

**PENYELESAIAN PERSAMAAN KORTEWEG DE VRIES (KDV)
MENGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE**

SKRIPSI

**OLEH
YETI ASTREANDINI
NIM. 11610034**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**PENYELESAIAN PERSAMAAN KORTEWEG DE VRIES (KDV)
MENGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Yeti Astreandini
NIM. 11610034**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

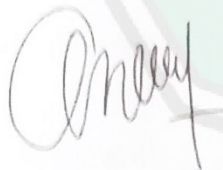
**PENYELESAIAN PERSAMAAN KORTEWEG DE VRIES (KDV)
MENGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE**

SKRIPSI

Oleh
Yeti Astreandini
NIM. 11610034

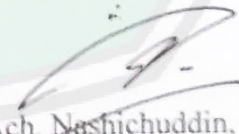
Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 18 Agustus 2016

Pembimbing I,



Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004

Pembimbing II,



Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Abdussakin, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENYELESAIAN PERSAMAAN KORTEWEG DE VRIES (KDV)
MENGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE**

SKRIPSI

Oleh
Yeti Astreandini
NIM. 11610034

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 25 Agustus 2016

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si
Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si
Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si
Anggota Penguji : Ach. Nashichuddin, M.A

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika
Dr. Abdusyakir, M.Pd
NIP. 19751006200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Yeti Astreandini
NIM : 11610034
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Penyelesaian Persamaan Korteweg de Vries (KdV)
Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 18 Agustus 2016

Yang membuat pernyataan,



Yeti Astreandini

NIM. 11610034

MOTO

...وَعَسَىٰ أَنْ تَكْرَهُوا شَيْئًا وَهُوَ خَيْرٌ لَّكُمْ ۖ وَعَسَىٰ أَنْ تُحِبُّوا شَيْئًا وَهُوَ شَرٌّ لَّكُمْ ۗ وَاللَّهُ يَعْلَمُ

وَأَنْتُمْ لَا تَعْلَمُونَ ﴿٢١٦﴾

“... boleh jadi kamu membenci sesuatu, padahal ia amat baik bagimu, dan boleh jadi (pula) kamu menyukai sesuatu, padahal ia amat buruk bagimu. Allah mengetahui, sedang kamu tidak mengetahui.”

(QS. al-Baqarah/02:216).



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Kedua orang tua bapak Mulyono (alm) dan ibu Suparti serta kakak Yeni Astutik bersama suaminya Ainul Barizy yang tidak pernah berhenti memberikan doa, motivasi, dukungan baik moril atau materiil, dan kesabaran jiwa demi keberhasilan penulis.

Adik-adik terkasih (M. Fani Tubagus Habibullah, M. Fadlil Azzidan Ghoni, Faza Najla Syafiqoh El-ainy, dan Faya Ziyah Najibah El-ainy) yang selalu menjadi motivasi yang berarti bagi penulis.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah atas rahmat, taufik, hidayah, serta inayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis mendapatkan banyak bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Ach. Nashichuddin, M.A selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen terima kasih atas segala ilmu dan bimbinganya.

7. Bapak, ibu, serta kakak dan keluarga besar tercinta yang dengan sepenuh hati memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2011 "Abelian", keluarga besar pondok PPDU Al-Fadholi khususnya sahabat-sahabat Alvin Tio Deghi Areana, Zahrotul Marfuah, Siti Maya Maysaroh, Siti Maria Ulfa, Ulfa Ainurida, dan Rizqi Ayuningtias yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terima kasih untuk kenang-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
9. Semua pihak yang telah membantu namun tidak dapat disebutkan satu persatu.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Agustus 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص	xvi
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	7
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Korteweg de Vries (KdV)	8
2.2 Transformasi Laplace	10
2.2.1 Sifat-Sifat Transformasi Laplace	10
2.2.2 Invers Transformasi Laplace	15
2.3 Metode Dekomposisi Adomian	16
2.4 Metode Dekomposisi Adomian Laplace	20
2.5 Aproksimasi Pade	22
2.6 Galat (<i>Error</i>)	29
2.6.1 Sumber Utama Galat Numerik	29
2.6.2 Cara Menganalisis Galat	30

2.7 Penyelesaian Masalah dalam Islam	30
--	----

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Metode Dekomposisi Adomian Laplace pada Persamaan KdV.....	35
3.2 Simulasi dan Analisis Galat (<i>Error</i>)	41
3.2.1 Simulasi dan Analisis Galat untuk Nilai $0 \leq x \leq 1$	41
3.2.2 Simulasi dan Analisis Galat untuk Nilai $0 \leq x \leq 10$	44
3.3 Aproksimasi Pade untuk Solusi Hampiran (3.22)	46
3.4 Penggunaan Penyelesaian Masalah dalam Islam	52

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	54
4.2 Saran	55

DAFTAR PUSTAKA	56
-----------------------------	----

LAMPIRAN-LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Galat Solusi Hampiran (3.21) dan (3.22) dengan Solusi Eksak untuk $0 \leq x \leq 1$	43
Tabel 3.2 Galat Solusi Hampiran (3.21) dan (3.22) dengan Solusi Eksak untuk $0 \leq x \leq 10$	45
Tabel 3.3 Galat Solusi Hampiran Aproksimasi Pade dengan Solusi Eksak	51



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Gelombang Soliton	9
Gambar 3.1 Perbandingan Grafik Solusi Hampiran (3.21) dan Solusi Eksak untuk $0 \leq x \leq 1$	42
Gambar 3.2 Perbandingan Grafik Solusi Hampiran (3.22) dan Solusi Eksak untuk $0 \leq x \leq 1$	42
Gambar 3.3 Perbandingan Grafik Solusi Hampiran (3.21) dan Solusi Eksak untuk $0 \leq x \leq 10$	44
Gambar 3.4 Perbandingan Grafik Solusi Hampiran (3.22) dan Solusi Eksak untuk $0 \leq x \leq 10$	44
Gambar 3.5 Perbandingan Aproksimasi Pade [2,2] pada Persamaan (3.22) dengan Solusi Eksak	50
Gambar 3.6 Perbandingan Aproksimasi Pade [4,4] pada Persamaan (3.22) dengan Solusi Eksak	50
Gambar 3.7 Perbandingan Aproksimasi Pade [6,6] pada Persamaan (3.22) dengan Solusi Eksak	50
Gambar 3.8 Perbandingan Aproksimasi Pade [8,8] pada Persamaan (3.22) dengan Solusi Eksak	50

ABSTRAK

Astreandini, Yeti. 2016. **Penyelesaian Persamaan Korteweg de Vries (KdV) Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: metode dekomposisi Adomian Laplace, persamaan Korteweg de Vries (KdV).

Metode dekomposisi Adomian Laplace adalah gabungan dua metode yaitu metode transformasi Laplace dan metode dekomposisi Adomian. Metode dekomposisi Adomian Laplace digunakan untuk menyelesaikan persamaan Korteweg de Vries (KdV). Persamaan KdV merupakan model perambatan gelombang nonlinier yang homogen. Ada beberapa langkah dalam penyelesaian persamaan KdV, di antaranya yaitu menerapkan transformasi Laplace pada persamaan KdV, mengasumsikan solusi sebagai jumlahan deret tak hingga dan menggunakan bantuan polinomial Adomian untuk menyelesaikan suku nonlinier, kemudian menerapkan invers transformasi Laplace. Selanjutnya dilakukan simulasi dan analisis galat untuk menunjukkan bahwa metode yang digunakan tersebut mempunyai solusi hampiran yang dapat mendekati solusi eksaknya. Hasil simulasi dan analisis galat menunjukkan bahwa penyelesaian persamaan KdV menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace dapat mendekati solusi eksaknya ketika nilai $0 \leq x \leq 1$. Sedangkan untuk nilai $x \geq 1$ perlu dilakukan aproksimasi Pade terlebih dahulu.

ABSTRACT

Astreandini, Yeti. 2016. **Solution of Korteweg de Vries (KdV) Equation Using Adomian Laplace Decomposition Method**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisors: (1) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Keywords: Adomian Laplace decomposition method, Korteweg de Vries (KdV) equation

Adomian Laplace decomposition method is a combination between two different methods, namely Laplace transformation and Adomian decomposition method. This method is used to solve Korteweg de Vries (KdV) equation. KdV equation is a model of homogen nonlinear propagation wave. There are several steps to solve KdV equation, such as: implementing Laplace transformation in KdV equation, assuming a solution as a sum of unfinite series, using polinomial Adomian to solve nonlinear quarter, and implementing Laplace transformation inverse. The next step is to do simulation and error analysis to show that those methods have approximation solution close to exact solution. The result of this simulation and error analysis show that the KdV equation solution using Adomain Laplace decomposition is close to exact solution for $0 \leq x \leq 1$. While for $x \geq 1$ it is necessary to use Pade approximation first.

ملخص

استرياندينى، يتي. 2016. حل معادلة Korteweg de Vries (KdV) باستخدام طريقة تفكيك Adomian Laplace. البحث الجامعي. ثعبة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة الاسلامية المحكمية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف (I) محمد جامهوري الماجستير (II) احمد ناصح الدين الماجستير.

الكلمة الرئيسية: طريقة تفكيك Adomian Laplace، المعادلة Korteweg de Vries (KdV)

طريقة تفكيك Adomian Laplace هي تكوين طريقتين وهما طريقة تحويل Laplace وطريقة تفكيك Adomian Laplace. طريقة تفكيك Adomian Laplace تستخدم لحل معادلة Korteweg de Vries (KdV). معادلة KdV هي نماذج نشر موجة غير الخطية المتجانسة. هناك العديد من الخطوات في حل معادلة KdV، وهي تطبيق تحويل Laplace ومعادلة KdV، على افتراض التوصل إلى حل كمجموع سلسلة لا نهاية لها، واستخدام المساعدة متعدد الحدود Adomian لحل نسبة غير الخطية، ثم تطبيق معكوس تحويل Laplace للحصول على الحلول العددية. وعلاوة على ذلك، نتائج المحاكاة و تحليل الخطأ ظهرت أن حل معادلة KdV باستخدام طريقة تفكيك Adomian Laplace تقترب الحل التحليلية بينما كان $0 \leq x \leq 1$. أما بالنسبة $x \geq 1$ يجب تقريب Pade أن نقوم أولاً .

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Matematika mempunyai bahasa dan aturan yang jelas, sistematis, dan keterkaitan antar konsep yang kuat. Oleh karena itu, banyak permasalahan-permasalahan di luar bidang matematika yang dapat diselesaikan dengan mudah menggunakan matematika. Model matematika adalah himpunan rumus atau persamaan berdasarkan fenomena nyata dan dibuat dengan harapan dapat menyatakan dengan baik fenomena nyata tersebut (Ledder, 2005).

Wiryanto & Jamhuri (2015) telah menurunkan model gelombang permukaan yang menghasilkan suatu persamaan *forced* KdV. Persamaan *forced* KdV sampai saat ini belum diketahui solusi eksaknya. Sehingga metode hampiran adalah cara lain untuk mendapatkan solusinya. Adapun bentuk homogen dari persamaan *forced* KdV adalah persamaan KdV. Persamaan KdV dapat diselesaikan secara eksak dengan menggunakan metode koefisien tak tentu, yang mana solusi yang dihasilkan berupa fungsi secant hiperbolik. Oleh sebab itu, persamaan yang akan diselesaikan secara hampiran adalah persamaan KdV. Dengan adanya solusi eksak dan solusi hampiran dari persamaan KdV sehingga dapat diperoleh galat (*error*) yang dapat menjadi acuan untuk menyelesaikan persamaan *forced* KdV.

Ada beberapa metode semi analitik yang telah dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier atau nonlinier salah satunya adalah

metode dekomposisi Adomian Laplace. Metode dekomposisi Adomian Laplace pertama kali dikenalkan oleh Khuri (2001) yang berhasil digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal persamaan diferensial biasa orde dua. Metode dekomposisi Adomian Laplace adalah metode semi analitik untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier yang mengkombinasikan antara transformasi Laplace dan metode dekomposisi Adomian (Wartono & Muhaijir, 2013).

Beberapa peneliti telah berhasil menentukan penyelesaian hampiran menggunakan metode tersebut untuk menyelesaikan beberapa persamaan diferensial. Fadaei (2011) menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial linier dan nonlinier. Handibag & Karande (2013) juga menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk menyelesaikan persamaan KdV orde lima. Wartono & Muhaijir (2013) juga menggunakan algoritma dekomposisi Adomian Laplace untuk menyelesaikan persamaan Riccati. Ahmad, Husain, & Naeem (2014) juga melakukan kombinasi antara transformasi Laplace dan dekomposisi Adomian untuk menyelesaikan masalah nilai awal pada persamaan diferensial orde dua.

Transformasi Laplace ditemukan oleh matematikawan Perancis Piere Simon Laplace (1749-1827), yang juga dikenal untuk persamaan Laplace (Tang, 2005). Transformasi Laplace adalah suatu metode yang dapat digunakan secara mudah untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier. Manfaat dari metode transformasi Laplace adalah mengubah bentuk persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa, atau mengubah bentuk persamaan diferensial biasa menjadi bentuk persamaan aljabar. Selanjutnya, transformasi Laplace digunakan untuk mendekati solusi persamaan diferensial nonlinier dengan

menggunakan metode dekomposisi Adomian yaitu persamaan diferensial nonlinier diuraikan dengan bantuan polinomial Adomian.

Metode dekomposisi Adomian diperkenalkan oleh G. Adomian untuk menyelesaikan persamaan diferensial tanpa menggunakan linierisasi atau diskritisasi. Tujuan metode dekomposisi Adomian yaitu untuk mendapatkan solusi yang lebih mudah dikerjakan. Dalam metode dekomposisi Adomian, solusi diasumsikan sebagai jumlahan fungsi atau deret tak hingga. Hal yang penting dalam metode ini yaitu penggunaan polinomial Adomian untuk menyelesaikan suku nonlinier dalam persamaan diferensial tersebut. Polinomial Adomian dibentuk menggunakan deret Taylor di titik tertentu, sehingga suku nonlinier diasumsikan sebagai fungsi eksak. Persamaan diferensial harus disertai kondisi awal agar persamaan diferensial dapat diselesaikan. Kondisi awal yang diberikan tersebut sangat berpengaruh terhadap solusi yang diperoleh (Adomian, 1994).

Allah berfirman dalam al-Quran surat az-Zumar/39:18 berikut:

الَّذِينَ يَسْتَمِعُونَ الْقَوْلَ فَيَتَّبِعُونَ أَحْسَنَهُ ۚ أُولَٰئِكَ الَّذِينَ هَدَاهُمُ اللَّهُ
وَأُولَٰئِكَ هُمُ أُولُوا الْأَلْبَابِ ﴿١٨﴾

“Yang mendengarkan perkataan lalu mengikuti apa yang paling baik diantaranya. Mereka itulah orang-orang yang telah diberi petunjuk Allah, dan mereka itulah orang-orang yang mempunyai akal” (QS. az-Zumar/39:18).

Menurut Shihab (2000) surat az-Zumar/39:18 menganjurkan untuk selalu dalam kebaikan. Sesuatu yang baik adalah yang paling tepat mengenai hak dan paling baik bagi manusia. Seseorang yang menyukai kebaikan akan semakin tertarik setiap bertambah kebaikan itu. Jika ia menghadapi dua hal, yang satu baik dan yang lainnya buruk, maka ia akan cenderung kepada yang baik dan apabila ia

menemukan yang satu baik dan yang lainnya lebih baik, maka ia akan mengarah kepada yang lebih baik. Dari sini setiap mereka menemukan *haq* dan *bathil*, mereka bersungguh-sungguh mengikuti *haq* dan petunjuk itu. Demikian juga setiap mereka menemukan yang benar dan yang lebih benar, maka mereka akan mengambil yang lebih benar dan lebih banyak petunjuknya. Kebenaran dan petunjuklah yang selalu mereka dambakan, dan karena itu mereka bersungguh-sungguh mendengarkan suatu perkataan.

Manusia adalah ciptaan Allah yang dikaruniai akal untuk selalu berpikir. Berpikir untuk dapat membedakan antara sesuatu yang baik dan buruk, sesuatu yang lebih baik dari yang baik. Seperti halnya dalam menyelesaikan persoalan dalam ilmu matematika, dalam persoalan tersebut ada banyak cara atau metode untuk menyelesaikannya. Saat satu metode tidak dapat menyelesaikannya persoalan tersebut maka ada banyak metode lain yang dapat menyelesaikannya. Di saat itulah fungsi akal manusia untuk berpikir, mempelajari, membuktikan, membandingkan, dan menyimpulkan metode apa yang dinilai baik atau lebih baik untuk persoalan matematika tersebut.

Berdasarkan uraian di atas penulis memberi judul penelitian ini dengan “Penyelesaian Persamaan Korteweg de Vries (KdV) Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana penyelesaian persamaan KdV dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui penyelesaian persamaan KdV dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah sebagai tambahan wawasan dan pengetahuan mengenai prosedur penyelesaian persamaan KdV dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace, serta dapat dijadikan literatur penunjang dan bahan perbandingan dengan metode yang berbeda dengan penelitian ini.

