

**PENYELESAIAN PERSAMAAN *SHOCK WAVE*
MENGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE**

SKRIPSI

**OLEH
ROBI'ATUL 'ADAWIYYAH
NIM. 12610023**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**PENYELESAIAN PERSAMAAN *SHOCK WAVE*
MENGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Robi'atul 'Adawiyah
NIM. 12610023**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**PENYELESAIAN PERSAMAAN *SHOCK WAVE*
MENGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE**

SKRIPSI

Oleh
Robi'atul 'Adawiyah
NIM. 12610023

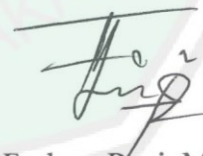
Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 13 Desember 2016

Pembimbing I,



Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004


Pembimbing II,



Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika




Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751005 200312 1 001

**PENYELESAIAN PERSAMAAN *SHOCK WAVE*
MENGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE**

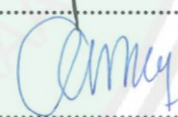
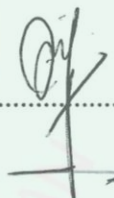
SKRIPSI

Oleh
Robi'atul 'Adawiyah
NIM. 12610023

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 22 Desember 2016

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si
Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si
Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si
Anggota Penguji : Fachrur Rozi, M.Si



Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001



PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Robi'atul 'Adawiyah

NIM : 12610023

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penyelesaian Persamaan *Shock Wave* Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Desember 2016
Yang membuat pernyataan,



Robi'atul 'Adawiyah
NIM. 12610023

MOTO

...إِنَّ اللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُوا مَا بِأَنْفُسِهِمْ... ﴿١١﴾

“... sesungguhnya Allah Swt. tidak mengubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka mengubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri...”
(QS. Ar-Rad/13:11).

وَمَنْ يَتَّقِ اللَّهَ تَجْعَلْ لَهُ مِنْ أَمْرِهِ يُسْرًا ﴿٤﴾

“Dan barangsiapa yang bertakwa kepada Allah Swt., niscaya Allah Swt. menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya” (QS. Ath-Thalaq/65:4).



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Sadeli, S.Pd, dan ibunda Latifah, S.PdI, serta bapak Drs. Tohir Anam (alm) dan ibu Siti Malichah, S.PdI, yang senantiasa ikhlas mendoakan, memberikan motivasi dan semangat kepada penulis dalam menuntut ilmu, serta selalu memberikan teladan yang baik bagi penulis.

Teruntuk suami tercinta Achmad Alfian, S.PdI, yang selalu setia menemani, memberikan semangat, dan selalu memberikan nasihat yang baik bagi penulis.

Keluarga besar penulis, kakak-kakak (Muhammad Khotib Firdaus, S.Pd, Silviyah, S.E, Ana Masyithoh, S.PdI, dan Muhammad Kholidy, S.Pd), keponakan (Ahmad Hisyam Washilul Arham, Ahmad Hazmi Dhiyaul Haq, dan Ahmad Diyaurrahman Hakim), dan adik ipar (Achmad Syafiuddin, Imroatul Izza, dan Rizky Amalia Humairoh) yang selalu memberikan semangat dan motivasi untuk lebih giat lagi serta senantiasa mendoakan yang terbaik bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik, hidayah, serta inayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis mendapatkan banyak bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen terima kasih atas segala ilmu dan bimbinganya.
7. Ayah dan ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2012 yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terima kasih atas kenangan-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
9. Teman-teman Jam'iyah Shalawat Bunga Tanjung dan teman-teman seperjuangan di Lembaga Tinggi Pesantren Luhur Malang yang telah memberikan semangat dan memberikan pengalaman berharga kepada penulis.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Desember 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
ABSTRAK	xiii
ABSTRACT	xiv
ملخص	xv
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Manfaat Penelitian.....	4
1.5 Batasan Masalah.....	5
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penlisann.....	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan <i>Shock Wave</i>	8
2.2 Transformasi Laplace	10
2.2.1 Sifat-Sifat Transformasi Laplace.....	11
2.2.2 Invers Transformasi Laplace	15
2.3 Metode Dekomposisi Adomian	16
2.4 Metode Dekomposisi Adomian Laplace	20
2.7 Galat (<i>Error</i>).....	22
2.5.1 Sumber Utama Galat Hampiran	22
2.5.2 Analisis Galat	23
2.6 Penyelesaian Masalah dalam Al-Quran.....	24

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Metode Dekomposisi Adomian Laplace pada Persamaan <i>Shock Wave</i>	27
3.2 Simulasi dan Analisis Galat (<i>Error</i>)	32
3.3 Langkah Penyelesaian Masalah dalam Perspektif Islam	37

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	43
4.2 Saran	44

DAFTAR RUJUKAN	45
-----------------------	-----------

RIWAYAT HIDUP



DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Perbandingan Gambar Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 10$, $\Delta t = 0,5$, dan $\Delta x = 0,5$	32
Tabel 3.2 Galat Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 10$, $\Delta t = 0,5$, dan $\Delta x = 0,5$	32
Tabel 3.3 Perbandingan Gambar Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 10$, $\Delta t = 0,2$, dan $\Delta x = 0,2$	33
Tabel 3.4 Galat Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 10$, $\Delta t = 0,2$, dan $\Delta x = 0,2$	33
Tabel 3.5 Perbandingan Gambar Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 15$, $\Delta t = 0,5$, dan $\Delta x = 0,5$	34
Tabel 3.6 Galat Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 15$, $\Delta t = 0,5$, dan $\Delta x = 0,5$	34
Tabel 3.7 Perbandingan Gambar Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 15$, $\Delta t = 0,2$, dan $\Delta x = 0,2$	35
Tabel 3.8 Galat Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 15$, $\Delta t = 0,2$, dan $\Delta x = 0,2$	35

ABSTRAK

Adawiyah, Robi'atul. 2016. **Penyelesaian Persamaan *Shock Wave* Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Kata kunci: metode dekomposisi Adomian Laplace, persamaan *shock wave*

Penelitian ini membahas tentang penyelesaian persamaan *shock wave* menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace. Persamaan *shock wave* yang digunakan merupakan persamaan yang diturunkan berdasarkan hukum-hukum kesetimbangan yang dinyatakan dalam persamaan diferensial parsial nonlinier. Metode dekomposisi Adomian Laplace merupakan kombinasi antara dua metode, yaitu transformasi Laplace dan metode dekomposisi Adomian. Berdasarkan beberapa penelitian terdahulu menyatakan bahwa metode dekomposisi Adomian efektif digunakan untuk penyelesaian solusi hampiran. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian persamaan *shock wave*, di antaranya menerapkan transformasi Laplace pada persamaan *shock wave*, mengasumsikan solusi sebagai jumlahan deret tak hingga dan menggunakan bantuan polinomial Adomian untuk menyelesaikan suku nonlinier, kemudian menerapkan invers transformasi Laplace. Hasil simulasi dan analisis galat menunjukkan bahwa Δt dan Δx tidak mempengaruhi hasil solusi dan galat antara solusi hampiran dan solusi eksak. Akan tetapi perubahan orde n dari deret yang digunakan dapat memperkecil galat antara kedua solusi tersebut. Semakin besar orde n dari deret yang digunakan, maka galat akan semakin kecil dan solusi hampiran dapat menghampiri solusi eksaknya.

ABSTRACT

Adawiyah, Robi'atul. 2016. **Solution of Shock Wave Equation Using Adomian Laplace Decomposition Method.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisors: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Keyword: Adomian Laplace decomposition method, shock wave equation

This study discusses solution of shock wave equations using Adomian Laplace decomposition method. The equation used shock wave equation is derived based on the laws of equilibrium expressed in nonlinear partial differential equations. Adomian Laplace decomposition method is a combination of the two methods namely the Laplace transform and Adomian decomposition method. Based on several studies that suggested that the Adomian decomposition method effectively used for the completion of approximation solution. The steps used to solve shock wave equations are applying Laplace transforms to the shock wave equation, assuming a solution as the sum of infinite series and using Adomian polynomial assistance to solve the nonlinear, then applying the inverse Laplace transforms. The simulation results and error analysis showed that Δt and Δx do not affect the result of the error between the solution and the error of the approximation and exact solution. But the change of order n of the series are used to minimize the error between the two solutions. The greater the order n of the sequences is used, the error will be smaller and approximation solutions can approached exact solution.

ملخص

العداوية، ربيعة. 2016. حل معادلة *Shock Wave* باستخدام طريقة تفكيك Adomian Laplace. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة الإسلامية المحكّمة مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف (I) محمد جامهوري الماجستير (II) فخرالرازي الماجستير.

الكلمة الرئيسية: طريقة تفكيك Laplace Adomian، معادلة *Shock Wave*.

تتناول هذه الدراسة حل المعادلات *shock wave* باستخدام طريقة تفكيك Adomian Laplace. المعادلة المستخدمة مشتق *shock wave* هي المعادلة على أساس قوانين التوازن وأعرب في المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية. طريقة تفكيك Laplace Adomian هو مزيج من الطريقتين وهما تحويل لابلاس وطريقة تفكيك Laplace Adomian. وبناء على العديد من الدراسات التي أشارت إلى أن طريقة تفكيك Laplace Adomian تفكيك استخدامها بفعالية لإنجاز حل تقريبي. الخطوات التي استخدمت حل المعادلات *shock wave*، تطبيق تحويل لابلاس معادلة *shock wave*، على افتراض التوصل إلى حل كمجموع سلسلة لحلها، واستخدام المساعدة متعدد الحدود Adomian حل نسبة غير الخطية، ثم تطبيق معكوس تحويلات لابلاس. يظهر تحليل نتائج المحاكاة والخطأ أن Δx و Δt لا يؤثر حل والخطأ بين الحل التقريبية والحل التحليلية وتقريب الحل. ولكن التغيير من أجل n من سلسلة تستخدم لتقليل الخطأ بين الحلين. وكلما تم استخدام ترتيب تسلسل، ثم الخطأ سيكون أصغر حجما وحلول تقريبية يمكن أن تقترب الحل التحليلية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu pengetahuan pada dasarnya lahir dan berkembang sebagai konsekuensi dari usaha-usaha manusia baik untuk memahami realitas kehidupan dan alam semesta maupun untuk menyelesaikan permasalahan yang dihadapi serta mengembangkan hasil yang sudah dicapai oleh manusia sebelumnya. Menuntut ilmu merupakan hal yang wajib dilakukan manusia untuk memperluas wawasan. Kewajiban menuntut ilmu dijelaskan dalam hadits yang berbunyi:

طَلَبُ الْعِلْمِ فَرِيضَةٌ عَلَى كُلِّ مُسْلِمٍ وَمُسْلِمَةٍ

“Mencari ilmu itu adalah wajib bagi setiap muslim laki-laki maupun muslim perempuan” (HR. Ibnu Abdil Barr).

Ilmu pengetahuan sangat luas, matematika merupakan salah satu ilmu pengetahuan yang tidak lepas perannya dalam kehidupan sehari-sehari. Oleh karena itu, perlu dikaji ilmu matematika untuk menambah wawasan. Banyak permasalahan yang perlu dikaji di dalam ilmu matematika, salah satunya pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan salah satu tahap pemecahan masalah matematika. Model merupakan representasi penyederhanaan dari suatu realita yang kompleks, biasanya bertujuan untuk memahami realita tersebut dan mempunyai *feature* yang sama dengan tiruannya dalam menyelesaikan permasalahan (Bell, 1978). Model matematika adalah himpunan dari rumus atau persamaan berdasarkan fenomena nyata yang dibuat dengan harapan dapat merepresentasikan dengan baik fenomena nyata tersebut menurut ilmu yang melatarbelakanginya (Ledder, 2005).

Allah Swt. berfirman di dalam al-Quran, yaitu

وَلَقَدْ ضَرَبْنَا لِلنَّاسِ فِي هَذَا الْقُرْآنِ مِنْ كُلِّ مَثَلٍ لَعَلَّهُمْ يَتَذَكَّرُونَ ﴿٣٩﴾

“*Sesungguhnya telah Kami buat kan bagi manusia dalam al-Quran ini setiap macam perumpamaan supaya mereka dapat pelajaran*” (QS. Az-Zumar/39:27).

Ayat tersebut dapat ditafsirkan sebagai perumpamaan yang dapat direpresentasikan ke dunia nyata. Dengan memodelkan masalah yang ada di dunia nyata, maka akan lebih mudah diketahui dan dipahami tentang masalah tersebut, salah satunya dengan melakukan pemodelan Matematika.

Fitria (2015) telah menurunkan model *traffic flow* berdasarkan hukum-hukum kesetimbangan pada masalah *traffic flow*. Model *traffic flow* yang diturunkan menghasilkan suatu persamaan yang dikenal dengan persamaan *shock wave* yang berbentuk persamaan diferensial parsial nonlinier. Dalam penelitian tersebut, persamaan *shock wave* diselesaikan menggunakan metode *Lax Wendroff* skema *Forward Time Central Space* (FTCS) dan diperoleh hasil solusi numeriknya stabil.

Transformasi Laplace adalah suatu metode yang mentransformasikan persamaan diferensial dari domain waktu t menjadi domain baru dengan variabel bebas s yaitu domain frekuensi, di mana s adalah bilangan kompleks. Begitu pula sebaliknya, invers transformasi Laplace adalah transformasi dari domain frekuensi s menjadi domain waktu t (Effendy dan Sugiono, 2013). Transformasi Laplace yang dibahas dalam penelitian ini adalah untuk mentransformasikan persamaan diferensial parsial nonlinier pada persamaan *shock wave* ke dalam bentuk persamaan diferensial biasa. Metode transformasi Laplace dalam penelitian ini dikombinasikan dengan metode dekomposisi Adomian untuk menguraikan bagian nonlinier dari persamaan *shock wave* menggunakan bantuan polinomial Adomian.

Metode dekomposisi Adomian Laplace pertama kali dikenalkan oleh Suheil A. Khuri (2001) yang berhasil digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial biasa orde dua. Metode dekomposisi Adomian Laplace adalah metode semi analitik untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier yang mengkombinasikan antara transformasi Laplace dan metode dekomposisi Adomian (Wartono, 2013).

Penelitian ini merujuk pada penelitian terdahulu yaitu penelitian yang dilakukan oleh Wartono (2013), menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk menentukan penyelesaian hampiran pada persamaan diferensial Riccati. Penelitian yang dilakukan oleh Wazwaz (2010), menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier *Integro Volterra*. Metode tersebut efektif digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier *Integro Volterra*. Penelitian yang dilakukan oleh Ongun (2011), menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk mencari solusi dari persamaan diferensial *ordinary* nonlinier seperti model pada infeksi HIV dari sel $CD4^+T$. Metode tersebut dapat menghasilkan solusi yang akurat dan hanya menggunakan sedikit iterasi.

Penelitian yang akan diselesaikan pada skripsi ini merujuk pada penelitian Fitria (2015), yaitu menyelesaikan persamaan *shock wave* yang telah diturunkan berdasarkan hukum-hukum kesetimbangan menggunakan metode yang berbeda. Melihat beberapa penelitian terdahulu yang menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial, maka peneliti juga ingin mengetahui dan memahami penerapan metode

dekomposisi Adomian Laplace terhadap persamaan diferensial parsial pada persamaan *shock wave*.

