GRUP AUTOMORFISMA PADA GRAF *COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL DAN GRUP SIMETRI

SKRIPSI

OLEH
DINI CHANDRA AULIA PUTRI
NIM. 12610019

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

GRUP AUTOMORFISMA PADA GRAF *COMMUTING*
DARI GRUP DIHEDRAL DAN GRUP SIMETRI

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Dini Chandra Aulia Putri
NIM. 12610019

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

GRUP AUTOMORFISMA PADA GRAF *COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL DAN GRUP SIMETRI

SKRIPSI

Oleh
Dini Chandra Aulia Putri
NIM. 12610019

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 08 November 2016

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19630502 198703 1 005

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

GRUP AUTOMORFISMA PADA GRAF *COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL DAN GRUP SIMETRI

SKRIPSI

Oleh
Dini Chandra Aulia Putri
NIM. 12610019

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 01 Desember 2016

Penguji Utama	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Dini Chandra Aulia Putri
NIM	: 12610019
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Grup Automorfisma pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral dan Grup Simetri

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 08 November 2016
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
A8E21ADF644084065
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Dini Chandra Aulia Putri
NIM. 12610019

MOTO

قُلْ بِفَضْلِ ٱللَّهِ وَبِرَحْمَتِهِۦ فَبِذَٰلِكَ فَلْيَفْرَحُوا۟ هُوَ خَيْرٌ مِّمَّا يَجْمَعُونَ ﴿٥٨﴾

"Katakanlah: "Dengan karunia Allah dan rahmat-Nya, hendaklah dengan itu mereka (orang-orang yang berilmu) bergembira (berbangga), karunia Allah dan rahmat-Nya itu adalah lebih baik daripada apa (kesenangan duniawi) yang dikumpulkan (oleh manusia)"
QS Yunus/10:58

Life that you get now is the best condition from the God

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk orang-orang yang telah banyak berjasa dalam kehidupan penulis.

Kepada orang tua tercinta yang selalu menjadi motivator dan penyemangat di setiap langkah ini. Penulis ucapkan terima kasih yang tak terhingga untuk semua pengorbanan, cinta, dan kasih sayang yang tercurah selama ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullai Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan, dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.
4. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.

6. Almarhum ayahanda Rahmad Setia Budi dan ibunda Ika Yuliatin tercinta yang telah mencurahkan kasih sayangnya, doa, bimbingan, dan motivasi hingga terselesaikannya skripsi ini.
7. Segenap keluarga besar Jurusan Matematika angkatan 2012, khususnya Alfi Reny K, Ziyadatur RF, Aminatus Sholikah, AM. Muftirridha, Bayu Kristanto, dan teman-teman lainnya.
8. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah wawasan khususnya bagi penulis dan bagi pembaca pada umumnya.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb

Malang, November 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Putri, Dini Chandra Aulia. 2016. **Grup Automorfisma pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral dan Grup Simetri**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

Kata Kunci: automorfisma, graf *commuting*, grup, grup dihedral, grup simetri

Penelitian ini mengkaji tentang bagaimana pola umum dari grup automorfisma pada graf *commuting* yang terbentuk dari grup dihedral dan grup simetri. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Analisa diawali dengan menentukan unsur-unsur yang saling komutatif dari grup dihedral dan grup simetri. Langkah berikutnya adalah menggambar graf *commuting* yang terbentuk dari grup dihedral dan simetri. Kemudian menentukan pola umum yang terbentuk pada grup automorfisma pada graf *commuting* dari grup dihedral dan simetri.

Hasil penelitian ini adalah: (1)Pola grup automorfisma yang terbentuk pada graf *commuting* dari grup dihedral (D_{2n} $=\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots,$ $sr^{n-1}\}$) dengan mengambil $X_1 = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ akan isomorfik dengan grup automorfisma dari graf komplit-$n(K_n)$. (2)Pola grup automorfisma yang terbentuk pada graf *commuting* dari grup dihedral (D_{2n}) dengan n ganjil lebih dari 3, dengan mengambil $X_2 = \{1, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ akan isomorfik dengan grup automorfisma dari graf bintang $(K_{1,n})$. (3)Pola grup automorfisma yang terbentuk pada graf *commuting* dari grup dihedral (D_{2n}) dengan n genap lebih dari 3, dengan mengambil $X_2 = \{1, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ akan isomorfik dengan grup automorfisma dari graf kincir $Wd_{3,\frac{n}{2}}$. (4)Pola grup automorfisma yang terbentuk pada graf *commuting* dari grup simetri-n (S_n) dengan mengambil $X \subseteq S_n$ adalah himpunan yang memuat unsur identitas dan semua sikel 2 tunggal di S_n akan isomorfik dengan grup automorfisma graf bintang $K_{1,n-1}$. (5)Pola grup automorfisma yang terbentuk pada graf *commuting* dari grup simetri-n (S_n) dengan mengambil $Y \subseteq S_n$ adalah himpunan yang memuat unsur identitas dan semua sikel 3 tunggal di S_n akan isomorfik dengan grup automorfisma dari graf kincir $W_{3,\frac{m}{2}}$.

ABSTRACT

Putri, Dini Chandra Aulia. 2016. **Automorphism Group of Commuting Graph from Dihedral and Symmetry Group.** Thesis. Mathematics Department, Faculty of Science and Technolgy, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang, Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

Keywords: automorphism, commuting graph, dihedral group, group, symmetry group

This research assesing about the common pattern of an automorphism group of commuting graph from the Dihedral group and the symmetry group. Research methods used in this thesis is literature study, with the analysis is begun by determining elements that are commutative to each other from a dihedral group and a symmetry group. The next step is drawing commuting graph formed from a dihedral group and a symmetry group.Then determine the common pattern which is formed on an automorphism group of commuting graph from a dihedral group and a symmetry group.

The result of this research is: (1) The common pattern of automorphism group which is formed on commuting graph from a dihedral group $(D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\})$ with $X_1 = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ was isomorphic to an automorphism group of complete graph-*n* (K_n). (2) The common pattern of automorphism group which is formed on commuting graph from a dihedral group (D_{2n}) and n is an odd numbers more than 3, with $\{1, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ was isomorphic to an automorphism group of star $(k_{1,n})$. (3) The common pattern of automorphism group which is formed on commuting graph from a dihedral group (D_{2n}) and n is an even numbers more than 3, with $\{1, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ was isomorphic to an automorphism group of spool graph $Wd_{3,\frac{n}{2}}$. (4) The common pattern of automorphism group which is formed on commuting graph from a symmetry group (S_n) with $X \subseteq S_n$ is the set of containing an identity element and all cycle 2 single in S_n was isomorphic to an automorphism group of star $(k_{1,n-1})$. (5) The common pattern of automorphism group which is formed on commuting graph from a symmetry group with $Y \subseteq S_n$ is the set of containing an identity element and all cycle 3 single in S_n was isomorphic to an automorphism group of spool graph $Wd_{3,\frac{m}{2}}$.

ملخص

فوترى,دينى جندرا اولياء. . زمرة الثماثل الذاتي على مخطط تبديلي من زمرة dihedral وزمرة symmetry. بحث جامعي. شبعة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالنج. المشرف (1) الدوكتور عبد الشاكر الماجستير (2) الدوكتور إمام سوجروا الماجستير.

الكلمات المرئسية: زمرة dihedral، زمرة symmetry، مخطط تبديلي، زمرة الثمثل الذاتي.

في هذا البحث، الباحث يبحث النمط العام من زمرة الثماثل على مخطط تبديلي من زمرة dihedral وزمرة symmetry. ومنهج البحث في هذا البحث هي دراسة مكتبية, بتثبيت العناصر هو كوموتاتيف من زمرة dihedral وزمرة symmetry. وترسم مخطط تبديلي من زمرة dihedral وزمرة symmetry. ثم تثبيت النمط العام من زمرة الثماثل على مخطط تبديلي من زمرة dihedral وزمرة symmetry.

نتائج هذا البحث هي (1) نمط زمرة الثماثل على مخطط تبديلي من زمرة dihedral $(D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\})$ بتأخذ $X_1 = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ هي متماثل إلى زمرة الثماثل من مخطط كاملة (K_n). (2) نمط زمرة الثماثل على مخطط تبديلي من زمرة dihedral (D_{2n}) ب n فردية و $n \geq 3$, بتأخذ $X_2 = \{1, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$ هي متماثل إلى زمرة الثماثل من مخطط نجمة $(K_{1,n})$. (3) نمط زمرة الثماثل على مخطط زمرة من زمرة dihedral (D_{2n}) ب n حتى و $n \geq 3$، بتأخذ $X_2 = \{1, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$ او $X_2 = \left\{r^{\frac{n}{2}}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\right\}$ هي متماثل إلى زمرة الثماثل من مخطط لف $\left(Wd_{3,\frac{n}{2}}\right)$. (4) نمط زمرة الثماثل على مخطط تبديلي من زمرة symmetry بتأخذ $X \subset S_n$ التجمع هو يحمل العنصر identity وكل single 2 cycle في S_n هي متماثل إلى زمرة الثماثل من مخطط نجمة $(K_{1,n-1})$. (5) نمط زمرة الثماثل على مخطط تبديلي من زمرة symmetry بتأخذ $Y \subset S_n$ التجمع هو يحمل العنصر identity وكل single 3 cycle في S_n هي متماثل إلى زمرة الثماثل من مخطط لف $\left(Wd_{3,\frac{m}{2}}\right)$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Berbicara tentang ilmu pengetahuan, al-Quran telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari kedua dunia itu (Rahman, 1992:12). Hal tersebut menunjukkan keluasan suatu ilmu. Dalam al-Quran hal tersebut telah dijelaskan oleh Allah Swt. dalam firman-Nya pada surat al-Kahfi ayat 109, yaitu

قُل لَّوۡ كَانَ ٱلۡبَحۡرُ مِدَادٗا لِّكَلِمَٰتِ رَبِّي لَنَفِدَ ٱلۡبَحۡرُ قَبۡلَ أَن تَنفَدَ كَلِمَٰتُ رَبِّي وَلَوۡ
جِئۡنَا بِمِثۡلِهِۦ مَدَدٗا ١٠٩

"Katakanlah: sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sunggu habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)"(QS. Al-Kahfi/18:109).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa hendaknya manusia memahami akan kewajiban untuk menuntut ilmu serta mempelajarinya. Karna tidak sedikitnya ilmu pengetahuan untuk dipelajari, maka tidak ada batasan usia pula untuk selalu menambah pengetahuan di berbagai bidang.

Dalam al-Quran surat al-Qamar ayat 49 disebutkan:

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ٤٩

"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukurannya" (QS.Al-Qamar/267:49).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa alam dan isinya diciptakan oleh Allah Swt. dengan ukuran, takaran, dan hitungan yang seimbang. Sehingga dapat disimpulkan bahwa matematika telah ada sejak jaman dahulu, manusia hanya menyimbolkan dari fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari.

Matematika termasuk salah satu ilmu pengetahuan yang banyak dikaji, diterapkan, dan digunakan pada bidang ilmu yang lain. Matematika banyak membantu dalam mempermudah dan menyelesaikan permasalahan pada kajian-kajian ilmu yang lain terutama di bidang sains, sehingga matematika berperan penting dalam berbagai ilmu pengetahuan. Salah satu cabang matematika yang penting dan banyak digunakan untuk memecahkan berbagai permasalahan dalam kehidupan sehari-hari adalah teori graf. Dengan menggunakan rumusan atau model teori graf yang tepat, suatu permasalahan menjadi lebih jelas, sehingga lebih mudah menganalisanya. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan abaikan aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998:1).

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*) dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi (*edge*). Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka *order* dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Sisi $e = \{u, v\}$ atau juga dapat ditulis $e = uv$ adalah sisi dalam G, yaitu u dan v adalah titik-titik ujung dari sisi e, maka u dan v dikatakan *adjacent* (terhubung langsung), v dan e serta u dan e disebut *incident* (terkait langsung). Derajat titik v di graf G ditulis dengan $deg_G(v)$ adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Berkaitan dengan aplikasi teori graf pada cabang ilmu matematika yang lain, terdapat beberapa penelitian yang membahas tentang graf yang dibangun dari grup. Misal G grup berhingga dan X adalah *subset* dari G. Graf *commuting* $C(G, X)$ adalah graf yang memiliki himpunan titik X dan dua titik berbeda akan terhubung langsung jika saling komutatif di G. Jadi, titik x dan y akan terhubung langsung di $C(G, X)$ jika dan hanya jika $xy = yx$ di G (Vahidi & Talebi, 2010:123). Berhubungan dengan graf *commuting*, Abdussakir, dkk (2013) telah meneliti tentang *spectrum* dari graf *commuting* yang diperoleh dari grup dihedral.

Automorfisma pada graf G adalah permutasi φ pada himpunan $V(G)$ dengan syarat bahwa untuk sebarang $u, v \in V(G)$ berlaku $uv \in E(G)$ jika dan hanya jika $\varphi(u)\varphi(v) \in E(G)$ (Cartrand dan Lesniak, 1986:250). Dengan kata lain, automorfisma pada graf G adalah permutasi pada himpunan titik di G yang mempertahankan keterhubungan langsung antara dua titik. Himpunan semua automorfisma pada graf G dengan operasi komposisi fungsi membentuk grup yang disebut grup automorfisma, dan dinotasikan dengan $Aut(G)$ (Cameron, 2001:2). Kardinalitas himpunan $Aut(G)$, atau $|Aut(G)|$, dinamakan bilangan automorfisma pada G.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis akan mengkaji tentang graf *commuting* yang bermula dari grup, dengan judul penelitian “Grup Automorfisma pada Graf *Commuting* dari Grup Dihedral dan Grup Simetri”.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang dirumuskan pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana pola umum grup automorfisma pada graf *commuting* dari grup dihedral?
2. Bagaimana pola umum grup automorfisma pada graf *commuting* dari grup simetri?
3. Bagaimana kajian ayat al-Quran mengenai konsep teori grup dan teori graf?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk menentukan pola umum grup automorfisma pada graf *commuting* dari grup dihedral.
2. Untuk menentukan pola umum grup automorfisma pada graf *commuting* dari grup simetri.
3. Untuk mengetahui kajian ayat al-Quran mengenai konsep teori grup dan teori graf.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian, maka manfaat dari penelitian ini dibedakan menjadi beberapa bagian berdasarkan kepentingan beberapa pihak, yaitu:

1. Bagi Penulis

   Penelitian ini diharapkan menjadi pembelajaran untuk memahami dan menentukan pola umum grup automorfisma pada graf *commuting* dari grup dihedral dan grup simetri, sehingga dapat menambah dan mengembangkan wawasan ilmu, khususnya dalam bidang aljabar dan teori graf.

2. Bagi Mahasiswa

   Penelitian ini diharapkan menjadi sumber refensi pengembangan dalam pembelajaran grup dihedral, grup simetri, dan teori graf.

3. Bagi Instansi

   Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan bahan pustaka, sarana pembelajaran dan bahan pengembangan ilmu matematika, khususnya yang berkaitan dengan grup dan teori graf.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini menggunakan studi literatur yaitu penelitian yang dilakukan di perpustakaan dengan cara mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan material yang terdapat di ruang perpustakaan. Jurnal utama yang digunakan dalam skripsi ini adalah jurnal yang berjudul *Automorphism Group of Graphs*, oleh Ganesan (2012). Adapun langkah-langah yang dilakukan dalam menyelesaikan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan anggota grup dihedral dari $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16}.
2. Mengilustrasikan tabel *cayley* dan menentukan unsur yang saling komutatif dari grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12} D_{14}$, dan D_{16}.