1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Persamaan KdV yang dibahas pada penelitian ini diambil dari Wiryanto & Jamhuri (2015) yang telah direduksi ke orde dua. Adapun persamaannya sebagai berikut:

$$\frac{1}{3}\eta''(x) - 2F\eta(x) + 2\eta^2(x) = 0$$

dengan kondisi awal sebagai berikut:

$$\eta(0) = 3F, \eta'(0) = 0$$

2. Solusi yang diperoleh dari penyelesaian hampiran yaitu metode dekomposisi Adomian Laplace berupa deret tak hingga yaitu $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x)$ yang dibatasi pada $n = 5$ atau $n = 10$.
3. Perhitungan aproksimasi Pade terhadap solusi hampiran $\eta(x)$ dengan menggunakan MAPLE.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan. Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menerapkan transformasi Laplace pada persamaan KdV yang telah direduksi ke orde dua.
2. Menerapkan sifat turunan dari transformasi Laplace pada persamaan KdV yang telah ditransformasi Laplace.
3. Mensubstitusikan kondisi awal yang diberikan.
4. Menyatakan $\eta(x)$ dalam bentuk $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x)$.
5. Menyatakan suku nonlinier $N(\eta(x))$ dalam bentuk $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$.
6. Menentukan suku $\mathcal{L}\{\eta_0(x)\}, \mathcal{L}\{\eta_1(x)\}, \mathcal{L}\{\eta_2(x)\}, \dots, \mathcal{L}\{\eta_n(x)\}$ dari deret tak hingga.
7. Menerapkan invers transformasi Laplace pada $\mathcal{L}\{\eta_0(x)\}, \mathcal{L}\{\eta_1(x)\}, \mathcal{L}\{\eta_2(x)\}, \dots, \mathcal{L}\{\eta_n(x)\}$ untuk mendapatkan nilai dari $\eta_0(x), \eta_1(x), \eta_2(x), \dots, \eta_n(x)$.
8. Menjumlahkan $\eta_0(x), \eta_1(x), \eta_2(x), \dots, \eta_n(x)$ sebagai solusi $\eta(x)$.

9. Menerapkan aproksimasi Pade pada $\eta(x)$ untuk mendapatkan solusi yang lebih akurat.
10. Simulasi dan analisis galat.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika yang digunakan dalam skripsi ini di antaranya:

Bab 1 Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka menjelaskan tentang gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan seperti persamaan KdV, transformasi Laplace, metode dekomposisi Adomian, metode dekomposisi Adomian Laplace, aproksimasi Pade, dan galat.

Bab III Pembahasan

Bab ini merupakan bab inti dari penelitian yang menjabarkan tentang gambaran objek penelitian dan hasil dari penelitian yaitu penyelesaian persamaan KdV dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace.

Bab IV Penutup

Bab ini terdiri atas kesimpulan serta saran-saran yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Korteweg de Vries (KdV)

Persamaan KdV adalah bentuk homogen dari persamaan *forced* KdV. Persamaan *forced* KdV adalah suatu model hampiran untuk gelombang yang merambat pada perairan dangkal yang dibangkitkan oleh gundukan yang berada pada dasar perairan. Secara umum persamaan *forced* KdV yang telah diturunkan oleh Wiryanto & Jamhuri (2015) berbentuk

$$\frac{1}{3}\eta'''(x) - 2F\eta'(x) + 2\eta(x)\eta'(x) + h'(x) = 0 \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) memiliki satu variabel bebas yaitu x dan satu variabel terikat η , dengan $\eta(x)$ adalah ketinggian permukaan fluida, $F = \frac{u_0}{\sqrt{gH}}$ adalah bilangan *Froude* yang menunjukkan tipe perilaku aliran yang mempunyai tiga kemungkinan $F < 0$, $F = 0$ dan $F > 0$ dengan u_0 adalah kecepatan aliran, g adalah percepatan gravitasi dan H adalah kedalaman aliran, $h'(x)$ adalah representasi gundukan pada dasar perairan.

Persamaan KdV yang dimaksud adalah ketika tidak ada gundukan pada dasar perairan ($h'(x) = 0$). sehingga dapat ditulis kembali persamaan KdV sebagai berikut

$$\frac{1}{3}\eta'''(x) - 2F\eta'(x) + 2\eta(x)\eta'(x) = 0 \quad (2.2)$$

Model gelombang permukaan pada persamaan (2.2) merupakan representasi dari gelombang satu arah tanpa mengalami perubahan dan tanpa adanya interaksi antar satu gelombang dengan gelombang lainnya. Persamaan

(2.2) dapat diselesaikan dengan menggunakan metode koefien tak tentuk dengan memisalkan profil dari gelombang permukaannya berbentuk secant hiperbolik, sehingga dapat diperoleh solusi eksak persamaan (2.2) sebagai berikut

Pertama, persamaan homogen (2.2) diintegralkan terhadap x , sehingga diperoleh

$$\frac{1}{3}\eta''(x) - 2F\eta(x) + \eta^2(x) = C \quad (2.3)$$

Menggunakan kondisi $\eta(x)$ beserta turunan-turunan menuju 0 bilamana $|x|$ menuju $\pm\infty$, sehingga diperoleh

$$0 = C$$

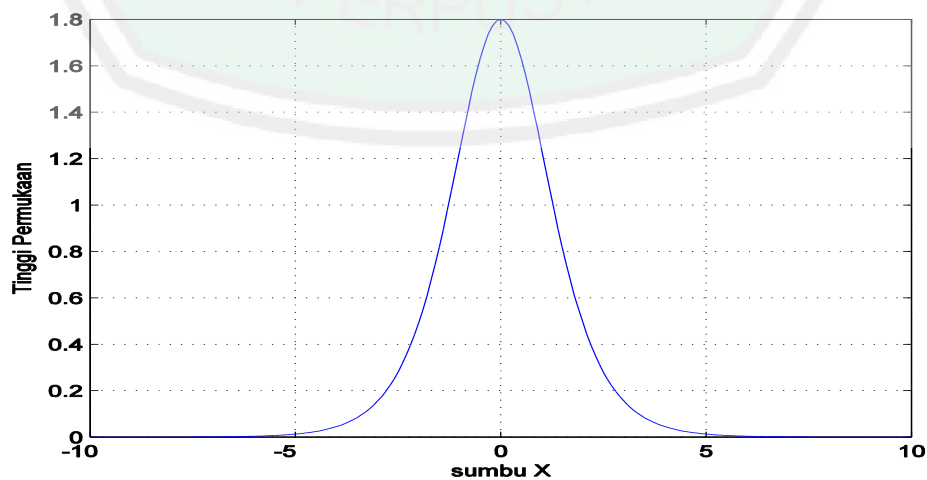
dan

$$\frac{1}{3}\eta''(x) - 2F\eta(x) + \eta^2(x) = 0 \quad (2.4)$$

Selanjutnya, persamaan (2.4) diselesaikan dengan menggunakan metode koefisien tak tentu, sehingga ditemukan solusi untuk dasar saluran rata sebagai berikut

$$\eta(x) = 3F \operatorname{sech}^2 \left(x \sqrt{\frac{3}{2}F} \right) \quad (2.5)$$

dan grafik solusi eksak dari persamaan (2.5) sebagai berikut



Gambar 2.1 Grafik Solusi Eksak Persamaan (2.5)

2.2 Tranformasi Laplace

Definisi

Misalkan f adalah fungsi riil atau bernilai kompleks untuk variabel waktu $t > 0$ dan s adalah parameter riil atau kompleks. Transformasi Laplace dari f didefinisikan sebagai berikut:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-st} f(t) dt \quad (2.6)$$

Jika limit ada (sebagai jumlah yang terbatas), maka integral persamaan (2.6) dikatakan konvergen. Jika limit tidak ada, maka integral persamaan (2.6) dikatakan divergen dan tidak ada transformasi Laplace yang didefinisikan untuk f . Notasi $\mathcal{L}\{f\}$ digunakan untuk menunjukkan transformasi Laplace dari f . Simbol $\mathcal{L}$ adalah transformasi Laplace, yang berada pada suatu fungsi $f = f(t)$ dan menghasilkan suatu fungsi baru, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ (Schiff, 1999).

2.2.1 Sifat-Sifat Transformasi Laplace

Speigel (1999) menyebutkan transformasi Laplace dari suatu fungsi mempunyai beberapa sifat, yaitu:

1. Sifat Linier

Teorema

Jika c_1 dan c_2 sebarang konstanta sedangkan $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ adalah fungsi-fungsi dengan transformasi-transformasi Laplace-nya masing-masing $F_1(s)$ dan $F_2(s)$, maka

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \mathcal{L}\{c_1 f_1(t)\} + \mathcal{L}\{c_2 f_2(t)\} \\
&= c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} \\
&= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)
\end{aligned}$$

Bukti:

Diketahui

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt \text{ dan } \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) dt.$$

Maka jika c_1 dan c_2 adalah konstanta-konstanta,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-st} c_1 f_1(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-st} c_2 f_2(t) dt \\
&= c_1 \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt + c_2 \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) dt \\
&= c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} \\
&= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s).
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$.

Simbol $\mathcal{L}$, yang mentransformasikan $f(t)$ ke dalam $F(s)$, sering disebut operator transformasi Laplace. Karena sifat $\mathcal{L}$ yang dinyatakan dalam teorema ini, dikatakan bahwa $\mathcal{L}$ adalah suatu *linear operator* atau bahwa ia memiliki sifat linier.

2. Sifat Derivatif**Teorema**

$$\text{Jika } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \text{ maka } \mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Karena $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$, maka diperoleh

Turunan pertama:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0)$$

Turunan kedua:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f''(t) dt = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - f'(0) - sf(0)$$

Secara umum untuk turunan ke- n dapat ditulis

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

3. Sifat Translasi atau Pergeseran Pertama

Teorema

$$\text{Jika } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \text{ maka } \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

Bukti:

$$\text{Karena } \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s), \text{ maka}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a)$$

4. Sifat Translasi atau Pergeseran Kedua

Teorema

$$\text{Jika } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \text{ dan } g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases} \text{ maka } \mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s)$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt = \int_0^a e^{-st} g(t) dt + \int_a^{\infty} e^{-st} g(t) dt = \int_a^{\infty} e^{-st} g(t) dt = \int_0^a e^{-st} (0) dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt = \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt \end{aligned}$$

Dimisalkan $u = t - a$ maka $t = u + a$ dan $du = dt$, sehingga

$$\int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt = \int_a^{\infty} e^{-s(u+a)} f(u) du = e^{-as} \int_a^{\infty} e^{-su} f(u) du = e^{as} F(s)$$

5. Sifat Pengubahan Skala

Teorema

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

Bukti:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(at) dt$$

Misal $u = at$, $du = a dt$ atau $dt = \frac{du}{a}$, sehingga diperoleh

$$\int_0^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{a}\right)} f(u) d\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{a}\right)} f(u) du = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

6. Transformasi Laplace dari Integral-integral

Toerema

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{F(s)}{s}$

Misalkan $g(t) = \int_0^t f(u) du$, maka $g'(t) = f(t)$ dan $g(0) = 0$. Dengan

mengambil transformasi Laplace dari kedua ruas, maka diperoleh

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = s\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)$$

Jadi

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = \frac{F(s)}{s} \text{ atau } \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

7. Perkalian dengan t^n

Teorema

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n F^n(s)$

dengan $n = 1, 2, 3, \dots$

Bukti:

Karena $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$, maka menurut aturan Leibnitz untuk menurunkan di bawah tanda integral,

$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds} = F'(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty -t e^{-st} f(t) dt \\ &= - \int_0^\infty e^{-st} \{t f(t)\} dt = -\mathcal{L}\{t f(t)\} \end{aligned}$$

Jadi

$$\mathcal{L}\{t f(t)\} = \frac{dF}{ds} = -F'(s)$$

yang mana pembuktian teorema di atas $n = 1$.

8. Sifat Pembagian oleh t

Teorema

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u) du$

Bukti:

Misalkan $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ maka $f(t) = t g(t)$. Dengan menggunakan transformasi

Laplace dari kedua arah, maka diperoleh

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{g(t)\} \text{ atau } F(s) = -\frac{dG}{ds}$$

Kemudian dengan mengintegrasikan diperoleh

$$G(s) = - \int_{\infty}^s f(u) du = \int_s^{\infty} f(u) du$$

Jadi

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} f(u) du$$

2.2.1 Invers Transformasi Laplace

Definisi

Jika transformasi Laplace suatu fungsi $f(t)$ adalah $F(s)$, yaitu $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Maka $f(t)$ disebut invers transformasi Laplace dari $F(s)$ dan secara simbolik ditulis: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ dengan $\mathcal{L}^{-1}$ disebut operator invers transformasi Laplace (Speigel, 1999).

Berdasarkan definisi dan teorema yang telah disebutkan, maka dapat ditentukan transformasi Laplace dari beberapa fungsi sederhana. Berikut Ledder (2005) memberikan beberapa contoh transformasi Laplace dari fungsi dan penjabarannya:

1. $f(t) = 1$, maka dapat ditentukan $\mathcal{L}\{f(t)\}$ sebagai berikut

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s} \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st}\right) = \frac{1}{s}$$

2. $f(t) = t$, maka dapat ditentukan $\mathcal{L}\{f(t)\}$ sebagai berikut

Karena $\mathcal{L}[t] = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt$

$$\int t e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} + \frac{1}{s} \int e^{-st} dt = -\left(\frac{t}{s} + \frac{1}{s^2}\right) e^{-st}$$

Maka

$$\mathcal{L}[t] = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = -\left(\frac{t}{s} + \frac{1}{s^2}\right) e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}, s > 0$$

3. $f(t) = e^{at}$, maka dapat ditentukan $\mathcal{L}\{f(e^{at})\}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at}] &= \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a} \left(1 - \lim_{m \rightarrow \infty} e^{(a-s)t}\right) \\ &= \frac{1}{s-a}, s > 0 \end{aligned}$$

2.3 Metode Dekomposisi Adomian

Pada metode dekomposisi Adomian, persamaan yang diberikan dalam bentuk persamaan operator sebagai berikut

$$Ly + Ry + N(y) = g \quad (2.7)$$

L adalah operator diferensial linier orde lebih tinggi dari R yang diasumsikan dapat dibalik (*invertible*), R adalah operator diferensial linier dari orde yang kurang dari L , N adalah operator nonlinier, dan g adalah fungsi yang diberikan. Persamaan (2.7) dapat ditulis menjadi

$$Ly = g - Ry - N(y) \quad (2.8)$$

dengan $L = \frac{d^n}{dx^n}$ adalah operator diferensial linier yang mempunyai invers yaitu L^{-1} . L^{-1} merupakan integral sebanyak orde pada L terhadap x dari 0 sampai x .

Sebagai contoh untuk operator $= \frac{d^2}{dx^2}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
L^{-1}Ly &= \int_0^x \int_0^x y'' dx dx \\
&= \int_0^x y' \Big|_0^x dx \\
&= \int_0^x (y' - y'(0)) dx \\
&= (y - y'(0)x) \Big|_0^x \\
&= y - y(0) - y'(0)x
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Selanjutnya, persamaan (2.8) menggunakan operator L^{-1} sehingga diperoleh

$$y = h + L^{-1}g - L^{-1}Ry - L^{-1}N(y) \tag{2.10}$$

dengan h adalah solusi persamaan homogen $Ly = 0$ dengan nilai awal atau nilai batas yang ditentukan. Kemudian Adomian mendefinisikan penyelesaian y merupakan jumlah deret tak hingga yaitu

$$y = y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n \tag{2.11}$$

Pada persamaan (2.10) didefinisikan

$$y_0 = \begin{cases} h, & g = 0 \\ h + L^{-1}g, & g \neq 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

dengan demikian persamaan (2.10) menjadi

$$y = y_0 - L^{-1}Ry - L^{-1}N(y) \tag{2.13}$$

Sedangkan suku nonlinier $N(y)$ dinyatakan dalam suatu polinomial khusus sebagai berikut

$$N(y) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \tag{2.14}$$

dengan komponen A_n disebut polinomial Adomian khusus yang dibentuk untuk menghitung suku nonlinier. Polinomial Adomian hanya bergantung pada komponen-komponen y_0 sampai y_n . Polinomial A_n dibentuk menggunakan ekspansi deret Taylor di titik y_0 dan ditulis

$$Ny = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n = Ny_0 + N'y_0(y - y_0) + N''y_0 \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \dots \quad (2.15)$$

Persamaan (2.11) ditulis kembali menjadi persamaan berikut

$$y - y_0 = y_1 + y_2 + \dots \quad (2.16)$$

Kemudian persamaan (2.16) disubstitusikan pada persamaan (2.15) maka diperoleh

$$\begin{aligned} A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots &= N(y_0) + N'(y_0)(\lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots) \\ &+ N''(y_0) \frac{(\lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots)^2}{2!} \\ &+ N'''(y_0) \frac{(\lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots)^3}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

Jika koefisien dari perpangkatan λ pada persamaan (2.17) disamakan, maka koefisien dari $\lambda^0, \lambda, \lambda^2, \dots$ diperoleh polinomial Adomian $A_0, A_1, A_2, \dots$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} A_0 &= N(y_0) \\ A_1 &= y_1 N'(y_0) \\ A_2 &= y_2 N'(y_0) + \frac{y_1^2}{2} N''(y_0) \\ A_3 &= y_3 N'(y_0) + y_0 y_1 N''(y_0) + \frac{y_1^3}{3} N'''(y_0) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$A_4 = y_4 N'(y_0) + \left(\frac{1}{2!} y_2^2 + y_1 y_3 \right) N''(y_0) + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 N'''(y_0) + \frac{y_1^4}{4!} N''''(y_0)$$

$$A_5 = y_5 N'(y_0) + [y_2 y_3 + y_1 y_4] N''(y_0) + \left[\frac{1}{2!} y_1 y_2^2 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_3 \right] N'''(y_0) + \frac{1}{3!} y_1^3 y_2 N''''(y_0) + \frac{y_1^5}{5!} N'''''(y_0) \\ \vdots$$

untuk penurunan persamaan (2.18) dapat dilihat pada Lampiran 2.

