SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN ADVEKSI-DISPERSI DENGAN PENDEKATAN STURM-LIOUVILLE

SKRIPSI

OLEH:
RIZHA HUSNUR ROZIQIN
NIM. 16610050

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN ADVEKSI-DISPERSI DENGAN PENDEKATAN STURM-LIOUVILLE

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
RIZHA HUSNUR ROZIQIN
NIM. 16610050

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN ADVEKSI-DISPERSI DENGAN PENDEKATAN STURM-LIOUVILLE

SKRIPSI

Oleh
Rizha Husnur Roziqin
NIM. 16610050

Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 22 Juni 2023

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Dr. Heni Widayani, M.Si.	Erna Herawati, M.Pd.
NIDT. 19901006 20180201 2 229	NIDT. 19760723 20180201 2 222

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN ADVEKSI-DISPERSI DENGAN PENDEKATAN STURM-LIOUVILLE

SKRIPSI

Oleh
Rizha Husnur Roziqin
NIM. 16610050

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal, 27 Juni 2023

Ketua Penguji	: Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.	....
Anggota Penguji 1	: Juhari, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Heni Widayani, M.Si.	....
Anggota Penguji 3	: Erna Herawati, M.Pd.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 197411292000122005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Rizha Husnur Roziqin
NIM	: 16610050
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Solusi Analitik Persamaan Adveksi-Dispersi dengan Pendekatan Sturm-Liouville

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 Juni 2023
Yang membuat pernyataan,

Rizha Husnur Roziqin
NIM. 16610050

MOTO

“Hidup yang tidak dipertaruhkan tidak akan pernah dimenangkan”

(Sjahrir)

PERSEMBAHAN

Bismillahirahmanirrahim, Alhamdulillahirabbil'alamiin. Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Kedua orang tua, Ibunda Siti Yuliati dan Ayah Suprianto tercinta yang senantiasa selalu memberikan do'a, dukungan serta motivasi terbaik untu kesuksesan penulis.

Mamak Nurjanah serta kedua adik, Asifa Rahmatu Rosida dan Aqila Nurus Shafa tercinta serta semua keluarga yang tidak pernah berhenti mendo'akan dan memberikan semangat kepada penulis dalam mengemban ilmu.

Diri saya sendiri yang mau berjuang dan menyelesaikan segala tangung jawab perkuliahan hingga akhir.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT yang telah memberi nikmat yang tidak terhitung kepada penulis, sehingga dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul "**Solusi Analitik Persamaan Adveksi-Dispersi dengan Pendekatan Sturm-Liouville**" ini dengan baik. Semoga sholawat serta salam selalu terlimpahkan kepada Rasulullah SAW.

Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar sarjana matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dengan ini penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Ibu Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim sekaligus dosen wali yang telah membimbing penulis mulai dari awal hingga akhir.
3. Ibu Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Ibu Dr. Heni Widayani, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, pengalaman arahan serta dukungan yang berharga kepada penulis.
5. Ibu Erna Herawati, M.Pd., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, pengalaman arahan serta dukungan yang berharga kepada penulis.

6. Ibu Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. selaku ketua penguji dalam ujian skripsi yang telah memberikan saran dan arahan yang bermanfaat bagi peneliti.
7. Bapak Juhari, M.Si. selaku penguji 1 dalam ujian skripsi yang telah memberikan saran serta arahan yang bermanfaat bagi peneliti.
8. Seluruh dosen dan tenaga kependididkan Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
9. Orang tua saya, Ibu Siti Yuliati tercinta, Bapak Suprianto dan seluruh keluarga atas segala do'a dan dukungan yang selalu diberikan.
10. Teman-teman mahasiswa angkatan 2016 khususnya Aldiki Zakki Zamani Masyafi Lukman, Julyo Windy, Tsabitatur Rohmawati, Adib Maulida, Zailanil Ulum, Rif'at Sonhaji dan Ria Dwi Oktavianti tersayang atas semangat dan dukungan serta motivasinya dalam menggapai cita-cita.
11. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan penelitian ini baik berupa materiil maupun moril.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga penelitian ini dapat bermanfaat bagi penulis serta pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 27 Juni 2023

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam penelitian ini memiliki arti sebagai berikut:

c atau C	: konsentrasi zat yang didispersikan
t	: variabel waktu
x	: variabel spasial
v	: kecepatan
D	: koefisien dispersi
$\frac{\partial}{\partial_t}$	: turunan parsial terhadap waktu
$\frac{\partial}{\partial_x}$	: turunan parsial terhadap variabel spasial
$\frac{\partial^2}{\partial_{x^2}}$	: turunan parsial kedua terhadap x
p	: massa jenis fluida
λ	: nilai eigen terkait dengan masalah sturm-liouville

ABSTRAK

Roziqin, Rizha Husnur. 2023. **Solusi Analitik Persamaan Adveksi-Dispersi dengan Pendekatan Sturm-Liouville.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Heni Widayani, M.Si, (II) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: Persamaan Adveksi-dispersi, Sturm-Liouville, Solusi Analitik

Persamaan adveksi-dispersi adalah persamaan matematika yang menggambarkan pengangkutan zat terlarut dalam media berpori, dengan mempertimbangkan proses adveksi dan dispersi. pendekatan batas Sturm-Liouville merupakan metode untuk menyelesaikan suatu masalah PDP tertentu yang ketika direduksi akan menjadi suatu PDB. Pada penelitian ini, masalah persamaan adveksi-dispersi berbentuk persamaan diferensial parsial orde 2 terhadap variabel spasial (x) dan orde 1 terhadap variabel waktu (t). Persamaan ini dapat diimplementasikan pada berbagai fenomena aliran berpori, dimana terjadi proses transport atau perpindahan zat terlarut sekaligus proses penyebaran. Pada penelitian ini, metode pendekatan sturm-liouville digunakan untuk menentukan solusi analitik dari persamaan adveksi-dispersi. Solusi analitik yang diperoleh akan berbentuk perkalian dari fungsi x $(X(x))$ dengan fungsi t $(T(t))$ dan Nilai eigen λ masalah PDB terhadap variabel spasial x diperoleh ketika nilai eigen bernilai positif $\mu^2 - \frac{v}{4D^2}$. Solusi analitik dari persamaan adveksi-dispersi $c(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{v}{2D}} C_n \sin(n\pi) e^{D\lambda t}$.

ABSTRACT

Roziqin, Rizha Husnur. 2023. **On The Analytical Solution of The Advection-Dispersion Equation with the Sturm-Liouville Approach**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisors: (I) Dr. Heni Widayani, M.Si, (II) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Advection-dispersion Equation, Sturm-Liouville, Analytical Solution

The advection-dispersion equation is a mathematical equation that describes the transport of a solute in a porous medium, taking into account the advection and dispersion processes. The Sturm-Liouville boundary approach is a method for solving a particular Partial Differential Equation (PDE) problem which when reduced becomes an Ordinary Differential Equation (ODE). In this study, the problem of the advection-dispersion equation is in the form of a second order partial differential equation for the spatial variable (x) and first order for the time variable (t). This equation can be implemented for a variety of porous flow phenomena, where both the solute transport process and the dispersion process occur. In this study, the Sturm-Liouville approach was used to determine the analytical solution of the advection-dispersion equation. The analytical solution obtained will be in the form of multiplying the function x $(X(x))$ with the function t $(T(t))$ and the eigenvalue λ of the PDB problem for the spatial variable x is obtained when the eigenvalue is positive $\mu^2 - \frac{v}{4D^2}$. The analytical solution of the advection-dispersion equation is $c(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{v}{2D}} C_n \sin(n\pi) e^{D\lambda t}$.