3. Menggambar graf *commuting* dari grup dihedral $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$, dan D_{16}.
4. Menentukan pola graf *commuting* yang terbentuk ke dalam beberapa jenis graf berdasarkan unsur-unsur pembentuknya dan dinyatakan sebagai teorema.
5. Membuktikan teorema yang diperoleh.
6. Menentukan anggota grup simetri dari S_3, S_4, dan S_5.
7. Memilih anggota dari S_3, S_4, dan S_5 yang memuat sikel dua tunggal dan sikel tiga tunggal.
8. Mengoperasikan setiap anggota dengan operasi komposisi "$\circ$", dan menentukan unsur yang saling komutatif.
9. Menggambar graf *commuting* dari grup simetri S_3, S_4, dan S_5.
10. Menentukan pola graf *commuting* yang terbentuk ke dalam beberapa jenis graf berdasarkan unsur-unsur pembentuknya dan dinyatakan sebagai teorema.
11. Mengkaitkan kajian agama dengan topik penelitian, yaitu mengenai graf dan grup.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam penelitian ini dibagi menjadi 4 bab dan setiap bab memiliki beberapa subbab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini penulis menjelaskan konsep-konsep yang berkaitan dengan dengan penelitian ini, yaitu grup dihedral, grup simetri, graf, derajat titik, graf terhubung, graf *commuting*, dan automorfisma pada graf.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini penulis akan menguraikan tentang bagaimana pola umum automorfisma grup pada graf *commuting* dari grup dihedral dan grup simetri.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian ini dan saran yang berhubungan dengan hasil penelitian.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Grup

Ilmu aljabar merupakan salah satu cabang ilmu dari matematika yang penting dan banyak manfaatnya. Karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Ilmu aljabar yang merupakan bagian dari ilmu matematika, pada dasarnya berkembang pesat karena berhubungan dengan himpunan, operasi dan sifat struktur-struktur di dalamnya.

Teori grup adalah salah satu teori dalam ilmu aljabar. Definisi grup adalah struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G adalah himpunan tidak kosong $(G \neq \emptyset)$ dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

a. Operasi $*$ bersifat assosiatif di G

   $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk semua $a, b, c \in G$.

b. Terdapat suatu elemen e di G sehingga $a * e = e * a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut identitas di G).

c. Untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu elemen a^{-1} di G sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} disebut invers dari a) (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:31).

2.1.1 Grup Dihedral

Grup dihedral adalah himpunan simetri-simetri dari segi n-beraturan (poligon-n), dinotasikan dengan D_{2n}, untuk setiap $n \in Z^{+}$, dan $n \geq 3$, dengan operasi komposisi " $\circ$ " yang memenuhi aksioma-aksioma grup. Dimisalkan D_{2n}

adalah suatu grup yang didefinisikan dengan st untuk $s, t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari penerapan pertama t kemudian s dalam segi-n dari simetri (simetri sebagai fungsi segi$-n$, jadi st merupakan fungsi komposisi). Jika s, t merupakan akibat permutasi dari titik-titik yang berturut-turut yaitu σ, τ maka s, t merupakan akibat $\sigma \circ \tau$. Operasi biner di D_{2n} adalah asositif karena fungsi komposisi adalah asosiatif. Identitas dari D_{2n} merupakan identitas dari simetri yang dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s \in D_{2n}$ merupakan kebalikan semua putaran dari simetri s (jadi jika s merupakan efek permutasi pada titik-titik σ, s^{-1} akibat dari σ^{-1}).

Grup dihedral akan digunakan secara ekstensif dalam seluruh teks maka perlu beberapa notasi dan hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya, serta membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

1. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$, dan $r^n = 1$, sehingga $|r| = n, n \in \mathbb{N}$
2. $|s| = 2$
3. $s \neq r^i$, untuk sebarang $i, \forall i \in Z^+$.
4. $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$, jadi

   $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$, yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk beberapa $k = 0$ atau $0 \leq i \leq n-1, , \forall i, j, k \in Z^+$.
5. $rs = sr^{-1}$.
6. $r^i s = sr^{n-i}$, untuk semua $0 \leq i \leq n$.

   Hal ini menunjukkan bagaimana s komutatif dengan perpangkatan dari r (Dummit dan Foote, 2004:26).

2.1.2 Grup Simetri

Misalkan Ω adalah sebarang himpunan tak kosong dan misal S_Ω adalah himpunan yang memuat semua fungsi-fungsi bijektif dari Ω ke Ω (atau himpunan yang memuat permutasi dari Ω). Himpunan S_Ω dengan operasi komposisi $"\circ"$ atau $(S_\Omega,\circ)$ adalah sebuah grup. Operasi komposisi " $\circ$" adalah operasi biner pada S_Ω karena jika $\sigma: \Omega \to \Omega$ dan $\tau: \Omega \to \Omega$ adalah fungsi-fungsi bijektif, maka $\sigma \circ \tau$ juga fungsi bijektif dari $\Omega \to \Omega$. Selanjutnya operasi "$\circ$" adalah komposisi fungsi yang bersifat asosiatif. Identitas dari S_Ω adalah permutasi 1 yang didefinisikan dengan $1(a) = a, \forall a \in \Omega$. Untuk setiap $\sigma: \Omega \to \Omega$ maka terdapat fungsi invers $\sigma^{-1}: \Omega \to \Omega$ yang memenuhi $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1$. Dengan demikian semua aksioma grup telah dipenuhi oleh S_Ω dengan operasi komposisi $" \circ "$. Grup $(S_\Omega,\circ)$ disebut sebagai grup simetri pada himpunan Ω. Yang perlu diketahui bahwa elemen dari S_Ω adalah permutasi dari Ω, bukan elemen dari Ω itu sendiri. (Dummit dan Foote, 2004:29)

Pada kasus khusus dengan $\Omega = \{1,2,3, \dots, \mathrm{n}\}$ merupakan grup simetri pada Ω yang dinotasikan $\mathrm{S_n}$, yaitu grup simetri dengan derajat n (Dummit dan Foote, 2004:29).

Contoh Grup Simetri-3:

Misal diberikan himpunan tak kosong Ω, dengan $\Omega = \{1,2,3\}$, apabila dikenai fungsi bijektif dari $\Omega \to \Omega$, maka dapat dituliskan fungsi bijektif tersebut dalam bentuk sikel sebagai berikut:

Grup S_3 adalah permutasi yang memuat $3! = 6$ elemen, dengan $\Omega = \{1,2,3\}$, maka diperoleh:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) = 1$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23)$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)$$

Jadi grup simetri $S_3 = \{1, (123), (132), (23), (13), (12)\}$

Misal $S_3 = \{1, (123), (132), (23), (13), (12)\}$ apabila dikenai operasi komposisi " $\circ$ " pada S_3, maka struktur $(S_3, \circ)$ membentuk grup simetri-3 yang dapat dilihat pada tabel *Cayley* seperti yang dipaparkan pada tabel berikut.

Tabel 2.1 Tabel *Cayley* dari Grup Simetri-3 (S_3)

$\circ$	(1)	(123)	(132)	(23)	(13)	(12)
(1)	(1)	(123)	(132)	(23)	(13)	(12)
(123)	(123)	(132)	(1)	(12)	(23)	(13)
(132)	(132)	(1)	(123)	(13)	(12)	(23)
(23)	(23)	(13)	(12)	(1)	(123)	(132)
(13)	(13)	(12)	(23)	(132)	(1)	(123)
(12)	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)	(1)

2.1.3 *Center* Grup

Dummit dan Foote (2004:50) menjelaskan, misalkan G adalah grup, *center* G didefinisikan $Z(G) = \{g \in G | gx = xg, \forall x \in G\}$. Dengan kata lain, *center* dari G merupakan himpunan elemen-elemen di G yang komutatif dengan semua elemen di G.

Contoh

Diberikan grup dihedral D_6 dengan $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Tentukan $Z(D_6)$!

Jawab: $1 \in D_6$ dan $1 \circ x = x \circ 1, \forall x \in D_6$, sehingga $1 \in Z(D_6)$

$r \in D_6$ dan $r \circ s \neq s \circ r, \forall s \in D_6$, sehingga $r \notin Z(D_6)$

$r^2 \in D_6$ dan $r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2, \forall sr \in D_6$, sehingga $r^2 \notin Z(D_6)$

$s \in D_6$ dan $s \circ sr \neq sr \circ s, \forall sr \in D_6$, sehingga $s \notin Z(D_6)$

$sr \in D_6$ dan $sr \circ s \neq s \circ sr, \forall s \in D_6$, sehingga $sr \notin Z(D_6)$

$sr^2 \in D_6$ dan $sr^2 \circ sr \neq sr \circ sr^2, \forall sr \in D_6$, sehingga $sr^2 \notin Z(D_6)$

Jadi $Z(D_6) = \{1\}$

2.2 Graf

2.2.1 Definisi Graf

Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui tulisan Euler sebagai seorang ahli matematika asal Swiss. Tulisannya berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Konigsberg yang sangat terkenal di Eropa. Kemudian dari pemecahan masalah tersebut semakin berkembang dengan beberapa konsep mengenai teori graf.

Teori graf berkembang semakin pesat dalam rentan waktu yang tak lama. Hal ini karena aplikasinya yang sangat luas dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam bidang ilmu, seperti: Teknik, Ilmu Komputer, Sains, bahkan Ilmu Sosial dan Bisnis. Adapun definisi dari graf itu sendiri adalah:

Definisi 1

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*) dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi (*edge*). Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan E(G). Banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka *order* dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

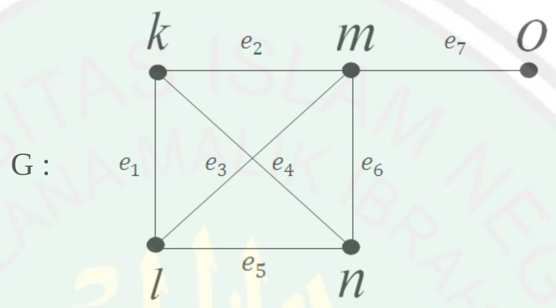
Sisi (*edge*) $e = \{u, v\}$ atau juga dapat ditulis $e = uv$ adalah sebuah sisi dalam G, yaitu u dan v adalah titik-titik ujung dari sisi e, maka u dan v dikatakan *adjacent* (terhubung langsung), v dan e serta u dan e disebut *incident* (terkait langsung). Derajat titik v di graf G ditulis dengan $deg_G(v)$ adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986).

2.2.2 Derajat Titik Graf

Definisi 2

Derajat dari titik v di graf G ditulis dengan $\deg_G(v)$ adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (*incident*) dengan v (Chartrand dan Leniak, 1986:7). Apabila dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G saja, maka penulisan $deg_G(v)$ dapat disingkat menjadi $deg(v)$. Titik yang berderajat genap disebut titik genap *(even vertices)* dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil *(odd vertices)*. Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung *(end vertices)* (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Perhatikan graf G berikut yang mempunyai himpunan titik $V = \{k, l, m, n, o\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut



Gambar 2.1 Graf G

Berdasarkan gambar, diperoleh bahwa:

$\deg(k) = 3$

$\deg(l) = 3$

$\deg(m) = 4$

$\deg(n) = 3$

$\deg(o) = 1$

Titik *k*, *l*, *n*, dan *o* adalah titik ganjil, titik *m* adalah titik genap. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf *G* dengan banyak sisi, yaitu q, adalah $\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q$.

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1

Jika G graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$

Maka $\sum_{i=1}^{p} deg_G(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Corollary 1

Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

Bukti:

Misalkan graf G dengan *size* q. Dan misalkan W himpunan yang memuat titik ganjil pada G serta U himpunan yang memuat titik genap di G. Dari teorema 1 maka diperoleh:

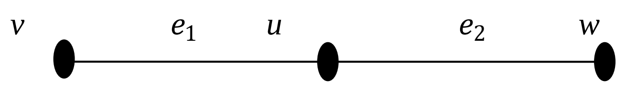
$$\sum_{v\in v(G)} \deg_G v = \sum_{v\in W} \deg_G v + \sum_{v\in U} \deg_G v = 2q$$

Dengan demikian karena $\sum_{v\in U} deg_G\, v$ genap, maka $\sum_{v\in W} deg_G\, v$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap.

2.2.3 Graf Terhubung

Definisi 3

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi pada graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), sedangkan u dan e disebut terkait langsung (*incident*), sebagaimana v dan e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*) jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis dengan $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:1) pada gambar berikut



Gambar 2.2 *Adjacent* dan *Incident* pada Graf

diperoleh:

v dan u, u dan w terhubung langsung (*adjacent*)

v dan u terkait langsung (*incident*) dengan e_1

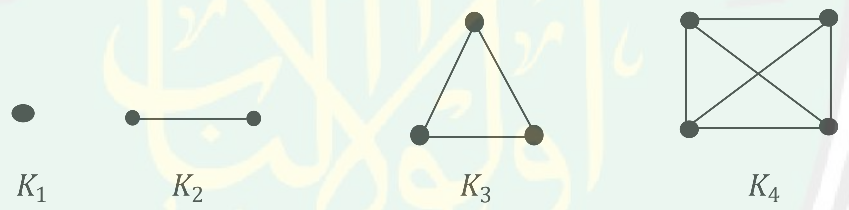
u dan w terkait langsung (*incident*) dengan e_2

e_1 dan e_2 terhubung langsung (*adjacent*)

2.2.4 Graf Komplit

Graf komplit *(complete graph)* adalah graf dengan dua titik yang berbeda saling *adjacent*. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Novandika, 2009).

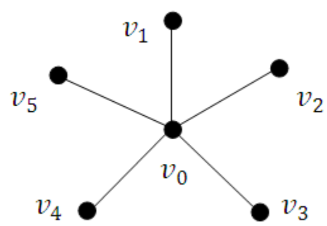
Contoh:



Gambar 2.3 Graf Komplit

2.2.5 Graf Bintang

Graf bintang (*star graph*), S_n, adalah graf dengan $n + 1$ titik, memiliki satu titik pusat v_0 yang terhubung dengan n titik lainnya. Derajat dari titik v_0 adalah n sedangkan derajat semua titik lainnya adalah 1.



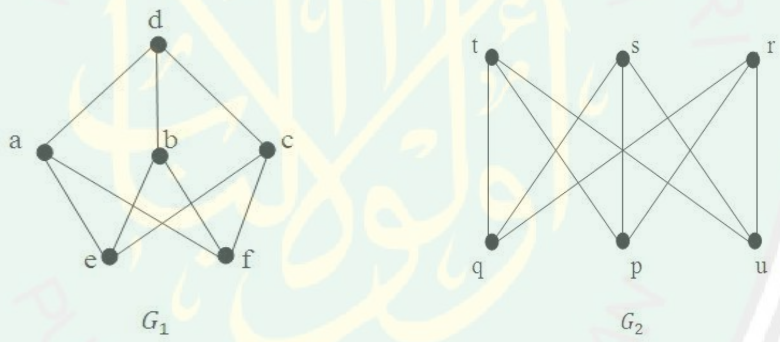
Gambar 2.4 Graf Bintang S_5

2.3 Isomorfisma pada Graf

Budayasa (2007:9-10) menyebutkan bahwa dua graf G dan H dikatakan isomorfik, ditulis $G \cong H$, jika:

1. Terdapat korespondensi satu-satu antara $V(G)$ dan $E(G)$ dengan $V(H)$ dan $E(H)$;
2. Banyaknya sisi yang menghubungkan dua titik u dan v di G, sama dengan banyaknya sisi yang menghubungkan dua titik di H yang berkorespondensi dengan titik u dan v.

Misalnya pada Gambar 2.5 Graf G_1 isomorfik dengan graf G_2 lewat korespondensi berikut: $a \leftrightarrow t, b \leftrightarrow s, c \leftrightarrow r, d \leftrightarrow q, e \leftrightarrow p, f \leftrightarrow u$.



Gambar 2.5 Graf G_1 Isomorfik dengan graf G_2

2.4 Graf *Commuting*

Misal G adalah grup berhingga dan X adalah *subset* dari G. Graf *commuting* $C(G, X)$ adalah graf dengan X sebagai himpunan titik dan dua elemen berbeda di X terhubung langsung jika keduanya adalah elemen yang saling komutatif di G (Nawawi dan Rowley, 2012). Dalam kasus $X = G$, maka $C(G, X)$ akan ditulis $C(G)$.

Sebagai contoh, pada grup dihedral *order* 6 yaitu $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ terhadap operasi komposisi fungsi. Misal diambil $X = D_6$ maka akan ditentukan unsur yang saling komutatif melalui tabel berikut.

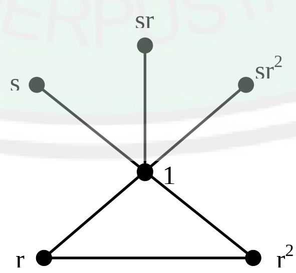
Tabel 2.2 Tabel Cayley untuk D_6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari Tabel 2.2 terlihat bahwa:

1. $r \circ r^2 = r^2 \circ r = 1$ merupakan elemen-elemen yang komutatif sehingga terhubung langsung di $C(D_6)$.
2. Untuk elemen-elemen yang tidak komutatif maka elemen-elemen tersebut tidak terhubung langsung di $C(D_6)$.