Contoh:

Nilai polinomial Adomian dari fungsi

$$Ny = y^5$$

adalah

$$A_0 = y_0^5$$

$$A_1 = 5y_0^4 y_1$$

$$A_2 = 5y_0^4 y_2 + 105y_0^3 y_1^2$$

$$A_3 = 5y_0^4 y_3 + 20y_0^3 y_1 y_2 + 10y_0^2 y_1^3$$

$$A_4 = 5y_0^4 y_4 + 5y_1^4 y_0 + 10y_0^3 y_2^2 + 20y_0^3 y_1 y_3 + 30y_0^2 y_1^2 y_2$$

Perlu diingat polinomial A_n tidak tunggal, misal $Ny = y^5, A_0 = y_0^5, A_1 = 5y_0^4 y_1, A_2 = 5y_0^4 y_2 + 105y_0^3 y_1^2, \dots$, boleh juga mengambil nilai $A_1 = 5y_0^4 y_1 + 105y_0^3 y_1^2$ karena nilai y_0 dan y_1 sudah diketahui dengan menghitung A_0 .

Dapat dikatakan bahwa y dan Ny adalah solusi dan suku nonlinier yang diselesaikan menggunakan A_n . Sehingga pendekatan n -suku $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_i$ mendekati $y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ untuk $n \rightarrow \infty$. Solusi dapat ditulis sebagai berikut

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n = y_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} y_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.19)$$

Lebih lanjut persamaan (2.19) dapat diuraikan sebagai berikut

$$y_0 = h + L^{-1}g$$

$$y_1 = -L^{-1}Ry_0 - L^{-1}A_0$$

$$y_2 = -L^{-1}Ry_1 - L^{-1}A_1$$

⋮

$$y_n = -L^{-1}Ry_{n-1} - L^{-1}A_{n-1}$$

Nilai $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ dapat dihitung karena A_0 hanya bergantung pada y_0 , A_1 hanya bergantung pada y_0 dan y_1 dan seterusnya (Adomian, 1994).

2.4 Metode Dekomposisi Adomian Laplace

Diberikan aplikasi metode dekomposisi Adomian Laplace untuk persamaan diferensial nonlinier orde dua sebagai berikut. Adapun dalam tulisan y mewakili $y(x)$.

$$y'' + y + N(y) = 0 \quad (2.20)$$

$$y(0) = \alpha, y'(0) = \beta \quad (2.21)$$

Persamaan (2.20) adalah persamaan homogen dengan $N(y)$ menunjukkan operator nonlinier. Selanjutnya dengan menggunakan transformasi Laplace pada persamaan (2.20), sehingga menjadi

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} + \mathcal{L}\{N(y)\} = \mathcal{L}\{0\} \quad (2.22)$$

Dengan menggunakan sifat dari turunan transformasi Laplace, sehingga diperoleh

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}\{y\} + \mathcal{L}\{N(y)\} = 0 \quad (2.23)$$

Nilai awal (2.21) disubstitusikan pada persamaan (2.23), sehingga diperoleh

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} = s\alpha + \beta - \mathcal{L}\{y\} - \mathcal{L}\{N(y)\} \quad (2.24)$$

atau

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{y\} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{N(y)\} \quad (2.25)$$

Pada metode dekomposisi Laplace, solusi y didefinisikan sebagai jumlah deret tak hingga berikut

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \quad (2.26)$$

Sedangkan pada suku nonlinier didefinisikan sebagai berikut

$$N(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.27)$$

dengan $A_n = A_n(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$ yang disebut polinomial Adomian yang diberikan sebagai berikut

$$A_0 = N(y_0)$$

$$A_1 = y_1 N'(y_0)$$

$$A_2 = y_2 N'(y_0) + \frac{y_1^2}{2!} N''(y_0) \quad (2.28)$$

$$A_3 = y_3 N'(y_0) + y_0 y_1 N''(y_0) + \frac{y_1^3}{3!} N'''(y_0)$$

$\vdots$

Kemudian disubstitusikan persamaan (2.26) dan (2.27), ke persamaan (2.25) sehingga diperoleh

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right\} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right\} \quad (2.29)$$

Dengan menggunakan sifat linier dari transformasi Laplace, sehingga persamaan (2.29) menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{y_n\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} - \frac{1}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{y_n\} - \frac{1}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{A_n\} \quad (2.30)$$

Selanjutnya persamaan (2.30) dapat diuraikan sebagai berikut

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} \quad (2.31)$$

$$\mathcal{L}\{y_1\} = -\frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{y_0\} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{A_0\} \quad (2.32)$$

$$\mathcal{L}\{y_2\} = -\frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{y_1\} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{A_1\} \quad (2.33)$$

Secara umum

$$\mathcal{L}\{y_n\} = -\frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{y_{n-1}\} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{A_{n-1}\} \quad (2.34)$$

Dengan menerapkan invers transformasi Laplace pada persamaan (2.31), sehingga diperoleh

$$y_0 = \alpha + \beta x \quad (2.35)$$

Nilai dari $y_0(x)$ disubstitusikan pada persamaan (2.32) sehingga diperoleh

$$\mathcal{L}\{y_1\} = -\frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{\alpha + \beta x\} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}\{A_0\} \quad (2.36)$$

Transformasi Laplace dari ruas kanan persamaan (2.36) diselesaikan, kemudian diterapkan invers transformasi Laplace pada ruas kiri, maka akan diperoleh y_1 . Begitu juga untuk memperoleh $y_2, y_3, \dots$ dapat mengikuti persamaan (2.34) (Khuri, 2001).

2.5 Aproksimasi Pade

Aproksimasi Pade merupakan suatu metode untuk memperoleh fungsi rasional yang dapat digunakan untuk menghampiri nilai suatu fungsi. Menurut Baker & Morris (1996) aproksimasi Pade merupakan suatu fungsi rasional yang didefinisikan sebagai

$$[L/M] = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Lx^L}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + a_Mx^M} \quad (2.37)$$

dengan L dan M masing-masing merupakan pangkat tertinggi dari pembilang dan penyebut pada fungsi rasional.

Teorema. Aproksimasi Pade (Baker & Morris, 1996).

Didefinisikan pembilang $P_L(x)$ dan penyebut $Q_M(x)$ dari suatu fungsi rasional $R_{L,M}(x)$ untuk menghampiri $f(x)$ yang diekspansi ke dalam deret pangkat $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ berlaku

$$Q_M(x) \cdot f(x) - P_L(x) = O[x^{L+M+1}]$$

Bukti:

Suatu fungsi $f(x)$ yang diekspansi dalam deret pangkat dapat dinyatakan dalam bentuk deret pangkat berikut

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

Pembilang $P_L(x)$ dan penyebut $Q_M(x)$ dari suatu fungsi rasional $R_{L,M}(x)$ dengan $Q_M(x) \neq 0$ didefinisikan sesuai persamaan berikut

$$P_L(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Lx^L = \sum_{i=0}^L a_i x^i$$

dan

$$Q_M(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_Mx^M = \sum_{i=0}^M b_i x^i$$

Maka akan diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} Q_M(x) \cdot f(x) - P_L(x) &= \sum_{i=0}^M b_i x^i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i - \sum_{i=0}^L a_i x^i \\ &= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_Mx^M)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots) \\ &\quad - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Lx^L) \\ &= [b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0)x + (b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0)x^2 + \cdots] \\ &\quad - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Lx^L) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (b_0c_M + b_1c_{M-1} + b_2c_{M-2} + \cdots + b_Mc_0) x^{M+1} \\ &\quad - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Lx^L) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x^{L+M+1} ((b_0c_M - a_0) + (b_1c_{M-1} - a_1) + (b_2c_{M-2} - a_2) \\ &\quad + \cdots (b_Mc_0 - a_L)) \\ &= O(x^{L+M+1}) \end{aligned}$$

Dengan demikian, maka teorema tersebut terbukti (Sa'adah, 2008).

Berdasarkan definisi dan teorema di atas, selanjutnya akan ditunjukkan tentang konstruksi aproksimasi Pade yang sesuai untuk deret pangkat.

Dimisalkan terdapat suatu fungsi $f(x)$ yang dapat diekspansi ke dalam bentuk deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, sehingga dapat dinotasikan dalam bentuk berikut

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (2.38)$$

Persamaan (2.38) yang merupakan suatu bentuk fungsi polinomial dengan

$c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n$ merupakan konstanta dan n merupakan bilangan bulat positif yang dimulai dari nol sampai takhingga. Persamaan (2.38) dapat dinyatakan kembali sebagai fungsi polinom berderajat n dan didefinisikan sebagai berikut

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

Hampiran fungsi rasional seperti persamaan (2.37) dan suku sisa hampirannya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Lx^L}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + a_Mx^M} + O[x^{L+M+1}]$$

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Lx^L}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + a_Mx^M} + O[x^{L+M+1}]$$

dengan $O[x^{L+M+1}]$ merupakan sisa pemotongan untuk suku ke- $(L + M + 1)$.

Dengan melakukan operasi perkalian silang maka diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_Mx^M)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots) \\ = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Lx^L) + O[x^{L+M+1}] \\ (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_Mx^M)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots) \\ - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Lx^L) = O[x^{L+M+1}] \end{aligned}$$

atau

$$Q_M(x) \cdot f(x) - P_L(x) = O[x^{L+M+1}]$$

Untuk memenuhi syarat yang berlaku pada fungsi rasional bahwa $Q_M(x) \neq 0$, maka sekurang-kurangnya didefinisikan bahwa $b_0 = 1$ (Sa'adah, 2008).

Contoh:

Diberikan deret pangkat sebagai berikut

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4 + \dots \quad (2.39)$$

Persamaan (2.39) akan dihipotesis dengan aproksimasi Pade.

a. untuk $L = M = 1$:

$$f(x) = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} + O[x^{L+M+1}]$$

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + O_1[x^3] = \frac{a_0 + a_1x}{b_0 + b_1x} + O_2[x^3]$$

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 = \frac{a_0 + a_1x}{b_0 + b_1x} + O[x^3]$$

dengan $O[x^3] = O_2[x^3] - O_1[x^3]$.

$$\Leftrightarrow (b_0 + b_1x) \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 \right) = (a_0 + a_1x) + O[x^3]$$

$$\Leftrightarrow (b_0 + b_1x) \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 \right) - (a_0 + a_1x) = O[x^3]$$

$$\Leftrightarrow (b_0 - a_0) + \left(-\frac{1}{2}b_0 + b_1 - a_1 \right)x + \left(\frac{1}{3}b_0 - \frac{1}{2}b_1 \right)x^2 + \dots = O[x^3]$$

Dengan mengambil tiga suku pertama sebagai aproksimasi, maka diperoleh:

1. $b_0 - a_0 = 0$ atau $a_0 = b_0$
2. $-\frac{1}{2}b_0 + b_1 - a_1 = 0$ atau $a_1 = b_1 - \frac{1}{2}b_0 = \frac{2}{3}b_0 - \frac{1}{2}b_0 = \frac{1}{6}b_0$
3. $\frac{1}{3}b_0 - \frac{1}{2}b_1 = 0$ atau $b_1 = \frac{2}{3}b_0$

Selanjutnya akan diperoleh

$$R_{1,1} = \frac{b_0 + \frac{1}{6}b_0x}{b_0 + \frac{2}{3}b_0x} = \frac{b_0 \left(1 - \frac{1}{6}x \right)}{b_0 \left(1 - \frac{2}{3}x \right)} = \frac{1 - \frac{1}{6}x}{1 - \frac{2}{3}x}, x \neq \frac{3}{2}$$

Jadi, aproksimasi Pade berderajat [1,1] untuk persamaan (2.39) adalah

$$f(x) \approx R_{1,1} = \frac{1 - \frac{1}{6}x}{1 - \frac{2}{3}x}, x \neq \frac{3}{2}$$

b. Untuk $L = 2$ dan $M = 1$

$$f(x) = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} + O[x^{L+M+1}]$$

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + O_1[x^4] = \frac{a_0 + a_1x + a_2x}{b_0 + b_1x} + O_2[x^4]$$

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 = \frac{a_0 + a_1x + a_2x}{b_0 + b_1x} + O[x^4]$$

dengan $O[x^4] = O_2[x^4] - O_1[x^4]$.

$$\Leftrightarrow (b_0 + b_1x) \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 \right) = (a_0 + a_1x + a_2x) + O[x^4]$$

$$\Leftrightarrow (b_0 + b_1x) \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 \right) - (a_0 + a_1x + a_2x) = O[x^4]$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (b_0 - a_0) + \left(-\frac{1}{2}b_0 + b_1 - a_1 \right)x + \left(\frac{1}{3}b_0 - \frac{1}{2}b_1 - a_2 \right)x^2 \\ + \left(-\frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{3}b_1 \right)x^3 + \dots = O[x^4] \end{aligned}$$

Dengan mengambil empat suku pertama sebagai aproksimasi, maka diperoleh:

1. $b_0 - a_0 = 0$ atau $a_0 = b_0$
2. $-\frac{1}{2}b_0 + b_1 - a_1$ atau $a_1 = b_1 - \frac{1}{2}b_0 = \frac{3}{4}b_0 - \frac{1}{2}b_0 = \frac{1}{4}b_0$
3. $\frac{1}{3}b_0 - \frac{1}{2}b_1 - a_2$ atau $a_2 = \frac{1}{3}b_0 - \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{3}b_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}b_0\right) = -\frac{1}{24}b_0$
4. $-\frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{3}b_1$ atau $b_1 = \frac{3}{4}b_0$

Selanjutnya akan diperoleh

$$\begin{aligned}
 R_{2,1} &= \frac{b_0 + \frac{1}{4}b_0x - \frac{1}{24}b_0x^2}{b_0 + \frac{3}{4}b_0x} \\
 &= \frac{b_0 \left(1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{24}x^2\right)}{b_0 \left(1 + \frac{3}{4}x\right)} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{24}x^2}{1 + \frac{3}{4}x}, x \neq -\frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Jadi, aproksimasi Pade berderajat [2,1] untuk persamaan (2.39) adalah

$$f(x) \approx R_{2,1} = \frac{1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{24}x^2}{1 + \frac{3}{4}x}, x \neq -\frac{4}{3}$$

Perhitungan aproksimasi Pade juga dapat diperoleh dengan menggunakan MAPLE. Adapun perintah untuk menghitung aproksimasi Pade dalam MAPLE adalah sebagai berikut.

1. Tulis perintah *with(numapprox)*.
2. Tulis perintah *pade (f, x, [m, n])*, dengan parameter

f adalah fungsi yang akan didekati

x adalah variabel yang muncul dalam *f* dan

m, n adalah derajat dari masing-masing penyebut dan pembilang yang diinginkan.

Sebagai contoh diberikan aproksimasi Pade dari persamaan (2.39) dengan menggunakan MAPLE.

```

> restart;
> with(numapprox) :
> pade(1 - 1/2 x + 1/3 x^2 - 1/4 x^3 + 1/5 x^4, x, [1, 1]);

```

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 + \frac{1}{6}x}{1 + \frac{2}{3}x} \\
 & \text{> } \text{pade}\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5}x^4, x, [2, 1]\right); \\
 & \frac{1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{24}x^2}{1 + \frac{3}{4}x}
 \end{aligned}$$

2.6 Galat (Error)

2.6.1 Sumber Utama Galat Hampiran

Secara umum terdapat dua sumber utama penyebab galat dalam perhitungan hampiran yaitu:

1. Galat pemotongan (*truncation error*)
2. Galat pembulatan (*round-off error*)

Galat pemotongan adalah galat yang timbul akibat penggunaan hampiran sebagai pengganti formula eksak. Maksudnya, ekspresi matematik yang lebih kompleks diganti yang lebih sederhana. Istilah “pemotongan” muncul karena banyak metode hampiran yang diperoleh dengan penghampiran fungsi menggunakan deret Taylor. Karena deret Taylor merupakan deret yang berhingga, maka untuk penghampiran tersebut deret Taylor dihentikan atau dipotong sampai suku orde tertentu. Penghentian suatu deret atau runtutan langkah-langkah komputasi yang tidak berhingga menjadi runtutan langkah yang berhingga itulah yang menimbulkan galat pemotongan.

Contoh:

Hampiran fungsi $\cos(x)$ dengan bantuan deret Taylor di sekitar $x = 0$:

$$\cos(x) = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}}_{\text{nilai hampiran}} + \underbrace{\frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots}_{\text{galat pemotongan}}$$

Perhitungan dengan metode hampiran hampir selalu menggunakan bilangan riil. Masalah timbul bila komputasi hampiran dikerjakan oleh mesin (dalam hal ini komputer) karena semua bilangan riil tidak dapat disajikan secara tepat di dalam komputer. Keterbatasan komputer dalam menyajikan bilangan riil menghasilkan galat yang disebut galat pembulatan.