Berdasarkan paparan di atas, maka fokus penelitian ini adalah meneliti metode dekomposisi Adomian Laplace dalam penyelesaian persamaan *shock wave*. Sehingga judul penelitian ini adalah “Penyelesaian Persamaan *Shock Wave* Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace”.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana penyelesaian persamaan *shock wave* menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace?
2. Bagaimana analisis galat dari solusi yang diperoleh menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk menyelesaikan persamaan *shock wave* menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace.
2. Untuk mengetahui analisis galat dari solusi yang diperoleh menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah memberikan solusi alternatif untuk menyelesaikan persamaan *shock wave* menggunakan metode dekomposisi

Adomian Laplace, serta dapat dijadikan literatur penunjang dan bahan perbandingan dengan metode yang berbeda dengan penelitian ini.

1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah penelitian ini adalah persamaan *shock wave* yang akan diselesaikan adalah persamaan yang telah diturunkan oleh Fitria (2015) yang berbentuk

$$u_t + uu_x = 0 \quad (1.1)$$

dengan kondisi awal

$$u(x, 0) = -\frac{x}{1680} + 3 \quad (1.2)$$

dan solusi eksak

$$u(x, t) = \frac{x - 3t}{t - 1680} + 3 \quad (1.3)$$

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*library research*). Langkah-langkah penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menerapkan transformasi Laplace pada persamaan *shock wave* yang telah diturunkan.
2. Menerapkan sifat turunan pada persamaan yang sudah dikenai transformasi Laplace.
3. Substitusi kondisi awal yang diberikan pada persamaan yang sudah dikenai transformasi Laplace.
4. Menyatakan $u(x, t)$ dalam bentuk $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$.

5. Menyatakan suku nonlinier $N(u(x, t))$ dalam bentuk $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$.
6. Menentukan suku $\mathcal{L}\{u_0(x, t)\}, \mathcal{L}\{u_1(x, t)\}, \mathcal{L}\{u_2(x, t)\}, \dots, \mathcal{L}\{u_n(x, t)\}$ dari deret tak hingga.
7. Menerapkan invers transformasi Laplace pada $\mathcal{L}\{u_0(x, t)\}, \mathcal{L}\{u_1(x, t)\}, \mathcal{L}\{u_2(x, t)\}, \dots, \mathcal{L}\{u_n(x, t)\}$ untuk mendapatkan nilai $u_n(x, t), n \geq 0, t \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty$.
8. Menentukan solusi $u(x, t)$ dengan menjumlahkan $u_n(x, t), n \geq 0, t \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty$.
9. Mensimulasikan dan menganalisis galat

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam skripsi ini sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka menjelaskan tentang gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan seperti persamaan *shock wave*, transformasi Laplace, metode dekomposisi Adomian, metode dekomposisi Adomian Laplace, galat, dan penyelesaian masalah dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Bab ini merupakan bab inti dari penelitian yang menjabarkan tentang gambaran objek penelitian dan hasil dari penelitian yaitu penyelesaian

persamaan *shock wave* menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace.

Bab IV Penutup

Bab ini terdiri atas kesimpulan serta saran-saran yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan *Shock Wave*

Persamaan *shock wave* yang digunakan dalam penelitian ini berbentuk persamaan diferensial parsial nonlinier homogen sebagai berikut

$$u_t + uu_x = 0 \quad (2.1)$$

dengan kondisi awal

$$u(x, 0) = -\frac{x}{1680} + 3 \quad (2.2)$$

Persamaan *shock wave* merupakan hasil penurunan dari model *traffic flow* berdasarkan hukum-hukum kesetimbangan, yaitu hukum kesetimbangan massa dan hukum kesetimbangan momentum. Hukum kekekalan massa mensyaratkan bahwa perubahan massa per satuan waktu yaitu

perubahan massa terhadap waktu = massa yang masuk – massa yang keluar.

Bila m menunjukkan jumlah kendaraan yang melintasi suatu ruas jalan, ρ menunjukkan kepadatan, dan q adalah fluks kendaraan, $q|_x$ menunjukkan fluks kendaraan yang memasuki suatu ruas jalan sedangkan $q|_{x+\Delta x}$ adalah fluks kendaraan yang keluar dari ruas jalan, maka perubahan massa terhadap waktu dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{\partial m}{\partial t} = q|_x - q|_{x+\Delta x} \quad (2.3)$$

Berdasarkan rumus dari massa jenis (ρ), bila m merupakan massa dan V adalah volume, maka $m = \rho V$. Oleh karena itu persamaan (2.3) dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} = q|_x - q|_{x+\Delta x} \quad (2.4)$$

Karena objek pembahasannya adalah jalan raya dan hanya berdimensi satu, maka volume yang dimaksud adalah panjang interval jalan sebesar Δx . Sehingga persamaan (2.4) menjadi

$$\frac{\partial \rho \Delta x}{\partial t} = q|_x - q|_{x+\Delta x}$$

Dengan membagi kedua ruas dengan Δx , maka

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{q|_x - q|_{x+\Delta x}}{\Delta x}$$

Karena $\Delta x \rightarrow 0$, maka $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q|_x - q|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{\partial q}{\partial x}$, sehingga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

Karena $q = \rho v$, dengan v adalah kecepatan, maka

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

Diasumsikan bahwa kepadatan adalah faktor yang paling mempengaruhi kecepatan. Sedangkan untuk faktor lain diabaikan. Sehingga untuk kecepatan v dapat ditulis

$$v = v(\rho)$$

Jungel (2002:2) menyatakan model kecepatan yang bergantung kepadatan dalam bentuk persamaan

$$v(\rho) = v_{\text{maks}} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{maks}}}\right), 0 \leq \rho \leq \rho_{\text{maks}} \quad (2.6)$$

Kemudian persamaan (2.6) disubstitusikan pada model *traffic flow* pada persamaan (2.5) sehingga diperoleh

$$\rho_t + \left[v_{\text{maks}} \rho - \frac{v_{\text{maks}}}{\rho_{\text{maks}}} \rho^2 \right]_x = 0 \quad (2.7)$$

Langkah selanjutnya melakukan penskalaan, dan diperoleh hasilnya sebagai berikut

$$-\frac{\rho_{\text{maks}}}{2\tau} u_{t_s} - \frac{\rho_{\text{maks}}}{2\tau} (u u_{x_s}) = 0$$

Bila kedua ruas dibagi dengan $-\frac{\rho_{\text{maks}}}{2\tau}$, maka menjadi

$$u_{t_s} + uu_{x_s} = 0 \quad (2.8)$$

Model tersebut dikenal sebagai model *traffic flow*. Selanjutnya, t_s akan ditulis sebagai t , dan x_s akan ditulis sebagai x . Sehingga modelnya menjadi

$$u_t + uu_x = 0 \quad (2.9)$$

Hasil penurunan model *traffic flow* menghasilkan suatu persamaan diferensial parsial nonlinier yang disebut dengan persamaan *shock wave* (Fitria, 2015).

Persamaan (2.9) dengan kondisi awal (2.2) dapat diselesaikan menggunakan metode karakteristik sehingga dapat ditemukan solusi eksaknya yang mengacu pada Strauss (2007) yang dapat dilihat pada Lampiran 1, dan diperoleh hasil solusi eksaknya sebagai berikut

$$u(x, t) = \frac{x - 3t}{t - 1680} + 3 \quad (2.10)$$

2.2 Transformasi Laplace

Definisi

Misalkan $F(t)$ suatu fungsi dari t yang tertentu untuk $t > 0$. Maka transformasi Laplace dari $F(t)$ yang dinyatakan oleh $\mathcal{L}\{F(t)\}$ didefinisikan sebagai berikut

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (2.11)$$

dengan parameter s adalah riil atau kompleks.

Transformasi Laplace dari $F(t)$ dikatakan ada apabila integral pada persamaan (2.11) konvergen untuk beberapa harga s . Apabila tidak demikian, maka transformasi Laplace-nya tidak ada (Spiegel, 1999)

2.2.1 Sifat-Sifat Transformasi Laplace

Transformasi Laplace suatu fungsi mempunyai beberapa sifat, di antaranya:

1. Sifat Linier.

Teorema

Jika c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta sedangkan $F_1(t)$ dan $F_2(t)$ adalah fungsi-fungsi dengan transformasi-transformasi Laplace-nya masing-masing $f_1(s)$ dan $f_2(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{F_2(t)\} = c_1f_1(s) + c_2f_2(s)$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\}dt \\ &= c_1 \int_0^{\infty} e^{-st}F_1(t)dt + c_2 \int_0^{\infty} e^{-st}F_2(t)dt \\ &= c_1\mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{F_2(t)\} \\ &= c_1f_1(s) + c_2f_2(s) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Simbol \mathcal{L} yang mentransformasikan $F(t)$ ke dalam $f(s)$, sering disebut operator transformasi Laplace. Karena sifat \mathcal{L} dinyatakan dalam teorema ini, maka dapat dikatakan bahwa \mathcal{L} adalah suatu operator linier atau \mathcal{L} memiliki sifat linier.

2. Sifat Translasi atau Pergeseran Pertama.

Teorema

Jika $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, maka $\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s - a)$.

Bukti:

Diperoleh $\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}F(t)dt = f(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}F(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}F(t)dt = f(s - a) \quad (2.13)$$

3. Sifat Translasi atau Pergeseran Kedua.

Teorema

Jika $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ dan $G(t) = \begin{cases} F(t - a), & \text{jika } t > a \\ 0, & \text{jika } t < a \end{cases}$, maka

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as}f(s).$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{G(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}G(t)dt = \int_0^a e^{-st}G(t)dt + \int_a^{\infty} e^{-st}G(t)dt \\ &= \int_0^a e^{-st}(0)dt + \int_a^{\infty} e^{-st}F(t - a)dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-st}F(t - a)dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-s(u+a)}F(u)du \\ &= e^{-sa} \int_0^{\infty} e^{-su}F(u)du \\ &= e^{-sa}f(s) \end{aligned} \quad (2.14)$$

dengan menggunakan substitusi $t = u + a$.

4. Sifat Pengubahan Skala.

Teorema

Jika $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, maka $\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$.

Bukti:

Karena $\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$, maka $\mathcal{L}\{F(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(at) dt$. Misalkan

$u = at, du = a dt$ atau $dt = \frac{du}{a}$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{F(at)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} F(at) dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{a}\right)} F(u) d\left(\frac{u}{a}\right) \\
 &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-su/a} F(u) du \\
 &= \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

5. Transformasi Laplace dari Turunan-turunan.

Teorema

Jika $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, maka $\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$.

Bukti:

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F'(t) dt$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{F'(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} F'(t) dt = [e^{-st} F(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} F(t) - se^{-st} dt \\
 &= [e^{-st} F(t)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \\
 &= \left[(e^{-s(\infty)} F(\infty)) - (e^{-s(0)} F(0)) \right] \\
 &= +s \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -F(0) + sf(s) \\
 &= sf(s) - F(0)
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

6. Transformasi Laplace dari Integral-integral.

Teorema

$$\text{Jika } \mathcal{L}\{F(t)\} = f(s), \text{ maka } \mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)du\right\} = \frac{f(s)}{s}.$$

Bukti:

Misalkan $G(t) = \int_0^t F(u)du$, maka $G'(t) = F(t)$ dan $G(0) = 0$. Dengan menerapkan transformasi Laplace pada kedua ruas, maka diperoleh

$$\mathcal{L}\{G'(t)\} = s\mathcal{L}\{G(t) - G(0)\} = s\mathcal{L}\{G(t)\} = f(s).$$

Jadi,

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s} \text{ atau } \mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)du\right\} = \frac{f(s)}{s} \tag{2.17}$$

7. Perkalian dengan t^n .

Teorema

$$\text{Jika } \mathcal{L}\{F(t)\} = f(s), \text{ maka } \mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^n(s)$$

dengan $n = 1, 2, 3, \dots$

Bukti:

Diperoleh $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt$, maka menurut aturan Leibniz untuk menurunkan di bawah tanda integral sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{ds} = f'(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-st} F(t)dt = \int_0^\infty -te^{-st} F(t)dt \\
 &= - \int_0^\infty e^{-st} \{tF(t)\}dt = -\mathcal{L}\{tF(t)\}
 \end{aligned}$$

Jadi,

$$\mathcal{L}\{tF(t)\} = \frac{df}{ds} = -f'(s) \quad (2.18)$$

8. Sifat Pembagian t .

Teorema

Jika $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, maka $\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du$.

Bukti:

Misalkan $G(t) = \frac{F(t)}{t}$, maka $F(t) = tG(t)$, dengan menerapkan transformasi

Laplace pada kedua ruas, maka diperoleh

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{G(t)\} \text{ atau } f(s) = -\frac{dg}{ds}.$$

Kemudian, dengan mengintegrasikan diperoleh

$$g(s) = -\int_\infty^s f(u)du = \int_s^\infty f(u)du$$

Jadi,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)du \quad (2.19)$$

(Spiegel, 1999)

2.2.2 Invers Transformasi Laplace

Definisi

Jika transformasi Laplace suatu fungsi $F(t)$ adalah $f(s)$, yaitu $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, maka $F(t)$ disebut suatu invers transformasi Laplace dari $f(s)$ dan secara simbolik ditulis

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} \quad (2.20)$$

dengan \mathcal{L}^{-1} disebut operator invers transformasi Laplace (Spiegel, 1999)

2.3 Metode Dekomposisi Adomian

Metode dekomposisi Adomian diperkenalkan pertama kali oleh George Adomian. Metode ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Dalam metode dekomposisi Adomian, solusi diasumsikan sebagai jumlahan fungsi. Hal yang penting dalam metode ini, yaitu penggunaan polinomial Adomian untuk menyelesaikan suku nonlinier. Metode dekomposisi Adomian menyajikan solusi dari persamaan diferensial dalam bentuk deret (Adomian, 1994).