Secara geometri, graf *commuting* pada D_6 dapat disajikan sebagai berikut.



Gambar 2.6 Graf *Commuting* pada D_6

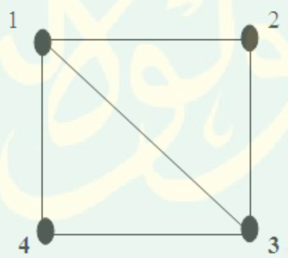
2.5 Automorfisma pada Graf

Automorfisma pada graf G adalah permutasi φ pada himpunan $V(G)$ dengan syarat bahwa untuk sebarang $u, v \in V(G)$ berlaku $uv \in E(G)$ jika dan hanya jika $\varphi(u)\varphi(v)\in E(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:250). Dengan kata lain, automorfisma pada graf G adalah permutasi pada himpunan titik di G yang mempertahankan keterhubungan langsung antara dua titik. Himpunan semua automorfisma pada graf G dengan operasi komposisi fungsi membentuk grup yang disebut grup automorfisma, dan dinotasikan dengan $Aut(G)$ (Cameron, 2001:2). Kardinalitas himpunan $Aut(G)$, atau $|Aut(G)|$, dinamakan bilangan automorfisma pada G.

Grup automorfisma dari graf G adalah grup permutasi dari semua automorfisma graf G yang dinotasikan dengan $Aut(G)$. Automorfisma dari V_G dinotasikan dengan $Aut_v(G)$ dan untuk E_G dinotasikan dengan $Aut_E(G)$.

Contoh:

Misalkan diberikan graf G seperti di bawah ini:



Gambar 2.7 Graf G

Berdasarkan definisi dari automorfisma yaitu $uv\in E(G) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(G)$, maka automorfisma yang mungkin dari graf tersebut antara lain:

1. $\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{Bmatrix} = (1)(2)(3)(4) = (1)$ identitas

   $(1,3) \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(1)\varphi(3) = (1,3) \in E(G)$

   $(2,4) \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(2)\varphi(4) = (2,4) \in E(G)$

2. $\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{Bmatrix} = (13)(2)(4)$ automorfisma

$(1,3) \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(1)\varphi(3) = (3,1) \in E(G)$

3. $\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{Bmatrix} = (1)(3)(24)$ automorfisma

$(2,4) \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(2)\varphi(4) = (4,2) \in E(G)$

4. $\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{Bmatrix} = (13)(24)$ automorfisma

$(1,3) \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(1)\varphi(3) = (3,1) \in E(G)$

$(2,4) \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(2)\varphi(4) = (4,2) \in E(G)$

5. $\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{Bmatrix}$

$(1,3) \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(1)\varphi(3) = (2,4) \in E(G)$ bukan automorfisma

6. $\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{Bmatrix}$

$(2,4) \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(2)\varphi(4) = (1,3) \in E(G)$ bukan automorfisma

Maka akan ditunjukkan bahwa automorfisma dari graf di G tersebut merupakan suatu grup.

1 $(13) \circ (13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$= (1)(2)(3)(4) = (1)$

2 $(1)(2)(3)(4) \circ (1)(3)(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$= (1)(3)(24)$

3 $(13) \circ (24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (13)(24)$

4 $(24) \circ (13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (13)(24)$

5 $(1)(3)(24) \circ (13)(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= (13)(24)$$

dan seterusnya, sehingga diperoleh bentuk tabel *cayley* berikut ini:

Tabel 2.3 Tabel *Cayley* Grup $(G,\circ)$

$\circ$	(1)	(13)	(24)	$(13)(24)$
(1)	(1)	(13)	(24)	$(13)(24)$
(13)	(13)	(1)	$(13)(24)$	(24)
(24)	(24)	$(13)(24)$	(1)	(13)
$(13)(24)$	$(13)(24)$	(24)	(13)	(1)

Berdasarkan uraian di atas dapat dilihat bahwa himpunan dari graf G tersebut memenuhi sifat-sifat grup, yaitu:

1 Operasi $\circ$ bersifat tertutup

2 Operasi $\circ$ bersifat assosiatif

Misal $(1) \circ \big((13) \circ (24)\big) = \big((1) \circ (13)\big) \circ (24)$

$$(1) \circ (13)(24) = (13) \circ (24)$$

$$(13)(24) = (13)(24)$$

3 Setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula

Misal

$(13)(2)(4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Maka invers dari $(13)(2)(4)$ atau $\big((13)(2)(4)\big)^{-1}$ merupakan kebalikan dari permutasi $(13)(2)(4)$.

$\big((13)(2)(4)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Karena kebalikan dari $(13)(2)(4)$ adalah $(13)(2)(4)$ itu sendiri maka invers dari β adalah $(13)(2)(4)$ itu sendiri.

2.6 Kajian Teori Graf dan Grup dalam Islam

Berdasarkan definisinya, graf adalah pasangan himpunan titik dan himpunan sisi yang saling terhubung langsung. Dalam kajian Islam dapat direfleksikan melalui hubungan antara manusia dengan Allah Swt., baik hubungan antara manusia dengan Allah Swt, maupun hubungan antarmanusia itu sendiri, sebagaimana dijelaskan pada subbab berikut.

2.6.1 Hubungan Manusia dengan Allah Swt.

Dalam kajian Islam hubungan antara Allah Swt. dengan manusia adalah sebagai pencipta dan makhluk ciptaan-Nya. Berikut ayat yang menjelaskan mengenai hubungan manusia dengan penciptanya.

إِنَّ مَثَلَ عِيسَىٰ عِندَ ٱللَّهِ كَمَثَلِ ءَادَمَۖ خَلَقَهُۥ مِن تُرَابٖ ثُمَّ قَالَ لَهُۥ كُن فَيَكُونُ ٥٩

"Sesungguhnya misal (penciptaan) Isa di sisi Allah, adalah seperti (penciptaan) Adam. Allah menciptakan Adam dari tanah, kemudian Allah berfirman kepadanya: "Jadilah" (seorang manusia), maka jadilah dia." (QS. Ali-Imran/3:59).

Pada ayat tersebut, dijelaskan bahwa antara nabi Adam dan nabi Isa *Alaihissalam* memiliki kesamaan, yaitu keduanya diciptakan tanpa bapak. Dengan kekuasaan Allah Swt. sebagai Sang Pencipta, maka sebagai manusia hendaklah untuk bertakwa kepada Allah Swt. agar menjaga hubungan ini. Bertakwa kepada Allah Swt. dapat dilakukan dengan cara menjalankan perintah-Nya dan menjauhi larangan-Nya, dan menjaga diri agar terhindar dari neraka atau murka Allah Swt.

Penjelasan tersebut juga didukung dengan adanya firman Allah Swt. dalam Hadits Qudsi:

"Hai anak Adam, luangkan waktu untuk beribadah kepada-Ku niscaya Aku penuhi dadamu dengan kekayaan dan Aku menghindarkan kamu dari kemelaratan. Kalau tidak, Aku penuhi tanganmu dengan kesibukan kerja dan Aku tidak menghindarkanmu dari kemelaratan." (HR. Tirmidzi dan Ibnu Majah)

2.6.2 Hubungan Manusia dengan Sesamanya

Pada hakikatnya, tidak ada manusia yang dapat hidup sendiri tanpa bantuan manusia lainnya. Karena pada dasarnya, setiap manusia memiliki kemampuan yang berbeda-beda. Allah Swt. menganjurkan kepada manusia untuk menjaga tali silaturrahmi terhadap sesamanya. Hal ini dijelaskan dalam ayat berikut.

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ ٱتَّقُواْ رَبَّكُمُ ٱلَّذِى خَلَقَكُم مِّن نَّفْسٍ وَٰحِدَةٍ وَخَلَقَ مِنْهَا زَوْجَهَا وَبَثَّ مِنْهُمَا رِجَالًا كَثِيرًا وَنِسَآءً ۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَ ٱلَّذِى تَسَآءَلُونَ بِهِۦ وَٱلْأَرْحَامَ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَلَيْكُمْ رَقِيبًا ﴿١﴾

"Hai sekalian manusia, bertakwalah kepada Tuhan-mu yang telah menciptakan kau dari seorang diri, dan dari padanya Allah menciptakan isterinya; dan dari pada keduanya Allah memperkembang biakkan lak-laki dan perempuan yang banyak. Dan bertakwalah kepada Allah yang dengan (mempergunakan) nama-Nya kamu saling meminta satu sama lain, dan (peliharalah) hubungan silaturrahim. Sesungguhnya Allah selalu menjaga dan mengawasi kamu," (QS. Al-Baqarah/2:21-22)

Orang yang selalu bersilaturrahmi akan memiliki banyak teman dan memperbanyak saudara. Dengan hal tersebut, maka manusia telah meningkatkan ketakwaannya kepada Allah Swt.. Hal ini sejalan dengan hadits yang menjelaskan larangan memutus silaturrahmi, yaitu:

"*Abu Ayyub ra menceritakan, bahwa Rasulullah Saw bersabda, 'Tidak Halal (boleh) seorang islam menyisihkan saudaranya lebih dari tiga hari, jika keduanya bertemu, maka yang seorang berpaling kesana dan seorang lagi berpaling kesini. Tetapi yang paling baik diantara yang kedua itu ialah siapa yang memulai mengucapkan salam kepada lawannya'."* (Muttafaqun Alaih)

Dampak yang ditimbulkan dari putusnya silaturrahmi, yaitu segala amalnya tidak berguna dan tidak berpahala, amalan sholatnya tidak berpahala, dan seorang yang memutus silaturrahmi diharamkan untuk masuk surga. Hal ini menunjukkan bahwa Allah Swt. sangat murka dengan kaum yang memutus tali silaturrahmi antar sesamanya.

2.6.3 Kelompok Manusia yang Dicintai Allah Swt.

Dalam matematika, grup adalah suatu himpunan, beserta suatu operasi biner, seperti perkalian atau penjumlahan, yang memenuhi beberapa aksioma yang diuraikan dibawah ini. Misalnya, himpunan bilangan bulat adalah suatu grup terhadap operasi penjumlahan. Berikut ayat yang menjelaskan tentang suatu himpunan.

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ۝٧

"(yaitu) jalan orang-orang yang Telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat" (QS. Al-Fatihah/1:7)

Ayat tersebut merupakan contoh bahwa kehidupan manusia terdiri dari beberapa macam golongan atau kelompok. Yang dapat diartikan pula, bahwa kumpulan beberapa golongan itu merupakan suatu himpunan. Pada ayat tersebut manusia terbagi menjadi 3 kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah Swt., (2) kelompok yang mendapat murka dari Allah Swt., dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2006:47).

Salah satu contoh kelompok yang mendapat nikmat dari Allah Swt. adalah orang-orang yang taat kepada Allah Swt. dan Rasul-Nya, sebagaimana dijelaskan dalam al-Quran surat an-Nisaa' ayat 69 berikut.

وَمَن يُطِعِ ٱللَّهَ وَٱلرَّسُولَ فَأُوْلَٰٓئِكَ مَعَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمَ ٱللَّهُ عَلَيۡهِم مِّنَ ٱلنَّبِيِّـۧنَ وَٱلصِّدِّيقِينَ وَٱلشُّهَدَآءِ
وَٱلصَّٰلِحِينَۚ وَحَسُنَ أُوْلَٰٓئِكَ رَفِيقٗا ۝٦٩

"Dan Barangsiapa yang mentaati Allah dan Rasul(Nya), mereka itu akan bersama-sama dengan orang-orang yang dianugerahi nikmat oleh Allah, Yaitu: Nabi-nabi, Para shiddiiqiin[314], orang-orang yang mati syahid, dan orang-orang saleh. dan mereka Itulah teman yang sebaik-baiknya." (QS. An-Nisaa/4: 69)

Ayat tersebut didukung adanya sebuah hadits yang mengatakan bahwa Allah Swt. memberi nikmat-Nya kepada orang-orang yang senantiasa mengerjakan kewajibannya. Dari Abu Hurairah ra, berkata bahwa Rasulullah Saw bersabda,

"*Bahwasanya Allah Swt berfirman (Hadits Qudsi), 'Siapa saja yang memusuhi kekasih-Ku, maka Aku akan nyatakan perang terhadapnya. Sesuatu yang paling Aku sukai dari yang dikerjakan hamba-Ku, yaitu apabila ia mengerjakan apa yang telah Aku wajibkan kepadanya. Seseorang itu senantiasa mendekatkan diri kepada-Ku dengan mengerjakan amalan-amalan sunnah sehingga Aku mencintainya. Apabila Aku mencintainya, maka Aku merupakan penglihatan yang dia gunakan untuk melihat. Aku merupakan tangan yang ia pergunakan untuk meraih sesuatu. Aku juga merupakan kaki yang ia pergunakan untuk berjalan. Seandainya ia memohon kepada-Ku, Aku akan mengabulkannya. Seandainya ia berlindung kepada-Ku, niscaya Aku akan melindunginya'.*" (HR. Bukhari)

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Grup Automorfisma dari Graf *Commuting* pada Grup Dihedral

Berdasarkan teori sebelumnya, telah diketahui bahwa grup dihedral dengan *order* $2n$ adalah $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\ s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Dalam pembahasan ini, untuk menentukan gup automorfisma dari graf *commuting* pada grup dihedral, penulis memilih beberapa contoh kasus, yaitu $D_6, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}$ dan D_{16}.

3.1.1 Grup Automorfisma dari Graf *Commuting* pada Grup Dihedral-6 ($D_{2.3}$)

Elemen-elemen dari grup dihedral-6 yaitu $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Dengan operasi " $\circ$ ", maka diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.2 Tabel *Cayley* dari Grup Dihedral-6

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	1	sr^2	s	sr
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	1	r	sr	sr^2	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	s	r^2	1	r
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Berdasarkan Tabel 3.1, *center* grup dihedral-6 adalah $\{1\}$, karena 1 komutatif dengan semua elemen grup dihedral-6. Selanjutnya dapat ditentukan elemen-elemen yang saling komutatif adalah:

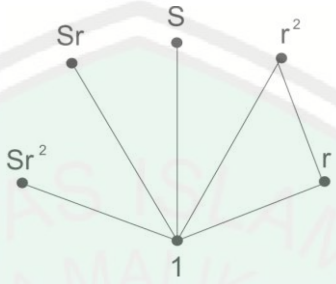
1. Elemen r^i saling komutatif,

$$1 \circ r = r \circ 1 \qquad 1 \circ r^2 = r^2 \circ 1 \qquad r \circ r^2 = r^2 \circ r$$

2. 1 komutatif dengan elemen sr^i,

$s \circ 1 = 1 \circ s$ $\qquad$ $sr \circ 1 = 1 \circ sr$ $\qquad$ $sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$

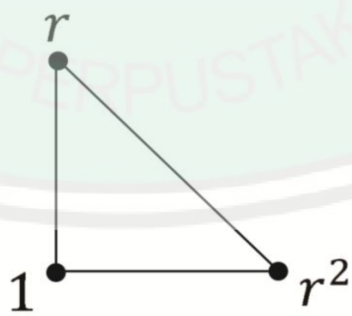
Sehingga dapat digambarkan graf *commuting* dari grup dihedral-6 sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf *Commuting* Grup Dihedral-6 (D_6)

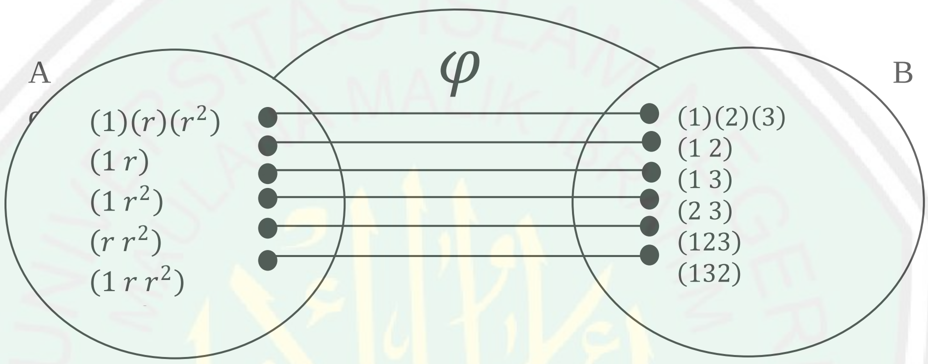
Dari graf *commuting* yang telah terbentuk, kemudian dikelompokkan menjadi beberapa jenis graf lain dengan mengambil X adalah *subset* dari D_{2n}. Ambil $X_1 = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ untuk membentuk graf *commuting* $C(D_{2n}, X_1)$, dan ambil $X_2 = \{1, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$ untuk membentuk graf *commuting* $C(D_{2n}, X_2)$.