Contoh:

Misalkan suatu komputer hanya dapat mempresentasikan bilangan riil dalam 6 digit angka berarti, maka representasi bilangan $\frac{1}{6} = 0.166666666\dots$ di dalam komputer 6-digit tersebut adalah 0.166667 (Munir, 2010).

2.6.2 Cara Menganalisis Galat

Menganalisis galat sangat penting dalam perhitungan menggunakan metode hampiran. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya, maka semakin teliti solusi hampiran yang diperoleh, sebaliknya semakin besar galatnya maka solusi hampiran yang diperoleh semakin tidak teliti.

Misalkan $\hat{a}$ adalah nilai hampiran terhadap nilai sejatinya a maka diperoleh

$$\varepsilon = a - \hat{a}$$

ε disebut galat. Contoh, jika $\hat{a} = 10.5$ adalah nilai hampiran dari $a = 10.45$, maka galatnya adalah $\varepsilon = -0.01$ apabila tanda galat positif atau negatif tidak dipertimbangkan (Munir, 2010). Maka galat mutlak didefinisikan sebagai berikut

$$|\varepsilon| = |a - \hat{a}|$$

2.7 Penyelesaian Masalah dalam Al-Quran

Al-Quran adalah firman Allah yang diturunkan kepada Rasulullah Saw, sebagai pedoman hidup umat manusia. Pedoman untuk mengatur segala hal dan perbuatan manusia di dunia ini. Baik dalam hubungannya dengan Allah, dengan sesama ciptaan Allah, dan hubungan dengan diri sendiri. Dalam Al-Quran, Allah telah menyediakan banyak cara untuk manusia dalam menghadapi, menyikapi, dan menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-harinya.

Allah berfirman dalam al-Quran surat al-Insyirah/94:5 berikut:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾

"Maka sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan" (QS. al-Insyirah/94:5).

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, sesudah kesempitan ada kelonggaran, setelah kesedihan ada kegembiraan, dan sesudah malam yang gulita akan datang pagi cerah. Yang demikian itu, karena kesempitan, kesusahan, dan bencana itu pasti berakhir dan tidak akan berlangsung selamanya. Kesulitan itu satu, sedangkan kemudahan itu dua. Maka kesulitan yang satu tidak akan mengalahkan yang dua. Maka bergembiralah dengan datangnya kemudahan setelah kesulitan, dan terbitnya kelonggaran setelah kesulitan (Al-Qarni, 2007).

Dalam menyelesaikan masalah harus disertai dengan rasa optimisme dan harapan akan bantuan Ilahi, sebagaimana ditegaskan dalam surat al-Insyirah ayat 5-6, *Fa inna ma'a al-'usri yusra, inna ma'a al-us'ri yusra*. Surat al-Insyirah ayat 5-6 ini menegaskan bahwa satu kesulitan akan disertai dengan kemudahan. Karena itu, akhir surat tersebut menyatakan, *Wa ila Rabbika farghab* (hanya pada Tuhanmulah hendaknya engkau mengharap) (Shihab, 2007).

Terdapat ungkapan bahwa hasil tidak akan mengkhianati proses yang artinya setiap pekerjaan yang dilakukan dengan proses yang sungguh-sungguh akan mendapatkan hasil yang diharapkan, begitu juga sebaliknya. Allah berfirman dalam al-Quran surat al-An'am/6:135 berikut:

قُلْ يَتَقَوَّمُ أَعْمَلُوا عَلَىٰ مَكَانَتِكُمْ إِنِّي عَامِلٌ ۖ فَسَوْفَ تَعْلَمُونَ مَن تَكُونُ لَهُ عِقَابَةُ الدَّارِ ۖ إِنَّهُ لَا يُفْلِحُ الظَّالِمُونَ ﴿١٣٥﴾

“Hai kaumku, berbuatlah sepuh kemampuanmu, sesungguhnya akupun berbuat (pula). Kelak kamu akan mengetahui siapakah (di antara kita) yang akan memperoleh hasil yang baik di dunia ini. Sesungguhnya orang-orang yang zalim itu tidak akan mendapatkan keberuntungan” (QS. al-An'am/6:135).

Imani (2004) menjelaskan bahwa Ayat ini menyatakan kepada orang-orang kafir bahwa mereka boleh melakukan apa aja yang dapat mereka lakukan dan apa saja yang mungkin dapat mereka perbuat. *Katakanlah, “Hai kaumku, berbuatlah sepuh kemampuanmu, ...”*. Sehingga aku, pada giliranku, pun berbuat sebaik-baiknya. *...sesungguhnya aku pun berbuat pula...”*. Kalimat ini hendak menunjukkan tentang suatu pendirian yang disampaikan kepada orang-orang kafir bahwa mereka dapat berada dalam kekafiran dan kebencian mereka terhadap Rasulullah Saw dan Islam, tetapi ia (Rasulullah Saw) akan tetap dalam keislaman dan sabar menghadapi mereka *...kelak kamu akan mengetahui siapakah di antara kita yang akan memperoleh hasil yang baik dari dunia ini....* Tidaklah terlambat untuk mengetahui siapa di antara mereka yang akan mendapatkan hasil yang baik dan menyenangkan. *...sesungguhnya orang-orang yang zalim itu tidak akan mendapat keberuntungan*. Kalimat ini ditambahkan sebagai peringatan dan ancaman akan azab Ilahi dengan menegaskan bahwa orang-orang zalim itu tidak akan pernah berhasil mencapai tujuan mereka.

Surat al-An'am/06:135 tersebut berisi tentang kesabaran dan kesungguhan Rasulullah Saw, dalam menghadapi masalah yaitu menghadapi orang-orang kafir yang tetap dalam kekafirannya dan kebenciannya kepada Rasulullah Saw, dan agama Islam. Berdasarkan ayat tersebut diperoleh suatu penjelasan atau teladan bagaimana menghadapi suatu masalah yang berat bahkan sangat berat sekalipun yaitu dengan sabar dan sungguh-sungguh.

Allah berfirman dalam al-Quran surat Maryam/19:94 berikut:

لَقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا

“sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti” (QS. Maryam/19:94).

Menurut Shihab (2002) ayat di atas dapat diketahui bahwa Allah yang melukiskan sebagai *ahshaahum* atau dalam istilah hadits *Asma'al Husna* adalah *Al-muhshi* dipahami oleh banyak ulama sebagai Dia yang mengetahui kadar setiap peristiwa, baik yang dapat dijangkau oleh manusia maupun yang tidak, seperti hembusan nafas, dan rincian peroleh rizki. Allah adalah yang mengetahui dengan amat teliti rincian segala sesuatu dari segi jumlah dan kadarnya, panjang dan lebarnya, tempat dan waktunya dan lain sebagainya.

Allah Maha Teliti, yang mengetahui segala apa yang di langit dan bumi dan tidak ada yang luput satupun dari pengawasan *Al-muhshi*. Seperti berapa jumlah bintang di langit, jumlah pasir di lautan, jumlah daun yang gugur, bahkan sel-sel yang beredar dalam tubuh manusia Allah mengetahuinya dengan sangat teliti. Sebagai hamba Allah, manusia hendaknya menjadi hamba yang selalu berusaha teliti dalam menghadapi segala hal. Menyelesaikan masalah dengan

penuh ketelitian dan hati-hati, akan mengurangi peluang terjadinya kesalahan pada hasil penyelesaian suatu masalah.

Allah berfirman dalam al-Quran surat Yusuf/12:87 berikut:

يَبْنِي أَذْهَبُوا فَتَحَسَّسُوا مِنْ يُوسُفَ وَأَخِيهِ وَلَا تَأْيَسُوا مِنْ رَوْحِ اللَّهِ إِنَّهُ لَا يَأْيَسُ
مِنْ رَوْحِ اللَّهِ إِلَّا الْقَوْمُ الْكَافِرُونَ ﴿٨٧﴾

“Hai anak-anakku, pergilah kamu, maka carilah berita tentang Yusuf dan saudaranya dan jangan kamu berputus asa dari rahmat Allah. Sesungguhnya tiada berputus asa dari rahmat Allah, melainkan kaum yang kafir”(QS. Yusuf/12:87).

Surat Yusuf/12:87 menjelaskan tentang pesan nabi Ya'qub kepada saudara-saudara nabi Yusuf agar tidak berputus asa terhadap kasih sayang Allah yang akan mempertemukan mereka dengan nabi Yusuf dan saudara Bunyamin. Oleh sebab itu patut diteladani sebagai umat beragama khususnya Islam untuk tetap menghindari rasa putus asa agar terhindar dari golongan orang-orang kafir.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Metode Dekomposisi Adomian Laplace pada Persamaan KdV

Pada bab ini dibahas penyelesaian persamaan diferensial biasa khususnya persamaan KdV menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace. Persamaan yang diselesaikan adalah sebagai berikut

$$\frac{1}{3}\eta''(x) - 2F\eta(x) + \eta^2(x) = 0 \quad (3.1)$$

dengan kondisi awal

$$\eta(0) = 3F, \eta'(0) = 0 \quad (3.2)$$

Untuk memudahkan penyelesaian, persamaan (3.1) dapat disederhanakan menjadi persamaan berikut

$$\eta''(x) - 6F\eta(x) + 3\eta(x)^2 = 0 \quad (3.3)$$

Solusi persamaan (3.3) dapat diperoleh dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace, yaitu dengan langkah-langkah berikut. Pertama, kedua ruas persamaan (3.3) ditransformasi Laplace (yang dinotasikan dengan $\mathcal{L}$), sehingga diperoleh

$$\mathcal{L}\{\eta''(x) - 6F\eta(x) + 3\eta(x)^2\} = \mathcal{L}\{0\} \quad (3.4)$$

dengan menggunakan sifat linier dari transformasi Laplace pada persamaan (3.4) sehingga diperoleh

$$\mathcal{L}\{\eta''(x)\} - 6F\mathcal{L}\{\eta(x)\} + 3\mathcal{L}\{\eta(x)^2\} = 0 \quad (3.5)$$

Selanjutnya, dengan menerapkan sifat turunan dari transformasi Laplace pada persamaan (3.5), sehingga diperoleh

$$s^2 \mathcal{L}\{\eta(x)\} - s\eta(0) - \eta'(0) - 6F\mathcal{L}\{\eta(x)\} + 3\mathcal{L}\{\eta(x)^2\} = 0 \quad (3.6)$$

Selanjutnya, kondisi awal (3.2) disubstitusikan pada persamaan (3.6), sehingga diperoleh

$$s^2 \mathcal{L}\{\eta(x)\} = s(3F) + 6F\mathcal{L}\{\eta(x)\} - 3\mathcal{L}\{\eta(x)^2\} \quad (3.7)$$

atau

$$\mathcal{L}\{\eta(x)\} = \frac{3F}{s} + \frac{6F}{s^2} \mathcal{L}\{\eta(x)\} - \frac{6}{s^2} \mathcal{L}\{\eta(x)^2\} \quad (3.8)$$

Persamaan (3.8) tidak dapat diselesaikan secara langsung karena terdapat suku nonlinier. Oleh sebab itu solusi $\eta(x)$ dan suku nonlinier $\eta(x)^2$ dinyatakan sebagai deret takhingga sebagai berikut

$$\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x) \quad (3.9)$$

$$\eta(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.10)$$

dengan A_n adalah polinomial Adomian yang telah didefinisikan pada persamaan (2.14). Dengan mengikuti persamaan (2.14) maka diperoleh nilai $A_0, A_1, A_2, \dots, A_9$ untuk suku nonlinier $\eta(x)^2$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} A_0 &= \eta_0(x)^2 \\ A_1 &= 2\eta_0(x)\eta_1(x) \\ A_2 &= \eta_1(x)^2 + 2\eta_0(x)\eta_2(x) \\ A_3 &= 2\eta_1(x)\eta_2(x) + 2\eta_0(x)\eta_3(x) \\ A_4 &= \eta_2(x)^2 + 2\eta_1(x)\eta_3(x) + 2\eta_0(x)\eta_4(x) \\ A_5 &= 2\eta_2(x)\eta_3(x) + 2\eta_1(x)\eta_4(x) + 2\eta_0(x)\eta_5(x) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$A_6 = \eta_3(x)^2 + 2\eta_2(x)\eta_4(x) + 2\eta_1(x)\eta_5(x) + 2\eta_0(x)\eta_6(x)$$

$$A_7 = 2\eta_3(x)\eta_4(x) + 2\eta_2(x)\eta_5(x) + 2\eta_1(x)\eta_6(x) + 2\eta_0(x)\eta_7(x)$$

$$A_8 = \eta_4(x)^2 + 2\eta_3(x)\eta_5(x) + 2\eta_2(x)\eta_6(x) + 2\eta_1(x)\eta_7(x)$$

$$+ 2\eta_0(x)\eta_8(x)$$

$$A_9 = 2\eta_4(x)\eta_5(x) + 2\eta_3(x)\eta_6(x) + 2\eta_2(x)\eta_7(x) + 2\eta_1(x)\eta_8(x)$$

$$+ 2\eta_0(x)\eta_9(x)$$

Selanjutnya, persamaan (3.9) dan (3.10) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.8) sehingga menjadi

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x)\right\} = \frac{3F}{s} + \frac{6F}{s^2} \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x)\right\} - \frac{6}{s^2} \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right\} \quad (3.12)$$

dengan menggunakan sifat linier transformasi Laplace pada persamaan (3.12) sehingga menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{\eta_n(x)\} = \frac{3F}{s} + \frac{6F}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{\eta_n(x)\} - \frac{6}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{A_n\} \quad (3.2)$$

Selanjutnya, dimisalkan $\frac{6F}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{\eta_n(x)\}$ dan $\frac{6}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{A_n\}$ pada persamaan (3.13) berorde λ , maka dapat ditulis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{\eta_n(x)\} = \frac{3F}{s} + \lambda \frac{6F}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{\eta_n(x)\} - \lambda \frac{6}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{A_n\} \quad (3.14)$$

dan dimisalkan $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{\eta_n(x)\}$ dan $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{A_n\}$ pada persamaan (3.13) berorde λ maka dapat ditulis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathcal{L}\{\eta_n(x)\} = \frac{3F}{s} + \lambda \frac{6F}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathcal{L}\{\eta_n(x)\} - \lambda \frac{6}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathcal{L}\{A_n\} \quad (3.15)$$

dan persamaan (3.15) dapat diuraikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}\{\eta_0(x)\} + \lambda \mathcal{L}\{\eta_1(x)\} + \lambda^2 \mathcal{L}\{\eta_2(x)\} + \dots \\
&= \frac{3F}{s} + \lambda \frac{6F}{s^2} [\mathcal{L}\{\eta_0(x)\} + \lambda \mathcal{L}\{\eta_1(x)\} + \lambda^2 \mathcal{L}\{\eta_2(x)\} + \dots] \quad (3.16) \\
&\quad - \lambda \frac{6}{s^2} [\mathcal{L}\{A_0\} + \lambda \mathcal{L}\{A_1\} + \lambda^2 \mathcal{L}\{A_2\} + \dots]
\end{aligned}$$

Jika koefisien dari perpangkatan λ pada persamaan (3.16) disamakan kedua ruas, maka koefisien dari $\lambda^0, \lambda, \lambda^2, \dots$ diperoleh relasi rekursif sebagai berikut

$$\mathcal{L}\{\eta_0(x)\} = \frac{3F}{s} \quad (3.17)$$

$$\mathcal{L}\{\eta_1(x)\} = \frac{6F}{s^2} \mathcal{L}\{\eta_0(x)\} - \frac{6}{s^2} \mathcal{L}\{A_0\} \quad (3.18)$$

$$\mathcal{L}\{\eta_2(x)\} = \frac{6F}{s^2} \mathcal{L}\{\eta_1(x)\} - \frac{6}{s^2} \mathcal{L}\{A_1\} \quad (3.19)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\mathcal{L}\{\eta_n(x)\} = \frac{6F}{s^2} \mathcal{L}\{\eta_{n-1}(x)\} - \frac{6}{s^2} \mathcal{L}\{A_{n-1}\} \quad (3.20)$$

Persamaan (3.17) sampai persamaan (3.20) adalah suatu barisan dengan nilai ke- n yang dikaitkan dengan suku-suku sebelumnya. Penurunan persamaan (3.17) sampai (3.20) dapat dilihat pada Lampiran 5. Selanjutnya, digunakan invers transformasi Laplace pada persamaan (3.17) untuk mendapatkan nilai $\eta_0(x)$ sebagai berikut

$$\eta_0(x) = L^{-1}\left\{\frac{3F}{s}\right\} = 3F(1) = 3F$$

Selanjutnya, nilai $\eta_0(x)$ disubstitusikan pada persamaan (3.18) dan digunakan invers transformasi Laplace pada persamaan (3.18) sebagai berikut

$$\eta_1(x) = L^{-1}\left\{\frac{6F}{s^2} (L\{\eta_0(x)\}) - \frac{3}{s^2} L\{A_0\}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} (L\{\eta_0(x)\}) - \frac{3}{s^2} L\{\eta_0(x)^2\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} \left(\frac{3F}{s} \right) - \frac{3}{s^2} \left(\frac{9F^2}{s} \right) \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{18F^2}{s^3} - \frac{27F^2}{s^3} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{-9F^2}{s^3} \right\} = \frac{-9F^2}{2} L^{-1} \left\{ \frac{2}{s^3} \right\} = \frac{-9}{2} F^2 x^2
\end{aligned}$$