مستخلص البحث

ريزا حسن الرازقين، ٢،٢٣. حل تحليل المعادلة التألق والتشتت باستخدام نهج شتورم-ليوفيل(*Sturm-Liouville*).البحث العلمي. قسم دراسة الرياضيات ، كليّة العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلاميّة الحكوميّة مالانج. المشرفة: (١) الدكتورة، هني ويدياني، الماجستير، (٢) أيرنا هيراواتي، الماجستير.

الكلمات الرّ ئيسية: معادلة التألق والتشتت ، شتورم-ليوفيل(*Sturm-Liouville*) ، حل التحليل

معادلة التأفق والتشتت هي معادلة رياضيات التي تصف نقل المذاب في وسط مسامي ، بمراعاة عمليات التأفق والتشتت. نهج حدود شتورم-ليوفيل(*Sturm-Liouville*) هو طريقة لحل مشكلة معادلة التفاضلية الجزئية المعين والتي عندما يتم تخفيضها تصبح ناتج محلي الإجمالي. في هذا البحث العلمي ، تكون مشكلة معادلة التأفق والتشتت في شكل معادلة التفاضلية الجزئية من الدرجة الثانية للمتغير المكاني (x) والرتبة الأولى للمتغير الزمني (t) . يمكن تنفيذ هذه المعادلة لمجموعة متنوعة من ظواهر التدفق المسامي ، حيث تحدث كل من عملية نقل المادة المذابة وعملية التشتت. في هذا البحث العلمي ، تم استخدام نهج شتورم-لوفيل لتحديد الحل التحليلي لمعادلة التأفق والتشتت. سيكون الحل التحليلي الذي تم الحصول عليه في شكل ضرب الدالة$(X(x))$ x بالدالة$(T(t))$ t ويتم الحصول على القيمة الذاتية λ لمشكلة ناتج محلي الإجمالي للمتغير المكاني x عندما تكون القيمة الذاتية موجبة $\mu^2 - \frac{v}{4D^2}$ الحل التحليلي لمعادلة التأفق والتشتت $c(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{v}{2D}} C_n \sin(n\pi) e^{D\lambda t}$.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial adalah persamaan yang menyatakan hubungan suatu fungsi terhadap derivatif-derivatifnya. Persamaan diferensial dapat digunakan terhadap berbagai permasalahan di kehidupan sehari-hari. Dalam memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari melibatkan lebih dari satu variabel bebas digunakanlah persamaan diferensial parsial. Salah satu bentuk persamaan diferensial parsial adalah persamaan adveksi-dispersi.

Persamaan adveksi-dispersi adalah persamaan matematika yang menggambarkan pengangkutan zat terlarut dalam media berpori, dengan mempertimbangkan proses adveksi dan dispersi. Ini menggabungkan efek aliran massal (adveksi) dan penyebaran karena fluktuasi kecepatan skala kecil (dispersi) di dalam air tanah yang mengalir (Bear, 1972). Persamaan dispersi adalah persamaan diferensial parsial yang merupakan representasi penyebaran suatu zat dalam pelarut dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah tanpa dipengaruhi oleh kecepatan gerak fluida media. Persamaan adveksi-dispersi merupakan model matematika yang menggambarkan proses transportasi suatu zat yang dipengaruhi gaya gravitasi dan penyebaran sekaligus (LeVeque, 2004).

Masalah nilai batas Sturm-Liouville merupakan suatu masalah yang dapat ditemui ketika ingin menyelesaikan suatu masalah Persamaan Diferensial Parsial (PDP) tertentu yang ketika direduksi akan menjadi suatu Persamaan Diferensial Biasa (PDB), maka dapat menemukan masalah nilai batas sturm-liouville (Boyce, Meade, & DiPrima, 2009). Pada masalah ini dapat diselesaikan dengan menggunakan metode pemisah variabel (metode separasi variabel). Metode separasi variabel merupakan suatu metode untuk menyelesaikan masalah Persamaan Diferensial Parsial (PDP) yang dimana dalam masalah tersebut terdapat informasi tentang syarat awal dan syarat batas. Pada penelitian ini akan dicari solusi analitik dari persamaan Adveksi-Dispersi dengan menggunakan pendekatan Sturm-Liouville.

Perlu diketahui bersama bahwa terdapat banyak sekali aktivitas manusia yang menyebabkan perubahan lingkungan yang cepat. Situasi lingkungan dapat cepat memburuk sehingga banyak tempat-tempat tercemar baik oleh kabut asap, perairan limbah atau sampah. Hal ini dapat berdampak buruk pada kesehatan manusia dan kelestarian lingkungan.

Allah SWT berfirman dalam Al-Qur’an surat Al Baqarah ayat 30:

وَاِذْ قَالَ رَبُّكَ لِلْمَلٰۤىِٕكَةِ اِنِّيْ جَاعِلٌ فِى الْاَرْضِ خَلِيْفَةًۗ قَالُوْٓا اَتَجْعَلُ فِيْهَا مَنْ يُّفْسِدُ فِيْهَا وَيَسْفِكُ الدِّمَاۤءَۚ وَنَحْنُ نُسَبِّحُ بِحَمْدِكَ وَنُقَدِّسُ لَكَۗ قَالَ اِنِّيْٓ اَعْلَمُ مَا لَا تَعْلَمُوْنَ.

“Dan (ingatlah) ketika Tuhanmu berfirman kepada para malaikat, “Aku hendak menjadikan khalifah di bumi.” Mereka berkata, “Apakah Engkau hendak menjadikan orang yang merusak dan menumpahkan darah di sana, sedangkan kami bertasbih memuji-Mu dan menyucikan nama-Mu?” Dia berfirman, “Sungguh, Aku mengetahui apa yang tidak kamu ketahui.”

Menurut terjemahan ayat di atas kita mengetahui bahwasanya Allah SWT telah menciptakan manusia sebagai khalifah atau pemimpin di muka bumi dengan tugas utama memakmurkan bumi atas dasar ketaatan kepada-Nya. Dengan bermodalkan disiplin ilmu matematika haruslah menganalisa lebih jauh agar dapat menyelesaikan permasalahan pencemaran lingkungan.

Pendekatan Sturm-Liouville adalah metode matematika yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, terutama yang melibatkan adveksi dan dispersi, yang sulit atau tidak mungkin diselesaikan dengan metode lain. Metode ini melibatkan transformasi persamaan diferensial menjadi bentuk yang dapat diselesaikan secara analitik, dengan menggunakan sifat-sifat operator Sturm-Liouville, yang merupakan operator diferensial linier self-adjoint dengan kondisi batas tertentu. Pendekatan Sturm-Liouville memungkinkan solusi yang tepat dari persamaan diferensial, memberikan prediksi yang akurat dari perilaku sistem dan menggunakan solusi analitik dapat dihitung dalam waktu yang realtif singkat dibandingkan dengan metode numerik, yang dapat menjadi efisien ketika digunakan dengan data berjumlah besar. Pendekatan ini memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang proses fisik yang terlihat dalam adveksi dan disperse zat, memungkinkan prediksi dan pengolahan sistem lingkungan yang lebih baik. Secara keseluruhan, solusi analitik persamaan Adveksi-Dispersi dengan pendekatan Sturm-Liouville memberikan cara yang efektif dalam analisis dan prediksi alam, khususnya dalam ilmu dan teknik lingkungan.