Contoh:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.21)$$

dengan $\frac{\partial u}{\partial t}$ operator diferensial linier, $u \frac{\partial u}{\partial x}$ operator diferensial nonlinier, dan $v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ operator diferensial yang memiliki orde tertinggi. Jika didefinisikan

$$L_t u = \frac{\partial u}{\partial t} = Ru, L_x u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Lu, Nu = u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.22)$$

dengan Nu menunjukkan operator diferensial nonlinier, Lu operator diferensial yang memiliki orde tertinggi, dan Ru adalah operator diferensial linier, sehingga persamaan (2.22) dapat ditulis sebagai berikut

$$Ru + Nu = vLu \quad (2.23)$$

dengan kondisi awal

$$u(x, 0) = 4x(1 - x) \quad (2.24)$$

Penyelesaian persamaan (2.21) untuk $L_t u$ dan $L_x u$ secara terpisah dan diperoleh

$$L_t u = vL_x u - Nu \quad (2.25)$$

$$L_x u = v^{-1}(L_t u + Nu) \quad (2.26)$$

Misalkan L_t^{-1} dan L_x^{-1} adalah invers dari operator $L_t u$ dan $L_x u$ seperti berikut

$$L_t^{-1}f(t) = \int f(t)dt \text{ dan } L_x^{-1}f(x) = \iint f(x)dx dx \quad (2.27)$$

Kemudian, dari persamaan (2.25) dan (2.26) dengan invers pada persamaan (2.27) diperoleh

$$u = \phi_0 + L_t^{-1} \left(v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.28)$$

$$u = \psi_0 + v^{-1} L_x^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.29)$$

dengan ϕ_0 dan ψ_0 adalah solusi dari persamaan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ dan } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.30)$$

Persamaan (2.30) dapat diselesaikan menggunakan kondisi awal pada persamaan (2.24), sehingga diperoleh

$$\phi_0 = 4x(1-x) \text{ dan } \psi_0 = 0 \quad (2.31)$$

Kemudian menjumlahkan persamaan (2.28) dan (2.29) dan dibagi dengan 2, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left[(\phi_0 + \psi_0) + L_t^{-1} \left(v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + v^{-1} L_x^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \\ &= 2x(1-x) + \frac{1}{2} \left[L_t^{-1} \left(v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + v^{-1} L_x^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.32)$$

dengan

$$u_0 = \frac{1}{2} (\phi_0 + \psi_0) = 2x(1-x) \quad (2.33)$$

Selanjutnya, menulis bentuk parameter dari persamaan (2.32) yaitu

$$u = u_0 + \frac{\lambda}{2} \left[v^{-1} L_x^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + L_t^{-1} \left(v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \quad (2.34)$$

Bentuk parameter dekomposisi dari u dan Nu adalah

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n \quad (2.35)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = Nu = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \quad (2.36)$$

dengan A_n adalah polinomial Adomian, dan λ adalah parameter yang digunakan untuk melengkapi bentuk tersebut. Selanjutnya, substitusikan (2.35) dan (2.36) ke persamaan (2.34) sehingga menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n = u_0 + u_0 + \frac{\lambda}{2} \left[v^{-1} L_x^{-1} \left(\frac{\partial \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n}{\partial t} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \right) + L_t^{-1} \left(v \frac{\partial^2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n}{\partial x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \right) \right] \quad (2.37)$$

Selanjutnya, membandingkan λ dari kedua ruas persamaan (2.37) dan dimisalkan $\lambda = 1$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} (u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots) &= u_0 + \frac{\lambda}{2} \left[v^{-1} L_x^{-1} \left(\frac{\partial (u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots)}{\partial t} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots) \right) + \right. \\ &\quad \left. L_t^{-1} \left(v \frac{\partial^2 (u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots)}{\partial x^2} - (A_0 + \lambda A_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \lambda^2 A_2 + \dots) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} (u_0 + u_1 + u_2 + \dots) &= u_0 + \frac{1}{2} \left[v^{-1} L_x^{-1} \left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (A_0 + A_1 + A_2 + \dots) \right) + L_t^{-1} \left(\left(v \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. v \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) - (A_0 + A_1 + A_2 + \dots) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

Sehingga diperoleh $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0 \\
u_1 &= \frac{1}{2} \left[v^{-1} L_x^{-1} \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + A_0 \right) + L_t^{-1} \left(v \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - A_0 \right) \right] \\
u_2 &= \frac{1}{2} \left[v^{-1} L_x^{-1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_1 \right) + L_t^{-1} \left(v \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - A_1 \right) \right] \\
&\vdots \\
u_{n+1} &= \frac{1}{2} \left[v^{-1} L_x^{-1} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} + A_n \right) + L_t^{-1} \left(v \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - A_n \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.40}$$

dengan $n = 0, 1, 2, \dots, n$. Polinomial A_n didefinisikan bahwa tiap-tiap A_n tergantung pada u_0, u_1, \dots, u_n untuk $n = 0, 1, 2, \dots, n$. Selanjutnya substitusikan (2.35) ke (2.36), sehingga

$$\begin{aligned}
Nu &= u \frac{\partial u}{\partial x} \\
&= (u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \dots) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \lambda^3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\
&= u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda \left(u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \\
&\quad \lambda^2 \left(u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \\
&\quad \lambda^3 \left(u_0 \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_3 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \lambda^4 (\dots)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Berdasarkan persamaan (2.41) dapat disimpulkan bahwa polinomial Adomian mempunyai bentuk

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \\
A_1 &= u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \\
A_2 &= u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.42}$$

(Mamaloukas, 2000)

2.4 Metode Dekomposisi Adomian Laplace

Metode dekomposisi Adomian Laplace merupakan kombinasi antara transformasi Laplace dengan metode dekomposisi Adomian. Secara umum persamaan diferensial parsial yang akan diselesaikan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace sebagai berikut

$$u_t + N(u) = 0 \quad (2.43)$$

dengan u_t adalah operator diferensial linier dan $N(u)$ adalah operator diferensial nonlinier, dengan kondisi awal

$$u(0) = a \quad (2.44)$$

Selanjutnya menerapkan transformasi Laplace yang dinotasikan dengan \mathcal{L} pada kedua ruas, sehingga diperoleh

$$\mathcal{L}\{u_t\} + \mathcal{L}\{N(u)\} = \mathcal{L}\{0\} \quad (2.45)$$

dengan menggunakan salah satu sifat transformasi Laplace, yaitu transformasi Laplace dari turunan-turunan, sehingga diperoleh

$$s\mathcal{L}\{u\} - u(0) + \mathcal{L}\{N(u)\} = 0 \quad (2.46)$$

Langkah selanjutnya mensubstitusikan kondisi awal (2.44) pada persamaan (2.46), sehingga diperoleh

$$s\mathcal{L}\{u\} - a + \mathcal{L}\{N(u)\} = 0$$

$$s\mathcal{L}\{u\} = a + \mathcal{L}\{N(u)\}$$

$$\mathcal{L}\{u\} = \frac{1}{s}(a + \mathcal{L}\{N(u)\}) \quad (2.47)$$

Selanjutnya, operator diferensial nonlinier $N(u)$ pada persamaan (2.47) diselesaikan menggunakan metode dekomposisi Adomian yang mengasumsikan solusi u sebagai jumlah deret tak hingga sebagai berikut

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (2.48)$$

Bentuk u_n akan diselesaikan secara rekursif. Selanjutnya, bentuk nonlinier $N(u)$ dinyatakan dalam suatu polinomial khusus

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.49)$$

dengan A_n adalah polinomial Adomian sebagai berikut

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ A_1 &= u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ A_2 &= u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ A_3 &= u_0 \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_3 \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.50)$$

Selanjutnya, mensubstitusikan persamaan (2.48) dan (2.49) ke dalam persamaan (2.47) sehingga diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{u_n\} = \left\{ \frac{a}{s} + \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{A_n\} \right\} \quad (2.51)$$

Berdasarkan persamaan (2.51) diperoleh secara rekursif sebagai berikut

$$\mathcal{L}\{u_0\} = \frac{a}{s} \quad (2.52)$$

$$\mathcal{L}\{u_1\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_0\} \quad (2.53)$$

$$\mathcal{L}\{u_2\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_1\} \quad (2.54)$$

⋮

$$\mathcal{L}\{u_{n+1}\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_n\} \quad (2.55)$$

Dengan menerapkan invers transformasi Laplace pada persamaan (2.52) sampai (2.54) sehingga diperoleh

$$u_0 = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{a}{s} \right\} \quad (2.56)$$

$$u_1 = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_0\} \right\} \quad (2.57)$$

$$u_2 = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_1\} \right\} \quad (2.58)$$

⋮

$$u_{n+1} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_n\} \right\} \quad (2.59)$$

Selanjutnya, diperoleh solusi $u(x, t)$ sebagai berikut

$$u(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n+1} \quad (2.60)$$

2.5 Galat (*Error*)

2.5.1 Sumber Utama Galat Hampiran

Secara umum terdapat dua sumber utama penyebab galat dalam perhitungan hampiran, yaitu:

1. Galat Pemotongan (*truncation error*).

Galat pemotongan adalah galat yang timbul akibat penggunaan hampiran sebagai pengganti formula eksak. Maksudnya, ekspresi matematik yang lebih kompleks diganti yang lebih sederhana. Istilah “pemotongan” muncul karena banyak metode hampiran yang diperoleh dengan penghampiran fungsi menggunakan deret Taylor. Karena deret Taylor merupakan deret yang berhingga,

maka untuk penghampiran tersebut deret Taylor dihentikan atau dipotong sampai suku orde tertentu. Penghentian suatu deret atau runtutan langkah-langkah komputasi yang tidak berhingga menjadi runtutan langkah yang berhingga itulah yang menimbulkan galat pemotongan.

Contoh hampiran fungsi $\cos(x)$ dengan bantuan deret Taylor di sekitar $x = 0$

$$\cos(x) = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}}_{\text{nilai hampiran}} + \underbrace{\frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots}_{\text{galat pemotongan}}$$

2. Galat Pembulatan (*round-off error*).

Perhitungan dengan metode hampiran hampir selalu menggunakan bilangan riil. Masalah timbul bila komputasi hampiran dikerjakan oleh mesin (dalam hal ini komputer), karena semua bilangan riil tidak dapat disajikan secara tepat di dalam komputer. Keterbatasan komputer dalam menyajikan bilangan riil menghasilkan galat yang disebut galat pembulatan.

Sebagai contoh $\frac{1}{6} = 0,166666666 \dots$ tidak dapat dinyatakan secara tepat oleh komputer, karena digit 6 panjangnya tidak terbatas. Komputer hanya mampu mempresentasikan sejumlah digit (atau bit dalam sistem biner) saja. Bilangan riil yang panjangnya melebihi jumlah digit (bit) yang dapat dipresentasikan oleh komputer dibulatkan ke bilangan terdekat (Munir, 2008)

2.5.2 Analisis Galat

Analisis galat sangat penting ketika perhitungan yang dilakukan menggunakan metode hampiran. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi

hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya, maka semakin teliti solusi hampiran yang diperoleh.

Misalkan \bar{u} adalah nilai hampiran terhadap nilai sejatinya u , maka selisih

$$\varepsilon = u - \bar{u} \quad (2.61)$$

disebut galat. Sebagai contoh, jika $\bar{u} = 10,5$ adalah nilai hampiran dari $u = 10,45$, maka galatnya adalah $\varepsilon = -0,01$. Jika tanda galat (positif atau negatif) tidak dipertimbangkan, maka galat mutlak didefinisikan sebagai berikut

$$|\varepsilon| = |u - \bar{u}| \quad (2.62)$$

(Munir, 2008)

2.6 Penyelesaian Masalah dalam Al-Quran

Allah Swt. telah memberi janji bahwa sesudah kesulitan ada kemudahan. Hal tersebut dijelaskan di dalam al-Quran surat al-Insyirah ayat 5-6, yaitu

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (QS. Al-Insyirah/94:5-6).

Ayat tersebut merupakan kabar gembira akan datangnya kemudahan untuk Rasulullah Saw, dan para sahabatnya setelah merasakan pahit getirnya hidup. Maka Rasulullah Saw, mengabarkan kabar gembira ini kepada sahabatnya dengan mengatakan: “Satu kesulitan tidak akan mengalahkan dua kemudahan, satu kesulitan tidak akan mengalahkan dua kemudahan”.

Abdullah bin Mas’ud r.a pernah berkata: “Seandainya kesulitan masuk ke dalam suatu lubang, maka kemudahanpun akan mengikutinya”, karena Allah Swt. berfirman yang artinya: “Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada

kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (Ath-Thabari, 2006).

Ayat ini diawali kata *fa* untuk menunjukkan adanya kaitan antara kedua keadaan tersebut (antara timbulnya kesulitan dan datangnya kemudahan). Digunakan kata sandang *ال* sebelum *عسر* memberi makna umum (yaitu semua kesulitan). Akan tetapi, yang dimaksud di sini adalah kesulitan-kesulitan yang biasanya dijumpai oleh tiap-tiap pribadi dan lingkungannya, misalnya kesulitan berupa kemiskinan, kelemahan, pengkhianatan kawan, dan langkanya sarana yang diperlukan (Abduh, 1999).

Al-Maragi (1993) menegaskan ketika Rasulullah Saw, dihimpit oleh kesedihan sebab ulah kaumnya, semangat beliau tidak kendor karenanya dan tekad beliau tidak goyah, akan tetapi Rasulullah Saw, tetap sabar dan tawakkal kepada Allah Swt.. Kemudian Allah Swt. memperkuat beliau dengan hadirnya orang-orang yang penuh rasa cinta kepada beliau serta memiliki semangat yang berkobar dalam membela Rasulullah Saw, dalam membela agama Islam.

Sesungguhnya tidak ada kesulitan yang tidak teratasi, jika jiwa bersemangat untuk keluar dari kesulitan dan mencari jalan keluar menggunakan akal pikiran dengan bertawakkal sepenuhnya kepada Allah Swt.. Dalam ayat ini terkandung pelajaran bahwa sesungguhnya Allah Swt. akan mengubah keadaan kaumnya dari kefakiran menjadi kaya, dari kekurangan teman menjadi banyak teman, dari permusuhan menjadi kecintaan, dan berbagai keadaan yang lainnya.

Mengingat masalah ini mudah menimbulkan keraguan, maka pernyataan Allah Swt. dikuatkan dengan *ان* yang artinya “*sesungguhnya*”. Lalu mengingat keraguan itu akan bertambah berkaitan dengan beberapa kesulitan yang dialami,

bahkan semakin bertambah semakin gawat sehingga terjadi pengingkaran, maka Allah Swt. mengulang lagi pernyataan tersebut dengan menggunakan kalimat yang sama, *ان مع العسر يسرا* yang berarti “*sesungguhnya bersama dengan kesulitan itu pasti ada kemudahan*” (Abduh, 1999).



