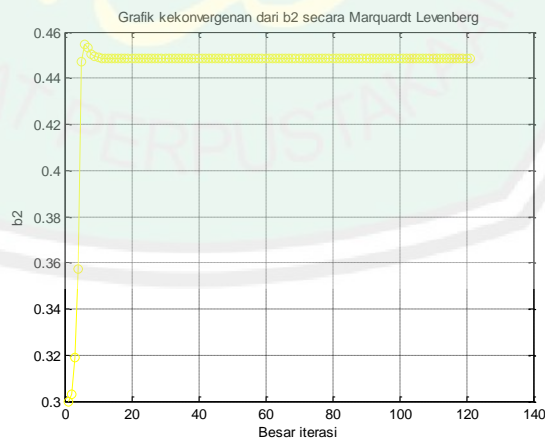
Tabel 4.4 Hasil Iterasi *Marquardt-Levenberg* untuk Fungsi Produksi *Cobb-Dauglas* pada Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993 sampai 2012 di Provinsi Jawa Timur

Iterasi (n)	β_1	β_2	β_3	λ	S
0	0.7	0.3	1	0,09	
45	13,0461359	0,44858472	0,1432433		1,216631737215
86	13,0461350	0,44858473	0,1432433		1,216631737215
121	13,0461358	0,44858472	0,1432433		1,216631737215

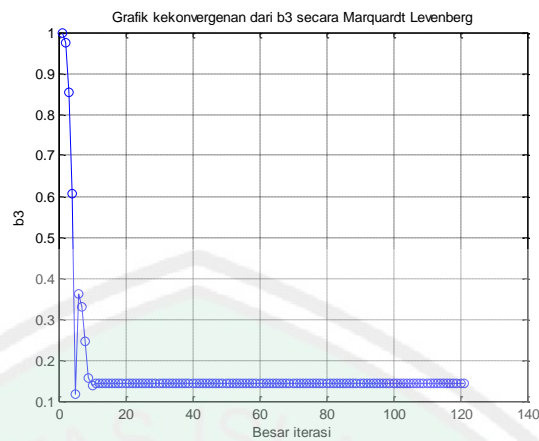
Berikut ini adalah grafik dari tabel 4.4:



Gambar 4.7. Grafik Kekonvergenan dari β_1 dengan iterasi *Marquardt-Levenberg*



Gambar 4.8. Grafik Kekonvergenan dari β_2 dengan iterasi *Marquardt-Levenberg*



Gambar 4.9. Grafik Kekonvergenan dari β_3 dengan iterasi *Marquardt-Levenberg*

Pada grafik 4.7, 4.8, dan 4.9, dengan menggunakan iterasi *Marquardt-Levenberg* diperoleh nilai optimum (konvergen) pada iterasi ke-121. Hasil *Nonlinier Least Square* (NLS) untuk fungsi produksi *Cobb-Dauglas* pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dengan iterasi *Marquardt-Levenberg* adalah:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 13,0461358 & \beta_3 &= 0,1432433 \\ \beta_2 &= 0,44858472 & S &= 0,0121663\end{aligned}$$

Dengan demikian, model *Cobb-Dauglass* pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dianggap optimum (konvergen) menurut iterasi *Marquardt-Levenberg* adalah sebagai berikut:

$$y = 13,0461358 L^{0,44858472} K^{0,1432433}$$

4.3 Perbandingan Hasil Iterasi

Berikut ini adalah hasil perbandingan fungsi produksi *Cobb-Dauglas* menggunakan iterasi *Marquardt-Levenberg* yang dilihat dari besarnya nilai lambda (λ):

Tabel 4.5 hasil perbandingan fungsi produksi *Cobb-Dauglas* menggunakan iterasi *Marquardt Levenberg* yang dilihat dari besarnya nilai lambda (λ)

λ	β_1	β_2	β_3	Jumlah iterasi
0,3	13,0461472	0,4485846	0,1432434	565
0,09	13,0461358	0,4485847	0,1432433	121

Dari tabel 4.5, terlihat bahwa jika semakin kecil nilai lambda (λ) maka jumlah iterasinya akan semakin sedikit atau data itu akan konvergen lebih cepat. Sebaliknya jika nilai lambda (λ) besar maka jumlah iterasinya akan semakin banyak atau data itu akan konvergen lebih lama. Sehingga nilai lambda (λ) yang cocok diberikan pada perhitungan ini adalah nilai yang kecil atau mendekati 0. Pada kasus ini lambda yang diberikan adalah 0,09.