Pada penelitian ini metode yang akan digunakan adalah Sturm-Liouville. Pada penelitian sebelumnya metode ini telah digunakan, salah satunya oleh Nanik Hidayati (2011) yang membahas tentang persamaan Sturm-Liouville regular pada persamaan panas. Perbedaan penelitian ini dari penelitian Nanik Hidayati yaitu beberapa teorema yang digunakan dalam penerapan pada persamaan adveksi-dispersi.

Berdasarkan latar belakang diatas, penelitian ini dilakukan menggunakan penyelesaian analitik dengan pendekatan sturm-liouville yang merupakan salah satu metode analitik dalam menyelesaikan persamaan differensial parsial. Oleh karena itu, metode ini dapat juga digunakan dalam menyelesaikan persamaan adveksi-dispersi. Penelitian ini penulis menggunakan judul "Solusi Analitik Persamaan Adveksi-Dispersi dengan Pendekatan Strum-Liouville".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang berkaitan dengan penjelasan diatas yaitu bagaimana solusi persamaan adveksi-dispersi dengan pendekataan sturm-liouville?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarakan rumusan masalah yang telah disebutkan di atas, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mencari solusi analitik dari persamaan adveksi-dispersi dengan pendekataan sturm-liouville.

1.4 Manfaat Penelitian

Dengan mengetahui solusi analitik dari persamaan adveksi-dispersi dengan pendekatan sturm-liouville, maka dapat diperoleh manfaat.

1. Mendapatkan penjelasan fenomena alam melalui formula matematika.
2. Sebagai referensi bagi penelitian terkait persamaan adveksi-dispersi di masa yang akan datang dan dapat membantu peneliti mengembangkan model yang lebih akurat dan membuat prediksi berdasarkan informasi.
3. Solusi analitik memungkinkan untuk evaluasi cepat konsentrasi kuantitas skalar pada setiap titik dalam ruang dan waktu tanpa memerlukan simulasi yang memakan waktu.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini mengkaji masalah dari buku yang ditulis oleh (Boyce, Meade, & DiPrima, 2009) dengan pendekatan sturm-liouville. Persamaan yang digunakan adalah persamaan adveksi-dispersi

1. Persamaan yang digunakan adalah persamaan adveksi-dispersi

$$c_t + vc_x = Dc_{xx}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

2. Syarat awal yang digunakan adalah

$$c(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L,$$

3. Syarat batas yang digunakan adalah

$$c(0,t) = 0 \quad \text{dan} \quad c_x(L,T) = 0, \qquad t > 0$$

1.6 Definisi Istilah

Pada penelitian ini terdapat beberapa istilah yang penting untuk dijelaskan, agar tidak terjadi salah makna serta mendapat kesamaan pemahaman tentang tema dan arah penelitian. Beberapa istilah yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

1. Adveksi

   Zat terlarut dalam akuifer diangkut oleh dua mekanisme terpisah. Proses dimana zat terlarut diangkut oleh gerakan massal air tanah yang mengalir.

2. Dispersi

   Proses dimana partikel atau molekul menyebar dari daerah dengan konsentrasi lebih tinggi ke daerah dengan konsentrasi lebih rendah karena gerakan alami atau gaya eksternal.

3. Metode Sturm-liouville

   Merupakan suatu masalah yang dapat ditemui ketika ingin menyelesaikan suatu masalah Persamaan Diferensial Parsial (PDP) tertentu yang ketika direduksi akan menjadi suatu Persamaan Diferensial Biasa (PDB), maka dapat menemukan masalah nilai batas sturm-liouville.

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan matematika yang menggambarkan hubungan antara suatu fungsi dan turunan dari fungsi tersebut. PDB sering digunakan dalam berbagai bidang ilmu, seperti fisika, matematika, dan teknik. PDB sering digunakan untuk memodelkan fenomena alamiah dan teknik, seperti pergerakan benda, pertumbuhan populasi, dan dinamika sistem mekanik. PDB dapat dinyatakan dalam bentuk umum sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

di mana y adalah fungsi yang tidak diketahui atau fungsi yang ingin dicari, x adalah variabel independen, dan $f(x, y)$ adalah fungsi yang menggambarkan hubungan antara y dan turunan dari y terhadap x. Persamaan ini dapat diselesaikan dengan menggunakan metode analitik atau numerik (Boyce & DiPrima, 2012).

Metode analitik melibatkan penyelesaian persamaan diferensial secara eksplisit dengan menggunakan teknik-teknik matematika seperti integrasi, pemfaktoran, dan transformasi. Metode numerik, di sisi lain, melibatkan penggunaan algoritma komputasi untuk menyelesaikan persamaan diferensial secara numerik.

Beberapa jenis PDB yang umum digunakan adalah PDB orde satu, PDB orde dua, dan PDB orde tinggi. PDB orde satu dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$y' = f(x, y)$$

dimana $f(x, y)$ adalah fungsi yang diberikan. PDB orde dua dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$y" = f(x, y, y')$$

dimana $f(x, y, y')$ adalah fungsi yang diberikan.

PDB memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang, seperti fisika, biologi, ekonomi, dan teknik. Contoh aplikasi PDB adalah dalam memodelkan pergerakan benda, pertumbuhan populasi, dan dinamika sistem mekanik (Strogatz, 2018).

2.1.2 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan matematika yang mengandung turunan parsial dari fungsi yang tidak diketahui. PDP digunakan untuk memodelkan berbagai fenomena fisika, seperti perambatan gelombang, aliran fluida, dan konduksi panas. PDP dapat dinyatakan dalam bentuk umum sebagai berikut:

$$F(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial^2 u/\partial x^2, \partial^2 u/\partial y^2, \partial^2 u/\partial x\partial y) = 0$$

dimana $u(x, y)$ adalah fungsi yang tidak diketahui dan F adalah fungsi yang diberikan (Evans, 2010).

2.1.3 Persamaan Adveksi-Dispersi

Persamaan adveksi-dispersi adalah persamaan dasar yang menjelaskan pengangkutan kuantitas skalar pasif melalui media dengan mempertimbangkan efek adveksi dan dispersi. Persamaan adveksi-dispersi ini memiliki pengaplikasian luas di bidang-bidang seperti dinamika fluida, ilmu lingkungan dan teknik kimia Bentuk umum persamaan adveksi-dispersi dapat ditulis (Bear, 1972):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

dimana

C adalah konsentrasi besaran skalar

t adalah waktu

x adalah koordinat spasial

D adalah koefisien dispersi

Adveksi mengacu pada pergerakan massal zat terlarut atau kontaminan dengan air tanah yang mengalir. Itu terjadi ketika kecepatan air tanah membawa zat terlarut bersamanya. Adveksi adalah mekanisme dominan untuk transportasi zat terlarut dalam sistem kecepatan tinggi atau untuk zat terlarut yang memiliki kelarutan tinggi dan kecenderungan interaksi yang rendah dengan media berpori (Todd & Mays, 2005). Menurut (Gelhar, 1993), dispersi mengacu pada penyebaran dan pencampuran zat terlarut dalam cairan yang mengalir karena variasi skala kecil dalam kecepatan dan konsentrasi. Dalam konteks aliran air tanah, dispersi terjadi ketika air tanah bergerak melalui jaringan pori dan rekahan yang kompleks di bawah permukaan. Fluktuasi kecepatan skala kecil ini menyebabkan gumpalan zat terlarut menyebar dan bercampur dengan cairan di sekitarnya. Dispersi adalah proses penting dalam memahami transportasi kontaminan dalam akuifer.