BAB III PEMBAHASAN

3.1 Metode Dekomposisi Adomian Laplace pada Persamaan *Shock Wave*

Persamaan diferensial parsial pada persamaan *shock wave* yang akan diselesaikan dalam penelitian ini sebagai berikut

$$u_t + uu_x = 0 \quad (3.1)$$

dengan u adalah kepadatan kendaraan, x adalah dimensi ruang, t adalah dimensi waktu, dan $u(x, t)$ adalah solusi hampiran yang akan dicari menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace. Pada persamaan (3.1) uu_x adalah operator diferensial nonlinier yang dimisalkan dengan Nu yang akan diselesaikan menggunakan polinomial Adomian, dengan kondisi awal

$$u(x, 0) = -\frac{x}{1680} + 3 \quad (3.2)$$

Langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan persamaan (3.1) menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace adalah sebagai berikut. Pertama, menerapkan transformasi Laplace pada kedua ruas persamaan (3.1) sebagai berikut

$$\mathcal{L}\{u_t\} + \mathcal{L}\{uu_x\} = \mathcal{L}\{0\} \quad (3.3)$$

Dengan menggunakan salah satu sifat transformasi Laplace yaitu transformasi Laplace dari turunan-turunan yang dapat dilihat pada Lampiran 3, maka diperoleh hasil sebagai berikut

$$s \mathcal{L}\{u(x, t)\} - u(x, 0) + \mathcal{L}\{uu_x\} = 0 \quad (3.4)$$

Setelah dikenakan transformasi Laplace, persamaan diferensial parsial pada persamaan (3.1) berubah menjadi persamaan diferensial biasa dengan variabel bebas x , dan s adalah parameter riil atau kompleks sebagai berikut

$$s\mathcal{L}\{u(x, t)\} - u(x, 0) + \mathcal{L}\{uu_x\} = 0 \quad (3.5)$$

Selanjutnya, mensubstitusikan kondisi awal (3.2) pada persamaan (3.5) sebagai berikut

$$s\mathcal{L}\{u(x, t)\} - \left(-\frac{x}{1680} + 3\right) + \mathcal{L}\{uu_x\} = 0$$

$$s\mathcal{L}\{u(x, t)\} + \frac{x}{1680} - 3 + \mathcal{L}\{uu_x\} = 0$$

Selanjutnya diperoleh

$$s\mathcal{L}\{u(x, t)\} = -\frac{x}{1680} + 3 - \mathcal{L}\{uu_x\}$$

$$\mathcal{L}\{u(x, t)\} = \frac{1}{s} \left(-\frac{x}{1680} + 3 - \mathcal{L}\{uu_x\}\right)$$

$$\mathcal{L}\{u(x, t)\} = -\frac{x}{1680s} + \frac{3}{s} - \frac{1}{s} \mathcal{L}\{uu_x\} \quad (3.6)$$

Langkah selanjutnya yaitu menyatakan solusi hampiran $u(x, t)$ sebagai jumlah deret tak hingga sebagai berikut

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (3.7)$$

Sedangkan suku nonlinier uu_x pada persamaan (3.6) dinyatakan dalam suatu polinomial khusus dalam bentuk deret tak hingga sebagai berikut

$$uu_x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.8)$$

dengan A_n adalah polinomial Adomian yang nilainya tergantung pada $u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t)$ yang telah didefinisikan pada persamaan

(2.42). Selanjutnya mensubstitusikan persamaan (3.7) dan (3.8) ke dalam persamaan (3.6), sehingga diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)\right\} = -\frac{x}{1680s} + \frac{3}{s} - \frac{1}{s} \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right\} \quad (3.9)$$

dengan menggunakan sifat linier transformasi Laplace, diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{u_n(x, t)\} = -\frac{x}{1680s} + \frac{3}{s} - \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{A_n\} \quad (3.10)$$

Berdasarkan persamaan (3.10) diselesaikan secara rekursif yang dapat dilihat pada Lampiran 4, dan diperoleh hasilnya sebagai berikut

$$\mathcal{L}\{u_0(x, t)\} = -\frac{x}{1680s} + \frac{3}{s} \quad (3.11)$$

$$\mathcal{L}\{u_1(x, t)\} = -\frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_0\} = -\frac{1}{s} u_0 \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\} \quad (3.12)$$

$$\mathcal{L}\{u_2(x, t)\} = -\frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_1\} = -\frac{1}{s} \mathcal{L}\left\{u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x}\right\} \quad (3.13)$$

$$\mathcal{L}\{u_3(x, t)\} = -\frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_2\} = -\frac{1}{s} \mathcal{L}\left\{u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x}\right\} \quad (3.14)$$

⋮

$$\mathcal{L}\{u_{n+1}(x, t)\} = -\frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_n\} \quad (3.15)$$

Selanjutnya, dengan menerapkan invers transformasi Laplace diperoleh

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{x}{1680s} + \frac{3}{s}\right\} \\ &= -\frac{x}{1680} + 3 \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$u_1(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_0\}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} \mathcal{L} \left\{ u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\} \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} \mathcal{L} \left\{ \left(-\frac{x}{1680} + 3 \right) - \frac{1}{1680} \right\} \right\} \\
&= -\frac{xt}{2822400} + \frac{3t}{1680}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} \mathcal{L} \{ A_1 \} \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} \mathcal{L} \left\{ u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\} \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} \left(\mathcal{L} \left\{ u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\} + \mathcal{L} \left\{ u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\} \right) \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} \left(\mathcal{L} \left\{ \left(-\frac{x}{1680} + 3 \right) - \frac{t}{2822400} \right\} + \mathcal{L} \left\{ \left(-\frac{xt}{2822400} + \frac{3t}{1680} \right) - \frac{1}{1680} \right\} \right) \right\} \\
&= -\frac{xt^2}{4741632000} + \frac{3t^2}{2822400}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Oleh karena itu, berdasarkan langkah tersebut diperoleh

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{1680}x + 3$$

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2822400}(x - 5040)t$$

$$u_2(x, t) = -\frac{1}{4741632000}(x - 5040)t^2$$

$$u_3(x, t) = -\frac{1}{796594176 \times 10^4}(x - 5040)t^3$$

$$u_4(x, t) = -\frac{1}{133827821568 \times 10^5}(x - 5040)t^4$$

$$u_5(x, t) = -\frac{1}{22483074023424 \times 10^6}(x - 5040)t^5$$

$$u_6(x, t) = -\frac{1}{3777156435935232 \times 10^7} (x - 5040)t^6$$

$$u_7(x, t) = -\frac{1}{634562281237118976 \times 10^8} (x - 5040)t^7$$

$$u_8(x, t) = -\frac{1}{106606463247835987968 \times 10^9} (x - 5040)t^8$$

$$u_9(x, t) = -\frac{1}{17909885825636445978624 \times 10^{10}} (x - 5040)t^9$$

$$u_{10}(x, t) = -\frac{1}{3008860818706922924408832 \times 10^{11}} (x - 5040)t^{10}$$

Sehingga diperoleh solusi hampiran untuk orde $n = 10$ sebagai berikut

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots + u_{10}(x, t) \quad (3.19)$$

$$= -\frac{x}{1680} + 3 - \frac{1}{2822400} (x - 5040)t \quad (3.20)$$

$$- \frac{1}{4741632000} (x - 5040)t^2$$

$$- \frac{1}{796594176 \times 10^4} (x - 5040)t^3$$

$$- \frac{1}{133827821568 \times 10^5} (x - 5040)t^4$$

$$- \frac{1}{22483074023424 \times 10^6} (x - 5040)t^5$$

$$- \frac{1}{3777156435935232 \times 10^7} (x - 5040)t^6$$

$$- \frac{1}{634562281237118976 \times 10^8} (x - 5040)t^7$$

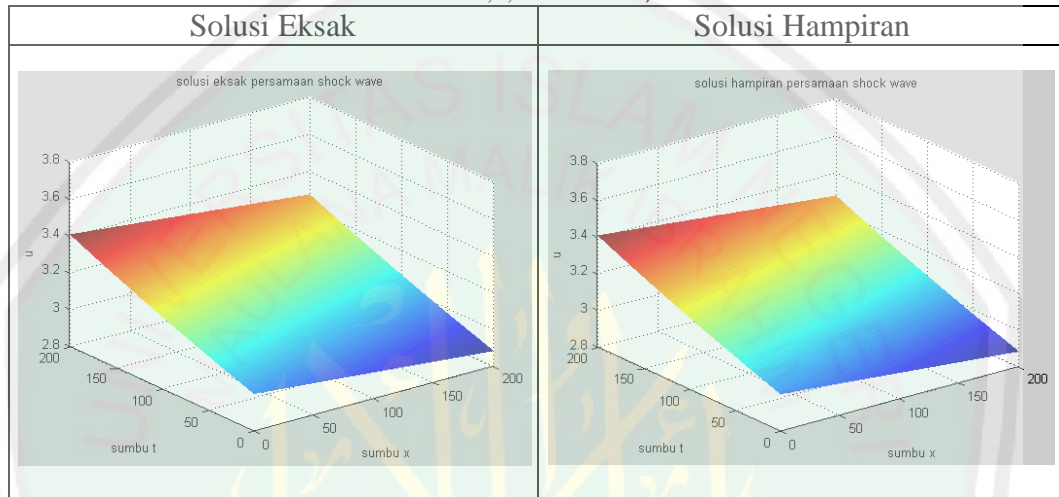
$$- \frac{1}{106606463247835987968 \times 10^9} (x - 5040)t^8$$

$$- \frac{1}{3008860818706922924408832 \times 10^{11}} (x - 5040)t^{10}$$

3.2 Simulasi dan Analisis Galat (*Error*)

Simulasi pertama dilakukan pada solusi eksak dan solusi hampiran persamaan *shock wave* (3.20) dengan memilih orde $n = 10$ pada $0 \leq x \leq 200$, $0 \leq t \leq 200$, $\Delta t = 0,5$, dan $\Delta x = 0,5$ yang hasilnya dapat dilihat sebagai berikut

Tabel 3.1 Perbandingan Gambar Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 10$, $\Delta t = 0,5$, dan $\Delta x = 0,5$.



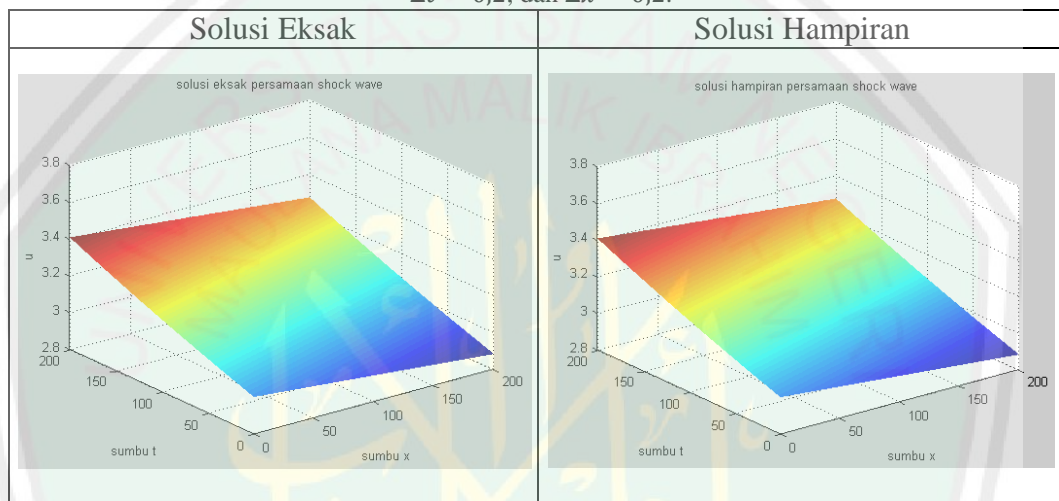
Hasil solusi dari Tabel 3.1 dapat dilihat pada tabel berikut

Tabel 3.2 Galat Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 10$, $\Delta t = 0,5$, dan $\Delta x = 0,5$.

x_i	t_j	Solusi Eksak	Solusi Hampiran	Galat (ε)
0	0	3,0000000000000000	3,0000000000000000	0
50	0	2,970238095238095	2,970238095238095	0
100	0	2,994047619047619	2,940476190476191	0
150	0	2,910714285714286	2,910714285714286	0
200	0	2,880952380952381	2,880952380952381	0
0	50	3,092024539877301	3,092024539877301	$0,444089209 \times 10^{-15}$
50	50	3,061349693251534	3,061349693251533	$0,444089209 \times 10^{-15}$
100	50	3,085889570552147	3,030674846625767	0
150	50	3,0000000000000000	3,0000000000000000	$0,444089209 \times 10^{-15}$
200	50	2,969325153374233	2,969325153374233	$0,444089209 \times 10^{-15}$
0	100	3,189873417721519	3,189873417721413	$0,106581410 \times 10^{-12}$
50	100	3,158227848101266	3,158227848101161	$0,104360964 \times 10^{-12}$
100	100	3,126582278481012	3,126582278480909	$0,103028696 \times 10^{-12}$
150	100	3,094936708860760	3,094936708860657	$0,103028696 \times 10^{-12}$
200	100	3,063291139240506	3,063291139240405	$0,101696429 \times 10^{-12}$
0	200	3,405405405405405	3,405405405173614	$0,231791030 \times 10^{-9}$
50	200	3,371621621621622	3,371621621392130	$0,229491536 \times 10^{-9}$
100	200	3,337837837837838	3,337837837610646	$0,227192042 \times 10^{-9}$
150	200	3,304054054054054	3,304054053829162	$0,224892104 \times 10^{-9}$
200	200	3,270270270270270	3,270270270047678	$0,222592611 \times 10^{-9}$

Tabel 3.2 menunjukkan bahwa nilai maksimum mutlak *error* sebesar $0,231791030 \times 10^{-9}$ di titik $x = 0$ dan $t = 200$. Simulasi kedua dilakukan pada solusi eksak dan solusi hampiran persamaan *shock wave* (3.20) dengan memilih orde $n = 10$ pada $0 \leq x \leq 200$, $0 \leq t \leq 200$ $\Delta t = 0,2$, dan $\Delta x = 0,2$ yang hasilnya dapat dilihat sebagai berikut

Tabel 3.3 Perbandingan Gambar Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 10$, $\Delta t = 0,2$, dan $\Delta x = 0,2$.



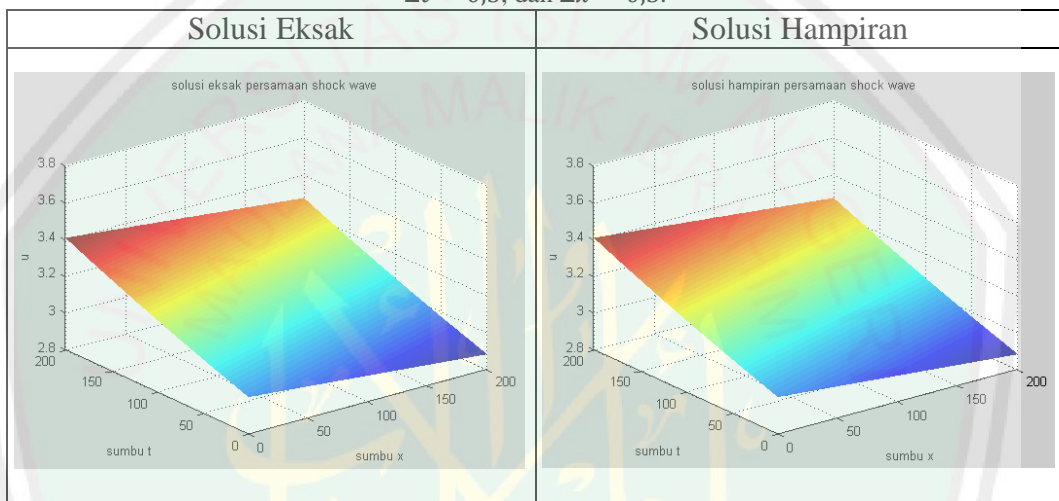
Hasil solusi dari Tabel 3.3 dapat dilihat pada tabel berikut

Tabel 3.4 Galat Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 10$, $\Delta t = 0,2$, dan $\Delta x = 0,2$.

x_i	t_j	Solusi Eksak	Solusi Hampiran	Galat (ϵ)
0	0	3,0000000000000000	3,0000000000000000	0
50	0	2,970238095238095	2,970238095238095	0
100	0	2,994047619047619	2,940476190476191	0
150	0	2,910714285714286	2,910714285714286	0
200	0	2,880952380952381	2,880952380952381	0
0	50	3,092024539877301	3,092024539877301	$0,444089209 \times 10^{-15}$
50	50	3,061349693251534	3,061349693251533	$0,444089209 \times 10^{-15}$
100	50	3,030674846625767	3,030674846625767	0
150	50	3,000000000000000	3,000000000000000	$0,444089209 \times 10^{-15}$
200	50	2,969325153374233	2,969325153374233	$0,444089209 \times 10^{-15}$
0	100	3,189873417721519	3,189873417721413	$0,106581410 \times 10^{-12}$
50	100	3,158227848101266	3,158227848101161	$0,104360964 \times 10^{-12}$
100	100	3,126582278481012	3,126582278480909	$0,103028696 \times 10^{-12}$
150	100	3,094936708860760	3,094936708860657	$0,103028696 \times 10^{-12}$
200	100	3,063291139240506	3,063291139240405	$0,101696429 \times 10^{-12}$
0	200	3,405405405405405	3,405405405173614	$0,231791030 \times 10^{-9}$
50	200	3,371621621621622	3,371621621392130	$0,229491536 \times 10^{-9}$
100	200	3,337837837837838	3,337837837610646	$0,227192042 \times 10^{-9}$
150	200	3,304054054054054	3,304054053829162	$0,224892104 \times 10^{-9}$
200	200	3,270270270270270	3,270270270047678	$0,222592611 \times 10^{-9}$

Tabel 3.4 menunjukkan nilai maksimum mutlak *error* sebesar $0,231791030 \times 10^{-9}$ yang terdapat di titik $x = 0$ dan $t = 200$. Simulasi ketiga dilakukan pada solusi eksak dan solusi hampiran persamaan *shock wave* dengan memilih orde $n = 15$ pada $0 \leq x \leq 200$, $0 \leq t \leq 200$, $\Delta t = 0,5$, dan $\Delta x = 0,5$ yang hasilnya dapat dilihat sebagai berikut

Tabel 3.5 Perbandingan Gambar Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 15$, $\Delta t = 0,5$, dan $\Delta x = 0,5$.



