FAKTORISASI GRAF KOSET SCHREIER DARI SUBGRUP SEJATI DI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
AHMAD MUHAMMAD MUFTIRRIDHA
NIM. 12610020

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

FAKTORISASI GRAF KOSET SCHREIER DARI SUBGRUP SEJATI DI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Ahmad Muhammad Muftirridha
NIM. 12610020

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

FAKTORISASI GRAF KOSET SCHREIER DARI SUBGRUP SEJATI DI GRUP DIHEDRAL

SKIRPSI

Oleh
Ahmad Muhammad Muftirridha
NIM. 12610020

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 8 November 2016

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
NIP. 19571005 198203 1 006	NIP. 19710420 200003 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
FAKULTAS SAINTEK JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

FAKTORISASI GRAF KOSET SCHREIER DARI SUBGRUP SEJATI DI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Ahmad Muhammad Muftirridha
NIM. 12610020

Telah Dipertahankan di depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 30 November 2016

Penguji Utama	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Hairur Rahman, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D	....
Anggota Penguji	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Ahmad Muhammad Muftirridha
NIM	: 12610020
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Faktorisasi Graf Koset Schreier dari Subgrup Sejati di Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skipsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 8 November 2016
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
510B1ADF617160451
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Ahmad Muhammad Muftirridha
NIM. 12610020

MOTO

" إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا "

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Moh. Zaki HAR dan ibunda Musyarrofah yang selalu memberikan dukungan, motivasi, nasihat, serta doa yang tak pernah putus.

KATA PENGANTAR

Puji syukur alhamdulillah atas segala kekuasaan Allah Swt. yang telah menciptakan makhluk-Nya dalam bentuk yang paling sempurna yakni dengan akal untuk berpikir, dengan lisan untuk berpendapat, dan dengan hati untuk mempertimbangkan mana yang baik dan buruk yang disertai pedoman hidup yaitu al-Quran dan al-Sunnah serta segala karunia-Nya yang berupa rahmat, hidayah dan inayah-Nya. Tak lupa pula penulis haturkan shalawat serta salam kepada nabi Muhammad Saw. insan yang menjadi panutan umat hingga akhir zaman.

Rasa syukur yang tak terhingga atas hidayah dan kekuasaan Allah Swt., akhirnya penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul "Faktorisasi Graf Koset Schreier dari Subgrup Sejati di Grup Dihedral" ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi, penulis tak pernah lepas akan jasa para pembimbing serta arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih penulis ucapkan sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan penyusunan skripsi ini karena tanpa bantuannya penulis tidak akan dapat menyelesaikannya, di antaranya:

1. Prof. Dr. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D, selaku dosen pembimbing I yang telah meluangkan banyak waktunya, memberikan bimbingan, arahan, perbaikan, serta motivasi demi kebaikan skripsi ini.
5. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan dan membagikan ilmunya kepada penulis.
6. Para dosen tercinta yang telah memberikan berbagai ilmu yang bermanfaat di dunia dan akhirat.
7. Ayahanda dan ibunda yang senantiasa memberikan motivasi dan doa yang tak pernah putus sampai saat ini.
8. Seluruh teman-teman khususnya teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2012 yang selalu memberikan dukungan kepada penulis dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi dapat memberikan manfaat bagi penulis maupun pembaca.

Malang, November 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Muftirridha, Ahmad Muhammad. 2016. **Faktorisasi Graf Koset Schreier dari Subgrup Sejati di Grup Dihedral**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Pembimbing: (I) Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D (II) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd.

Kata Kunci: faktorisasi, graf koset Schreier, grup dihedral, koset

Graf koset Schreier merupakan pengembangan teori graf yang diterapkan ke struktur aljabar. Misalkan G suatu grup, $\Omega = \{a_i\}_{i \in I}$ merupakan himpunan pembangkit G, dan H adalah subgrup dari grup G. Graf koset Schreier dari H di G adalah graf dengan himpunan titik G/H dan dua buah koset Hg dan Hg' akan terhubung oleh sisi berarah yang diberi label $a_i \in \Omega$ jika dan hanya jika $Hga_i = Hg'$. Suatu graf dapat difaktorkan menjadi faktor $F_1, F_2, \dots, F_n$ dan $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ merupakan faktorisasi pada graf. Penelitian ini mengkaji tentang faktorisasi pada graf koset Schreier dari subgrup sejati yang terdiri dari $\{1, r, r^2, \dots, r^n\}$ dan $\{1, sr^k\}$ dimana $k = 1,2, \dots, n$ di grup dihedral. Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode kepustakaan dengan langkah awal menentukan subgrup sejati di grup dihedral, menentukan koset, menggambar grafnya, menentukan pola faktorisasinya kemudian membuat konjektur tentang pola faktorisasi graf koset Schreier serta membuktikannya.

Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh pola umum faktorisasi graf koset Schreier dari subgrup sejati yang terdiri dari $\{1, r, r^2, \dots, r^n\}$ dan $\{1, sr^k\}$ dimana $k = 1,2, \dots, n$ di grup dihedral dimana setiap graf koset Schreier dari subgrup tersebut menghasilkan 2 faktor-2.

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan untuk menentukan pola umum faktorisasi graf koset Schreier dari semua subgrup di grup dihedral serta teorema tentang graf koset Schreier dari grup dihedral.

ABSTRACT

Muftirridha, Ahmad Muhammad. 2016. **Factorization of Schreier Coset Graph of Proper Subgroup of Dihedral Group.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D (II) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd.

Keywords: coset, dihedral group, factorization, Schreier coset graph

Schreier coset graph is an expansion of graph theory which applied into abstract algebra. Let G be a group, $\Omega = \{a_i\}_{i\in I}$ is a generating set of group G, and H is a subgroup of G. The Schreier coset graph is a graph with vertex set G/H and two cosets Hg and Hg' are connected with a directed edge from Hg to Hg' and labeled by $a_i \in \Omega$ if and only if $Hga_i = Hg'$. A graph can be factored into $F_1, F_2, \dots, F_n$ and $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ is a factorization of a graph. This research discussed about factorization of Schreier coset graph of proper subset which is constructed by $\{1, r, r^2, \dots, r^n\}$ and $\{1, sr^k\}$ where $k = 1,2, \dots, n,$ is in dihedral group. This research used library research method, the first step is to identify the proper subgroup of dihedral group, then determine the coset, draw the Schreier coset graph, determine the general pattern of that factorization, make conjecture about general pattern of factorization of Schreier coset graph and prove it.

According to the result of this research we obtained that the general pattern of factorization of Schreier coset graph of proper subset $\{1, r, r^2, \dots, r^n\}$ and $\{1, sr^k\}, k = 1,2, \dots, n$ of dihedral group is 2-factor 2.

For the further reseacrh the author suggested to obtain factorization of Schreier coset graph of all proper subset of dihedral group and the other theorem's about Schreier coset graph of dihedral group.

ملخص

مفتى الرضى، أ. م. 2016. تفكيك مخطط coset schreier من زمرة جزئي عن زمرة dihedral. بحث جامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة الحكومية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (1) الدكتور ترمودي الماجستير. (2) وحيو هنك إيراوان الماجستير.

الكالمات الرئيسية: زمرة dihedral، مخطط Schreier coset، coset, factorization

مخطط coset schreier هو التطور في نظريات المخطط الذي يتطبق التركيب الجبر. مثل G هو زمرة. $\Omega = \{a_i\}_{i \in I}$ تجمع المنشط من G و H هو زمرة جزئي من G. مخطط coset schreier هو المخطط بتجمع الرؤوس G/H و Hg coset و Hg’ اتصل بوجه الاتجاه من Hg إلى Hg’ ويسم $a_i \in \Omega$ إذا وفقط إذا $Hga_i = Hg$. يمكن مخطط أن يؤخذ في $F_1, F_2, \dots, F_n$ و $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ هو تفكيك من مخطط. يبحث هذا البحث عن تفكيك على مخطط coset schreier من زمرة جزئي الذي يتكون من $\{1, r, r^2, \dots, r^n\}$و $\{1, sr^k\}$ ل $k = 1,2, \dots, n$ في زمرة dihedral. استعمل هذا البحث الدراسة المكتبية بتثبيت زمرة جزئي في زمرة dihedral وثبت coset ورسم المخطط وثبت أسلوب تفكيكها ثم صنع النظرية عن خصائص العام في مخطط coset schreier ويصح عنه.

ونتائج هذا البحث هي الأسلوب من تفكيك على مخطط coset schreier، حيث ينتج كل مخطط coset schreier من زمرة جزئي في زمرة dihedral هو 2 2-factor.

ارجوا الي الباحثون الحاضر ان يثبت الأسلوب العام من تفكيك مخطط coset schreier من كل زمرة جزئي في زمرة dihedral وجميع انواع النظرية في نظرية المخطط coset schreier في زمرة dihedral.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah salah satu disiplin ilmu yang mendasari berbagai macam disiplin ilmu lain dan selalu menghadapi berbagai persoalan yang semakin kompleks sehingga sangat penting untuk dikaji. Dalam kehidupan sehari-hari, banyak permasalahan yang memerlukan penyelesaian. Dengan bantuan matematika permasalahan tersebut lebih mudah dipahami dan dipecahkan, atau bahkan dapat ditunjukkan bahwa suatu permasalahan tidak dapat dipecahkan. Untuk keperluan tersebut, perlu dicari pokok permasalahannya dan dibuat rumusan atau model matematikanya (Purwanto, 1998:6).

Teori graf merupakan salah satu cabang dari disiplin ilmu matematika yang sangat bermanfaat dalam pengembangan berbagai disiplin ilmu. Pada awalnya perkembangan teori graf tidak terlalu signifikan. Akan tetapi, sejak beberapa puluh tahun silam teori graf mengalami perkembangan yang begitu pesat. Hal ini disebabkan oleh aplikasi dari teori graf yang sangat luas. Teori graf dapat diaplikasikan ke dalam ilmu komputer, teknik, bisnis dan bahkan dalam ilmu sosial. Selain itu, teori graf juga dapat diaplikasikan ke dalam beberapa bidang dalam matematika, seperti geometri dan aljabar (Budayasa, 2007:1).

Dalam penelitian ini akan diuraikan salah satu terapan dari kajian teori graf dalam struktur aljabar. Grup adalah materi dasar dalam struktur aljabar. Suatu himpunan G dengan operasi biner "$*$" dikatakan grup jika operasi $*$ bersifat assosiatif di G, himpunan G memiliki unsur identitas, dan setiap unsur di G

memiliki invers. Terdapat beberapa contoh grup dalam struktur aljabar, di antaranya grup simetri dan grup dihedral. Grup dihedral-$2n$ adalah himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan, dinotasikan dengan D_{2n}, untuk setiap $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ dengan operasi komposisi "$\circ$" yang memenuhi aksioma-aksioma grup (Dummit dan Foote, 1991:25).

Salah satu kajian dalam grup adalah koset. Raisinghania dan Anggarwal (1980) menyatakan bahwa koset merupakan hasil pengoperasian unsur dalam subgrup terhadap unsur di grup. Untuk setiap $a \in G$, maka himpunan $aH = \{a * H; h \in H\}$ merupakan koset kiri dari H dan $Ha = \{h * a; h \in H\}$ adalah koset kanan dari H. Untuk mempermudah dalam mengidentifikasi koset dari suatu subrup, maka dapat dibuat grafnya. Akan tetapi, penulis hanya membahas graf koset Schreier dari semua subgrup sejati dari grup dihedral-$2n$, dimana setiap titik di grafnya merupakan koset dari suatu subgrup H di G dan untuk dua buah koset Hg dan Hg' akan terhubung oleh sisi berarah dari Hg ke Hg' jika dan hanya jika $Hga_i = Hg'$ dengan $a_i \in \Omega$.

Dalam kajian teori graf, terdapat beberapa topik yang menarik untuk dikaji lebih lanjut, seperti faktorisasi pada graf. Chartrand dan Lesniak (1986:229) menyatakan bahwa "faktorisasi graf adalah penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf tersebut". Pada penelitian sebelumnya yang berjudul "Faktorisasi pada Graf Komplit" telah diuraikan tentang bagaimana pola banyaknya faktor yang dapat dibentuk dari suatu graf komplit. Untuk itu peneliti akan mengembangkan faktorisasi graf yang diterapkan ke dalam struktur aljabar, yaitu faktorisasi graf koset Schreier dari subgrup sejati di grup dihedral-$2n$.

Al-Quran merupakan petunjuk untuk menunjukkan kebenaran dan dasar dari sumber pengetahuan bagi umat manusia. Sebagaimana yang dinyatakan oleh Hawwa (1993:31) bahwa al-Quran sebagai sumber pokok hukum Islam, yang merupakan kumpulan wahyu Allah Swt. yang disampaikan kepada Nabi Muhammad Saw. Al-Quran tidak hanya memuat ayat yang membahas tentang agama saja, tetapi juga terdapat ayat *kauniyah*, yaitu ayat yang tentang alam semesta, sehingga diperlukan untuk dilakukan penelitian lebih lanjut guna mengetahui makna dari ayat-ayat al-Quran. Sebagaimana firman Allah Swt. dalam surat Yusuf ayat 111 yang berbunyi:

لَقَدْ كَانَ فِي قَصَصِهِمْ عِبْرَةٌ لِّأُوْلِي ٱلْأَلْبَٰبِ ۗ مَا كَانَ حَدِيثًا يُفْتَرَىٰ وَلَٰكِن تَصْدِيقَ ٱلَّذِي بَيْنَ يَدَيْهِ وَتَفْصِيلَ كُلِّ شَيْءٍ وَهُدًى وَرَحْمَةً لِّقَوْمٍ يُؤْمِنُونَ ﴿١١١﴾

"Sesungguhnya pada kisah-kisah mereka itu terdapat pengajaran bagi orang-orang yang mempunyai akal. Al-Quran itu bukanlah cerita yang dibuat-buat, akan tetapi membenarkan (kitab-kitab) yang sebelumnya dan menjelaskan segala sesuatu, dan sebagai petunjuk dan rahmat bagi kaum yang beriman (QS. Yusuf/12:111)".

Salah satu faktorisasi dalam Islam adalah rukun Islam. Rukun Islam bermakna tiang-tiang atau pilar-pilar agama yang merupakan pondasi yang paling dasar yang wajib dikerjakan oleh seluruh umat muslim. Chartrand dan Lesniak (1986:229) menyatakan bahwa "faktor merupakan subgraf merentang dari suatu graf", sehingga setiap rukun Islam merupakan faktor yang membangun Islam. Sebagaimana sabda nabi Muhammad Saw. dalam hadits riwayat Bukhari Muslim yang berbunyi:

اَ لصَّلاَةُ عِمَادُ الدّيْنِ فَمَنْ اَقَامَهَا فَقَدْ اَقَامَ الدّيْنِ وَمَنْ تَرَكَهَا فَقَدْ هَدَمَ الدّيْن

"Shalat adalah tiang agama. Barangsiapa yang menegakkan shalat, maka berarti ia menegakkan agama dan barang siapa yang meninggalkan shalat berarti ia merobohkan agama" (HR. Bukhari Muslim).

Berdasarkan uraian di atas, maka penelitian ini mengkaji tentang graf yang dibentuk dari grup, dengan judul penelitian "*Faktorisasi Graf Koset Schreier dari Subgrup Sejati dari Grup Dihedral*".

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana faktorisasi graf koset Schreier dari subgrup sejati di grup dihedral-$2n$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui faktorisasi graf koset Schreier dari subgrup sejati di grup dihedral-$2n$.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian, maka manfaat dari penelitian ini dibedakan menjadi beberapa bagian berdasarkan kepentingan beberapa pihak, yaitu:

1. Bagi Penulis

   Penelitian ini diharapkan menjadi pembelajaran untuk memahami dan menentukan pola faktorisasi graf koset Schreier dari subgrup sejati di grup dihedral sehingga dapat menambah dan mengembangkan wawasan ilmu, khusunya dalam kajian koset dari subgrup di grup dihedral dan faktorisasi pada graf.

2. Bagi Mahasiswa

   Penelitian ini diharapkan menjadi sumber referensi pengembangan dalam pembelajaran grup dan teori graf.

3. Bagi Instansi

Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan bahan pustaka. sarana pembelajaran dan bahan pengembangan ilmu matematika, khususnya yang berkaitan dengan grup dan teori graf.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya membahas tentang faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup sejati di grup dihedral, dimana subgrup sejati yang dibahas hanya subgrup sejati yang dibentuk dari $\{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$ dan $\{1, sr^k\}, k = 1,2, \ldots, n$.

1.6 Metode Penelitian

Pada penelitian ini digunakan pendekatan kualitatif. Pendekatan kualitatif adalah suatu pendekatan penelitian yang cenderung pada gejala-gejala yang bersifat alamiah dimana sifatnya naturalistik dan mendasar atau bersifat kealamiahan dan tidak dapat dilakukan di laboratorium tetapi harus dikerjakan langsung dari lapangan (Nazir, 1986:159). Pendekatan kualitatif digunakan oleh peneliti dalam penelitian ini, dikarenakan data yang digunakan dalam penelitian berupa koset dari semua subgrup sejati di grup dihedral-$2n$, dengan $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ dan pendeskripsian data ke dalam bentuk titik dan sisi yang menggambarkan graf koset dari subgrup sejati di grup dihedral-$2n$ dengan $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Dalam penelitian kualitatif kajian teori digunakan sebagai kunci utama penelitian agar menghasilkan penelitian yang sesuai dengan fakta lapangan. Untuk itu jenis penelitian yang digunakan adalah metode kepustakaan (*library research*) yaitu salah satu jenis metode penelitian kualitatif yang lokasi atau tempat penelitiannya dilakukan di pustaka, dokumen, arsip, dan lain sebagainya. Dengan kata lain metode penelitian ini tidak harus terjun ke lapangan untuk melihat fakta yang ada di lapangan (Prastowo, 2011:190). Teknik analisis data yang digunakan penulis dalam penelitian ini meliputi langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi setiap unsur di grup dihedral-$2n$, yaitu D_6, D_8, D_{10}, dan D_{12}.
2. Menentukan tabel *Cayley* dari grup dihedral-$2n$, yaitu D_6, D_8, D_{10}, dan D_{12}.
3. Menentukan subgrup sejati dari grup dihedral-$2n$, yaitu D_6, D_8, D_{10}, dan D_{12}.
4. Menentukan koset dari setiap subgrup sejati dari grup dihedral-$2n$, yaitu D_6, D_8, D_{10}, dan D_{12}.
5. Menggambar graf koset Schreier dari subgrup sejati dari grup dihedral-$2n$, yaitu D_6, D_8, D_{10}, dan D_{12}.
6. Menggambar faktor-faktor graf koset Schreier dari subgrup sejati dari grup dihedral-$2n$, yaitu D_6, D_8, D_{10}, dan D_{12}.
7. Mengamati dan menentukan pola yang terbentuk dari faktorisasi graf koset Schreier grup dihedral-$2n$, yaitu D_6, D_8, D_{10}, dan D_{12}.
8. Membuat konjektur tentang pola faktorisasi graf koset Schreier dari subgrup sejati dari grup dihedral-$2n$.
9. Membuktikan konjektur hingga diperoleh kebenaran pola faktorisasi graf koset Schreier dari subgrup sejati di grup dihedral-$2n$.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam penelitian ini dibagi menjadi 4 bab dan setiap bab memiliki beberapa subbab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini penulis menjelaskan konsep-konsep yang berkaitan dengan dengan penelitian ini, yaitu grup, subgrup, koset, grup simetri, grup dihedral-$2n$, graf, terhubung langsung dan terkait langsung, derajat titik, faktorisasi, dan graf koset Schreier.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini penulis akan menguraikan tentang bagaimana pola faktorisasi graf koset Schreier dari subgrup sejati dari grup dihedral-$2n$.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian ini dan saran yang berhubungan dengan hasil penelitian yang dilakukan.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Grup

2.1.1 Definisi Grup

Raisinghania dan Anggarwal (1980:31) mengatakan bahwa suatu sistem aljabar $(G,*)$ dikatakan grup jika G himpunan tak kosong dan $*$ merupakan operasi biner di G yang memenuhi sifat-sifat berikut.

i. Operasi $*$ bersifat assosiatif

$(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$

ii. G memiliki unsur identitas

Suatu G dikatakan memiliki identitas jika terdapat unsur e di G sehingga

$e * a = a * e = a, \forall a \in G$

iii. Setiap unsur di G memiliki invers

$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e, \forall a \in G$

Contoh 2.1:

$\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Operasi $+$ (penjumlahan) adalah grup karena memenuhi aksioma grup, yaitu:

1. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$. Sehingga operasi $+$ adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}$ atau dengan kata lain, operasi $+$ tertutup di $\mathbb{Z}$.
2. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka $a + (b + c) = (a + b) + c$. Sehingga $\mathbb{Z}$ dengan operasi $+$ (penjumlahan) memenuhi sifat assosiatif.
3. Terdapat unsur identitas yaitu $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

4. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat a^{-1} yaitu $(-a) \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

   Unsur $(-a)$ adalah invers dari a.