2.1.4 Masalah Nilai Batas Sturm-Liouville

Bentuk umum dari masalah nilai batas sturm-liouville (Boyce, Meade, & DiPrima, 2009), seperti berikut :

$$\begin{aligned}(p(x)y')' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \\ (p(x)y')' - \big(q(x) + \lambda r(x)\big)y = 0\end{aligned} \tag{2.1}$$

pada interval $0 < x < 1$ dengan syarat batas :

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) = 0 \\ \beta_1 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0 \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Dapat diperhatikan pada persamaan (2.1) dan (2.2), dimana persamaan (2.1), dan (2.2) merupakan suatu fungsi yang bergantung pada satu variabel yaitu variabel x. Pada persamaan (2.1) dan (2.2) terdapat x dan y :

- λ (lamda) ketika memenuhi syarat batas sturm-liouville maka dapat disebut dengan nilai eigen
- y, ketika memenuhi syarat batas sturm-liouville maka dapat disebut dengan fungsi eigen. Tetapi jika hasil $y = 0$ maka fungsi eigen tersebut merupakan solusi trivial dan jika hasil $y \neq 0$ maka fungsi eigen tersebut merupakan solusi non-trivial.

Ditinjau dari persamaan (2.1), seperti berikut :

$$(p(x)y')' - \big(q(x) + \lambda r(x)\big)y = 0$$

$$(p(x)y')' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0$$

$$(p(x)y')' - q(x)y = -\lambda r(x)y$$

$$\underbrace{-(p(x)y')' + q(x)y}_{L(y)} = \lambda r(x)y$$

dimana L merupakan operator linier. Maka dapat ditulis

$$L(y) = \lambda r(x)y \qquad (2.3)$$

dan jika dapat dilengkapi dengan dua syarat batas maka masalah sturm-liouville akan menjadi masalah nilai eigen. Oleh karena itu masalah sturm-liouville dapat disebut sebagai masalah nilai eigen.

Pada persamaan (2.1), dan (2.2) dapat diasumsikan bahwa :

1. Fungsi $p, p', q,$ dan r kontinu pada interval $0 \leq x \leq 1$
2. Fungsi p dan r harus memenuhi $p(x) > 0$ dan $r(x) > 0$ dan pada interval $0 \leq x \leq 1$
3. Konstanta-konstanta $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ adalah bilangan real, dengan salah satu nilai α_1 atau $\alpha_2 \neq 0$ dan β_1 atau $\beta_2 \neq 0$.

dengan asumsi 1, 2, dan 3 maka masalah nilai batas dapat dikatakan reguler.

Sebelum ke beberapa sifat-sifat masalah sturm-liouville maka perlu untuk memperoleh identitas yang dapat disebut dengan identitas lagrange. Identitas lagrange merupakan dasar untuk mempelajari masalah nilai batas linier.

Misal u dan v adalah fungsi yang memiliki turunan kedua kontinu pada interval $0 \leq x \leq 1$, maka dapat ditulis sebagai berikut :

$$\int_0^1 L(u)v - uL(v)\, dx = \int_0^1 (-(pu')'v + quv)dx$$

dengan mengintegrasikan pada ruas kanan sebanyak dua kali, maka diperoleh

$$L(u) = -(pu')' + qu, \qquad L(v) = -(pv')' + qv$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 L(u)v - uL(v)\, dx \qquad &= \int_0^1 (-(pu')' + qu)v - u(-(pv')' + qv)\, dx \\
&= \int_0^1 -(pu')'v + quv - (-(pv')'u + quv)\, dx \\
&= \int_0^1 -(pu')'v + quv + (pv')'u - quv\, dx \\
&= -p'(x)u''(x)v(x) + p'(x)v''(x)u(x)\Big|_0^1
\end{aligned}$$

$$= -\mathrm{p}'(\mathrm{x})\big(\mathrm{u}'(\mathrm{x})\mathrm{v}(\mathrm{x}) - \mathrm{v}'(\mathrm{x})\mathrm{u}(\mathrm{x})\big)\Big|_0^1 \qquad (2.4)$$

jadi persamaan (2.4) dapat dikenal sebagai identitas lagrange.

Misal u dan v memenuhi syarat batas seperti persamaan (2.2) lalu mengasumsikan $\alpha_2 \neq 0$ dan $\beta_2 \neq 0$, maka persamaan (2.4) menjadi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 L(u)\,v - u\,L(v)\,dx &= -p'(x)\big(u'(x)v(x) - v'(x)u(x)\big)\Big|_0^1 \\
&= -p'(1)\big(u'(1)v(1) - v'(1)u(1)\big) - \Big(-p'(0)\big(u'(0)v(0) - \\
&\quad v'(0)u(0)\big)\Big) \\
&= -p'(1)\big(u'(1)v(1) - v'(1)u(1)\big) + p'(0)\big(u'(0)v(0) + \\
&\quad v'(0)u(0)\big) \\
&= -p'(1)\big(u'(1)v(1) - v'(1)u(1)\big) \\
&= -p'(1)\left(-\frac{\beta_1}{\beta_2}u'(1)v(1) + \frac{\beta_1}{\beta_2}v'(1)u(1)\right) \\
&= -p'(1)(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Jadi jika operator linier $L(y) = \lambda r(x)y$ dan jika u dan v memenuhi syarat batas seperti persamaan (2.2) maka identitas lagrange menjadi

$$\int_0^1 L(u)\,v - u\,L(v)\,dx = 0 \qquad (2.5)$$

Pada persamaan (2.5) dapat ditulis dengan bentuk inner product dari dua fungsi yang bernilai u dan v pada interval $0 \leq x \leq 1$, maka dapat ditulis sebagai berikut

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)\,v(x)\;dx \qquad (2.6)$$

Sehingga persamaan (5) menjadi

$$(L(u), v) - \big(u, L(v)\big) = 0 \tag{2.7}$$

Untuk membuktikan teorema 11.2.1 maka diperlukan fungsi yang bernilai kompleks dengan analogi dan definisi di bagian bab 7.2 untuk vektor, maka dapat didefinisikan inner product yang bernilai kompleks pada interval $0 \le x \le 1$, menjadi

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)\, \bar{v}(x)\, dx \tag{2.8}$$

Teorema 11.2.1 (Boyce, Meade, & DiPrima, 2009)

Semua nilai eigen dari masalah sturm-liouville pada persamaan (2.1), dan (2.2) bernilai real.