Sebagai bahan perbandingan antara fungsi produksi *Cobb-Dauglas* menggunakan estimasi parameter secara iterasi *Marquardt-Levenberg* dan *Newton-Raphson* yang merupakan hasil dari penelitian sebelumnya dapat dilihat pada hasil *output* sebagai berikut:

Tabel 4.6. Hasil Perbandingan fungsi *Cobb-Dauglas* dengan Menggunakan iterasi *Marquardt-Levenberg* dan *Newton-Rapson*

Fungsi <i>Cobb-Dauglas</i>	<i>Least Square Estimation (LSE)</i>	
	<i>Marquardt-Levenberg</i>	<i>Newton-Raphson</i>
β_1	13,0461358	13,0487624
β_2	0,4485847	0,4485491948
β_3	0,1432433	0,14326877712
S	1,2166317372152	1,21665060912061
Jumlah Iterasi	121	169

Dari tabel 4.6, ternyata nilai perhitungan fungsi produksi *Cobb-Dauglas* dengan menggunakan estimasi parameter secara iterasi *Marquardt-Levenberg* lebih kecil daripada nilai perhitungan fungsi produksi *Cobb-Dauglas* dengan menggunakan estimasi parameter secara iterasi *Newton-Raphson*. Sehingga fungsi produksi yang cocok dengan data telah dibelikan (LAMPIRAN 5) adalah

fungsi produksi *Cobb-Dauglas* dengan menggunakan estimasi parameter secara iterasi *Marquardt Levenberg*.

4.4 Kajian Estimasi dalam Al-Quran dan Hadits

Menurut Abdussakir (2007), estimasi adalah ketrampilan untuk menentukan sesuatu tanpa melakukan proses perhitungan secara eksak. Dalam matematika terdapat tiga jenis estimasi, yaitu:

1. Estimasi banyak

Estimasi banyak adalah menentukan banyaknya objek tanpa menghitung secara eksak. Objek disini maknanya sangat luas. Objek dapat berupa orang, uang, kelereng, titik dan mobil.

2. Estimasi pengukuran

Estimasi pengukuran adalah menentukan ukuran sesuatu tanpa menghitung secara eksak. Ukuran disini maknanya sangat luas. Ukuran dapat bermakna ukuran waktu, panjang, luas, dan volume.

3. Estimasi komputasional

Estimasi komputasional adalah menentukan hasil operasi hitung tanpa menghitungnya secara eksak. Seseorang mungkin akan menghitung dengan cara membulatkan ke puluhan terdekat.

Dari ketiga macam estimasi diatas, dalam al-Quran surat Al-Baqarah ayat 80 menyinggung mengenai estimasi komputasional, yaitu:

وَقَالُوا لَنْ نَمَسَّنَا النَّارَ إِلَّا أَيَّامًا مَّعْدُودَةً ۚ قُلْ أَتَّخَذْتُمْ عِنْدَ اللَّهِ عَهْدًا فَلَنْ تُخْلَفَ
 اللَّهُ عَهْدَهُ ۗ أَمْ تَقُولُونَ عَلَى اللَّهِ مَا لَا تَعْلَمُونَ ﴿٨٠﴾

Artinya: dan mereka berkata: "Kami sekali-kali tidak akan disentuh oleh api neraka, kecuali selama beberapa hari saja." Katakanlah: "Sudahkah kamu menerima janji dari Allah sehingga Allah tidak akan memungkiri janji-Nya, atautkah kamu hanya mengatakan terhadap Allah apa yang tidak kamu ketahui?." (Qs Al Baqarah: 80)

Pada ayat diatas makna estimasi terletak pada potongan ayat yang artinya "selama beberapa hari saja". Dari ayat ini tidak diketahui dengan tepat berapa hari akan tetapi hanya bisa mengestimasi

Selain itu terdapat ayat al-Quran yang membahas mengenai estimasi banyak yang terdapat pada surat Ash-Shaffat ayat 147, yaitu:

وَأَرْسَلْنَاهُ إِلَىٰ مِائَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya: "dan Kami utus Dia kepada seratus ribu orang atau lebih." (Qs, Ash-Shaffat:147)

Menurut Abdussakir (2007), pada ayat 147 al-Quran Surat Ash-Shaffat dijelaskan bahwa Nabi Yunus diutus kepada umatnya yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih. Jika membaca ayat tersebut secara seksama, maka terdapat rasa atau kesan ketidakpastian dalam menentukan jumlah yang sebenarnya. Mengapa harus menyatakan 100.000 atau lebih? Mengapa tidak menyatakan dengan jumlah yang sebenarnya? Bukankah Allah Swt. mengetahui yang ghaib dan yang nyata? Bukankah Allah Swt. mengetahui segala sesuatu, termasuk jumlah pasukan Nabi Yunus.

