ESTIMASI PARAMETER MODEL STATISTIK NONLINIER PADA FUNGSI PRODUKSI *COOB-DOUGLAS* SECARA *LEAST SQUARE* DENGAN ITERASI *QUADRATIC HILL CLIMBING*

SKRIPSI

OLEH
ERISKA NOERHAYATI
NIM. 12610047

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2016

ESTIMASI PARAMETER MODEL STATISTIK NONLINIER PADA FUNGSI PRODUKSI *COOB-DOUGLAS* SECARA *LEAST SQUARE* DENGAN ITERASI *QUADRATIC HILL CLIMBING*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Eriska Noerhayati
NIM. 12610047

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERIMAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

ESTIMASI PARAMETER MODEL STATISTIK NONLINIER PADA FUNGSI PRODUKSI *COOB-DOUGLAS* SECARA *LEAST SQUARE* DENGAN ITERASI *QUADRATIC HILL CLIMBING*

Oleh
Eriska Noerhayati
NIM. 12610047

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 10 November 2016

Pembimbing I,

Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Pembimbing II,

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER MODEL STATISTIK NONLINIER PADA FUNGSI PRODUKSI *COOB-DOUGLAS* SECARA *LEAST SQUARE* DENGAN ITERASI *QUADRATIC HILL CLIMBING*

SKRIPSI

Oleh
Eriska Noerhayati
NIM. 12610047

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 13 Desember 2016

Penguji Utama	: Dr. Sri Harini, M.Si	....
Ketua Penguji	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Abdul Aziz, M.Si	....
Anggota Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Eriska Noerhayati
NIM	:	12610047
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Estimasi Parameter Model Statistik Nonlinier pada Fungsi Produksi *Cobb-Douglas* Secara *Least Square* dengan Iterasi *Quadratic Hill Climbing*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Desember 2016
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
TGL. 20
BE4A5AEF068275628
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Eriska Noerhayati
NIM. 12610047

MOTO

فَإِن تَوَلَّوۡاْ فَقُلۡ حَسۡبِيَ ٱللَّهُ لَآ إِلَٰهَ إِلَّا هُوَۖ عَلَيۡهِ تَوَكَّلۡتُۖ وَهُوَ رَبُّ ٱلۡعَرۡشِ ٱلۡعَظِيمِ

"Jika mereka berpaling (dari keimanan), maka katakanlah: "Cukuplah Allah bagiku, tidak ada Tuhan selain Dia hanya kepada-Nya aku bertawakkal dan Dia adalah Tuhan yang memiliki Arsy yang agung".

(QS. At-Taubah/9:129)

"Raihlah ilmu, dan untuk meraih ilmu belajarlah untuk tenang dan sabar"

(Sayyidina Umar Bin Khattab)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Ibrohim dan ibunda Insyiyatih yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, mendukung, memotivasi, dan merestui penulis dalam menuntut ilmu serta selalu memberikan teladan yang baik bagi penulis. Untuk kakak tercinta Efi Noerhayati dan Anang Tripandi atas seluruh cinta dan kepercayaannya terhadap penulis. Untuk keponakan tersayang Sultan Falah yang selalu menghibur dan memberikan semangat yang tiada hentinya.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada nabi Muhammad Saw. yang telah membimbing manusia dari jalan kegelapan menuju jalan yang terang benderang yaitu agama Islam.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis banyak mendapat saran, bimbingan, arahan, doa, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis sampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya serta penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus sebagai dosen pembimbing II yang telah memberikan saran dan bantuan dalam penulisan skripsi ini.

4. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
6. Ayah dan ibu tercinta yang telah mencurahkan kasih sayang, doa, bimbingan, dan motivasi hingga terselesaikannya skripsi ini.
7. Saudara-saudara tersayang yang telah memberikan semangat kepada penulis.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2012 yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi dan terima kasih untuk kenang-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
9. Keluarga besar Pondok Pesantren Tahfidz al-Quran al-Falah yang telah memberikan dukungan, motivasi, dan kenangan yang tak terlupakan kepada penulis.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Desember 2016

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III METODE PENELITIAN

BAB IV PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Y_i	: Nilai respon ke-$i = 1, 2, \dots, n$
X_i	: Nilai prediktor ke-$i = 1, 2, \dots, n$
β	: Nilai parameter
e_i	: Nilai *error* ke-i
$f(X_i\beta)$	: Fungsi nonlinier
Q	: Hasil produksi
L	: Tenaga kerja (*labor*)
K	: Modal (*capital*)
n	: Iterasi
$f(x)$	: Nilai fungsi di titik x
$f', f'', \dots, f^n$	: Turunan pertama, kedua, …, ke-n dari fungsi
$(x - x_0)$	: Langkah ruang atau jarak
R_n	: Kesalahan pemotongan
S	: *Residual sum of square*
$\frac{\partial S}{\partial \beta}$	: Turunan pertama *residual sum of square*
$\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}$	: Turunan kedua *residual sum of square*

ABSTRAK

Noerhayati, Eriska. 2016. **Estimasi Parameter Model Statistik Nonlinier pada Fungsi Produksi *Cobb-Douglas* Secara *Least Square* dengan Iterasi *Quadratic Hill Climbing***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Kata kunci: estimasi parameter, fungsi produksi *Cobb-Douglas*, metode *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE), iterasi *Quadratic Hill Climbing*

Ekonometri dapat dimanfaatkan untuk membuat estimasi sebuah fungsi beserta parameter-parameternya, yang selanjutnya dapat dimanfaatkan untuk membuat prediksi pada periode yang akan datang. Setiap industri mencoba untuk memproduksi barang dengan hasil yang optimal. Salah satu model pengukuran produktivitas yang sering digunakan adalah pengukuran berdasarkan pendekatan fungsi produksi *Cobb-Douglas*. Ada banyak pendekatan untuk mengestimasi parameter pada fungsi produksi *Cobb-Douglas*, salah satunya dengan metode *Least Square* (LS). Iterasi yang digunakan untuk mendapatkan taksiran dengan metode LS salah satunya yaitu iterasi *Quadratic Hill Climbing*.

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui estimasi parameter pada fungsi produksi *Cobb Douglas* menggunakan metode *Least Square* dengan iterasi *Quadratic Hill Climbing*. Oleh karena itu, perlu mengaproksimasi *residual sum of square* $S(\beta)$ pada deret Taylor orde dua. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa bentuk umum dari estimasi parameter model statistik nonlinier secara iterasi *Quadratic Hill Climbing* adalah:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(n)}} + \lambda_n I_k \right)^{-1} \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(n)}}$$

Hasil dari estimasi *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE) tersebut diaplikasikan pada implementasi data Industri, Logam, Mesin, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dengan fungsi produksi *Cobb-Douglas* (CD), yaitu:

$$y = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

Selanjutnya diperoleh model fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan iterasi *Quadratic Hill Climbing* sehingga dapat ditulis menjadi,

$$y = 13{,}0461192 L^{0{,}4485854343} K^{0{,}14324343238}$$

ABSTRACT

Noerhayati, Eriska. 2016. **Parameter Estimation Statistical Models Nonlinear of Cobb-Douglas Production Function Implementation Least Square with Quadratic Hill Climbing Iteration.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Keywords: parameter estimation, Cobb-Douglas production function, method of Nonlinear Least Square Estimator (NLSE), Quadratic Hill Climbing iteration

Econometric can be used to estimate a function and its parameters, which can be used to make predictions on future periods. Every industry tries to produce goods with optimal results. One productivity model that is frequently used is measurement based on the approach of Cobb-Douglas production function. There are many approaches to estimate the parameters of the Cobb-Douglas function, one of them is the method of least squares (LS). Iteration used to obtain the estimation using (LS) method is the Quadratic Hill Climbing iteration.

The purpose of this study was to determine the parameter estimation on the Cobb Douglas production function using Least Square method by iterating Quadratic Hill Climbing. Therefore, it needs to approximate the residual sum of square $S(\beta)$ on a second order Taylor series. The result showed that the general form of the nonlinear parameter estimation of statistical model implementation quadratic Hill Climbing iteration is:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} + \lambda_n I_k \right)^{-1} \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}}$$

The results of the nonlinear least squares estimator (NLSE) estimation were applied to the implementations of Industry, Metal, Machinery, Textile, and Miscellaneous (ILMTA) data on 1993-2012 in East Java Province with a Cobb-Douglas production function (CD), namely:

$$y = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

Furthermore, the model obtained Cobb-Douglas production function with iterations Hill Climbing so that it can be written as,

$$y = 13{,}0461192 L^{0{,}4485854343} K^{0{,}14324343238}$$

ملخص

نور حياة، أريسكا. ٢٠١٦. **تقدير المعلمة النماذج الإحصائية غير الخطية على دالة إنتاج *-Coob Douglas* في *Least Square* مع التكرار *Quadratic Hill Climbing*.** بحث جامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج .

المشرف (١) عبد العزيز، ماجستير (٢) الدكتور عبد١لشاكر.

كلمات الرئيسية : النماذج الإحصائية غير الخطية، تقدير معلمة ، د الة الإنتاج *Cobb-Douglas*، وطريقة *Nonlinear Least Square Estimator (NLSE)* ، تكرار *Quadratic Hill Climbing*

الاقتصاد القياسي يمكن أن يستخدم لتقدير دالة و معلماتها، ثمّ يمكن استخدامها لجعل التنبؤات على الفترات المستقبلية .تحاول كل صناعة لإنتاج السلع مع أفضل النتائج .ومن نمودج قياس الانتاجية الذي كان مستحدما كثيرة هو النهج القائم على القياس إلى دالةة إنتاج *Cobb-Douglas*. هناك العديد من الطرق لتقدير معالم دالة إنتاج *Cobb-Douglas*، واحدى منهم هي طريقة (LS) *Least Square* وتستخدم التكرار للحصول على تقديرات مع طريقة (LS) واحد منهم هو تكرار *Quadratic Hill Climbing*.

وكان هدف هذا البحث هو تحديد تقدير المعلمة على دالة إنتاج *Cobb-Douglas* باستخدام طريقة *Least Square* التي كتبها بالتكرار *Quadratic Hill Climbing*. وبالتالي، تحتاج أن تقرب *residual sum of S* (β) بسلسلة على تايلور الدرجة الثانية .وأظهرت النتيجة أن الشكل العام للتقدير المعلمة لنموذج إحصائي تكرارا غير الخطية من *Quadratic Hill Climbing* هو:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(n)}} + \lambda_n I_k \right)^{-1} \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(n)}}$$

طبقت نتائج تقدير (NLSE) *Nonliniear Least Square Estimator* لصناعة تطبيقات البيانات (ILMTA) Industri, Logam, Mesin, Tekstil, dan Aneka لسنة ١٩٩٣-٢٠١٢ في محافظة جاوة الشرقية مع دالة إنتاج *Cobb-Douglas* ، وهي:

$$y = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3}$$

وعلاوة على ذلك، فإن النتائج التي تم الحصول عليها من *Quadratic Hill Climbing* بحيث يمكن أن يكتب،

$$y = 13{,}0461192 L^{0{,}4485854343} K^{0{,}14324343238}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Quran adalah kitab Allah yang di dalamnya memuat segala sesuatu yang berhubungan dengan kehidupan. Al–Quran tidak hanya membahas tentang masalah agama saja, akan tetapi juga membahas tentang sains. Dalam bidang matematika, al-Quran menyinggung tentang estimasi, lebih jelasnya adalah sebagai berikut:

وَأَرۡسَلۡنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلۡفٍ أَوۡ يَزِيدُونَ ١٤٧

"Dan kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih"(QS. Ash-Shaaffat/37:147).

Surat ash-Shaaffat ayat 147 tersebut menjelaskan bahwa nabi Yunus diutus kepada umatnya yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih. Jika membaca ayat tersebut secara seksama, maka terdapat ketidakpastian dalam menentukan jumlah umat nabi Yunus. Bukankah Allah Swt. Maha Mengetahui segala sesuatu termasuk jumlah umat nabi Yunus? Jawaban terhadap pertanyaan tersebut adalah "inilah contoh estimasi (taksiran)". Estimasi adalah keterampilan untuk menentukan sesuatu tanpa melakukan proses perhitungan secara eksak (Abdussakir, 2007).

Estimasi adalah salah satu ilmu yang menggunakan analisis matematika dan teori statistika untuk menganalisis masalah-masalah dan fenomena-fenomena ekonomi secara kualitatif yang dibahas dalam ilmu ekonometri (Firdaus, 2004). Ekonometri dapat dimanfaatkan untuk membuat estimasi suatu fungsi beserta parameter-parameternya, yang selanjutnya dapat dimanfaatkan untuk membuat prediksi pada periode yang akan datang. Salah satu contohnya ialah di bidang industri (Aziz, 2010).

Setiap industri mencoba untuk memproduksi barang dengan hasil yang optimal. Untuk memperoleh hal itu, terlebih dahulu harus dirumuskan secara jelas *output* apa saja yang diharapkan dari sistem dan sumber daya *input* apa saja yang akan digunakan dalam sistem tersebut. Salah satu model pengukuran produktivitas yang sering digunakan adalah pengukuran berdasarkan pendekatan fungsi produksi *Cobb-Douglas*. Model fungsi *Cobb-Douglas* merupakan bentuk fungsional dari fungsi produksi secara luas digunakan untuk mewakili hubungan *output* untuk *input* (Dewi, 2011).

Ada banyak pendekatan untuk mengestimasi parameter β pada fungsi *Cobb-Douglas*, salah satunya dengan metode *Least Square* (LS). Hal tersebut bertujuan untuk mendapatkan nilai parameter β yang minimum, yaitu dengan cara meminimumkan galatnya. Hasil nilai taksiran dilakukan dengan menggunakan operasi turunan pertama dan turunan kedua pada deret Taylor. Ekspansi deret Taylor orde satu digunakan dalam prosedur iterasi *Gauss Newton*, sedangkan pada iterasi *Newton Raphson* menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua (Aziz, 2010).

Pada penelitian sebelumnya yang berjudul Estimasi Parameter pada Model Statistik Nonlinier Secara *Least Square* yang dilakukan oleh Zulaikah (2014) diperoleh hasil bahwa estimasi parameter secara iterasi *Newton Raphson* lebih kecil atau lebih cepat konvergen daripada estimasi parameter secara iterasi *Gauss Newton*.