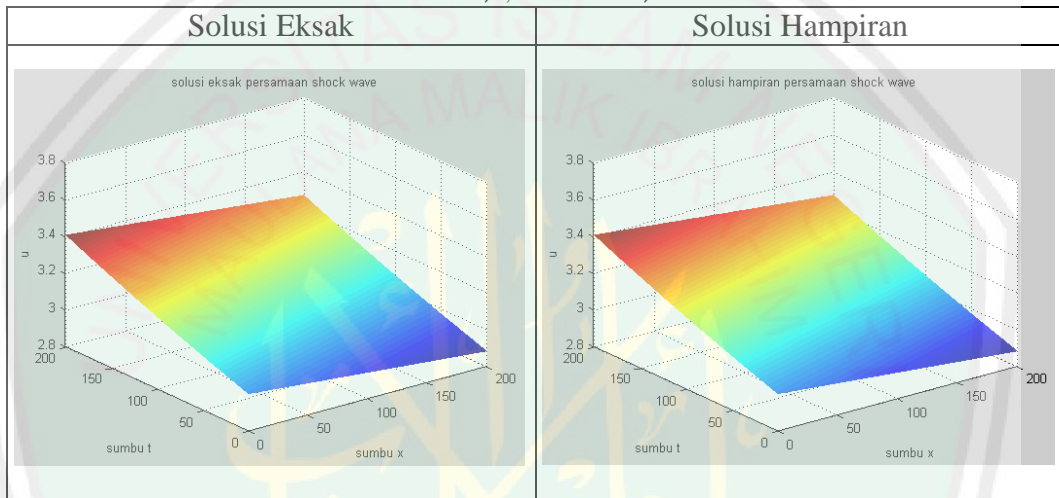
Hasil solusi dari Tabel 3.5 dapat dilihat pada tabel berikut

Tabel 3.6 Galat Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 15$, $\Delta t = 0,5$, dan $\Delta x = 0,5$.

x_i	t_j	Solusi Eksak	Solusi Hampiran	Galat (ϵ)
0	0	3,0000000000000000	3,0000000000000000	0
50	0	2,970238095238095	2,970238095238095	0
100	0	2,940476190476191	2,940476190476191	0
150	0	2,910714285714286	2,910714285714286	0
200	0	2,880952380952381	2,880952380952381	0
0	50	3,092024539877301	3,092024539877301	$0,444089209 \times 10^{-15}$
50	50	3,061349693251534	3,061349693251533	$0,444089209 \times 10^{-15}$
100	50	3,030674846625767	3,030674846625767	0
150	50	3,0000000000000000	3,0000000000000000	$0,444089209 \times 10^{-15}$
200	50	2,969325153374233	2,969325153374233	$0,444089209 \times 10^{-15}$
0	100	3,189873417721519	3,189873417721519	$0,444089209 \times 10^{-15}$
50	100	3,158227848101266	3,158227848101266	$0,444089209 \times 10^{-15}$
100	100	3,126582278481012	3,126582278481013	$0,888178419 \times 10^{-15}$
150	100	3,094936708860760	3,094936708860760	0
200	100	3,063291139240506	3,063291139240507	$0,444089209 \times 10^{-15}$
0	200	3,405405405405405	3,405405405405400	$0,532907051 \times 10^{-14}$
50	200	3,371621621621622	3,371621621621616	$0,577315972 \times 10^{-14}$
100	200	3,337837837837838	3,337837837837832	$0,577315972 \times 10^{-14}$
150	200	3,304054054054054	3,304054054054050	$0,444089209 \times 10^{-14}$
200	200	3,270270270270270	3,270270270270265	$0,488498130 \times 10^{-14}$

Tabel 3.6 menunjukkan nilai maksimum mutlak *error* sebesar $0,532907051 \times 10^{-14}$ di titik $x = 0$ dan $t = 200$. Simulasi keempat dilakukan pada solusi eksak dan solusi hampiran persamaan *shock wave* dengan memilih orde $n = 15$ pada $0 \leq x \leq 200$, $0 \leq t \leq 200$, $\Delta t = 0,2$, dan $\Delta x = 0,2$ yang hasilnya dapat dilihat sebagai berikut

Tabel 3.7 Perbandingan Gambar Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 15$, $\Delta t = 0,2$, dan $\Delta x = 0,2$.



Hasil solusi dari Tabel 3.7 dapat dilihat pada tabel berikut

Tabel 3.8 Galat Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 15$, $\Delta t = 0,2$, dan $\Delta x = 0,2$.

x_i	t_j	Solusi Eksak	Solusi Hampiran	Galat (ϵ)
0	0	3,0000000000000000	3,0000000000000000	0
50	0	2,970238095238095	2,970238095238095	0
100	0	2,940476190476191	2,940476190476191	0
150	0	2,910714285714286	2,910714285714286	0
200	0	2,880952380952381	2,880952380952381	0
0	50	3,092024539877301	3,092024539877301	$0,444089209 \times 10^{-15}$
50	50	3,061349693251534	3,061349693251533	$0,444089209 \times 10^{-15}$
100	50	3,030674846625767	3,030674846625767	0
150	50	3,000000000000000	3,000000000000000	$0,444089209 \times 10^{-15}$
200	50	2,969325153374233	2,969325153374233	$0,444089209 \times 10^{-15}$
0	100	3,189873417721519	3,189873417721519	$0,444089209 \times 10^{-15}$
50	100	3,158227848101266	3,158227848101266	$0,444089209 \times 10^{-15}$
100	100	3,126582278481012	3,126582278481013	$0,888178419 \times 10^{-15}$
150	100	3,094936708860760	3,094936708860760	0
200	100	3,063291139240506	3,063291139240507	$0,444089209 \times 10^{-15}$
0	200	3,405405405405405	3,405405405405400	$0,532907051 \times 10^{-14}$
50	200	3,371621621621622	3,371621621621616	$0,577315972 \times 10^{-14}$
100	200	3,337837837837838	3,337837837837832	$0,577315972 \times 10^{-14}$
150	200	3,304054054054054	3,304054054054050	$0,444089209 \times 10^{-14}$
200	200	3,270270270270270	3,270270270270265	$0,488498130 \times 10^{-14}$

Tabel 3.8 menunjukkan nilai maksimum mutlak *error* sebesar $0,532907051 \times 10^{-14}$ yang terdapat di titik $x = 0$ dan $t = 200$. Berdasarkan keempat simulasi tersebut, dapat dilihat simulasi yang dilakukan pada solusi eksak dan solusi hampiran persamaan *shock wave* (3.20) menunjukkan simulasi pertama pada Tabel 3.2 dengan memilih orde $n = 10$, ketika $\Delta t = 0,5$ dan $\Delta x = 0,5$, simulasi kedua pada Tabel 3.4 dengan memilih orde $n = 10$, ketika $\Delta t = 0,2$ dan $\Delta x = 0,2$, simulasi ketiga pada Tabel 3.6 dengan memilih orde $n = 15$, ketika $\Delta t = 0,5$ dan $\Delta x = 0,5$, dan simulasi keempat pada Tabel 3.8 dengan memilih orde $n = 15$, ketika $\Delta t = 0,2$ dan $\Delta x = 0,2$.

Hasil simulasi dan analisis galat menunjukkan jika solusi hampiran persamaan *shock wave* dengan memilih orde $n = 10$ dan $n = 15$, pada saat Δt dan Δx nya sama, yaitu sebesar 0,5 menunjukkan nilai maksimum mutlak *error* untuk orde $n = 10$ sebesar $0,231791030 \times 10^{-9}$ di titik $x = 0$ dan $t = 200$. Sedangkan untuk orde $n = 15$ sebesar $0,532907051 \times 10^{-14}$ di titik $x = 0$ dan $t = 200$. Berdasarkan nilai maksimum *mutlak error* dapat dilihat bahwa galat lebih kecil ketika orde n dari deret yang digunakan lebih besar.

Hasil simulasi dan analisis galat menunjukkan jika solusi hampiran persamaan *shock wave* dengan memilih orde $n = 10$ dan $n = 15$, pada saat Δt dan Δx nya sama, yaitu sebesar 0,2 menunjukkan nilai maksimum mutlak *error* untuk orde $n = 10$ sebesar $0,231791030 \times 10^{-9}$ yang terdapat di titik $x = 0$ dan $t = 200$. Sedangkan untuk orde $n = 15$ sebesar $0,532907051 \times 10^{-14}$ di titik $x = 0$ dan $t = 200$. Berdasarkan nilai maksimum *mutlak error* dapat dilihat bahwa galat lebih kecil ketika orde n dari deret yang digunakan lebih besar.

Selanjutnya, hasil simulasi dan analisis galat menunjukkan jika solusi hampiran persamaan *shock wave* dengan memilih orde $n = 10$, pada saat $\Delta t = 0,5$, $\Delta x = 0,5$ dan $\Delta t = 0,2$, $\Delta x = 0,2$ menunjukkan perubahan Δt dan Δx tidak mempengaruhi hasil solusi maupun galat. Begitu juga dengan memilih orde $n = 15$, pada saat $\Delta t = 0,5$, $\Delta x = 0,5$ dan $\Delta t = 0,2$, $\Delta x = 0,2$ menunjukkan perubahan Δt dan Δx tidak mempengaruhi hasil solusi maupun galat.

Berdasarkan uraian di atas dapat diambil kesimpulan bahwa perubahan Δt dan Δx tidak mempengaruhi hasil solusi maupun galat antara solusi eksak dan solusi hampiran persamaan *shock wave*, akan tetapi perbedaan orde n solusi hampiran dapat mempengaruhi hasil galat. Semakin besar orde n dari deret yang digunakan, maka semakin kecil galatnya sehingga solusi hampiran dapat menghampiri solusi eksaknya. Galat maksimum dari simulasi tersebut digunakan untuk mencari galat terbesar dari semua galat, sehingga dapat diketahui bahwa solusi hampiran tersebut mendekati solusi eksaknya.

Berdasarkan galat maksimum, dapat diketahui galat relatif untuk orde $n = 10$ yaitu sebesar $0,83393866 \times 10^{-28} \%$, sedangkan untuk orde $n = 15$, galat relatifnya sebesar $0,1305018768 \times 10^{-39} \%$. Sehingga dari galat relatif tersebut dapat dikatakan bahwa galat solusi hampiran bernilai sangat kecil dan mendekati solusi eksaknya.

3.3 Langkah Penyelesaian Masalah dalam Perspektif Islam

Manusia adalah makhluk ciptaan Allah Swt. yang paling sempurna karena diberikan keistimewaan berupa akal. Dengan keistimewaan tersebut manusia mengembangkan ilmu pengetahuan untuk menghadapi setiap fenomena

yang terjadi di dunia. Dengan akalnyanya tersebut, ia gunakan untuk mencari solusi dalam menyelesaikan segala permasalahan yang terjadi. Karena setiap permasalahan yang dihadapi manusia berbeda-beda dan harus diselesaikan dengan cara yang berbeda pula sesuai tujuan yang diharapkan. Seperti halnya menyelesaikan persoalan matematika yang dibahas dalam skripsi ini, harus disertai dengan langkah-langkah yang sistematis dan perhitungan yang teliti, karena ketelitian dalam persoalan matematika merupakan hal yang sangat penting untuk memperoleh hasil yang tepat. Allah Swt. berfirman

وَلَا تَهِنُوا وَلَا تَحْزَنُوا وَأَنْتُمْ الْأَعْلَوْنَ إِنْ كُنْتُمْ مُؤْمِنِينَ ﴿١٣٩﴾

“Janganlah kamu bersikap lemah, dan janganlah (pula) kamu bersedih hati, Padahal kamulah orang-orang yang paling tinggi (derajatnya), jika kamu orang-orang yang beriman” (QS. Ali Imran/3:139).

Berdasarkan ayat tersebut Allah Swt. memerintahkan untuk tidak bersikap lemah dalam menghadapi suatu permasalahan. Karena setiap permasalahan pasti ada jalan keluarnya seperti yang dijelaskan pada Bab sebelumnya. Dalam persoalan matematis khususnya, seseorang dituntut untuk tidak bersikap lemah dalam mencari sebuah penyelesaian, akan tetapi dibutuhkan ketelitian untuk memperoleh sebuah solusi yang tepat.

Allah Swt. menghibur kaum muslimin dengan berfirman, *“Janganlah kamu bersikap lemah.”* yang artinya janganlah kalian melemah akibat peristiwa yang telah terjadi itu. *“Dan janganlah (pula) kamu bersedih hati, padahal kamulah orang-orang yang paling tinggi (derajatnya), jika kamu orang-orang yang beriman”*. Maksudnya, bahwa kesudahan yang baik dan pertolongan hanya bagi kalian wahai orang-orang yang beriman (Abdullah, 2005).

Sesungguhnya cita-cita orang mukmin itu sangat tinggi, yakni ingin menegakkan mercusuar keadilan di dunia, mengejar kebahagiaan abadi di akhirat kelak. Dengan syarat harus benar-benar beriman terhadap kebenaran janji Allah Swt. yang akan menolong orang-orang yang beriman kepada Allah Swt.. Allah Swt. menjadikan akibat yang baik bagi orang yang bertakwa lagi mau mengikuti sunnah-Nya.. Allah Swt. melarang merasa susah terhadap apa yang telah lewat, karena hal tersebut akan membuat seseorang kehilangan semangat. Sebaliknya Allah Swt. tidak melarang hubungan seseorang dengan apa yang dicintainya, misalnya teman yang dapat memulihkan kekuatannya serta dapat mengisi hatinya dengan kegembiraan (Al-Maragi, 1993).

Allah Swt. menyeru kepada hamba-Nya yaitu orang-orang islam yang berserah diri (kepada-Nya) untuk membimbing mereka kepada sarana yang dapat membantu mereka untuk teguh dalam mempertahankan kiblat yang telah Allah Swt. pilihkan bagi mereka, dan untuk selalu mengingat serta bersyukur kepada Allah Swt., tidak melupakan dan kafir kepada-Nya.. Allah Swt. berfirman

يَتَأَيُّهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا اسْتَعِينُوا بِالصَّبْرِ وَالصَّلَاةِ إِنَّ اللَّهَ مَعَ الصَّابِرِينَ ﴿١٥٣﴾

“Hai orang-orang yang beriman, mohonlah pertolongan (kepada Allah Swt.) dengan sabar dan shalat. Sesungguhnya Allah Swt. beserta orang-orang yang sabar” (QS. Al-Baqarah/2:153).