Untuk graf *commuting* dari $X_1 = \{1, r, r^2\}$ dari grup D_6 akan berbentuk graf komplit-3 (K_3) yang terdiri dari tiga titik $1, r$, dan r^2, untuk masing-masing titik berderajat 2 sebagai berikut



Gambar 3.2 Graf Komplit (K_3) dari Grup Dihedral-6 (D_6)

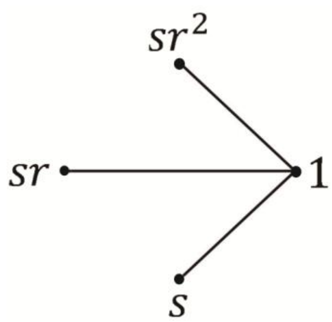
Berdasarkan definisi, graf komplit merupakan graf dengan setiap titik yang berbeda saling terhubung langsung (*adjacent*). Sehingga pemetaan automorfisma titik pada graf komplit dapat dilakukan terhadap dirinya sendiri dan semua titik lainnya. Karena graf *commuting* $C(D_6, X_1 = \{1, r, r^2\})$ berbentuk graf komplit-3, maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_6, X_1 = \{1, r, r^2\})$ adalah himpunan permutasi dari $\{1, r, r^2\}$, yaitu $\{(1), (1\ r), (1\ r^2), (r\ r^2), (1, r, r^2), (1\ r^2\ r)\}$. Grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_6, X_1 = \{1, r, r^2\})$ isomorfik dengan grup automorfisma pada graf komplit-3 melalui pemetaan berikut



Gambar 3.3 Pemetaan dari A ke B

Grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_6, X_1 = \{1, r, r^2\})$ isomorfik dengan grup automorfisma pada graf komplit-3 serupa dengan permutasi pada grup simetri-3, maka dapat disimpulkan pula bahwa grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_6, X = \{1, r, r^2\})$ berbentuk grup simetri-3.

Untuk graf *commuting* dari $X_2 = \{1, s, sr, sr^2\}$ pada grup D_6 akan berbentuk graf bintang-3 $(K_{1,3})$ terdiri dari empat titik $V(K_{1,3}) = \{1, s, sr, sr^2\}$ yang masing-masing titik berderajat 1 kecuali unsur 1, sebagai berikut

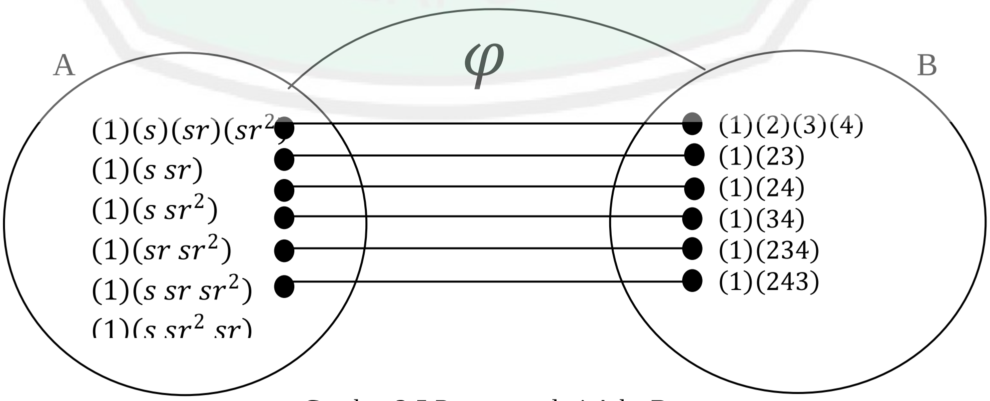


Gambar 3.4 Graf Bintang $(K_{1,3})$ dari Grup Dihedral-6 (D_6)

Berdasarkan definisi, automorfisma pada graf *G* adalah permutasi φ pada himpunan *V*(*G*) dengan syarat bahwa untuk sebarang *u*, *v*∈*V*(*G*) berlaku *uv*∈*E*(*G*) jika dan hanya jika φ(*u*)φ(*v*) ∈*E*(*G*). Maka automorfisma pada graf *commuting* dari $X_2 = \{1, s, sr, sr^2\}$ adalah sebagai berikut

1. $(1)(s)(sr)(sr^2)$
2. $(1)(s\ sr)(sr^2)$
3. $(1)(s\ sr^2)(sr)$
4. $(1)(sr\ sr^2)$
5. $(1)(s\ sr\ sr^2)$
6. $(1)(s\ sr^2\ sr)$

Automorfisma pada graf *commuting* dari $X_2 = \{1, s, sr, sr^2\}$ serupa dengan automorfisma pada graf bintang $K_{1,3}$,yaitu $\{(1), (23), (24), (34), (234), (243)\}$. Maka dapat disimpulkan bahwa grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_6, X_2 = \{1, s, sr, sr^2\})$ (disimbolkan dengan A) isomorfik dengan grup automorfisma dari graf bintang-3 $(K_{1,3})$ (disimbolkan dengan B) lewat pemetaan berikut.



Gambar 3.5 Pemetaan dari A ke B

Terlihat bahwa pola automorfisma yang terbentuk tersebut menyerupai permutasi pada grup simetri-3, maka grup automorfisma pada graf *commmuting* $C(D_6, X_2 = \{1, s, sr, sr^2\})$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf bintang-3 $(K_{1,3})$ yaitu berbentuk grup simetri-3.

3.1.2 Grup Automorfisma dari Graf *Commuting* pada Grup Dihedral-8 $(D_{2.4})$

Elemen-elemen dari grup dihedral-*8* yaitu $\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Dengan operasi " ∘ ", maka diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.3 Tabel *Cayley* dari Grup Dihedral-*8*

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan Tabel 3.2, terdapat dua elemen yang menjadi *center* grup yaitu $\{1, r^2\}$, karena keduanya bersifat komutatif dengan semua elemen grup dihedral-*8*. Sehingga elemen-elemen yang saling komutatif adalah:

1. r^2 komutatif dengan semua unsur D_8,

$1 \circ r^2 = r^2 \circ 1$ $\quad$ $sr \circ r^2 = r^2 \circ sr$

$r \circ r^2 = r^2 \circ r$ $\quad$ $sr^2 \circ r^2 = r^2 \circ sr^2$

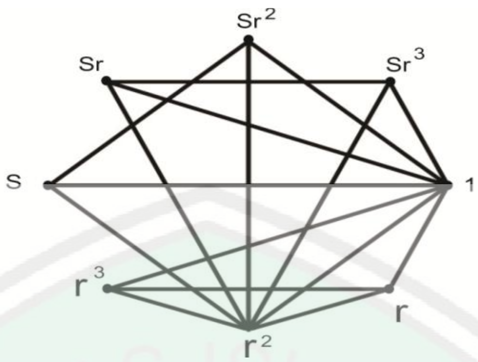
$r^3 \circ r^2 = r^2 \circ r^3$ $\quad$ $sr^3 \circ r^2 = r^2 \circ sr^3$

$s \circ r^2 = r^2 \circ s$

2. Elemen s komutatif dengan elemen sr^2,dan elemen sr komutatif dengan sr^3,

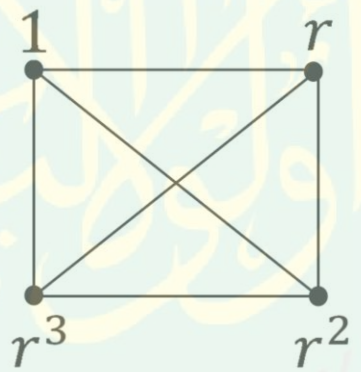
$s \circ sr^2 = sr^2 \circ s$ $\quad$ $sr \circ sr^3 = sr^3 \circ sr$

Sehingga dapat digambarkan graf *commuting*-nya yaitu:



Gambar 3.6 Graf *Commuting* dari Grup Dihedral-8 (D_8)

Berdasarkan graf pada Gambar 3.6, didapatkan graf *commuting* dari $X_1 = \{1, r, r^2, r^3\}$ pada grup D_8 akan berbentuk graf komplit-4 (K_4) yang terdiri dari empat titik $1, r, r^2$, dan r^3, yang masing-masing titik berderajat 3 sebagai berikut



Gambar 3.7 Graf Komplit (K_4) dari Grup Dihedral-8 (D_8)

Graf *commuting* $C(D_8, X_1 = \{1, r, r^2, r^3\})$ berbentuk graf komplit-4, maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_8, X_1 = \{1, r, r^2, r^3\})$ adalah himpunan permutasi dari $\{1, r, r^2, r^3\}$. Grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_8, X_1 = \{1, r, r^2, r^3\})$ isomorfik dengan grup automorfisma pada graf komplit-4 melalui korespondensi $1 \backsim 1, r \backsim 2, r^2 \backsim 3, r^3 \backsim 4$. Karena grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_8, X_1 = \{1, r, r^2, r^3\})$ serupa dengan permutasi pada grup simetri-4, sehingga dapat disimpulkan pula bahwa grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_8, X_1 = \{1, r, r^2, r^3\})$ berbentuk grup simetri-4.

Sedangkan untuk graf *commuting* dari $X_2 = \{1, s, sr, sr^2, sr^3\}$ pada grup D_8 akan berbentuk graf kincir $Wd_{3,2}$ yang memiliki 5 titik $(1, s, sr, sr^2, sr^3)$ yang masing-masing titik berderajat 2, kecuali unsur 1 (Karena titik 1 berderajat 4).

Gambar 3.8 Graf Kincir $Wd_{3,2}$ dari Grup Dihedral-8 (D_8)

Automorfisma dari graf *commuting* $C(D_8, X_2 = \{1, s, sr, sr^2, sr^3\})$ adalah sebagai berikut

1. $(1)(s)(sr)(sr^2)(sr^3)$
2. $(1)(s\ sr^2)(\mathrm{sr})(\mathrm{sr}^3)$
3. $(1)(\mathrm{sr\ sr}^3)(\mathrm{s})(\mathrm{sr}^2)$
4. $(1)(\mathrm{s\ sr})(\mathrm{sr}^2\ \mathrm{sr}^3)$
5. $(1)(\mathrm{s\ sr}^2)(\mathrm{sr\ sr}^3)$
6. $(1)(\mathrm{s\ sr}^3)(\mathrm{sr\ sr}^2)$
7. $(1)(\mathrm{s\ sr\ sr}^2\ \mathrm{sr}^3)$
8. $(1)(\ \mathrm{s\ sr}^3\ \mathrm{sr}^2\ sr)$

Grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{12}, X_2)$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf kincir $Wd_{3,3}$ melalui korespondensi $1 \backsim 1$, $sr^2 \backsim 2$, $sr \backsim 3, sr^3 \backsim 4$. Karena pada grup dihedral-8 terdapat 2 unsur yang menjadi *center* grup yaitu unsur 1 dan unsur r^2, maka kedudukan unsur 1 pada gambar 3.8 graf kincir $Wd_{3,2}$ dapat digantikan dengan unsur r^2. Sehingga grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_8, X_2)$ tetap isomorfik dengan grup automorfisma dari graf kincir $Wd_{3,2}$.

3.1.3 Grup Automorfisma dari Graf *Commuting* pada Grup Dihedral-10 $(D_{2.5})$

Elemen-elemen dari grup dihedral-*10* yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Dengan operasi " $\circ$ ", maka diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.3 Tabel *Cayley* dari Grup Dihedral-*10*

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
sr^3	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
sr^4	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Dari Tabel 3.3, terlihat bahwa *center* grup dihedral-*10* yaitu $\{1\}$, karena 1 komutatif dengan semua elemen grup dihedral-*10*. Sehingga elemen-elemen yang saling komutatif adalah:

1. Elemen r^i saling komutatif,

$1 \circ r = r \circ 1$ $\qquad r \circ r^2 = r^2 \circ r$ $\qquad r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2$

$1 \circ r^2 = r^2 \circ 1$ $\qquad r \circ r^3 = r^3 \circ r$ $\qquad r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$

$1 \circ r^3 = r^3 \circ 1$ $\qquad r \circ r^4 = r^4 \circ r$

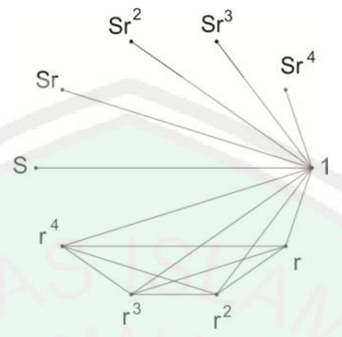
$1 \circ r^4 = r^4 \circ 1$ $\qquad r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$

2. 1 komutatif dengan elemen sr^i,

$s \circ 1 = 1 \circ s$ $\qquad sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$ $\qquad sr^4 \circ 1 = 1 \circ sr^4$

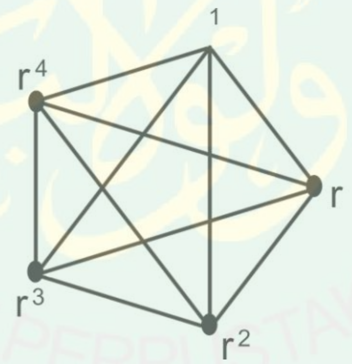
$sr \circ 1 = 1 \circ sr$ $\qquad$ $sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$

Sehingga dapat digambarkan graf *commuting*-nya yaitu:



Gambar 3.9 Graf *commuting* dari Grup Dihedral-10 (D_{10})

Berdasarkan graf pada Gambar 3.9, didapatkan graf *commuting* dari $X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}$ pada grup D_{10} akan berbentuk graf komplit-5 (K_5) yang terdiri dari lima titik $1, r, r^2$, r^3 dan r^4, yang masing-masing titik berderajat 4 sebagai berikut

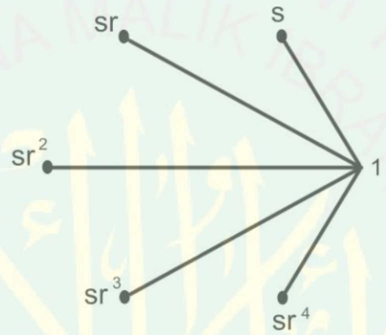


Gambar 3.10 Graf Komplit-5 (K_5) dari Grup Dihedral-10 (D_{10})

Graf *commuting* $C(D_{10}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\})$ berbentuk graf komplit-5, maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{10}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\})$ adalah himpunan permutasi dari $\{1, r, r^2, r^3, r^4\}$. Grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{10}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\})$ isomorfik dengan grup automorfisma pada graf komplit-5 melalui korespondensi $1 \backsim 1$, $r \backsim 2$, $r^2 \backsim 3$, $r^3 \backsim 4, r^4 \backsim 5$. Karena grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{10}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\})$

serupa dengan permutasi pada grup simetri-5, maka dapat disimpulkan pula bahwa grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{10}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4\})$ berbentuk grup simetri-5.

Sedangkan untuk graf *commuting* dari $X_2 = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$ pada grup D_{10} akan berbentuk graf bintang-5 $(K_{1,5})$ terdiri dari enam titik $V(K_{1,5}) = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$ yang masing-masing titik berderajat 1 kecuali unsur 1, sebagai berikut



Gambar 3.11 Graf Bintang-5 ($K_{1,5}$) dari Grup Dihedral-10 (D_{10})

Grup automorfisma pada graf *commuting* dari $X_2 = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$ isomorfik dengan grup automorfisma pada graf bintang-5$(K_{1,5})$ melalui korespondensi $1 \backsim 1$, $s \backsim 2$, $sr \backsim 3$, $sr^2 \backsim 4, sr^3 \backsim 5, sr^6 \backsim 6$. Karena grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{10}, X_2 = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\})$ serupa dengan permutasi pada grup simetri-5, maka grup automorfisma pada graf *commmuting* $C(D_{10}, X_2 = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\})$ berbentuk grup simetri-5.