Berdasarkan pemaparan di atas, peneliti mencoba membuat sebuah penelitian menggunakan iterasi *Quadratic Hill Climbing*. Menurut Sanjoyo (2006), iterasi *Quadratic Hill Climbing* adalah pengembangan dari iterasi *Newton Raphson* yaitu menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua yang ditambah suku perkalian antara skalar dan matriks identitas, dengan panjang langkahnya bernilai sembarang. Setelah didapatkan estimasi parameter dengan iterasi *Quadratic Hill Climbing* selanjutnya akan dibandingkan dengan hasil estimasi parameter dengan menggunakan iterasi *Gauss Newton* pada penelitian Zulaikah (2014). Adapun judul penelitian ini adalah "Estimasi Parameter Model Statistik Nonlinier pada Fungsi Produksi *Cobb-Douglas* Secara *Least Square* dengan Iterasi *Quadratic Hill Climbing*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang penelitian yang telah dijelaskan di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana estimasi parameter pada fungsi produksi *Cobb-Douglas* menggunakan metode *Least Square* dengan iterasi *Quadratic Hill Climbing*?
2. Bagaimana hasil perbandingan antara iterasi *Quadratic Hill Climbing* dengan iterasi *Gauss-Newton* pada estimasi fungsi produksi *Cobb-Douglas*.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah disebutkan maka tujuan penelitian ini yaitu:

1. Mengetahui estimasi parameter pada fungsi produksi *Cobb-Douglas* menggunakan metode *Least Square* dengan iterasi *Quadratic Hill Climbing*.
2. Mengetahui hasil perbandingan antara iterasi *Quadratic Hill Climbing* dengan iterasi *Gauss-Newton* pada estimasi fungsi produksi *Cobb-Douglas*.

1.4 Batasan Masalah

Untuk membatasi permasalahan agar sesuai dengan yang dimaksudkan dan tidak menimbulkan permasalahan yang baru, maka peneliti memberikan batasan masalah. Pada penelitian ini data diambil dari penelitian sebelumnya yang berjudul Estimasi Parameter pada Model Statistik Nonlinier secara *Least Square* oleh Zulaikah (2014), menggunakan data yang sama agar hasil estimasi parameternya dapat dibandingkan. Untuk mengestimasi parameter, peneliti menggunakan nilai awal parameter β yaitu, $\beta_1 = 0,7$, $\beta_2 = 0,3$, dan $\beta_3 = 1$ nilai-nilai tersebut juga diambil dari nilai awal parameter β yang digunakan pada penelitian Zulaikah (2014). Pada penelitian ini penulis melakukan enam kali iterasi dengan nilai λ dan t sembarang. Penulis juga memberikan batasan bahwa nilai dari $\lambda_n = \lambda$ dalam satu kali iterasi, dengan kata lain dalam satu kali iterasi nilai λ tidak berubah atau konstan.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Bagi Penulis

   Merupakan sarana untuk mengaplikasikan dan mengembangkan disiplin keilmuan yang selama ini menjadi bidang minat yang dipelajari.

2. Bagi Pembaca

   a. Penelitian ini dapat dimanfaatkan sebagai sumber informasi dan tambahan wawasan mata kuliah ekonometrika, khususnya estimasi model statistik nonlinier fungsi produksi *Cobb-Douglas* menggunakan metode *Least Square* dengan iterasi *Quadratic Hill Climbing.*

   b. Penelitian ini dapat memberikan metode alternatif untuk menentukan prediksi dalam penentuan model persamaan statistik nonlinier yang terbaik.

3. Bagi Instansi

   a. Sebagai sumbangan pemikiran keilmuan matematika.

   b. Membandingkan penelitian yang sudah ada dengan metode lain.

   c. Meningkatkan peran serta Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dalam pengembangan wawasan keilmuan matematika khususnya pada mata kuliah pilihan ekonometrika.

1.6 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan yang digunakan dalam skripsi ini adalah sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bagian ini menjelaskan gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan seperti model statistik, estimasi parameter, pendiferensialan matriks, deret Taylor, metode estimasi *Least Square*, estimasi parameter iterasi *Gauss-Newton*, analisis data, dan estimasi dalam al-Quran.

Bab III Metode Penelitian

Pada bagian ini membahas metode penelitian yang dilakukan saat pembahasan, terdiri dari pendekatan penelitian, jenis dan sumber data, variabel penelitian, dan langkah-langkah penelitian.

Bab IV Pembahasan

Pada bab ini menjabarkan estimasi parameter dengan iterasi *Quadratic Hill Climbing*, serta hasil perbandingan antara iterasi *Quadratic Hill Climbing* dengan itearasi *Gauss-Newton* pada proses estimasi fungsi produksi *Cobb-Douglas.*

Bab V Penutup

Pada bab ini berisi kesimpulan dan saran dari hasil pembahasan.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Model Statistik

2.1.1 Model Statistik Linier

Istilah linier dapat diartikan dengan dua cara yang berbeda, yaitu sebagai berikut:

a. Linieritas dalam variabel, maksudnya adalah ekspektasi (harapan bersyarat) dari y merupakan sebuah fungsi linier dari X_i, seperti:

$$E(y \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n \qquad (2.1)$$

Suatu fungsi $y = f(x)$ dikatakan linier dalam variabel jika X berpangkat satu, sedangkan fungsi yang berbentuk

$$E(y \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i^2 \qquad (2.2)$$

bukan merupakan fungsi linier dalam variabel karena variabel X berpangkat dua. Akan tetapi fungsi tersebut dapat juga dikatakan sebagai fungsi linier jika X_i^2 diganti dengan Z_i, seperti:

$$E(y \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2 Z_i \qquad (2.3)$$

b. Linieritas dalam parameter, maksudnya adalah ekspektasi atau harapan bersyarat *(conditional expectation)* dari y, $E(y \mid X_i)$ merupakan sebuah fungsi linier dari parameter-parameternya, parameter β bisa saja linier atau bisa juga tidak linier untuk variabel X-nya. Dalam hal ini, contoh linier dalam parameter adalah

$$E(y \mid X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i^2 \qquad (2.4)$$

sedangkan persamaan:

$$E\left(y \mid X_i\right)=\beta_1+\beta_2^{\beta_3} X_i \tag{2.5}$$

bukan merupakan fungsi linier dalam parameter karena β_2 tidak berpangkat satu, sehingga dalam hal ini, $\beta_2^{\beta_3}$ tidak dapat diganti dengan β_4 (Firdaus, 2004).

Dari kedua interpretasi tersebut, linieritas dalam parameter relevan terhadap pembentukan teori regresi. Oleh karena itu, terminologi regresi linier akan selalu berarti sebuah regresi yang linier dalam parameter-parameternya, β-nya (yaitu parameternya) berpangkat satu saja. Jadi, $E(y \mid X_i)=\beta_1+\beta_2 X_i$ linier untuk keduanya, yaitu linier dalam variabel dan linier dalam parameter. Sedangkan $E\left(y \mid X_i\right)=\beta_1+\beta_2 X_i^2$ linier dalam parameter akan tetapi tidak linier dalam variabel X (Gujarati, 2010).

Model statistik linier dapat digeneralisasikan menjadi lebih dari satu k variabel. Persamaan model statistik linier dalam k variabel adalah sebagai berikut:

$$y=\beta_0+\beta_1 X_1+\beta_2 X_2+\ldots+\beta_k X_k+e \tag{2.6}$$

Menurut Johnson dan Dean (1998), persamaan (2.6) merupakan persamaan regresi linier dengan respon tunggal. Pada persamaan (2.6), y adalah variabel dependen, β adalah koefisien regresi, sedangkan X adalah variabel independen dan e adalah *error*.

Jika pencarian variabel dependen dan nilai gabungan variabel independen yang dinyatakan dengan model secara komplit, maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \beta_0+\beta_1 X_{11}+\beta_2 X_{12}+\ldots+\beta_k X_{1k}+e_1 \\
y_2 &= \beta_0+\beta_1 X_{21}+\beta_2 X_{22}+\ldots+\beta_k X_{2k}+e_2 \\
&\vdots \\
y_n &= \beta_0+\beta_1 X_{n1}+\beta_2 X_{n2}+\ldots+\beta_k X_{nk}+e_n
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots x_{k1} \\ 1 & x_{21} & \cdots x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

Dari matriks tersebut dapat dituliskan bentuk umum model statistik linier sebagai berikut:

$$y = X\beta + e \tag{2.8}$$

dan *error* diasumsikan dengan:

1. $E(e_i) = 0$.
2. $Var(e_i) = \sigma^2$ (konstan).

2.1.2 Model Statistik Transformasi Linier

Ada beberapa macam bentuk nonlinier yang dapat ditransformasikan ke dalam bentuk linier, antara lain:

1. Bentuk Power

Persamaan bentuk power dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 X_i^{\beta_1} e_i, \qquad i = 1, 2, 3, \cdots, \mathrm{n} \tag{2.9}$$

Pada persamaan (2.9) dapat dilakukan dengan transformasi logaritma, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \ln(y_i) &= \ln\left(\beta_0 X_i^{\beta_1} e_i\right) \\ &= \ln\left(\beta_0 X_i^{\beta_1} + \ln e_i\right), && \text{sifat logaritma perkalian} \\ &= \beta_1 \ln\left(\beta_0 X_i\right) + \ln e_i, && \text{sifat logaritma pangkat} \\ &= \beta_1 \ln \beta_0 + \ln X_i + \ln e_i, && \text{sifat logaritma perkalian} \end{aligned}$$

Bentuk power setelah ditransformasikan termasuk dalam bentuk linier.

2. Bentuk Eksponensial

Persamaan dari bentuk eksponensial dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_i = \exp\left(X_i \beta\right) e_i \tag{2.10}$$

Dari persamaan tersebut dilakukan dengan transformasi logaritma, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\ln\left(y_i\right) &= \ln\left(\exp\left(X_i\beta\right)e_i\right) \\
&= \ln\left(\exp\left(X_i\beta\right)\right) + \ln\ e_i, && \text{sifat logaritma perkalian} \\
&= \left(X_i\beta\right)\ln\left(\exp\right) + \ln\ e_i, && \text{sifat logaritma pangkat} \\
&= \left(X_i\beta\right)\left(1\right) + \ln\ e_i, && \text{definisi eksponensial} \\
&= \left(X_i\beta\right) + \ln\ e_i
\end{aligned}$$

Bentuk eksponensial ini merupakan model linier. Sehingga bentuk transformasi dari persamaan (2.10) dapat juga dikatakan sebagai model statistik linier jika

$$y_i^* = X_i\beta + e_i^* \tag{2.11}$$

dimana

$$y_i^* = \ln\left(y_i\right) \ \text{ dan } \ e_i^* = \ln\ e_i$$

3. Bentuk Resiprokal (berbalikan)

Persamaan bentuk resiprokal dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2\left(\frac{1}{x_i}\right) + e_i \tag{2.12}$$

Persamaaan (2.12) merupakan model nonlinier pada variabel X, karena variabel ini memasuki model secara terbaik atau resiproksi. Model ini linier dalam β_1 dan β_2, akan tetapi model ini dapat juga dikatakan sebagai model linier dalam parameter dan linier dalam variabel jika dimisalkan $X_i^* = \frac{1}{X_i}$ sehingga diperoleh

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i^* + e_i \quad (2.13)$$

2.1.3 Model Statistik Nonlinier

Model nonlinier merupakan bentuk hubungan antara peubah respon dengan peubah penjelas yang tidak linier dalam parameter. Menurut Draper dan Smith (1992), model umum nonlinier adalah:

$$Y_i = f(X_i\beta) + e_i$$

$$e_i = Y_i - f(X_i\beta) \quad (2.14)$$

dengan:

Y_i : nilai respon ke-$i = 1, 2, \dots, n$

X_i : nilai prediktor ke-$i = 1, 2, \dots, n$

β : nilai parameter

e_i : nilai *error* ke-i

$f(X_i\beta)$: fungsi nonlinier

Model nonlinier diklasifikasikan menjadi linier intrinsik dan nonlinier intrinsik. Model linier intrinsik dapat ditransformasikan menjadi bentuk linier, sedangkan model nonlinier intrinsik tidak dapat ditransformasikan menjadi bentuk linier. Regresi nonlinier mengandung parameter bersifat nonlinier, dimana turunan persamaan terhadap salah satu parameter adalah fungsi dari parameter lain.

2.1.4 Fungsi Produksi *Cobb-Douglas*

Fungsi produksi adalah suatu hubungan matematis yang menggambarkan suatu cara dengan jumlah dari hasil produksi tertentu tergantung dari jumlah *input* tertentu yang digunakan. Menurut Beattie dan Taylor (1994) dalam Herawati

(2008), fungsi produksi adalah suatu deskripsi matematis atau kuantitatif dari kemungkinan-kemungkinan teknis yang dihadapi oleh suatu perusahaan.

Menurut Joestron dan Fathorrozi (2003) dalam Wibisono (2005), terdapat beberapa bentuk fungsi produksi antara lain fungsi produksi *Cobb-Douglas*, fungsi produksi *CES* dan fungsi produksi *Leontief*. Fungsi produksi dalam jangka panjang mereduksi ke fungsi produksi *Cobb-Douglas*. Fungsi produksi *Cobb-Douglas* adalah suatu fungsi atau persamaan yang melibatkan dua variabel atau lebih, variabel yang satu disebut variabel *independent* (y) dan yang lain disebut variabel *dependent* (x).

Menurut Aziz (2010), bentuk dari fungsi produksi *Cobb-Douglas* adalah:

$$Q = \beta_1 L^{\beta_2} K^{\beta_3} + e \qquad (2.15)$$

dimana pada model tersebut Q adalah hasil keluaran (*output*) produksi L adalah tenaga kerja (*labor*), K adalah modal (*capital*) dan parameter β berhubungan secara tak linier dengan variabelnya.

Bentuk umum untuk model non linier seperti di atas adalah

$$y = f\left(X, \beta\right) + e \qquad (2.16)$$

dimana y adalah fungsi respon, f adalah fungsi tak linier terhadap X, β, dan e adalah *error* kesalahan acak.

2.2 Estimasi Parameter

2.2.1 Pengertian Estimasi Parameter

Menurut Sri Harini dan Turmudi (2008), parameter adalah hasil pengukuran yang menggambarkan karakteristik dari populasi. Sedangkan menurut Hasan (2002), parameter adalah nilai yang mengikuti acuan keterangan atau informasi yang dapat menjelaskan batas-batas atau bagian-bagian tertentu dari suatu sistem persamaan. Sedangkan estimasi adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Estimasi merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan populasi dari sampel, dalam hal ini sampel random yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan estimasi ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui.