Selanjutnya, nilai $\eta_0(x)$ dan $\eta_1(x)$ disubstitusikan pada persamaan (3.19) dan digunakan invers transformasi Laplace pada persamaan (3.19) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\eta_2(x) &= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L\{\eta_1\} - \frac{3}{s^2} L\{A_1\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L\{\eta_1(x)\} - \frac{3}{s^2} L\{2\eta_0(x)\eta_1(x)\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} \left(\frac{-9F^2}{s^3} \right) - \frac{3}{s^2} L \left\{ 2(3F) \left(\frac{-9}{2} F^2 x^2 \right) \right\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} \left(\frac{-9F^2}{s^3} \right) - \frac{3}{s^2} L \left\{ \left(\frac{-54}{2} F^3 x^2 \right) \right\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} \left(\frac{-9F^2}{s^3} \right) - \frac{3}{s^2} \left(\frac{-54}{s^3} F^3 \right) \right\} = L^{-1} \left\{ -\frac{54F^3}{s^5} + \frac{162^3}{s^5} \right\} \\
&L^{-1} \left\{ \frac{108F^3}{s^5} \right\} = \frac{108F^3}{24} L^{-1} \left\{ \frac{24}{s^5} \right\} = \frac{108}{24} F^3 x^4
\end{aligned}$$

Untuk selanjutnya perhitungan $\eta_3(x), \eta_4(x), \dots, \eta_{10}(x)$ dapat dilihat pada Lampiran 6, dengan diperoleh hasil sebagai berikut

$$\eta_3(x) = -\frac{153}{40} F^4 x^6$$

$$\eta_4(x) = \frac{837}{280} F^5 x^8$$

$$\eta_5(x) = -\frac{6219}{2800} F^6 x^{10}$$

$$\eta_6(x) = \frac{49149}{30800} F^7 x^{12}$$

$$\eta_7(x) = -\frac{25098363}{22422400} F^8 x^{14}$$

$$\eta_8(x) = \frac{217658367}{448448000} F^9 x^{16} + \frac{22559391}{23408000} F^{11} x^{20}$$

$$\eta_9(x) = -\frac{9}{1991669680000} F^{10} x^{18} (113478032855 + 553958379 F^2 x^4)$$

$$\eta_{10}(x) = \frac{1161}{7329344442240000} F^{11} x^{20} (209223564077 + 3010269951 F^2 x^4)$$

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (3.9) yaitu solusi $\eta(x)$ berupa deret tak hingga dan nilai $\eta_0(x), \eta_1(x), \dots, \eta_{10}(x)$ yang telah diperoleh, maka solusi hampiran masalah nilai awal (3.4) yang dipotong pada $n = 5$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \sum_{n=0}^5 \eta_n(x) = \eta_0(x) + \eta_1(x) + \dots + \eta_5(x) \\ &= 3F - \frac{9}{2} F^2 x^2 + \frac{108}{24} F^3 x^4 - \frac{153}{40} F^4 x^6 + \frac{837}{280} F^5 x^8 \\ &\quad - \frac{6219}{2800} F^6 x^{10} \end{aligned} \quad (3.21)$$

dan solusi hampiran masalah nilai awal (3. 4) yang dipotong pada $n = 10$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \sum_{n=0}^{10} \eta_n(x) = \eta_0(x) + \eta_1(x) + \eta_2(x) + \eta_3(x) + \eta_4(x) + \eta_5(x) \\ &\quad + \eta_6(x) + \eta_7(x) + \eta_8(x) + \eta_9(x) + \eta_{10}(x) \\ &= 3F - \frac{9}{2} F^2 x^2 + \frac{108}{24} F^3 x^4 - \frac{153}{40} F^4 x^6 + \frac{837}{280} F^5 x^8 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{6219}{2800}F^6x^{10} + \frac{49149}{30800}F^7x^{12} - \frac{25098363}{22422400}F^8x^{14} \\
& + \frac{217658367}{448448000}F^9x^{16} + \frac{22559391}{23408000}F^{11}x^{20} \\
& - \frac{9}{1991669680000}F^{10}x^{18}(113478032855 \\
& + 553958379F^2x^4) \\
& + \frac{1161}{7329344442240000}F^{11}x^{20}(209223564077 \\
& + 3010269951F^2x^4)
\end{aligned}$$

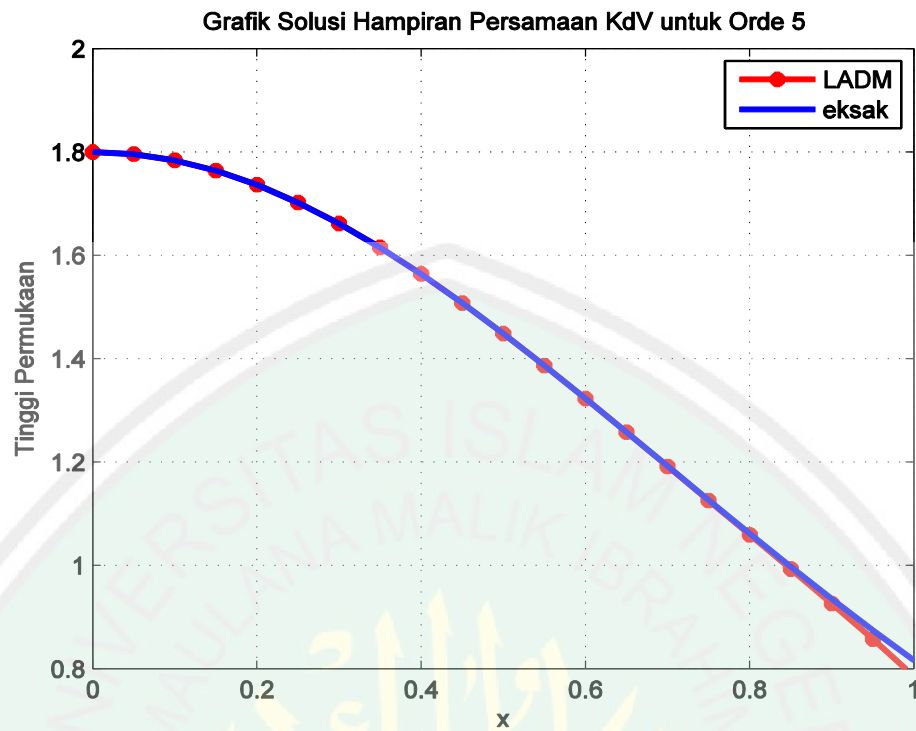
Persamaan (3.21) dan (3.22) adalah solusi hampiran persamaan (3.4) dengan orde yang berbeda, yang digunakan untuk dibandingkan dengan solusi eksaknya.

3.2 Simulasi dan Analisis Galat (*Error*)

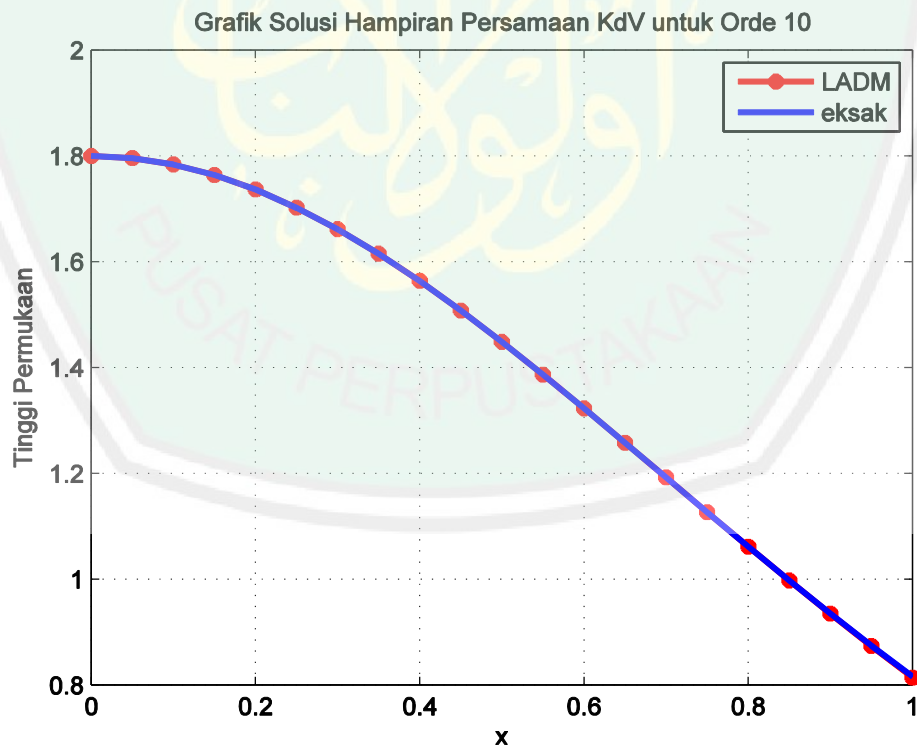
Persamaan (3.21) dan (3.22) adalah solusi hampiran dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk orde $n = 5$ dan $n = 10$. Dua solusi hampiran tersebut akan disimulasi dengan menggunakan program MATLAB. Simulasi dilakukan untuk nilai $0 \leq x \leq 1$ dan $0 \leq x \leq 10$, $\Delta x = 0,05$ dan $F = 0,6$. Kemudian diberikan tabel galat yang diperoleh dari perbandingan solusi eksak dan solusi hampirannya.

3.2.1 Simulasi dan Analisis Galat untuk Nilai $0 \leq x \leq 1$

Simulasi pertama dilakukan pada persamaan (3.21) dan (3.22) beserta solusi eksaknya dengan dibatasi $0 \leq x \leq 1$. Sehingga perbandingan solusi hampiran dan solusi eksaknya dapat dilihat pada Gambar 3.1 dan Gambar 3.2 berikut.



Gambar 3.1 Perbandingan Grafik Solusi Hampiran (3.21) dan Solusi Eksak untuk $0 \leq x \leq 1$.



Gambar 3.2 Perbandingan Grafik Solusi Hampiran (3.22) dan Solusi Eksak untuk $0 \leq x \leq 1$

Gambar 3.1 menunjukkan grafik solusi eksak dan solusi hampiran untuk orde $n = 5$ dan Gambar 3.2 menunjukkan grafik solusi eksak dan solusi hampiran

untuk orde $n = 10$. Solusi hampiran untuk orde $n = 5$ mendekati solusi eksaknya hanya ketika $0 \leq x \leq 0.9$. Solusi hampiran untuk orde $n = 10$ dapat mendekati solusi eksaknya ketika $0 \leq x \leq 1$. Untuk mengetahui lebih jelas perbandingan solusi hampiran dan solusi eksaknya, maka diberikan hasil tabel galat berikut.

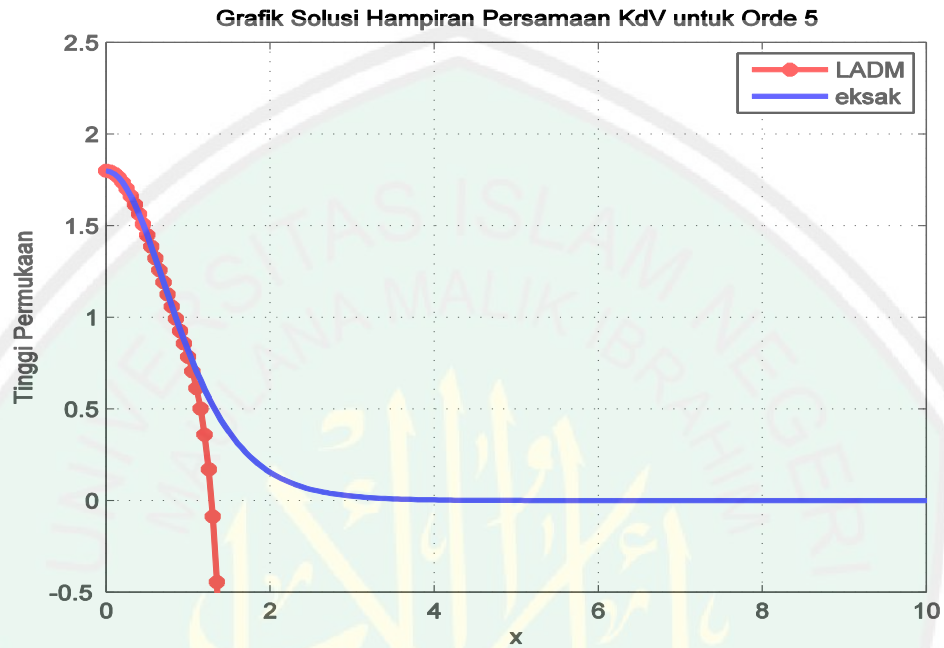
Tabel 3.1 Galat Solusi Hampiran (3.21) dan (3.22) dengan Solusi Eksak untuk $0 \leq x \leq 1$

Nilai x	Galat Orde $n = 5$	Galat Orde $n = 10$
$x = 0$	0	0
$x = 0,1$	0,0000000000000044	0
$x = 0,2$	0,000000000179941	0,0000000000000019
$x = 0,3$	0,000000022872881	0,000000000012363
$x = 0,4$	0,000000702115784	0,000000001228743
$x = 0,5$	0,000009866042477	0,000000043325931
$x = 0,6$	0,000084417008256	0,000000789919774
$x = 0,7$	0,000512310865323	0,000009077816658
$x = 0,8$	0,002416294946511	0,000073705418101
$x = 0,9$	0,009397217092483	0,000452252251368
$x = 1$	0,031385765537822	0,002172259883535

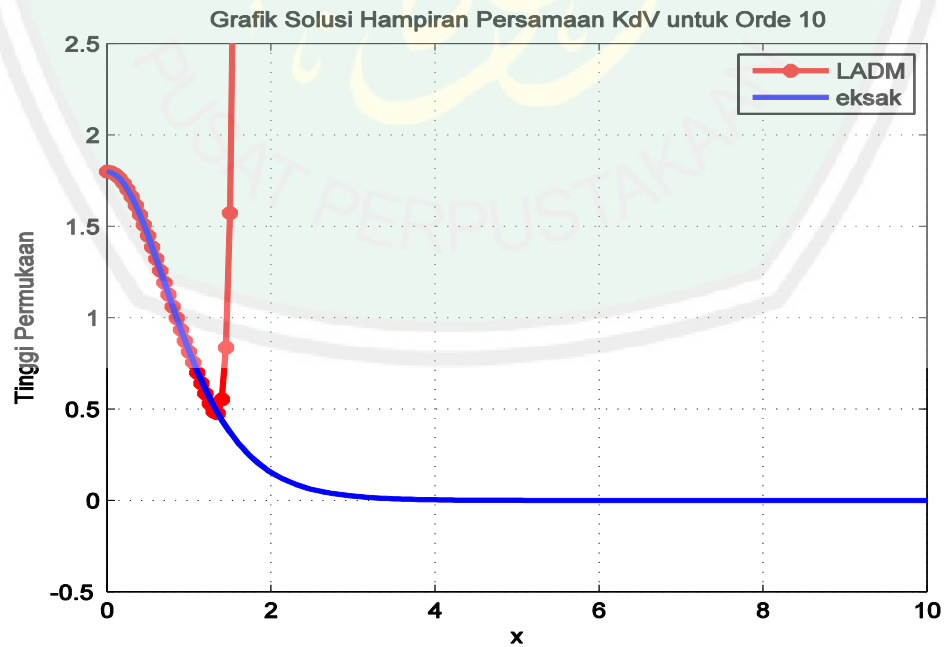
Tabel 3.1 menunjukkan perhitungan galat antara solusi eksak dan solusi hampiran untuk orde $n = 5$ dan $n = 10$. Hasil perhitungan tersebut menunjukkan bahwa nilai maksimum mutlak *error* yaitu pada saat $x = 1$ antara solusi eksak dan solusi hampiran untuk orde $n = 5$ sebesar 0,031385765537822 dan nilai maksimum mutlak *error* antara solusi eksak dan solusi hampiran untuk orde $n = 10$ sebesar 0,002172259883535. Sehingga dapat dikatakan galat untuk orde $n = 10$ lebih kecil dibandingkan dengan galat untuk orde $n = 5$, dan dapat dilihat nilai galat semakin kecil, atau mendekati nilai sebenarnya ketika nilai x mendekati nol.

3.2.2 Simulasi dan Analisa Galat untuk Nilai $0 \leq x \leq 10$

Simulasi kedua dilakukan pada persamaan (3.21) dan (3.22) dengan solusi eksaknya dengan dibatasi $0 \leq x \leq 10$. Sehingga perbandingan solusi hampiran dan solusi eksaknya dapat dilihat pada Gambar 3.3 dan Gambar 3.4 berikut.