.Dalam al-Quran pada surat Ali-Imron ayat 24 yang berbunyi:

ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ قَالُوا لَن نَّمَسَّنَا النَّارَ إِلَّا أَيَّامًا مَّعْدُودَاتٍ ۗ وَغَرَّهُمْ فِي دِينِهِمْ مَا كَانُوا يَفْتَرُونَ ﴿٢٤﴾

Artinya: "hal itu adalah karena mereka mengaku: "Kami tidak akan disentuh oleh api neraka kecuali beberapa hari yang dapat dihitung". mereka

diperdayakan dalam agama mereka oleh apa yang selalu mereka adakan.” (Qs, AL-‘Imran: 24)

Dalam ayat ini kaitan dengan metode estimasi terletak pada lafal “*illa ayyaaman ma’duudat*”. Yang dimaksud dengan hari-hari disini oleh ucapan orang-orang yahudi adalah 40 hari, yaitu hari hari mereka ketika mereka menyembah anak-anak sapi setelah mereka ditinggal pergi oleh Nabi Musa ‘Alaihisala.

Jika lama waktu ketika orang yahudi menentukan masa akan disentuh oleh api neraka dapat dinyatakan dalam variabel X , maka $\bar{X} = 40$ hari yang merupakan perkiraan dari kaum yahudi itu sendiri. Padahal perkiraan mereka itu salah karena Allah Swt. akan memasukkan mereka kedalam api neraka selama-lamanya akibat dari sikap inkar dan kezaliman mereka.

Kajian estimasi dalam penelitian ini termasuk dalam estimasi komputasional karena, model estimasi yang diteliti menggunakan hasil operasi hitung tanpa menghitungnya secara eksak dari setiap perkiraan baru dalam data.

Dari penjelasan beberapa ayat al-Quran tersebut memiliki suatu arti bahwa sejak dulu islam sudah mengenal yang namanya estimasi. Konsep estimasi ini sama halnya dengan konsep taksiran yang ada dalam statistik, yang mana dalam mengestimasi suatu parameter berarti mengestimasi nilai parameter tersebut. Jika hasilnya diaplikasikan terhadap kehidupan nyata dengan nilai yang sesungguhnya, maka nilai taksiran tersebut adalah mendekati nilai sebenarnya. Konsep-konsep tentang estimasi ini sudah termaktub dalam al-Quran dan Hadits.

BAB V

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa bentuk estimasi model statistik nonlinier fungsi produksi *Cobb-Douglas*,

$$Q = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

menggunakan metode *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE) dengan iterasi *Marquardt-Levenberg* adalah sebagai berikut:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} + \left(P^{(n)T} P^{(n)} + \lambda I \right)^{-1} \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(n)}}$$

yang mana,

λ = skalar

I = matriks identitas

$$P = \frac{\partial f(X, \beta)}{\partial \beta^T} \Big|_{\beta^{(0)}}$$

β = parameter $\beta^1, \beta^2, \beta^3$

n = banyaknya iterasi

$$f(X, \beta) = Q$$

Berdasarkan hasil perbandingan estimasi model statistik nonlinier secara *least square* (estimasi *Marquardt-Levenberg*) pada implementasi data nonlinier yaitu data Industri Logam, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dengan model *Cobb-Dauglas*. dapat disimpulkan bahwa iterasi *Marquardt-Levenberg* lebih cepat dalam mencapai kekonvergenan dibandingkan dengan menggunakan iterasi *Newton-Rephson*, dengan hasil model:

$$y = 13,0461358 L^{0,44858472} K^{0,1432433}$$

4.2 Saran

Pada penelitian ini diharapkan pembaca atau peneliti lain dapat mengembangkannya dengan fungsi lain atau dengan iterasi lain.