Abdussakir (2007) juga mengatakan dalam bukunya bahwa estimasi adalah keterampilan untuk menentukan sesuatu tanpa melakukan proses perhitungan secara eksak. Dalam matematika terdapat tiga jenis estimasi yaitu estimasi banyak atau jumlah, estimasi pengukuran, dan estimasi komputasional. Sebagaimana dijelaskan dalam uraian berikut ini:

a. Estimasi Banyak atau Jumlah

Estimasi banyak adalah menentukan banyaknya objek tanpa menghitung secara eksak. Objek di sini maknanya sangat luas, dapat berupa uang, orang, kelereng, dan mobil.

b. Estimasi Pengukuran

Estimasi pengukuran adalah menentukan ukuran sesuatu tanpa menghitung secara eksak. Ukuran di sini maknanya sangat luas. Ukuran dapat bermakna waktu, panjang, luas, usia, dan volume. Ketika melihat orang berjalan tanpa menanyakan tanggal lahirnya, pembaca dapat menebak atau mengestimasi usianya, atau pembaca mengestimasi waktu yang dibutuhkan untuk melakukan perjalanan dari Malang ke Jakarta menggunakan sepeda motor. Pembaca juga dapat mengestimasi benda hanya dengan melihat bentuknya.

c. Estimasi Komputasional

Menentukan hasil suatu operasi hitung tanpa menghitung secara eksak. Ketika dimintai menentukan hasil 97×23 dalam waktu sepuluh detik, seorang mungkin akan melihat puluhannya saja, sehingga memperoleh $97 \times 23 = 1800$ inilah estimasi komputasional. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa seseorang mungkin akan menghitung dengan cara membulatkan pada puluhan terdekat.

2.2.2 Sifat–sifat Estimator

Menurut Hasan (2002), sifat-sifat estimator parameter antara lain:

1. Tidak Bias

Suatu penduga $\hat{\beta}$ dikatakan tidak bias bagi parameternya β apabila nilai pen-duga sama dengan nilai yang diduganya (parameternya) $E\left(\hat{\beta}\right)=\beta$. Jadi, penduga tersebut secara tepat dapat menduga nilai dari parameternya. Suatu penduga disebut bias bagi parameternya jika nilai penduga tersebut tidak sama dengan nilai yang diduganya (parameternya). Penduga bias dapat berupa:

a. Penduga bias positif apabila $E\left(\hat{\beta}\right)>\beta$.

b. Penduga bias negatif apabila $E\left(\hat{\beta}\right)<\beta$.

2. Efisien

Suatu penduga $\hat{\beta}$ dikatakan efisien bagi parameter β apabila estimator tersebut memiliki varian yang kecil. Jika terdapat lebih dari satu penduga, maka penduga yang efisien adalah penduga yang memiliki varian terkecil. Dua penduga dapat dibandingkan efisiensinya dengan menggunakan efisiensi relatif. Efisiensi relatif $\hat{\beta}_2$ terhadap $\hat{\beta}_1$ dirumuskan:

$$
\begin{aligned}
R\left(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_1\right) &= \frac{E\left(\left(\hat{\beta}_1-\beta\right)^2\right)}{E\left(\left(\hat{\beta}_2-\beta\right)^2\right)} \\
&= \frac{E\left(\hat{\beta}_1^{\,2}-\hat{\beta}_1\beta-\beta\hat{\beta}_1+\beta^2\right)}{E\left(\hat{\beta}_2^{\,2}-\hat{\beta}_2\beta-\beta\hat{\beta}_2+\beta^2\right)} \\
&= \frac{E\left(\hat{\beta}_1^{\,2}\right)-2E\left(\hat{\beta}_1\beta\right)+\beta^2}{E\left(\hat{\beta}_2^{\,2}\right)-2E\left(\hat{\beta}_2\beta\right)+\beta^2} \\
&= \frac{E\left(\hat{\beta}_1^{\,2}\right)-2\beta E\left(\hat{\beta}_1\right)+\beta^2}{E\left(\hat{\beta}_2^{\,2}\right)-2\beta E\left(\hat{\beta}_2\right)+\beta^2} \\
&= \frac{E\left(\hat{\beta}_1^{\,2}\right)-2\beta\beta+\beta^2}{E\left(\hat{\beta}_2^{\,2}\right)-2\beta\beta+\beta^2} \\
&= \frac{E\left(\hat{\beta}_1^{\,2}\right)-2\beta^2+\beta^2}{E\left(\hat{\beta}_2^{\,2}\right)-2\beta^2+\beta^2} \\
&= \frac{E\left(\hat{\beta}_1^{\,2}\right)-\beta^2}{E\left(\hat{\beta}_2^{\,2}\right)-\beta^2} \\
&= \frac{E\left(\hat{\beta}_1^{\,2}\right)-\left(E\left(\beta\right)\right)^2}{E\left(\hat{\beta}_2^{\,2}\right)-\left(E\left(\beta\right)\right)^2} \\
&= \frac{\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_1\right)}{\operatorname{var}\left(\hat{\beta}_2\right)}
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Jika $R > 1$ secara relatif $\hat{\beta}_2$ lebih efisien daripada $\hat{\beta}_1$ dan jika $R < 1$ secara relatif $\hat{\beta}_1$ lebih efisien daripada $\hat{\beta}_2$.

3. Konsisten

Suatu estimator dikatakan konsisten apabila memenuhi syarat berikut:

a. Jika ukuran sampel semakin bertambah maka estimator akan mendekati parameternya. Jika besar sampel menjadi tak terhingga maka estimator konsisten harus dapat memberi suatu estimator titik yang sempurna terhadap parameternya. Jadi $\hat{\beta}$ merupakan estimator konsisten jika dan hanya jika:

$$E\left(\hat{\beta}-E\left(\hat{\beta}\right)\right)^2 \rightarrow 0 \text{ jika } n \rightarrow 0.$$

b. Jika ukuran sampel bertambah besar maka distribusi *sampling* estimator akan mengecil menjadi suatu garis tegak lurus di atas parameter yang sama dengan probabilitas sama dengan 1.

2.3 Pendiferensialan Matriks

Menurut Kusumawati (2009), matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan atau fungsi yang dibatasi dengan tanda kurung. Bilangan-bilangan yang berada dalam matriks dinamakan elemen dari matriks. Bentuk umum dari matriks $A_{m\times n}$ adalah:

$$\text{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & a_{M3} & \dots & a_{MN} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

baris-baris dari matriks A adalah M deret horizontal yang terdiri dari elemen-elemen: $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2N}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{MN})$ dan kolom-kolom dari matriks A adalah n deretan vertikal yang terdiri dari elemen-elemen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{M1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{M2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{1N} \\ a_{2N} \\ \vdots \\ a_{MN} \end{bmatrix}$$

Elemen ij dari matriks A yang terletak pada baris i dan kolom j yang biasa dituliskan sebagai $A = [a_{ij}]$.

Menurut Gujarati (2007), jika $\mathrm{a}^T = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N]$ adalah suatu vektor baris dengan angka-angka, dan

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

adalah vektor kolom dari variabel-variabel $x_1, x_2, \dots, x_N$, maka

$$\frac{\partial(\mathrm{a}^T x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial(\mathrm{a}^T x)}{\partial x^T}\right)^T = \mathrm{a} \tag{2.20}$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mathrm{a}^T x)}{\partial x^{\mathrm{T}}} &= \left[\frac{\partial(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N)}{\partial x_N}\right] \\ &= [a_1 \quad \dots \quad a_N]\end{aligned} \tag{2.21}$$

Selanjutnya hasil dari $\frac{\partial(\mathrm{a}^T x)}{\partial x^{\mathrm{T}}}$ ditransposkan kembali, sehingga terbukti bahwa:

$$\frac{\partial(\mathrm{a}^T x)}{\partial x^{\mathrm{T}}} = \left(\frac{\partial(\mathrm{a}^T x)}{\partial x^{\mathrm{T}}}\right)^T = [a_1 \quad \dots \quad a_N]^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = a \tag{2.22}$$

Perhatikan matriks $\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{Ax}$ sedemikian rupa sehingga:

$$\mathrm{x}^T\mathrm{Ax} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_N] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

maka

$$\frac{\partial(\mathrm{x}^T\mathrm{Ax})}{\partial \mathrm{x}} = 2\mathrm{Ax} \tag{2.24}$$

yang merupakan vektor kolom dari *N* elemen, atau

$$\frac{\partial\left(\mathrm{x}^T \mathrm{Ax}\right)}{\partial \mathrm{x}} = 2\mathrm{x}^T \mathrm{A} \tag{2.25}$$

yang merupakan vektor baris dari N elemen.

Bukti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{x}^T \mathrm{Ax} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N \\ \vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N\right) + x_2\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N\right) \\ + \dots + x_N\left(a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a_{11}x_1{}^2 + a_{12}x_2x_1 + \dots + a_{1N}x_Nx_1) + \left(a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2{}^2 + \dots + a_{2N}x_Nx_2\right) \\ + \dots + \left(a_{M1}x_1x_N + a_{M2}x_2x_N + \dots + a_{MN}x_N{}^2\right) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Turunkan terhadap elemen-elemen x maka akan menghasilkan

$$\frac{\partial\left(\mathrm{x}^T \mathrm{Ax}\right)}{\partial \mathrm{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(a_{11}x_1{}^2 + a_{12}x_2x_1 + \dots + a_{1N}x_Nx_1) + \left(a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2{}^2 + \dots + a_{2N}x_Nx_2\right) + \dots + \left(a_{M1}x_1x_N + a_{M2}x_2x_N + \dots + a_{MN}x_N{}^2\right)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial(a_{11}x_1{}^2 + a_{12}x_2x_1 + \dots + a_{1N}x_Nx_1) + \left(a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2{}^2 + \dots + a_{2N}x_Nx_2\right) + \dots + \left(a_{M1}x_1x_N + a_{M2}x_2x_N + \dots + a_{MN}x_N{}^2\right)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial(a_{11}x_1{}^2 + a_{12}x_2x_1 + \dots + a_{1N}x_Nx_1) + \left(a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2{}^2 + \dots + a_{2N}x_Nx_2\right) + \dots + \left(a_{M1}x_1x_N + a_{M2}x_2x_N + \dots + a_{MN}x_N{}^2\right)}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(2a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N\right) + \left(a_{21}x_2 + \dots + a_{M1}x_N\right) \\ \left(a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N\right) + \left(a_{12}x_1 + \dots + a_{M2}x_N\right) \\ \vdots \\ \left(a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2x + \dots + 2a_{MN}x_N\right) + \left(a_{1N}x_1 + a_{2N}x_N\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N\right) + \left(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{M1}x_N\right) \\ \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N\right) + \left(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{M2}x_N\right) \\ \vdots \\ \left(a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2x + \dots + a_{MN}x_N\right) + \left(a_{1N}x_1 + a_{2N}x_N + \dots a_{MN}x_N\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N) \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N) \\ \vdots \\ (a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 x + \ldots + a_{MN}x_N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{M1}x_N) \\ (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{M2}x_N) \\ \vdots \\ (a_{1N}x_1 + a_{2N}x_N + \ldots a_{MN}x_N) \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

$$= Ax + A^T x$$

Karena A adalah matriks simetris, dimana $A^T = A$, maka

$$\frac{\partial(\mathrm{x^T Ax})}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{Ax+Ax=2Ax} \tag{2.28}$$

2.4 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik terutama penyelesaian persamaan diferensial. Jika perhitungan dilakukan dengan fungsi yang sesungguhnya maka akan menghasilkan solusi sejati, dan jika perhitungan dilakukan dengan fungsi hampiran menghasilkan solusi hampiran (Munir, 2008).

Menurut Bambang (2002), andaikan f dan semua turunannya, $f', f'', f''' \ldots$, kontinu di dalam selang $[a,b]$. Misalkan $x_0 \in [a,b]$, maka untuk nilai-nilai x disekitar x_0 dan $x \epsilon [a,b]$, $f(x)$ dapat diperluas (diekspansi) ke dalam deret Taylor berikut:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + R_n \tag{2.29}$$

dengan

$f(x)$: nilai fungsi di titik x

$f', f'', \ldots, f^n$: turunan pertama, kedua, …, ke-n dari fungsi

$(x - x_0)$: langkah ruang atau jarak

R_n : kesalahan pemotongan

Berikut adalah deret Taylor orde nol sampai orde dua:

a. Memperhitungkan suku pertama (Orde Nol)

Apabila hanya memperhitungkan suku pertama dari ruas kanan maka persamaan (2.29) dapat ditulis dalam bentuk:

$$f(x) = f(x_0) \tag{2.30}$$

Nilai f pada titik (x_0) sama dengan nilai (x), perkiraan tersebut benar jika fungsi yang diberikan adalah konstan.

b. Memperhitungkan suku kedua (Orde 1)

Bentuk deret taylor orde satu yang memperhitungkan dua suku pertama dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\frac{\Delta x}{1!} \\ &= f(x_0)\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} \end{aligned} \tag{2.31}$$

yang merupakan bentuk persamaan garis lurus (linier).

c. Memperhitungkan suku ketiga (Orde 2)

Bentuk deret taylor orde dua yang memperhitungkan tiga suku pertama dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\frac{\Delta x}{1!} + f''\frac{\Delta x^2}{2!} \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{(x-x_0)f''(x_0)(x-x_0)}{2!} \end{aligned} \tag{2.32}$$

2.5 Metode Estimasi *Least Square*

Metode kuadrat terkecil adalah salah satu metode yang populer dalam mengestimasi nilai rata-rata (*central moments*) dari variabel random. Aplikasi pertama perataan kuadrat terkecil adalah data hitungan astronomi oleh Carl F. Gauss. Keunggulan dari sisi praktisnya adalah setelah berkembangnya komputer elektronik, formulasi teknik hitungan dalam notasi matriks, dan hubungannya dengan konsep kuadrat terkecil itu ke statistik.

Model fungsional umum tentang sistem yang akan diamati harus ditentukan terlebih dahulu sebelum merencanakan pengukuran. Model fungsional ini ditentukan menggunakan sejumlah variabel (baik parameter maupun pengamatan) dan hubungan diantara mereka. Selalu ada jumlah minimum variabel bebas yang secara unik menentukan model tersebut. Sebuah model fisis bisa saja memiliki beberapa model fungsional yang berlainan, tergantung dari tujuan pengukuran atau informasi yang diinginkan. Jumlah minimum variabel dapat ditentukan setelah tujuan pengukuran berhasil ditetapkan, tidak terikat pada jenis pengukuran yang perlu dilakukan (Firdaus, 2004).