Gambar 3.3 Perbandingan Grafik Solusi Hampiran (3.21) dan Solusi Eksak untuk $1 \leq x \leq 10$



Gambar 3.4 Perbandingan Grafik Solusi Hampiran (3.22) dan Solusi Eksak untuk $1 \leq x \leq 10$

Gambar 3.3 menunjukkan grafik solusi eksak dan solusi hampiran untuk orde $n = 5$ dan Gambar 3.4 menunjukkan grafik solusi eksak dan solusi hampiran untuk orde $n = 10$. Dari kedua gambar diberikan nilai $0 \leq x \leq 10$. Kedua gambar menunjukkan bahwa ketika $x \geq 1$ solusi hampiran untuk orde $n = 5$ atau $n = 10$ menjauhi solusi eksaknya. Untuk mengetahui lebih jelas perbandingan solusi hampiran dan solusi eksak untuk $0 \leq x \leq 10$, maka diberikan tabel galat berikut

Tabel 3.2 Galat Solusi Hampiran (3.21) dan (3.22) dengan Solusi Eksak untuk $0 \leq x \leq 10$

Nilai x	Galat Orde $n = 5$	Galat Orde $n = 10$
$x = 0$	0	0
$x = 1$	$0,000000000031386 \times 10^9$	$0,0000000000000000 \times 10^{18}$
$x = 2$	$0,000000067615900 \times 10^9$	$0,0000000000000001 \times 10^{18}$
$x = 3$	$0,000004889398064 \times 10^9$	$0,0000000000005938 \times 10^{18}$
$x = 4$	$0,000095232183665 \times 10^9$	$0,000000003167137 \times 10^{18}$
$x = 5$	$0,000928352941617 \times 10^9$	$0,000000495044040 \times 10^{18}$
$x = 6$	$0,005897390272305 \times 10^9$	$0,000034164726564 \times 10^{18}$
$x = 7$	$0,027987922212453 \times 10^9$	$0,001290777080268 \times 10^{18}$
$x = 8$	$0,107494161040748 \times 10^9$	$0,030742970646950 \times 10^{18}$
$x = 9$	$0,351573719313835 \times 10^9$	$0,509820399472037 \times 10^{18}$
$x = 10$	$1,013504560200000 \times 10^9$	$6,325517987939457 \times 10^{18}$

Tabel 3.2 adalah perhitungan galat antara solusi eksak dan solusi hampiran untuk orde $n = 5$ dan $n = 10$ ketika $0 \leq x \leq 10$. Dari hasil perhitungan tersebut menunjukkan semakin besar nilai x yang diberikan maka galat yang diperoleh semakin besar atau menjauhi nilai sebenarnya. Nilai maksimum mutlak *error* yaitu ketika $x = 10$ antara solusi eksak dan solusi hampiran untuk $n = 5$ sebesar $1,013504560200000 \times 10^9$ dan untuk nilai maksimum mutlak *error* yaitu ketika $x = 10$ antara solusi eksak dan solusi hampiran untuk $n = 10$ sebesar $6,325517987939457 \times 10^{18}$. Sehingga dapat dikatakan bahwa galat dari kedua solusi hampiran sangat besar bahkan untuk orde yang tinggi. Untuk mengatasi

permasalahan tersebut, maka digunakan aproksimasi Pade untuk menghampiri solusi yang diperoleh dari metode dekomposisi Adomian Laplace.

3.3 Aproksimasi Pade untuk Solusi Hampiran (3.22)

Aproksimasi Pade adalah metode untuk mengubah solusi hampiran persamaan (3.22) menjadi fungsi rasional. Berdasarkan penjelasan cara perhitungan aproksimasi Pade pada Bab II sebelumnya, maka pada bagian ini akan dianalisis aproksimasi Pade untuk persamaan (3.22) yaitu ketika $n = 10$, dengan menyatakan kembali persamaan (3.22) sebagai berikut

$$\begin{aligned}\eta(x) = & 3F - \frac{9}{2}F^2x^2 + \frac{108}{24}F^3x^4 - \frac{153}{40}F^4x^6 + \frac{837}{280}F^5x^8 - \frac{6219}{2800}F^6x^{10} \\ & + \frac{49149}{30800}F^7x^{12} - \frac{25098363}{22422400}F^8x^{14} + \frac{20677544865}{42602560000}F^9x^{16} \\ & + \frac{4105809162}{42602560000}F^{11}x^{20} \\ & - \frac{9}{1991669680000}F^{10}x^{18}(113478032855 + 553958379F^2x^4) \\ & + \frac{1161}{7329344442240000}F^{11}x^{20}(209223564077 + 3010269951F^2x^4)\end{aligned}$$

Sebelumnya $\eta(x)$ diekspansi ke dalam deret taylor berderajat 4 di sekitar $x = 0$. Dengan diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \eta(0) + \eta'(0)x + \frac{\eta''(0)x^2}{2!} + \frac{\eta'''(0)x^3}{3!} + \frac{\eta^{(4)}(0)x^4}{4!} \\ &= 3F + 0 - \frac{9}{2}F^2x^2 + 0 + \frac{9}{2}F^3x^4 \\ &= 3F - \frac{9}{2}F^2x^2 + \frac{9}{2}F^3x^4\end{aligned}$$

Aproksimasi Pade adalah mengubah persamaan (3.22) tersebut menjadi bentuk rasional sebagai berikut

$$\eta(x) = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Lx^L}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_Mx^M}$$

Selanjutnya diasumsikan $L = M = 2$, maka

$$\begin{aligned} 3F - \frac{9}{2}F^2x^2 + \frac{9}{2}F^3x^4 &= \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{b_0 + b_1x + b_2x^2} \\ \Leftrightarrow \left(3F - \frac{9}{2}F^2x^2 + \frac{9}{2}F^3x^4\right)(b_0 + b_1x + b_2x^2) - (a_0 + a_1x + a_2x^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (3Fb_0 - a_0) + (3Fb_1 - a_1)x + \left(-\frac{9}{2}F^2b_0 + 3Fb_2 - a_2\right)x^2 + \left(-\frac{9}{2}F^2b_1\right)x^3 \\ &+ \left(\frac{9}{2}F^3b_0 - \frac{9}{2}F^2b_2\right)x^4 + \dots = 0 \end{aligned}$$

Ketika koefisien dari pangkat x dibandingkan maka diperoleh sistem persamaan linier berikut

$$\begin{aligned} 3Fb_0 - a_0 &= 0 \\ 3Fb_1 - a_1 &= 0 \\ \frac{9}{2}F^2b_0 + 3Fb_2 - a_2 &= 0 \\ -\frac{9}{2}F^2b_1 &= 0 \\ \frac{9}{2}F^3b_0 - \frac{9}{2}F^2b_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

dengan jelas diperoleh

$$a_0 = 3Fb_0$$

Selanjutnya, persamaan kelima dari sistem persamaan (3.23) diselesaikan terlebih dahulu sebagai berikut

$$\frac{9}{2}F^2b_2 = \frac{9}{2}F^3b_0 \rightarrow b_2 = \frac{9}{2}F^3b_0 \left(\frac{2}{9F^2} \right) = Fb_0 \quad (3.24)$$

Selanjutnya, persamaan keempat dari sistem persamaan (3.23) diselesaikan

$$-\frac{9}{2}F^2b_1 = 0 \rightarrow b_1 = 0 \left(-\frac{2}{9F^2} \right) = 0 \quad (3.25)$$

Selanjutnya, persamaan ketiga dari sistem persamaan (3.23) diselesaikan. dengan menggunakan hasil b_2 pada persamaan (3.24) maka akan diperoleh a_2 sebagai berikut

$$\begin{aligned} -\frac{9}{2}F^2b_0 + 3Fb_2 - a_2 &= 0 \rightarrow a_2 = -\frac{9}{2}F^2b_0 + 3Fb_1 \\ &= -\frac{9}{2}F^2b_0 + 3F(Fb_0) \\ &= 3F^3b_0 - \frac{9}{2}F^2b_0 \\ &= -\frac{3}{2}F^2b_0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Selanjutnya, persamaan kedua dari sistem persamaan (3.23) diselesaikan. Dengan menggunakan hasil b_1 pada persamaan (3.25) maka akan diperoleh a_1 sebagai berikut

$$3Fb_1 = a_1 \rightarrow a_1 = 3F(0) = 0 \quad (3.27)$$

Dari nilai a_0, a_1, b_1 dan b_2 yang diperoleh, maka aproksimasi Pade berderajat [2,2] dari persamaan (3.22) sebagai berikut

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \frac{3Fb_0 + \left(-\frac{3}{2}F^2b_0\right)x^2}{b_0 + Fb_0x^2} \\ &= \frac{b_0 \left(3F - \frac{3}{2}F^2x^2\right)}{b_0(1 + Fx^2)} = \frac{3F - \frac{3}{2}F^2x^2}{1 + Fx^2}, x \neq \sqrt{-\frac{1}{F}} \end{aligned}$$

Selanjut untuk perhitungan aproksimasi Pade derajat yang lebih besar yaitu derajat [4,4], [6,6], dan [8,8] dengan menggunakan program MAPLE. Adapun hasil yang diperoleh sebagai berikut

a. Aproksimasi Pade berderajat [4,4] persamaan (3.22)

$$\eta(x) = \frac{1260F - 330F^2x^2 + 39F^3x^4}{420 + 520F^2x^2 + 163F^2x^4}$$

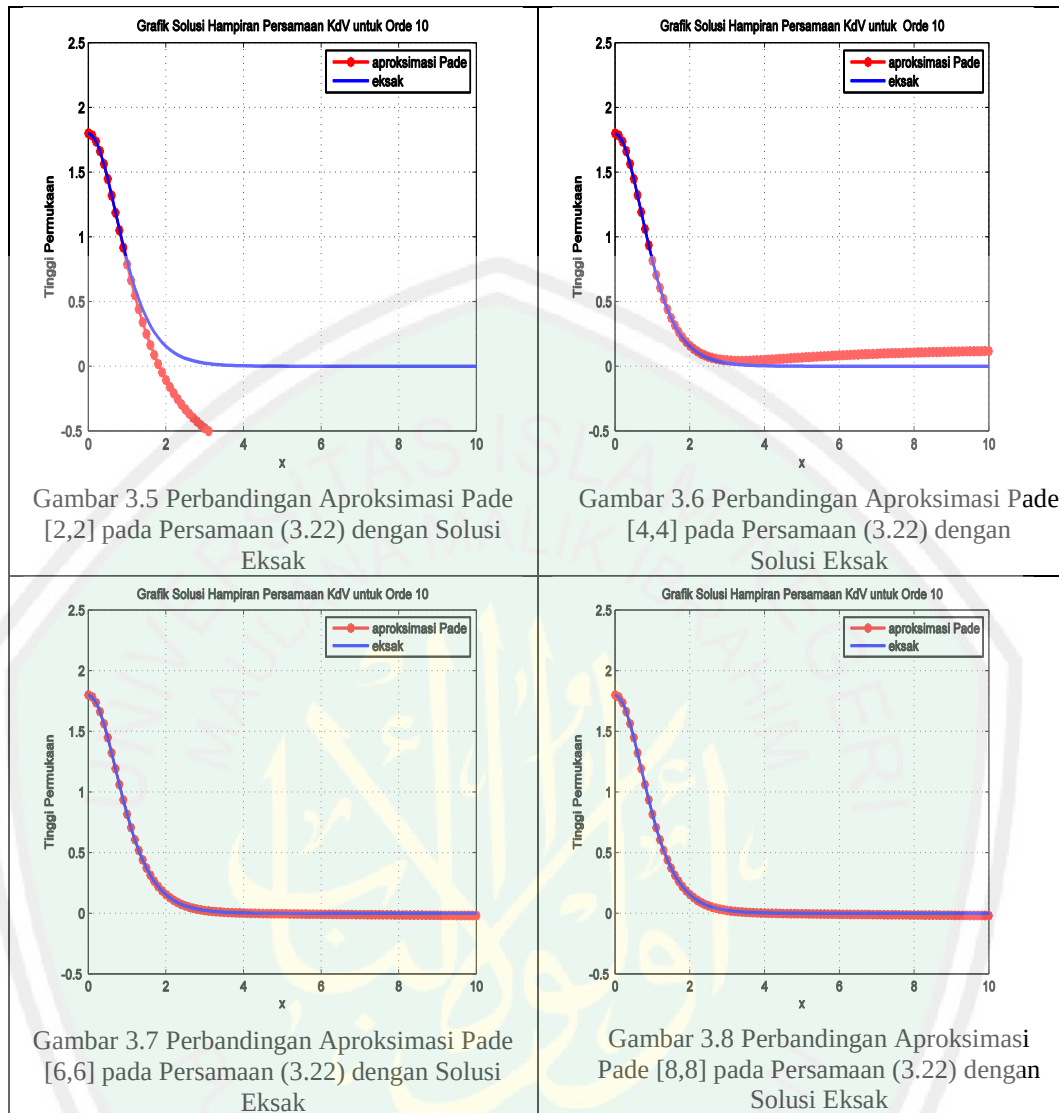
b. Aproksimasi Pade berderajat [6,6] persamaan (3.22)

$$\eta(x) = \frac{136290F - 24045F^2x^2 + 2079F^3x^4 - \frac{381}{4}F^4x^6}{45430 + 60130F^2x^2 + 22743F^2x^4 + 1811F^3x^6}$$

c. Aproksimasi Pade berderajat [8,8] persamaan (3.22)

$$\begin{aligned} \eta(x) = & \frac{3}{2} (36411575200F + 185061505889600F^2x^2 \\ & - 326495793332940F^3x^4 + 28229781903780F^4x^6 \\ & - 129335611499F^5x^8) / (18205787600 + 925334838127700F^2x^2 \\ & + 1224727051843680F^2x^4 + 463226423905050F^3x^6 \\ & + 36886157880443F^4x^8) \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil aproksimasi Pade untuk solusi hampiran (3.22) dengan derajat yang berbeda-beda, maka akan disimulasi untuk dibandingkan dengan solusi eksaknya. Adapun perbandingan antara solusi eksak dan solusi hampiran yang diperoleh dari perhitungan aproksimasi Pade tersebut dapat dilihat pada gambar di bawah ini:



Gambar 3.5, 3.6, 3.7, dan 3.8 menunjukkan grafik solusi eksak dan solusi hampiran untuk $n = 10$ yang telah diaproksimasi Pade dengan derajat yang berbeda-beda. Pada Gambar 3.5 sampai Gambar 3.8 diberikan nilai $0 \leq x \leq 10$. Dari semua gambar yang diberikan di atas bahwa solusi hampiran untuk $n = 10$ dengan aproksimasi Pade berderajat [6,6] dan [8,8] dapat mendekati solusi eksak untuk x yang lebih besar atau $x \geq 1$. Untuk mengetahui ketelitian seberapa dekat solusi hampiran dengan aproksimasi Pade terhadap solusi eksaknya, maka diberikan tabel galat berikut

Table 3.3 Galat Solusi Hampiran Aproksimasi Pade dengan Solusi Eksak

$\eta(x)$	Galat Orde $n = 10$ yang Diaproksimasi Pade dengan Derajat			
	[2,2]	[4,4]	[6,6]	[8,8]
$x = 0$	0,0000	0,0000	0,0000	0.0000
$x = 0,1$	0,0000	0,0000	0,0000	0.0000
$x = 0,2$	0,0000	0,0000	0,0000	0.0000
$x = 0,3$	0,0001	0,0000	0,0000	0.0000
$x = 0,4$	0,0003	0,0000	0,0000	0.0000
$x = 0,5$	0,0010	0,0000	0,0000	0.0000
$x = 0,6$	0,0026	0,0000	0,0000	0.0000
$x = 0,7$	0,0057	0,0000	0,0000	0.0000
$x = 0,8$	0,0108	0,0000	0,0000	0.0000
$x = 0,9$	0,0185	0,0000	0,0000	0.0000
$x = 1$	0,0290	0,0001	0,0000	0.0000
$x = 2$	0,2608	0,0045	0,0000	0.0000
$x = 3$	0,5022	0,0221	0,0004	0.0004
$x = 4$	0,6489	0,0459	0,0019	0.0019
$x = 5$	0,7318	0,0674	0,0044	0.0044
$x = 6$	0,7806	0,0843	0,0075	0.0075
$x = 7$	0,8112	0,0968	0,0106	0.0106
$x = 8$	0,8315	0,1061	0,0135	0.0135
$x = 9$	0,8456	0,1130	0,0160	0.0160
$x = 10$	0,8557	0,1182	0,0181	0.0181
$x = 100$	0,8996	0,1433	0,0314	0.0314

Tabel 3.3 adalah perhitungan galat antara solusi eksak dan solusi hampiran aproksimasi pade dengan derajat [2,2], [4,4], [6,6] dan derajat [8,8]. Hasil perhitungan tersebut menunjukkan bahwa nilai maksimum mutlak *error* yaitu ketika $x = 100$ untuk $n = 10$ yang di aproksimasi Pade untuk derajat [2,2] sebesar 0,8996, untuk derajat [4,4] sebesar 0,1433, untuk derajat [6,6] sebesar 0,0314, untuk derajat [8,8] sebesar 0,314. Nilai galat terkecil dari nilai maksimum mutlak *error* yang disebutkan diperoleh pada derajat [6,6] dan [8,8]. Sehingga dapat disimpulkan bahwa aproksimasi Pade untuk solusi hampiran dengan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk orde $n = 10$ akan lebih mendekati solusi eksaknya jika derajatnya semakin besar.