3.1.4 Grup Automorfisma dari Graf *Commuting* pada Grup Dihedral-12 ($\boldsymbol{D_{2.6}}$)

Elemen-elemen dari grup dihedral-*12* yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2,$ sr^3, sr^4, $sr^5\}$. Dengan operasi "$\circ$", maka diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.4 Tabel *Cayley* dari Grup Dihedral-*12*

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Berdasarkan Tabel 3.4, terdapat dua elemen yang menjadi *center* grup yaitu $\{1, r^3\}$, karena keduanya bersifat komutatif dengan semua elemen grup dihedral-*12*. Sehingga elemen-elemen yang saling komutatif pada grup dihedral-*12* adalah sebagai berikut:

1. r^3 komutatif dengan semua unsur D_{12},

$1 \circ r^3 = r^3 \circ 1$ $\qquad$ $s \circ r^3 = r^3 \circ s$

$r \circ r^3 = r^3 \circ r$ $\qquad$ $sr \circ r^3 = r^3 \circ sr$

$r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$ $\qquad$ $sr^2 \circ r^3 = r^3 \circ sr^2$

$r^4 \circ r^3 = r^3 \circ r^4$ $\qquad$ $sr^3 \circ r^3 = r^3 \circ sr^3$

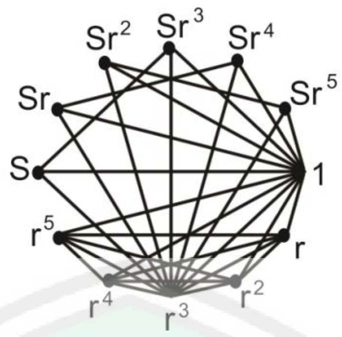
$r^5 \circ r^3 = r^3 \circ r^5$ $\qquad$ $sr^4 \circ r^3 = r^3 \circ sr^4$

$sr^5 \circ r^3 = r^3 \circ sr^5$

2. Elemen s komutatif dengan elemen sr^3, elemen sr komutatif dengan sr^4, dan elemen sr^2 komutatif dengan sr^5

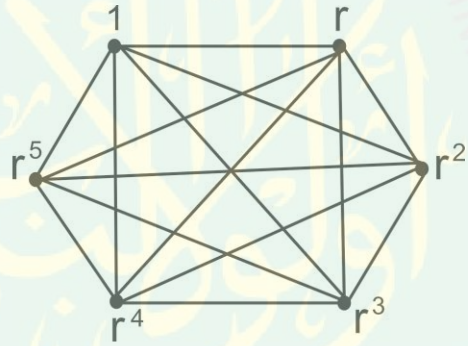
$s \circ sr^3 = sr^3 \circ s$ $\qquad$ $sr \circ sr^4 = sr^4 \circ sr$ $\qquad$ $sr^2 \circ sr^5 = sr^5 \circ sr^2$

Sehingga dapat digambarkan graf *commuting*-nya yaitu:



Gambar 3.12 Graf *Commuting* dari Grup Dihedral-12 (D_{12})

Berdasarkan graf pada Gambar 3.12, didapatkan graf *commuting* dari $X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ pada grup D_{12} akan berbentuk graf komplit-6 (K_6) yang terdiri dari enam titik $1, r, r^2, r^3, r^4$, dan r^5, yang masing-masing titik berderajat 5 sebagai berikut

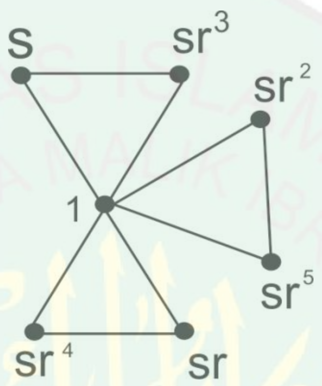


Gambar 3.13 Graf Komplit-6 (K_6) dari Grup Dihedral -12 (D_{12})

Graf *commuting* $C(D_{12}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\})$ berbentuk graf komplit-6, maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{12}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\})$ adalah himpunan permutasi dari $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$. Grup automorfisma dari graf *commuting* $(D_{12}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\})$ isomorfik dengan grup automorfisma pada graf komplit-6 melalui korespondensi $1 \backsim 1$, $r \backsim 2$, $r^2 \backsim 3$, $r^3 \backsim 4, r^4 \backsim 5, r^5 \backsim 6$. Karena grup automorfisma dari graf *commuting* $(D_{12}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\})$ serupa dengan permutasi pada grup simetri-6, sehingga dapat disimpulkan pula bahwa grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{12}, X_1 =$

$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$) berbentuk grup simetri-6.

Sedangkan untuk graf *commuting* dari $X_2 = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$ pada grup D_{12} akan berbentuk graf kincir $Wd_{3,3}$ yang memiliki 7 titik $(1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5)$ yang masing-masing titik berderajat 2, kecuali unsur 1 (karena titik 1 berderajat 6).



Gambar 3.14 Graf Kincir ($Wd_{4,4}$) dari Grup Dihedral -12 (D_{12})

Grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{12}, X_2)$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf kincir $Wd_{3,3}$ melalui korespondensi $1 \backsim 1$, $s \backsim 2$, $sr^3 \backsim 3$, $sr^2 \backsim 4, sr^5 \backsim 5, sr \backsim 6, sr^4 \backsim 7$. Karena pada grup dihedral-12 terdapat 2 unsur yang menjadi *center* grup yaitu unsur 1 dan unsur r^3, maka kedudukan unsur 1 pada Gambar 3.14 graf kincir $Wd_{3,3}$ dapat digantikan dengan unsur r^3. Sehingga grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{12}, X_2)$ tetap isomorfik dengan grup automorfisma dari graf kincir $Wd_{3,3}$.

3.1.5 Grup Automorfisma dari Graf *Commuting* pada Grup Dihedral-*14* ($D_{2\cdot 7}$)

Elemen-elemen dari grup dihedral-*14* yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Dengan operasi "$\circ$", maka diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.5 Tabel *Cayley* dari Grup Dihedral-*14*

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
r^4	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
r^5	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
r^6	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
sr^5	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
sr^6	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

Berdasarkan Tabel 3.5, *center* grup dihedral-*14* adalah $\{1\}$, karena 1 komutatif dengan semua elemen grup dihedral-*14*. Sehingga dapat ditentukan elemen-elemen yang saling komutatif adalah:

1. Elemen r^i saling komutatif,

$1 \circ r = r \circ 1$ $r \circ r^2 = r^2 \circ r$ $r^4 \circ r^3 = r^3 \circ r^4$

$1 \circ r^2 = r^2 \circ 1$ $r \circ r^3 = r^3 \circ r$ $r^5 \circ r^3 = r^3 \circ r^5$

$1 \circ r^3 = r^3 \circ 1$ $r \circ r^4 = r^4 \circ r$ $r^6 \circ r^3 = r^3 \circ r^6$

$1 \circ r^4 = r^4 \circ 1$ $r \circ r^5 = r^5 \circ r$ $r^5 \circ r^4 = r^4 \circ r^5$

$1 \circ r^5 = r^5 \circ 1$ $r \circ r^6 = r^6 \circ r$ $r^6 \circ r^4 = r^4 \circ r^5$

$1 \circ r^6 = r^6 \circ 1$ $r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$ $r^5 \circ r^6 = r^6 \circ r^5$

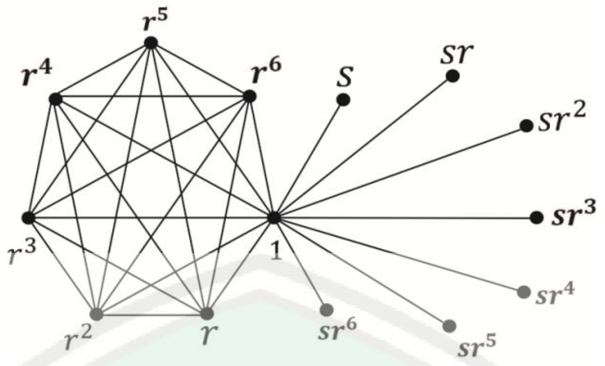
2. 1 komutatif dengan elemen sr^i,

$s \circ 1 = 1 \circ s$ $sr \circ 1 = 1 \circ sr$ $sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$

$sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$ $sr^4 \circ 1 = 1 \circ sr^4$ $sr^5 \circ 1 = 1 \circ sr^5$

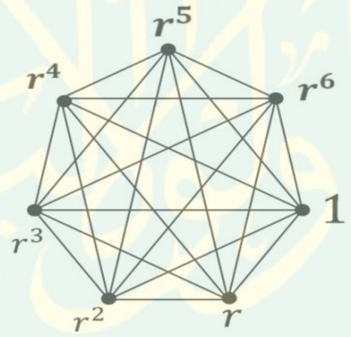
$sr^6 \circ 1 = 1 \circ sr^6$

Sehingga dapat digambarkan graf *commuting*-nya yaitu:



Gambar 3.15 Graf *Commuting* dari Grup Dihedral-14(D_{14})

Berdasarkan graf pada Gambar 3.15, didapatkan graf *commuting* dari $X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$ dari grup D_{14} akan berbentuk graf komplit-7 (K_7) yang terdiri dari tujuh titik $1, r, r^2, r^3, r^4, r^5$, dan r^6, yang masing-masing titik berderajat 6 sebagai berikut



Gambar 3.16 Graf Komplit (K_7) dari Grup Dihedral-14(D_{14})

Karena graf *commuting* $C(D_{14}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})$ berbentuk graf komplit-7, maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{14}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})$ adalah himpunan permutasi dari $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$. Grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{14}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})$ isomorfik dengan grup automorfisma pada graf komplit-7 melalui korespondensi $1 \backsim 1, r \backsim 2,\ r^2 \backsim 3,\ r^3 \backsim 4, r^4 \backsim 5, r^5 \backsim 6, r^6 \backsim 7$. Karena grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{14}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})$ serupa dengan permutasi pada grup simetri-7, maka dapat disimpulkan pula bahwa grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{14}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\})$ berbentuk grup simetri-7.

Sedangkan untuk graf *commuting* dari $X_2 = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$ dari grup D_{14} akan berbentuk graf bintang-7 $(K_{1,7})$ yang terdiri dari delapan titik $V(K_{1,7}) = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$ yang masing-masing titik berderajat 1 kecuali unsur 1, sebagai berikut

Gambar 3.17 Graf Bintang $(K_{1,7})$ dari Grup Dihedral-14(D_{14})

Grup automorfisma pada graf *commuting* dari $X_2 = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$ isomorfik dengan grup automorfisma pada graf bintang-7$(K_{1,7})$ melalui korespondensi $1 \backsim 1$, $s \backsim 2$, $sr \backsim 3$, $sr^2 \backsim 4$, $sr^3 \backsim 5$, $sr^4 \backsim 6$, $sr^5 \backsim 7$, $sr^6 \backsim 8$. Karena grup automorfisma pada graf *commuting* $C(D_{14}, X_2 = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\})$ serupa dengan permutasi pada grup simetri-7, maka grup automorfisma pada graf *commuting* $C(D_{14}, X_2 = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\})$ berbentuk grup simetri-7.

3.1.6 Grup Automorfisma dari Graf *Commuting* pada Grup Dihedral-*16* $(\boldsymbol{D_{2\cdot 8}})$

Elemen-elemen dari grup dihedral-*16* yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Dengan operasi "$\circ$", maka diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.6 Tabel *Cayley* dari Grup Dihedral-*16*

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Berdasarkan Tabel 3.6, terdapat dua elemen yang menjadi *center* grup yaitu $\{1, r^4\}$, karena keduanya bersifat komutatif dengan semua elemen grup dihedral-*16*. Sehingga elemen-elemen yang saling komutatif adalah:

1. Elemen r^i saling komutatif

$r \circ r^2 = r^2 \circ r$
$r \circ r^3 = r^3 \circ r$
$r \circ r^4 = r^4 \circ r$
$r \circ r^5 = r^5 \circ r$
$r \circ r^6 = r^6 \circ r$
$r \circ r^7 = r^7 \circ r$
$r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$
$r^{2\circ} \circ = r^4 \circ r^2$
$r^{2\circ} \circ = r^5 \circ r^2$
$r^2 \circ r^6 = r^6 \circ {}^\circ r^2$
$r^2 \circ r^7 = r^7 \circ r^2$
$r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$
$r^3 \circ r^5 = r^5 \circ r^3$
$r^3 \circ r^6 = r^6 \circ r^3$
$r^3 \circ r^7 = r^7 \circ r^3$
$r^4 \circ r^5 = r^5 \circ r^4$
$r^4 \circ r^6 = r^6 \circ r^4$
$r^4 \circ r^7 = r^7 \circ r^4$
$r^5 \circ r^6 = r^6 \circ r^5$
$r^5 \circ r^7 = r^7 \circ r^5$
$r^6 \circ r^7 = r^7 \circ r^6$

2. 1 dan r^4 saling komutatif dengan elemen sr^i

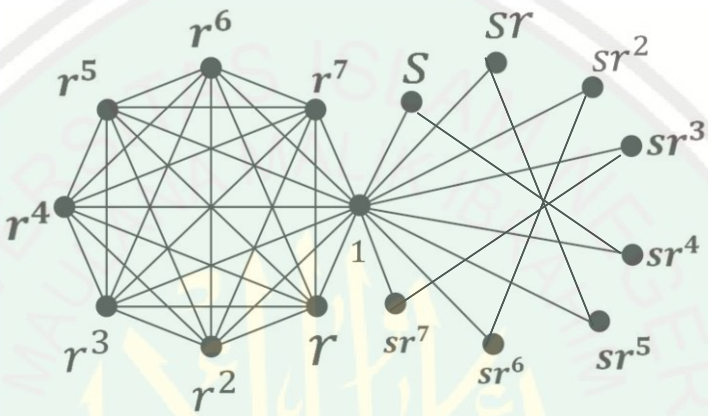
$1 \circ s = s \circ 1$
$1 \circ sr = sr \circ 1$
$1 \circ sr^2 = sr^2 \circ 1$
$1 \circ sr^3 = sr^3 \circ 1$
$1 \circ sr^5 = sr^5 \circ 1$
$1 \circ sr^6 = sr^6 \circ 1$
$1 \circ sr^7 = sr^7 \circ 1$
$r^4 \circ s = s \circ r^4$
$r^4 \circ sr = sr \circ r^4$
$r^4 \circ sr^2 = sr^2 \circ r^4$
$r^4 \circ sr^3 = sr^{3\circ} r^4$
$r^4 \circ sr^5 = sr^5 \circ r^4$
$r^4 \circ sr^6 = sr^6 \circ r^4$
$r^4 \circ sr^7 = sr^7 \circ r^4$

3. Elemen s komutatif dengan elemen sr^3, elemen sr komutatif dengan sr^4, dan elemen sr^2 komutatif dengan sr^5

$s \circ sr^4 = sr^4 \circ s$ $\qquad$ $sr^2 \circ sr^6 = sr^6 \circ sr^2$

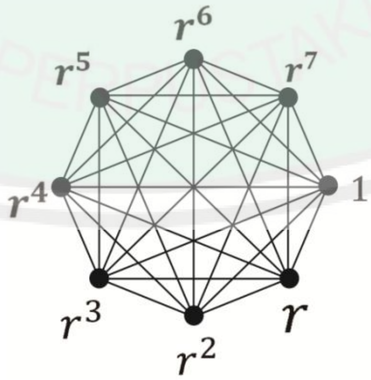
$sr \circ sr^5 = sr^5 \circ sr$ $\qquad$ $sr^3 \circ sr^7 = sr^7 \circ sr^3$

Sehingga dapat digambarkan graf *commuting*-nya yaitu:



Gambar 3.18 Graf *Commuting* dari Grup Dihedral-16 (D_{16})

Berdasarkan graf pada Gambar 3.18, didapatkan graf *commuting* dari $X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$ pada grup D_{16} akan berbentuk graf komplit-8 (K_8) yang terdiri dari delapan titik $1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6$, dan r^7, yang masing-masing titik berderajat-7 sebagai berikut

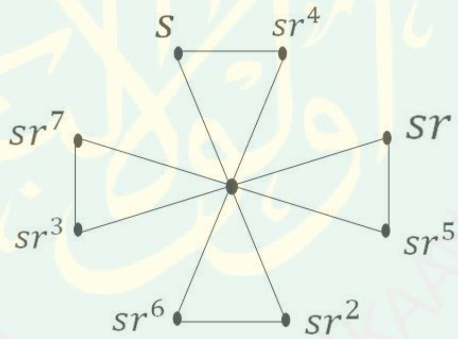


Gambar 3.19 Graf Komplit (K_8) dari Grup Dihedral-16 (D_{16})

Graf *commuting* $C(D_{16}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\})$ berbentuk graf komplit-8, maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{16}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\})$ adalah himpunan permutasi dari

$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$. Grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{16}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\})$ isomorfik dengan grup automorfisma pada graf komplit-8 melalui korespondensi $1 \backsim 1$, $r \backsim 2$, $r^2 \backsim 3$, $r^3 \backsim 4, r^4 \backsim 5, r^5 \backsim 6, r^6 \backsim 7, r^7 \backsim 8$. Karena grup automorfisma pada graf $C(D_{16}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\})$ serupa dengan permutasi pada grup simetri-8, maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{16}, X_1 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\})$ berbentuk grup simetri-8.