DAFTAR RUJUKAN

- Abdullah. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir jilid 1*. Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Abdullah. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir jilid 2*. Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang PRESS.
- Abdurrahman, Syaikh bin Nashir as-Sa'di. 2006. *Tafsir As-Sa'di*. Alih bahasa oleh Muhammad Iqbal dkk. Jakarta: Pustaka Sahifa.
- Algifari. 2000. *Analisis Regresi Edisi Kedua*. Yogyakarta: BPFE.
- Anto, H. 2003. *Pengantar Ekonomika Mikro Islami*. Yogyakarta: Jalasutra.
- Anton, H., dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linier Elementer zverdi Aplikasi*. Jakarta: Erlangga.
- Azis, A. 2010. *Ekonometrika dan Praktik Eksperimen dengan Matlab*. Malang: UIN Malang PRESS.
- Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta offset.
- Dadang, S. 2009. *Uji Khi Kuadrat dan Regresi untuk Penelitian*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Donald, W.M. 1963. *An Algorithm for Least-Square Estimation of Nonlinear Parameters*, 11 (2): 431-441.
- Eva, K. 2014. *Estimasi Parameter Pada Model Statistik Nonlinier Secara Maximum Likelihood*: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Firdaus, M. 2004. *Ekonometrika Suatu Pendekatan Aplikatif*. Jakarta: PT. Bumi Aksara.
- Gujarati, D.N. 2004. *Basic Econometrics Fourth Edition*. New York: McGraw-Hill.
- Gujarati, D.N. 2006. *Dasar-dasar Ekonometri. (terj. Eugenia Mardanugraha, Sita Wardhani, dan Carlos Mangunsong)*. Jakarta: Salemba Empat.
- Gurajati, D.N. 2010. *Dasar-Dasar Ekonometrika Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Harini, S., dan Turmudi. 2008. *Metode Statistika*. Malang: UIN Malang Press.
- Hasan, I. 2003. *Pokok-pokok Materi Statistik 2*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Hasan, M.I. 2002. *Pokok-pokok Materi Statistik 2 (Statistik Inferensif)*. Jakarta: PT. Bumi Aksara.
- Josep, B. 2005. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*, Jakarta: Salemba Empat.
- Munir, R. 2010. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.
- Mustafa, E., dkk. *Pengenalan Eksklusif Ekonomi Islam*, Jakarta: Kencana Prenada 2006.
- Nicholson, W. 2005. *Microeconomic Theory: Basin Principles and Extensions. Ninth Edition*. South-Western. USA.
- Nugroho, D.B. 2009. *Metode Numerik*. Salatiga: Universitas Kristen Satya Wacana.
- Rahman, A. 2010. *Al-Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Ririn, Z. 2014. *Estimasi Parameter pada Model Statistik Nonlinier secara Least Square*: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Sembiring, R.K. 1995. *Analisis Regresi*. Bandung: ITB.
- Sudjana, W. 2005. *Metoda Statistika*. Bandung: Tarsito.

- Suharyadi dan Purwanto. 2009. *Statistika untuk Ekonomi dan Keuangan*. Jakarta: Salemba Empat.
- Supranto, J. 2001. *Statistik Teori dan Aplikasi*. Jakarta: Erlangga.
- Suprayitno, E. 2005. *Ekonomi Mikro Perspektif Islam*, Jakarta: Erlangga.
- Syamsuddin, M. 2006. *Catatan Kuliah Ekonometri 3*. Depok: Universitas Indonesia.
- Widarjono, A. 2010. *Analisis Statistika Multivariat Terapan Edisi pertama*. Yogyakarta: UPP STIM YKPN.
- Yitnosumarto. 1990. *Dasar-dasar Statistika*. Jakarta : CV Rajawali.



LAMPIRAN 1

Data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur

No	Tahun	Tenaga Kerja	Modal	Produksi
1	2012	473786	18053	8250
2	2011	445857	11389	37759
3	2010	392282	6565	14915
4	2009	349565	5939	12125
5	2008	713379	67001	22673
6	2007	230025	11837	32685
7	2006	212334	7654	16780
8	2005	205439	5408	4108
9	2004	200367	5098	7689
10	2003	195483	4953	3720
12	2002	192412	3673	4854
13	2001	186537	4664	3619
14	2000	178765	4470	3525
15	1999	105933	5980	8749
16	1998	80610	6761	4060
17	1997	101229	9780	9567
18	1996	84607	5432	8657
19	1995	46317	6785	4098
20	1994	39817	9087	6345

LAMPIRAN 2**Hasil Output F1 Fungsi Produksi Cobb Dauglas**

```
function f=f1(b,x)
%f1 fungsi produksi Cobb-Douglass
%f=f1(b,x) berordo Tx1
L=x(:,1);
K=x(:,2);
b1=b(1,:);
b2=b(2,:);
b3=b(3,:);
f=b1*(L.^b2).* (K.^b3);
```