3.4 Penggunaan Penyelesaian Masalah dalam Islam

Berdasarkan beberapa ayat al-Quran beserta tafsirnya yang disebutkan dalam bab sebelumnya, bahwa ada beberapa cara untuk menghadapi suatu masalah yang harus diselesaikan. Di antaranya yaitu meyakini bahwa setiap kesulitan akan ada kemudahan, menyelesaikan masalah harus disertai dengan rasa optimisme dan harapan akan bantuan Ilahi, mengerjakan dengan sabar, sungguh-sungguh, teliti, dan tanpa ada rasa putus asa sedikitpun. Dengan semua itu dan atas ridho Allah, hasil yang diperoleh akan sesuai dengan apa yang diharapkan.

Sungguh-sungguh adalah salah satu cara penyelesaian masalah yang terdapat dalam al-Quran surat al-An'am/06:135. Kesungguhan dalam penyelesaian segala sesuatu sangat berpengaruh terhadap hasil yang diperoleh. Hal ini berlaku juga pada penyelesaian dalam matematika, yaitu penyelesaian menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace. Penyelesaian dalam metode tersebut berbentuk relasi rekursif atau relasi perulangan. Oleh sebab itu, perhitungan menggunakan metode tersebut secara manual memerlukan waktu yang lama dan berulang-ulang. Namun karena adanya kesungguhan dalam perhitungan yang berulang-ulang, maka penyelesaian tersebut dapat dihasilkan.

Selain sungguh-sungguh, sikap teliti terhadap perhitungan dengan metode dekomposisi Adomian Laplace juga digunakan. Dalam kamus besar bahasa Indonesia, teliti diartikan dengan cermat, seksama, dan berhati-hati dalam mengerjakan sesuatu. Dengan bersikap teliti terhadap perhitungan dalam banyak iterasi, tentu akan mengurangi terjadinya kesalahan dan akan lebih mempersingkat waktu untuk perhitungan tersebut. Dalam hal ini terdapat program komputer salah satunya yaitu program MAPLE yang berguna untuk mengetahui ketelitian dalam

perhitungan manual serta membantu perhitungan dengan mudah dan cepat tanpa membuat kesalahan.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka kesimpulan dari penelitian ini adalah:

1. Penyelesaian hampiran persamaan KdV menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace dapat dilakukankan dengan langkah-langkah sebagai berikut, menerapkan transformasi Laplace, mengasumsikan solusi sebagai jumlahan deret tak hingga, menggunakan bantuan polinomial Adomian untuk suku nonlinier, dan menerapkan invers transformasi untuk menghasilkan solusi hampirannya. Aproksimasi Pade digunakan untuk mendapatkan derajat keakuratan yang lebih baik.
2. Metode dekomposisi Adomian Laplace telah berhasil digunakan untuk menyelesaikan persamaan KdV. Ketika diberikan nilai $0 \leq x \leq 1$ diperoleh nilai maksimum mutlak *error* ketika $x = 1$ untuk orde $n = 5$ sebesar 0,031385765537822 dan untuk orde 10 sebesar 0,002172259883535. Dan ketika nilai $0 \geq x \geq 10$ diperoleh nilai maksimum mutlak *error* ketika $x = 10$ untuk orde 5 sebesar $1,013504560200000 \times 10^9$ dan untuk orde 10 sebesar $6,325517987939457 \times 10^{18}$. Sehingga dapat diartikan metode dekomposisi Adomian Laplace dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan KdV pada saat $0 \leq x \leq 1$, dan galat yang diperoleh akan semakin kecil untuk orde yang semakin besar.

3. Aproksimasi Pade untuk solusi hampiran dengan metode dekomposisi Adomian Laplace pada orde $n = 10$ dapat menghampiri solusi eksaknya pada derajat $[6,6]$ atau $[8,8]$. Nilai maksimum mutlak *error* ketika $x = 100$ dari kedua derajat bernilai sama yaitu sebesar 0,0314. Sehingga dapat diartikan aproksimasi Pade dapat digunakan untuk menghampiri solusi dari metode dekomposisi Adomian Laplace ketika $x \geq 1$.

4.2 Saran

Penelitian ini difokuskan pada persamaan KdV yang merupakan persamaan diferensial nonlinier homogen. Untuk penelitian selanjutnya disarankan untuk membahas persamaan diferensial nonlinier nonhomogen dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace dan dapat juga menggunakan metode aproksimasi Pade yang diselesaikan secara manual.

DAFTAR PUSTAKA

- Adomian, G. 1994. *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Ahmad, J., Hussain, F., & Naeem, M . 2014. Laplace Decomposition Method for Solving Singular Initial Value Problems. *AJMP*, 5 (1):1-15.
- Al-Qarni, A. 2007. *Tafsir Muyassar*. Jakarta: Qisthi Press.
- Baker, G.A & Morris. P.G. 1996. *Pade Approximants*. New York: Cambridge University Press.
- Fadaei, J. 2011. Application of Laplace-Adomian Decomposition Method on Linear and Nonlinear System of PDEs. *Applied Mathematical Sciences*, 5 (27):1307-1315.
- Handibag, S & Karande, B.D. 2013. Existence the Solutions of Some Fifth-Order KdV Equation by Laplace Decomposition Method. *American Journal of Computational Mathematics*, 3:80-85.
- Imani, A.K.F. 2004. *Tafsir Nurul Quran*. Jakarta: Al-Huda.
- Khuri, S.A. 2001. A Laplace Decomposition Method Algorithm Applied to a Class of Nonlinear Differential Equations. *Journal of Applied Mathematics*, 1 (4): 141-155.
- Ledder, G. 2005. *Differential Equations: A Modeling Approach*. New York: McGraw-Hill.
- Munir, R. 2010. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.
- Sa'adah, Z. 2008. *Analisis Aproksimasi Pade dan Penerapannya pada Hampiran Fungsi*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Schiff, J.L. 1999. *The Laplace Transform: Theory and Application*. New York: Springer-Verleg.
- Shihab, M.Q. 2002a. *Tafsir Al-Misbah Volume 15*. Jakarta: Lentera Hati.
- Shihab, M.Q. 2002b. *Tafsir Al-Misbah Volume 8*. Jakarta: Lentera Hati.
- Shihab, M.Q. 2007. *Secercah Cahaya Ilahi Hidup Bersama Al-Quran*. Bandung: PT. Mizan Pustaka.
- Speigel, M.R. 1999. *Transformasi Laplace*. Jakarta: Erlangga.

- Tang, K.T. 2005. *Mathematical Method for Engineers and Scientists 2:Vector Analysis. Ordinary Differential Equation and Laplace Transforms*. Tacoma: Springer Science Business and Media.
- Wartono & Muhaijir, M. N. 2013. Penyelesaian Persamaan Riccati dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace, *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, 10 (2).
- Wiryanto, L.H. & Jamhuri, M. 2015. Supercritical Flow Generating a Solitary-Like Wave Above a Bump. *IndoMS Journal on Industrial and Applied Mathematics*, 2 (1): 1-8.



LAMPIRAN 1

Solusi Eksak Persamaan KdV

$$\frac{1}{3}\eta''(x) - 2F\eta(x) + \eta^2(x) = 0 \quad (2.4)$$

Persamaan (2.3) dikalikan dengan $\eta'(x)$, sehingga diperoleh

$$\frac{1}{3}\eta''(x)\eta'(x) - 2F\eta(x)\eta'(x) + \eta^2(x)\eta'(x) = 0 \quad (1)$$

dan diintegrasikan, sehingga diperoleh

$$(\eta'(x))^2 - 6F\eta^2(x) + 2\eta^3(x) = 0 \quad (2)$$

Kemudian menggunakan metode koefisien tak tentu dengan memisalkan profil gelombang permukaan berbentuk secant hiperbolik.

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dx} &= \frac{d}{dx} A \operatorname{sech}^2(Bx + C) \\ &= \frac{d}{dx} A [\operatorname{sech}(Bx + C)\operatorname{sech}(Bx + C)] \\ &= A [\operatorname{sech}(Bx + C)(-\operatorname{sech}(Bx + C)\tanh(Bx + C)B) \\ &\quad + \operatorname{sech}(Bx + C)\tanh(Bx + C)B\operatorname{sech}(Bx + C)] \\ &= -AB\operatorname{sech}^2(Bx + C)\tanh(Bx + C) - AB\operatorname{sech}^2(Bx + C)\tanh(Bx + C) \\ &= -2AB\operatorname{sech}^2(Bx + C)\tanh(Bx + C) \end{aligned}$$

Substitusikan pada persamaan (2)

$$\begin{aligned} &(-2AB\operatorname{sech}^2(Bx + C)\tanh(Bx + C))^2 - 6F(A\operatorname{sech}^2(Bx + C))^2 \\ &\quad + 2(A\operatorname{sech}^2(Bx + C))^3 = 0 \\ &4A^2B^2\operatorname{sech}^4(Bx + C)\tanh^2(Bx + C) - 6FA^2\operatorname{sech}^4(Bx + C) \\ &\quad + 2A^3\operatorname{sech}^6(Bx + C) = 0 \end{aligned}$$

$$4A^2B^2 \operatorname{sech}^6(Bx + C) - 4A^2B^2 \operatorname{sech}^4(Bx + C) - 6F[A^2 \operatorname{sech}^4(Bx + C)] \\ + 2[A^3 \operatorname{sech}^6(Bx + C)] = 0$$

$$(-4A^2B^2 - 6FA^2)\operatorname{sech}^4(Bx + C) + (4A^2B^2 + 2A^3)\operatorname{sech}^6(Bx + C) = 0$$

$$A_1 \operatorname{sech}^4(Bx + C) + A_2 \operatorname{sech}^6(Bx + C) = 0$$

Dimisalkan

$$A_1 = -4A^2B^2 - 6FA^2 = 0, A_2 = 4A^2B^2 + 2A^3 = 0$$

Dari A_1 dan A_2 menghasilkan $A = 3F$ dan $B = -\sqrt{\frac{3}{2}}F$. sehingga diperoleh solusi analitik dari persamaan KdV sebagai berikut

$$\eta(x) = 3F \operatorname{sech}^2 \left(x \sqrt{\frac{3}{2}}F - C \right)$$

LAMPIRAN 2

Penurunan Persamaan (2.18)

Jika ruas kanan persamaan (2.17) berikut

$$\begin{aligned} A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots \\ = N(y_0) + N'(y_0)(\lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots) \\ + N''(y_0) \frac{(\lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots)^2}{2!} \\ + N'''(y_0) \frac{(\lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots)^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Diuraikan, maka diperoleh

$$\begin{aligned} &= N(y_0) + \lambda y_1 N'(y_0) + \lambda^2 y_2 N'(y_0) + \lambda^3 y_3 N'(y_0) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2!} N''(y_0) [(\lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots)(\lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 \\ &\quad + \dots)] \\ &\quad + \frac{1}{3!} N'''(y_0) [(\lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots)(\lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 \\ &\quad + \dots)(\lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots)] + \dots \\ &= N(y_0) + \lambda y_1 N'(y_0) + \lambda^2 y_2 N'(y_0) + \lambda^3 y_3 N'(y_0) \\ &\quad + \dots \frac{1}{2!} N''(y_0) [\lambda^2 y_1^2 + 2\lambda^3 y_1 y_2 + 2\lambda^4 y_1 y_3 + \lambda^4 y_2^2 + \dots] \\ &\quad + \frac{1}{3!} N'''(y_0) [\lambda^3 y_1^3 + 3\lambda^4 y_1^2 y_2 + 3\lambda^5 y_1 y_2^2 + 2\lambda^5 y_1^2 y_3 + \dots] \\ &= N(y_0) + \lambda y_1 N'(y_0) + \lambda^2 y_2 N'(y_0) + \frac{\lambda^2 y_1^2}{2!} N''(y_0) + \lambda^3 y_3 N'(y_0) \\ &\quad + \lambda^3 y_1 y_2 N''(y_0) + \frac{\lambda^3 y_1^3}{3!} N'''(y_0) + \dots \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan

$$A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots$$

$$= N(y_0) + \lambda y_1 N'(y_0) + \lambda^2 y_2 N'(y_0) + \frac{\lambda^2 y_1^2}{2!} N''(y_0) \\ + \lambda^3 y_3 N'(y_0) + \lambda^3 y_1 y_2 N''(y_0) + \frac{\lambda^3 y_1^3}{3!} N'''(y_0) + \dots$$

Jika koefisien dari perpangkatan λ pada kedua ruas dibandingkan, maka didapatkan polinomial Adomian $A_0, A_1, A_2, \dots$ sebagai berikut.

$$A_0 = N(y_0)$$

$$A_1 = y_1 N'(y_0)$$

$$A_2 = y_2 N'(y_0) + \frac{y_1^2}{2!} N''(y_0)$$

$$A_3 = y_3 N'(y_0) + y_0 y_1 N''(y_0) + \frac{y_1^3}{3!} N'''(y_0)$$

LAMPIRAN 3

Tabel Sifat-Sifat Umum Transformasi Laplace (Sumber: Spiegel:1999)

No	Fungsi $f(t) = L^{-1}[F(s)]$	Trnasformasi Laplace $F(s) = L[f(t)]$
1.	1	$\frac{1}{s}, s > 0$
2.	t	$\frac{1}{s^2}, s > 0$
3.	t^2	$\frac{2!}{s^3}, s > 0$
4.	$t^n, n = \text{bilangan asli}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
5.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$
6.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, s > 0$
7.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, s > 0$
8.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, s > a $
9.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, s > a $
10.	$e^{at} \sin bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$
11.	$e^{at} \cos bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$

LAMPIRAN 4**Transformasi Laplace dari Turunan-turunan $\eta(x)$.**

$$\begin{aligned}
L\{\eta'(x)\} &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \eta'(x) dx \\
&= e^{-sx} \eta(x) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} -s e^{-sx} \eta(x) dx \\
&= \left[\left(e^{-s(\infty)} \eta(\infty) \right) - \left(e^{-s(0)} \eta(0) \right) \right] + s \int_0^{\infty} e^{-sx} \eta(x) dx \\
&= [0 - 1 \cdot \eta(0)] + s \int_0^{\infty} e^{-sx} \eta(x) dx \\
&= -\eta(0) + sL\{\eta(x)\} = sL\{\eta(x)\} - \eta(0) \\
\{\eta''(x)\} &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \eta''(x) dx \\
&= e^{-sx} \eta'(x) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} -s e^{-sx} \eta'(x) dx \\
&= \left[\left(e^{-s(\infty)} \eta'(\infty) \right) - \left(e^{-s(0)} \eta'(0) \right) \right] + s \int_0^{\infty} e^{-sx} \eta'(x) dx \\
&= [0 - 1 \cdot \eta'(0)] + s \int_0^{\infty} e^{-sx} \eta'(x) dx \\
&= -\eta'(0) + sL\{\eta'(x)\} \\
&= s[sL\{\eta(x)\} - \eta(0)] - \eta'(0) \\
&= s^2 L\{\eta(x)\} - s\eta(0) - \eta'(0)
\end{aligned}$$

LAMPIRAN 5**Penurunan persamaan (3.17)**

diberikan persamaan (3.16) sebagai berikut

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}\{\eta_0(x)\} + \lambda \mathcal{L}\{\eta_1(x)\} + \lambda^2 \mathcal{L}\{\eta_2(x)\} + \dots \\ &= \frac{3F}{s} + \lambda \frac{6F}{s^2} [\mathcal{L}\{\eta_0(x)\} + \lambda \mathcal{L}\{\eta_1(x)\} + \lambda^2 \mathcal{L}\{\eta_2(x)\} + \dots] \quad (3.16) \\ & - \lambda \frac{6}{s^2} [\mathcal{L}\{A_0\} + \lambda \mathcal{L}\{A_1\} + \lambda^2 \mathcal{L}\{A_2\} + \dots] \end{aligned}$$

Jika ruas kanan persamaan (3.16) diuraikan, maka diperoleh

$$\begin{aligned} &= \frac{3F}{s} + \left[\lambda \frac{6F}{s^2} \mathcal{L}\{\eta_0(x)\} + \lambda^2 \frac{6F}{s^2} \mathcal{L}\{\eta_1(x)\} + \lambda^3 \frac{6F}{s^2} \mathcal{L}\{\eta(x)\} + \dots \right] \\ & - \left[\lambda \frac{6}{s^2} \mathcal{L}\{A_0\} + \lambda^2 \frac{6}{s^2} \mathcal{L}\{A_1\} + \lambda^3 \frac{6}{s^2} \mathcal{L}\{A_2\} + \dots \right] \\ &= \frac{3F}{s} + \lambda \left[\frac{6F}{s^2} \mathcal{L}\{\eta_0(x)\} - \frac{6}{s^2} \mathcal{L}\{A_0\} \right] + \lambda^2 \left[\frac{6F}{s^2} \mathcal{L}\{\eta_1(x)\} - \frac{6}{s^2} \mathcal{L}\{A_1\} \right] \\ & + \lambda^3 \left[\frac{6F}{s^2} \mathcal{L}\{\eta(x)\} - \frac{6}{s^2} \mathcal{L}\{A_2\} \right] + \dots \end{aligned}$$

Sehingga persamaan (3.16) menjadi

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}\{\eta_0(x)\} + \lambda \mathcal{L}\{\eta_1(x)\} + \lambda^2 \mathcal{L}\{\eta_2(x)\} + \dots \\ &= \frac{3F}{s} + \lambda \left[\frac{6F}{s^2} \mathcal{L}\{\eta_0(x)\} - \frac{6}{s^2} \mathcal{L}\{A_0\} \right] \\ & + \lambda^2 \left[\frac{6F}{s^2} \mathcal{L}\{\eta_1(x)\} - \frac{6}{s^2} \mathcal{L}\{A_1\} \right] \quad (*) \\ & + \lambda^3 \left[\frac{6F}{s^2} \mathcal{L}\{\eta(x)\} - \frac{6}{s^2} \mathcal{L}\{A_2\} \right] + \dots \end{aligned}$$

Selanjutnya, koefisien dari pangkat λ kedua ruas persamaan (*) dibandingkan, maka diperoleh relasi rekursif sebagai berikut

$$\mathcal{L}\{\eta_0(x)\} = \frac{3F}{s}$$

$$\mathcal{L}\{\eta_1(x)\} = \frac{6F}{s^2} \mathcal{L}\{\eta_0(x)\} - \frac{6}{s^2} \mathcal{L}\{A_0\}$$

$$\mathcal{L}\{\eta_2(x)\} = \frac{6F}{s^2} \mathcal{L}\{\eta_1(x)\} - \frac{6}{s^2} \mathcal{L}\{A_1\}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$


LAMPIRAN 6

Perhitungan Manual $\eta_3(x), \eta_4(x), \eta_5(x), \dots, \eta_{10}(x)$.