2.5.1 *Linear Least Square Estimator*

Metode kuadrat terkecil sering digunakan dalam proses penghitungan suatu persamaan regresi sederhana. Dalam penggunaan regresi terdapat beberapa asumsi dasar yang dapat menghasilkan estimator linier tidak bias yang terbaik dari model regresi yang diperoleh, dan bersifat *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE), metode tersebut biasa dikenal dengan regresi OLS (Gujarati, 2010).

Misalkan terdapat persamaan regresi linier,

$$y = X\hat{\beta} + e \tag{2.33}$$

Variabel e berperan penting dalam model ekonometrika, akan tetapi variabel ini tidak dapat diteliti dan tidak pula tersedia informasi tentang bentuk distribusi kemungkinannya. Disamping asumsi distribusi probabilitasnya, beberapa asumsi yang diperlukan dalam menerapkan metode OLSE.

Menurut Aziz (2010), berkaitan dengan model regresi yang telah dikemukakan sebelumnya, Gauss telah membuat asumsi mengenai variabel e sebagai berikut:

1. Nilai rata-rata atau harapan variabel e adalah sama dengan nol atau $E(e)=0$ dengan syarat tergantung pada nilai X. Dengan demikian untuk X tertentu mungkin saja nilai e sama dengan nol, mungkin positif atau negatif, tetapi untuk banyak nilai X secara keseluruhan nilai rata-rata e diharapkan sama dengan nol.
2. Tidak terdapat korelasi serial atau autokorelasi antar variabel untuk setiap observasi. Dengan demikian dianggap bahwa tidak terdapat hubungan ynag positif atau negatif antara e_i dan e_j. Heteroskedastisitas antar variabel e untuk setiap observasi tidak ada, atau dikatakan bahwa setiap variabel e memenuhi syarat homoskedastisitas, yaitu

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(e_i, e_j) &= \sigma^2, \ \ \forall \ i = j \\ \operatorname{var}(e_i, e_j) &= 0 \ , \ \ \forall \ i \neq j \end{aligned} \tag{2.34}$$

atau dalam bentuk matriks varian-kovarian:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{var}(e_1) & \operatorname{cov}(e_1,e_2) & \dots & \operatorname{cov}(e_1,e_n) \\ \operatorname{cov}(e_2,e_1) & \operatorname{var}(e_2) & \dots & \operatorname{cov}(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \operatorname{cov}(e_n,e_1) & \operatorname{cov}(e_n,e_2) & \dots & \operatorname{var}(e_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 I_n$$

Sehingga asumsi kedua ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(e) &= E\left[\left(e-E(e)\right)\left(e-E(e)\right)^{T}\right] \\ &= E\left(ee^{T}\right) \\ &= \sigma^{2} I_{n}\end{aligned} \tag{2.35}$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(e) &= E\left[\left(e-E(e)\right)\left(e-E(e)\right)^{\mathrm{T}}\right] \\ &= E\left[\left(e-E(e)\right)\left(e^{\mathrm{T}}-E(e)^{\mathrm{T}}\right)\right] \\ &= E\left[\left(ee^{T}-eE(e)^{T}-E(e)e^{T}-E(e)E(e)^{\mathrm{T}}\right)\right] \\ &= E\left[\left(ee^{T}-\left(eE(e)^{T}\right)^{T}-E(e)e^{T}-E(e)E(e)^{\mathrm{T}}\right)\right] \\ &= E\left[\left(ee^{T}-E(e)e^{T}-E(e)e^{T}-E(e)E(e)^{\mathrm{T}}\right)\right] \\ &= E\left[\left(ee^{T}-0-0-0\right)\right] \\ &= E\left(ee^{T}\right)\end{aligned} \tag{2.36}$$

Dalam matriks varian kovarian diperoleh:

$$\begin{aligned}E\left(ee^{T}\right) &= E\left(\begin{bmatrix} e_1e_1 & e_1e_2 & \dots & e_1e_n \\ e_2e_1 & e_2e_2 & \dots & e_2e_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_ne_1 & e_ne_2 & \dots & e_ne_n \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} E(e_1e_1) & E(e_1e_2) & \dots & E(e_1e_n) \\ E(e_2e_1) & E(e_2e_2) & \dots & E(e_2e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(e_ne_1) & E(e_ne_2) & \dots & E(e_ne_n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \operatorname{var}(e_1) & \operatorname{cov}(e_1,e_2) & \dots & \operatorname{cov}(e_1,e_n) \\ \operatorname{cov}(e_2,e_1) & \operatorname{var}(e_2) & \dots & \operatorname{cov}(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \operatorname{cov}(e_n,e_1) & \operatorname{cov}(e_n,e_2) & \dots & \operatorname{var}(e_n) \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.37}$$

Menurut asumsi homoskedastisitas, didapatkan

$$E\left(ee^T\right)=\begin{bmatrix}\sigma^2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2\end{bmatrix}$$
$$=\sigma^2\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}=\sigma^2 I_n \tag{2.38}$$

Sehingga terbukti bahwa

$$\operatorname{cov}(e)=E\left[\left(e-E(e)\right)\left(e-E(e)\right)^T\right]=E\left(ee^T\right)=\sigma^2 I_n \tag{2.39}$$

3. Variabel x dan variabel e adalah tidak saling tergantung untuk setiap observasi.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(x_i,e_i)&=E\left[\left(x_i-E(x_i)\right)\left(e_i-E(e_i)\right)\right]\\ &=E\left[\left(x_i-\bar{x}\right)\left(e_i-0\right)\right]\\ &=E\left[\left(x_i-\bar{x}\right)e_i\right]\\ &=\left(x_i-\bar{x}\right)E\left(e_i\right)\\ &=0\end{aligned} \tag{2.40}$$

Dari ketiga asumsi diperoleh:

$$\begin{aligned}E(y)&=E\left(X\hat{\beta}\right)+E(e)\\ &=E(X)E\left(\hat{\beta}\right)+0\\ &=X\,E\left(\hat{\beta}\right)\\ &=X\beta\end{aligned} \tag{2.41}$$

dan kovariansi:

$$\operatorname{cov}(y)=E\left[\left(y-E(y)\right)\left(y-E(y)\right)^T\right]=E\left(yy^T\right)=\sigma^2 I_n \tag{2.42}$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(y) &= E\left[\left(y-E(y)\right)\left(y-E(y)\right)^{\mathrm{T}}\right]\\ &= E\left[(y-X\beta)(y-X\beta)^{T}\right]\\ &= E\left[ee^{T}\right]\end{aligned} \tag{2.43}$$

Dalam matriks varian kovarian diperoleh:

$$\begin{aligned}E\left(ee^{T}\right) &= E\left(\begin{bmatrix} e_1e_1 & e_1e_2 & \dots & e_1e_n \\ e_2e_1 & e_2e_2 & \dots & e_2e_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_ne_1 & e_ne_2 & \dots & e_ne_n \end{bmatrix}\right)\\ &= \begin{bmatrix} E(e_1e_1) & E(e_1e_2) & \dots & E(e_1e_n) \\ E(e_2e_1) & E(e_2e_2) & \dots & E(e_2e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(e_ne_1) & E(e_ne_2) & \dots & E(e_ne_n) \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} \operatorname{var}(e_1) & \operatorname{cov}(e_1,e_2) & \dots & \operatorname{cov}(e_1,e_n) \\ \operatorname{cov}(e_2,e_1) & \operatorname{var}(e_2) & \dots & \operatorname{cov}(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \operatorname{cov}(e_n,e_1) & \operatorname{cov}(e_n,e_2) & \dots & \operatorname{var}(e_n) \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.44}$$

Menurut asumsi homoskedastisitas, diperoleh:

$$\begin{aligned}E\left(ee^{T}\right) &= \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}\\ &= \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}\\ &= \sigma^2 I_n\end{aligned} \tag{2.45}$$

Misalkan sampel untuk y diberikan, maka aturan main yang memungkinkan dalam pemakaian sampel untuk mendapatkan taksiran dari β adalah dengan membuat $e = y - X\beta$ sekecil mungkin. Dengan aturan main ini diharapkan akan menghasilkan komponen sistematik yang lebih berperan daripada komponen stokastiknya, artinya hanya diperoleh sedikit informasi tentang y dengan kata lain, x tidak mampu menjelaskan y. Untuk tujuan ini maka perlu memilih parameter β sehingga

$$S = e^T e = (y - X\beta)^T (y - X\beta) \tag{2.46}$$

sekecil mungkin (minimal). Persamaan (2.46) adalah skalar, sehingga komponen-komponennya juga skalar. Akibatnya transpos skalarnya tidak mengubah nilai skalar tersebut. Sehingga S dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S &= (y - X\beta)^{\mathrm{T}} (y - X\beta) \\ &= \left(y^{\mathrm{T}} - X^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\right)(y - X\beta) \\ &= y^{\mathrm{T}} y - y^{\mathrm{T}} X\beta - \beta^{\mathrm{T}} \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{y} + \beta^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} X\beta \\ &= y^{\mathrm{T}} y - \left(y^{\mathrm{T}} X\beta\right)^{\mathrm{T}} - \beta^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} y + \beta^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} X\beta \\ &= y^{\mathrm{T}} y - \beta^{\mathrm{T}} X^{T} y - \beta^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} y + \beta^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} X\beta \\ &= y^{\mathrm{T}} y - 2\left(\beta^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} y\right) + \beta^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} X\beta \end{aligned} \tag{2.47}$$

Untuk meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan pertama S terhadap β, yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \beta} &= \frac{\partial\left(y^{\mathrm{T}} y - 2\left(\beta^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} y\right) + \beta^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} X\beta\right)}{\partial \beta} \\ &= 0 - 2\frac{\partial\left(\beta^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} y\right)}{\partial \beta} + \frac{\partial\left(\beta^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} X\beta\right)}{\partial \beta} + \left(\frac{\partial\left(\beta^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} X\beta\right)}{\partial \beta^{T}}\right)^{\mathrm{T}} \\ &= -2X^{\mathrm{T}} y + X^{\mathrm{T}} X\beta + \left(\beta^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} X\right)^{\mathrm{T}} \\ &= -2X^{\mathrm{T}} y + X^{\mathrm{T}} X\beta + X^{\mathrm{T}} X\beta \\ &= -2X^{\mathrm{T}} y + 2\left(X^{\mathrm{T}} X\beta\right) \end{aligned} \tag{2.48}$$

Untuk mendapatkan estimasi parameter β maka hasil turunan di atas disamadengankan nol, sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
-2X^T y + 2\left(X^T X\hat{\beta}\right) &= 0 \\
2\left(X^T X\hat{\beta}\right) &= 2X^T y \\
X^T X\hat{\beta} &= X^T y \\
\hat{\beta} &= \left(X^T X\right)^{-1} X^T y
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

Persamaan tersebut yang dinamakan sebagai estimator (penduga) parameter secara kuadrat terkecil (Aziz, 2010).

2.5.2 *Nonlinear Least Square Estimator*

Menurut Sanjoyo (2006), bentuk umum model statistik tak linier yang menyatakan hubungan antar variabel adalah

$$y = f(X, \beta) + e \tag{2.50}$$

dengan fungsi tak linier dalam parameter β dan $e \sim N(\mu, \sigma^2)$. Estimasi β dengan metode *Nonlinear Least Square* bertujuan untuk mendapatkan nilai β yang meminimumkan *residual sum of squares* (S).

$$
\begin{aligned}
S &= e^T e \\
&= (y - f(X, \beta))^T (y - f(X, \beta))
\end{aligned} \tag{2.51}
$$

Syarat perlu untuk minimalisasi adalah

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \tag{2.52}$$

Bila $f(X, \beta)$ adalah fungsi tak linier, maka untuk mengestimasi nilai β yang meminimumkan *objective function* tidak dapat diperoleh secara langsung sebagaimana pada model linier. Dengan kata lain, yang dimaksud dengan mengestima β dari model tak linier adalah mencari solusi persamaan (2.52) yang memberikan global minimum dari persamaan (2.51).

Ada dua cara untuk mengestimasi β dengan metode *Nonlinear Least Square*, yaitu:

1. $f(X,\beta)$ diaproksimasi dengan deret Taylor orde 1.

2. $S(\beta)=(y-f(X,\beta))^T(y-f(X,\beta))$ diaproksimasi dengan deret Taylor orde 2.

Cara penaksiran pertama dikenal sebagai iterasi *Gauss-Newton*, sedangkan cara penaksiran kedua dikenal sebagai iterasi *Newton Rapshon* (Aziz, 2010).

2.6 Estimasi Parameter Iterasi *Gauss-Newton*

Menurut Zulaikah (2014) dalam penelitiannya yang berjudul Estimasi Parameter pada Model Statistik Nonlinier secara *Least Square* mengatakan bahwa metode *Gauss-Newton* mengaproksimasikan $f(X,\beta)$ di sekitar $f(X,\beta^1)$ yang menggunakan deret Taylor orde 1. Adapun bentuk deret Taylor orde 1 yaitu:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!}$$

maka

$$\begin{aligned} f(X,\beta) &= f\left(X,\beta^{(1)}\right)+\left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial\beta^T}\right|_{\beta^{(1)}}(\beta-\beta^{(1)}) \\ &= f\left(X,\beta^{(1)}\right)+\left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial\beta^T}\right|_{\beta^{(1)}}\beta-\left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial\beta^T}\right|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)} \end{aligned} \tag{2.53}$$

Jika dimisalkan

$$z(\beta^{(1)})=\left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial\beta^T}\right|_{\beta^{(1)}}$$

Maka persamaan (2.53) diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y &= f(X,\beta)+e \\ &= f(X,\beta^{(1)})+Z(\beta^{(1)})\beta - Z(\beta^{(1)})\beta^{(1)}+e \end{aligned} \quad (2.54)$$

Dari persamaan (2.54) dapat dikonstruksi menjadi,

$$y - f(X,\beta^{(1)})+Z(\beta^{(1)})\beta^{(1)} = Z(\beta^{(1)})\beta + e \quad (2.55)$$

Jika $y - f(X,\beta^{(1)})+Z(\beta^{(1)})\beta^{(1)} = y^*(\beta^{(1)})$ maka persamaan (2.55) dapat ditulis kembali menjadi,

$$y^*(\beta^{(1)}) = Z(\beta^{(1)})\beta + e \quad (2.56)$$

Pada persamaan (2.56) dikenal sebagai persamaan *pseudo-linier*, yang dapat dilakukan estimasi parameter dengan metode *Least Square* untuk aproksimasi β^2 yaitu:

$$\begin{aligned} y^*(\beta^{(1)}) &= Z(\beta^{(1)})\beta + e \\ e &= y^*(\beta^{(1)}) - Z(\beta^{(1)})\beta \\ y^*(\beta^{(1)}) &= Z(\beta^{(1)})\beta \\ Z(\beta^{(1)})^T y^*(\beta^{(1)}) &= Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\beta \\ \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T y^*(\beta^{(1)}) &= \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\beta \\ \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T y^*(\beta^{(1)}) &= \beta \end{aligned} \quad (2.57)$$