LAMPIRAN 3**Hasil Output NUMGRAD F1**

```
function z=numgradf1(b,x)
%Numerical gradient of f1
%z=Z(b) berordo T x k
k=length(b);
h=1e-7;
e=eye(k);
for j=1:k;
    bplus=b+h*e(:,j);
    bmin=b-h*e(:,j);
    fplus=feval('f1',bplus,x);
    fmin=feval('f1',bmin,x);
    z(:,j)=(fplus-fmin)/(2*h);
end
```



LAMPIRAN 4

Hasil Output NUMGRAD S

```
function z=numgradS1(b,x,y)
%Numerical gradient of S
%z=Z(b)berordo kx1
k=length(b);
h=1e-7;
e=eye(k);
for j=1:k
    bplus=b+h*e(:,j);
    bmin=b-h*e(:,j);
    fplus=feval('f1',bplus,x);
    fmin=feval('f1',bmin,x);
    Splus=(y-fplus)'*(y-fplus);
    Smin=(y-fmin)'*(y-fmin);
    z(j,:)=(Splus-Smin)/(2*h);
end
```



LAMPIRAN 5

Program

```

%=====
%NAMA : CINTIA tRISTANTI
%NIM : 12610061
%DOSEN PEMBIMBING : ABDUL AZIZ M.SI
%=====

%hasilnya berupa parameter b1,b2, dan b3
%Program fungsi produksi Cobb-Douglass yaitu:y=b1.(L^b2).(L^b3)

clc,clear all;
format long;

%data eksperimenyang berbentuk matriks LKy(L=Labor K=Kapital
%y=komoditi)yang

LKy=[473786 18053 8250
445857 11389 37759
392282 6565 14915
349565 5939 13135
713379 67001 22673
230025 11837 32685
212334 7654 16780
205439 5408 4108
200367 5098 7689
195483 4953 3720
192412 3673 4854
186537 4664 3619
178705 4470 3525
105933 5980 8749
80610 6761 4060
101229 9780 9567
94607 5432 8657
46317 6785 4098
39817 9087 6345
38857 6454 8087];

x1=LKy(:,1);
x2=LKy(:,2);
y=LKy(:,3);
x=[x1 x2];

% memasukan nilai awal untuk b1, b2, dan b3
b1_awal=input('Masukan nilai b1= ');
b2_awal=input('Masukan nilai b2= ');
b3_awal=input('Masukan nilai b3= ');
b=[b1_awal;b2_awal;b3_awal];
k=length(b);
T=length(x);

```

```

e=eye(k);
f=f1(b,x);
S=(y-f)'*(y-f);

lambda=input('Masukan lambda= ');

besar_iterasi=input('Masukan Besar iterasi(n)= ');

for i=1:besar_iterasi
    z=numgradf1(b,x);
    zS=numgradS1(b,x,y);
    step=(-1/2)*inv(z'*z+lambda*e)*zS;
    bnew=(b+step);
    fnew=f1(bnew,x);
    Snew=(y-fnew)'*(y-fnew);

    if norm(bnew-b)<=1e-9 & abs(S-Snew)<=1e-9
        disp('Sudah konvergen pada iterasi ke-')
        disp([i]);break;
    end
    if i==besar_iterasi
        disp('S belum konvergen')
        disp('atau ubahkan nilai awal untuk b')
    end

    iterasi=i;
    b=bnew;
    f=f1(b,x);
    S=(y-f)'*(y-f);

    % nilai baru untuk b1, b2, dan b3

    b1_baru(i+1)=bnew(1,:);
    b2_baru(i+1)=bnew(2,:);
    b3_baru(i+1)=bnew(3,:);
    S_new(i+1)=S(1,:);
end
b1_baru(1,1)=[b1_awal];
b2_baru(1,1)=[b2_awal];
b3_baru(1,1)=[b3_awal];

disp('=====')
disp('          b1 baru          b2 baru          b3 baru')
disp([b1_baru' b2_baru' b3_baru'])
disp('nilai S baru')
disp([S_new'])

disp('=====')
disp('Besar Iterasi')
disp([besar_iterasi])

b1new=[b1_baru]';
b2new=[b2_baru]';
b3new=[b3_baru]';

```

```
% % Plotting

r=1:length(b1new);
figure(1)
plot(r,b1new(r,:), '-ro')
grid on
title('Grafik kekonvergenan dari b1 secara Gauss-Newton')
xlabel('Besar iterasi')
ylabel('b1')

figure(2)
plot(r,b2new(r,:), '-yo')
grid on
title('Grafik kekonvergenan dari b2 secara Gauss-Newton')
xlabel('Besar iterasi')
ylabel('b2')

figure(3)
plot(r,b3new(r,:), '-bo')
grid on
title('Grafik kekonvergenan dari b3 secara Gauss-Newton')
xlabel('Besar iterasi')
ylabel('b3')
```