Ayat tersebut dapat juga diartikan mintalah pertolongan kepada Allah Swt. dengan sabar dan shalat, yakni atas apa yang dituntut kepada kalian berupa keteguhan, dzikir, syukur, tidak lupa, dan tidak kafir kepada Allah Swt. dengan bersabar, yaitu menahan diri dan membawanya untuk menuruti perintah-perintah Allah Swt., serta dengan menegakkan shalat. Allah Swt. memberitahukan mereka

bahwa Dia bersama orang-orang yang sabar dengan memberikan kekuatan, maka jika mereka bersabar, mereka mendapat kekuatan dan pertolongan dari-Nya.

Ayat tersebut juga menjelaskan hikmah yang terkandung di dalam masalah dengan menjadikan sabar dan shalat sebagai penolong serta pembimbing. Karena sesungguhnya seorang hamba itu adakalanya berada dalam kenikmatan, lalu ia mensyukurinya, atau berada dalam cobaan, lalu ia bersabar menanggungnya. Sebagaimana yang disebutkan dalam sebuah hadits yang mengatakan

عَجَبًا لِلْمُؤْمِنِ لَا يَقْضِي اللَّهُ لَهُ قَضَاءً إِلَّا كَانَ خَيْرًا لَهُ: إِنْ أَصَابَتْهُ سَرَاءٌ فَشَكَرَ كَانَ خَيْرًا لَهُ وَ إِنْ أَصَابَتْهُ ضَرَاءٌ فَصَبَرَ كَانَ خَيْرًا لَهُ

“Mengagumkan perihal orang mukmin itu. Tidak sekali-kali Allah Swt. menetapkan suatu ketetapan baginya melainkan hal itu baik baginya. Jika dia mendapat kesenangan, maka bersyukurlah dia yang hal ini adalah lebih baik baginya, dan jika tertimpa kesengsaraan, maka bersabarlah dia yang hal ini adalah lebih baik baginya” (Ad-Dimasyqi, 2000:48-49).

Allah Swt. mendorong manusia untuk menaati-Nya dan menghadapi sesuatu yang dirasa berat baik secara fisik maupun materi. Maka seolah Dia berfirman, *“Wahai orang beriman, hendaklah kamu minta tolong dengan cara sabar dan shalat dalam melaksanakan ketaatan kepada-Ku, menunaikan berbagai hukum yang Aku tetapkan, baik hukum yang telah dihapus maupun hukum yang masih berlaku, sekalipun kamu merasa berat karena perkataan batil dari orang kafir yang dilontarkan kepada kamu. Atau terasa berat secara fisik dalam melaksanakannya maupun secara materi dalam melawan musuh-musuhmu di jalan-Ku. Hendaklah kamu bersabar karena Aku semata dalam menghadapi sesuatu yang tidak disenangi dan dirasa berat oleh kamu. Kemudian hendaklah kamu berlindung dari perkara-perkara yang mengerikan, dengan cara*

melaksanakan shalat karena Aku semata. Karena dengan kesabaran atas perkara-perkara yang tidak disenangi, kamu akan mendapatkan keridhaan-Ku, dan dengan melaksanakan shalat karena-Ku, kamu akan meraih apa yang kamu cari dan akan memperoleh apa yang kamu butuhkan di sisi-Ku. Sesungguhnya Aku bersama orang-orang yang sabar dalam menunaikan kewajiban-kewajiban dari-Ku, dan sabar dalam meninggalkan maksiat kepada-Ku. Aku akan menolong, menjaga, serta melindungi mereka, sehingga mereka dapat memperoleh apa yang dicari dan dicita-citakan” (Ath-Thabari, 2001).

Allah Swt. memerintahkan umat manusia untuk selalu meminta pertolongan kepada Allah Swt. dengan cara bersabar dan menunaikan shalat secara khusyuk. Rasulullah Saw, bersabda: *“Sebagai kejutan bagi orang mukmin, Allah Swt. tidak akan menentukan sesuatu, kecuali Allah Swt. lebih tahu tentang apa yang lebih baik baginya”*. Sabar mengandung tiga hal, yaitu sabar untuk meninggalkan sesuatu yang haram, sabar dalam menunaikan ibadah dan kewajiban, serta sabar dalam menerima musibah dari Allah Swt.. Semua musibah merupakan kehendak Allah Swt. dan telah disebutkan pula bahwa di balik kejadian yang menimpa, pasti terdapat hikmah yang sangat agung (Mubarakfury, 1999).

Allah Swt. juga memerintahkan untuk bersabar, setelah memohon pertolongan kepada-Nya yang dijelaskan dalam surat al-A’raf ayat 128, yaitu

قَالَ مُوسَىٰ لِقَوْمِهِ اسْتَعِينُوا بِاللَّهِ وَاصْبِرُوا ۗ إِنَّ الْأَرْضَ لِلَّهِ يُورِثُهَا مَنْ يَشَاءُ مِنْ عِبَادِهِ ۗ
وَالْعَاقِبَةُ لِلْمُتَّقِينَ ﴿١٢٨﴾

Musa berkata kepada kaumnya: "Mohonlah pertolongan kepada Allah Swt. dan bersabarlah. Sesungguhnya bumi (ini) kepunyaan Allah Swt. dipusakakan-Nya kepada siapa yang dihendaki-Nya dari hamba-hamba-Nya. Dan kesudahan yang baik adalah bagi orang-orang yang bertakwa" (QS. Al-A’raf/7:128).

Melalui firman-Nya ini, Allah Swt. menyuruh para hamba-Nya untuk meraih kebaikan dunia dan akhirat yang mereka dambakan, dengan cara menjadikan kesabaran dan shalat sebagai penolong. Sebagaimana yang dikatakan Muqatil bin Hayyan dalam tafsirnya mengenai ayat ini: *“Hendaklah kalian mengejar kehidupan akhirat dengan cara menjadikan kesabaran dalam mengerjakan berbagai kewajiban dan shalat sebagai penolong”*. Selain itu, Imam Ahmad meriwayatkan dari Hudzaifah bin al-Yaman: *“Rasulullah Saw, jika ditimpa suatu musibah, maka segera mengerjakan shalat”* (HR. Abu Dawud).

Mengenai firman-Nya *“Jadikanlah sabar dan shalat sebagai penolong kamu”*. Sunaid meriwayatkan dari Hajjaj, dari Ibnu Juraid, ia mengatakan bahwa sabar dan shalat merupakan penolong untuk mendapatkan rahmat Allah Swt. (Ad-Dimasyqi, 2000).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan bahwa:

1. Persamaan *shock wave* dapat diselesaikan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace, yaitu dengan mengkombinasikan antara transformasi Laplace dengan metode dekomposisi Adomian. Adapun langkah-langkah penyelesaian persamaan *shock wave* menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace, di antaranya menerapkan transformasi Laplace, substitusi kondisi awal yang diberikan, menyatakan solusi dalam bentuk deret tak hingga, menggunakan metode dekomposisi Adomian untuk menyelesaikan suku nonlinier, menerapkan invers transformasi Laplace, mencari solusi hampiran, simulasi, dan analisis galat.
2. Berdasarkan hasil simulasi dan analisis galat dapat diketahui bahwa, perubahan Δt dan Δx tidak mempengaruhi hasil solusi dan galat antara solusi hampiran dan solusi eksak. Akan tetapi, perubahan orde n dari deret yang digunakan dapat mempengaruhi hasil solusi dan galat antara kedua solusi tersebut. Semakin besar orde n dari deret yang digunakan, maka galat akan semakin kecil dan solusi hampiran dapat menghampiri solusi eksaknya. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa metode dekomposisi Adomian Laplace dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan *shock wave* dengan menambah orde n dari deret yang digunakan untuk mendapatkan galat yang kecil sehingga solusi hampiran dapat menghampiri solusi eksaknya. Untuk melihat x dan t yang lebih panjang membutuhkan Δx dan Δt yang lebih besar.

4.2 Saran

Pada penelitian ini, penulis hanya membahas penyelesaian persamaan *shock wave* menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan membahas persamaan *shock wave* menggunakan metode yang berbeda, sehingga penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan perbandingan dengan metode selanjutnya.



DAFTAR RUJUKAN

- Abduh, M. 1999. *Tafsir Al-Qur'an Al-Karim (Juz 'Amma) diterjemahkan oleh Muhammad Bagir: Tafsir Juz 'Amma*. Bandung: Mizan.
- Abdullah. 2005. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 1*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Ad-Dimasyqi, A. 2000. *Tafsir Ibnu Katsir Juz 2*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.
- Adomian, G. 1994. *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. Boston: Kluwer Academic Publisher.
- Al-Maragi, A. 1993. *Tafsir Al-Maragi Juz 30 diterjemahkan oleh Bahrun Abu Bakar dkk: Tafsir al-Maragi*. Semarang: CV. Toha Putra.
- Ath-Thabari, A. 2001. *Tafsir Ath-Thabari Jami'ul Bayan 'An Ta'wil Al-Qur'an, Tahqiq DR. Abdullah bin Abdul Muhsin At-Turki*. Kairo: Dar Hijr.
- Ath-Thabari, A. 2006. *Tafsir Ath-Thabari*. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Bell, F. 1978. *Teaching and Learning Mathematics in Secondary School Second Edition*. Dubuque Iowa: Win C Brown Company Publishers.
- Fitria, B.T. 2015. *Penurunan Model Traffic Flow Berdasarkan Hukum-Hukum Kesetimbangan*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Effendy, N., dan Sugiyono, V. 2013. *Matematika Teknik 1*. Yogyakarta: Center for Academic Publishing Service (CAPS).
- Jungel, A. 2002. *Modeling and Numerical Approximation of Traffic Flow Problems*. Laporan Penelitian Tidak Dipublikasikan. Mainz: Universitas Mainz.
- Khuri, A.S. 2001. A Laplace Decomposition Method Algorithm Applied to a Class of Nonlinear Differential Equation. *Journal of Applied Mathematics*, 1(4):141-155.
- Ledder, G. 2005. *Differential Equation: A Modeling Approach*. New York: Mc Graw Hill.
- Mamaloukas, C. 2000. An Approximate Solution of Burger Equation Using Adomain's Decomposition Method. *General Relativity and The Workshop on Global Analysis*. Balkan: Geometry Balkan Press.

- Mubarakfury, S. 1999. *Al Misbah Al Munir fi Tahzib Tafsir Ibnu Kasir*. Riyadh: Darussalam.
- Munir, R. 2008. *Metode Numerik Revisi Kedua*. Bandung: Informatika Bandung.
- Ongun, M. 2011. The Laplace Adomian Decomposition Method for Solving a Model for HIV Invectin of CD4⁺T Cells. *Mathematical and Computer Modelling*, 53:597-603.
- Spiegel, M. 1999. *Transformasi Laplace*. Jakarta: Erlangga.
- Strauss, A. 2007. *Second Edition Partial Differential Equation*. America: United States of America.
- Wartono, M. 2013. Penyelesaian Persamaan Riccati dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace. *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, 10(2):1-6.
- Wazwaz, A. 2010. The Combined Laplace Transform-Adomian Decomposition Method for Handling Nonlinear Volterra Integro Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 216: 1304-1309.

LAMPIRAN 1

Solusi Eksak Persamaan *Shock Wave*

Persamaan yang akan diselesaikan sebagai berikut

$$u_t + uu_x = 0 \quad (2.1)$$

dengan kondisi awal

$$u(x, 0) = -\frac{x}{1680} + 3 \quad (2.2)$$

Selanjutnya dapat dituliskan formula untuk solusi (2.1) berdasarkan karakteristik dari garis lurus $(x_0, 0)$ dan (x, t) , maka kemiringan atau gradiennya sebagai berikut

$$\frac{x - x_0}{t - 0} = \frac{dx}{dt} = u(x, t) = u(x_0, 0) = \phi(x_0) \quad (2.3)$$

jadi,

$$x - x_0 = t\phi(x_0) \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) mengandung x_0 secara implisit sebagai fungsi dari (x, t) , kemudian diperoleh solusi $u(x, t)$ sebagai berikut

$$u(x, t) = \phi(x_0(x, t)) \quad (2.5)$$

Selanjutnya persamaan (2.1) dapat diselesaikan dengan kondisi awal (2.2).

Langkah pertama substitusikan kondisi awal (2.2) ke persamaan (2.4) seperti berikut

$$x - x_0 = t \left(-\frac{x_0}{1680} + 3 \right) \quad (2.6)$$

$$-x_0 + \frac{x_0 t}{1680} = 3t - x$$

$$\left(\frac{t}{1680} - 1 \right) x_0 = 3t - x$$

$$\left(\frac{t-1680}{1680}\right)x_0 = 3t - x$$

$$x_0 = \frac{1680(3t - x)}{t - 1680} \quad (2.7)$$

Berdasarkan persamaan (2.5) dapat dituliskan solusi eksak dari persamaan (2.1) sebagai berikut

$$u(x, t) = \phi(x_0(x, t))$$

$$= -\frac{\left(\frac{1680(3t - x)}{t - 1680}\right)}{1680} + 3$$

$$= \frac{-1680(3t - x)}{1680(t - 1680)} + 3$$

$$= \frac{x - 3t}{t - 1680} + 3 \quad (2.8)$$

LAMPIRAN 2

Penurunan Persamaan (2.42)

Mensubstitusikan persamaan (2.35) ke persamaan (2.36), sehingga

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n &= u \frac{\partial u}{\partial x} \\
 &= (u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \dots) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right. \\
 &\quad \left. + \lambda^3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\
 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3) &= \left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda^2 u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \lambda^3 u_0 \frac{\partial u_3}{\partial x} + \dots \right) + \\
 &\quad \left(\lambda u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda^2 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda^3 u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \lambda^4 u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} + \dots \right) + \\
 &\quad \left(\lambda^2 u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda^3 u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda^4 u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \lambda^6 u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x} + \dots \right) + \\
 &\quad \left(\lambda^3 u_3 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda^4 u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda^5 u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \lambda^6 u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} + \dots \right) \\
 &= u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda \left(u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \lambda^2 \left(u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \\
 &\quad + \lambda^3 \left(u_0 \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_3 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \lambda^4 (\dots)
 \end{aligned}$$

Jika koefisien dari perpangkatan λ pada kedua ruas dibandingkan, maka diperoleh polinomial Adomian A_0, A_1, A_2, \dots sebagai berikut

$$A_0 = u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$A_1 = u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$A_2 = u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

LAMPIRAN 3

Tabel Invers Transformasi Laplace

No.	Fungsi $F(t) = L^{-1}[f(s)]$	Transformasi Laplace $f(s) = L[F(t)]$
1.	1	$\frac{1}{s}, s > 0$
2.	t	$\frac{1}{s^2}, s > 0$
3.	t^2	$\frac{2!}{s^3}, s > 0$
4.	$t^n, n = \text{bilangan asli}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
5.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$
6.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
7.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
8.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, s > a $
9.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, s > a $
10.	$e^{at} \sin bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$
11.	$e^{at} \cos bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$

LAMPIRAN 4

Transformasi Laplace dari Turunan-turunan

$$\mathcal{L}\{u_t\} + \mathcal{L}\{uu_x\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st}(u_t) dt + \mathcal{L}\{uu_x\} = \int_0^{\infty} e^{-st} 0 dt$$

$$[e^{-st}(u)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u - se^{-st} dt + \mathcal{L}\{uu_x\} = 0$$

$$-u + s \int_0^{\infty} u e^{-st} dt + \mathcal{L}\{uu_x\} = 0$$

$$-u + s\mathcal{L}\{u\} + \mathcal{L}\{uu_x\} = 0$$

$$s\mathcal{L}\{u(x, t)\} - u(x, 0) + \mathcal{L}\{uu_x\} = 0$$

LAMPIRAN 5

Penurunan Persamaan (3.11), (3.12), (3.13), dan (3.14)