2.1.2 Subgrup

Suatu himpunan H dikatakan subgrup dari grup $(G,*)$ jika H subset dari himpunan G serta sifat-sifat yang berlaku di grup juga berlaku di H atau H adalah grup (Raisinghania dan Anggarwal, 1980:165).

Setiap grup pasti memiliki dua subgrup, yaitu himpunan G sendiri dan himpunan yang hanya memuat unsur identitas $\{e\}$, yang dinamakan subgrup trivial. Sedangkan subgrup lain disebut subgrup sejati (Hungerford, 2012:203).

Contoh 2.2:

Diberikan $\{M_6, +\}$ adalah grup, dimana M_6 adalah himpunan modulo-6 dan $+$ merupakan operasi penjumlahan pada modulo.

Unsur yang terdapat di M_6 adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$.

$\bar{0}$ merupakan himpunan dari bilangan yang memiliki sisa 0 jika dibagi dengan 6 atau dapat ditulis dengan $\bar{0} = \{6n, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

$\bar{1}$ merupakan himpunan dari bilangan yang memiliki sisa 1 jika dibagi dengan 6 atau dapat ditulis dengan $\bar{1} = \{6n + 1, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

$\bar{2}$ merupakan himpunan dari bilangan yang memiliki sisa 3 jika dibagi dengan 6 atau dapat ditulis dengan $\bar{2} = \{6n + 2, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

$\bar{3}$ merupakan himpunan dari bilangan yang memiliki sisa 3 jika dibagi dengan 6 atau dapat ditulis dengan $\bar{3} = \{6n + 3, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

$\overline{4}$ merupakan himpunan dari bilangan yang memiliki sisa 4 jika dibagi dengan 6 atau dapat ditulis dengan $\overline{4} = \{6n + 4, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

$\overline{5}$ merupakan himpunan dari bilangan yang memiliki sisa 5 jika dibagi dengan 6 atau dapat ditulis dengan $\overline{5} = \{6n + 5, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

Sehingga subgrup dari M_6 adalah $\{\overline{0}, \overline{3}\}$ dan $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$

1. $S_1 = \{\overline{0}, \overline{3}\}$

   Karena setiap unsur di S_1 juga merupakan unsur di M_6 atau $x \in S_1 \rightarrow x \in M_6$, maka $S_1 \subseteq M_6$. Selanjutnya setiap unsur di S_1 dioperasikan dengan unsur lainnya yang disajikan dalam bentuk tabel berikut.

   Tabel 2.1 Tabel *Cayley* dari Subgrup S_1

$+$	$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{\mathbf{3}}$
$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{\mathbf{3}}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$

   Tabel 2.1 menunjukkan bahwa S_1 bersifat tertutup terhadap operasi $+$ atau operasi $+$ merupakan operasi biner pada S_1.

   1. Operasi $+$ pada modulo bersifat assosiatif di S_1

      Karena $\{M_6, +\}$ adalah grup, maka operasi $+$ bersifat assosiatif M_6, sehingga S_1 juga bersifat assosiatif.

   2. Terdapat unsur identitas di S_1

      $\overline{0}$ merupakan identitas di S_1 karena $\overline{0} + \overline{3} = \overline{3} + \overline{0} = \overline{3}$

   3. Setiap unsur di S_1 memiliki invers

      Invers dari $\overline{3}$ adalah dirinya sendiri, karena $\overline{3} + \overline{3} = \overline{0}$

   Berdasarkan uraian di atas, dapat diketahui bahwa $S_1 \subseteq M_6$ dan S_1 memenuhi semua aksioma grup, sehingga S_1 adalah subgrup dari M_6.

2. $S_2 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$

Karena setiap unsur di S_2 juga merupakan unsur di M_6 atau $x \in S_2 \rightarrow x \in M_6$, maka $S_2 \subseteq M_6$. Selanjutnya setiap unsur di S_2 dioperasikan dengan unsur lainnya yang disajikan dalam bentuk tabel berikut.

Tabel 2.2 Tabel *Cayley* dari Subgrup S_2

$+$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{4}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

Tabel 2.2 menunjukkan bahwa S_2 bersifat tertutup terhadap operasi $+$ atau operasi $+$ merupakan operasi biner pada S_2.

1. Operasi $+$ pada modulo bersifat assosiatif di S_2

   Karena $\{M_6, +\}$ adalah grup, maka operasi $+$ bersifat assosiatif M_6, sehingga S_2 juga bersifat assosiatif.

2. Terdapat unsur identitas di S_2

   $\bar{0}$ merupakan identitas di S_2 karena

   $\bar{0} + \bar{2} = \bar{2} + \bar{0} = \bar{2}$

   $\bar{0} + \bar{4} = \bar{4} + \bar{0} = \bar{4}$

3. Setiap unsur di S_1 memiliki invers

   Invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{4}$, karena $\bar{2} + \bar{4} = \bar{0}$

   Invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{2}$, karena $\bar{4} + \bar{2} = \bar{0}$

Berdasarkan uraian di atas, dapat diketahui bahwa $S_1 \subseteq M_6$ dan S_1 memenuhi semua aksioma grup, sehingga S_1 adalah subgrup dari M_6.

2.1.3 Koset

Misalkan G adalah suatu grup dan H adalah subgrup dari G, dan a adalah sebarang unsur dari grup G. Himpunan $aH = \{a * H; h \in H\}$ adalah koset kiri dari

H dan $Ha = \{h * a; h \in H\}$ adalah koset kanan dari H (Raisinghania dan Anggarwal, 1980:81).

Banyaknya koset kanan (kiri) dari subgrup H di grup G disebut indeks dari subgrup H di grup G atau dapat ditulis dalam bentuk $[G: H]$ (Raisinghania dan Anggarwal, 1980:181).

Contoh 2.3:

Diberikan $\{M_7 - \{\bar{0}\}, \times\}$ adalah grup. $M_7 - \{\bar{0}\} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ dan $\times$ adalah operasi perkalian modulo-7. $H = \{\bar{1}, \bar{6}\}$ merupakan subgrup dari $M_7 - \{0\}$. Sehingga perhitungan untuk memperoleh koset kanan dari subgrup H di G adalah sebagai berikut.

$H \times \bar{1} = \{\bar{1} \times \bar{1}, \bar{6} \times \bar{1}\} = \{\bar{1}, \bar{6}\}$

$H \times \bar{2} = \{\bar{1} \times \bar{2}, \bar{6} \times \bar{2}\} = \{\bar{2}, \bar{5}\}$

$H \times \bar{3} = \{\bar{1} \times \bar{4}, \bar{6} \times \bar{3}\} = \{\bar{3}, \bar{4}\}$

$H \times \bar{4} = \{\bar{1} \times \bar{4}, \bar{6} \times \bar{4}\} = \{\bar{4}, \bar{3}\}$

$H \times \bar{5} = \{\bar{1} \times \bar{5}, \bar{6} \times \bar{5}\} = \{\bar{5}, \bar{2}\}$

$H \times \bar{6} = \{\bar{1} \times \bar{6}, \bar{6} \times \bar{6}\} = \{\bar{6}, \bar{1}\}$

Sehingga koset kanan dari subgrup H adalah $\{\bar{1}, \bar{6}\}$, $\{\bar{2}, \bar{5}\}$, dan $\{\bar{3}, \bar{4}\}$.

2.1.4 Grup Simetri

Misalkan Ω adalah sebarang himpunan tak kosong dan S_Ω adalah himpunan yang memuat semua fungsi-fungsi bijektif dari Ω ke Ω (atau himpunan yang memuat permutasi dari Ω). Himpunan S_Ω dengan operasi komposisi "$\circ$" atau $(S_\Omega, \circ)$ adalah grup. Perhatikan bahwa "$\circ$" merupakan operasi biner pada S_Ω karena jika $\sigma: \Omega \to \Omega$ dan $\tau: \Omega \to \Omega$ adalah fungsi-fungsi bijektif maka $\sigma \circ \tau$ juga fungsi bijektif. Selanjutnya operasi "∘" yang merupakan suatu komposisi fungsi adalah bersifat asosiatif. Identitas dari S_Ω adalah permutasi 1 yang di definisikan oleh $1(a) = a, \forall a \in \Omega$. Untuk setiap $\sigma: \Omega \to \Omega$ maka terdapat fungsi invers yaitu $\sigma^{-1}: \Omega \to \Omega$ yang memenuhi $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1$. Dengan demikian semua aksioma grup grup telah dipenuhi oleh S_Ω dengan operasi $\circ$. Grup $(S_\Omega, \circ)$ disebut sebagai grup simetri pada himpunan Ω (Dummit dan Foote, 1991: 28).

Contoh 2.4:

Grup S_3 adalah grup yang terdiri dari permutasi sebanyak $3! = 6$ unsur, sehingga unsur dari S_3 adalah sebagai berikut

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) = 1$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2\ 3) = (2\ 3)$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (2)(1\ 3) = (1\ 3)$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (3)(1\ 2) = (1\ 2)$$

Jadi grup simetri $S_3 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1), (2\ 3), (1\ 3), (1{,}2)\}$.

2.1.5 Grup Dihedral

Grup dihedral-$2n$ adalah himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan, dinotasikan dengan D_{2n}, untuk setiap $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ dengan operasi komposisi " ∘ " yang memenuhi aksioma-aksioma grup (Dummit dan Foote, 1991:25).

Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh st untuk $s, t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-n, sehingga st adalah fungsi komposisi). Jika s, t akibat permutasi titik berturut-turut σ, τ, maka st akibat dari $\sigma\tau$. Operasi biner pada D_{2n} adalah assosiatif karena fungsi komposisi merupakan fungsi assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1 dan invers dari $s \in D_{2n}$ adalah kebalikan semua putaran dari simetri s (jadi jika s akibat permutasi pada titik σ, s^{-1}akibat dari σ^{-1}) (Dummit dan Foote, 1991:24-25).

Grup dihedral akan digunakan secara ekstensif dalam seluruh teks maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

1. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$
2. $|s| = 2$
3. $s \neq r^i$ untuk semua i
4. $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$, jadi

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

Yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau $k = 1$ dan $0 \leq i \leq n-1$.

5. $sr^i = r^{-1}s$

(Dummit dan Foote, 1991:26).

Contoh 2.5:

Grup dihedral-6 dengan operasi komposisi "∘" (D_6).

Unsur yang terdapat dalam grup dihedral-6 adalah $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$

Dengan menggunakan sifat-sifat grup dihedral, maka hasil operasi setiap unsur dengan unsur lainnya di grup dihedral-6 dapat disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 2.3Tabel Cayley dari Grup D_6

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	1	sr^2	s	sr
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	1	r	sr	sr^2	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	s	r^2	1	r
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	s	sr	r	r^2	1

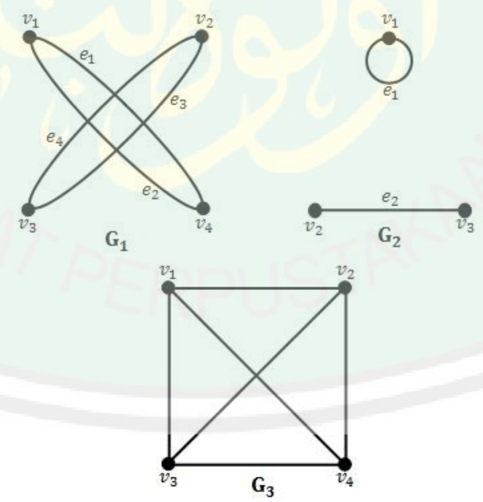
2.2 Graf

2.2.1 Definisi Graf

Suatu Graf G adalah suatu *triple* $(V(G), E(G), \psi_G)$ dimana $V(G)$ merupakan himpunan titik yang tak kosong, himpunan sisi $E(G)$, dan fungsi ψ_G yang menghubungkan setiap sisi terhadap pasangan titik dari G. Jika terdapat suatu sisi $e \in E(G)$ dan titik $u, v \in V(G)$ sehingga $\psi_G(e) = uv$, maka e disebut menghubungkan u dan v. Titik u dan v disebut ujung (*end*) dari e (Bondy dan Murty, 1976:1).

Banyaknya himpunan titik dari graf *G* disebut order di *G* dan biasanya dinotasikan dengan *n(G)* atau lebih sederhana dinotasikan dengan *n*. Sedangkan banyaknya himpunan sisi disebut size (ukuran) dari *G* dan dinotasikan dengan *m(G)* atau *m* (Chartrand dan Lesniak, 1996:1).

Contoh 2.6:



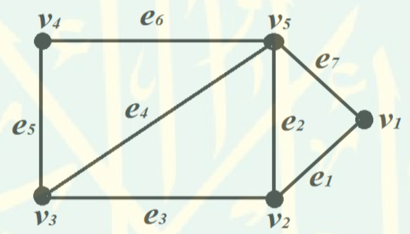
Gambar 2.1 Graf G_1, G_2, dan G_3

Berdasarkan Gambar 2.2, Graf G_1 dan G_2 adalah graf yang tidak sederhana karena pada graf G_1 terdapat dua sisi yang menghubungkan dua titik yang sama, yaitu sisi e_1 dan e_2 yang menghubungkan titik v_1 dan v_4 maupun sisi e_3 dan e_4 yang menghubungkan titik v_2 dan v_3. Sedangkan graf G_2 memuat gelung (*loop*), yaitu pada titik v_1. Graf G_3 adalah graf sederhana karena tidak memuat gelung dan tidak ada dua sisi yang menghubungkan dua titik yang sama.

2.2.2 Terhubung Langsung dan Terkait langsung

Sisi $e = \{u, v\}$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = \{u, v\}$ adalah sisi di graf *G*, maka *u* dan *v* disebut keterhubungan titik (*adjacent vertices*), *u* dan *e* serta *v* dan *e* dikatakan terkait langsung (*incident*). Jika e_1 dan e_2 adalah sisi yang berbeda di *G* yang terkait langsung dengan suatu titik, maka e_1 dan e_2 disebut keterkaitan sisi (*adjacent edges*) (Chartrand dan Lesniak, 1996:1).

Contoh 2.7:



Gambar 2.2 Graf dengan 5 Titik dan 7 Sisi

Gambar 2.3 menunjukkan bahwa titik yang terhubung langsung adalah v_1 dan v_2, v_1 dan v_5, v_2 dan v_3, v_2 dan v_5, v_3 dan v_4, v_3 dan v_5, v_4 dan v_5. Sedangkan sisi e_1 terkait langsung dengan titik v_1 dan v_2, sisi e_2 terkait langsung dengan titik v_2 dan v_5, sisi e_3 terkait langsung dengan titik v_2 dan v_3, sisi e_4 terkait langsung dengan titik v_3 dan v_5, sisi e_5 terkait langsung dengan titik v_3 dan v_4, sisi e_6 terkait langsung dengan titik v_4 dan v_5, sisi e_6 terkait langsung dengan titik v_4 dan v_5.

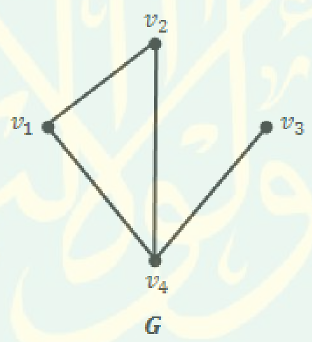
2.2.3 Derajat Titik

Derajat titik v di G dilambangkan dengan $d_G(v)$ adalah banyaknya sisi yang terkait dengan v. Setiap gelung (*loop*) dihitung 2 sisi. Derajat titik minimum di G dilambangkan dengan $\delta(G)$ dan $\Delta(G)$ adalah derajat titik maksimum di G (Bondy dan Murty, 1976:10).

Jika dalam topik pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $d_G(v)$ dapat disingkat menjadi $d(v)$. Titik yang berderajat genap biasanya disebut titik genap (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut titik terasing (*isolated vertices*) dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (*end vertices*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh 2.8:

Misalkan suatu graf G mempunyai 4 titik dan 4 sisi.



Gambar 2.3 Graf Terhubung G

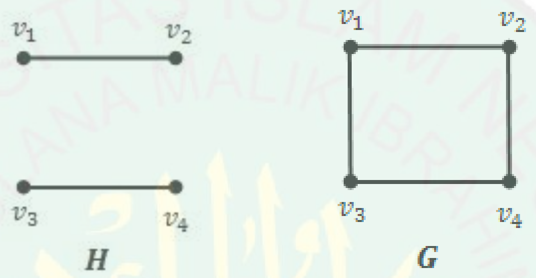
Graf G menunjukkan bahwa derajat titik v_1 atau $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 1$, dan $d(v_4) = 3$.

2.2.4 Subgraf

Graf H disebut subgraf dari graf G (ditulis $H \subseteq G$) jika $V(H) \subseteq V(G)$ atau himpunan titik H merupakan himpunan bagian dari himpunan titik G, $E(H) \subseteq E(G)$ atau himpunan sisi H merupakan himpunan bagian dari himpunan sisi G, dan ψ_H merupakan restriksi dari ψ_G ke $E(H)$ (Bondy dan Murty, 1976:8).

Ketika $H \subseteq G$ tetapi $V(H) \neq V(G)$, ditulis $H \subset G$ dan H disebut subgraf sejati (*proper subgraph*) dari G. Jika H subgraf dari G, G supergraf dari H. Sedangkan subgraf merentang (*spanning subgraph*) dari G adalah subgraf H yang himpunan titiknya sama dengan himpunan titik G, ditulis $V(H) = V(G)$ (Bondy dan Murty, 1976:8).

Contoh 2.9:



Gambar 2.4 Graf H dan Graf G

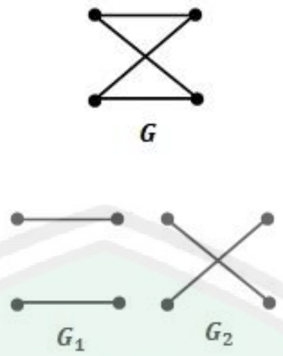
Gambar di atas menunjukkan bahwa graf H merupakan subgraf merentang (*spanning subgraph*) dari graf G, karena himpunan sisi di H sama dengan himpunan sisi di G atau $V(H) = V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$.

2.2.5 Faktorisasi Graf

Subgraf H dikatakan faktor dari graf G jika H subgraf merentang (*spanning subgraph*) dari G. Misalkan G suatu graf yang mungkin memuat gelung (*loop*) dan f sebuah fungsi bilangan bulat tak negatif pada $V(G)$, maka suatu subgraf merentang H dari G dikatakan faktor-2 dari G jika $\deg_H(v) = f(v)$, untuk setiap $v \in V(G)$ (Plummer, 2006:799).

Jika himpunan sisi dari graf G dapat direpresentasikan oleh penjumlahan sisi dari faktor-faktor $F_1, F_2, \ldots, F_k$, maka $\{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ merupakan faktorisasi dari graf G (Plummer, 2006:792).

Contoh 2.10 :



Gambar 2.5 Faktorisasi Graf $\boldsymbol{G}$

Berdasarkan Gambar 2.6, graf G memiliki 4 titik dan 4 sisi. Jika graf G difaktorkan menggunakan faktor-1 maka akan menghasilkan dua buah graf, yaitu graf G_1 dan G_2. Graf G_1 dan G_2 dinamakan faktor-faktor dari graf G.