LAMPIRAN 6

Output nilai β_1 , β_2 , β_3 dan S

no	b1 baru	b2 baru	b3 baru
1	0.7000000000000000	0.3000000000000000	1.0000000000000000
2	0.169484804313197	0.303012668690957	0.975305675438307
3	0.201678389257691	0.318776945942676	0.853013871597213
4	0.468423362703587	0.357323255275605	0.607732215382505
5	2.205465473359127	0.447003239961407	0.118081140101273
6	11.616317136110965	0.454613745414736	0.360864149500932
7	5.210109251575304	0.453279951492674	0.329784601587059
8	6.424706591603737	0.450487628843855	0.247048449922998
9	10.334998379214554	0.449240716369997	0.157874086814684
10	13.240471023748952	0.448785993153411	0.138317041362695
11	12.895511118424004	0.448547978704665	0.144528577723986
12	13.078683401566108	0.448594402035363	0.142957349848211
13	13.038545550579194	0.448582528961237	0.143307194430444
14	13.047818199588972	0.448585147280251	0.143229202520576
15	13.045750656711647	0.448584694920248	0.143246540383690
16	13.046198235925916	0.448584910607494	0.143242635994634
17	13.046116178990175	0.448584739159652	0.143243528659098
18	13.046151640783524	0.448584636939625	0.143243378826783
19	13.046123828635437	0.448584798627536	0.143243387153865
20	13.046123982700875	0.448584821819544	0.143243354938685
21	13.046134988822184	0.448584736982342	0.143243379544820
22	13.046135659992213	0.448584725084188	0.143243390008919
23	13.046147925753386	0.448584634150466	0.143243412575867
24	13.046148642696405	0.448584620371235	0.143243425181977
25	13.046137151177671	0.448584706702741	0.143243402503195
26	13.046148191301313	0.448584632462897	0.143243412683170
27	13.046136642461640	0.448584709617458	0.143243402722319
28	13.046136412691490	0.448584719982744	0.143243390737780
29	13.046136192898574	0.448584719789292	0.143243392772476
30	13.046160170860352	0.448584541757684	0.143243437257974
31	13.046125314222609	0.448584786005906	0.143243392001192
32	13.046136027569599	0.448584731652885	0.143243378265734
33	13.046147661828916	0.448584633918887	0.143243415017397
34	13.046136730225747	0.448584709695332	0.143243401908351
35	13.046148213562603	0.448584632002851	0.143243413116839
36	13.046136664722287	0.448584709157417	0.143243403155987

37	13.046160302563885	0.448584541874317	0.143243436037056
38	13.046125314051753	0.448584786006465	0.143243392001080
39	13.046148072441552	0.448584641486211	0.143243401592786
40	13.046136399890159	0.448584709885733	0.143243404323031
41	13.046148301286715	0.448584632080871	0.143243412302829
42	13.046124530622826	0.448584800207914	0.143243379368079
43	13.046147585170743	0.448584644900477	0.143243400971155
44	13.046136354926341	0.448584710807249	0.143243403455438
45	13.046136323423401	0.448584720866699	0.143243390276910
46	13.046135992373463	0.448584722016349	0.143243391417241
47	13.046124036135797	0.448584811301139	0.143243368550666
48	13.046147542060517	0.448584643902094	0.143243402652534
49	13.046136466124310	0.448584709464339	0.143243404349772
50	13.046136412188611	0.448584719984385	0.143243390737476
51	13.046147814862927	0.448584634535453	0.143243412955645
52	13.046112640601972	0.448584889071366	0.143243356528234
53	13.046147046537609	0.448584655955615	0.143243390560551
54	13.046136067590425	0.448584711996380	0.143243404188672
55	13.046148234551477	0.448584632503892	0.143243412275789
56	13.046148465228551	0.448584621178723	0.143243425534804
57	13.046124817371616	0.448584799020682	0.143243378634473
58	13.046135674384450	0.448584732305227	0.143243380246386
59	13.046135548857949	0.448584725469958	0.143243390388536
60	13.046135858382106	0.448584723821020	0.143243390088913
61	13.046135924773496	0.448584723399113	0.143243390115742
62	13.046135835949304	0.448584724281617	0.143243389655145
63	13.046159725992238	0.448584546172629	0.143243434954529
64	13.046125224654975	0.448584786890818	0.143243391540140
65	13.046136005299132	0.448584731156012	0.143243379105987
66	13.046147594691991	0.448584634343210	0.143243414990118
67	13.046136685520285	0.448584709659067	0.143243402314840
68	13.046124345203506	0.448584809653662	0.143243368250782
69	13.046123474859748	0.448584822817540	0.143243357706196
70	13.046123209294404	0.448584824505169	0.143243357598879
71	13.046135031822040	0.448584737024146	0.143243379137300
72	13.046135703899143	0.448584724166106	0.143243390875875
73	13.046159837075779	0.448584544830080	0.143243435848806
74	13.046148958480458	0.448584611046441	0.143243435077565
75	13.046149061574562	0.448584618342305	0.143243424501647
76	13.046136929480008	0.448584707472406	0.143243403262817
77	13.046148257600555	0.448584631084346	0.143243413983873