- Misal:

λ adalah nilai eigen yang bernilai kompleks maka dapat ditulis $\lambda = \mu + i\nu$

ϕ adalah fungsi eigen yang bernilai kompleks maka dapat ditulis $\phi(x) = u(x) + iv(x)$

$u = \phi$

$v = \phi$

Maka persamaan (2.7) menjadi

$$\begin{aligned} (L(u), v) - \big(u, L(v)\big) &= 0 \\ (L(\phi), \phi) - \big(\phi, L(\phi)\big) &= 0 \\ (L(\phi), \phi) &= \big(\phi, L(\phi)\big) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Namun jika diketahui $L(y) = \lambda r y$ maka menjadi $L(\phi) = \lambda r \phi$, sehingga persamaan (2.9) menjadi

$$(L(\phi), \phi) \qquad = \left(\phi, L(\phi)\right)$$

$$(\lambda r\phi, \phi) \qquad = (\phi, \lambda r \phi) \qquad (2.10)$$

Jika pada persamaan (2.10) disubstitusikan ke persamaan (2.8) dari inner product, maka diperoleh

- Persamaan (2.8)

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)\, \bar{v}(x)\ dx$$

- Persamaan (2.10)

$$(\lambda r\phi, \phi) \qquad = (\phi, \lambda r\phi)$$

$$(\lambda r\phi, \phi) \qquad = \int_0^1 \lambda r(x)\phi(x)\, \bar{\phi}(x)\ dx$$

$$(\phi, \lambda r\phi) \qquad = \int_0^1 \phi(x)\, \overline{\lambda r(x)\phi(x)}\ dx$$

$$(\lambda r\phi, \phi) \qquad = (\phi, \lambda r\phi)$$

$$\int_0^1 \lambda r(x)\phi(x)\, \bar{\phi}(x)\ dx \qquad = \int_0^1 \phi(x)\, \overline{\lambda r(x)\phi(x)}\ dx$$

$$\int_0^1 \lambda r(x)\phi(x)\, \bar{\phi}(x)\ dx - \int_0^1 \phi(x)\, \overline{\lambda r(x)\phi(x)}\ dx \qquad = 0 \qquad (2.11)$$

Jika $\bar{r}(x)$ adalah real, maka $\bar{r}(x) = r(x)$ sehingga persamaan (2.11) diperoleh

$$\int_0^1 \lambda r(x)\phi(x)\, \bar{\phi}(x)\ dx - \int_0^1 \phi(x)\, \bar{\lambda}\, r(x)\, \bar{\phi}(x)\ dx = 0$$

$$\int_{0}^{1} r(x)\phi(x)\,\bar{\phi}(x)\ \ dx\left(\lambda-\bar{\lambda}\right)=0$$

Akan tetapi jika $\phi(x)\ \bar{\phi}(x) = U^2(x) + V^2(x)$, sehingga menjadi

$$\int_{0}^{1} r(x)U^2(x)+V^2(x)\ \ dx\left(\lambda-\bar{\lambda}\right)=0 \qquad (2.12)$$

Integral dari persamaan (12) akan bernilai non-negatif atau bernilai nol, karena integralnya kontinu. Maka nilai integralnya adalah positif. Oleh karena itu faktor $\left(\lambda-\bar{\lambda}\right) = 2iv$ harus bernilai nol, sehingga $v = 0$ dan $\lambda =$ real. *Jadi teorema 11.2.1 terbukti.*

Teorema 11.2.2 (ortogonalitas fungsi eigen sturm-liouville)

Fungsi eigen dari masalah sturm-liouville pada persamaan (2.1), dan (2.2) dari nilai eigen yang berbeda adalah ortogonal terhadap fungsi bobot r. Artinya jika $\emptyset_m$ dan $\emptyset_n$ adalah dua nilai eigen dari masalah sturm-liouville pada persamaan (2.1) dan (2.2) sesuai dengan nilai eigen λ_m dan λ_n dan jika $\lambda_m \ \neq\ \lambda_n$, maka

$$\int_{0}^{1} r(x)\emptyset_m(x)\emptyset_n(x)dx = 0 \qquad (2.13)$$

Bukti:

Perhatikan bahwa $\emptyset_m$ dan $\emptyset_n$ memenuhi persamaan diferensial yaitu jika $\emptyset_m$ maka

$$L(\emptyset_m) = \lambda_m r\emptyset_m \qquad (2.14)$$

dan jika $\emptyset_n$ maka

$$L(\emptyset_n) = \lambda_n r \emptyset_n \tag{2.15}$$

Misal $u = \emptyset_m$ dan $v = \emptyset_n$ maka jika disubstitusikan pada persamaan (2.7), diperoleh

$$(L(u), v) - \big(u, L(v)\big) = 0(\lambda_m r \emptyset_m, \emptyset_n) - (\emptyset_m, \lambda_n r \emptyset_n) = 0$$

Atau jika disubstitusikan pada persamaan (12), diperoleh

$$\int_0^1 r(x)\emptyset_m(x)\overline{\emptyset_n}(x)dx\,\big(\lambda_m - \overline{\lambda_n}\big) = 0$$

$$\lambda_m \int_0^1 r(x)\emptyset_m(x)\overline{\emptyset_n}(x)dx - \overline{\lambda_n}\int_0^1 r(x)\emptyset_m(x)\overline{\emptyset_n}(x)dx = 0$$

karena $\lambda_n,\ r(x),\ dan\ \emptyset_n(x)$ adalah real, maka diperoleh

$$\big(\lambda_m - \overline{\lambda_n}\big)\int_0^1 r(x)\emptyset_m(x)\overline{\emptyset_n}(x)dx = 0 \tag{2.16}$$

karena hipotesis $\lambda_m \neq \lambda_n$, maka menjadi

$$\int_0^1 r(x)\emptyset_m(x)\emptyset_n(x)dx = 0$$

oleh karena itu hasil persamaan diatas telah memenuhi kondisi keortogonalitas fungsi, sehingga fungsi-fungsi eigen pada masalah sturm-liouville adalah ortogonal (Boyce, Meade, & DiPrima, 2009).

Teorema 11.2.3

Nilai eigen dari masalah sturm-liouville pada persamaan (2.1), dan (2.2) semuanya sederhana, yaitu untuk setiap nilai eigen hanya ada fungsi eigen yang bebas linier. Selanjutnya, nilai eigen akan membentuk barisan tak hingga dan dapat diurutkan mulai terkecil ke terbesar, sehingga

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

Sehingga diperoleh $\lambda_n \to \infty$ dimana $n \to \infty$ (Boyce, Meade, & DiPrima, 2009; Boyce & DiPrima, 2012)

Sifat-sifat sturm-liouville:

- Sifat-sifat yang dinyatakan dalam Teorema 11.2.1 – 11.2.3 sekali lagi diilustrasikan oleh masalah Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$$

yang hasil nilai eigennya $\lambda_n = n^2\pi^2$ dan juga hasil fungsi eigen real yang bersesuaian $\emptyset_n(x) = \sin n\pi x$ saling ortogonal terhadap $r(x) = 1$ pada interval $0 \leq x \leq 1$.

Fungsi eigen yang memenuhi hubungan ortogonalitas dapat berbentuk jika $\forall m \neq n$

$$\int_0^1 r(x)\emptyset_m(x)\emptyset_n(x)dx = 0,\ \ n = 1,2,\ldots \qquad (2.17)$$

jika $\forall m = n$

$$\int_0^1 r(x)\emptyset_n(x)\emptyset_n(x)dx = 1$$

$$\int_0^1 r(x)\emptyset_n^2(x)dx = 1\,,\ \ n = 1,2,\ldots \qquad (2.18)$$

- Jika memenuhi persamaan (2.18) maka dapat disebut dengan kondisi normalitas
- dan jika fungsi eigen memenuhi kondisi persamaan (2.18) maka dapat disebut dengan dinormalisasi.