Selanjutnya setelah parameter β diperoleh, maka akan dicari fungsi $y^*(\beta^{(1)}) = Z(\beta^{(1)})\beta$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \beta &= \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T y^*(\beta^{(1)}) \\ &= \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T \left(y - f(X,\beta^{(1)})\right) + Z(\beta^{(1)})\beta^{(1)}) \\ &= \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T y - \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T f(X,\beta^{(1)}) \\ &\quad + \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\beta^{(1)} \\ &= \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T y - \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T f(X,\beta^{(1)}) \\ &\quad + \beta^{(1)} \\ &= \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T \left(y - f(X,\beta^{(1)})\right) + \beta^{(1)} \\ &= \beta^{(1)} + \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T \left(y - f(X,\beta^{(1)})\right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Persamaan di atas sulit untuk diselesaikan dengan penyelesaian secara numerik, maka setelah mendapatkan fungsi β dengan menggunakan aproksimasi metode *Gauss-Newton*, yaitu dengan dilakukannya estimasi parameter pada β yang dinamakan nilai aproksimasi β pada iterasi ke-2.

$$\beta^{(2)} = \beta^{(1)} + \left(Z(\beta^{(1)})^T Z(\beta^{(1)})\right)^{-1} Z(\beta^{(1)})^T \left(y - f(X, \beta^{(1)})\right) \tag{2.59}$$

Nilai–nilai aproksimasi β pada iterasi ke-2 $\left(\beta^{(2)}\right)$ yang digunakan untuk mencari nilai-nilai $\beta^{(3)}$ dengan aproksimasi $f(X,\beta)$ di sekitar $f(X,\beta^{(1)})$, yaitu:

$$\begin{aligned} f\left(X,\beta\right) &= f\left(X,\beta^{(2)}\right) + \left.\frac{\partial f\left(X,\beta\right)}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(2)}} (\beta - \beta^{(2)}) \\ &= f\left(X,\beta^{(2)}\right) + Z(\beta^{(2)})\beta - Z(\beta^{(2)})\beta^{(2)} \end{aligned} \tag{2.60}$$

Sehingga persamaan (2.57) diperoleh fungsi y adalah

$$\begin{aligned} y &= f\left(X,\beta\right) + e \\ &= f\left(X,\beta^{(2)}\right) + Z(\beta^{(2)})\beta - Z(\beta^{(2)})\beta^{(2)} + e \end{aligned} \tag{2.61}$$

atau

$$\begin{aligned} & y - f\left(X,\beta^{(2)}\right) + Z(\beta^{(2)})\beta^{(2)} = Z(\beta^{(2)})\beta + e \\ & y^*(\beta^{(2)}) = Z(\beta^{(2)})\beta + e \end{aligned} \tag{2.62}$$

Setelah parameter β pada iterasi ke-2 diperoleh, maka parameter β diestimasi kembali dengan menggunakan metode *Least Square* yaitu:

$$\begin{aligned} \beta &= \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)})\right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T y*(\beta^{(2)}) \\ &= \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)})\right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T \left(y - f\left(X,\beta^{(2)}\right) + Z(\beta^{(2)})\beta^{(2)}\right) \\ &= \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)})\right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T y - \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)})\right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T f\left(X,\beta^{(2)}\right) \\ &\quad + \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)})\right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)})\beta^{(2)} \\ &= \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)})\right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T y - \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)})\right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T f\left(X,\beta^{(2)}\right) \\ &\quad + \beta^{(2)} \\ &= \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)})\right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T \left(y - f\left(X,\beta^{(2)}\right)\right) + \beta^{(2)} \\ &= \beta^{(2)} + \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)})\right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T \left(y - f\left(X,\beta^{(2)}\right)\right) \end{aligned} \tag{2.63}$$

Persaman (2.64) inilah yang dinamakan dengan iterasi ke-3:

$$\beta^{(3)} = \beta^{(2)} + \left(Z(\beta^{(2)})^T Z(\beta^{(2)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(2)})^T \left(y - f\left(X, \beta^{(2)} \right) \right) \tag{2.64}$$

Sehingga jika proses tersebut dilanjutkan, maka akan diperoleh bentuk umum iterasi sebagai berikut:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} + \left(Z(\beta^{(n)})^T Z(\beta^{(n)}) \right)^{-1} Z(\beta^{(n)})^T \left(y - f\left(X, \beta^{(n)} \right) \right) \tag{2.65}$$

Jika iterasi di atas dilakukan secara terus menerus sehingga diperoleh sifat β yang konvergen, yaitu:

$$\beta_{NLS} = \beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} \tag{2.66}$$

Sehingga diperoleh:

$$Z(\beta^{(n)})^T \left(y - f(X, \beta^{(n)}) \right) = 0 \tag{2.67}$$

atau

$$Z(\beta_{NLS})^T \left(y - f(X, \beta_{NLS}) \right) = 0 \tag{2.68}$$

Persamaan terakhir ini telah memenuhi syarat *First Order Condition* (FOC), untuk mendapatkan nilai parameter β yang dapat meminimumkan nilai *residual sum of square* (S) yang akan ditunjukkan dengan cara berikut:

$$\begin{aligned}
S &= e^T e = \left(y - f(X,\beta) \right)^T \left(y - f(X,\beta) \right) \\
&= \left(y^T - f^T(X,\beta) \right)\left(y - f(X,\beta) \right) \\
&= y^T y - y^T f(X,\beta) - f^T(X,\beta) y + f^T(X,\beta) f(X,\beta) \\
&= y^T y - \left(y^T f(X,\beta) \right)^T - f^T(X,\beta) y + f^T(X,\beta) f(X,\beta) \\
&= y^T y - f^T(X,\beta) y - f^T(X,\beta) y + f^T(X,\beta) f(X,\beta) \\
&= y^T y - 2 f^T(X,\beta) y + f^T(X,\beta) f(X,\beta)
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Kemudian untuk meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan pertama S terhadap β, yaitu:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 - 2\left(f^T(X,\beta)y\right) + f^T(X,\beta)f(X,\beta) + \left(f^T(X,\beta)f^T(X,\beta)\right)^T$$
$$= -2\left(f^T(X,\beta)y\right) + f^T(X,\beta)f(X,\beta) + f^T(X,\beta)f(X,\beta)$$
$$= -2\left(f^T(X,\beta)y\right) + 2f^T(X,\beta)f(X,\beta) \tag{2.70}$$
$$= -2\left.\frac{\partial f^T}{\partial \beta}\right|_{\beta NLS}\left(y - f(X,\beta_{NLS})\right)$$
$$= -2Z(\beta_{NLS})^T\left(y - f(X,\beta_{NLS})\right)$$

Dengan penyelesaian di atas, maka persamaan (2.65) terbukti bahwa dengan iterasi ini dijamin kekonvergenan suatu fungsi yang modelnya adalah nonlinier dapat dipenuhi. Maka penyelesaian menggunakan iterasi *Gauss-Newton*, diperoleh hasil estimasi pada parameter β adalah:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \frac{1}{2}\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^T Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1}\left.\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(n)}} \tag{2.71}$$

2.7 Analisis Data

Pengertian analisis data adalah pengujian sistematis terhadap sesuatu untuk menentukan bagian-bagiannya, hubungan di antara bagian-bagian dan hubungan bagian-bagian itu dengan keseluruhan proses penyusunan data agar dapat ditafsirkan. Menyusun data berarti bahwa menggolongkannya di dalam pola atau tema. Tafsiran atau interpretasi artinya memberikan makna terhadap analisis, menjelaskan kategori atau pola, serta mencari hubungan antara berbagai konsep. Dengan demikian, teknik analisis data dapat diartikan sebagai cara melaksanakan analisis terhadap data, dengan tujuan mengolah data tersebut menjadi informasi, sehingga karakteristik atau sifat-sifat datanya dapat dengan mudah dipahami dan bermanfaat untuk menjawab masalah-masalah yang berkaitan dengan kegiatan penelitian, baik berkaitan dengan deskripsi data maupun untuk membuat induksi, atau menarik kesimpulan tentang karakteristik populasi (parameter) berdasarkan data yang diperoleh dari sampel (statistik) (Suliyanto, 2011).

2.7.1 *Scatter Plot*

Scatter Plot adalah alat untuk menganalisis hubungan antara dua variabel. Satu variabel diplot pada sumbu horizontal dan yang lainnya diplot pada sumbu vertikal. Ketika diagram *scatter plot* menunjukkan adanya hubungan, hal ini belum tentu menunjukkan antara kedua variabel tersebut memiliki hubungan sebab akibat. *Scatter plot* sangat berguna untuk mendeteksi korelasi (hubungan) antara dua variabel sekaligus juga memperlihatkan tingkat hubungan tersebut (kuat atau lemah).

2.7.2 Analisis Korelasi

Menurut Suliyanto (2011), korelasi digunakan untuk mengetahui derajat hubungan linier antara satu variabel dengan variabel yang lain. Suatu variabel dikatakan memiliki hubungan dengan variabel lain jika perubahan satu variabel diikuti dengan perubahan variabel lain. Jika arah perubahannya searah maka kedua variabel memiliki korelasi positif. Sebaliknya, jika perubahannya berlawanan arah, kedua variabel tersebut memiliki korelasi negatif. Jika perubahan variabel tidak diikuti oleh perubahan variabel yang lain maka dikatakan bahwa variabel-variabel tersebut tidak saling berkorelasi. Besarnya perubahan suatu variabel yang diikuti dengan perubahan variabel yang lain dinyatakan dalam bentuk koefisien korelasi.

Salah satu alat yang bisa digunakan untuk mengetahui korelasi antara variabel yang satu dengan variabel yang lain adalah dengan *Product Moment*

(*Pearson*). *Product Moment* adalah perubahan antar variabel. Untuk mencari koefisien korelasi *Product Moment* digunakan rumus sebagai berikut:

$$r_{xy} = \frac{n\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{(n\sum X^2 - (\sum X)^2)}\sqrt{(n\sum Y^2 - (\sum Y)^2)}}$$

dengan:

r_{xy} : Koefisien korelasi *Product Moment*

n : Jumlah pengamatan

$\sum X$: Jumlah dari pengamatan *X*

$\sum Y$: Jumlah dari pengamatan *Y*

r_{xy} merupakan koefisien korelasi yang nilainya akan senantiasa berkisar antara 0 sampai dengan 1. Bila koefisien korelasi semakin mendekati angka satu berarti korelasi tersebut semakin kuat, tetapi jika koefisien korelasi tersebut mendekati angka 0 berarti korelasi tersebut semakin lemah. Koefisien korelasi tidak dapat digunakan untuk menentukan apakah korelasi tersebut signifikan atau tidak. Hal itu karena untuk menentukan signifikansi sebuah korelasi harus membandingkan r_{xy} hitung dengan r_{xy} tabel. Jika r_{xy} hitung < r_{xy} tabel maka maka korelasi tersebut tidak signifikan. Sebaliknya jika r_{xy} hitung > r_{xy} tabel, maka korelasi tersebut signifikan. Sedangkan pengertian dari *multikolinieritas* ialah adanya korelasi linier yang mendekati sempurna antar dua variabel bebas. Beberapa penyebab timbulnya gejala *multikolinieritas* pada model regresi adalah sebagai berikut:

1. Kebanyakan variabel ekonomi berubah sepanjang waktu. Besaran-besaran ekonomi dipengaruhi oleh faktor-faktor yang sama sehingga jika satu faktor

mempengaruhi variabel dependen maka seluruh variabel cenderung berubah dalam satu arah.

2. Adanya penggunaan nilai *lag* dari variabel-variabel bebas tertentu dalam model regresi.
3. Adanya kendala dalam model atau populasi yang menjadi sampel.

2.8 Estimasi dalam Al-Quran

Al-Quran merupakan kitab Allah yang didalamnya terkandung ilmu-ilmu Allah. Al-Quran bukan hanya berbicara ilmu agama yaitu halal dan haram, pahala dan dosa, lebih dari itu di dalamnya juga terdapat pembahasan tentang sains dan teknologi (Abtokhi, 2007). Salah satu ilmu sains yang terdapat dalam al-Quran adalah ekonometrika. Ilmu ekonometrika yang dibahas dalam penelitian ini adalah tentang estimasi. Estimasi (taksiran) di dalam al-Quran terdapat dalam penafsiran surat ar-Ruum ayat 4:

فِي بِضۡعِ سِنِينَۗ لِلَّهِ ٱلۡأَمۡرُ مِن قَبۡلُ وَمِنۢ بَعۡدُۚ وَيَوۡمَئِذٖ يَفۡرَحُ ٱلۡمُؤۡمِنُونَ ٤

"Dalam beberapa tahun lagi, bagi Allah-lah urusan sebelum dan sesudah (mereka menang). Dan dihari kemenangan bangsa Romawi itu bergembiralah orang-orang yang beriman" (QS. Ar-Ruum/30:4).

Dari surat ar-Ruum ayat 4 pengertian lafaz *fi bid'u sinina* (dalam beberapa tahun lagi) adalah mulai dari tiga tahun sampai dengan sembilan atau sepuluh tahun. Kedua pasukan bertemu kembali pada tahun yang ketujuh sesudah pertempuran yang pertama. Akhirnya dalam pertempuran ini pasukan Romawi berhasil mengalahkan pasukan kerajaan Persia dan orang-orang beriman berbahagia atas kemenangan tersebut (Jalaluddin, 2005).

Selain di surat ar-Ruum ayat 4, estimasi juga dibahas dalam firman Allah Swt. surat ash-Shaffaat ayat 147, yaitu:

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

"Dan Kami utus Dia kepada seratus ribu orang atau lebih"(QS. Ash-Shaffaat/37: 147).

Asbabun nuzul pada ayat di atas adalah menceritakan tentang kisah nabi Yunus saat diancam akan disiksa oleh kaumnya, maka dia keluar dari kalangan mereka sebelum mendapat perintah dari Allah Swt. untuk hijrah. Lalu dia naik kapal, namun kapal itu tidak dapat berjalan dan para awak kapal menyangka bahwa apabila memuat seorang budak yang melarikan diri, maka kapal tidak dapat berjalan. Oleh karena itu mereka melakukan undian dan ternyata undian keluar untuk Yunus, maka dilemparkanlah dirinya ke dalam air (Al-Maraghi, 2010).