Sedangkan untuk graf *commuting* dari $X_2 = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$ pada grup D_{16} akan berbentuk graf kincir $Wd_{3,4}$ yang memiliki 9 titik $(1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7)$ yang masing-masing simpul berderajat 2, kecuali unsur 1 (Karena titik 1 berderajat 8).



Gambar 3.20 Graf Kincir ($Wd_{3,4}$) dari Grup Dihedral -16 (D_{16})

Grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{16}, X_2 = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\})$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf kincir $Wd_{3,4}$ melalui korespondensi $1 \backsim 1$, $s \backsim 2$, $sr^4 \backsim 3$, $sr \backsim 4, sr^5 \backsim 5, sr^2 \backsim 6, sr^6 \backsim 7, sr^3 \backsim 8, sr^7 \backsim 9$. Karena pada grup dihedral-16 terdapat 2 unsur yang menjadi *center* grup yaitu unsur 1 dan unsur r^4, maka kedudukan unsur 1 pada gambar 3.20 graf kincir $Wd_{3,4}$ dapat digantikan dengan unsur r^4. Sehingga grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{16}, X_2)$ tetap isomorfik dengan grup automorfisma dari graf kincir $Wd_{3,4}$.

Berdasarkan beberapa contoh kasus pada bagian sebelumnya, maka dapat dirumuskan beberapa teorema sebagai berikut

Teorema 1

Misalkan $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-i}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-i}\}$ adalah grup dihedral dengan $n \in \mathbb{N}$, dengan $n \geq 3$. Kemudian misalkan $X_1 = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-i}\}$ adalah *subset* dari D_{2n}, maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{2n}, X_1)$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf komplit-n (K_n) yaitu berbentuk grup simetri-n (S_n).

Bukti

Berdasarkan definisi graf komplit yang menyatakan bahwa setiap titik berbeda saling terhubung langsung, maka pemetaan automorfisma titik pada graf komplit dapat dilakukan terhadap dirinya sendiri dan semua titik lainnya. Karena graf *commuting* $C(D_{2n}, X_1 = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\})$ berbentuk graf komplit dan automorfisma yang terbentuk adalah himpunan permutasi dari $\{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$, maka grup automorfisma pada graf *commuting* $C(D_{2n}, X_1 = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\})$ isomorfik dengan grup automorfisma pada graf komplit-n (K_n) yang serupa pula dengan grup automorfisma pada grup simetri-n (S_n). Sehingga dapat disimpulkan pula bahwa grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{2n}, X_1 = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\})$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf komplit-n (K_n) yaitu berbentuk grup simetri-n (S_n).

Teorema 2.

Misalkan $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-i}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-i}\}$ adalah grup dihedral dengan $n \in \mathbb{N}$, dan n adalah bilangan ganjil lebih dari atau sama dengan 3, kemudian misalkan $X_2 = \{1, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-i}\}$ adalah *subset* dari D_{2n}, maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{2n}, X_2)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma dari graf bintang $K_{1,n}$ yaitu berbentuk grup simetri-n (S_n).

Bukti.

Karena unsur 1 saling komutatif dengan semua unsur pada X_2, sedangkan semua anggota himpunan X_2 (kecuali unsur 1) tidak saling komutatif, maka graf *commuting* yang terbentuk dari $X_2 = \{1, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-i}\}$ akan berupa graf bintang $K_{1,n}$. Automorfisma pada graf *commuting* dari $X_2 = \{1, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-i}\}$ serupa dengan automorfisma pada graf bintang $K_{1,n}$. Sehingga grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{2n}, X_2)$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf bintang $(K_{1,n})$. Karena pola automorfisma yang terbentuk dari keduanya menyerupai permutasi pada grup simetri-n, maka dapat disimpulkan bahwa grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{2n}, X_2)$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf bintang $(K_{1,n})$ yaitu berbentuk grup simetri-n (S_n).

Teorema 3.

Misalkan $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-i}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-i}\}$ adalah grup dihedral dengan $n \in \mathbb{N}$, dan n adalah bilangan genap lebih dari 3. Misalkan $X_2 = \{1, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-i}\}$ atau $X_2 = \{r^{\frac{n}{2}}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-i}\}$ adalah *subset* dari D_{2n}, maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{2n}, X)$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf kincir $W_{3,\frac{n}{2}}$.

Bukti.

Diketahui dari beberapa contoh kasus pada bagian sebelumnya bahwa untuk n genap lebih dari 3 pada D_{2n}, terdapat 2 unsur yang menjadi *center* grup, yaitu 1 dan $r^{\frac{n}{2}}$, sehingga unsur 1 atau $r^{\frac{n}{2}}$ menjadi titik pusat dari graf *commuting*. Karena n bilangan asli genap, maka s dan $sr^{\frac{n}{2}}$, sr dan $sr^{\frac{n}{2}+1}$, sr^2 dan $sr^{\frac{n}{2}+2}, \dots, sr^{\frac{n}{2}-1}$ dan sr^{n-1} akan saling terhubung langsung di $C(D_{2n}, X_2)$. Dengan demikian graf *commuting* yang memuat $X_2 = \{1, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-i}\}$ atau $X_2 = \{r^{\frac{n}{2}}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-i}\}$ adalah *subset* dari D_{2n} yang akan berbentuk graf kincir $W_{3,\frac{n}{2}}$. Karena grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{2n}, X_2)$ serupa dengan grup automorfisma dari graf kincir $W_{3,\frac{n}{2}}$, sehingga dapat disimpulkan bahwa grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{2n}, X_2)$ isomorfik dengan grup automorfisma graf kincir $W_{3,\frac{n}{2}}$.

3.2 Grup Automorfisma dari Graf *Commuting* pada Grup Simetri

3.2.1. Grup Automorfisma dari Graf *Commuting* pada Grup Simetri-3 (S_3)

Misal diberikan himpunan tak kosong Ω, dengan $\Omega = \{1,2,3\}$, apabila dikenai fungsi bijektif dari $\Omega \to \Omega$, maka dapat dituliskan fungsi bijektif tersebut dalam bentuk sikel sebagai berikut:

1. $(1)(2)(3)$
2. (123)
3. (132)
4. $(1)(23)$

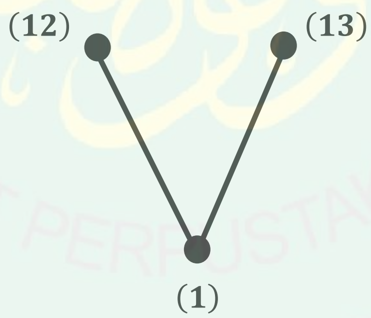
5. $(2)(13)$ 6. $(3)(12)$

Misal $S_3 = \{1, (123), (132), (23), (13), (12)\}$, apabila dikenai operasi komposisi " $\circ$ " pada S_3 maka struktur $(S_3, \circ)$ membentuk grup simetri-3. Ambil X adalah himpunan yang memuat sikel 2 tunggal dan unsur (1) (sebagai unsur identitas), dengan syarat unsur yang memuat sikel 2 tunggal tersebut berbentuk $(1\ m)$, dimana $m \in \mathbb{N}$, dan $2 \leq m \leq n$. Misal diambil $X = \{(1), (12), (13)\}$, dengan X adalah *subset* dari S_3. Kemudian mengoperasikan setiap unsur pada himpunan X tersebut dengan fungsi komposisi " $\circ$ ", maka diperoleh elemen yang saling komutatif sebagai berikut

$(1) \circ (12) = (1\ 2) \circ (1)$

$(1) \circ (13) = (13) \circ (1)$

Dari hasil operasi diatas dapat digambarkan bentuk graf *commuting*-nya sebagai berikut.



Gambar 3.21 Graf Bintang ($K_{1,2}$) dari Grup Simetri - 3 (S_3)

Graf *commuting* dari $X = \{(1), (12), (13)\}$ pada grup simetri-3 berbentuk graf bintang-2 $(K_{1,2})$ yang terdiri dari tiga titik $V(K_{1,2}) = \{(1), (12), (13)\}$, dengan masing-masing titik berderajat satu kecuali unsur 1. Grup automorfisma pada graf *commuting* dari $C(S_3, X = \{(1), (12), (13)\})$ isomorfik dengan grup automorfisma pada graf bintang-2 $(K_{1,2})$ melalui korespondensi $(1) \backsim 1, (12) \backsim 2, (13) \backsim 3$. Karena grup automorfisma pada graf *commuting* dari $C(S_3, X =$

$\{(1),(12),(13)\})$ serupa dengan permutasi pada grup simetri-2, maka grup automorfisma pada graf *commuting* $C(S_3,X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma dari graf bintang-2 $(K_{1,2})$ yaitu berbentuk grup simetri-2.

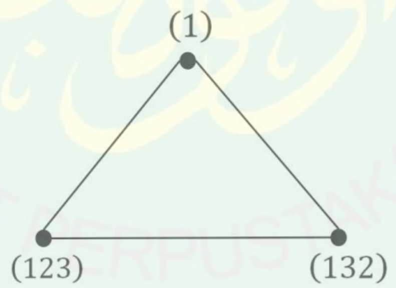
Selanjutnya, ambil Y adalah himpunan yang memuat sikel 3 tunggal dan 1 (sebagai elemen identitas) yang dapat membentuk pola graf lain, yaitu misalkan $Y = \{(1),(123),(132)\}, Y \subseteq S_n$. Kemudian mengoperasikan setiap unsur pada Y tersebut dengan fungsi komposisi $" \circ "$, maka diperoleh elemen yang saling komutatif sebagai berikut

$(1) \circ (1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3) \circ (1)$

$(1) \circ (132) = (132) \circ (1)$

$(1\ 2\ 3) \circ (1\ 3\ 2) = (132) \circ (1\ 2\ 3)$

Dari hasil operasi diatas dapat digambarkan bentuk graf *commuting* dari Y sebagai berikut.



Gambar 3.22 Graf Kincir ($Wd_{3,1}$) dari Grup Simetri - 3 (S_3)

Terlihat pada Gambar 3.22 bahwa graf *commuting* dari $Y = \{(1),(123),(132)\}$ pada grup simetri-3 berbentuk graf kincir $Wd_{3,1}$, yaitu graf kincir dengan satu daun kincir. Grup automorfisma dari graf *commuting* $C(S_3, Y = \{(1),(123),(132)\})$ isomorfik dengan pola automorfisma pada graf kincir $Wd_{3,1}$ melalui korespondensi $(1) \backsim 1, (123) \backsim 2, (132) \backsim 3$.

3.2.2. Grup Automorfisma dari Graf *Commuting* pada Grup Simetri-4 (S_4)

Misal diberikan himpunan tak kosong Ω, dengan $\Omega = \{1,2,3,4\}$, apabila dikenai fungsi bijektif dari $\Omega \to \Omega$, maka dapat dituliskan fungsi bijektif tersebut dalam bentuk sikel sebagai berikut:

1. $(1)(2)(3)(4)$
2. (1234)
3. (1243)
4. (1324)
5. (1342)
6. (1423)
7. (1432)
8. $(1)(234)$
9. $(1)(243)$
10. $(2)(134)$
11. $(2)(143)$
12. $(3)(124)$
13. $(3)(142)$
14. $(4)(123)$
15. $(4)(132)$
16. $(1)(2)(34)$
17. $(1)(3)(24)$
18. $(1)(4)(23)$
19. $(2)(3)(14)$
20. $(2)(4)(13)$
21. $(3)(4)(12)$
22. $(12)(34)$
23. $(13)(24)$
24. $(14)(23)$

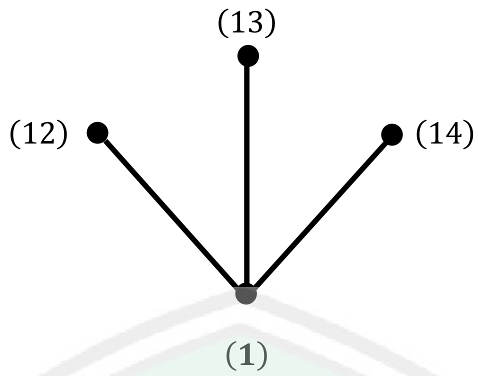
Misal S_4 adalah himpunan yang memuat sikel-sikel tersebut, apabila dikenai operasi komposisi " $\circ$ " pada S_4 maka struktur $(S_4,\circ)$ membentuk grup simetri-4. Ambil X adalah himpunan yang memuat sikel 2 tunggal dan unsur (1) (sebagai unsur identitas), dengan syarat unsur yang memuat sikel 2 tunggal tersebut berbentuk $(1\ m)$, dimana $m \in \mathbb{N}$, dan $2 \leq m \leq 4$. Maka, misal diambil $X = \{(1),(12),(13),(14)\}$ dengan X adalah *subset* dari S_4. Kemudian mengoperasikan setiap unsur pada himpunan X tersebut dengan fungsi komposisi " $\circ$ ", maka diperoleh elemen yang saling komutatif sebagai berikut

$(1) \circ (12) = (12) \circ (1)$

$(1) \circ (13) = (13) \circ (1)$

$(1) \circ (14) = (14) \circ (1)$

Dari hasil operasi diatas dapat digambarkan bentuk graf *commuting* dari elemen tersebut.



Gambar 3.23 Graf Bintang-3 ($K_{1,3}$) dari Grup Simetri-4 (S_4)

Graf *commuting* dari $X = \{(1), (12), (13)(14)\}$ pada grup simetri-4 berbentuk graf bintang-3 $(K_{1,3})$ yang terdiri dari empat titik $V(K_{1,3}) = \{(1), (12), (13), (14)\}$, dengan masing-masing titik berderajat satu kecuali unsur 1. Grup automorfisma pada graf *commuting* dari $C(S_3, X = \{(1), (12), (13), (14)\})$ isomorfik dengan grup automorfisma pada graf bintang-3 $(K_{1,3})$ melalui melalui korespondensi $(1) \backsim 1, (12) \backsim 2, (13) \backsim 3, (14) \backsim 4$. Karena grup automorfisma pada graf *commuting* dari $C(S_4, X = \{(1), (12), (13), (14)\})$ serupa dengan permutasi pada grup simetri-3, maka grup automorfisma pada graf *commmuting* $C(S_4, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma dari graf bintang-3 $(K_{1,3})$ yaitu berbentuk grup simetri-3.

Selanjutnya, ambil Y adalah himpunan yang memuat memuat sikel 3 tunggal dan 1 (sebagai elemen identitas) yang dapat membentuk pola graf lain, yaitu misalkan $Y = \left\{ \begin{matrix} (1), (123), (132), (124), (142), \\ (134), (143), (234), (243) \end{matrix} \right\}, Y \subseteq S_n$. Kemudian mengoperasikan setiap unsur pada Y tersebut dengan fungsi komposisi " $\circ$ ", maka diperoleh elemen yang saling komutatif sebagai berikut

$(1) \circ (1)(234) = (1)(234) \circ (1)$ $\quad$ $(1) \circ (2)(143) = (2)(143) \circ (1)$

$(1) \circ (1)(243) = (1)(243) \circ (1)$ $\quad$ $(1) \circ (3)(124) = (3)(124) \circ (1)$

$(1) \circ (2)(134) = (2)(134) \circ (1)$ $\quad$ $(1) \circ (3)(142) = (3)(142) \circ (1)$

$(1) \circ (4)(123) = (4)(123) \circ (1)$ $(1) \circ (4)(132) = (4)(132) \circ (1)$

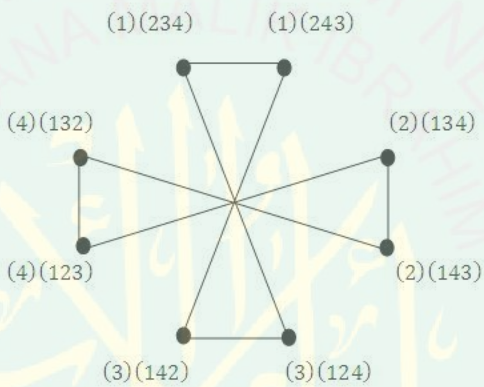
$(1)(234) \circ (1)(243) = (1)(243) \circ (1)(234)$

$(2)(134) \circ (2)(143) = (2)(143) \circ (2)(134)$

$(3)(124) \circ (3)(142) = (3)(142) \circ (3)(124)$

$(4)(123) \circ (4)(132) = (4)(132) \circ (4)(123)$

Dari hasil operasi diatas dapat digambarkan bentuk graf *commuting* dari elemen tersebut.