78	13.046148508896556	0.448584621218349	0.143243425127704
79	13.046172574814216	0.448584443264000	0.143243468799356
80	13.046149963324487	0.448584595119307	0.143243448224697
81	13.046137348349056	0.448584706400462	0.143243401308540
82	13.046124234673458	0.448584810037471	0.143243368630773
83	13.046147230992492	0.448584646512984	0.143243401677293
84	13.046160244313141	0.448584532700393	0.143243448754422
85	13.046125511392406	0.448584785703640	0.143243390806520
86	13.046123827118986	0.448584822168223	0.143243355724941
87	13.046135077278718	0.448584735144112	0.143243381279099
88	13.046135481069131	0.448584726853358	0.143243389086929
89	13.046135880324458	0.448584723362030	0.143243390522380
90	13.046124057776137	0.448584810843123	0.143243368983939
91	13.046135274618178	0.448584735798235	0.143243378810621
92	13.046147527016842	0.448584635726253	0.143243413688561
93	13.046136463537881	0.448584711386630	0.143243401800331
94	13.046136034593562	0.448584723017637	0.143243389735304
95	13.046147592483148	0.448584636264293	0.143243412440899
96	13.046136397127547	0.448584711808603	0.143243401773487
97	13.046124367240646	0.448584809194390	0.143243368684275
98	13.046123207991823	0.448584825466378	0.143243356324128
99	13.046135053858468	0.448584736564874	0.143243379570797
100	13.046147570915846	0.448584635765146	0.143243413281579
101	13.046136441044391	0.448584711847435	0.143243401366521
102	13.046135968141611	0.448584723439750	0.143243389708434
103	13.046159770267971	0.448584545253380	0.143243435821696
104	13.046149025364176	0.448584609666035	0.143243436378586
105	13.046160883729405	0.448584530862533	0.143243446039814
106	13.046149379736022	0.448584607095959	0.143243436946486
107	13.046124993405178	0.448584798217880	0.143243378280755
108	13.046123739889827	0.448584821131686	0.143243357813153
109	13.046146988412294	0.448584646781309	0.143243403277976
110	13.046159999009900	0.448584535848388	0.143243446531673
111	13.046125355817788	0.448584787009252	0.143243390318863
112	13.046123782801399	0.448584822130733	0.143243356131650
113	13.046134965663294	0.448584736488407	0.143243380384507
114	13.046135481617720	0.448584725894666	0.143243390361179
115	13.046135857533219	0.448584723823820	0.143243390088386
116	13.046123813378770	0.448584813031222	0.143243368035696
117	13.046147141654192	0.448584647397193	0.143243401216366
118	13.046147887379094	0.448584626438168	0.143243423177577

119	13.046136617467974	0.448584711043356	0.143243401013051
120	13.046135967823684	0.448584723440797	0.143243389708245
121	13.046135813515111	0.448584723785324	0.143243390495295

nilai S baru	
1.0e+011 *	
1	0.0000000000000000
2	2.651020699430280
3	0.324525880543721
4	0.020271071109519
5	0.035275465953650
6	1.518464659707380
7	0.092598465651792
8	0.016853282952612
9	0.012380162291362
10	0.012192763361448
11	0.012166378237947
12	0.012166320644853
13	0.012166317520862
14	0.012166317379505
15	0.012166317372523
16	0.012166317372168
17	0.012166317372153
18	0.012166317372152
19	0.012166317372152
20	0.012166317372152
21	0.012166317372152
22	0.012166317372152
23	0.012166317372152
24	0.012166317372152
25	0.012166317372152
26	0.012166317372152
27	0.012166317372152
28	0.012166317372152
29	0.012166317372152
30	0.012166317372152
31	0.012166317372152
32	0.012166317372152
33	0.012166317372152
34	0.012166317372152