Menurut Abbussakir (2007), ayat di atas menjelaskan bahwa nabi Yunus diutus kepada umatnya yang berjumlah 100.000 orang atau lebih. Jika membaca ayat tersebut secara seksama, maka terdapat rasa atau kesan ketidakpastian dalam menentukan jumlah umat nabi Yunus dan ketidakpastian dalam konsep matematika dikenal dengan estimasi.

Selain itu metode estimasi juga digunakan pada strategi perang, salah satu perang besar yang pernah dialami nabi Muhammad beserta para pengikutnya adalah perang badar. Dalam menyusun siasatnya, beliau mendapat informasi dari mata-mata yang telah ditugaskan. Salah satunya adalah dari sekelompok patroli di bawah pimpinan Ali dan beranggotakan Zubair bin Awwam dan Sa'ad bin Abi Waqqash pergi ke sumur badar untuk mendapatkan informasi lebih banyak tentang kafir Quraisy maupun kafilahnya. Di dekat sumur mereka bertemu dengan dua orang budak Quraisy lalu membawanya kepada nabi. Setelah memeriksa mereka, diketahui bahwa keduanya masing-masing milik Bani Hajjaj dan Bani ‘Ash yang ditugasi memasok air bagi kaum Quraisy .

Nabi bertanya, dimana orang-orang Quraisy berada. Budak-budak itu menjawab bahwa mereka berada di sisi lain bukit yang terletak di gurun. Kemudian beliau bertanya tentang jumlah mereka. Budak-budak itu mengatakan tidak mengetahui dengan pasti. Nabi bertanya, berapa ekor unta yang mereka sembelih setiap hari. Dijawab bahwa mereka menyembelih sepuluh ekor unta pada suatu hari dan sembilan ekor unta dihari yang lain. Nabipun menyimpulkan bahwa jumlah mereka antara 900 hingga 1000 orang. Kemudian nabi memerintah supaya kedua orang itu ditawan agar pemeriksaan dapat dilanjutkan (Ibrohim, 2014).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian

Pendekatan penelitian yang digunakan pada penelitian ini menggunakan pendekatan kepustakaan yang merujuk pada buku-buku yang berkaitan dan yang dibutuhkan dalam melakukan penelitian ini. Selain itu, peneliti juga mempelajari literatur lain, berupa jurnal dan referensi yang berkaitan dengan penelitian. Pada tahap ini juga dilakukan penurunan rumus dan pengambilan data dari penelitian terdahulu.

3.2 Jenis dan Sumber Data

Data yang diperoleh merupakan data sekunder yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS) Kota Malang yang beralamat di Jalan Raya Janti Barat no. 47 Malang Telp. (0341) 801164 Fax. (0341) 805872. Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data Industri Logam, Mesin, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) mulai tahun 1993-2012 Provinsi Jawa Timur. Sumber utama data ini dari skripsi Zulaikah (2014) yang berjudul Estimasi Parameter Model Statistik Nonlinier secara *Least Square*.

3.3 Variabel Penelitian

Pada penelitian ini menggunakan data Industri Logam, Mesin, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) mulai tahun 1993-2012 Provinsi Jawa Timur dengan fungsi produksi *Cobb-Dauglas* (CD). Data diklasifikasikan menjadi tiga kategori, yaitu variabel *output* (Q) atau jumlah produksi, variabel *input* (L) atau jumlah tenaga kerja dan variabel *input* (K) atau jumlah modal.

3.4 Langkah-langkah Penelitian

Adapun langkah-langkah dari analisis penelitian adalah sebagai berikut:

1. Estimasi parameter pada fungsi produksi *Cobb-Douglas* menggunakan metode *Least Square* dengan iterasi *Quadratic Hill Climbing*.
   a. Aproksimasi *residual sum of square* (S) ke deret Taylor orde dua, kemudian dilakukan turunan pertama dan disamadengankan nol sehingga diperoleh estimasi parameter β.
   b. Membuktikan kekonvergenan iterasi *Quadratic Hill Climbing* dengan menggunakan turunan ke dua dari *residual sum of square* yang disamadengankan nol.
2. Implementasi iterasi *Quadratic Hill Climbing* pada data nonlinier yaitu data Industri Logam, Mesin, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dengan model *Cobb Dauglas*.
   a. Analisis data menggunakan bantuan *software* SPSS dengan cara *input* data dan menggambarkan *scatter plot*.
   b. Analisis korelasi menggunakan *software* SPSS dengan cara *input* data dan mencari koefisien korelasi.
   c. Estimasi parameter secara iterasi *Quadratic Hill Climbing* menggunakan *software* Matlab.
      1) *Input* data.

2) Menentukan nilai awal parameter β.

3) Memberikan nilai λ dan t.

4) Melakukan perhitungan pada iterasi estimasi parameter model *Quadratic Hill Climbing* sampai mencapai kekonvergenan dengan *error* yang diberikan ialah sebesar 10^{-9}.

3. Membandingkan hasil iterasi model statistik nonlinier pada implementasi data secara iterasi *Quadratic Hill Climbing* dengan iterasi *Gauss-Newton* pada penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Zulaikah (2014).
4. Pandangan Islam tentang estimasi yaitu menggunakan sumber dari al-Quran dan hadits nabi Muhammad Saw.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Estimasi Parameter pada Fungsi Produksi *Cobb-Douglas* Menggunakan Metode *Least Square* dengan Iterasi *Quadratic Hill Climbing*

Menurut Aziz (2010), ada dua cara untuk menaksir parameter β dengan metode *nonlinear least square*, yaitu:

1. $f(X,\beta)$ diaproksimasi dengan deret Taylor orde 1.
2. $S(\beta)=(y-f(X,\beta))^T(y-f(X,\beta))$ diaproksimasi dengan deret Taylor orde *2.*

Cara penaksiran pertama dikenal sebagai iterasi *Gauss Newton*, sedangkan cara penaksiran kedua dikenal sebagai iterasi *Newton Raphson*. Untuk menuju iterasi *Quadratic Hill Climbing* hasil dari penaksiran iterasi *Newton Raphson* ditambah dengan perkalian antara skalar dan matriks identitas.

4.1.1 Estimasi Parameter Iterasi *Quadratic Hill Climbing*

Pada iterasi *Quadratic Hill Climbing*, mula-mula fungsi objektif *residual sum of square* (S) akan diaproksimasikan dengan deret Taylor orde 2. Adapun bentuk deret Taylor orde 2 yaitu sebagai berikut

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!}+\frac{(x-x_0)f''(x_0)(x-x_0)}{2!} \quad (4.1)$$

Sehingga aproksimasi (S) dengan nilai-nilai awal yang ditentukan dari iterasi pertama ($\beta^{(0)}$), secara deret Taylor orde 2 yaitu:

$$\begin{aligned} S(\beta)&=S\left(\beta^{(0)}\right)+\frac{S'\left(\beta^{(0)}\right)^T\left(\beta-\beta^{(0)}\right)}{1!}+\frac{\left(\beta-\beta^{(0)}\right)^T S''\left(\beta^{(0)}\right)\left(\beta-\beta^{(0)}\right)}{2!} \\ &=S\left(\beta^{(0)}\right)+S'\left(\beta^{(0)}\right)^T\left(\beta-\beta^{(0)}\right)+\frac{1}{2}\left(\beta-\beta^{(0)}\right)^T S''\left(\beta^{(0)}\right)\left(\beta-\beta^{(0)}\right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

dengan

$$S'\left(\beta^{(0)}\right)=\left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}$$
$$S''\left(\beta^{(0)}\right)=\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \tag{4.3}$$

Sehingga persamaan (4.2) menjadi

$$=S\left(\beta^{(0)}\right)+\left.\frac{\partial S}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(0)}}\beta-\left.\frac{\partial S}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(0)}}\beta^{(0)}+\frac{1}{2}\left(\beta^T\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta-\beta^T\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta^{(0)}\right.$$
$$\left.-\left(\beta^{(0)}\right)^T\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta+\left(\beta^{(0)}\right)^T\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta^{(0)}\right) \tag{4.4}$$

Kemudian dilakukan turunan pertama pada persamaan tersebut, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta}=0+\left(\left.\frac{\partial S}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T-0+\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta+\left(\beta^T\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T\right.$$
$$\left.-\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta^{(0)}-\left(\left(\beta^{(0)}\right)^T\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T+0\right)$$
$$=\left(\left.\frac{\partial S}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T+\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta+\beta\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}-\right.$$
$$\left.\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\beta^{(0)}-\beta^{(0)}\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)$$
$$=\left(\left.\frac{\partial S}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T+\frac{1}{2}(2)\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\left(\beta-\beta^{(0)}\right)\right)$$
$$=\left(\left.\frac{\partial S}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T+\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\left(\beta-\beta^{(0)}\right) \tag{4.5}$$

Karena

$$\left(\left.\frac{\partial S}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T = \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \tag{4.6}$$

Persamaan (4.5) menjadi:

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} + \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\left(\beta - \beta^{(0)}\right) \tag{4.7}$$

Untuk meminimumkan persamaan di atas, maka disamadenganankan nol, sehingga diperoleh penaksiran nilai parameter β:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} + \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\left(\beta - \beta^{(0)}\right) &= 0 \\
\left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} + \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\beta - \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\beta^{(0)} &= 0 \\
\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\hat{\beta} &= -\left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} + \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\beta^{(0)} \\
\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\hat{\beta} &= \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\beta^{(0)} - \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \\
\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\hat{\beta} &= \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T\left(\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\beta^{(0)} - \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right) \\
\left(\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\right)^{-1}\left(\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\right)\hat{\beta} &= \left(\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\right)^{-1} \\
&\quad \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T\left(\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\beta^{(0)} - \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right) \\
I\hat{\beta} &= \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^{-1}\left(\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^{-1}\right)^T\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^T \\
&\quad \left(\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\beta^{(0)} - \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right) \\
\hat{\beta} &= \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^{-1}\left(\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^{-1}\right)^T \\
&\quad \left(\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\beta^{(0)} - \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right) \\
&= \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^{-1}(I)^T\left(\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\beta^{(0)} - \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right) \\
&= \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^{-1} I\left(\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\beta^{(0)} - \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right) \\
&= \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^{-1}\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)\beta^{(0)} - \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^{-1}\left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \\
&= \beta^{(0)} - \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)^{-1}\left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}
\end{aligned}$$

(4.8)

Pada persamaan (4.8) dikatakan sebagai bentuk iterasi pertama dari aproksimasi β. Aproksimasi iterasi pertama ($\beta^{(0)}$) digunakan untuk mencari nilai-nilai $\beta^{(1)}$ sehingga diperoleh:

$$\beta^{(1)} = \beta^{(0)} - \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \right)^{-1} \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \tag{4.9}$$

Nilai-nilai aproksimasi β pada iterasi $\beta^{(1)}$ digunakan untuk mencari nilai-nilai $\beta^{(2)}$ yaitu:

$$\begin{aligned} S(\beta) &= S\left(\beta^{(1)}\right) + \left.\frac{\partial S}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) + \frac{1}{2}\left(\beta - \beta^{(1)}\right)^T \left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) \\ &= S\left(\beta^{(1)}\right) + \left.\frac{\partial S}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(1)}} \beta - \left.\frac{\partial S}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\beta^T - \left(\beta^{(1)}\right)^T\right) \\ &\quad \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}} \beta - \left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} \right) \\ &= S\left(\beta^{(1)}\right) + \left.\frac{\partial S}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(1)}} \beta - \left.\frac{\partial S}{\partial \beta^T}\right|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\beta^T \left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}} \beta - \beta^T \left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} \right. \\ &\quad \left. - \left(\beta^{(1)}\right)^T \left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}} \beta + \left(\beta^{(1)}\right)^T \left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} \right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Setelah parameter β didapatkan, maka parameter β diestimasi kembali dengan menggunakan motode *Least Square* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \left(\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}} \right) \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \right)^T \\ &\quad \left(\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}} \right) \beta^{(1)} - \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}} \right) \\ &= \left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} (I)^T \left(\left(\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}} \right) \beta^{(1)} - \left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(1)}} \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} I \left(\left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \right) \beta^{(1)} - \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \right)$$

$$= \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \right) \beta^{(1)} - \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \qquad (4.11)$$

$$= \beta^{(1)} - \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}}$$

Persamaan (4.12) inilah yang dikatakan sebagai bentuk iterasi $\beta^{(2)}$,

$$\beta^{(2)} = \beta^{(1)} - \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(1)}} \qquad (4.12)$$

Sehingga untuk seterusnya jika dilanjutkan proses tersebut, akan diperoleh bentuk umum iterasi sebagai berikut:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} \qquad (4.13)$$

Iterasi inilah yang dikenal sebagai iterasi *Newton-Raphson*. Sedangkan pada metode *Quadratic Hill Climbing* persamaan (4.13) tersebut ditambahkan suku perkalian antara skalar dan matriks identitas, dengan panjang langkahnya (t) bernilai sembarang (Sanjoyo, 2006), sehingga diperoleh bentuk iterasi estimasi parameter model *Quadratic Hill Climbing*:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} + \lambda_n I_k \right)^{-1} \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} \qquad (4.14)$$

$$= \beta^{(n)} - t.P_n \gamma_n$$

dengan:

t : Panjang langkah

P_n : Matriks simetris $= \left(\left. \dfrac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} + \lambda_n I_k \right)^{-1}$

γ_n : Gradien dari *objective function* $= \left. \dfrac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}}$

4.1.2 Kekonvergenan Iterasi *Quadratic Hill Climbing*

Pada persamaan (4.14), jika dilakukan iterasi secara terus menerus maka akan didapatkan sifat β yang konvergen, yaitu:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} \tag{4.15}$$

karena $t \neq 0$, $P_n \neq 0$ untuk semua n, sehingga $\gamma_n \to 0$. Maka akan ditunjukkan kekonvergenan dari iterasi *Quadratic Hill Climbing* dengan menggunakan turunan kedua dari *residual sum of square* dan disamadengankan nol sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} &= \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} + \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right) \left(\beta - \beta^{(0)} \right) = 0 \\ &= 0 + \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)^T - 0 = 0 \\ &= \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)^T = 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Secara umum ditulis sebagai berikut:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} = \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)^T = 0 \tag{4.17}$$

maka diperoleh:

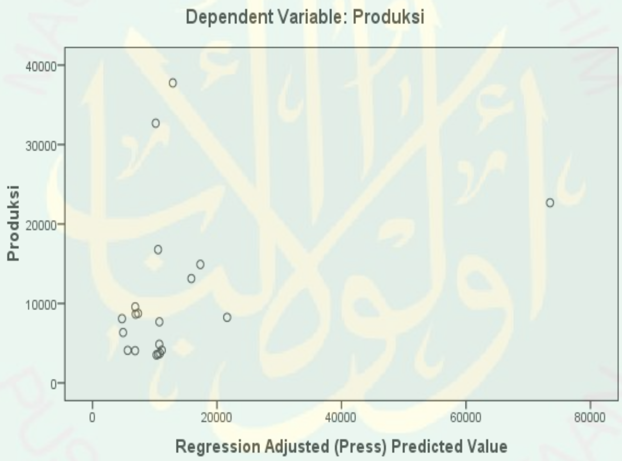
$$\begin{aligned} \beta^{(n+1)} &= \beta^{(n)} - \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} + \lambda_n I_k \right)^{-1} \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} \\ &= \beta^{(n)} - \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} + \lambda_n I_k \right)^{-1} .0 \\ &= \beta^{(n)}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Dengan penyelesaian di atas, maka persamaan (4.14) terbukti bahwa dengan iterasi ini dijamin kekonvergenan suatu fungsi yang modelnya adalah nonlinier dapat dipenuhi.