Gambar 3.24 Graf Kincir-4 ($Wd_{3,4}$) dari Grup Simetri-4 (S_4)

Terlihat pada Gambar 3.24 bahwa graf *commuting* dari $Y = \{(1), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$ pada grup simetri-4 berbentuk graf kincir $Wd_{3,4}$, yaitu graf kincir dengan empat daun kincir. Grup automorfisma dari graf *commuting* $C(S_4, Y = \{(1), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\})$ isomorfik dengan pola automorfisma pada graf kincir $Wd_{3,4}$ melalui korespondensi $(1) \backsim 1, (234) \backsim 2, (243) \backsim 3, (134) \backsim 4, (143) \backsim 5, (124) \backsim 6, (142) \backsim 7, (123) \backsim 8, (132) \backsim 9$.

3.2.3. Grup Automorfisma dari Graf *Commuting* pada Grup Simetri-5 (S_5)

Misal diberikan himpunan tak kosong Ω, dengan $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$, apabila dikenai fungsi bijektif dari $\Omega \rightarrow \Omega$, maka dapat dituliskan fungsi bijektif tersebut dalam bentuk sikel sebagai berikut:

1. $(1)(2)(3)(4)(5)$
2. $(1)(2345)$
3. $(1)(2354)$
4. $(1)(2435)$
5. $(1)(2453)$
6. $(1)(2534)$
7. $(1)(2543)$
8. $(2)(1345)$
9. $(2)(1354)$
10. $(2)(1435)$
11. $(2)(1453)$
12. $(2)(1534)$
13. $(2)(1543)$
14. $(3)(1245)$
15. $(3)(1254)$
16. $(3)(1425)$
17. $(3)(1452)$
18. $(3)(1524)$
19. $(3)(1542)$
20. $(4)(1235)$
21. $(4)(1253)$
22. $(4)(1325)$
23. $(4)(1352)$
24. $(4)(1523)$
25. $(4)(1532)$
26. $(5)(1234)$
27. $(5)(1243)$
28. $(5)(1324)$
29. $(5)(1342)$
30. $(5)(1423)$
31. $(5)(1432)$
32. $(1)(2)(345)$
33. $(1)(2)(354)$
34. $(1)(3)(245)$
35. $(1)(3)(254)$
36. $(1)(4)(235)$
37. $(1)(4)(253)$
38. $(1)(5)(234)$
39. $(1)(5)(243)$
40. $(2)(3)(145)$
41. $(2)(3)(154)$
42. $(2)(4)(135)$
43. $(2)(4)(153)$
44. $(2)(5)(134)$
45. $(2)(5)(143)$
46. $(3)(4)(125)$
47. $(3)(4)(152)$
48. $(3)(5)(124)$
49. $(3)(5)(142)$
50. $(4)(5)(123)$
51. $(4)(5)(132)$
52. $(1)(2)(3)(45)$
53. $(1)(2)(4)(35)$
54. $(1)(2)(5)(34)$
55. $(2)(3)(4)(15)$
56. $(2)(3)(5)(14)$
57. $(2)(4)(5)(13)$
58. $(3)(4)(5)(12)$
59. $(1)(4)(5)(23)$
60. $(1)(3)(5)(24)$
61. $(1)(3)(4)(25)$
62. $(1)(23)(45)$
63. $(1)(24)(35)$
64. $(1)(25)(34)$
65. $(2)(13)(45)$
66. $(2)(14)(35)$
67. $(2)(15)(34)$
68. $(3)(12)(45)$
69. $(3)(14)(25)$
70. $(3)(15)(24)$
71. $(4)(12)(35)$
72. $(4)(13)(25)$
73. $(4)(15)(23)$
74. $(5)(12)(34)$
75. $(5)(13)(24)$
76. $(5)(14)(23)$
77. $(12)(345)$
78. $(12)(354)$
79. $(13)(245)$
80. $(13)(254)$
81. $(14)(235)$
82. $(14)(253)$
83. $(15)(234)$
84. $(15)(243)$
85. $(23)(145)$
86. $(23)(154)$
87. $(24)(135)$
88. $(24)(153)$
89. $(25)(134)$
90. $(25)(143)$
91. $(34)(125)$
92. $(34)(152)$
93. $(35)(124)$
94. $(35)(142)$
95. $(45)(123)$
96. $(45)(132)$
97. (12345)
98. (12354)
99. (12435)
100. (12453)
101. (12534)
102. (12543)
103. (13245)
104. (13254)
105. (13425)
106. (13452)
107. (13524)
108. (13542)

109.	(14235)	113.	(14523)	117.	(15324)
110.	(14253)	114.	(14532)	118.	(15342)
111.	(14325)	115.	(15234)	119.	(15423)
112.	(14352)	116.	(15243)	120.	(15432)

Misal S_5 adalah himpunan yang memuat sikel-sikel tersebut, apabila dikenai operasi komposisi " $\circ$ " pada S_5 maka struktur $(S_5,\circ)$ membentuk grup simetri-5. Ambil X adalah himpunan unsur yang memuat sikel 2 tunggal dan unsur (1) (sebagai unsur identitas), dengan syarat unsur yang memuat sikel 2 tunggal tersebut berbentuk $(1\ m)$, dimana $m \in \mathbb{N}$, dan $2 \leq m \leq 5$. Maka, misal diambil $X = \{(1),(12),(13),(14),(15)\}$ dengan X adalah *subset* dari S_5. Kemudian mengoperasikan setiap unsur pada himpunan X tersebut dengan fungsi komposisi " $\circ$ ", maka diperoleh elemen yang saling komutatif sebagai berikut

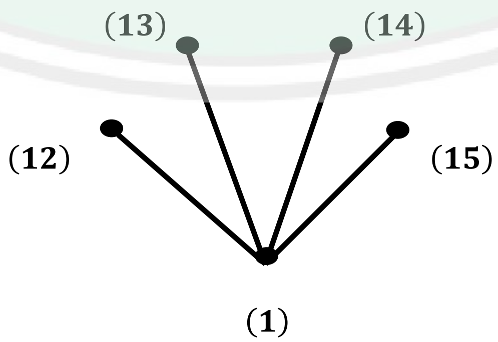
$(1) \circ (12) = (12) \circ (1)$

$(1) \circ (13) = (13) \circ (1)$

$(1) \circ (14) = (14) \circ (1)$

$(1) \circ (15) = (15) \circ (1)$

Dari hasil operasi diatas dapat digambarkan bentuk graf *commuting* dari elemen tersebut.



Gambar 3.25 Graf Bintang-*4* (K_{14}) dari Grup Simetri-*5* (S_5)

Graf *commuting* dari $X = \{(1), (12), (13), (14), (15)\}$ pada grup simetri-5 berbentuk graf bintang-4 $(K_{1,4})$ yang terdiri dari lima titik $V(K_{1,4}) = \{(1), (12), (13), (14), (15)\}$, dengan masing-masing titik berderajat satu kecuali unsur 1. Grup automorfisma pada graf *commuting* dari $C(S_5, X = \{(1), (12), (13), (14), (15)\})$ isomorfik dengan grup automorfisma pada graf bintang-4 $(K_{1,4})$ melalui korespondensi $(1) \backsim 1, (12) \backsim 2, (13) \backsim 3, (14) \backsim 4, (15) \backsim 5$. Karena grup automorfisma pada graf *commuting* dari $C(S_5, X = \{(1), (12), (13), (14), (15)\})$ serupa dengan permutasi pada grup simetri-4, maka grup automorfisma pada graf *commmuting* $C(S_5, X)$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf bintang-4 $(K_{1,4})$ yaitu berbentuk grup simetri-4.

Selanjutnya, ambil Y adalah himpunan yang memuat memuat sikel 3 tunggal dan 1 (sebagai elemen identitas) yang dapat membentuk pola graf lain. Kemudian mengoperasikan setiap elemen tersebut dengan fungsi komposisi "∘", maka diperoleh elemen yang saling komutatif sebagai berikut

$(1) \circ (2)(345) = (1)(2)(345) \circ (1)$ $\quad$ $(1) \circ (3)(154) = (3)(154) \circ (1)$

$(1) \circ (2)(354) = (1)(2)(354) \circ (1)$ $\quad$ $(1) \circ (4)(135) = (4)(135) \circ (1)$

$(1) \circ (3)(245) = (1)(3)(245) \circ (1)$ $\quad$ $(1) \circ (4)(153) = (4)(153) \circ (1)$

$(1) \circ (3)(254) = (3)(254) \circ (1)$ $\quad$ $(1) \circ (5)(134) = (5)(134) \circ (1)$

$(1) \circ (4)(235) = (4)(235) \circ (1)$ $\quad$ $(1) \circ (5)(143) = (5)(143) \circ (1)$

$(1) \circ (4)(253) = (4)(253) \circ (1)$ $\quad$ $(1) \circ (4)(125) = (4)(125) \circ (1)$

$(1) \circ (5)(234) = (5)(234) \circ (1)$ $\quad$ $(1) \circ (4)(152) = (4)(152) \circ (1)$

$(1) \circ (5)(243) = (5)(243) \circ (1)$ $\quad$ $(1) \circ (5)(124) = (5)(124) \circ (1)$

$(1) \circ (3)(145) = (3)(145) \circ (1)$ $\quad$ $(1) \circ (5)(142) = (5)(142) \circ (1)$

$(1) \circ (5)(123) = (5)(123) \circ (1)$ $\quad$ $(1) \circ (5)(132) = (5)(132) \circ (1)$

$(1)(2)(345) \circ (1)(2)(354) = (1)(2)(354) \circ (1)(2)(345)$

$(1)(3)(245) \circ (1)(3)(254) = (1)(3)(254) \circ (1)(3)(245)$

$(1)(4)(235) \circ (1)(4)(253) = (1)(4)(253) \circ (1)(4)(235)$

$(1)(5)(234) \circ (1)(5)(243) = (1)(5)(243) \circ (1)(5)(234)$

$(2)(3)(145) \circ (2)(3)(154) = (2)(3)(154) \circ (2)(3)(145)$

$(2)(4)(135) \circ (2)(4)(153) = (2)(4)(153) \circ (2)(4)(135)$

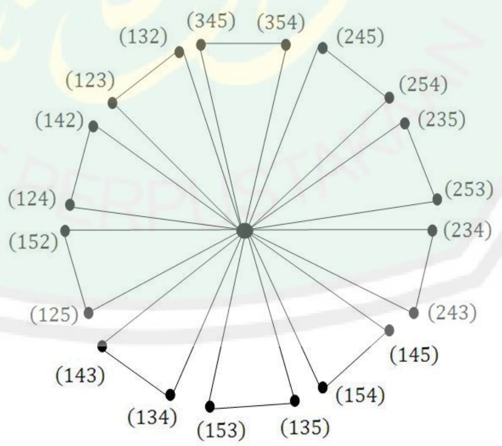
$(2)(5)(134) \circ (2)(5)(143) = (2)(5)(143) \circ (2)(5)(134)$

$(3)(4)(125) \circ (3)(4)(152) = (3)(4)(152) \circ (3)(4)(125)$

$(3)(5)(124) \circ (3)(5)(142) = (3)(5)(142) \circ (3)(5)(124)$

$(4)(5)(123) \circ (4)(5)(132) = (4)(5)(132) \circ (4)(5)(123)$

Dari hasil operasi diatas dapat digambarkan bentuk graf *commuting* dari elemen tersebut.



Gambar 3.26 Graf Kincir-10 ($Wd_{3,10}$) dari Grup Simetri-5 (S_5)

Terlihat pada Gambar 3.26 bahwa graf *commuting* dari

$$Y = \begin{Bmatrix} (1), (345), (354), (245), (254), (235), (253), (234), (243), (145), (154), \\ (135), (153), (134), (143), (125), (152), (124), (142), (123), (132) \end{Bmatrix}$$

pada grup simetri-5 berbentuk graf kincir $Wd_{3,10}$, yaitu graf kincir dengan sepuluh daun kincir. Grup utomorfisma dari graf *commuting* $C\left(S_5, Y = \left\{\begin{matrix}(1),(345),(354),(245),(254),(235),(253),(234),(243),(145),(154), \\ (135),(153),(134),(143),(125),(152),(124),(142),(123),(132)\end{matrix}\right\}\right)$ isomorfik dengan pola automorfisma pada graf kincir $Wd_{3,10}$ melalui korespondensi $(1) \backsim 1, (345) \backsim 2, (354) \backsim 3, (245) \backsim 4, (254) \backsim 5, (235) \backsim 6, (253) \backsim 7, (234) \backsim 8, (243) \backsim 9, (145) \backsim 10, (154) \backsim 11, (135) \backsim 112, (153) \backsim 13, (134) \backsim 14, (143) \backsim 15, (125) \backsim 16, (152) \backsim 17, (124) \backsim 18, (142) \backsim 19, (123) \backsim 20, (132) \backsim 21$.

Selanjutnya, dari beberapa contoh kasus pada grup simetri tersebut akan dirumuskan bebarap teorema, yaitu

Teorema 4

Misalkan S_n adalah grup simetri berorder $n!$ dengan $n \in \mathbb{N}$, dan $n \geq 3$. Misalkan X adalah himpunan yang memuat unsur identitas dan semua sikel 2 tunggal di S_n. Maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(S_n, X)$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf bintang $K_{1,n-1}$, yang berbentuk grup simetri (S_{n-1})

Bukti

Karena unsur 1 saling komutatif dengan semua unsur pada X, sedangkan semua anggota himpunan X (kecuali unsur 1) tidak saling komutatif, maka graf *commuting* $C(S_n, X)$ akan berbentuk seperti graf bintang $(K_{1,n-1})$. Karena unsur 1 merupakan titik pusat pada graf bintang $(K_{1,n-1})$, maka harus dipetakan terhadap dirinya sendiri, dan unsur lainnya yang memuat sikel 2 tunggal dengan syarat berbentuk $(1\ m), \forall m \in \mathbb{N}$ dan $2 \leq m \leq n$, masing-masing berderajat satu di $K_{1,n-1}$, sehingga grup automorfisma dari graf *commuting* $C(S_n, X)$ isomorfik grup automorfisma pada $K_{1,n-1}$. Karena pola automorfisma yang terbentuk dari keduanya menyerupai permutasi pada grup simetri (S_{n-1}), maka dapat disimpulkan bahwa grup automorfisma dari graf *commuting* $C(S_n, X)$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf bintang $(K_{1,n-1})$ yaitu berbentuk grup simetri-n (S_{n-1}).

Teorema 5

Misalkan S_n adalah grup simetri berorder $n!$ dengan $n \in \mathbb{N}$, dan $n \geq 3$. Misalkan Y adalah himpunan yang memuat unsur identitas dan semua sikel 3 tunggal di S_n. Maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(S_n, Y)$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf kincir $W_{3,\frac{m}{2}}$.

Bukti

Diketahui bahwa semua anggota Y saling komutatif dengan unsur 1, dan unsur yang memuat sikel 3 dengan bentuk (abc) hanya terhubung dengan unsur yang berbentuk (acb), maka antara unsur yang memuat sikel 3 tersebut dan unsur identitas akan membentuk graf komplit-3 (K_3) yang merupakan daun kincir dari graf kincir. Sehingga graf *commuting* $C(S_n, Y)$ akan berbentuk menyerupai graf kincir $W_{3,\frac{m}{2}}$. Maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(S_n, Y)$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf kincir $W_{3,\frac{m}{2}}$, yaitu graf kincir dengan $\frac{m}{2}$ daun kincir yang masing-masing berbentuk graf komplit-3 (K_3), dengan m adalah banyaknya sikel 3 tunggal pada S_n.