- oleh karena itu dalam hal ini fungsi eigen memenuhi hubungan ortogonalitas maka dapat disebut orthonormal set (membentuk himpunan ortonormal).
- karena $\forall m \neq n$ adalah 0 dan $\forall m = n$ adalah 1 maka dapat disimbolkan δ_{mn} yang disebut dengan Kronecker delta, dimana bentuk kronecker delta yaitu

$$\delta_{mn} \begin{cases} 0, \text{jika } m \neq n \\ 1, \text{jika } m = n \end{cases} \tag{2.19}$$

- oleh karena itu persamaan (2.13) menjadi

$$\int_0^1 r(x)\emptyset_m(x)\emptyset_n(x)dx = \delta_{mn} \tag{2.20}$$

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran

Sesungguhanya nikmat Allah SWT terhadap manusia tiada pernah habis kalau saja manusia pandai bersyukur. Allah menciptakan manusia sebaik-baik makhluk (Amnawaty, 2014). Tidak hanya cukup disitu, Allah SWT menciptakan alam semesta beserta isinya untuk manusia seperti firman-Nya

وَسَخَّرَ لَكُم مَّا فِى ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَمَا فِى ٱلْأَرْضِ جَمِيعًا مِّنْهُ ۚ إِنَّ فِى ذَٰلِكَ لَءَايَٰتٍ لِّقَوْمٍ يَتَفَكَّرُونَ

"Dan Dia telah menundukkan untukmu apa yang ada di langit dan di bumi semuanya (sebagai rahmat) dari pada-Nya. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda kekuasaan Allah bagi mereka yang mau berfikir"(QS Al Jatsiyah: 13)

Pada surat Al Baqarah ayat 11-12 Allah SWT berfirman, yang artinya:

وَإِذَا قِيلَ لَهُمْ لَا تُفْسِدُوا۟ فِى ٱلْأَرْضِ قَالُوٓا۟ إِنَّمَا نَحْنُ مُصْلِحُونَ. أَلَآ إِنَّهُمْ هُمُ ٱلْمُفْسِدُونَ وَلَٰكِن لَّا يَشْعُرُونَ.

"Dan bila di katakan kepada mereka, "janganlah kamu membuat kerusakan di muka bumi !" Mereka menjawab, "Sesungguhanya kami orang-orang yang mengadakan perbaikan" Ingatlah, sesungguhnya mereka itulah orang-orang yang membuat kerusakan, tetapi mereka tidak sadar"

Sebagai hamba-Nya maka manusia seharusnya melakukan aktivitas yang dapat memakmurkan bumi, bukan menjadi perusak bumi dan perusak lingkungan hidup.

Kerusakan lingkungan dapat ditemui di belahan dunia baik kerusakan pada laut, sungai maupun hutan dan juga udara. Dan sebagai manusia yang telah diciptakan oleh Allah SWT dengan memiliki akal dan pikiran seharusnya dapat menjaga serta melestarikan lingkungan sekitar. Dalam hadist Anas bin Malik dijelaskan bahwa Rasulullah bersabda "orang yang pandai adalah orang yang mengintrospeksi dirinya dan beramal untuk setelah kematian, sedang orang yang lemah adalah orang jiwanya selalu tunduk pada nafsunya dan mengharap pada Allah SWT dengan berbagai angan-angan" (HR. Ahmad dan Tirmidzi).

Dengan merujuk pada surat Al-Qur'an yang telah disebutkan di atas dan perlu ditelaah dengan pertimbangan yang logis berdasarkan ilmu pengetehuan dengan penulis melakukan penelitian menggunakan solusi analitik persamaan adveksi-dispersi dengan pendekatan sturm-liouville supaya hasil dari perhitungan eksak dapat diterapkan pada kondisi yang sesungguhnya. Oleh sebab itu, solusi analitik dapat menjadi penting sebagai langkah memvalidasi hasil perhitungan untuk mengetahui benar tidaknya hasil tersebut.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Persamaan adveksi-dispersi berbentuk Persamaan Diferensial Parsial sebagai berikut

$$c_t + vc_x = Dc_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

Solusi analitik dapat dipenuhi dengan langkah:

a. Mengasumsikan $c(x,t) = X(x)T(t)$,dengan menggunakan metode pemisahan variabel, dan menemukan persamaan yang masing-masing dipenuhi oleh $X(x)$ dan $T(t)$.

b. Memisalkan $\mu^2 = \lambda - (v^2/4D^2)$. Agar mendapatakan nilai eigen dari persamaan adveksi-dipsersi diatas.

c. Mencari analisis grafis bahwa persamaan $\tan \mu L = -2D\mu/v$ memiliki barisan akar positif tak terhingga.

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penulisan pada penelitian ini menggunakan penelitian kualitatif berbasis studi literatur.

3.2 Pra Penelitian

Pra penelitian berisi tahapan penulis untuk menunjang penelitian. Untuk mendapatkan gambaran awal penelitian yang akan dilakukan penulis melakukan studi pendahuluan berupa pengumpulan berbagai referensi yang mendukung dan terkait dengan permasalahan yang diambil.

3.3 Tahapan Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode kepustakaan, dengan mengeksplorasi beberapa buku, jurnal, dan referensi yang relevan dengan solusi analitik persamaan adveksi-dispersi dengan pendeketan sturm-liouville. Beberapa langkah untuk melakukan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengasumsikan $c(x,t) = X(x)T(t)$,dengan menggunakan metode pemisahan variabel, dan menemukan persamaan yang masing-masing dipenuhi oleh $X(x)$ dan $T(t)$, menunjukkan bahwa masalah untuk $X(x)$ dapat ditulis dalam bentuk sturm-liouville

$$[p(x)X']' + \lambda r(x)X = 0, \qquad 0 < x < L$$

$$X(0) = 0, \qquad X'(L) = 0,$$

dimana $p(x) = r(x) = \exp(-vx/D)$. Karena itu nilai eigennya riil, dan fungsi eigennya orthogonal terhadap fungsi bobot $r(x)$.

2. Menyelesaikan dahulu bagian yang merupakan persamaan diferensial biasa yang melibatkan $T(t)$ lalu bagian spasial $X(x)$ yang merupakan masalah sturm-liouville.
3. Menyelesaikan masalah sturm-liouville untuk mendapatkan nilai eigen dan fungsi eigen lalu substitusikan persamaan diferensial biasa yang melibatkan $T(t)$ ke dalam masalah sturm-liouville untuk mendapatkan solusi keseluruhan persamaan adveksi-dispersi.

BAB IV
PEMBAHASAN

Untuk mencari solusi analitik persamaan adveksi-dispersi dengan pendekatan sturm-liouville dilakukan beberapa langkah

4.1 Perhitungan Solusi Anlitik

4.1.1 Implementasi Pemisah Variabel

Persamaan differensial parsial yang diberikan merupakan bentuk 1-dimensi dari persamaan adveksi-dispersi, yaitu:

$$c_t + vc_x = Dc_{xx}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \qquad (4.1.1)$$

dengan kondisi awal

$$c(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < L$$

dan syarat batas

$$c(0,t) = 0 \quad \text{dan} \quad c_x(L,t) = 0 \qquad t > 0$$

Langkah Pertama,

Mengasumsikan bahwa $c(x,t) = X(x)T(t)$

Sehingga diperoleh

$$c_t = \frac{\partial}{\partial t} = c(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(X(x)T(t)) = X(x)\frac{\partial}{\partial t}T(t) = X(x)\dot{T}(t)$$

dengan

$$\dot{T}(t) = \frac{\partial}{\partial t}T(t)$$

kemudian turunan $c(x,t)$ terhadap x adalah

$$c_x = \frac{\partial}{\partial x} = c(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}(X(x)T(t)) = T(t)\frac{\partial}{\partial x}X(x) = T(t)\dot{X}(x)$$

dengan

$$\dot{X}(x) = \frac{\partial}{\partial x}X(x).$$

Maka diperoleh

$$\left.\begin{aligned} &\dot{T}(t) = \frac{\partial}{\partial t}T(t) \\ &\text{dan} \\ &\dot{X}(x) = \frac{\partial}{\partial x}X(x). \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.2)$$

lalu menyubtitusikan bentuk solusi (4.1.2) ke PDP (4.1.1) sehingga menghasilkan

$$X(x)\dot{T}(t) + v\dot{X}(x)T(t) = D\ddot{X}(x)T(t) \qquad (4.1.3)$$

karena $X(x) \neq 0$ dan $T(t) \neq 0$, maka hasil pembagian kedua ruas dari persamaan (4.1.3) dengan $X(x)T(t) \neq 0$ adalah