35	0.012166317372152
36	0.012166317372152
37	0.012166317372152
38	0.012166317372152
39	0.012166317372152
40	0.012166317372152
41	0.012166317372152
42	0.012166317372152
43	0.012166317372152
44	0.012166317372152
45	0.012166317372152
46	0.012166317372152
47	0.012166317372152
48	0.012166317372152
49	0.012166317372152
50	0.012166317372152
51	0.012166317372152
52	0.012166317372152
53	0.012166317372152
54	0.012166317372152
55	0.012166317372152
56	0.012166317372152
57	0.012166317372152
58	0.012166317372152
59	0.012166317372152
60	0.012166317372152
61	0.012166317372152
62	0.012166317372152
63	0.012166317372152
64	0.012166317372152
65	0.012166317372152
66	0.012166317372152
67	0.012166317372152
68	0.012166317372152
69	0.012166317372152
70	0.012166317372152
71	0.012166317372152
72	0.012166317372152
73	0.012166317372152
74	0.012166317372152
75	0.012166317372152

76	0.012166317372152
77	0.012166317372152
78	0.012166317372152
79	0.012166317372152
80	0.012166317372152
81	0.012166317372152
82	0.012166317372152
83	0.012166317372152
84	0.012166317372152
85	0.012166317372152
86	0.012166317372152
87	0.012166317372152
88	0.012166317372152
89	0.012166317372152
90	0.012166317372152
91	0.012166317372152
92	0.012166317372152
93	0.012166317372152
94	0.012166317372152
95	0.012166317372152
96	0.012166317372152
97	0.012166317372152
98	0.012166317372152
99	0.012166317372152
100	0.012166317372152
101	0.012166317372152
102	0.012166317372152
103	0.012166317372152
104	0.012166317372152
105	0.012166317372152
106	0.012166317372152
107	0.012166317372152
108	0.012166317372152
109	0.012166317372152
110	0.012166317372152
111	0.012166317372152
112	0.012166317372152
113	0.012166317372152
114	0.012166317372152
115	0.012166317372152
116	0.012166317372152

117	0.012166317372152
118	0.012166317372152
119	0.012166317372152
120	0.012166317372152
121	0.012166317372152



RIWAYAT HIDUP



Cintia Trisanti dilahirkan di Malang pada tanggal 04 Desember 1993, merupakan anak kedua dari tiga bersaudara, pasangan Bapak H. dadang Sutrisno dan Ibu Siti Jumiati. Pendidikan dasarnya ditempuh di kampung halamannya di SDN Banjararum 01 yang ditamatkan pada tahun 2006.

Pada tahun yang sama dia melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMPN 03 Singosari. Pada tahun 2009 dia menamatkan pendidikannya, kemudian melanjutkan pendidikan menengah atas di SMA “Islam” Malan menamatkan pendidikan tersebut pada tahun 2012. Pendidikan berikutnya dia tempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur mandiri dengan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Cintia Trisanti
NIM : 12610061
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Estimasi Parameter Model Statistik Nonlinier pada Fungsi
Produksi *Cobb-Douglas* Secara *Least Square* dengan
Iterasi *Marquard Levenberg*
Pembimbing I : Abdul Aziz, M.Si
Pembimbing II : Dr. Abdussakir, M.Pd

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan
1.	16 Februari 2016	Konsultasi Bab I dan II	1.
2.	22 Februari 2016	Konsultasi Agama Bab I dan II	2.
3.	10 Maret 2016	Konsultasi Bab II	3.
4.	11 April 2016	Konsultasi Agama Bab I dan II	4.
5.	11 Mei 2016	Konsultasi Bab III	5.
6.	28 Juni 2016	Revisi Agama Bab I dan II	6.
7.	29 Juni 2016	Konsultasi Bab IV	7.
8.	6 Agustus 2016	Konsultasi Agama Bab IV	8.
9.	20 Agustus 2016	Konsultasi Bab IV	9.
10.	27 Agustus 2016	Konsultasi Agama Bab IV	10.
11.	4 September 2016	Konsultasi Bab IV	11.
12.	16 September 2016	Konsultasi Agama Keseluruhan	12.
13.	27 Oktober 2016	Konsultasi Bab IV	13.
14.	10 November 2016	ACC Agama Keseluruhan	14.
15.	9 November 2016	ACC Bab III, IV, dan V	15.

Malang, 02 Desember 2017

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001