2.2.6 Graf Koset Schreier

Misalkan G grup dan $\Omega = \{a_i\}_{i\in I}$ himpunan pembangkit dari G dan misalkan $H \leq G$ adalah suatu subgrup. Graf Schreier dari H adalah graf dengan himpunan titik G/H dan sedemikian hingga dua koset Hg dan Hg' terhubung oleh suatu sisi berarah dari Hg ke Hg' dan diberi label pembangkit $a_i \in \Omega$ jika dan hanya jika $Hga_i = Hg'$ (Canizzo, 2014:14).

Contoh 2.11:

Misalkan $(M_5 - \{\bar{0}\},\times)$ adalah grup, dimana $M_5 - \{\bar{0}\} = \{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ dan $\times$ adalah operasi perkalian pada modulo. $\Omega = \{\{\bar{2}\},\{\bar{3}\}\}$ adalah himpunan unsur pembangkit dari grup $(M_5 - \{\bar{0}\},\times)$ dan $H = \{\bar{1},\bar{4}\}$ adalah subgup dari M_5. Perhitungan untuk memperoleh koset dari H adalah sebagai berikut.

$H \times \bar{1} = \{\bar{1} \times \bar{1}, \bar{4} \times \bar{1}\}$

$\quad\quad = \{\bar{1}, \bar{4}\}$

$H \times \bar{2} = \{\bar{1} \times \bar{2}, \bar{4} \times \bar{2}\}$

$= \{\bar{2}, \bar{3}\}$

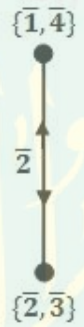
$H \times \bar{3} = \{\bar{1} \times \bar{3}, \bar{4} \times \bar{3}\}$

$= \{\bar{3}, \bar{2}\}$

$H \times \bar{4} = \{\bar{1} \times \bar{4}, \bar{4} \times \bar{4}\}$

$= \{\bar{4}, \bar{1}\}$

Sehingga berdasarkan uraian tersebut, koset dari subgrup H adalah $\{\{\bar{1}, \bar{4}\}, \{\bar{2}, \bar{3}\}\}$ dan apabila dibentuk graf kosetnya maka akan menghasilkan gambar berikut.



Gambar 2.6 Graf Koset dari Subgrup *H*

Gambar 2.7 menunjukkan bahwa titik $\{\bar{1}, \bar{4}\}$ terhubung dengan titik $\{\bar{2}, \bar{3}\}$ oleh suatu sisi yang diberi label $\bar{2}$, karena $\bar{2} \in \Omega$ sehingga $\{\bar{1}, \bar{4}\} \times \bar{2} = \{\bar{2}, \bar{3}\}$ dan $\{\bar{1}, \bar{4}\} \times \bar{3} = \{\bar{2}, \bar{3}\}$. Begitu pula dengan titik $\{\bar{2}, \bar{3}\}$ terhubung dengan titik $\{\bar{1}, \bar{4}\}$ oleh sisi yang diberi label $\bar{2}$, karena $\bar{2} \in \Omega$ sehingga $\{\bar{2}, \bar{3}\} \times \bar{2} = \{\bar{1}, \bar{4}\}$.

2.3 Kajian Agama

Islam secara etimologi berasal dari bahasa arab “*salima*” yang artinya selamat. Sedangkan secara terminologi (istilah) adalah agama yang diturunkan oleh Allah Swt melalui nabi Muhammad Saw. agar disampaikan kepada manusia untuk mengatur hubungan manusia dengan Allah Swt., dengan dirinya dan dengan sesama.

إِنَّ ٱلدِّينَ عِندَ ٱللَّهِ ٱلۡإِسۡلَٰمُۗ

"Sesungguhnya agama (yang diridhai) disisi Allah hanyalah Islam" (QS Ali Imran/3:19).

Ayat di atas menjelaskan bahwa Islam merupakan satu-satunya agama yang diturunkan oleh Allah Swt. Kata "hanyalah Islam" dari makna ayat tersebut menjelaskan bahwa tidak ada agama lain yang diakui oleh Allah Swt. setelah diturunkannya Islam. Sebagaimana firman-Nya dalam al-Quran surat Ali Imran ayat 85 yang berbunyi:

وَمَن يَبۡتَغِ غَيۡرَ ٱلۡإِسۡلَٰمِ دِينٗا فَلَن يُقۡبَلَ مِنۡهُ وَهُوَ فِي ٱلۡأٓخِرَةِ مِنَ ٱلۡخَٰسِرِينَ ٨٥

"Barangsiapa mencari agama selain agama Islam, Maka sekali-kal itidaklah akan diterima (agama itu) daripadanya, dan Dia di akhirat Termasuk orang-orang yang rugi" (QS. Ali Imran/3:85).

Kata "rukun" menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI) adalah hal yang harus dipenuhi untuk sahnya suatu pekerjaan. Misalnya dalam shalat, terdapat rukun yang harus dilakukan agar shalatnya sah dan diterima oleh Allah Swt. Namun makna rukun dalam kata rukun islam diambil dari kata asalnya yang berasal dari bahasa arab, yang berarti tiang.

Dalam al-Quran, tak ada satupun ayat yang menjelaskan secara eksplisit tentang rukun Islam. Akan tetapi, penjelasan mengenai rukun Islam terdapat di dalam sumber ajaran kedua dalam Islam, yaitu al-Sunnah. Dalam hadits nabi Muhammad Saw., terdapat banyak dalil yang menjelaskan tentang rukun Islam. Berikut adalah salah satu hadits yang membahas tentang rukun Islam.

عَنْ أَبِيْ عَبْدِ الرَّحْمَنِ عَبْدِ اللهِ بْنِ عُمَرَ بْنِ الخَطَّابِ رَضِيَ اللهُ عَنْهُمَا قَالَ: سَمِعْتُ النبي ﷺ يَقُوْلُ: (بُنِيَ الإِسْلامُ عَلَى خَمْسٍ: شَهَادَةِ أَنْ لاَ إِلَهَ إِلاَّ اللهُ وَأَنَّ مُحَمَّدًا رَسُوْلُ اللهِ، وَإِقَامِ الصَّلاَةِ، وَإِيْتَاءِ الزَّكَاةِ، وَحَجِّ البَيْتِ، وَصَوْمِ رَمَضَانَ)

"Dari Abu Abdurrahman Abdullah ibn Umar ibn Al Khathab *Radhiallahu 'Anhuma*, dia berkata: 'Aku mendengar Nabi Muhammad Saw. bersabda: Islam dibangun atas lima hal: 1) Kesaksian bahwa tidak ada Ilah kecuali Allah Swt. dan bahwa Muhammad Saw. adalah Rasulullah, 2) menegakkan shalat, 3) menunaikan zakat, 4) haji, dan 5) puasa Ramadhan'".

Hadits tersebut menunjukkan bahwa rukun Islam ada 5, yaitu mengucap dua kalimat syahadat (*syahadatain*), shalat, puasa, zakat, dan haji. Su'ud (2003:169-174) memberikan penjelasan tentang setiap rukun Islam sebagai berikut:

1. *Syahadatain*

Syahadatain terdiri dari dua kalimat syahadat, yaitu syahadat ilahiyah dan syahadat rasul. Syahadat *ilahiyah* adalah pernyataan kesaksian atau pengakuan bahwa tidak ada tuhan yang patut disembah melainkan Allah Swt. Sedangkan syahadat rasul merupakan pernyataan kesaksian bahwa Muhammad Saw. adalah utusan Allah Swt. (Rasulullah). Pernyatan lisan itu paling tidak diucapkan satu kali dalam seumur hidup sebagai pernyataan awal sebagai pemeluk agama Islam. Selain itu, syahadat juga sering disebut dalam ibadah seorang muslim, seperti dalam menunaikan shalat.

2. Shalat

Shalat adalah bentuk ibadah yang dianggap paling penting dan yang pertama kali ditanyakan pada hari perhitungan kelak. Dalam al-Quran, shalat juga sering disebut rukuk, sujud atau tasbih, karena di dalamnya terdiri dari rangkaian rukuk, sujud maupun bacaan tasbih. Rangkaian kegiatan itu dimulai dengan *takbirotul ihram*, yaitu ucapan *allahu akbar* dan diakhiri dengan salam, yaitu bacaan *assalamu'alaikum warahmatullahi wa barakatuh.* Shalat juga sering diartikan sebagai zikir dan doa, karena shalat memang dimaksudkan sebagai cara mengingat Allah Swt. dan berdoa.

Ada dua kategori dalam shalat, yaitu shalat fardu dan shalat sunah. Shalat fardu terdiri dari lima waktu, yaitu shalat subuh (2 rakaat), dzuhur (4 rakaat), ashar (4 rakaat), maghrib (3 rakaat), dan isya' (4 rakaat). Yang dimaksud rakaat adalah satu unit dari shalat yang ditandai adanya rukuk, yakni menundukkan kepala dengan cara merundukkan punggung ke depan sejajar dengan tanah dan kedua tangan bertumpu pada kedua lutut.

Shalat sunah dapat dikelompokkan ke dalam beberapa kondisi. Pertama shalat sunnah dikaitkan dengan shalat fardu, yaitu sebelum dan sesudah shalat fardhu (*qabliyah* dan *ba'diyah*). Kedua, shalat sunah dikaitkan dengan waktu, seperti shalat *dhuha* dan *tahajjud*. Ketiga, shalat sunah dikaitkan dengan kejadian atau peristiwa, seperti shalat Idul Fitri, Idul Adha, *istisqa'* (shalat meminta hujan), *kusuf* (shalat saat gerhana bulan), *khusuf* (shalat saat gerhana matahari), shalat *tarawih* dan *witir* dilakukan pada malam bulan ramadhan setelah shalat isya'. Keempat, shalat sunah dikaitkan dengan harapan tertentu, seperti shalat *tasbih*, shalat *hajat*, dan shalat *istikharah*. Kelima, shalat dikaitkan dengan tempat, seperti shalat *tahiyyatul masjid* saat memasuki masjid, shalat di dekat *maqom* Ibrahim dan *ka'bah*, serta shalat di dalam lingkaran *hijr* Ismail.

3. Puasa

Puasa berarti menahan diri dari perbuatan yang biasanya boleh dilakukan. Puasa itu dilakukan sejak fajar menyingsing hingga terbenamnya matahari. Selama tenggang waktu tersebut seorang muslim tidak diperbolehkan untuk makan, minum, melakukan hubungan intim dengan suami/istri. Seperti halnya shalat, dalam puasa juga terdapat dua kategori, yaitu fardu dan sunah. Puasa fardu dilakukan pada saat bulan Ramadhan, yang lamanya 30 atau 29 hari, tergantung pada posisi benda langit pada waltu tertentu. Selain itu, masih ada puasa fardu yang dilakukan karena janji untuk melakukan puasa jika doanya terkabul yang biasa disebut puasa nazar. Sedangkan puasa sunah dilakukan karena berbagai alasan pula, seperti puasa hari Senin dan Kamis, puasa yang berhubungan dengan peristiwa tertentu, seperti di bulan Muharam, Dzulhijjah, dan pertengahan bulan Sya'ban atau puasa Nabi Daud, yaitu puasa selang-seling setiap dua hari sekali.

4. Zakat

Zakat adalah menyalurkan sebagian harta untuk kepentingan kesejahteraan umat setelah kepemilikan itu mencapai *nishab* (batas minimum) dan *haul* (genap satu tahun). Menurut bahasa, zakat berarti membersihkan diri, dan ini sesuai dengan tujuan zakat yang memang untuk membersihkan dua hal. Pertama, membersihkan harta dari kemungkinan terdapat milik orang lain atau diperoleh dari prosedur tidak bersih. Kedua, zakat dimaksudkan untuk membersihkan diri dari berbagai kekotoran hati.

Sehubungan dengan pengertian tersebut, zakat terbagi atas dua fungsi yaitu zakat fitrah (zakat pribadi) dan zakat *mal* (zakat harta). Zakat fitrah dikeluarkan untuk membersihkan diri bagi yang telah melakukan puasa, supaya kaum fakir dan miskin dapat merayakan Idul Fitri. Kewajiban mengeluarkan zakat fitrah dikenakan bagi setiap muslim pada usia berapapun yang memiliki persediaan minimum sebanyak 3kg bahan makanan pokok. Sedangkan zakat *mal* (harta) wajib dikenakan bagi muslim dengan nilai pendapatan/penghasilan tertentu (sampai nisab) sebagai sarana untuk membersihkan diri.

5. Haji

Secara istilah haji berarti mengunjungi atau berziarah ke *Baitullah*, yaitu *ka'bah*, untuk melakukan ibadah. Ibadah haji diwajibkan sekali seumur hidup, bagi seorang muslim yang *mukallaf* (dewasa) dan mampu, baik dalam hal ksesehatan, dana, maupun fasilitas perjalanan. Pada dasarnya ibadah haji adalah ibadah yang lebih menekankan pada aktifitas gerakan fisik. Dalam ibadah haji hampir tidak dikenal doa atau bacaan baku yang harus dibaca seperti yang terdapat dalam shalat, kecuali bacaan *talbiyah*.

Ibadah haji terdiri dari 2 unit, yaitu *umrah* dan *wuquf* di Arafah. Umrah merupakan unit ibadah yang bisa dilakukan tanpa adanya ibadah haji, yang terdiri dari *tawaf, sa'i,* dan *tahallul*. Sementara *wuquf* dilakukan pada tanggal 9 Dzulhijjah. Lalu diteruskan dengan rangkaian pelontaran *jumrah* selama tanggal 11, 12, dan 13 Dzulhijjah, yang diakhiri dengan *tahallul* dan *tawaf wada'*.

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam pembahasan ini, penulis akan menguraikan unsur yang terdapat dalam grup dihedral-$2n$ (D_{2n}) dan pembangkitnya, kemudian dicari subgrup sejati yang terbentuk dari $\{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$ dan $\{1, sr^k\}$, $k = 1,2, \ldots, n$. Setelah itu, dicari kosetnya dan kemudian digambar graf koset Schreier dari subgrup sejati di grup D_{2n}. Kemudian ditentukan faktorisasi dari setiap graf koset Schreier dari subgrup sejati dari grup D_{2n}.

3.1 Faktorisasi Graf Koset Schreier dari Subgrup Sejati di Grup D_6

Unsur yang terdapat di grup dihedral-6 adalah $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ dengan himpunan pembangkit $\Omega = \{r, s\}$. Untuk mempermudah dalam mencari subset sejati dari grup D_6, berikut akan disajikan tabel *cayley* dari grup D_6 yang diperoleh dengan mengoperasikan setiap unsur yang terdapat di dalam grup tersebut dengan unsur lainnya menggunakan operasi komposisi " ∘ ".

Tabel 3.1 Tabel *Cayley* dari Grup D_6

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	1	sr^2	s	sr
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	1	r	sr	sr^2	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	s	r^2	1	r
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Berdasarkan Tabel 3.1, dapat diperoleh subgrup sejati dari grup D_6, yaitu:

$S_1 = \{1, r, r^2\}$

$S_2 = \{1, s\}$

$S_3 = \{1, sr\}$

$S_4 = \{1, sr^2\}$

Setelah mengetahui subgrup sejati dari grup D_6, akan ditentukan koset dari setiap subset sejati di grup D_6. Untuk mengetahui koset dari subgrup S_1, maka setiap unsur di S_1 dioperasikan dengan semua unsur yang terdapat di D_6.

$S_1 \circ 1 = \{1 \circ 1, r \circ 1, r^2 \circ 1\} = \{1, r, r^2\}$

$S_1 \circ r = \{1 \circ r, r \circ r, r^2 \circ r\} = \{r, r^2, 1\}$

$S_1 \circ r^2 = \{1 \circ r^2, r \circ r^2, r^2 \circ r^2\} = \{r^2, 1, r\}$

$S_1 \circ s = \{1 \circ s, r \circ s, r^2 \circ s\} = \{s, sr^2, sr\}$

$S_1 \circ sr = \{1 \circ sr, r \circ sr, r^2 \circ sr\} = \{sr, s, sr^2\}$

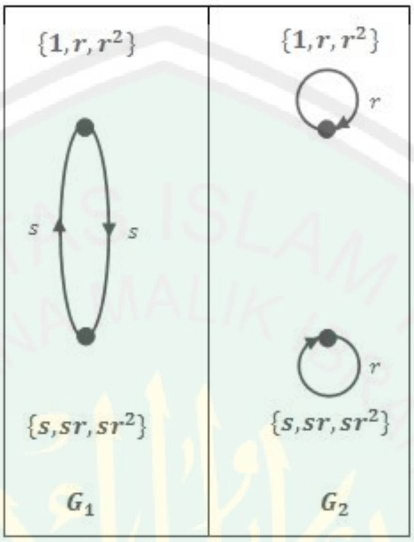
$S_1 \circ sr^2 = \{1 \circ sr^2, r \circ sr^2, r^2 \circ sr^2\} = \{sr^2, sr, s\}$

Berdasarkan uraian tersebut, maka diperoleh himpuan koset dari S_1 adalah $\{\{1, r, r^2\}, \{s, sr, sr^2\}\}$. Setelah mengetahui koset dari S_1, dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup S_1 seperti pada gambar berikut.

Gambar 3.1 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_1 di Grup D_6

Gambar 3.1 menunjukkan bahwa titik $\{1, r, r^2\}$ terhubung ke dirinya sendiri dan titik $\{s, sr, sr^2\}$, karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, r, r^2\} \circ r = \{1, r, r^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, r, r^2\} \circ s = \{s, sr, sr^2\}$. Titik $\{1, s, sr^2\}$ juga terhubung ke dirinya sendiri dan titik $\{1, r, r^2\}$, karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga

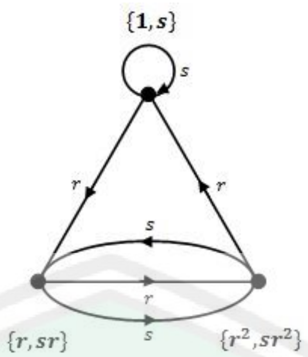
$\{s, sr, sr^2\} \circ r = \{s, sr, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{s, sr, sr^2\} \circ s = \{s, sr, sr^2\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_1 di grup D_6 seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.2 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_1 di Grup D_6

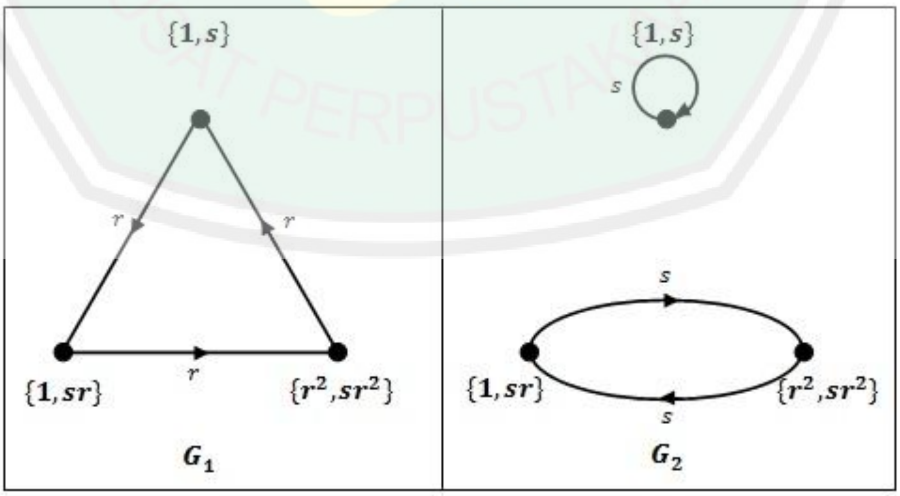
Berdasarkan Gambar 3.2, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_1 dari grup D_6 karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga graf koset Schreier dari subgrup S_1 di grup D_6 apabila difaktorkan menggunakan faktor-2 maka menghasilkan 2 faktor-2 dan penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_1 di grup D_6.

Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_2 adalah $\{\{1, s\}, \{r, sr\}, \{r^2, sr^2\}\}$. Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup S_2 seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.3 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_2 di Grup D_6

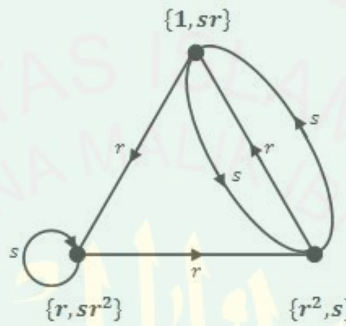
Gambar 3.3 menunjukkan bahwa titik $\{1, s\}$ terhubung ke titik $\{r, sr\}$ oleh sisi r dan terdapat gelung di titik $\{1, s\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, s\} \circ r = \{r, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, s\} \circ s = \{1, s\}$, titik $\{r, sr\}$ terhubung ke titik $\{r^2, sr^2\}$ oleh sisi r dan s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r, sr\} \circ r = \{r^2, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r, sr\} \circ s = \{r^2, sr^2\}$, serta titik $\{r^2, sr^2\}$ terhubung dengan titik $\{1, s\}$ oleh sisi r dan titik $\{r, sr\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^2\} \circ r = \{r, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^2\} \circ s = \{r, sr\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Screiser dari subgrup S_2 di grup D_6.



Gambar 3.4 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_2 di grup D_6

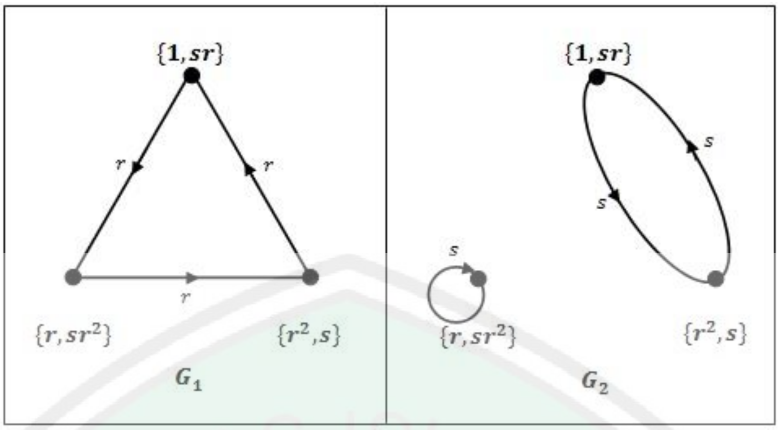
Berdasarkan Gambar 3.4, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_2 dari grup D_6 karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Dan penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_2 di grup D_6.

Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_3 adalah $\{\{1, sr\}, \{r, sr^2\}, \{r^2, sr\}\}$. Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup S_3 seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.5 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_3 di Grup D_6

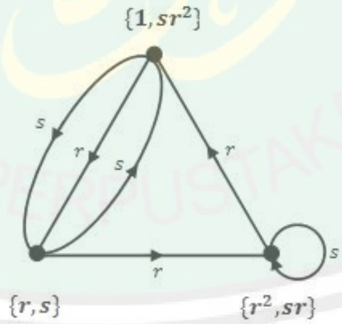
Gambar 3.5 menunjukkan bahwa titik $\{1, sr\}$ terhubung ke titik $\{r, sr^2\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^2, s\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, sr\} \circ r = \{r, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, sr\} \circ s = \{r^2, s\}$, titik $\{r, sr^2\}$ terhubung ke titik $\{r^2, s\}$ oleh sisi r dan terdapat gelung di titik $\{r, sr^2\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^2\} \circ r = \{r^2, s\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^2\} \circ s = \{r, sr^2\}$, serta titik $\{r^2, s\}$ terhubung ke titik $\{1, sr\}$ oleh sisi r dan s, karena karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2, s\} \circ r = \{1, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2, s\} \circ s = \{1, sr\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_3 di grup D_6 seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.6 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_3 di grup D_6

Berdasarkan Gambar 3.6, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_3 dari grup D_6 karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_3 di grup D_6.

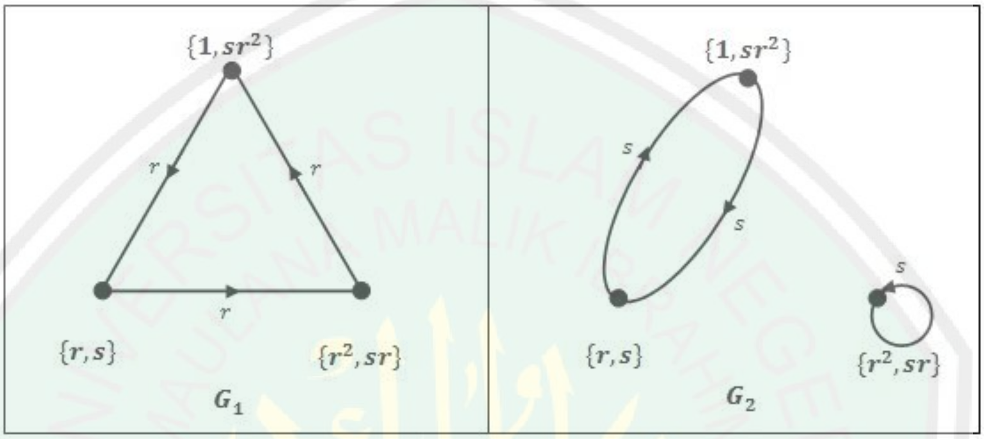
Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_4 adalah $\{\{1, sr^2\}, \{r, s\}, \{r^2, sr\}\}$. Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup S_4 seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.7 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_4 di grup D_6

Gambar 3.7 menunjukkan bahwa titik $\{1, sr^2\}$ terhubung ke titik $\{r, s\}$ oleh sisi r dan sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^2\} \circ r = \{r, s\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^2\} \circ s = \{r, s\}$, titik $\{r, s\}$ terhubung ke titik $\{r^2, sr\}$ oleh sisi r dan titik $\{1, sr^2\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r, s\} \circ r = \{r^2, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r, s\} \circ s = \{1, sr^2\}$, titik $\{r^2, sr\}$ terhubung ke titik

$\{1, sr^2\}$ dan terdapat gelung di titik $\{r^2, sr\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr\} \circ r = \{1, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr\} \circ s = \{r^2, sr\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_4 di grup D_6 seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.8 Faktor Koset Schreier dari Subgrup S_4 di grup D_6

Berdasarkan Gambar 3.8, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_4 dari grup D_6 karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_4 di grup D_6.

Graf koset Schreier dari subgrup sejati $\{1, r, r^2\}$ dan $\{1, sr^k\}, k = 1,2,3$ jika difaktorkan maka menghasilkan 2 faktor-2. Namun Faktor-faktor di atas bukanlah satu-satunya faktor yang dapat dibentuk dari suatu graf koset Schreier yang membentuk faktorisasi pada graf tersebut. Meskipun terdapat beberapa faktorisasi, namun hasilnya tetap sama, yaitu 2 faktor-2.

3.2 Faktorisasi Graf Koset Schreier dari Subgrup Sejati di Grup D_8

Unsur yang terdapat di grup dihedral-8 adalah $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ dengan himpunan pembangkit $\Omega = \{r, s\}$. Untuk mempermudah dalam mencari subset sejati dari grup D_8, berikut akan disajikan tabel *cayley* dari grup D_8 yang diperoleh dengan mengoperasikan setiap unsur yang terdapat di dalam grup tersebut dengan unsur lainnya menggunakan operasi komposisi " $\circ$ ".

Tabel 3.2 Tabel *Cayley* dari Grup D_8

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan Tabel 3.2, dapat diperoleh subgrup sejati dari grup D_8, yaitu:

$S_1 = \{1, r, r^2, r^3\}$

$S_2 = \{1, s\}$

$S_3 = \{1, sr\}$

$S_4 = \{1, sr^2\}$

$S_5 = \{1, sr^3\}$

Setelah mengetahui subgrup sejati dari grup D_8, akan ditentukan koset dari setiap subset sejati di grup D_8. Untuk mengetahui koset dari subgrup S_1, maka setiap unsur di S_1 dioperasikan dengan semua unsur yang terdapat di D_8.

$S_1 \circ 1 = \{1 \circ 1, r \circ 1, r^2 \circ 1, r^3 \circ 1\} = \{1, r, r^2, r^3\}$

$S_1 \circ r = \{1 \circ r, r \circ r, r^2 \circ r, r^3 \circ r\} = \{r, r^2, r^3, 1\}$

$S_1 \circ r^2 = \{1 \circ r^2, r \circ r^2, r^2 \circ r^2, r^3 \circ r^2\} = \{r^2, r^3, 1, r\}$

$S_1 \circ r^3 = \{1 \circ r^3, r \circ r^3, r^2 \circ r^3, r^3 \circ r^3\} = \{r^3, 1, r, r^2\}$

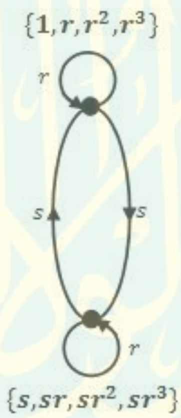
$S_1 \circ s = \{1 \circ s, r \circ s, r^2 \circ s, r^3 \circ s\} = \{s, sr^3, sr^2, sr\}$

$S_1 \circ sr = \{1 \circ sr, r \circ sr, r^2 \circ sr, r^3 \circ sr\} = \{sr, s, sr^3, sr^2\}$

$S_1 \circ sr^2 = \{1 \circ sr^2, r \circ sr^2, r^2 \circ sr^2, r^3 \circ sr^2\} = \{sr^2, sr, s, sr^3\}$

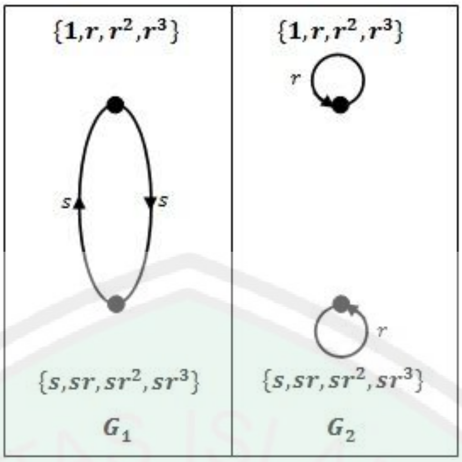
$S_1 \circ sr^3 = \{1 \circ sr^3, r \circ sr^3, r^3 \circ sr^3, r^3 \circ sr^3\} = \{sr^3, sr^2, sr, s\}$

Berdasarkan uraian tersebut, maka dapat diperoleh himpunan koset dari S_1 adalah $\{\{1, r, r^2, r^3\}, \{s, sr, sr^2, sr^3\}\}$. Setelah mengetahui koset dari S_1, dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup S_1 seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.9 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_1 di grup D_8

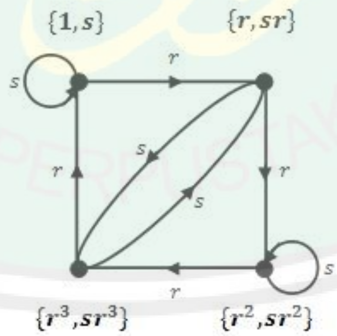
Gambar 3.9 menunjukkan bahwa titik $\{1, r, r^2, r^3\}$ terhubung ke dirinya sendiri dan titik $\{s, sr, sr^2, sr^3\}$, karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, r, r^2, r^3\} \circ r = \{1, r, r^2, r^3\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, r, r^2, r^3\} \circ s = \{s, sr, sr^2, sr^3\}$. Titik $\{1, s, sr^2, sr^3\}$ juga terhubung ke dirinya sendiri dan titik $\{1, r, r^2, r^3\}$, karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{s, sr, sr^2, sr^3\} \circ r = \{s, sr, sr^2, sr^3\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{s, sr, sr^2, sr^3\} \circ s = \{1, r, r^2, r^3\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_1 di grup D_8 seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.10 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_1 di Grup D_8

Berdasarkan Gambar 3.10, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_1 dari grup D_8 karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_1 di grup D_8.

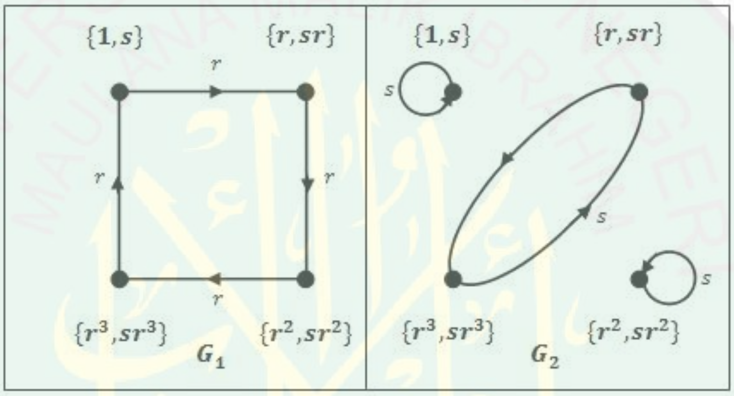
Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_2 adalah $\{\{1, s\}, \{r, sr\}, \{r^2, sr^2\}, \{r^3, sr^3\}\}$. Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup S_2 seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.11 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_2 di Grup D_8

Gambar 3.11 menunjukkan bahwa titik $\{1, s\}$ terhubung ke titik $\{r, sr\}$ oleh sisi r dan terdapat gelung di titik $\{1, s\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, s\} \circ r = \{r, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, s\} \circ s = \{1, s\}$, titik $\{r, sr\}$ terhubung ke titik $\{r^2, sr^2\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^3, sr^3\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r, sr\} \circ r = \{r^2, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r, sr\} \circ s =$

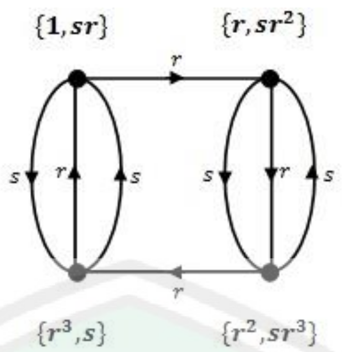
$\{r^3, sr^3\}$, titik $\{r^2, sr^2\}$ terhubung ke titik $\{r^3, sr^3\}$ oleh sisi r dan terdapat gelung di titik $\{r^2, sr^2\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^2\} \circ r = \{r^3, sr^3\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^2\} \circ s = \{r^2, sr^2\}$, serta titik $\{r^3, sr^3\}$ terhubung ke titik $\{1, s\}$ oleh sisi r dan titik $\{r, sr\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr^3\} \circ r = \{1, s\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr^3\} \circ s = \{r^3, sr^3\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_2 di grup D_8 seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.12 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_2 di Grup D_8

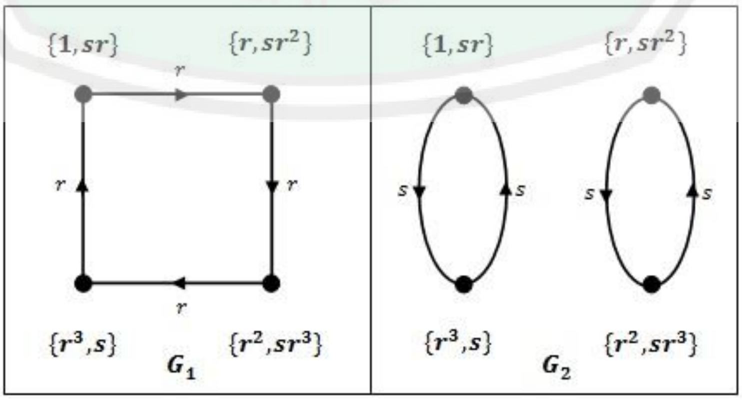
Berdasarkan Gambar 3.12, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_2 dari grup D_8 karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_2 di grup D_8.

Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_3 adalah $\{\{1, sr\}, \{r, sr^2\}, \{r^2, sr^3\}, \{r^3, s\}\}$. Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup S_3 seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.13 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_3 di Grup D_8

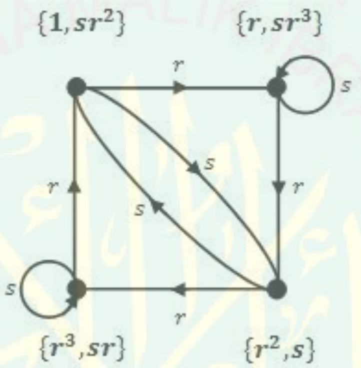
Gambar 3.13 menunjukkan bahwa titik $\{1, sr\}$ terhubung ke titik $\{r, sr^2\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^3, s\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, sr\} \circ r = \{r, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, sr\} \circ s = \{r^3, s\}$, titik $\{r, sr^2\}$ terhubung ke titik $\{r^2, sr^3\}$ oleh sisi r dan s, karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^2\} \circ r = \{r^2, sr^3\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^2\} \circ s = \{r^2, sr^3\}$, titik $\{r^2, sr^3\}$ terhubung ke titik $\{r^3, s\}$ oleh sisi r dan titik $\{r, sr^2\}$ oleh sisi s, karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^3\} \circ r = \{r^3, s\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^3\} \circ s = \{r, sr^2\}$, serta titik $\{r^3, s\}$ terhubung dengan titik $\{1, sr\}$ oleh sisi r dan s, karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^3, s\} \circ r = \{1, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^3, s\} \circ s = \{1, sr\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_3 di grup D_8 seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.14 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_3 di Grup D_8

Berdasarkan Gambar 3.14, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_3 dari grup D_8 karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_3 di grup D_8.

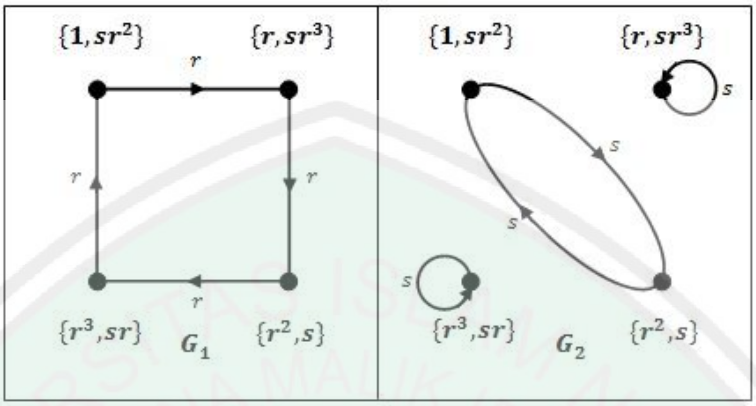
Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_4 adalah $\{\{1, sr^2\}, \{r, sr^3\}, \{r^2, s\}, \{r^3, sr\}\}$. Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup S_4 seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.15 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_4 di Grup D_8

Gambar 3.15 menunjukkan bahwa titik $\{1, sr^2\}$ terhubung ke titik $\{r, sr^3\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^2, s\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^2\} \circ r = \{r, sr^3\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^2\} \circ s = \{r^2, s\}$, titik $\{r, sr^3\}$ terhubung ke titik $\{r^2, s\}$ oleh sisi r dan terdapat gelung di titik $\{r, sr^3\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^3\} \circ r = \{r^2, s\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^3\} \circ s = \{r, sr^3\}$, titik $\{r^2, s\}$ terhubung ke titik $\{r^3, sr\}$ oleh sisi r dan titik $\{1, sr^2\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2, s\} \circ r = \{r^3, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2, s\} \circ s = \{1, sr^2\}$, serta titik $\{r^3, sr\}$ terhubung ke titik $\{1, sr^2\}$ oleh sisi r dan terdapat gelung di titik $\{r^3, sr\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr\} \circ r = \{1, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr\} \circ s =$

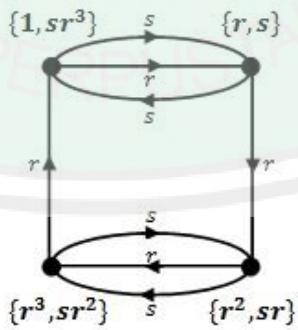
$\{r^3, sr\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_4 di grup D_8 seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.16 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_4 di Grup D_8

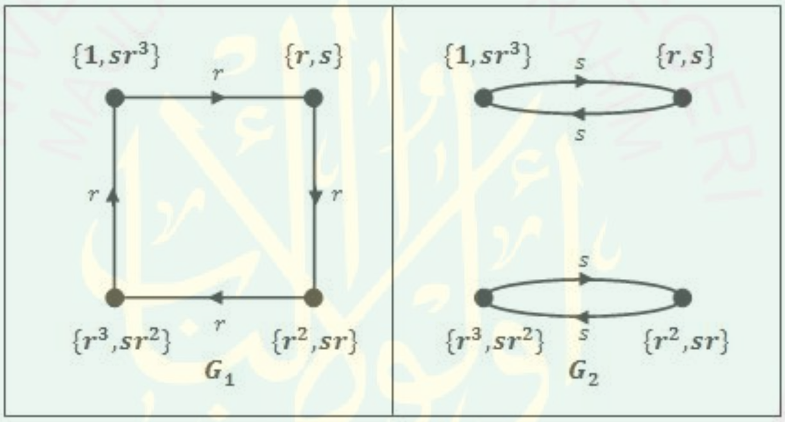
Berdasarkan Gambar 3.16, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_4 dari grup D_8 karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_4 di grup D_8.

Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_5 adalah $\{\{1, sr^3\}, \{r, s\}, \{r^2, sr\}, \{r^3, sr^2\}\}$. Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup S_5 seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.17 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_5 di Grup D_8

Gambar 3.17 menunjukkan bahwa titik $\{1, sr^3\}$ terhubung ke titik $\{r, s\}$ oleh sisi r dan s, karena $r \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^3\} \circ r = \{r, s\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^3\} \circ s = \{r, s\}$, titik $\{r, s\}$ terhubung ke titik $\{r^2, sr\}$ oleh sisi r dan titik $\{1, sr^3\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r, s\} \circ r = \{r^2, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r, s\} \circ s = \{1, sr^3\}$, titik $\{r^2, sr\}$ terhubung ke titik $\{r^3, sr^2\}$ oleh sisi r dan s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr\} \circ r = \{r^3, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr\} \circ s = \{r^3, sr^2\}$, serta titik $\{r^3, sr^2\}$ terhubung ke titik $\{1, sr^3\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^2, sr\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr^2\} \circ r = \{1, sr^3\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr^2\} \circ s = \{r^2, sr\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_5 di grup D_8 seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.18 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_5 di Grup D_8

Berdasarkan Gambar 3.18, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_5 dari grup D_8 karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_5 di grup D_8.

Graf koset Schreier dari subgrup sejati $\{1, r, r^2, r^3\}$ dan $\{1, sr^k\}, k = 1,2,3,4$ jika difaktorkan maka menghasilkan 2 faktor-2. Namun Faktor-faktor di atas bukanlah satu-satunya faktor yang dapat dibentuk dari suatu graf koset Schreier yang membentuk faktorisasi pada graf tersebut. Meskipun terdapat beberapa faktorisasi, namun hasilnya tetap sama, yaitu 2 faktor-2.

3.3 Faktorisasi Graf Koset Schreier dari Subgrup Sejati di Grup D_{10}

Unsur yang terdapat di grup dihedral-10 adalah $D_{10} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$ dengan himpunan pembangkit $\Omega = \{r, s\}$. Untuk mempermudah dalam mencari subset sejati dari grup D_{10}, berikut akan disajikan tabel *cayley* dari grup D_{10} yang diperoleh dengan mengoperasikan setiap unsur yang terdapat di dalam grup tersebut dengan unsur lainnya menggunakan operasi komposisi " $\circ$ ".

Tabel 3.3 Tabel *Cayley* dari Grup D_{10}

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Berdasarkan Tabel 3.3, dapat diperoleh subgrup sejati dari grup D_{10}, yaitu:

$S_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$

$S_2 = \{1, s\}$

$S_3 = \{1, sr\}$

$S_4 = \{1, sr^2\}$

$S_5 = \{1, sr^3\}$

$S_6 = \{1, sr^4\}$

Setelah mengetahui subgrup sejati dari grup D_{10}, akan ditentukan koset dari setiap subset sejati di grup D_{10}. Untuk mengetahui koset dari subgrup S_1, maka setiap unsur di S_1 dioperasikan dengan semua unsur yang terdapat di D_{10}.

$S_1 \circ 1 = \{1 \circ 1, r \circ 1, r^2 \circ 1, r^3 \circ 1, r^4 \circ 1\} = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$

$S_1 \circ r = \{1 \circ r, r \circ r, r^2 \circ r, r^3 \circ r, r^4 \circ r\} = \{r, r^2, r^3, r^4, 1\}$

$S_1 \circ r^2 = \{1 \circ r^2, r \circ r^2, r^2 \circ r^2, r^3 \circ r^2, r^4 \circ r^2\} = \{r^2, r^3, r^4, 1, r\}$

$S_1 \circ r^3 = \{1 \circ r^3, r \circ r^3, r^2 \circ r^3, r^3 \circ r^3, r^4 \circ r^3\} = \{r^3, r^4, 1, r, r^2\}$

$S_1 \circ r^4 = \{1 \circ r^4, r \circ r^4, r^2 \circ r^4, r^3 \circ r^4, r^4 \circ r^4\} = \{r^4, 1, r, r^2, r^3\}$

$S_1 \circ s = \{1 \circ s, r \circ s, r^2 \circ s, r^3 \circ s, r^4 \circ s\} = \{s, sr^4, sr^3, sr^2, sr\}$

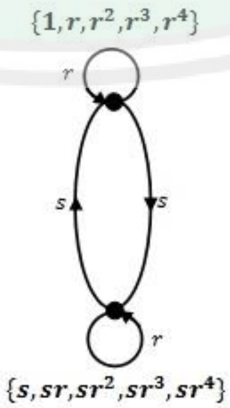
$S_1 \circ sr = \{1 \circ sr, r \circ sr, r^2 \circ sr, r^3 \circ sr, r^4 \circ sr\} = \{sr, s, sr^4, sr^3, sr^2\}$

$S_1 \circ sr^2 = \{1 \circ sr^2, r \circ sr^2, r^2 \circ sr^2, r^3 \circ sr^2, r^4 \circ sr^2\} = \{sr^2, sr, s, sr^4, sr^3\}$

$S_1 \circ sr^3 = \{1 \circ sr^3, r \circ sr^3, r^3 \circ sr^3, r^3 \circ sr^3, r^4 \circ sr^3\} = \{sr^3, sr^2, sr, s, sr^4\}$

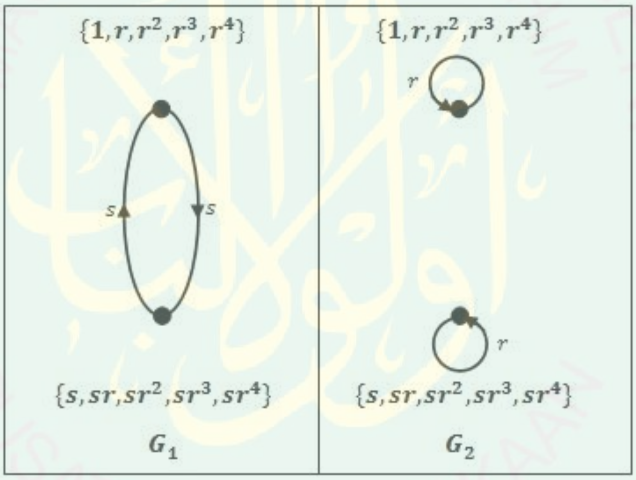
$S_1 \circ sr^4 = \{1 \circ sr^4, r \circ sr^4, r^2 \circ sr^4, r^3 \circ sr^4, r^4 \circ sr^4\} = \{sr^4, sr^3, sr^2, sr, s\}$

Berdasarkan uraian tersebut, maka dapat diperoleh himpunan koset dari subgrup S_1 adalah $\{\{1, r, r^2, r^3, r^4\}, \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}\}$. Setelah mengetahui koset dari S_1, dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup sejati seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.19 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_1 di Grup D_{10}

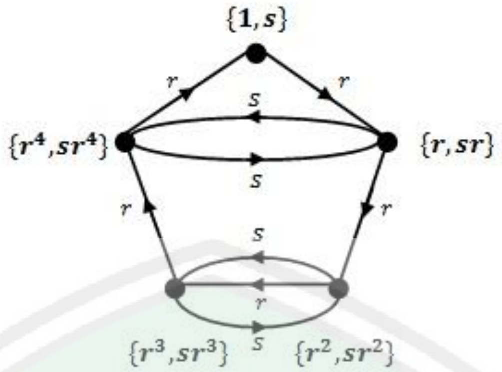
Gambar 3.19 menunjukkan bahwa titik $\{1, r, r^2, r^3, r^4\}$ terhubung ke dirinya sendiri dan titik $\{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$, karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, r, r^2, r^3, r^4\} \circ r = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, r, r^2, r^3, r^4\} \circ s = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Titik $\{1, s, sr^2, sr^3, sr^4\}$ juga terhubung ke dirinya sendiri dan titik $\{1, r, r^2, r^3, r^4\}$, karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\} \circ r = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\} \circ s = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_1 di grup D_{10} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.20 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_1 di Grup D_{10}

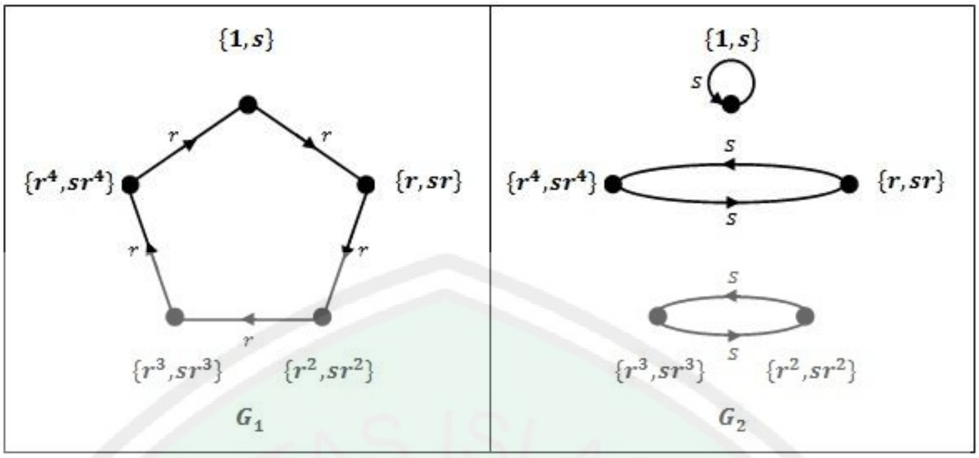
Berdasarkan Gambar 3.20, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_1 dari grup D_{10} karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_1 di grup D_{10}.

Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_2 adalah $\{\{1, s\}, \{r, sr\}, \{r^2, sr^2\}, \{r^3, sr^3\}, \{r^4, sr^4\}\}$. Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup S_2 di grup D_{10} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.21 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_2 di Grup D_{10}

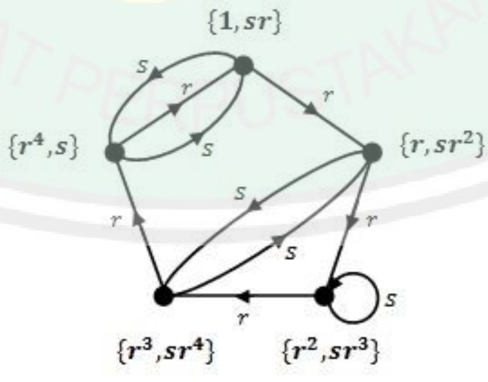
Gambar 3.21 menunjukkan bahwa titik $\{1, s\}$ terhubung ke titik $\{r, sr\}$ oleh sisi r dan terdapat gelung di titik $\{1, s\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, s\} \circ r = \{r, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, s\} \circ s = \{1, s\}$, titik $\{r, sr\}$ terhubung ke titik $\{r^2, sr^2\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^4, sr^4\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r, sr\} \circ r = \{r^2, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r, sr\} \circ s = \{r^4, sr^4\}$, titik $\{r^2, sr^2\}$ terhubung ke titik $\{r^3, sr^3\}$ oleh sisi r dan sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^2\} \circ r = \{r^3, sr^3\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^2\} \circ s = \{r^3, sr^3\}$, titik $\{r^3, sr^3\}$ terhubung ke titik $\{r^4, sr^4\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^2, sr^2\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr^3\} \circ r = \{r^4, sr^4\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr^3\} \circ s = \{r^2, sr^2\}$, serta titik $\{r^4, sr^4\}$ terhubung ke titik $\{1, s\}$ oleh sisi r dan titik $\{r, sr\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr^4\} \circ r = \{1, s\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr^4\} \circ s = \{r, sr\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_2 di grup D_{10} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.22 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_2 di Grup D_{10}

Berdasarkan Gambar 3.22, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_2 dari grup D_{10} karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_2 di grup D_{10}.

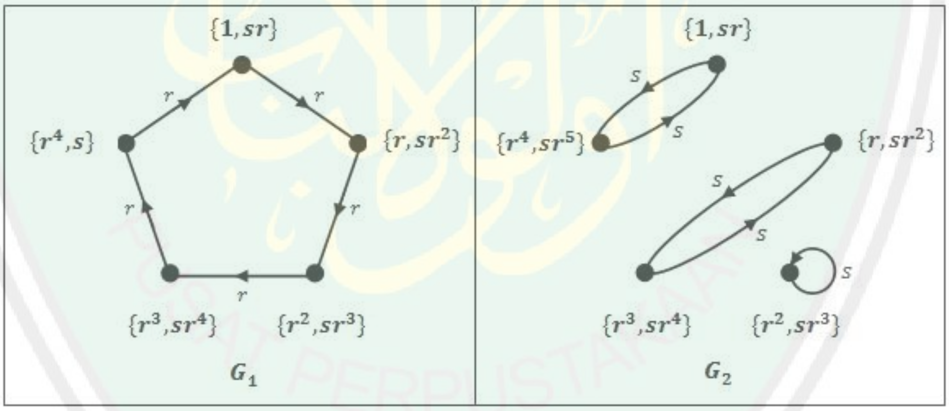
Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_3 adalah $\{\{1, sr\}, \{r, sr^2\}, \{r^2, sr^3\}, \{r^3, sr^4\}, \{r^4, s\}\}$. Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup S_3 di grup D_{10} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.23 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_3 di Grup D_{10}

Gambar 3.23 menunjukkan bahwa titik $\{1, sr\}$ terhubung ke titik $\{r, sr^2\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^4, s\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, sr\} \circ r = \{r, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, sr\} \circ s = \{r^4, s\}$, titik $\{r, sr^2\}$ terhubung ke titik

$\{r^2, sr^3\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^3, sr^4\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^2\} \circ r = \{r^2, sr^3\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^2\} \circ s = \{r^3, sr^4\}$, titik $\{r^2, sr^3\}$ terhubung ke titik $\{r^3, sr^3\}$ oleh sisi r dan terdapat gelung di titik $\{r^2, sr^3\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^3\} \circ r = \{r^3, sr^4\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^3\} \circ s = \{r^2, sr^3\}$, titik $\{r^3, sr^4\}$ terhubung ke titik $\{r^4, s\}$ oleh sisi r dan titik $\{r, sr^2\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr^4\} \circ r = \{r^4, s\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr^4\} \circ s = \{r, sr^2\}$, serta titik $\{r^4, s\}$ terhubung ke titik $\{1, sr\}$ oleh sisi r dan sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^4, s\} \circ r = \{1, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^4, s\} \circ s = \{1, sr\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_3 di grup D_{10} seperti pada gambar berikut.

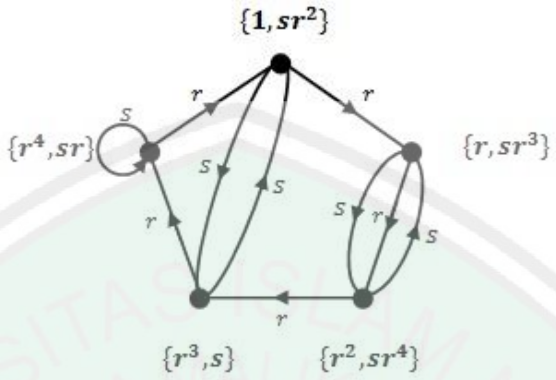


Gambar 3.24 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_3 di Grup D_{10}

Berdasarkan Gambar 3.24, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_3 dari grup D_{10} karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_3 di grup D_{10}.

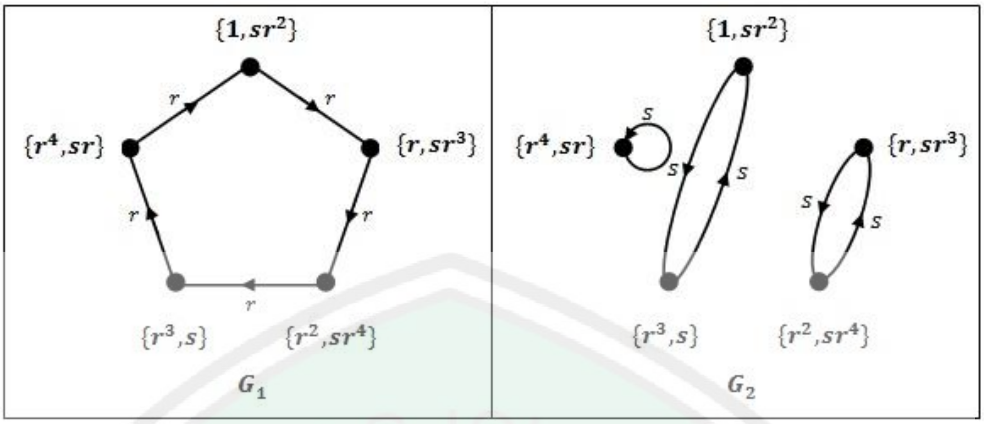
Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_4 adalah $\{\{1, sr^2\}, \{r, sr^3\}, \{r^2, sr^4\}, \{r^3, s\}, \{r^4, sr\}\}$.

Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup S_4 di grup D_{10} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.25 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_4 di Grup D_{10}

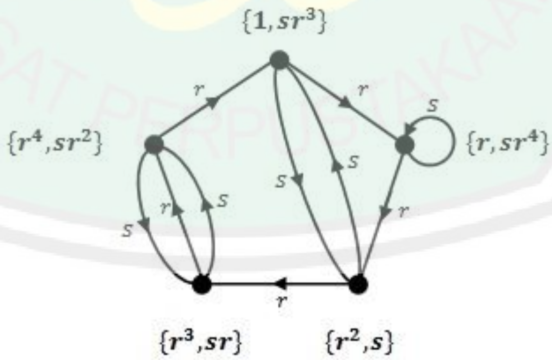
Gambar 3.25 menunjukkan bahwa titik $\{1, sr^2\}$ terhubung ke titik $\{r, sr^3\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^3, s\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^2\} \circ r = \{r, sr^3\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^2\} \circ s = \{r^3, s\}$, titik $\{r, sr^3\}$ terhubung ke titik $\{r^2, sr^4\}$ oleh sisi r dan sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^3\} \circ r = \{r^2, sr^4\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^3\} \circ s = \{r^2, sr^4\}$, titik $\{r^2, sr^4\}$ terhubung ke titik $\{r^3, s\}$ oleh sisi r dan titik $\{r, sr^3\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^4\} \circ r = \{r^3, s\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^4\} \circ s = \{r, sr^3\}$, titik $\{r^3, s\}$ terhubung ke titik $\{r^4, sr\}$ oleh sisi r dan titik $\{1, sr^2\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^3, s\} \circ r = \{r^4, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^3, s\} \circ s = \{1, sr^2\}$, serta titik $\{r^4, sr\}$ terhubung ke titik $\{1, sr^2\}$ oleh sisi r dan terdapat gelung di titik $\{r^4, sr\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr\} \circ r = \{1, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr\} \circ s = \{r^4, sr\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_4 di grup D_{10} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.26 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_4 di Grup D_{10}

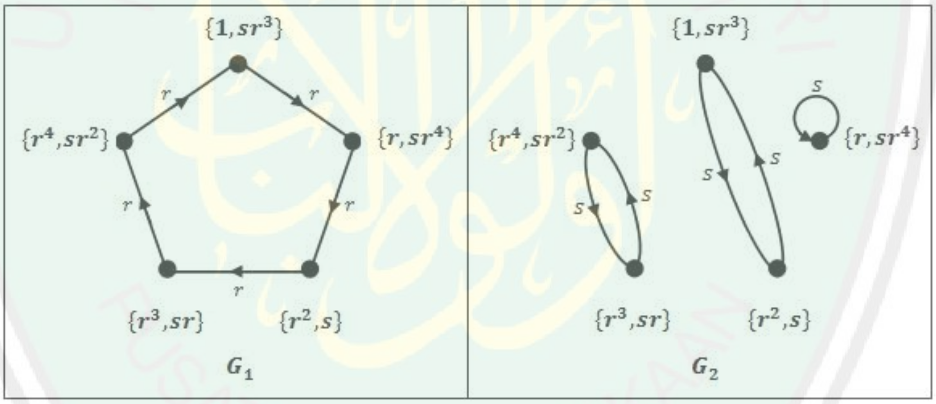
Berdasarkan Gambar 3.26, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_4 dari grup D_{10} karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_4 di grup D_{10}.

Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_5 adalah $\{\{1, sr^3\}, \{r, sr^4\}, \{r^2, s\}, \{r^3, sr\}, \{r^4, sr^2\}\}$. Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup S_5 di grup D_{10} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.27 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_5 di Grup D_{10}

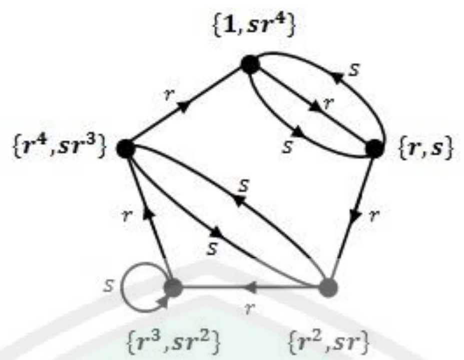
Gambar 3.27 menunjukkan bahwa titik $\{1, sr^3\}$ terhubung ke titik $\{r, sr^4\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^2, s\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^3\} \circ r = \{r, sr^4\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^3\} \circ s = \{r^2, s\}$, titik $\{r, sr^4\}$ terhubung ke titik $\{r^2, s\}$ oleh sisi r dan terdapat gelung di titik $\{r, sr^4\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^4\} \circ r = \{r^2, s\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^4\} \circ s = \{r, sr^4\}$, titik $\{r^2, s\}$ terhubung ke titik $\{r^3, sr\}$ oleh sisi r dan titik $\{1, sr^3\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2, s\} \circ r = \{r^3, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2, s\} \circ s = \{1, sr^3\}$, titik $\{r^3, sr\}$ terhubung ke titik $\{r^4, sr^2\}$ oleh sisi r dan sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr\} \circ r = \{r^4, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr\} \circ s = \{r^4, sr^2\}$, serta titik $\{r^4, sr^2\}$ terhubung ke titik $\{1, sr^3\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^3, sr\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr^2\} \circ r = \{1, sr^3\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr^2\} \circ s = \{r^3, sr\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_5 di grup D_{10} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.28 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_5 di Grup D_{10}

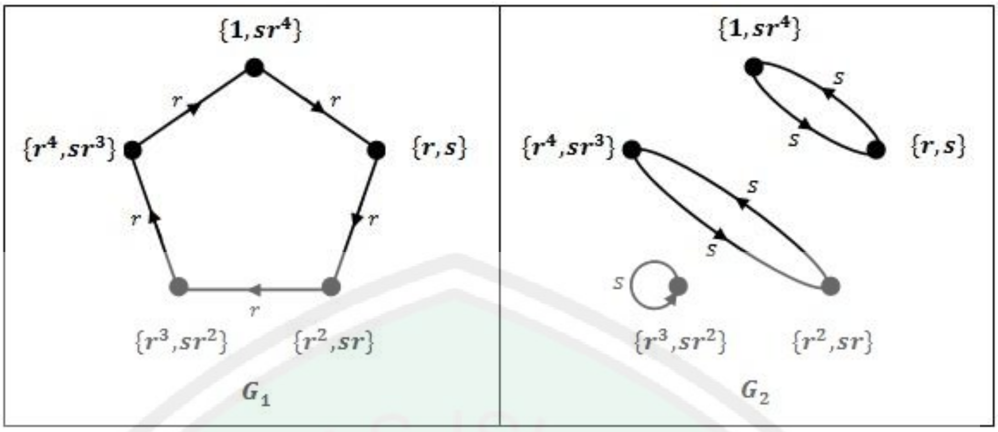
Berdasarkan Gambar 3.28, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_5 dari grup D_{10} karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_5 di grup D_{10}.

Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_6 adalah $\{\{1, sr^4\}, \{r, s\}, \{r^2, sr\}, \{r^3, sr^2\}, \{r^4, sr^3\}\}$. Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup S_6 di grup D_{10} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.29 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_6 di Grup D_{10}

Gambar 3.29 menunjukkan bahwa titik $\{1, sr^4\}$ terhubung ke titik $\{r, s\}$ oleh sisi r dan sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^4\} \circ r = \{r, s\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^4\} \circ s = \{r, s\}$, titik $\{r, s\}$ terhubung ke titik $\{r^2, sr\}$ oleh sisi r dan titik $\{1, sr^4\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r, s\} \circ r = \{r^2, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r, s\} \circ s = \{1, sr^4\}$, titik $\{r^2, sr\}$ terhubung ke titik $\{r^3, sr^2\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^4, sr^3\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr\} \circ r = \{r^3, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr\} \circ s = \{r^4, sr^3\}$, titik $\{r^3, sr^2\}$ terhubung ke titik $\{r^4, sr^3\}$ oleh sisi r dan terdapat gelung di titik $\{r^3, sr^2\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr^2\} \circ r = \{r^4, sr^3\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr^2\} \circ s = \{r^3, sr^2\}$, serta titik $\{r^4, sr^3\}$ terhubung ke titik $\{1, sr^4\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^2, sr\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr^3\} \circ r = \{1, sr^4\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr^3\} \circ s = \{r^2, sr\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_6 di grup D_{10} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.30 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_6 di Grup D_{10}

Berdasarkan Gambar 3.30, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_6 dari grup D_{10} karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_6 di grup D_{10}.

Graf koset Schreier dari subgrup sejati $\{1, r, r^2, r^3, r^4\}$ dan $\{1, sr^k\}, k = 1,2, \ldots, 5$ jika difaktorkan maka menghasilkan 2 faktor-2. Namun Faktor-faktor di atas bukanlah satu-satunya faktor yang dapat dibentuk dari suatu graf koset Schreier yang membentuk faktorisasi pada graf tersebut. Meskipun terdapat beberapa faktorisasi, namun hasilnya tetap sama, yaitu 2 faktor-2.

3.4 Faktorisasi Graf Koset Schreier dari Subgrup Sejati di Grup D_{12}

Unsur yang terdapat di grup dihedral-12 adalah $D_{12} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$ dengan himpunan pembangkit $\Omega = \{r, s\}$. Untuk mempermudah dalam mencari subset sejati dari grup D_{12}, berikut akan disajikan tabel *cayley* dari grup D_{12} yang diperoleh dengan mengoperasikan setiap unsur yang terdapat di dalam grup tersebut dengan unsur lainnya menggunakan operasi komposisi " $\circ$ ".

Tabel 3.4 Tabel *Cayley* dari Grup D_{12}

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Berdasarkan Tabel 3.4, dapat diperoleh subgrup sejati dari grup D_{12}, yaitu:

$S_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$

$S_2 = \{1, s\}$

$S_3 = \{1, sr\}$

$S_4 = \{1, sr^2\}$

$S_5 = \{1, sr^3\}$

$S_6 = \{1, sr^4\}$

$S_7 = \{1, sr^5\}$

Setelah mengetahui subgrup sejati dari grup D_{12}, akan ditentukan koset dari setiap subset sejati di grup D_{12}. Untuk mengetahui koset dari subgrup S_1, maka setiap unsur di S_1 dioperasikan dengan semua unsur yang terdapat di D_{12}.

$S_1 \circ 1 \quad = \{1 \circ 1, r \circ 1, r^2 \circ 1, r^3 \circ 1, r^4 \circ 1, r^5 \circ 1\} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$

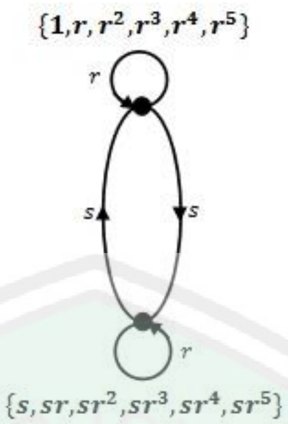
$S_1 \circ r \quad = \{1 \circ r, r \circ r, r^2 \circ r, r^3 \circ r, r^4 \circ r, r^5 \circ r\} = \{r, r^2, r^3, r^4, r^5, 1\}$

$S_1 \circ r^2 \quad = \{1 \circ r^2, r \circ r^2, r^2 \circ r^2, r^3 \circ r^2, r^4 \circ r^2, r^5 \circ r^2\}$

$= \{r^2, r^3, r^4, r^5, 1, r\}$

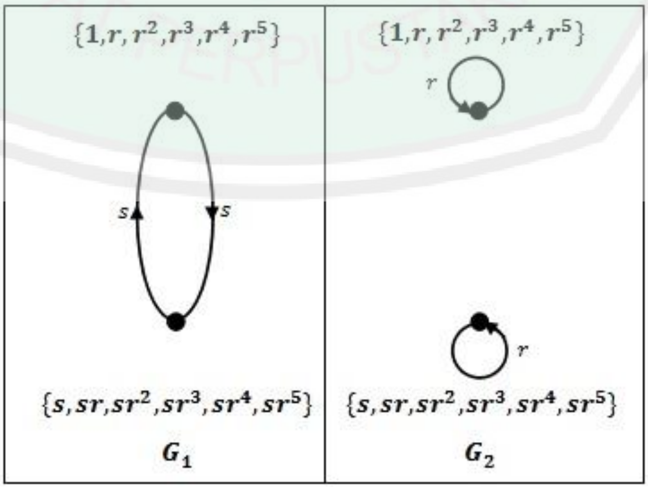
$$
\begin{aligned}
S_1 \circ r^3 &= \{1 \circ r^3, r \circ r^3, r^2 \circ r^3, r^3 \circ r^3, r^4 \circ r^3, r^5 \circ r^3\} \\
&= \{r^3, r^4, r^5, 1, r, r^2\} \\
S_1 \circ r^4 &= \{1 \circ r^4, r \circ r^4, r^2 \circ r^4, r^3 \circ r^4, r^4 \circ r^4, r^5 \circ r^4\} \\
&= \{r^4, r^5, 1, r, r^2, r^3\} \\
S_1 \circ r^5 &= \{1 \circ r^5, r \circ r^5, r^5 \circ r^5, r^3 \circ r^5, r^4 \circ r^5, r^5 \circ r^5\} \\
&= \{r^5, 1, r, r^2, r^3, r^4\} \\
S_1 \circ s &= \{1 \circ s, r \circ s, r^2 \circ s, r^3 \circ s, r^4 \circ s, r^5 \circ s\} = \{s, sr^5, sr^4, sr^3, sr^2, sr\} \\
S_1 \circ sr &= \{1 \circ sr, r \circ sr, r^2 \circ sr, r^3 \circ sr, r^4 \circ sr, r^5 \circ sr\} \\
&= \{sr, s, sr^5, sr^4, sr^3, sr^2\} \\
S_1 \circ sr^2 &= \{1 \circ sr^2, r \circ sr^2, r^2 \circ sr^2, r^3 \circ sr^2, r^4 \circ sr^2, r^5 \circ sr^2\} \\
&= \{sr^2, sr, s, sr^5, sr^4, sr^3\} \\
S_1 \circ sr^3 &= \{1 \circ sr^3, r \circ sr^3, r^3 \circ sr^3, r^3 \circ sr^3, r^4 \circ sr^3, r^5 \circ sr^3\} \\
&= \{sr^3, sr^2, sr, s, sr^5, sr^4\} \\
S_1 \circ sr^4 &= \{1 \circ sr^4, r \circ sr^4, r^2 \circ sr^4, r^3 \circ sr^4, r^4 \circ sr^4, r^5 \circ sr^4\} \\
&= \{sr^4, sr^3, sr^2, sr, s, sr^5\} \\
S_1 \circ sr^5 &= \{1 \circ sr^5, r \circ sr^5, r^5 \circ sr^5, r^3 \circ sr^5, r^4 \circ sr^5, r^5 \circ sr^5\} \\
&= \{sr^5, sr^4, sr^3, sr^2, sr, s\}
\end{aligned}
$$

Berdasarkan uraian tersebut, maka dapat diperoleh himpunan koset dari S_1 adalah $\{\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}, \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}\}$. Setelah mengetahui koset dari S_1, dibuat graf koset Schreier dari subgrup S_1 di D_{12} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.31 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_1 di Grup D_{12}

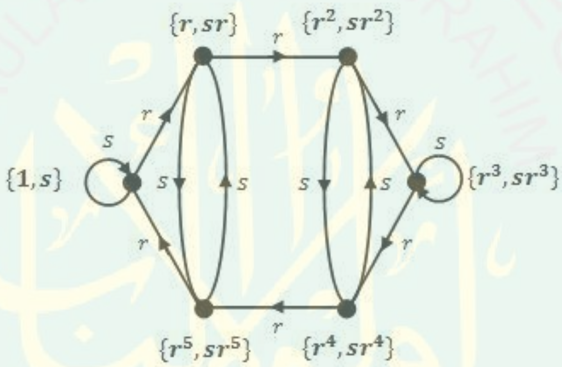
Gambar 3.31 menunjukkan bahwa titik $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ terhubung ke dirinya sendiri dan titik $\{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$, karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\} \circ r = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\} \circ s = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Titik $\{1, s, sr^2, sr^3, sr^4\}$ juga terhubung ke dirinya sendiri dan titik $\{1, r, r^2, r^3, r^4\}$, karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\} \circ r = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\} \circ s = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_1 di grup D_{12} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.32 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_1 di Grup D_{12}

Berdasarkan Gambar 3.32, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_1 dari grup D_{12} karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_1 di grup D_{12}.

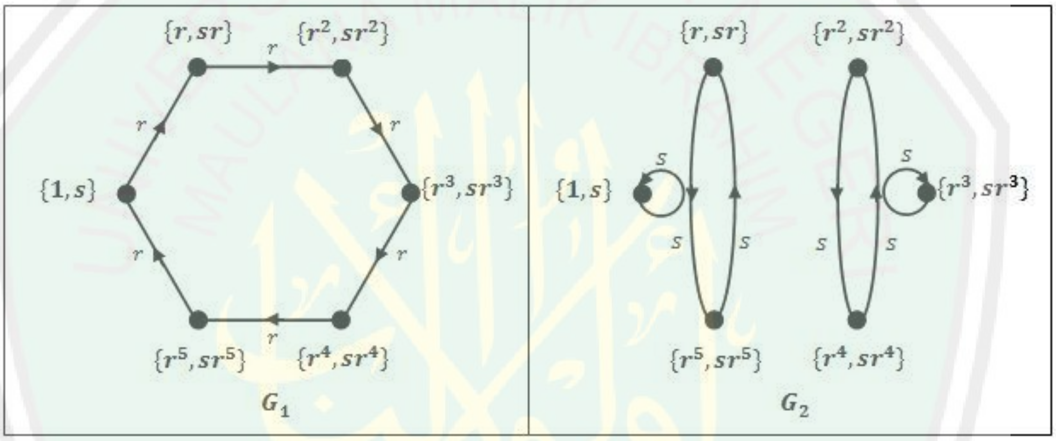
Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_2 $\{\{1,s\},\{r,sr\},\{r^2,sr^2\},\{r^3,sr^3\},\{r^4,sr^4\},\{r^5,sr^5\}\}$. Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup sejati S_2 di grup D_{12} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.33 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_2 di Grup D_{12}

Gambar 3.33 menunjukkan bahwa titik $\{1,s\}$ terhubung ke titik $\{r,sr\}$ oleh sisi r dan terdapat gelung di titik $\{1,s\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1,s\} \circ r = \{r,sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1,s\} \circ s = \{1,s\}$, titik $\{r,sr\}$ terhubung ke titik $\{r^2,sr^2\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^5,sr^5\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r,sr\} \circ r = \{r^2,sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r,sr\} \circ s = \{r^5,sr^5\}$, titik $\{r^2,sr^2\}$ terhubung ke titik $\{r^3,sr^3\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^4,sr^4\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2,sr^2\} \circ r = \{r^3,sr^3\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2,sr^2\} \circ s = \{r^4,sr^4\}$, titik $\{r^3,sr^3\}$ terhubung ke titik $\{r^4,sr^4\}$ oleh sisi r dan terdapat gelung di titik $\{r^3,sr^3\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^3,sr^3\} \circ r = \{r^4,sr^4\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^3,sr^3\} \circ s =$

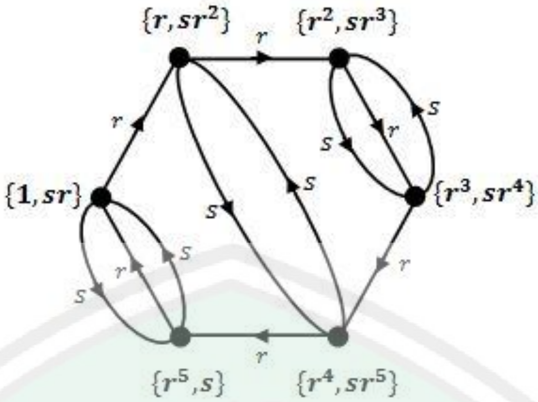
$\{r^3, sr^3\}$, titik $\{r^4, sr^4\}$ terhubung ke titik $\{r^5, sr^5\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^2, sr^2\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr^4\} \circ r = \{r^5, sr^5\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr^4\} \circ s = \{r^2, sr^2\}$, serta titik $\{r^5, sr^5\}$ terhubung ke titik $\{1, s\}$ oleh sisi r dan titik $\{r, sr\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^5, sr^5\} \circ r = \{1, s\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^5, sr^5\} \circ s = \{r, sr\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_2 di grup D_{12} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.34 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_2 di Grup D_{12}

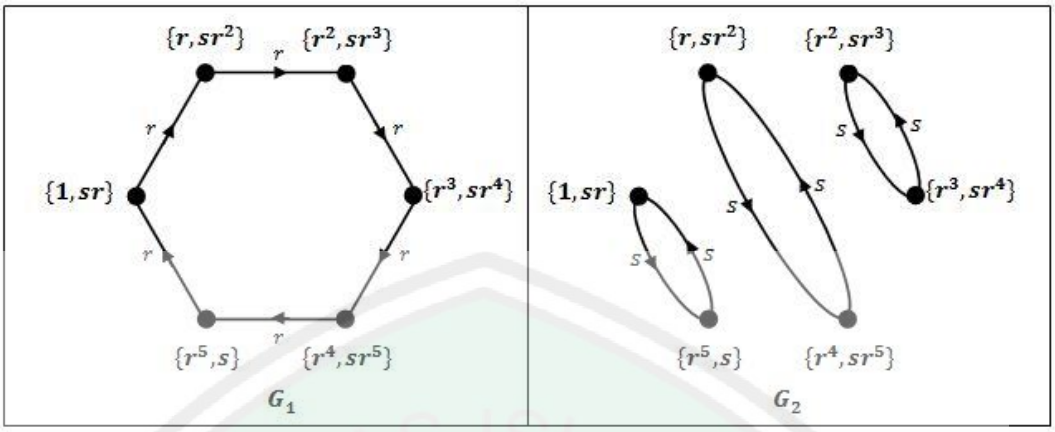
Berdasarkan Gambar 3.34, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_2 dari grup D_{12} karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_2 di grup D_{12}.

Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_3 $\{\{1, sr\}, \{r, sr^2\}, \{r^2, sr^3\}, \{r^3, sr^4\}, \{r^4, sr^5\}, \{r^5, s\}\}$. Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup sejati S_3 di grup D_{12} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.35 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_3 di Grup D_{12}

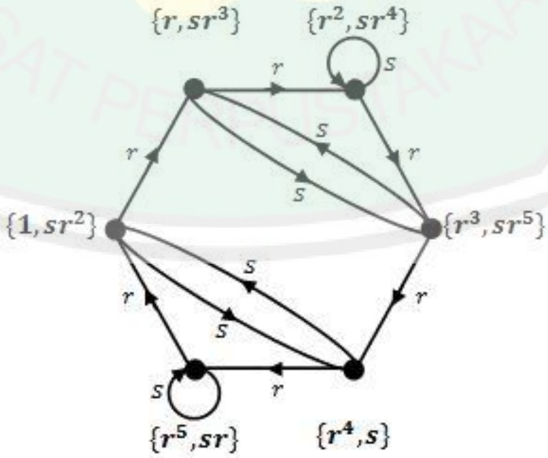
Gambar 3.35 menunjukkan bahwa titik $\{1, sr\}$ terhubung ke titik $\{r, sr^2\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^5, s\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, sr\} \circ r = \{r, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, sr\} \circ s = \{r^5, s\}$, titik $\{r, sr^2\}$ terhubung ke titik $\{r^2, sr^3\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^4, sr^5\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^2\} \circ r = \{r^2, sr^3\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^2\} \circ s = \{r^4, sr^5\}$, titik $\{r^2, sr^3\}$ terhubung ke titik $\{r^3, sr^4\}$ oleh sisi r dan sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^3\} \circ r = \{r^3, sr^4\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^3\} \circ s = \{r^3, sr^4\}$, titik $\{r^3, sr^4\}$ terhubung ke titik $\{r^4, sr^5\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^2, sr^3\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr^4\} \circ r = \{r^4, sr^5\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr^4\} \circ s = \{r^2, sr^3\}$, titik $\{r^4, sr^5\}$ terhubung ke titik $\{r^5, s\}$ oleh sisi r dan titik $\{r, sr^2\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr^5\} \circ r = \{r^5, s\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr^5\} \circ s = \{r, sr^2\}$, serta titik $\{r^5, s\}$ terhubung ke titik $\{1, sr\}$ oleh sisi r dan sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^5, s\} \circ r = \{1, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^5, s\} \circ s = \{1, sr\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_3 di grup D_{12} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.36 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_3 di Grup D_{12}

Berdasarkan Gambar 3.36, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_3 dari grup D_{12} karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_3 di grup D_{12}.

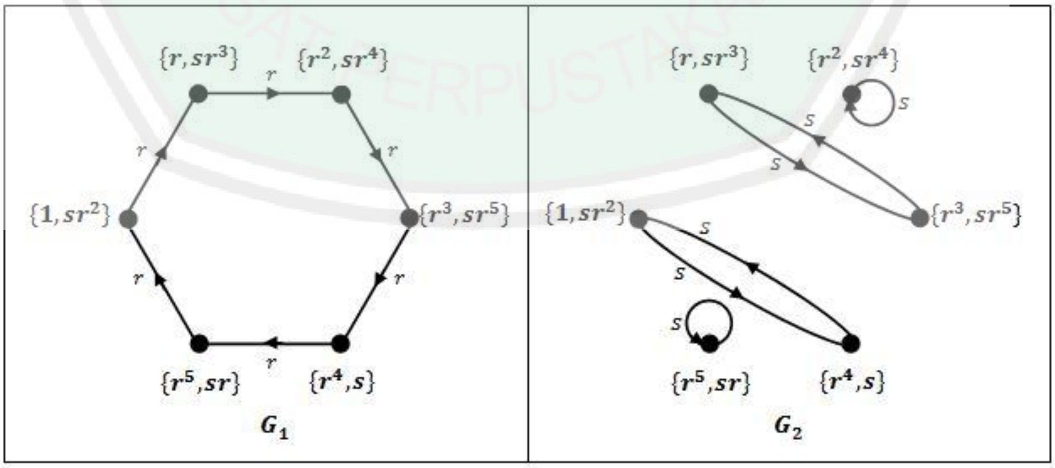
Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_4 $\{\{1, sr^2\}, \{r, sr^3\}, \{r^2, sr^4\}, \{r^3, sr^5\}, \{r^4, s\}, \{r^5, sr\}\}$. Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup sejati S_4 di grup D_{12} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.37 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_4 di Grup D_{12}

Gambar 3.37 menunjukkan bahwa titik $\{1, sr^2\}$ terhubung ke titik $\{r, sr^3\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^4, s\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^2\} \circ r =$

$\{r, sr^3\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^2\} \circ s = \{r^4, s\}$, titik $\{r, sr^3\}$ terhubung ke titik $\{r^2, sr^4\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^3, sr^5\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^3\} \circ r = \{r^2, sr^4\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^3\} \circ s = \{r^3, sr^5\}$, titik $\{r^2, sr^4\}$ terhubung ke titik $\{r^3, sr^5\}$ oleh sisi r dan terdapat gelung di titik $\{r^2, sr^4\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^4\} \circ r = \{r^3, sr^5\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^4\} \circ s = \{r^2, sr^4\}$, titik $\{r^3, sr^5\}$ terhubung ke titik $\{r^4, s\}$ oleh sisi r dan titik $\{r, sr^3\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr^5\} \circ r = \{r^4, s\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr^5\} \circ s = \{r, sr^3\}$, titik $\{r^4, s\}$ terhubung ke titik $\{r^5, sr\}$ oleh sisi r dan titik $\{1, sr^2\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^4, s\} \circ r = \{r^5, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^4, s\} \circ s = \{1, sr^2\}$, serta titik $\{r^5, sr\}$ terhubung ke titik $\{1, sr^2\}$ oleh sisi r dan terdapat gelung di titik $\{r^5, sr\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^5, sr\} \circ r = \{1, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^5, sr\} \circ s = \{r^5, sr\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_4 di grup D_{12} seperti pada gambar berikut.

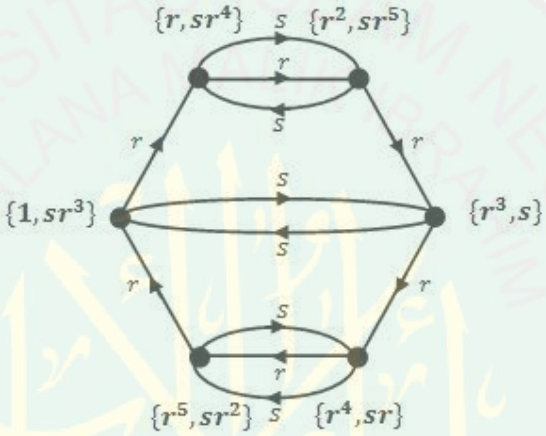


Gambar 3.38 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_4 di Grup D_{12}

Berdasarkan Gambar 3.38, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_4 dari grup D_{12} karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2

berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_4 di grup D_{12}.

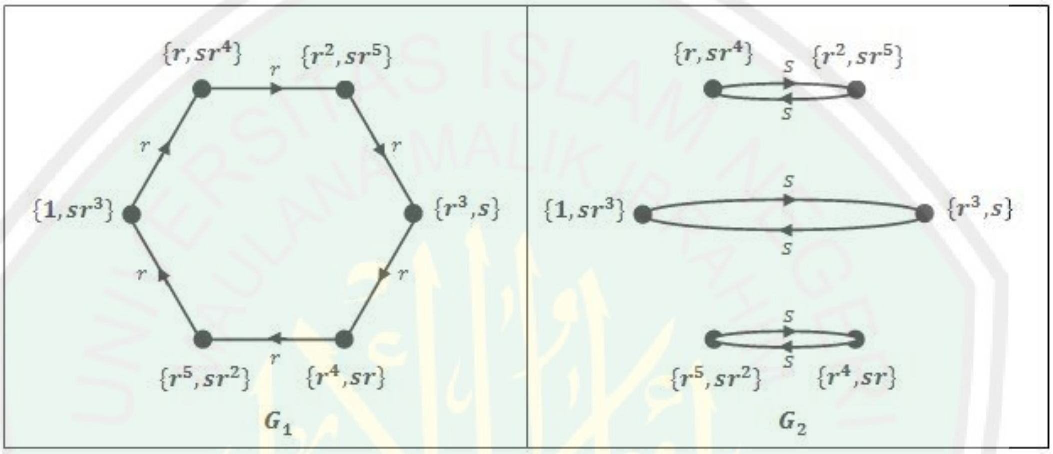
Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_5 $\{\{1, sr^3\}, \{r, sr^4\}, \{r^2, sr^5\}, \{r^3, s\}, \{r^4, sr\}, \{r^5, sr^2\}\}$. Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup sejati S_5 di grup D_{12} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.39 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_5 di Grup D_{12}

Gambar 3.39 menunjukkan bahwa titik $\{1, sr^3\}$ terhubung ke titik $\{r, sr^4\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^3, s\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^3\} \circ r = \{r, sr^4\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^3\} \circ s = \{r^3, s\}$, titik $\{r, sr^4\}$ terhubung ke titik $\{r^2, sr^5\}$ oleh sisi r dan sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^4\} \circ r = \{r^2, sr^5\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^4\} \circ s = \{r^2, sr^5\}$, titik $\{r^2, sr^5\}$ terhubung ke titik $\{r^3, s\}$ oleh sisi r dan titik $\{r, sr^4\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^5\} \circ r = \{r^3, s\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr^5\} \circ s = \{r, sr^4\}$, titik $\{r^3, s\}$ terhubung ke titik $\{r^4, sr\}$ oleh sisi r dan titik $\{1, sr^3\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^3, s\} \circ r = \{r^4, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^3, s\} \circ s = \{1, sr^3\}$, titik $\{r^4, sr\}$ terhubung ke titik $\{r^5, sr^2\}$ oleh sisi r dan sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr\} \circ r =$

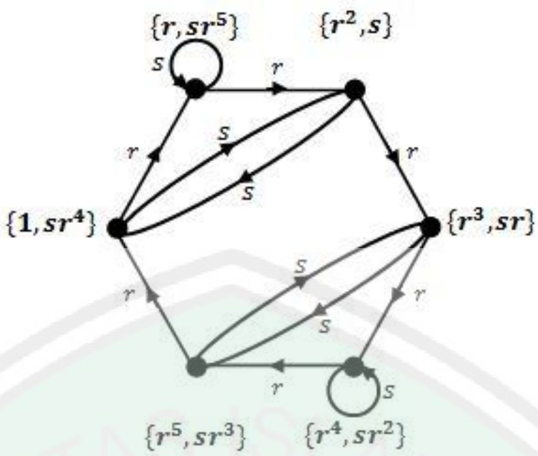
$\{r^5, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr\} \circ s = \{r^5, sr^2\}$, serta titik $\{r^5, sr^2\}$ terhubung ke titik $\{1, sr^3\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^4, sr\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^5, sr^2\} \circ r = \{1, sr^3\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^5, sr^2\} \circ s = \{r^4, sr\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_5 di grup D_{12} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.40 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_5 di Grup D_{12}

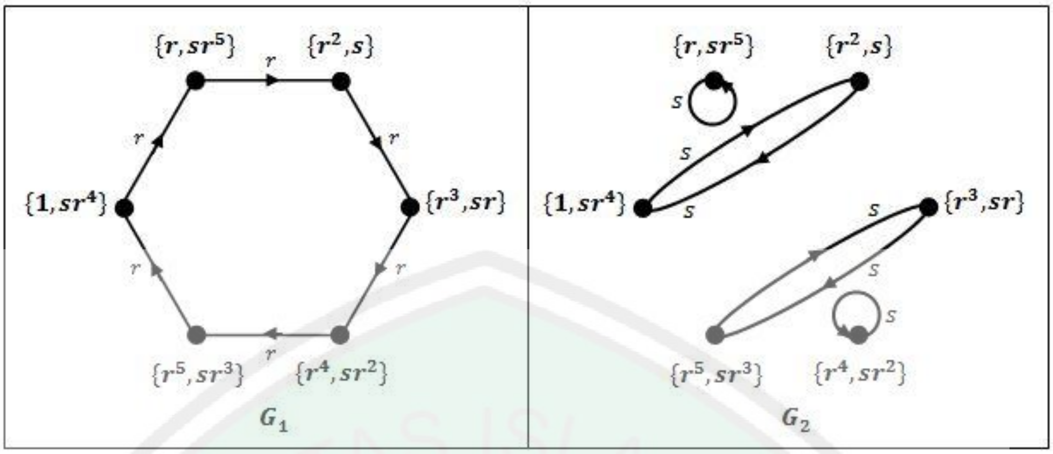
Berdasarkan Gambar 3.40, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_5 dari grup D_{12} karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_5 di grup D_{12}.

Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_6 $\{\{1, sr^4\}, \{r, sr^5\}, \{r^2, s\}, \{r^3, sr\}, \{r^4, sr^2\}, \{r^5, sr^3\}\}$. Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup sejati S_6 di grup D_{12} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.41 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_6 di Grup D_{12}

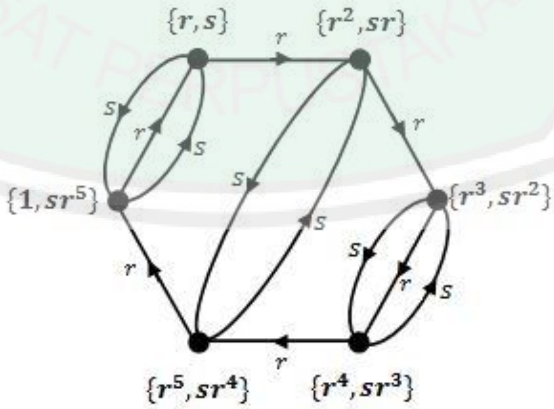
Gambar 3.41 menunjukkan bahwa titik $\{1, sr^4\}$ terhubung ke titik $\{r, sr^5\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^2, s\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^4\} \circ r = \{r, sr^5\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^4\} \circ s = \{r^2, s\}$, titik $\{r, sr^5\}$ terhubung ke titik $\{r^2, s\}$ oleh sisi r dan terdapat gelung di titik $\{r, sr^5\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^5\} \circ r = \{r^2, s\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r, sr^5\} \circ s = \{r, sr^5\}$, titik $\{r^2, s\}$ terhubung ke titik $\{r^3, sr\}$ oleh sisi r dan titik $\{1, sr^4\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2, s\} \circ r = \{r^3, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2, s\} \circ s = \{1, sr^4\}$, titik $\{r^3, sr\}$ terhubung ke titik $\{r^4, sr^2\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^5, sr^3\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr\} \circ r = \{r^4, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr\} \circ s = \{r^5, sr^3\}$, titik $\{r^4, sr^2\}$ terhubung ke titik $\{r^5, sr^3\}$ oleh sisi r dan terdapat gelung di titik $\{r^4, sr^2\}$ karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr^2\} \circ r = \{r^5, sr^3\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr^2\} \circ s = \{r^4, sr^2\}$, serta titik $\{r^5, sr^3\}$ terhubung ke titik $\{1, sr^4\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^3, sr\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^5, sr^3\} \circ r = \{1, sr^4\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^5, sr^3\} \circ s = \{r^3, sr\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_6 di grup D_{12} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.42 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_6 di Grup D_{12}

Berdasarkan Gambar 3.42, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_6 dari grup D_{12} karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_6 di grup D_{12}.

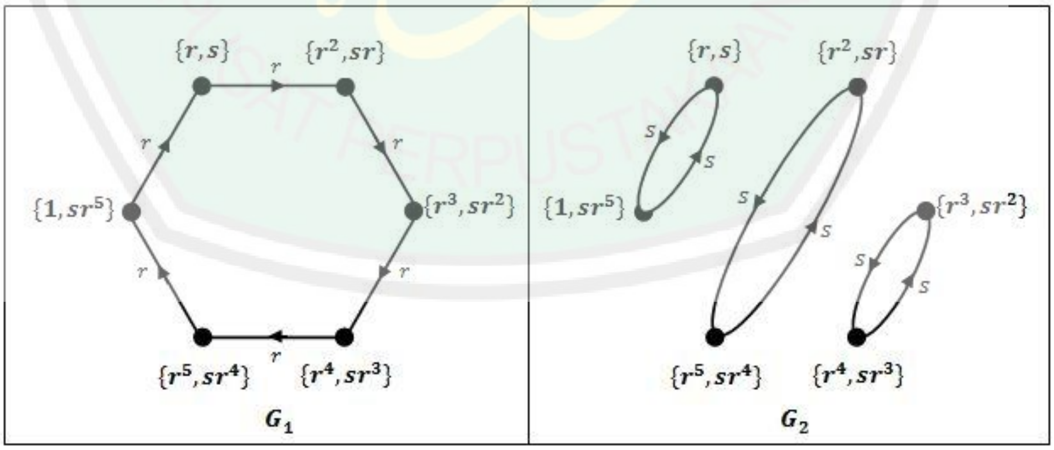
Dengan menggunakan cara yang sama seperti pada S_1, maka diperoleh himpunan koset dari S_7 $\{\{1, sr^5\}, \{r, s\}, \{r^2, sr\}, \{r^3, sr^2\}, \{r^4, sr^3\}, \{r^5, sr^4\}\}$. Sehingga dapat dibuat graf koset Schreier dari subgrup sejati S_7 di grup D_{12} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.43 Graf Koset Schreier dari Subgrup S_7 di Grup D_{12}

Gambar 3.43 menunjukkan bahwa titik $\{1, sr^5\}$ terhubung ke titik $\{r, s\}$ oleh sisi r dan sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^5\} \circ r = \{r, s\}$ dan terdapat

$s \in \Omega$ sehingga $\{1, sr^5\} \circ s = \{r, s\}$, titik $\{r, s\}$ terhubung ke titik $\{r^2, sr\}$ oleh sisi r dan titik $\{1, sr^5\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r, s\} \circ r = \{r^2, sr\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r, s\} \circ s = \{1, sr^5\}$, titik $\{r^2, sr\}$ terhubung ke titik $\{r^3, sr^2\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^5, sr^4\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr\} \circ r = \{r^3, sr^2\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^2, sr\} \circ s = \{r^5, sr^4\}$, titik $\{r^3, sr^2\}$ terhubung ke titik $\{r^4, sr^3\}$ oleh sisi r dan sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr^2\} \circ r = \{r^4, sr^3\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^3, sr^2\} \circ s = \{r^4, sr^3\}$, titik $\{r^4, sr^3\}$ terhubung ke titik $\{r^5, sr^4\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^3, sr^2\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr^3\} \circ r = \{r^5, sr^4\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^4, sr^3\} \circ s = \{r^3, sr^2\}$, serta titik $\{r^5, sr^4\}$ terhubung ke titik $\{1, sr^5\}$ oleh sisi r dan titik $\{r^2, sr\}$ oleh sisi s karena terdapat $r \in \Omega$ sehingga $\{r^5, sr^4\} \circ r = \{1, sr^5\}$ dan terdapat $s \in \Omega$ sehingga $\{r^5, sr^4\} \circ s = \{r^2, sr\}$. Selanjutnya dibentuk faktor-faktor dari graf koset Schreier dari subgrup S_7 di grup D_{12} seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.44 Faktor Graf Koset Schreier dari Subgrup S_7 di Grup D_{12}

Berdasarkan Gambar 3.44, graf G_1 dan graf G_2 merupakan faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup S_7 dari grup D_{12} karena semua titik di graf G_1 dan graf G_2 berderajat 2. Sehingga penjumlahan sisi dari graf G_1 dan G_2 adalah faktorisasi dari graf koset Schreier dari subgrup S_7 di grup D_{12}.

Graf koset Schreier dari subgrup sejati $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ dan $\{1, sr^k\}, k = 1,2, \dots ,6$ jika difaktorkan maka menghasilkan 2 faktor-2. Namun Faktor-faktor di atas bukanlah satu-satunya faktor yang dapat dibentuk dari suatu graf koset Schreier yang membentuk faktorisasi pada graf tersebut. Meskipun terdapat beberapa faktorisasi, namun tetap hasilnya tetap sama, yaitu 2 faktor-2.