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} + \frac{v\dot{X}(x)}{X(x)} = D\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} \qquad (4.1.4)$$

kemudian, konstanta difusi $D \neq 0$ menyebabkan kedua ruas persamaan (4.1.4) dapat dibagi dengan D sehingga dapat menghasilkan

$$\frac{1}{D}\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} + \frac{v}{D}\frac{\dot{X}(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)}$$

$$-\frac{1}{D}\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = -\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} + \frac{v}{D}\frac{\dot{X}(x)}{X(x)} = \lambda$$

Persamaan differensial biasa yang berkaitan dengan $T(t)$ dan $X(x)$ adalah sebagai berikut:

a. Persamaan differensial biasa terkait variabel waktu (t)

$$\frac{1}{D}\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \lambda$$

$$\dot{T}(t) - D\lambda T(t) = 0$$

Misalkan $T(t) = Ce^{\varphi t}$, maka persamaan karakteristik yang berkaitan adalah

$$\varphi Ce^{\varphi t} - D\lambda Ce^{\varphi t} = 0$$

$$Ce^{\varphi t}(\varphi - D\lambda) = 0$$

karena $Ce^{\varphi t} \neq 0$, maka

$$\varphi = D\lambda$$

Jadi, solusi untuk persamaan differensial biasa terkait variabel waktu (t) adalah

$$T(t) = Ce^{D\lambda t} \tag{4.1.5}$$

b. Persamaan differensial biasa terkait variabel spasial (x)

$$-\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} + \frac{v}{D}\frac{\dot{X}(x)}{X(x)} = \lambda$$

$$\Leftrightarrow -\ddot{X}(x) + \frac{v}{D}\dot{X}(x) = \lambda X(x)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \ddot{X}(x) - \frac{v}{D}\dot{X}(x) + \lambda X(x) \tag{4.1.6}$$

lalu kalikan kedua ruas persamaan (4.1.5) dengan $e^{-\frac{v}{D}x}$ sehingga menghasilkan

$$0 = e^{-\frac{v}{D}x}\ddot{X}(x) - \frac{v}{D}e^{-\frac{v}{D}x}\dot{X}(x) + \lambda e^{-\frac{v}{D}x}X(x)$$

Sehingga dapat ditulis sebagai berikut

$$0 = e^{-\frac{v}{D}x}\ddot{X}(x) - \frac{v}{D}e^{-\frac{v}{D}x}\dot{X}(x) + \lambda e^{-\frac{v}{D}x}X(x)$$

$$0 = \left(\underbrace{e^{-\frac{v}{D}x}}_{p(x)}\dot{X}(x)\right)' + \lambda \underbrace{e^{-\frac{v}{D}x}}_{r(x)}X(x)$$

$$0 = \left(p(x)\dot{X}(x)\right)' + \lambda r(x)X(x)$$

dengan

$$p(x) = r(x) = e^{-\frac{v}{D}x}$$

4.1.2 Fungsi Eigen dan Nilai Eigen

Untuk menghitung fungsi dan nilai eigen dari persmaaan yang diberikan

$$0 = \left(p(x)\dot{X}(x)\right)' + \lambda r(x)X(x)$$

susun ulang persamaan diatas

$$\left(p(x)\dot{X}(x)\right)' + \lambda r(x)X(x) = 0 \qquad (4.1.7)$$

Perluas turunannya dan sederhanakan, sehingga :

$$p(x)\ddot{X}(x) + \dot{p}(x)\dot{X}(x) + \lambda r(x)X(x) = 0$$

Persamaan diatas merupakan persamaan diferensial biasa homogen linier orde kedua. Penyelesaian persamaan (4.1.7) diperoleh dengan memilah nilai λ sebagai bilangan negatif, positif ataupun nol.

Penyelesaian untuk tahap kemungkinan λ diperoleh sebagai bentuk:

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dimana a_n merupakan koefisien deret pangkat.

i. Untuk $\lambda = 0$

$$\left(e^{-\frac{v}{D}x} X(\dot{x})\right)' + \lambda r(x) X(x) = 0$$

dikarenakan $\lambda = 0$, maka dapat ditulis

$$\left(e^{-\frac{v}{D}x} X(\dot{x})\right)' = 0$$

lalu turunkan persamaan di atas, sehingga

$$-\frac{v}{D} e^{-\frac{v}{D}x} \dot{X}(x) + e^{-\frac{v}{D}x} \ddot{X}(x) = 0$$

kalikan persamaan tersebut dengan $\left(\frac{1}{e^{-\frac{v}{D}x}}\right)$ sehingga mendapatkan

$$-\frac{v}{D} \dot{X}(x) + \ddot{X}(x) = 0 \qquad (1)$$

Solusi umum dari persamaan (1) adalah

$$X(x) = C_1 e^{\frac{v}{D}x} + C_2 \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Untuk membuktikannya

$$\dot{X}(x) = \frac{v}{D} C_1 e^{\frac{v}{D}x} + 0$$

$$e^{-\frac{v}{D}} \dot{X}(x) = \frac{v}{D} C_1$$

$$\left(e^{-\frac{v}{D}} \dot{X}(x)\right)' = 0$$ **.....(TERBUKTI)**

Syarat batas $X(0) = 0$ dan $\dot{X}(L) = 0$

$$X(0) = C_1 e^{\frac{v}{D}(0)} + C_2 = C_2 = 0$$

$$\dot{X}(L) = \frac{v}{D} C_1 e^{\frac{v}{D}(L)} = 0$$

untuk $e^{\frac{v}{D}(L)} \neq 0$ sehingga $C_1 = 0$.

Dengan demikian, solusi ketika $\lambda = 0$ adalah $X(x) = 0$.