Diketahui persamaan (3.10)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{u_n(x, t)\} = -\frac{x}{1680s} + \frac{3}{s} - \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{A_n\}$$

Selanjutnya dimisalkan $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{u_n(x, t)\}$ dan $-\frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{A_n\}$ berorde λ

sehingga dapat ditulis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathcal{L}\{u_n(x, t)\} = -\frac{x}{1680s} + \frac{3}{s} - \lambda \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathcal{L}\{A_n\}$$

dan dapat diuraikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \lambda^0 \mathcal{L}\{u_0(x, t)\} + &= -\frac{x}{1680s} + \frac{3}{s} - \lambda \frac{1}{s} [\lambda^0 \mathcal{L}\{A_0\} + \lambda^1 \mathcal{L}\{A_1\} + \lambda^2 \mathcal{L}\{A_2\} + \\ \lambda^1 \mathcal{L}\{u_1(x, t)\} + &\dots] \end{aligned}$$

$$\lambda^2 \mathcal{L}\{u_n(x, t)\} + \dots$$

$$\mathcal{L}\{u_0(x, t)\} + = -\frac{x}{1680s} + \frac{3}{s} - \lambda \frac{1}{s} [\mathcal{L}\{A_0\} + \lambda \mathcal{L}\{A_1\} + \lambda^2 \mathcal{L}\{A_2\} + \dots]$$

$$\lambda \mathcal{L}\{u_1(x, t)\} +$$

$$\lambda^2 \mathcal{L}\{u_n(x, t)\} + \dots$$

$$\mathcal{L}\{u_0(x, t)\} + = -\frac{x}{1680s} + \frac{3}{s} - \lambda \frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_0\} - \lambda^2 \frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_1\} - \lambda^3 \frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_2\} + \dots$$

$$\lambda \mathcal{L}\{u_1(x, t)\} +$$

$$\lambda^2 \mathcal{L}\{u_n(x, t)\} + \dots$$

$$\mathcal{L}\{u_0(x, t)\} + = -\frac{x}{1680s} + \frac{3}{s} - \lambda \left(\frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_0\}\right) - \lambda^2 \left(\frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_1\}\right) -$$

$$\lambda \mathcal{L}\{u_1(x, t)\} + \lambda^3 \left(\frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_2\}\right) + \dots$$

$$\lambda^2 \mathcal{L}\{u_n(x, t)\} + \dots$$

Selanjutnya membandingkan λ pada kedua ruas persamaan tersebut, sehingga

diperoleh secara rekursif sebagai berikut

$$\mathcal{L}\{u_0(x, t)\} = -\frac{x}{1680s} + \frac{3}{s}$$

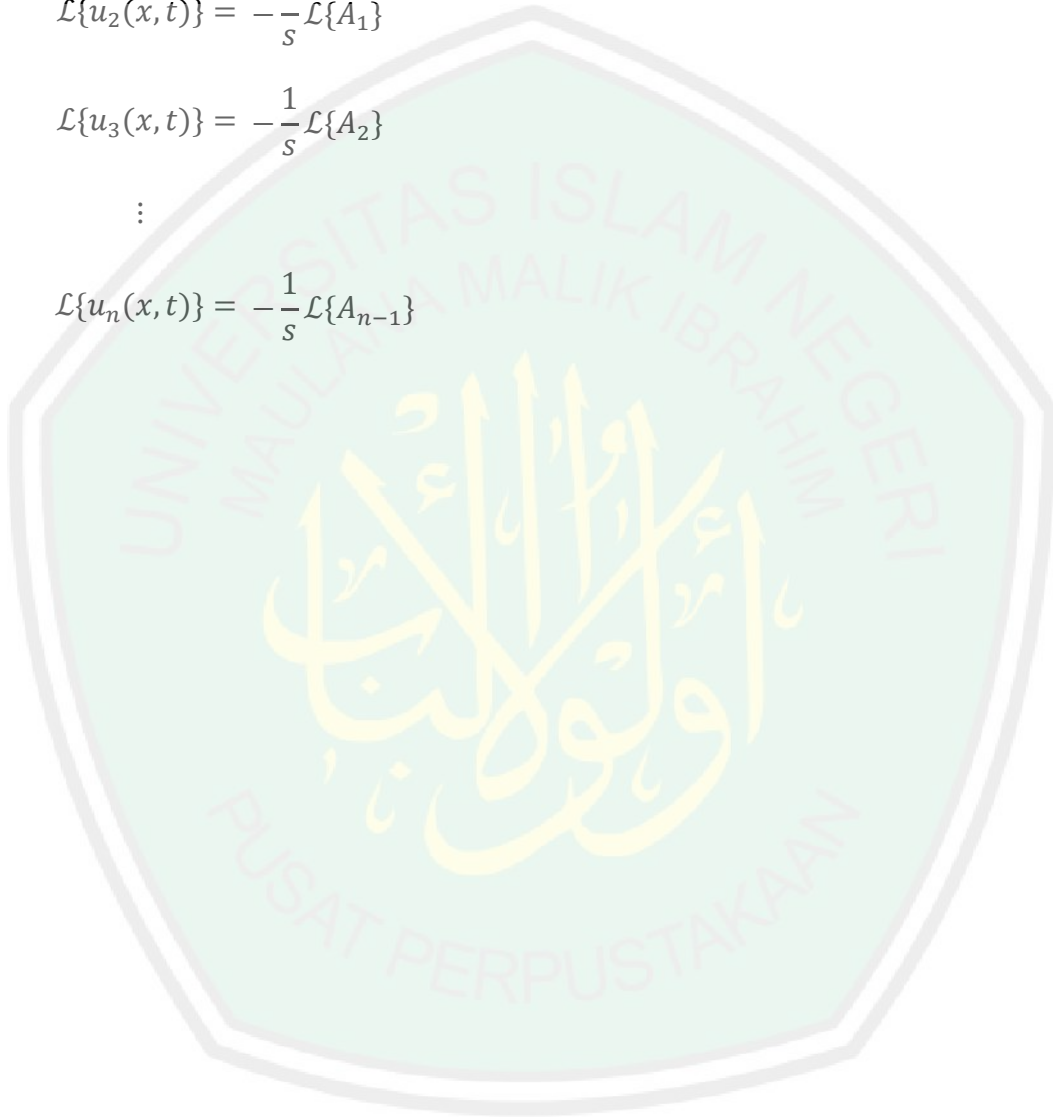
$$\mathcal{L}\{u_1(x, t)\} = -\frac{1}{s}\mathcal{L}\{A_0\}$$

$$\mathcal{L}\{u_2(x, t)\} = -\frac{1}{s}\mathcal{L}\{A_1\}$$

$$\mathcal{L}\{u_3(x, t)\} = -\frac{1}{s}\mathcal{L}\{A_2\}$$

⋮

$$\mathcal{L}\{u_n(x, t)\} = -\frac{1}{s}\mathcal{L}\{A_{n-1}\}$$



LAMPIRAN 6

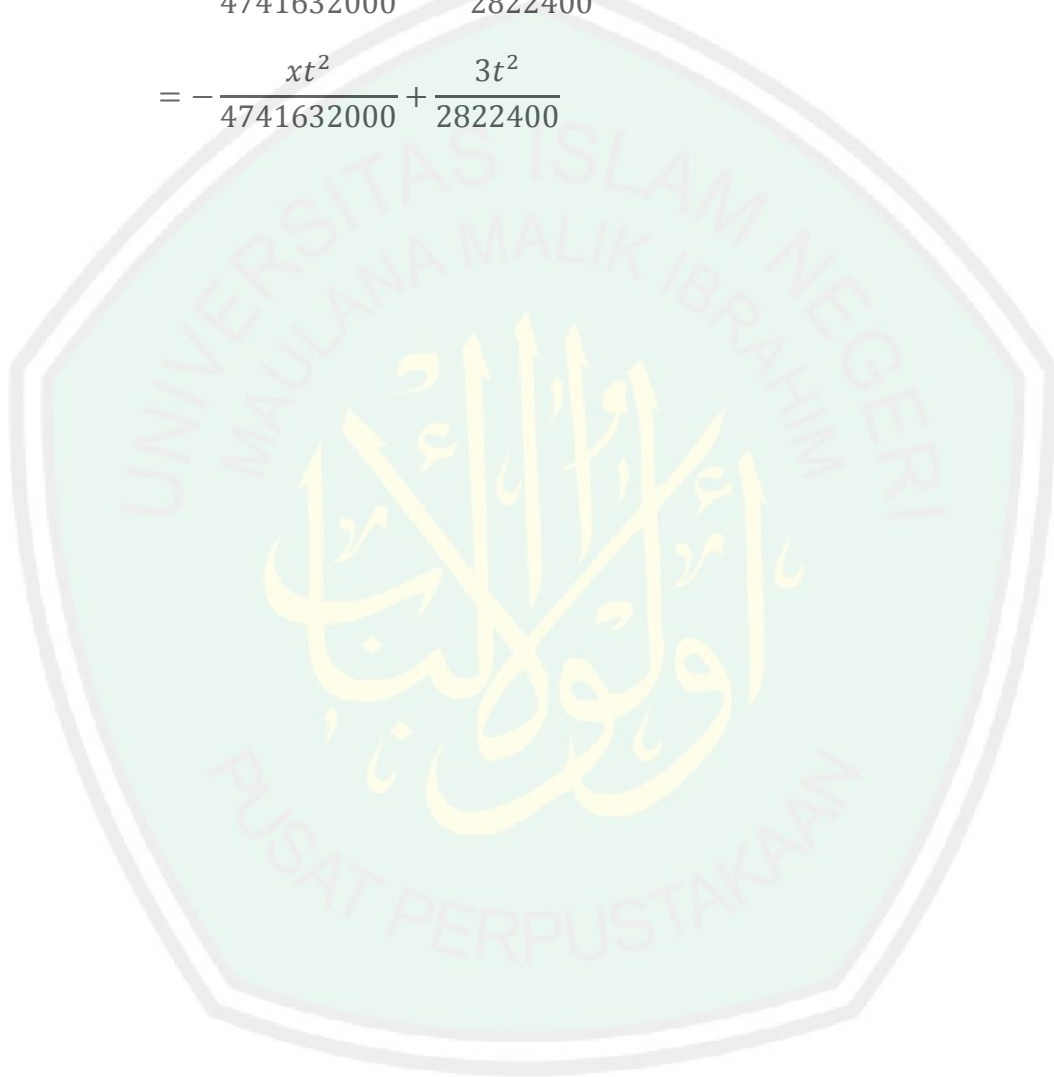
Mencari Nilai $u_0(x, t)$, $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ dengan Perhitungan Manual

$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{x}{1680s} + \frac{3}{s} \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{x}{1680s} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ +\frac{3}{s} \right\} \\
&= -\frac{x}{1680} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} + 3 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} \\
&= -\frac{x}{1680} (1) + 3(1) \\
&= -\frac{x}{1680} + 3 \\
u_1(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} \mathcal{L}\{A_0\} \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} \mathcal{L} \left\{ u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\} \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} \mathcal{L} \left\{ \left(-\frac{x}{1680} + 3 \right) - \frac{1}{1680} \right\} \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} \mathcal{L} \left\{ \frac{x}{2822400} - \frac{3}{1680} \right\} \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} \left(\mathcal{L} \left\{ \frac{x}{2822400} \right\} - \mathcal{L} \left\{ \frac{3}{1680} \right\} \right) \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} \left(\left(\int_0^\infty e^{-st} \frac{x}{2822400} dt \right) - \left(\int_0^\infty e^{-st} \frac{3}{1680} dt \right) \right) \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} \left(\left(\frac{x}{2822400} \int_0^\infty e^{-st} dt \right) - \left(\frac{3}{1680} \int_0^\infty e^{-st} dt \right) \right) \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{s} \left(\left(\frac{x}{2822400} \right) \frac{1}{s} - \left(\frac{3}{1680} \right) \frac{1}{s} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s}\left(\frac{x}{2822400s} - \frac{3}{1680s}\right)\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{x}{2822400s^2} + \frac{3}{1680s^2}\right\} \\
&= -\frac{x}{2822400}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{3}{1680}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\
&= -\frac{x}{2822400}t + \frac{3}{1680}t \\
&= -\frac{xt}{2822400} + \frac{3t}{1680}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s}\mathcal{L}\{A_1\}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{u_0\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s}\left(\mathcal{L}\left\{u_0\frac{\partial u_1}{\partial x}\right\} + \mathcal{L}\left\{u_1\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\}\right)\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s}\left(\mathcal{L}\left\{\left(-\frac{x}{1680} + 3\right) - \frac{t}{2822400}\right\} + \mathcal{L}\left\{\left(-\frac{xt}{2822400} + \frac{3t}{1680}\right) - \frac{1}{1680}\right\}\right)\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s}\left(\mathcal{L}\left\{\left(\frac{xt}{4741632000} - \frac{3t}{2822400}\right) + \left(\frac{xt}{4741632000} - \frac{3t}{2822400}\right)\right\}\right)\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s}\left(\mathcal{L}\left\{\frac{2xt}{4741632000}\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{6t}{2822400}\right\}\right)\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s}\left(\frac{2x}{4741632000}\mathcal{L}\{t\} - \frac{6}{2822400}\mathcal{L}\{t\}\right)\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s}\left(\frac{2x}{4741632000}\frac{1}{s^2} - \frac{6}{2822400}\frac{1}{s^2}\right)\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s}\left(\frac{2x}{4741632000s^2} - \frac{6}{2822400s^2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{2x}{4741632000s^3} + \frac{6}{2822400s^3} \right\} \\
&= -\frac{2x}{4741632000(2!)} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2!}{s^3} \right\} + \frac{6}{2822400(2!)} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2!}{s^3} \right\} \\
&= -\frac{x}{4741632000} t^2 + \frac{3}{2822400} t^2 \\
&= -\frac{xt^2}{4741632000} + \frac{3t^2}{2822400}
\end{aligned}$$