3.5 Pola Faktorisasi Graf Koset Schreier

Berdasarkan uraian subbab 3.1 hingga 3.4, diperoleh pola faktorisasi graf koset Schreier dari subgrup sejati di grup dihedral yang disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 3.5 Tabel Pola Faktorisai Graf Koset Schreier

Grup D_{2n}	Subgrup Sejati di Grup D_{2n}	Faktor
D_6	$\{1, r, r^2\}$	2 faktor-2
	$\{1, s\}$	2 faktor-2
	$\{1, sr\}$	2 faktor-2
	$\{1, sr^2\}$	2 faktor-2
D_8	$\{1, r, r^2, r^3\}$	2 faktor-2
	$\{1, s\}$	2 faktor-2
	$\{1, sr\}$	2 faktor-2
	$\{1, sr^2\}$	2 faktor-2
	$\{1, sr^3\}$	2 faktor-2
D_{10}	$\{1, r, r^2, r^3, r^4\}$	2 faktor-2
	$\{1, s\}$	2 faktor-2
	$\{1, sr\}$	2 faktor-2
	$\{1, sr^2\}$	2 faktor-2
	$\{1, sr^3\}$	2 faktor-2
	$\{1, sr^4\}$	2 faktor-2
D_{12}	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$	2 faktor-2
	$\{1, s\}$	2 faktor-2
	$\{1, sr\}$	2 faktor-2
	$\{1, sr^2\}$	2 faktor-2
	$\{1, sr^3\}$	2 faktor-2
	$\{1, sr^4\}$	2 faktor-2
	$\{1, sr^5\}$	2 faktor-2

$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$
D_{2n}	$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$	2 faktor-2
	$\{1, sr^k\}, k = 1, \dots, n$	2 faktor-2

Teorema

Diberikan grup dihedral-$2n$ (D_{2n}) dengan $n \geq 3$ dan himpunan pembangkit dari grup dihedral adalah $\Omega = \{r, s\}$. Misalkan H adalah subgrup sejati $\{1, r, r^2, \dots, r^n\}$ dan $\{1, sr^k\}, k = 1,2, \dots, n$ dari D_{2n}, maka faktorisasi graf koset Schreier dari masing-masing subgrup tersebut di grup D_{2n} menghasilkan 2 faktor-2.

Bukti.

$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-2}, sr^{n-1}\} = \langle r, s \rangle$

Untuk subgrup $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$

Ambil G_1 subgraf dengan himpunan titik $V(G_1) = \{\{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\}, \{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-2}, sr^{n-1}\}\}$ dan himpunan sisinya merupakan sisi yang diberi label r, berdasarkan definisi graf koset Schreier pada Bab II sehingga:

Titik $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$ memuat gelung (*loop*), karena

$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\} \circ r = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$

Titik $\{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-2}, sr^{n-1}\}$ memuat gelung (*loop*), karena

$\{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-2}, sr^{n-1}\} \circ r = \{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-2}, sr^{n-1}\}$

Karena untuk setiap titik di G_1 memuat gelung, maka untuk setiap titik di G_1 berderajat 2, sehingga berdasarkan definisi faktor pada Bab II maka G_1 adalah faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$.

Ambil G_2 subgraf dengan himpunan titik $V(G_1) = \{\{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\}, \{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-2}, sr^{n-1}\}\}$ dan himpunan sisinya merupakan sisi yang diberi label s, berdasarkan definisi graf koset Schreier pada Bab II sehingga:

Titik $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$ terhubung ke titik $\{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-2}, sr^{n-1}\}$, karena $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\} \circ s = \{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-2}, sr^{n-1}\}$

Titik $\{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-2}, sr^{n-1}\}$ terhubung ke titik $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$

$\{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-2}, sr^{n-1}\} \circ s = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$

Karena untuk setiap titik di G_2 memiliki satu sisi keluar dan satu sisi masuk atau dengan kata lain setiap titik di G_2 berderajat 2 sehingga berdasarkan definisi faktor pada Bab II, maka G_2 adalah faktor-2 dari graf koset Schreier $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$.

Jadi terbukti bahwa untuk graf koset Schreier dari subgrup $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$ di D_{2n} jika difaktorkan maka menghasilkan 2 faktor-2.

Untuk subgrup $\{1, sr^k\}, k = 1,2, \dots, n$

Ambil G_1 adalah subgraf dengan himpunan sisi yang diberi label r, berdasarkan definisi graf koset Schreier pada Bab II sehingga:

Titik $\{1, sr^k\}$ terhubung ke titik $\{r, sr^{k+1}\}$, karena $\{1, sr^k\} \circ r = \{r, sr^{k+1}\}$

Titik $\{r, sr^{k+1}\}$ terhubung ke titik $\{r^2, sr^{k+2}\}$, karena $\{r, sr^{k+1}\} \circ r = \{r^2, sr^{k+2}\}$

$$\vdots$$

Titik $\{r^{n-2}, sr^{k+(n-2)}\}$ terhubung ke titik $\{r^{n-1}, sr^{k+(n-1)}\}$, karena $\{r^{n-2}, sr^{k+(n-2)}\} \circ r = \{r^{n-1}, sr^{k+(n-1)}\}$

Titik $\{r^{n-1}, sr^{i+(n-1)}\}$ terhubung ke titik $\{1, sr^i\}$, karena $\{r^{n-1}, sr^{n-1}\} \circ r = \{r^n, sr^{i+n}\} = \{1, sr^i\}$

Karena setiap titik di G_1 memiliki satu sisi keluar dan satu sisi masuk atau dengan kata lain setiap titik di G_1 berderajat 2, sehingga berdasarkan definisi faktor pada Bab II maka G_1 adalah faktor-2 dari graf koset Schreier dari subgrup $\{1, sr^k\}$.

Ambil G_2 adalah subgraf dengan himpunan sisi yang diberi label s, berdasarkan definisi graf koset Schreier pada Bab II sehingga:

Titik $\{1, sr^k\}$ terhubung ke titik $\{r^{n-k}, s\}$, karena $\{1, sr^k\} \circ s = \{s, r^{n-k}\} = \{r^{n-k}, s\}$

Titik $\{r, sr^{k+1}\}$ terhubung ke titik $\{r^{n-(k+1)}, sr^{n-1}\}$, karena $\{r, sr^{k+1}\} \circ s = \{sr^{n-1}, r^{n-(k+1)}\} = \{r^{n-(k+1)}, sr^{n-1}\}$

$$\vdots$$

Titik $\{r^{n-2}, sr^{n-(k+2)}\}$ terhubung ke titik $\{r^{n-(k+n-2)}, sr^2\}$,

karena $\{r^{n-2}, sr^{n-(k+2)}\} \circ s = \{sr^{n-(k+n-2)}, r^{n-(n-2)}\} = \{sr^2, r^{n-(k+n-2)}\} = \{r^{n-(k+n-2)}, sr^2\}$

Titik $\{r^{n-1}, sr^{n-1}\}$ terhubung ke titik $\{r^{n-(k+n-1)}, sr\}$,

karena $\{r^{n-1}, sr^{n-(k+2)}\} \circ s = \{sr^{n-(k+n-1)}, sr^{n-(n-1)}\} = \{sr, r^{n-(k+n-1)}\} = \{r^{n-(k+n-1)}, sr\}$

Karena setiap titik di G_2 memiliki satu sisi keluar dan satu sisi masuk atau dengan kata lain setiap titik di G_2 berderajat 2, sehingga berdasarkan definisi faktor pada Bab II maka G_2 adalah faktor-2.

Sehingga terbukti bahwa untuk graf koset Schreier dari subgrup $\{1, s\}$ di D_{2n} jika difaktorkan maka menghasilkan 2 faktor-2 dari graf koset Schreier $\{1, sr^k\}$.

3.6 Faktorisasi dalam Perspektif Agama Islam

Faktorisasi pada graf merupakan penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf tersebut dimana faktor dari suatu graf merupakan subgraf merentang (*spanning subgraph*) dari graf tersebut. Sedangkan dalam Islam, terdapat berbagai macam faktorisasi. Hadits yang terdapat di Bab II menjelaskan bahwa terdapat lima pilar dalam rukun Islam, yaitu mengucap dua kalimat syahadat, mendirikan shalat, menunaikan zakat, melakukan puasa di bulan Ramadhan, serta melaksanakan ibadah haji. Selain itu, hadits tersebut juga menerangkan bahwa Islam dibangun berdasarkan 5 rukun Islam. Hadits lain yang menjelaskan tentang faktorisasi dalam perspektif Islam adalah sebagai berikut.

عَنْ عُمَرَ رَضِيَ اللهُ عَنْهُ أَيْضاً قَالَ : بَيْنَمَا نَحْنُ جُلُوْسٌ عِنْدَ رَسُوْلِ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ ذَاتَ يَوْمٍ إِذْ طَلَعَ عَلَيْنَا رَجُلٌ شَدِيْدُ بَيَاضِ الثِّيَابِ شَدِيْدُ سَوَادِ الشَّعْرِ، لاَ يُرَى **عَلَيْهِ** أَثَرُ السَّفَرِ، وَلاَ يَعْرِفُهُ مِنَّا أَحَدٌ، حَتَّى جَلَسَ إِلَى النَّبِيِّ ﷺ فَأَسْنَدَ رُكْبَتَيْهِ إِلَى رُكْبَتَيْهِ وَوَضَعَ كَفَّيْهِ عَلَى فَخِذَيْهِ وَقَالَ: يَا مُحَمَّد أَخْبِرْنِي عَنِ الْإِسْلاَمِ، فَقَالَ رَسُوْلُ اللهِ ﷺ : الْإِسِلاَمُ أَنْ تَشْهَدَ أَنْ لاَ إِلَهَ إِلاَّ اللهُ وَأَنَّ مُحَمَّدًا رَسُوْلُ اللهِ وَتُقِيْمَ الصَّلاَةَ وَتُؤْتِيَ الزَّكَاةَ وَتَصُوْمَ رَمَضَانَ وَتَحُجَّ الْبَيْتَ إِنِ اسْتَطَعْتَ إِلَيْهِ سَبِيْلاً قَالَ : صَدَقْتَ، فَعَجِبْنَا لَهُ يَسْأَلُهُ وَيُصَدِّقُهُ، قَالَ: فَأَخْبِرْنِي عَنِ الْإِيْمَانِ قَالَ : أَنْ تُؤْمِنَ بِاللهِ وَمَلاَئِكَتِهِ وَكُتُبِهِ وَرُسُلِهِ وَالْيَوْمِ الآخِرِ وَتُؤْمِنَ بِالْقَدَرِ خَيْرِهِ وَشَرِّهِ. قَالَ صَدَقْتَ، قَالَ فَأَخْبِرْنِي عَنِ الْإِحْسَانِ، قَالَ: أَنْ تَعْبُدَ اللهَ كَأَنَّكَ تَرَاهُ فَإِنْ لَمْ تَكُنْ تَرَاهُ فَإِنَّهُ يَرَاكَ . قَالَ: فَأَخْبِرْنِي عَنِ السَّاعَةِ، قَالَ: مَا الْمَسْؤُوْلُ عَنْهَا بِأَعْلَمَ مِنَ السَّائِلِ. قَالَ فَأَخْبِرْنِي عَنْ أَمَارَاتِهَا، قَالَ أَنْ تَلِدَ الْأَمَةُ رَبَّتَهَا وَأَنْ تَرَى الْحُفَاةَ الْعُرَاةَ الْعَالَةَ رِعَاءَ الشَّاءِ يَتَطَاوَلُوْنَ فِي الْبُنْيَانِ، ثُمَّ انْطَلَقَ فَلَبِثْتُ مَلِيًّا، ثُمَّ قَالَ : يَا عُمَرَ أَتَدْرِي مَنِ السَّائِلِ ؟ قُلْتُ : اللهُ وَرَسُوْلُهُ أَعْلَمَ . قَالَ فَإِنَّهُ جِبْرِيْلُ أَتَاكُمْ يُعَلِّمُكُمْ دِيْنَكُمْ .رواه مسلم

Dari Umar radhiallahuanhu juga dia berkata : Ketika kami duduk-duduk di sisi Rasulullah Saw. suatu hari tiba-tiba datanglah seorang laki-laki yang mengenakan baju yang sangat putih dan berambut sangat hitam, tidak tampak padanya bekas-bekas perjalanan jauh dan tidak ada seorangpun diantara kami yang mengenalnya. Hingga kemudian dia duduk dihadapan Nabi lalu menempelkan kedua lututnya kepada kepada lututnya (Rasulullah Saw.) seraya berkata: "Ya Muhammad, beritahukan aku tentang Islam?", maka bersabdalah Rasulullah Saw.: "Islam adalah engkau bersaksi bahwa tidak ada Ilah (Tuhan *yang disembah) selain Allah Swt., dan bahwa Nabi Muhammad Saw. adalah utusan Allah Swt., engkau mendirikan shalat, menunaikan zakat, puasa Ramadhan dan pergi haji jika mampu", kemudian dia berkata: "anda benar". Kami semua heran, dia yang bertanya dia pula yang membenarkan. Kemudian dia bertanya lagi: "Beritahukan aku tentang Iman". Lalu beliau bersabda: "Engkau beriman kepada Allah Swt., malaikat-malaikat-Nya, kitab-kitab-Nya, rasul-rasul-Nya dan hari akhir dan engkau beriman kepada takdir yang baik maupun yang buruk", kemudian dia berkata: "anda benar". Kemudian dia berkata lagi: "Beritahukan aku tentang ihsan". Lalu beliau bersabda: "Ihsan adalah engkau beribadah kepada Allah Swt. seakan-akan engkau melihatnya, jika engkau tidak melihatnya maka Dia melihat engkau" . Kemudian dia berkata: "Beritahukan aku tentang hari kiamat (kapan kejadiannya)". Beliau bersabda: "Yang ditanya tidak lebih tahu dari yang bertanya". Dia berkata:"Beritahukan aku tentang tanda-tandanya", beliau bersabda: "Jika seorang hamba melahirkan tuannya dan jika engkau melihat seorang bertelanjang kaki dan dada, miskin dan penggembala domba, (kemudian) berlomba-lomba meninggikan bangunannya ", kemudian orang itu berlalu dan aku berdiam sebentar. Kemudian beliau (Rasulullah) bertanya: "Tahukah engkau siapa yang bertanya?". aku berkata: "Allah Swt. dan Rasul-Nya lebih mengetahui". Beliau bersabda: "Dia adalah Jibril yang datang kepada kalian (bermaksud) mengajarkan agama kalian". (Hadits Riwayat Muslim)*

Dalam hadits tersebut, diuraikan bahwa Islam merupakan bersaksi bahwa tidak ada tuhan yang disembah selain Allah Swt. dan nabi Muhammad Saw. adalah utusan Allah Swt., mendirikan shalat, menunaikan zakat, puasa di bulan Ramadhan, dan pergi haji, dimana kelima hal tersebut merupakan pilar dari rukun Islam. Selain itu, masih banyak hadits yang menjelaskan tentang rukun Islam.

Di dalam kajian teori graf, faktor-faktor dari suatu graf akan dikatakan faktorisasi dari graf jika:

1. Terdiri dari beberapa faktor atau subgraf merentang (*spanning subgraph*).
2. Penjumlahan sisi dari faktor-faktor akan membentukn grafnya.
3. Jika salah satu faktor dihilangkan, maka penjumlahan sisi dari faktor-faktor tidak akan membentuk grafnya.

Sehingga jika rukun Islam jika dikaji dalam teori graf khususnya tentang faktorisasi pada graf koset Schreier, maka rukun Islam merupakan suatu faktorisasi karena:

1. Terdiri dari beberapa bagian, yaitu rukun-rukun.
2. Terdapat 5 rukun dalam rukun Islam, apabila digabungkan maka dapat dikatakan sebagai faktorisasi rukun Islam.
3. Seseorang yang tidak memenuhi seluruh rukun dalam rukun Islam, maka orang tersebut tidak sempurna dalam ibadahnya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan pada graf koset Schreier, dapat disimpulkan bahwa faktorisasi graf koset Schreier dari subgrup sejati di grup dihedral, dimana subgrup sejati yang dimaksud adalah subgrup sejati yang dibentuk dari himpunan $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ dan $\{1, sr^k\}$, dengan $k = 1,2, \dots, n$ menghasilkan 2 faktor-2.

4.2 Saran

Penelitian selanjutnya diharapkan mampu membahas faktorisasi graf koset Schreier dari semua subgrup sejati di grup dihedral dan teorema-teorema lain tentang graf koset Schreier.

DAFTAR RUJUKAN

Bondy, J.A. dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Application.* Ontario: The Macmillan Press Ltd.

Budayasa, I K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Canizzo, J. 2014. *Schreier Graphs and Ergodic Properties and Boundary Actions.* Ottawa: University of Ottawa

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graphs and Digraphs Third Edition*. California: Chapman & Hall/CRC.

Dummit D.S. dan Foote, R.M.. 1991. *Abstract Algebra.* New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Hawwa, S. 1993. *Al-Islam*. Terjemahan A.H. al Kattani, A. C. Muna, & S. Mapiase. Jakarta: Gema Insani.

Hungerford, T.W. 2012. *Abstract Algebra: An Introduction Third Edition.* Boston: Brooks Cole.

Judson, T.W. 2012. *Abstract Algebra: Theory and Applications.* Boston: Orthogonal Publishing L3C.

Kandasamy, W.B.V. dan Smarandache, F. 2009. *Groups As Graphs*. Romania: Editura Cuart.

Mandailina, V. 2009. *Faktorisasi Graf Komplit.* Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Nazir, M. 1986. *Metode Penelitian.* Bandung: Remaja Rosdakarya.

Plummer, M.D. 2006. Graph Factor and Factorization. *Journal of Discrete Mathematics*. 307 (2007): 791-821.

Prastowo, A. 2011. *Metode Penelitian Kualitatif dala Perspektif Rancangan Penelitian.* Yogyakarta: Ar-Ruzz Media.

Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Raishinghania, M. dan Anggarwal, R. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company Ltd.

Su'ud, A. 2003. *Islamologi*: *Sejarah, Ajaran, dan Peranannya dalam Peradaban Umat Manusia.* Jakarta: Rineka Cipta.

RIWAYAT HIDUP

Ahmad Muhammad Muftirridha, lahir di desa Loloan Timur Kec. Jembrana Kab. Jembrana Bali pada tanggal 25 Mei 1995, biasa dipanggil Mufti, tinggal di Jl. Mertojoyo Selatan Blok C-1 No. 1 Kec. Lowokwaru Kota Malang. Anak bungsu dari 7 bersaudara dari H. Moh. Zaki dan Hj. Musyarrafah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN 1 Loloan Timur dan lulus pada tahun 2006, setelah itu melanjutkan ke SMPN 2 Negara dan lulus pada tahun 2009. Kemudian dia melanjutkan pendidikan ke SMA Nurul Jadid Paiton Probolinggo dan lulus tahun 2012. Selanjutnya, pada tahun 2012 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, dia berperan aktif pada organisasi dalam rangka mengembangkan potensi dirinya. Dia pernah menjadi ketua IMADE (Ikatan Mahasiswa Dewata) Malang periode 2014/2015.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ahmad Muhammad Muftirridha
NIM : 12610020
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Faktorisasi Graf Koset Schreier dari Subgrup Sejati di Grup Dihedral
Pembimbing I : Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D
Pembimbing II : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	27 Januari 2016	Revisi Bab I	1.
2.	5 Februari 2015	Revisi Kajian Agama Bab I	2.
3.	8 Maret 2016	ACC Kajian Agama Bab I dan II pra seminar proposal	3.
4.	8 April 2016	ACC Bab II	4.
5.	15 September 2016	Revisi Bab III	5.
6.	20 September 2016	Konsultasi Teorema	6.
7.	4 Oktober 2016	Revisi Teorema	6.
8.	10 Oktober 2016	ACC Teorema	8.
9.	10 Oktober 2016	Konsultasi Kajian Agama Bab III	9.
10.	18 Oktober 2016	Revisi Kajian Agama Bab III	10.
11.	25 Oktober 2016	ACC BAB III	11.
12.	9 November 2016	ACC Keseluruhan	12.
13.	9 November 2016	ACC Keseluruhan Kajian Agama	13.

Malang, 8 November 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001