4.1.3 Implementasi Iterasi *Quadratic Hill Climbing*

4.1.3.1 Analisis Data

Scatter Plot adalah sebuah grafik yang biasa digunakan untuk melihat suatu pola hubungan antara 2 variabel X dan Y. Berikut *Scatter Plot* dari data Industri Logam, Mesin, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur.



Gambar 4.1 *Scatter Plot* Data ILMTA

Dari hasil *Scatter Plot* terlihat bahwa data tidak mengikuti garis linier. Oleh karena itu hubungan antara variabel X dan Y diindikasikan terjadi hubungan *nonlinear*.

4.1.3.2 Analisis Korelasi

Dikatakan berkorelasi jika perubahan suatu variabel diikuti perubahan variabel yang lain. Salah satu cara untuk mengetahui ada tidaknya korelasi antara satu variabel dengan variabel yang lain adalah dengan menggunakan *Pearson*.

Hasil *output* untuk analisis korelasi data Industri Logam, Mesin, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur**.**

Tabel 4.1 Korelasi

		Produksi	Tenaga_kerja	Modal
Pearson Correlation	Produksi	1.000	.552	.382
	Tenaga_kerja	.552	1.000	.733
	Modal	.382	.733	1.000
Sig. (1-tailed)	Produksi	.	.006	.048
	Tenaga_kerja	.006	.	.000
	Modal	.048	.000	.
N	Produksi	20	20	20
	Tenaga_kerja	20	20	20
	Modal	20	20	20

Pada *output* tabel korelasi diperoleh:

1. Angka 1 menunjukkan bahwa tidak ada korelasi dan diperoleh jika variabel X dan Y dikorelasikan dengan dirinya sendiri.
2. Koefisien korelasi antara produksi dan tenaga kerja r_{xy} = 0,552. Sedangkan r_{xy} = 0,382 menunjukkan koefisien korelasi antara produksi dengan modal.
3. Angka 0,006 menunjukkan tingkat signifikasi antara produksi dengan tenaga kerja. Karena tingkat signifikansi koefisien korelasi tersebut di bawah 0,05 maka terdapat korelasi yang signifikan antara produksi dengan tenaga kerja.
4. Angka 0,048 menunjukkan tingkat signifikansi antara produksi dengan modal. Karena tingkat signifikansi koefisien korelasi tersebut hampir mencapai 0,05 maka terdapat korelasi yang cukup antara produksi dengan modal.
5. Banyak data atau N adalah 20.

4.1.3.3 Estimasi Parameter secara Iterasi *Quadratic Hill Climbing*

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data Industri Logam, Mesin, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur. Pada Lampiran 1 data diberikan dalam bentuk matriks Lky, dua kolom pertama yaitu tenaga kerja dan modal merupakan data X dan kolom terakhir yang berisi hasil produksi merupakan data y. Data sampel tersebut akan dilakukan penaksiran parameter-parameter β secara berulang, untuk model fungsi *Cobb-Douglas* (CD) ini diestimasi dengan menggunakan metode penaksiran LSE, salah satunya adalah *Nonlinear Least Square*.

Bentuk umum iterasinya adalah:

$$\beta^{n+1} = \beta^{n} - tP_n\gamma_n \tag{4.19}$$

dimana:

$$P_n = \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} + \lambda_n I_k \right)^{-1}$$

dan t adalah panjang langkah yang dapat dilakukan perubahan secara bebas.

Nilai awal parameter $\beta_1 = 0,7,$ $\beta_2 = 0,3,$ dan $\beta_3 = 1$ sama dengan nilai awal parameter β pada penelitian Zulaikah (2014), digunakan nilai awal yang sama agar hasil dari estimasi parameternya dapat dibandingkan. Pada penelitian ini penulis melakukan enam kali percobaan dengan nilai λ yang tidak boleh lebih dari 1 dan nilai t sembarang. Nilai λ yang diberikan ialah 0,011, 0,008, dan 0,002 dan nilai t yang diberikan adalah 2 dan 5. Pada penelitian ini dibatasi bahwa $\lambda_n = \lambda$ yang artinya dalam satu kali iterasi nilai λ tidak berjalan sebanyak n kali namun tetap atau konstan.

Hasil *output* menggunakan program Matlab pada Lampiran 2 dari data fungsi produksi *Cobb-Douglas* data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dengan menggunakan iterasi

Quadratic Hill Climbing untuk parameter β_1, β_2, dan β_3 akan disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 4.2 Hasil Iterasi *Quadratic Hill Climbing* untuk Fungsi Produksi *Cobb-Douglas* (CD) pada Industri Logam, Mesin, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) Tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur

t	λ_n	β_1	β_2	β_3	n
		0,7	0,3	1	0
2	0,011	13,0461122	0,4485849164	0,14324332301	2092
2	0,008	13,0461266	0,4485847897	0,14324337651	1443
2	0,002	13,0461484	0,4485846159	0,14324316275	703
5	0,011	13,0461192	0,4485848548	0,14324334917	852
5	0,008	13,0461284	0,448584786	0,14324336586	764
5	0,002	13,0461192	0,4485854343	0,14324343238	175

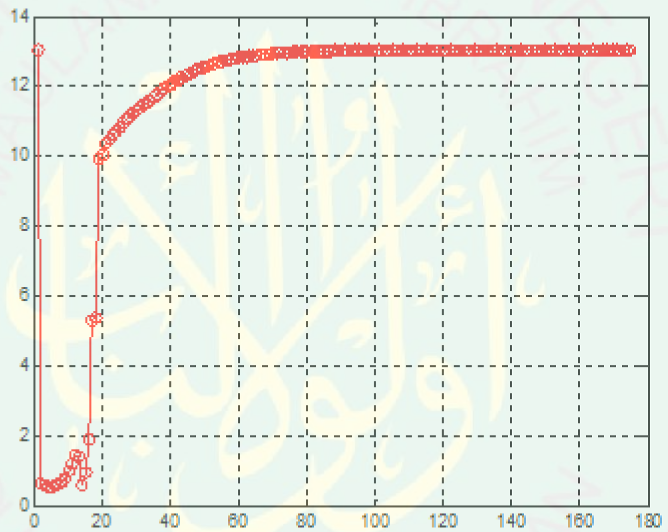
Dari Tabel 4.2 didapatkan hasil bahwa pada saat $\lambda_n = 0,011$ dan $t = 2$ besar iterasi (n) mencapai 2092. Pada nilai λ_n yang sama dengan nilai t yang lebih besar $t = 5$ hasil iterasi menjadi lebih kecil yaitu 852. Sama halnya pada saat $\lambda_n = 0,002$ dan $t = 2$ besar iterasi mencapai 703, sedangkan pada nilai λ_n yang sama dengan nilai $t = 5$ iterasi menjadi lebih kecil yaitu 175. Jadi kesimpulan yang didapatkan ialah semakin kecil nilai λ_n dan semakin besar nilai t maka iterasi akan semakin kecil dengan kata lain akan semakin cepat mencapai konvergensi. Oleh karena itu dari enam kali percobaan di atas penulis memilih percobaan dengan iterasi paling kecil yaitu 175 pada saat λ_n bernilai 0,002 dan t bernilai 5.

Adapun nilai dari *residual sum of square* (S) untuk setiap iterasi akan disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut:

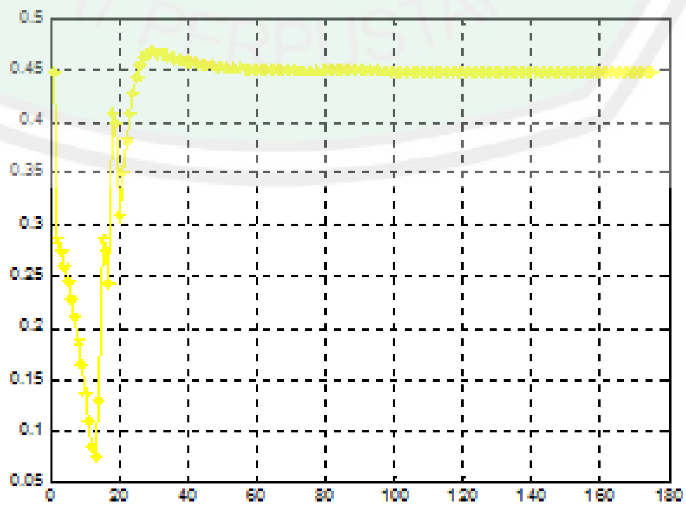
Tabel 4.3 Hasil *residual sum of square* (S) untuk Setiap Iterasi

t	λ_n	S
2	0,011	1,216631737215
2	0,008	1,216631737215
2	0,002	1,216631737215
5	0,011	1,216631737215
5	0,008	1,216631737215
5	0,002	1,216631737215

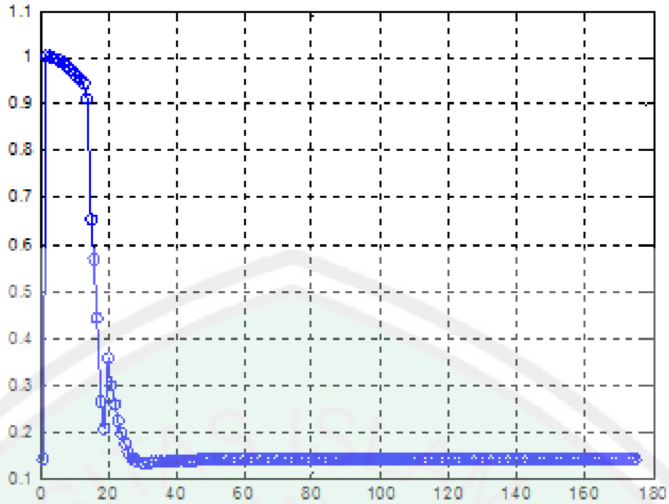
Berikut adalah grafik dari Tabel 4.2 dengan nilai $\lambda_n = 0,002$ dan $t = 5$:



Gambar 4.2. Grafik Kekonvergenan dari β_1 Menggunakan Iterasi *Quadratic Hill Climbing*



Gambar 4.3. Grafik Kekonvergenan dari β_2 Menggunakan Iterasi *Quadratic Hill Climbing*



Gambar 4.4. Grafik Kekonvergenan dari β_3 Menggunakan Iterasi *Quadratic Hill Climbing*

Pada grafik di atas, dengan nilai $\lambda_n = 0,002$ dan $t = 5$ menggunakan iterasi *Quadratic Hill Climbing* diperoleh nilai konvergen pada iterasi ke-175.

Hasil *Nonlinear Least Square Estimator* (NLSE) untuk fungsi produksi *Cobb-Douglas* pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur secara iterasi *Quadratic Hill Climbing* adalah:

β_1 =13,0461192 β_2 = 0,4485854343

β_3 = 0,14324343238 S = 1,216631737215

Dengan demikian, model *Cobb-Douglas* (CD) pada data Industri Logam, Mesin, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dianggap konvergen menurut iterasi *Quadratic Hill Climbing* adalah sebagai berikut:

$$y = 13{,}0461192 L^{0{,}4485854343} K^{0{,}14324343238}.$$

4.2 Perbandingan antara Iterasi *Quadratic Hill Climbing* dengan Iterasi *Gauss Newton*

Sebagai bahan perbandingan antara fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan menggunakan estimasi parameter secara iterasi *Quadratic Hill Climbing* dan iterasi *Gauss-Newton* yang dilakukan oleh Zulaikah (2014) pada estimasi fungsi produksi *Cobb-Douglas*, dapat dilihat pada hasil *output* sebagai berikut:

Tabel 4.4 Hasil perbandingan Fungsi Produksi *Cobb-Douglas* dengan menggunakan Iterasi *Quadratic Hill Climbing dan Gauss*-Newton

Fungsi Cobb-Douglas (CD)	LSE	
	Quadratic Hill Climbing	***Gauss-Newton***
β_1	13,0461192	13,0487794
β_2	0,4485854343	0,4485490588
β_3	0,14324343238	0,14326882154
Jumlah Iterasi	175	336

Dari tabel di atas, diketahui bahwa nilai perhitungan fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan menggunakan estimasi parameter secara iterasi *Quadratic Hill Climbing* lebih kecil atau lebih cepat mencapai konvergen daripada nilai perhitungan dengan iterasi *Gauss-Newton*. Sehingga fungsi produksi yang cocok dengan data yang telah diberikan pada Lampiran 1 adalah fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan menggunakan estimasi parameter secara iterasi *Quadratic Hill Climbing*.

4.2.1 Estimasi dalam Pandangan Islam

Al-Quran dan hadits nabi Muhammad Saw. tidak hanya mengajarkan hal yang berupa ibadah kepada Allah saja, namun juga berbagai ilmu pengetahuan. Pada pembahasan BAB II telah disebutkan ayat dalam al-Quran dan hadits nabi Muhammad Saw. yang berkaitan dengan ilmu pengetahuan yaitu estimasi. Surat ar-Ruum ayat 4 merupakan salah satu ayat dalam al-Quran yang membahas tentang estimasi, sedangkan dalam hadits nabi Muhammad Saw. yang menceritakan kisah perang Badar juga membahas tentang estimasi.