3.3 Kajian Teori Graf dan Grup dalam Islam

3.3.1 Kajian Teori Graf dalam Islam

Sebagaimana dijelaskan pada bab sebelumnya mengenai hubungan manusia sebagai makhluk yang berakal dengan tuhan sebagai penciptanya, yang tercantum pada surat Ali-Imran ayat 59

إِنَّ مَثَلَ عِيسَىٰ عِندَ ٱللَّهِ كَمَثَلِ ءَادَمَ ۖ خَلَقَهُۥ مِن تُرَابٍ ثُمَّ قَالَ لَهُۥ كُن فَيَكُونُ ﴿٥٩﴾

"Sesungguhnya misal (penciptaan) Isa di sisi Allah, adalah seperti (penciptaan) Adam. Allah menciptakan Adam dari tanah, kemudian Allah berfirman kepadanya: "Jadilah" (seorang manusia), maka jadilah dia." (QS. Ali-Imran/3:59).

Menurut Ar-Rifa'i (1999), ayat tersebut menjelaskan bahwa sebenarnya kejadian Isa yang menakjubkan itu adalah seperti penciptaan Adam *Alaihimassalam*, yang dijadikan dari tanah, keduanya diciptakan Allah Swt. dengan cara yang lain dari penciptaan manusia biasa. Segi persamaan itu ialah Isa diciptakan tanpa ayah, dan Adam diciptakan tanpa ayah dan tanpa ibu.

Pelajaran yang dapat diambil dari ayat tersebut salah satunya adalah penegasan tentang hak ketuhanan Allah Swt. yang tidak boleh dimiliki oleh selain Dia. Dan kesalahan anggapan orang-orang Nasrani yang menuhankan Isa *Alaihimassalam.* Oleh karena itu manusia sebagai makhluk ciptaan-Nya haruslah menjalin hubungan yang baik dengan tuhannya yakni dengan cara menjalankan perintah-Nya dan menjauhi larangan-Nya. Dijelaskan dalam firman Allah Swt. berikut:

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ ٱعۡبُدُواْ رَبَّكُمُ ٱلَّذِى خَلَقَكُمۡ وَٱلَّذِينَ مِن قَبۡلِكُمۡ لَعَلَّكُمۡ تَتَّقُونَ ﴿٢١﴾ ٱلَّذِى جَعَلَ
لَكُمُ ٱلۡأَرۡضَ فِرَٰشًا وَٱلسَّمَآءَ بِنَآءً وَأَنزَلَ مِنَ ٱلسَّمَآءِ مَآءً فَأَخۡرَجَ بِهِۦ مِنَ ٱلثَّمَرَٰتِ رِزۡقًا لَّكُمۡ ۖ
فَلَا تَجۡعَلُواْ لِلَّهِ أَندَادًا وَأَنتُمۡ تَعۡلَمُونَ ﴿٢٢﴾

"Hai manusia, sembahlah Tuhanmu yang telah menciptakanmu dan orang-orang yang sebelummu, agar kamu bertakwa. Dialah yang menjadikan bumi sebagai hamparan bagimu dan langit sebagai atap, dan Dia menurunkan air (hujan) dari langit, lalu Dia menghasilkan dengan hujan itu segala buah-buahan sebagai rezeki untukmu; karena itu janganlah kamu mengadakan sekutu-sekutu bagi Allah, padahal kamu mengetahui" (QS. Al-Baqarah/2:21-22)

Dari ayat tersebut Allah Swt. memerintahkan manusia untuk menyembah kepada-Nya agar mereka mampu melepaskan diri mereka dari kerugian. Di samping itu, Allah Swt. memperkenalkan diri-Nya kepada mereka, bahwa Dia memiliki sifat-sifat Yang Agung dan Sempurna, supaya mereka lebih mengenal-Nya dan mau memenuhi seruan-Nya. Yaitu agar mereka mau mengabdi kepada-Nya, sebuah pengabdian yang akan menyelamatkan mereka dari adzab-Nya dan berhasil meraih ridha dan surga-Nya.

Sebagaimana dijelaskan dalam Tafsir Al-Aisar bahwa dari kedua ayat tersebut diatas Allah Swt. menyebutkan keadaan orang-orang beriman yang beruntung dan keadaan orang-orang kafir yang merugi. Selanjutnya untuk menarik perhatian mereka, Allah Swt. memerintahkan mereka untuk menyembah kepada-Nya agar mereka mampu melepaskan diri mereka untuk menyembah kepada agar mereka mampu melepaskan diri mereka dari kerugian. Di samping itu Allah Swt. memperkenalkan diri-Nya kepada mereka bahwa Dia memiliki sifat-sifat Yang Agung dan Sempurna, supaya mereka lebih mengenalnya dan mau memenuhi seruan-Nya. Yaitu agar mereka mau mengabdi kepada-Nya, sebuah pengabdian yang dapat menyelamatkan mereka dari adzab-Nya dan berhasil meraih ridha dan surga-Nya.

Dalam ilmu matematika, konsep hubungan antara manusia dengan Allah Swt. sebagai Sang Pencipta dapat diterapkan pada konsep keterhubungan dua titik yang dapat digambarkan dalam bentuk graf. Sebagaimana definisi yang telah tercantum sebelumnya, bahwa graf merupakan pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut titik $(vertex)$ dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak beraturan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sisi $(edge)$. Berdasarkan ayat dan tafsir tersebut diatas dapat diilustrasikan bahwa antara manusia dan Allah Swt. saling terhubung, maka dapat digambarkan dalam bentuk graf sebagai berikut.

Gambar 3.22 Graf Terhubung

3.3.2 Kajian Grup dalam Islam

Dalam matematika, grup adalah suatu himpunan, beserta suatu operasi biner, seperti perkalian atau penjumlahan, yang memenuhi beberapa aksioma yang diuraikan di bawah ini. Misalnya, himpunan bilangan bulat adalah suatu grup terhadap operasi penjumlahan. Berikut ayat yang menjelaskan tentang suatu himpunan.

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ٧

"(yaitu) jalan orang-orang yang Telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat" (QS. Al-Fatihah/1:7)

Berdasarkan tafsir Ibnu Katsir I, makna dari ayat tersebut secara umum adalah sesudah seorang mukmin memohon kepada Tuhannya untuk menunjukkan ke jalan yang lurus, yang merupakan jalan mereka diberi nikmat berupa iman, ilmu dan amal. Sebagai upaya maksimal dalam permohonan petunjuk jalan kebenaran tersebut dan kekhawatiran akan tersesat, maka diberi penegasan dengan mengecualikan jalan orang-orang yang dimurkai Allah Swt. dan jalan orang-orang yang tersesat.

Orang-orang yang memperoleh anugerah nikmat dari Allah Swt adalah mereka yang disebutkan dalam surat an-Nisaa melalui firman-Nya:

وَمَن يُطِعِ ٱللَّهَ وَٱلرَّسُولَ فَأُوْلَٰٓئِكَ مَعَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمَ ٱللَّهُ عَلَيۡهِم مِّنَ ٱلنَّبِيِّـۧنَ وَٱلصِّدِّيقِينَ وَٱلشُّهَدَآءِ
وَٱلصَّٰلِحِينَۚ وَحَسُنَ أُوْلَٰٓئِكَ رَفِيقٗا ٦٩ ذَٰلِكَ ٱلۡفَضۡلُ مِنَ ٱللَّهِۚ وَكَفَىٰ بِٱللَّهِ عَلِيمٗا ٧٠

“Dan barang siapa yang taat kepada Allah dan Rasul-Nya, mereka itu akan bersama-sama dengan orang-orang yang dianugerahi nikmat oleh Allah, yaitu para nabi, para siddiqin, para syuhada, dan orang-orang yang shaleh. Dan mereka itulah teman yang sebaik-baiknya. Yang demikian itu adalah karunia Allah, dan Allah cukup mengetahuinya.” (QS. An-Nisaa/4:69-70)

Adh-Dhahhak menceritakan dari Ibnu Abbas, “Jalannya orang yang telah Engkau anugerahi nikmat atas mereka karena menaati dan menyembah-Mu, yaitu dari kalangan para malaikat-Mu, nabi-Mu, shiddiqin, orang-orang yang mati syahid, dan orang yang shaleh.” Hal ini setara dengan firman Allah, “Dan barang siapa menaati Allah dan Rasul-Nya, mereka itu bersama dengan orang-orang yang dianugerahi nikmat oleh Allah.”

Ayat tersebut di atas merupakan contoh bahwa kehidupan manusia terdiri dari beberapa macam golongan atau kelompok. Yang dapat diartikan pula, bahwa kumpulan beberapa golongan itu merupakan suatu himpunan. Pada ayat tersebut manusia terbagi menjadi 3 kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah Swt., (2) kelompok yang mendapat murka dari Allah Swt., dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2009:47)

Dalam ilmu matematika, bahasan mengenai konsep himpunan atau kelompok dapat diterapkan pada konsep teori grup. Berdasarkan definisinya, Grup adalah struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G adalah himpunan tidak kosong $(G \neq \emptyset)$ dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

(i) Operasi $*$ bersifat assosiatif di G

$(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk semua $a, b, c \in G$

(ii) Terdapat suatu elemen e di G sehingga $a * e = e * a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut identitas di G).

Untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu elemen a^{-1} di G sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} disebut invers dari a) (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:31).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Pada bab sebelumnya telah dibahas tentang grup automorfisma dari graf *commuting* pada grup dihedral dan simetri. Dari pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Grup automorfisma yang terbentuk dari D_{2n} dengan mengambil beberapa *subset* dari D_{2n} tersebut akan isomorfik dengan grup automorfisma dari beberapa jenis graf lainnya. Diantaranya yaitu,

a Ketika diambil X_1 adalah *subset* dari D_{2n}, dengan $X_1 = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$, maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{2n}, X)$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf komplit-n (K_n).

b Ketika diambil X_2 adalah *subset* dari D_{2n}, dengan $X_2 = \{1, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ pada n ganjil lebih dari 3, maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{2n}, X_2)$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf bintang $(K_{1,n})$.

c Ketika diambil X_2 adalah *subset* dari D_{2n}, dengan $X_2 = \{1, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ atau $X_2 = \left\{r^{\frac{n}{2}}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\right\}$ pada n genap lebih dari 3, maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(D_{2n}, X_2)$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf kincir $Wd_{3,\frac{n}{2}}$.

2. Grup automorfisma yang terbentuk dari grup simetri (S_n) dengan mengambil beberapa *subset* dari S_n tersebut akan isomorfik dengan grup automorfisma dari beberapa jenis graf lainnya. Di antaranya yaitu,

a Ketika diambil X adalah himpunan yang memuat unsur identitas dan semua sikel 2 tunggal di S_n, maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(S_n, X)$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf bintang $K_{1,n-1}$,

b Ketika diambil Y adalah himpunan yang memuat unsur identitas dan semua sikel 3 tunggal di S_n, maka grup automorfisma dari graf *commuting* $C(S_n, X)$ isomorfik dengan grup automorfisma dari graf kincir $W_{3,\frac{m}{2}}$.

3. Berdasarkan uraian mengenai kajian agama tentang teori grup dan teori graf pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa konsep teori grup dan teori graf tercantum dalam ayat al-Quran. Kajian mengenai teori graf dalam islam tercantum dalam surat ali-Imran ayat 59 dan surat al-Baqarah ayat 21-22 yang berisi tentang bagaimana hubungan antara manusia dengan Allah Swt. sebagai Penciptanya. Kemudian kajian mengenai teori grup dalam Islam tercantum dalam surat al-Fatihah ayat 7 dan diperjelas dalam surat an-Nisaa ayat 69-70 yang berisi tentang beberapa macam golongan atau kelompok manusia yang mendapat nikmat dari Allah Swt., kelompok manusia yang mendapat murka Allah Swt., dan kelompok manusia yang sesat.

4.2 Saran

Dalam penulisan skripsi ini, penulis hanya meneliti dan mencari pola umum yang terbentuk dari grup automorfisma pada graf *commuting* dari grup dihedral dan grup simetri. Masih banyak kajian dalam bidang aljabar yang dapat diterapkan pada graf *commuting.* Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik yang ingin melakukan penelitian terhadap grup yang lain ataupun mengenai kajian teori graf yang belum pernah diteliti pada graf *commuting.*

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir. 2009. *Matematika 1*: *Kajian Integratif Matematika & Al-Quran*. Malang: UIN-Malang Press.

Abdussakir, Amalia, I., dan Arifandi, Z. 2013. *Menentukan Spectrum Graf Commuting dari Grup Dihedral*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Ar-Rifa'i, M.N. 1999. *Tafsir Ibnu Katsir I*. Jakarta: GEMA INSANI PRESS.

Boundy, J.A. & Murty, U.S.R. 2008. *Graph Theory*. New York: Springer.

Budayasa, K. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press Surabaya.

Cameron, P.J. 2001. *Automorphism of Graph*. (Online) (http://www.designtheory.org/library.preprints/auts.pdf) diakses 23 April 2015.

Chartrand, G. & Lesniak, L.. 1986. *Graph and Digraph* 2^{nd} *Edition*. California: Wadswoth, Inc.

Dummit, D.S. dan Foote, R.M. 2004. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Fitriyah, A.T. 2011. *Automorfisme Graf Roda dan Graf Tangga*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Nofandika, F.F. 2009. *Graf Garis (Line Graf) dari Lintasan, Graf Sikel dan Graf Bintang*. UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.

Ganesan, A. 2012. *Automorphism Group of Graphs*. Presented at Pre-Conference Workshop on Algebraic Graph Theory under the Auspices of the 8th Annual Conference of the Academy of Discrete Mathematics and Applications, Virudhunagar, India, June 2012.

Morris, J. 2000. *Automorphism Groups of Circulant Graphs*: a Survey. (Online) (http://www.cs.uleth.ca/~morris/Research/AutSurvey.pdf) diakses 23 April 2015.

Nawawi, A. dan Rowley, P. 2012. *On Commuting Graphs for Elements of Order 3 in Symmetry Group*. Manchester: The MIMS Secretary.

Nawawi, I. 2006. *Shahih-Riyadhush Shalihin*. Jilid I. Terjemahan Team KMPC. Jakarta: Pustaka Azzam.

Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Rahman, A. 1992. *Al-Quran Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Raisinghania, M. dan Aggrawal, R. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chan & Company Ltd.

Rosyidah, H. 2010. *Automorfisma dari Graf Lengkap dan Graf Sikel*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Vahidi, J. dan Talebi, A.A. 2010. The Commuting Graphs on Groups D_{2n} and Q_n. *Journal of Mathematics and Computer Science*,2:123-127.

RIWAYAT HIDUP

Dini Chandra Aulia Putri, lahir di Probolinggo pada tanggal 09 April 1995, biasa dipanggil Dini atau Putri, tinggal di Desa Brabe Rt/Rw 04/02 Kec. Maron, Kab. Probolinggo. Anak pertama dari dua bersaudara dari bapak Rahmad Setia Budi, S.Pd, MM. dan ibu Ika Yuliatin.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Maron Wetan I pada tahun 2006, setelah itu melanjutkan ke SMP Negeri 1 Maron dan lulus pada tahun 2009. Kemudian melanjutkan pendidikan ke SMA Negeri 1 Gading dan lulus tahun 2012. Selanjutnya, pada tahun 2012 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil Jurusan Matematika.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Dini Chandra Aulia Putri
Nim : 12610011
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Grup Automorfisma Dari Graf *Commuting* Dari Grup Dihedral dan Grup Simetri
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Dr. Imam Sujarwo, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	29 Februari 2016	Konsultasi Bab I & Bab II	1.
2.	18 Maret 2016	Revisi Bab I & Bab II	2.
3.	22 Maret 2016	Konsultasi Bab III	3.
4.	29 Maret 2016	Revisi Bab I, Bab II & Bab III	4.
5.	30 Maret 2016	Konsultasi Agama Bab II	5.
6.	12 April 2016	Revisi Agama Bab II & ACC	6.
7.	14 Juni 2016	Konsultasi Bab III	7.
8.	16 Juni 2016	Konsultasi Agama Bab III	8.
9.	13 Oktober 2016	Konsultasi Bab III	9.
10.	25 Oktober 2016	Konsultasi Bab III	10.
11.	1 November 2016	Konsultasi Agama Bab III	11.
12.	7 November 2016	ACC Bab I, II, III & Bab IV	12.
13.	8 November 2016	ACC Agama Bab II & Bab III	13.

Malang, 08 November 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001