LAMPIRAN 7

Mencari Nilai $u_3, u_4, u_5, \dots, u_{10}$ Menggunakan Perhitungan Maple

- > restart;
- > with(inttrans) :
- > $u_0 := -\frac{x}{1680} + 3 :$
- > $A_0 := u_0 \cdot \text{diff}(u_0, x) :$
- > $u_1 := \text{invlaplace}(u_1, s, t);$
- $$u_1 := -\frac{1}{2822400} (x - 5040) t$$
- > $A_1 := u_0 \cdot \text{diff}(u_1, x) + u_1 \cdot \text{diff}(u_0, x) :$
- > $u_2 := -\frac{1}{s} \cdot \text{laplace}(A_1, t, s) :$
- > $u_2 := \text{invlaplace}(u_2, s, t);$
- $$u_2 := -\frac{1}{4741632000} (x - 5040) t^2$$
- > $A_2 := u_0 \cdot \text{diff}(u_2, x) + u_1 \cdot \text{diff}(u_1, x) + u_2 \cdot \text{diff}(u_0, x) :$
- > $u_3 := -\frac{1}{s} \cdot \text{laplace}(A_2, t, s) :$
- > $u_3 := \text{invlaplace}(u_3, s, t);$
- $$u_3 := -\frac{1}{7965941760000} (x - 5040) t^3$$
- > $A_3 := u_0 \cdot \text{diff}(u_3, x) + u_1 \cdot \text{diff}(u_2, x) + u_2 \cdot \text{diff}(u_1, x) + u_3 \cdot \text{diff}(u_0, x) :$
- > $u_4 := -\frac{1}{s} \cdot \text{laplace}(A_3, t, s) :$
- > $u_4 := \text{invlaplace}(u_4, s, t);$
- $$u_4 := -\frac{1}{13382782156800000} (x - 5040) t^4$$
- > $A_4 := u_0 \cdot \text{diff}(u_4, x) + u_1 \cdot \text{diff}(u_3, x) + u_2 \cdot \text{diff}(u_2, x) + u_3 \cdot \text{diff}(u_1, x) + u_4 \cdot \text{diff}(u_0, x) :$
- > $u_5 := -\frac{1}{s} \cdot \text{laplace}(A_4, t, s) :$
- > $u_5 := \text{invlaplace}(u_5, s, t);$
- $$u_5 := -\frac{1}{22483074023424000000} (x - 5040) t^5$$
- $A_5 := u_0 \cdot \text{diff}(u_5, x) + u_1 \cdot \text{diff}(u_4, x) + u_2 \cdot \text{diff}(u_3, x) + u_3 \cdot \text{diff}(u_2, x) + u_4 \cdot \text{diff}(u_1, x) + u_5 \cdot \text{diff}(u_0, x) :$
- > $u_6 := -\frac{1}{s} \cdot \text{laplace}(A_5, t, s) :$
- > $u_6 := \text{invlaplace}(u_6, s, t);$
- $$u_6 := -\frac{1}{37771564359352320000000} (x - 5040) t^6$$
- $A_6 := u_0 \cdot \text{diff}(u_6, x) + u_1 \cdot \text{diff}(u_5, x) + u_2 \cdot \text{diff}(u_4, x) + u_3 \cdot \text{diff}(u_3, x) + u_4 \cdot \text{diff}(u_2, x) + u_5 \cdot \text{diff}(u_1, x) + u_6 \cdot \text{diff}(u_0, x) :$
- > $u_7 := -\frac{1}{s} \cdot \text{laplace}(A_6, t, s) :$

> $u7 := \text{invlaplace}(u7, s, t);$

$$u7 := -\frac{1}{63456228123711897600000000} (x - 5040) t^7$$

$$A7 := u0 \cdot \text{diff}(u7, x) + u1 \cdot \text{diff}(u6, x) + u2 \cdot \text{diff}(u5, x) + u3 \cdot \text{diff}(u4, x) + u4 \cdot \text{diff}(u3, x) \\ + u5 \cdot \text{diff}(u2, x) + u6 \cdot \text{diff}(u1, x) + u7 \cdot \text{diff}(u0, x) :$$

> $u8 := -\frac{1}{s} \cdot \text{laplace}(A7, t, s) :$

> $u8 := \text{invlaplace}(u8, s, t);$

$$u8 := -\frac{1}{106606463247835987968000000000} (x - 5040) t^8$$

$$A8 := u0 \cdot \text{diff}(u8, x) + u1 \cdot \text{diff}(u7, x) + u2 \cdot \text{diff}(u6, x) + u3 \cdot \text{diff}(u5, x) + u4 \cdot \text{diff}(u4, x) \\ + u5 \cdot \text{diff}(u3, x) + u6 \cdot \text{diff}(u2, x) + u7 \cdot \text{diff}(u1, x) + u8 \cdot \text{diff}(u0, x) :$$

> $u9 := -\frac{1}{s} \cdot \text{laplace}(A8, t, s) :$

> $u9 := \text{invlaplace}(u9, s, t);$

$$u9 := -\frac{1}{179098858256364459786240000000000} (x - 5040) t^9$$

$$A9 := u0 \cdot \text{diff}(u9, x) + u1 \cdot \text{diff}(u8, x) + u2 \cdot \text{diff}(u7, x) + u3 \cdot \text{diff}(u6, x) + u4 \cdot \text{diff}(u5, x) \\ + u5 \cdot \text{diff}(u4, x) + u6 \cdot \text{diff}(u3, x) + u7 \cdot \text{diff}(u2, x) + u8 \cdot \text{diff}(u1, x) + u9 \cdot \text{diff}(u0, x) :$$

> $u10 := -\frac{1}{s} \cdot \text{laplace}(A9, t, s) :$

> $u10 := \text{invlaplace}(u10, s, t);$

$$u10 := -\frac{1}{300886081870692292440883200000000000} (x - 5040) t^{10}$$

> $\text{hasil} := u0 + u1 + u2 + u3 + u4 + u5 + u6 + u7 + u8 + u9 + u10;$

LAMPIRAN 8

Perbandingan Grafik Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 10$, $\Delta t = 0,5$ dan $\Delta x = 0,5$

```

clc,clear;
format long
t=0:0.5:200;
x=0:0.5:200;
f = @(x,t) (x-3*t)/(t-1680) + 3;
M=length(t);
N=length(x);
u=zeros(M,N);
n=zeros(M,N);
for i=1:M;
    for j=1:N;
        u(i,j)=- (1/1680)*x(j)+3-(1/2822400*(x(j)-5040))*t(i)-
(1/4741632000*(x(j)-5040))*t(i)^2-(1/7965941760000*(x(j)-
5040))*t(i)^3-(1/13382782156800000*(x(j)-5040))*t(i)^4-
(1/22483074023424000000*(x(j)-5040))*t(i)^5-
(1/37771564359352320000000*(x(j)-5040))*t(i)^6-
(1/634562281237118976000000000*(x(j)-5040))*t(i)^7-
(1/1066064632478359879680000000000*(x(j)-5040))*t(i)^8-
(1/1790988582563644597862400000000000*(x(j)-5040))*t(i)^9-
(1/3008860818706922924408832000000000000*(x(j)-5040))*t(i)^10;
        n(i,j)= f(x(j),t(i));
    end
end

galat=abs(n-u);
glt=max(max(galat))
figure(1)
surf(x,t,u)
xlabel('sumbu x'), ylabel('sumbu t'),zlabel('u')
title('solusi hampiran persamaan shock wave')
shading flat
figure (2)
surf(x,t,n)
xlabel('sumbu x'), ylabel('sumbu t'),zlabel('u')
title('solusi eksak persamaan shock wave')
shading flat
figure(3)
surf(x,t,galat)
xlabel('sumbu x'), ylabel('sumbu t'),zlabel('u')
title('Galat persamaan shock wave')
shading flat

```

Perbandingan Grafik Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 10$, $\Delta t = 0,2$ dan $\Delta x = 0,2$

```

clc,clear;
format long
t=0:0.2:200;
x=0:0.2:200;
f = @(x,t) (x-3*t)/(t-1680) + 3;
M=length(t);
N=length(x);
u=zeros(M,N);

```

```

n=zeros(M,N);
for i=1:M;
    for j=1:N;
        u(i,j)=- (1/1680)*x(j)+3-(1/2822400*(x(j)-5040))*t(i)-
(1/4741632000*(x(j)-5040))*t(i)^2-(1/7965941760000*(x(j)-
5040))*t(i)^3-(1/13382782156800000*(x(j)-5040))*t(i)^4-
(1/22483074023424000000*(x(j)-5040))*t(i)^5-
(1/37771564359352320000000*(x(j)-5040))*t(i)^6-
(1/634562281237118976000000000*(x(j)-5040))*t(i)^7-
(1/106606463247835987968000000000*(x(j)-5040))*t(i)^8-
(1/179098858256364459786240000000000*(x(j)-5040))*t(i)^9-
(1/300886081870692292440883200000000000*(x(j)-5040))*t(i)^10;
        n(i,j)= f(x(j),t(i));
    end
end

galat=abs(n-u);
glt=max(max(galat))
figure(1)
surf(x,t,u)
xlabel('sumbu x'), ylabel('sumbu t'),zlabel('u')
title('solusi hampiran persamaan shock wave')
shading flat
figure (2)
surf(x,t,n)
xlabel('sumbu x'), ylabel('sumbu t'),zlabel('u')
title('solusi eksak persamaan shock wave')
shading flat
figure(3)
surf(x,t,galat)
xlabel('sumbu x'), ylabel('sumbu t'),zlabel('u')
title('Galat persamaan shock wave')
shading flat

```

Perbandingan Grafik Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 15, \Delta t = 0,5$ dan $\Delta x = 0,5$

```

clc,clear;
format long
t=0:0.5:200;
x=0:0.5:200;
f = @(x,t) (x-3*t)/(t-1680) + 3;
M=length(t);
N=length(x);
u=zeros(M,N);
n=zeros(M,N);
for i=1:M;
    for j=1:N;
        u(i,j)=- (1/1680)*x(j)+3-(1/2822400*(x(j)-5040))*t(i)-
(1/4741632000*(x(j)-5040))*t(i)^2-(1/7965941760000*(x(j)-
5040))*t(i)^3-(1/13382782156800000*(x(j)-5040))*t(i)^4-
(1/22483074023424000000*(x(j)-5040))*t(i)^5-
(1/37771564359352320000000*(x(j)-5040))*t(i)^6-
(1/634562281237118976000000000*(x(j)-5040))*t(i)^7-
(1/106606463247835987968000000000*(x(j)-5040))*t(i)^8-
(1/179098858256364459786240000000000*(x(j)-5040))*t(i)^9-
(1/300886081870692292440883200000000000*(x(j)-5040))*t(i)^10-
(1/505488617542763051300683776000000000000*(x(j)-5040))*t(i)^11-

```

```

(1/849220877471841926185148743680000000000000000*(x(j)-
5040))*t(i)^12-
(1/142669107415269443599104988938240000000000000000*(x(j)-
5040))*t(i)^13-
(1/23968410045765266524649638141624320000000000000000*(x(j)-
5040))*t(i)^14-
(1/4026692887688564776141139207792885760000000000000000*(x(j)-
5040))*t(i)^15;
    n(i,j)= f(x(j),t(i));
    end
end

galat=abs(n-u);
glt=max(max(galat))
figure(1)
surf(x,t,u)
xlabel('sumbu x'), ylabel('sumbu t'),zlabel('u')
title('solusi hampiran persamaan shock wave')
shading flat
figure (2)
surf(x,t,n)
xlabel('sumbu x'), ylabel('sumbu t'),zlabel('u')
title('solusi eksak persamaan shock wave')
shading flat
figure(3)
surf(x,t,galat)
xlabel('sumbu x'), ylabel('sumbu t'),zlabel('u')
title('Galat persamaan shock wave')
shading flat

```

Perbandingan Grafik Solusi Eksak dan Solusi Hampiran dengan Orde $n = 15$, $\Delta t = 0,2$ dan $\Delta x = 0,2$

```

clc,clear;
format long
t=0:0.2:200;
x=0:0.2:200;
f = @(x,t) (x-3*t)/(t-1680) + 3;
M=length(t);
N=length(x);
u=zeros(M,N);
n=zeros(M,N);
for i=1:M;
    for j=1:N;
        u(i,j)=- (1/1680)*x(j)+3-(1/2822400*(x(j)-5040))*t(i)-
(1/4741632000*(x(j)-5040))*t(i)^2-(1/7965941760000*(x(j)-
5040))*t(i)^3-(1/13382782156800000*(x(j)-5040))*t(i)^4-
(1/22483074023424000000*(x(j)-5040))*t(i)^5-
(1/37771564359352320000000*(x(j)-5040))*t(i)^6-
(1/634562281237118976000000000*(x(j)-5040))*t(i)^7-
(1/106606463247835987968000000000*(x(j)-5040))*t(i)^8-
(1/179098858256364459786240000000000*(x(j)-5040))*t(i)^9-
(1/300886081870692292440883200000000000*(x(j)-5040))*t(i)^10-
(1/505488617542763051300683776000000000000*(x(j)-5040))*t(i)^11-
(1/849220877471841926185148743680000000000000000*(x(j)-
5040))*t(i)^12-
(1/142669107415269443599104988938240000000000000000*(x(j)-
5040))*t(i)^13-

```

```

(1/23968410045765266524649638141624320000000000000000*(x(j)-
5040))*t(i)^14-
(1/4026692887688564776141139207792885760000000000000000*(x(j)-
5040))*t(i)^15;
    n(i,j)= f(x(j),t(i));
end
end

galat=abs(n-u);
glt=max(galat)
figure(1)
surf(x,t,u)
xlabel('sumbu x'), ylabel('sumbu t'),zlabel('u')
title('solusi hampiran persamaan shock wave')
shading flat
figure(2)
surf(x,t,n)
xlabel('sumbu x'), ylabel('sumbu t'),zlabel('u')
title('solusi eksak persamaan shock wave')
shading flat
figure(3)
surf(x,t,galat)
xlabel('sumbu x'), ylabel('sumbu t'),zlabel('u')
title('Galat persamaan shock wave')
shading flat

```





**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Robi'atul 'Adawiyah
NIM : 12610023
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Persamaan *Shock Wave*
Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si.
Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	08 Maret 2016	Konsultasi Bab I dan II	1.
2.	06 April 2016	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	2.
3.	08 April 2016	Revisi Penulisan Kajian Agama Bab I dan II	3.
4.	12 April 2016	Revisi Bab I dan II	4.
5.	10 Mei 2016	ACC Bab I dan II	5.
6.	24 Mei 2016	Revisi Bab I dan II	6.
7.	21 Juni 2016	Konsultasi Bab III	7.
8.	01 Agustus 2016	Revisi Bab III	8.
9.	08 Agustus 2016	Konsultasi Bab I, II dan III	9.
10.	11 Agustus 2016	Konsultasi Kajian Agama Bab I, II, dan III	10.
11.	07 Desember 2016	ACC Kajian Agama Bab I, II dan Revisi Kajian Agama Bab III	11.
12.	09 Desember 2016	Konsultasi Keseluruhan	12.
13.	13 Desember 2016	ACC Bab III Keagamaan	13.
14.	13 Desember 2016	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 13 Desember 2016

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

RIWAYAT HIDUP



Robi'atul 'Adawiyah, lahir di Kabupaten Lumajang pada tanggal 21 Juni 1994, biasa dipanggil Dewi, tinggal di Jl. Madura No. 19 RT 04 RW 01 dusun Ledok kecamatan Pasirian kabupaten Lumajang. Putri ketiga dari tiga bersaudara, pasangan bapak Sadeli, S.Pd. dan ibu Latifah, S.PdI.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Nurul Islam Pasirian dan lulus pada tahun 2006, setelah itu melanjutkan ke SMP Negeri 01 Pasirian dan lulus pada tahun 2009. Kemudian menempuh pendidikan menengah atas di MAN Jember 1, serta menjadi santri di Pondok Pesantren Miftahul Ulum Kaliwates Jember dan lulus pada tahun 2012. Pada tahun 2012 dia menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, mengambil Jurusan Matematika, serta menjadi santri di Lembaga Tinggi Pesantren Luhur Malang yang berada di Jalan Raya Sumbersari No. 88 Kota Malang.

Selama menjadi mahasiswa, dia pernah mengikuti organisasi intra kampus dalam rangka mengembangkan potensi akademiknya. Dia pernah menjadi bendahara Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika pada periode 2013/2014. Selain itu, dia juga pernah menjadi asisten praktikum pada mata kuliah Pemrograman Komputer II.