Pada surat ar-Ruum ayat 4 menjelaskan tentang kemenangan bangsa Romawi yang berhasil mengalahkan pasukan Persia. Pengertian lafaz *fi bid'u sinina* (dalam beberapa tahun lagi) adalah mulai dari tiga tahun sampai dengan sembilan atau sepuluh tahun. Abu bakar menentukan batas waktu lima tahun tapi pasukan Romawi belum juga menang lalu mereka memberitahukan hal tersebut kepada nabi Muhammad Saw. beliau bersabda: " Apa kau tak memprediksi waktunya kurang dari sepuluh tahun?". Ketika kedua pasukan bertemu kembali pada tahun yang ketujuh, akhirnya pertempuran dimenangkan oleh pasukan Romawi karena pertolongan Allah, sebab Allah menolong siapapun yang dikehendaki-Nya dan orang-orang beriman berbahagia atas kemenangan tersebut

Sedangkan pada hadits nabi dalam kisah perang Badar membahas tentang nabi Muhammad Saw. yang memperkirakan jumlah tentara Quraisy berdasarkan keadaan yang sebenarnya, yaitu dengan mengamati jumlah unta yang disembelih setiap harinya untuk santapan mereka. Berdasarkan kisah perang Badar dalam hadits nabi Muhammad Saw. menerangkan bahwa satu ekor unta arab jika diukur dari punuknya, tingginya mencapai 2,1 meter dan beratnya mencapai 726 kilogram. Unta arab hanya memiliki satu punuk yang menyimpan lemak dan beratnya mencapai 36 kilogram. Satu orang dapat mengkonsumsi daging unta 6 sampai 7 kilogram dalam sehari, dengan tiga kali makan. Karena berat dari unta arab mencapai 726 kilogram dan satu orang dapat mengkonsumsi hingga 7 kilogram. Maka diperkirakan bahwa satu ekor unta dapat dikonsumsi 100 orang. Jadi, 9 atau 10 ekor unta dapat dimakan oleh 900 atau 1000 orang.

Dari kedua pembahasan mengenai estimasi di atas antara surat ar-Ruum dan kisah perang Badar dalam hadits nabi Muhammad Saw. dapat disimpulkan bahwa dalam mengestimasi diperlukan sebuah data. Pada surat ar-Ruum ayat 4 menjelaskan tentang kemenangan bangsa Romawi yang berhasil mengalahkan pasukan Persia dengan estimasi waktu kurang dari sepuluh tahun. Nabi Muhammad Saw. dan para sahabat dalam mengestimasi waktu tersebut berdasarkan pada kekuatan musuh dan juga pengalaman dari perang-perang sebelumnya. Pada kisah perang Badar nabi Muhammad Saw. memperkirakan jumlah musuh dari data banyaknya unta yang disembelih dalam sehari oleh pasukan musuh. Begitupun pada penelitian ini untuk melakukan estimasi dibutuhkan data. Data yang digunakan adalah data Industri Logam, Mesin, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa bentuk estimasi *Nonlinear Least Square* pada model statistik nonlinier dengan iterasi *Quadratic Hill Climbing* adalah sebagai berikut:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} + \lambda_n I_k \right)^{-1} \left. \frac{\partial S}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}}$$
$$= \beta^{(n)} - t.P_n \gamma_n$$

dengan:

$$P_n = \left(\left. \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^T \partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} + \lambda_n I_k \right)^{-1}$$

Berdasarkan hasil perbandingan estimasi model statistik nonlinier secara *Least Square* dengan iterasi *Quadratic Hill Climbing* dan *Gauss Newton* pada implementasi data nonlinier yaitu data Industri Logam, Mesin, Tekstil, dan Aneka (ILMTA) tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur dengan model *Cobb-Douglas* (CD), dapat disimpulkan bahwa iterasi *Quadratic Hill Climbing* lebih kecil dalam mencapai kekonvergenan dibandingkan dengan menggunakan *Gauss Newton*, yaitu:

$$y = 13{,}0461192 L^{0{,}4485854343} K^{0{,}14324343238}$$

5.2 Saran

Pada penelitian ini penulis hanya menggunakan metode *Nonlinear Least Square* dalam mencari nilai estimasi parameter pada model statistik nonlinier dan dilakukan perbandingan iterasi antara iterasi *Quadratic Hill Climbing* dengan *Gauss-Newton*. Oleh karena itu, penulis berharap pada pembaca untuk mengembangkan penelitian dengan menggunakan metode dan perbandingan iterasi lain seperti menggunakan metode *Nonlinear Maximum Likelihood* dan perbandingan iterasi antara *Quadratic Hill Climbing* dengan *Bernd-Hall-Hall-Hausman.*

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Abtokhi, A.. 2007. *Fisika dan Al-Quran*. Malang: UIN Malang Press.

Al-Maraghi, A.M.. 2010. *Terjemahan Tafsir Al-Maraghi*. Jakarta: PT. Darul Kutub

Aziz, A.. 2010. *Ekonometrika Teori dan Praktek Eksperimen dengan Matlab*. Malang: UIN Maliki Press.

Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta offset.

Dewi, Y.R.. 2011. *Mengestimasi Parameter Fungsi Produksi Cobb-Douglas*. (Online), (http://13candys.blogspot.co.id/2011/04/fungsi-produksi-Cobb-Douglas.html?m=1), diakses 2 Februari 2016.

Draper, N.R. & Smith, H.. 1992. *Analisis Regresi Terapan*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama.

Firdaus, M.. 2004. *Ekonometrika Satuan Pendekatan Aplikatif*. Jakarta: Bumi Aksara.

Gujarati, D.N.. 2007. *Dasar-Dasar Ekonometrika Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Gujarati, D.N.. 2010. *Dasar-Dasar Ekonometrika Jilid 2*. Jakarta: Erlangga.

Harini, S. & Turmudi. 2008. *Metode Statistika*. Malang: UIN-Malang Press.

Hasan, M. I.. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik 1 (Statistik Deskriptif)*. Jakarta: Bumi Aksara

Herawati, E.. 2008. *Analisis Pengaruh Fktor Produksi Modal, Bahan Baku, Tenaga Kerja dan Mesin Terhadap Produksi Gycerine pada PT.Flora Sawit Chenimdo Medan*. Tesis tidak dipublikasikan. Medan: Universitas Sumatera Utara.

Ibrohim, A.Q. & Saleh. 2014. *Sejarah Islam*. Jakarta: PT. Zaman

Jalaluddin, R.. 2005. *Tafsir Bil Ma'tsur*. Jakarta: Al-Huda

Johnson, R.A. & Dean, W.W.. 1998. *Applied Multivariate Statistical Analysis, Fourth Edition*. New York: Prentice Hall,inc.

Kusumawati, R.. 2009. *Aljabar Linear dan Matriks*. Malang: UIN-Malang Press.

Munir, R.. 2008. *Metode Numerik Revisi ke-2*. Bandung: Informatika.

Nurlaili, A.. 2015. *Estimasi Nonlinear Least Trimmed Squares (NLTS) Pada Model Regresi Nonlinier yang Dikenai Outler*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Sanjoyo. 2006. *Estimasi Parameter Model Statistik Nonlinier.* (Online), http://mhs.blog.ui.ac.id/sanj55/files/2008/11/non-linier.pdf, diakses tanggal 25 Februari 2016.

Sugianto, C.. 1994. Ekonometrika *Terapan*. Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta.

Suliyanto. 2011. *Ekonometrika Terapan: Teori dan Aplikasi SPSS*. Yogyakarta: CV Andi Offset.

Wibisono, Y.. 2005. *Metode Statistik.* Yogyakarta: Gajah Mada Universiti Press.

Yitnosumarto, S.. 1990. *Dasar-Dasar Statistika*. Jakatarta: CV. Rajawali

Zulaikah, R.. 2014. *Estimasi Parameter pada Model Statistik Nonlinier Secara Least Square*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

.

.

LAMPIRAN 1

Data Industri Logam, Mesin, Tekstil dan Aneka (ILMTA) Tahun 1993-2012 di Provinsi Jawa Timur

NO	Tahun	Tenaga Kerja	Modal	Produksi
1	2012	473786	18053	8250
2	2011	445857	11389	37759
3	2010	392282	6565	14915
4	2009	349565	5939	13135
5	2008	713379	67001	22673
6	2007	230025	11837	32685
7	2006	212334	7654	16780
8	2005	205439	5408	4108
9	2004	200367	5098	7689
10	2003	195483	4953	3720
11	2002	192412	3673	4854
12	2001	186537	4664	3619
13	2000	178765	4470	3525
14	1999	105933	5980	8749
15	1998	80610	6761	4060
16	1997	101229	9780	9567
17	1996	94607	5432	8657
18	1995	46317	6785	4098
19	1994	39817	9087	6345
20	1993	38857	6454	8087

Dengan:

L = Input Tenaga Kerja *(Labour of product)*

K = Input Modal *(Capital of Product)*

Y = Output Jumlah *(Quantity of Product)*

LAMPIRAN 2

Program Matlab untuk Iterasi *Quadratic Hill Climbing*

```
%Nonlinear Least Square dengan iterasi Quadratic Hill Climbing
%Cobb-Douglass Production function
%oleh:Eriska Noerhayati
%Linked files: f1,numgradf1, numgradS1
%Program ini akan menaksir parameter b1,b2, dan b3
%Program fungsi produksi Cobb-Douglass yaitu:y=b1.(L^b2).(L^b3)

clc,clear all;
format long;
%Penyajian matriks LKy(L=Labor K=Kapital y=komoditi)
LKy=[473786 18053 8250
    445857 11389 37759
    392282 6565 14915
    349565 5939 13135
    713379 67001 22673
    230025 11837 32685
    212334 7654 16780
    205439 5408 4108
    200367 5098 7689
    195483 4953 3720
    192412 3673 4854
    186537 4664 3619
    178705 4470 3525
    105933 5980 8749
    80610 6761 4060
    101229 9780 9567
    94607 5432 8657
    46317 6785 4098
    39817 9087 6345
    38857 6454 8087];

x1=LKy(:,1);
x2=LKy(:,2);
y=LKy(:,3);
x=[x1 x2];

% memasukan nilai awal untuk b1, b2, dan b3
b1_awal=input('Masukan nilai b1= ');
b2_awal=input('Masukan nilai b2= ');
b3_awal=input('Masukan nilai b3= ');
b=[b1_awal;b2_awal;b3_awal];
k=length(b);
T=length(x);
e=eye(k);
besar_iterasi=3000;
f=f1(b,x);
S=(y-f)'*(y-f);
disp('==========================================')
tn =input('Masukan besar tn= ');; % dapat dirubah
lambda = input('Masukan besar lambda= ');;
```

```
for i = 1:besar_iterasi ;
      L  = L1(b,x,y);
      zt = numgradLt1(b,x,y);
      z  = numgradL1(b,x,y) ;
      step  = inv(zt'*zt+lambda*eye(k))*z;
      bnext = b+(tn*step) ;
      Lnext = L1(bnext,x,y) ;
      fnew=f1(bnext,x);
      Snew=(y-fnew)'*(y-fnew);

      if norm(bnext-b) <= 1e-9 & (Lnext-L) <= 1e-9
         disp('sudah konvergen pada iterasi ke-')
        disp([i]);break;
    end
    if i==besar_iterasi
        disp('S belum konvergen')
        disp('atau ubahkan nilai awal untuk b')
        disp('')
    end

    b = bnext ;
    f=f1(b,x);
    S=(y-f)'*(y-f);

    b1_baru(i+1)=bnext(1,:);
    b2_baru(i+1)=bnext(2,:);
    b3_baru(i+1)=bnext(3,:);
    S_new(i+1)=S(1,:);
end
b1_baru(1,1)=[b(1,:)];
b2_baru(1,1)=[b(2,:)];
b3_baru(1,1)=[b(3,:)];

disp('==========================================================')
disp('        b1 baru                    b2 baru                 b3 baru')
disp([b1_baru' b2_baru' b3_baru'])
disp('nilai S baru')
disp([S_new'])
disp('==========================================================')
disp('b1')
disp([b1_baru(i)]);
disp('b2')
disp([b2_baru(i)]);
disp('b3')
disp([b3_baru(i)]);
disp('nilai S')
disp([S_new(i)]);


b1new=[b1_baru]';
b2new=[b2_baru]';
b3new=[b3_baru]';

% % Plotting
r=1:length(b1new);
figure(1)
plot(r,b1new(r,:),'-ro')
```

```
grid on
title('Grafik kekonvergenan dari b1 secara Hill Climbing')
xlabel('Besar iterasi')
ylabel('b1')

figure(2)
plot(r,b2new(r,:),'-y*')
grid on
title('Grafik kekonvergenan dari b2 secara Hill Climbing')
xlabel('Besar iterasi')
ylabel('b2')

figure(3)
plot(r,b3new(r,:),'-bo')
grid on
title('Grafik kekonvergenan dari b3 secara Hill Climbing')
xlabel('Besar iterasi')
ylabel('b3')
```

RIWAYAT HIDUP

Eriska Noerhayati dilahirkan di Situbondo pada tanggal 6 Januari 1994, merupakan anak kedua dari dua bersaudara, pasangan bapak Ibrohim dan ibu Insyiyatih. Pendidikan dasarnya ditempuh di kampung halamannya di SDN 1 Mlandingan Kolun yang ditamatkan pada tahun 2006.

Pada tahun yang sama dia melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP Nurul Jadid Paiton Probolinggo. Pada tahun 2009 dia menamatkan pendidikannya, kemudian melanjutkan pendidikan menengah atas di SMAN 1 Suboh dan menamatkan pendidikan tersebut pada tahun 2012. Pendidikan berikutnya dia tempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SNMPTN dengan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Eriska Noerhayati
NIM : 12610047
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Estimasi Parameter Model Statistik Nonlinier pada Fungsi Produksi *Cobb-Douglas* Secara *Least Square* dengan Iterasi *Quadratic Hill Climbing*
Pembimbing I : Abdul Aziz, M.Si
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan
1.	16 Februari 2016	Konsultasi Bab I dan II	1.
2.	22 Februari 2016	Konsultasi Bab II	2.
3.	10 Maret 2016	Konsultasi Bab III	3.
4.	21 April 2016	Konsultasi Agama Bab I dan II	4.
5.	11 Mei 2016	Revisi Bab III	5.
6.	28 Juni 2016	Revisi Agama Bab I dan II	6.
7.	29 Juni 2016	Konsultasi Bab IV	7.
8.	6 Agustus 2016	Konsultasi Agama Bab IV	8.
9.	20 Agustus 2016	Konsultasi Bab IV	9.
10.	27 April 2016	Konsultasi Agama Bab IV	10.
11.	4 September 2016	Konsultasi Bab IV	11.
12.	16 September i 2016	Konsultasi Agama Keseluruhan	12.
13.	18 Oktober 2016	Konsultasi Bab IV	13.
14.	9 November 2016	ACC Agama Keseluruhan	14.
15.	3 November 2016	ACC Bab III, IV, dan V	15.

Malang, 13 Desember 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001