Adapun η mewakili $\eta(x)$

$$\begin{aligned}
 \eta_3 &= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L\{\eta_2\} - \frac{3}{s^2} L\{A_2\} \right\} \\
 &= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} (L\{\eta_2\}) - \frac{3}{s^2} L\{\eta_1^2 + 2\eta_0\eta_2\} \right\} \\
 &= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} \left(\frac{108F^3}{s^5} \right) - \frac{3}{s^2} L\left\{ \frac{189}{4} F^4 x^4 \right\} \right\} \\
 &= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} \left(\frac{108F^3}{s^5} \right) - \frac{3}{s^2} \left(\frac{1134}{s^5} F^4 \right) \right\} \\
 &= L^{-1} \left\{ \frac{648F^4}{s^7} - \frac{3402F^4}{s^7} \right\} \\
 &= L^{-1} \left\{ -\frac{2754F^4}{s^7} \right\} = \frac{-153}{40} F^4 x^6 \\
 \eta_4 &= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L\{\eta_3\} - \frac{3}{s^2} L\{A_3\} \right\} \\
 &= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} \left(L - \frac{2754F^4}{s^7} \right) - \frac{3}{s^2} L\{2\eta_1\eta_2(x) + 2\eta_0\eta_3\} \right\} \\
 &= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} \left(L - \frac{2754F^4}{s^7} \right) - \frac{3}{s^2} L\left\{ \frac{-1269}{20} F^5 x^6 \right\} \right\} \\
 &= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} \left(L - \frac{2754F^4}{s^7} \right) - \frac{3}{s^2} \left(-\frac{45684}{s^7} F^5 \right) \right\} \\
 &= L^{-1} \left\{ -\frac{16524F^5}{s^9} + \frac{1370522F^5}{s^9} \right\} \\
 &= L^{-1} \left\{ \frac{120528F^5}{s^9} \right\} = \frac{837}{280} F^5 x^8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_5 &= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L\{\eta_4\} - \frac{3}{s^2} L\{A_4\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L\{\eta_4\} - \frac{3}{s^2} L\{\eta_2^2 + 2\eta_1\eta_3 + 2\eta_0\eta_4\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} \left(\frac{837}{280} F^5 x^8 \right) - \frac{3}{s^2} L \left\{ \frac{20331}{280} F^6 x^8 \right\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} \left(\frac{120528}{s^9} F^5 \right) - \frac{3}{s^2} \left(\frac{2927664}{s^9} F^6 \right) \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{723168}{s^{11}} F^6 - \frac{8782992}{s^{11}} F^6 \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ -\frac{8059824}{s^{11}} F^6 \right\} = -\frac{6219}{2800} F^6 x^{10} \\
\eta_6 &= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L\{\eta_5\} - \frac{3}{s^2} L\{A_5\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L\{\eta_5\} - \frac{3}{s^2} L\{2\eta_2\eta_3 + 2\eta_1\eta_4 + 2\eta_0\eta_5\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L \left\{ -\frac{6219}{2800} F^6 x^{10} \right\} - \frac{3}{s^2} L \left\{ -\frac{14931}{200} F^7 x^{10} \right\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} \left(-\frac{8059824}{s^{11}} F^7 \right) - \frac{3}{s^2} \left(-\frac{270908064}{s^{11}} F^7 \right) \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ -\frac{48358944}{s^{13}} F^7 + \frac{812724192}{s^{13}} F^7 \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{764365248}{s^{13}} F^7 \right\} = \frac{49149}{30800} F^7 x^{12} \\
\eta_7 &= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L\{\eta_6\} - \frac{3}{s^2} L\{A_6\} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L\{\eta_6\} - \frac{3}{s^2} L\{\eta_3^2 + 2\eta_2\eta_4 + 2\eta_1\eta_5 + 2\eta_0\eta_6\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} \left(\frac{764365248}{s^{13}} F^7 \right) - \frac{3}{s^2} \left(\frac{34056208944}{s^{13}} F^8 \right) \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ -\frac{4586191488}{s^{15}} F^8 - \frac{102168626832}{s^{15}} F^8 \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ -\frac{97582435344}{s^{15}} F^8 \right\} = -\frac{25098363}{22422400} F^8 x^{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_8 &= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L\{\eta_7\} - \frac{3}{s^2} L\{A_7\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L\{\eta_7\} - \frac{3}{s^2} L\{2\eta_3\eta_4 + 2\eta_2\eta_5 + 2\eta_1\eta_6 + 2\eta_0\eta_7\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} \left(\frac{-97582435344}{s^{15}} F^8 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{s^2} \left(\frac{-78156737963006976}{s^{19}} F^{11} - \frac{358087794272}{s^{15}} F^9 \right) \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{10155068770752}{s^{17}} F^9 + \frac{234470213889020928}{s^{21}} F^{11} \right\} \\
&= \frac{217658367}{448448000} F^9 x^{16} + \frac{22559391}{23408000} F^{11} x^{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_9 &= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L\{\eta_8\} - \frac{3}{s^2} L\{A_8\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L\{\eta_8\} - \frac{3}{s^2} L\{\eta_4^2 + 2\eta_3\eta_5 + 2\eta_2\eta_6 + 2\eta_1\eta_7 + 2\eta_0\eta_8\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L \left\{ \frac{10155068770752}{s^{17}} F^9 + \frac{234470213889020928}{s^{21}} F^{11} \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{s^2} L \left\{ \frac{52907904 F^{10} (21067957 s^4 + 26590002192 F^2)}{s^{21}} \right\} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} \left(\frac{1259712F^9(8061421s^4 + 186130015344F^2)}{s^{12}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{s^2} \left(\frac{52907904F^{10}(108591419s^4 + 93065007672F^2)}{s^{23}} \right) \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ - \frac{10155068770752F^{10}(108591419s^4 + 93065007672F^2)}{s^{23}} \right\} \\
&= - \frac{9}{1991669680000} F^{10} x^{18} (113478032855 + 553958379F^2 x^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{10} &= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L\{\eta_9\} - \frac{3}{s^2} L\{A_9\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} L\{\eta_9\} - \frac{3}{s^2} L\{2\eta_4\eta_5 + 2\eta_3\eta_6 + 2\eta_2\eta_7 + 2\eta_1\eta_8 + 2\eta_0\eta_9\} \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{6F}{s^2} \left(- \frac{30233088F^{10}(10851419s^4 + 93065007672F^2)}{s^{23}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{s^2} \left(- \frac{22674816F^{11}(1214282213s^4 + 43740553605840F^2)}{s^{23}} \right) \right\} \\
&= L^{-1} \left\{ \frac{975017088F^{11}(826970609s^4 + 3034352110608F^2)}{s^{25}} \right\} \\
&= \frac{1161}{732934442240000} F^{11} x^{20} (209223564077 + 3010269951F^2 x^4)
\end{aligned}$$

LAMPIRAN 7

Perbandingan grafik solusi hampiran (3.21) dan solusi analitik untuk $0 \leq$

$x \leq 1$.

```
clear,figure(1),clf
format long
%x=[0;0.1;0.2;0.3;0.4;0.5;0.6;0.7;0.8;0.9;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10];
x=0:0.05:1;
F=0.6;
y=zeros(length(x),1);
yy=3.*F.*sech(x.*sqrt((3/2).*F)).^2;
for i=1:length(x);
y(i,1)=3*F-(9./2)*F^2*x(i)^2+(9./2)*F^3*x(i)^4-...
(153./40)*F^4*x(i)^6+(837./280)*F^5*x(i)^8-...
(6219./2800)*F^6*x(i)^10;
end
error=yy-y'
a1=plot(x,y,'r*-','x',yy,'b-')
set(a1,'lineWidth',2)
legend('LADM','eksak')
ylim([0.8 2])
xlabel('x'), ylabel('Tinggi Permukaan')
title('Grafik Solusi Hampiran Persamaan KdV untuk n=5')
grid on
print('gambar1xcv','-dpng')
```

Perbandingan grafik solusi hampiran (3.22) dan solusi analitiknya untuk $0 \leq$

$x \leq 1$.

```
clear,figure(2),clf
%x=[0.1;0.2;0.3;0.4;0.5;0.6;0.7;0.8;0.9;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10];
x=0:0.05:1;
F=0.6;
y=zeros(length(x),1);
yy=3.*F.*sech(x.*sqrt((3/2).*F)).^2;
for i=1:length(x);
y(i,1)=3*F-(9/2)*F^2*x(i)^2+(9/2)*F^3*x(i)^4-...
(153/40)*F^4*x(i)^6+(837/280)*F^5*x(i)^8-...
(6219/2800)*F^6*x(i)^10+(49149/30800)*F^7*x(i)^12-...
(25098363/22422400)*F^8*x(i)^14+(217658367/448448000)*F^9*x(i)^16+...
(247861580013/579394816000)*F^11*x(i)^20-
(977322771/1905904000)*x(i)^18*F^10-...
(22559391/9012080000)*x(i)^22*F^12+(15814133091/3316445440000)*F^13*x(i)^24;
end
error=abs(yy-y')
a1=plot(x,y,'r*-','x',yy,'b-')
set(a1,'lineWidth',2)
legend('LADM','eksak')
ylim([0.8 2])
xlabel('x'), ylabel('Tinggi Permukaan')
title('Grafik Solusi Hampiran Persamaan KdV untuk n=10')
```

```
grid on
print('gambar2', '-dpng')
```

Perbandingan grafik solusi hampiran (3.21) dan solusi analitikny untuk $0 \leq x \leq 10$.

```
clear, figure(3), clf
format long
x=0:0.05:10;
F=0.6;
y=zeros(length(x),1);
yy=3.*F.*sech(x.*sqrt((3/2).*F)).^2;
for i=1:length(x);
y(i,1)=3*F-(9./2)*F^2*x(i)^2+(9./2)*F^3*x(i)^4-...
(153./40)*F^4*x(i)^6+(837./280)*F^5*x(i)^8-...
(6219./2800)*F^6*x(i)^10;
end
eror=abs(yy-y')
max(eror.^2)
a1=plot(x,y,'r*-','x,yy','b-')
set(a1,'lineWidth',2)
legend('LADM','eksak')
ylim([-0.5 2.5])
xlabel('x'), ylabel('Tinggi Permukaan')
title('Grafik Solusi Hampiran Persamaan KdV untuk n=5')
grid on
print('gambar3', '-dpng')
```

Perbandingan grafik solusi hampiran (3.22) dan solusi analitikny untuk $0 \leq x \leq 10$.

```
clear, figure(4), clf
x=0:0.05:10;
F=0.6;
y=zeros(length(x),1);
yy=3.*F.*sech(x.*sqrt((3/2).*F)).^2;
for i=1:length(x);
y(i,1)=3*F-(9/2)*F^2*x(i)^2+(9/2)*F^3*x(i)^4-...
(153/40)*F^4*x(i)^6+(837/280)*F^5*x(i)^8-...
(6219/2800)*F^6*x(i)^10+(49149/30800)*F^7*x(i)^12-...
(25098363/22422400)*F^8*x(i)^14+(217658367/448448000)*F^9*x(i)^16+...
(247861580013/579394816000)*F^11*x(i)^20-
(977322771/1905904000)*x(i)^18*F^10-...
(22559391/9012080000)*x(i)^22*F^12+(15814133091/3316445440000)*F^13*x(i)^24;
end
eror=abs(yy-y')
a1=plot(x,y,'r*-','x,yy','b-')
set(a1,'lineWidth',2)
legend('LADM','eksak')
ylim([-0.5 2.5])
xlabel('x'), ylabel('Tinggi Permukaan')
title('Grafik Solusi Hampiran Persamaan KdV untuk n=10')
grid on
```

```
print('gambar4', '-dpng')
```

Perbandingan grafik solusi (3.22) yang diaproksimasi Pade [6,6] dengan solusi analitiknya.

```
clear, figure(6), clf
format long
%x=[0.1;0.2;0.3;0.4;0.5;0.6;0.7;0.8;0.9;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;100;1000];
x=0:0.05:10;
F=0.6;
y=zeros(length(x),1);
yy=3.*F.*sech(x.*sqrt((3/2).*F)).^2;
for i=1:length(x);
y(i,1)=(3/4)*(181720*F-32060*F^2*x(i)^2+2772*F^3*x(i)^4-...
127*F^4*x(i)^6)/(45430+60130*x(i)^2*F+22743*x(i)^4*F^2+...
1811*x(i)^6*F^3);
end
eror=abs(yy-y')
al=plot(x,y,'r--',x,yy,'b-')
set(al,'lineWidth',1.5)
legend('aproksimasi Pade','eksak')
ylim([-0.5 2.5])
xlabel('x'), ylabel('Tinggi Permukaan')
title('Grafik Solusi Hampiran Persamaan KdV untuk n=10')
grid on
```

Aproksimasi Pade [4,4],[6,6], dan [8,8] dari persamaan (3.22).

```
> restart;
> with(numapprox) :
>
pade(3 F - \frac{9}{2} F^2 x^2 + \frac{9}{2} F^3 x^4 - \frac{153}{40} F^4 x^6 + \frac{837}{280} F^5 x^8
- \frac{6219}{2800} F^6 x^{10} + \frac{49149}{30800} F^7 x^{12} - \frac{25098363}{22422400} F^8 x^{14}
+ \frac{217658367}{448448000} F^9 x^{16} + \frac{247861580013}{579394816000} F^{11} x^{20}
- \frac{977322771}{1905904000} x^{18} F^{10} - \frac{22559391}{9012080000} x^{22} F^{12}
+ \frac{15814133091}{3316445440000} F^{13} x^{24}, x, [4, 4]);
```

$$\frac{3(420F - 110F^2x^2 + 13F^3x^4)}{163x^4F^2 + 520x^2F + 420}$$

$$\begin{aligned}
& \text{pade} \left(3F - \frac{9}{2}F^2x^2 + \frac{9}{2}F^3x^4 - \frac{153}{40}F^4x^6 + \frac{837}{280}F^5x^8 \right. \\
& - \frac{6219}{2800}F^6x^{10} + \frac{49149}{30800}F^7x^{12} - \frac{25098363}{22422400}F^8x^{14} \\
& + \frac{217658367}{448448000}F^9x^{16} + \frac{247861580013}{579394816000}F^{11}x^{20} \\
& - \frac{977322771}{1905904000}x^{18}F^{10} - \frac{22559391}{9012080000}x^{22}F^{12} \\
& \left. + \frac{15814133091}{3316445440000}F^{13}x^{24}, x, [6, 6] \right); \\
& \frac{3}{4} \frac{181720F - 32060F^2x^2 + 2772F^3x^4 - 127F^4x^6}{45430 + 60130x^2F + 22743x^4F^2 + 1811x^6F^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{pade} \left(3F - \frac{9}{2}F^2x^2 + \frac{9}{2}F^3x^4 - \frac{153}{40}F^4x^6 + \frac{837}{280}F^5x^8 \right. \\
& - \frac{6219}{2800}F^6x^{10} + \frac{49149}{30800}F^7x^{12} - \frac{25098363}{22422400}F^8x^{14} \\
& + \frac{217658367}{448448000}F^9x^{16} + \frac{247861580013}{579394816000}F^{11}x^{20} \\
& - \frac{977322771}{1905904000}x^{18}F^{10} - \frac{22559391}{9012080000}x^{22}F^{12} \\
& \left. + \frac{15814133091}{3316445440000}F^{13}x^{24}, x, [8, 8] \right); \\
& \frac{3}{2} (36411575200F + 1850615058892600F^2x^2 \\
& - 326495793332940F^3x^4 + 28229781903780F^4x^6 \\
& - 1293356114999F^5x^8) / (36886157880443x^8F^4 \\
& + 463226423905050x^6F^3 + 1224727051843680x^4F^2 \\
& + 925334838127700x^2F + 18205787600)
\end{aligned}$$