ii. Untuk $\lambda = -\mu^2 < 0$

$$\left(e^{-\frac{v}{D}x} \dot{X}(x)\right)' + (-\mu^2)\left(e^{-\frac{v}{D}x}\right) X(x) = 0$$

sederhanakan sehingga mendapatkan:

$$-\frac{v}{D} e^{-\frac{v}{D}x} \dot{X}(x) + e^{-\frac{v}{D}x} \ddot{X}(x) - \mu^2 e^{-\frac{v}{D}x} X(x) = 0$$

lalu kalikan dengan $e^{-\frac{v}{D}x} \neq 0$, sehingga

$$-\frac{v}{D} \dot{X}(x) + \ddot{X}(x) - \mu^2 X(x) = 0$$

atau

$$\ddot{X}(x) - \frac{v}{D} \dot{X}(x) - \mu^2 X(x) = 0.$$

Kemudian misalkan

$$X(x) = Ae^{px}$$

maka

$$Ap^2 e^{px} - \frac{v}{D} Ape^{px} - \mu^2 Ae^{px} = 0$$

$$Ae^{px}\left(p^2 - \frac{v}{D} p - \mu^2\right) = 0$$

karena $Ae^{px} \neq 0$, maka

$$p^2 - \frac{v}{D}p - \mu^2 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{\frac{v}{D} \pm \sqrt{\left(\frac{v}{D}\right)^2 - 4(1)(-\mu^2)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{v}{D} \pm \sqrt{\frac{v^2}{D} + 4\mu^2}}{2}$$

$$= \frac{v}{2D} \pm \frac{1}{2D}\sqrt{v^2 + 4\mu^2 D^2}$$

dengan demikian, solusi umum ketika $\lambda = -\mu^2 < 0$ adalah

$$X(x) = C_1 e^{\left(\frac{v}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{v^2+4\mu^2D^2}\right)x} + C_2 e^{\left(\frac{v}{2D}-\frac{1}{2D}\sqrt{v^2+4\mu^2D^2}\right)x}$$

dengan syarat batas $X(0) = 0$ dan $\dot{X}(L) = 0$ sehingga dapat diperoleh

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$\dot{X}(x) = C_1\left(\frac{v}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{v^2 + 4\mu^2 D^2}\right)e^{\left(\frac{v}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{v^2+4\mu^2D^2}\right)x}$$
$$+ C_2\left(\frac{v}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{v^2 + 4\mu^2 D^2}\right)e^{\left(\frac{v}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{v^2+4\mu^2D^2}\right)x}$$

$$\dot{X}(L) = C_1\left(\frac{v}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{v^2 + 4\mu^2 D^2}\right)e^{\left(\frac{v}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{v^2+4\mu^2D^2}\right)L}$$
$$+ C_2\left(\frac{v}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{v^2 + 4\mu^2 D^2}\right)e^{\left(\frac{v}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{v^2+4\mu^2D^2}\right)L} = 0$$

Karena $C_1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = -C_1$ sehingga

$$C_1\left(\frac{v}{2D} + \frac{1}{2D}\sqrt{v^2 + 4\mu^2 D^2}\right)e^{\left(\frac{v}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{v^2+4\mu^2D^2}\right)L}$$
$$- C_1\left(\frac{v}{2D} - \frac{1}{2D}\sqrt{v^2 + 4\mu^2 D^2}\right)e^{\left(\frac{v}{2D}-\frac{1}{2D}\sqrt{v^2+4\mu^2D^2}\right)L} = 0$$

$$C_1\left(\left(\frac{v}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{v^2+4\mu^2D^2}\right)e^{\left(\frac{v}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{v^2+4\mu^2D^2}\right)L}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{v}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{v^2+4\mu^2D^2}\right)\right)=0$$

$$\begin{pmatrix}\left(\frac{v}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{v^2+4\mu^2D^2}\right)e^{\left(\frac{v}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{v^2+4\mu^2D^2}\right)L}\\ -\left(\frac{v}{2D}+\frac{1}{2D}\sqrt{v^2+4\mu^2D^2}\right)\end{pmatrix}\neq 0$$

sehingga solusi ada ketika $C_1=0$.

Dengan demikian, solusi ada hanya ketika $C_1=C_2=0$ atau solusi berbentuk $X(x)=0$.

iii. Untuk $\lambda=\mu^2>0$

$$\left(e^{-\frac{v}{D}x}\dot{X}(x)\right)'+(\mu^2)\left(e^{-\frac{v}{D}x}\right)X(x)=0$$

Turunkan persamaan diatas, sehingga mendapatkan

$$-\frac{v}{D}e^{-\frac{v}{D}x}\dot{X}(x)+e^{-\frac{v}{D}x}\ddot{X}(x)+\mu^2e^{-\frac{v}{D}x}X(x)=0$$

lalu kalikan dengan $e^{\frac{v}{D}x}\neq 0$, maka dapat diperoleh

$$-\frac{v}{D}\dot{X}(x)+\ddot{X}(x)+\mu^2X(x)=0$$

$$\ddot{X}(x)-\frac{v}{D}\dot{X}(x)+\mu^2X(x)=0$$

Kemudian misalkan $X(x)=Ae^{px}$, maka

$$Ap^2e^{px}-\frac{v}{D}Ape^{px}+\mu^2Ae^{px}=0$$

$$Ae^{px}\left(p^2-\frac{v}{D}p+\mu^2\right)=0$$

karena $Ae^{px} \neq 0$, maka

$$p^2 - \frac{v}{D}p + \mu^2 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{\frac{v}{D} \pm \sqrt{\frac{v^2}{D^2} - 4(1)(\mu^2)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{v}{D} \pm \sqrt{\frac{v^2 - 4\mu^2 D^2}{D^2}}\right)$$

jika $v^2 - 4\mu^2 D^2 > 0$ akan kembali ke kasus (ii) sehingga disyaratkan bahwa $v^2 - 4\mu^2 D^2 < 0$ atau $4\mu^2 D^2 - v^2 > 0$.

Jika $v^2 - 4\mu^2 D^2 < 0$, maka

$$p_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{D} \pm i\sqrt{4\mu^2 D^2 - v^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{v}{D} \pm i(2D)\sqrt{\left(\mu^2 - \frac{v}{4D^2}\right)}\right)$$

$$= \frac{v}{2D} \pm i\sqrt{\mu^2 - \frac{v}{4D^2}}$$

dimana $\mu^2 - \frac{v}{4D^2} > 0$.

Solusinya adalah

$$X(x) = e^{\frac{v}{2D}x}\left(C_1 cos\left(\sqrt{\mu^2 - \frac{v}{4D^2}}\right)x + C_2 sin\left(\sqrt{\mu^2 - \frac{v}{4D^2}}\right)x\right)$$

syarat batasnya adalah $X(0) = 0$ dan $X(L) = 0$, sehingga diperoleh

$$X(0) = C_1 = 0$$

sehingga

$$X(x) = e^{\frac{v}{2D}x}\left(C_2 sin\sqrt{\mu^2 - \frac{v}{4D^2}}x\right)$$

Jadi, solusi umum untuk Persamaan Diferensial Parsial tersebut adalah

$$X(x) = e^{\frac{v}{2D}x}\left(C_2 sin\sqrt{\mu^2 - \frac{v}{4D^2}}x\right).$$

Dan untuk solusi adveksi-dispersinya

$$X(L) = e^{\frac{v}{2D}L}\left(C_2 sin\sqrt{\mu^2 - \frac{v}{4D^2}}L\right) = 0$$

dimana $e^{\frac{v}{2D}L} \neq 0$ dan $C_2 \neq 0$, maka

$$sin\sqrt{\mu^2 - \frac{v}{4D^2}}L = 0$$

$$\sqrt{\mu^2 - \frac{v}{4D^2}}L = n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{\mu^2 - \frac{v}{4D^2}} = \frac{n\pi}{L}$$

$$\mu^2 - \frac{v}{4D^2} = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

$$\mu^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{v}{4D^2}$$

jadi

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{v}{2D}L} C_n\, sin\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2}}L\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{v}{2D}L} C_n \, sin\sqrt{n^2\pi^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{v}{2D}L} C_n \sin(n\pi)$$

Jadi, untuk solusi adveksi-dispersi adalah

$$c(x,t) = X(x)T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{v}{2D}} C_n \sin(n\pi) e^{D\lambda t}.$$

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dari bab 4, diperoleh solusi analitik untuk persamaan adveksi-dispersi adalah ketika nilai eigen bernilai $\lambda = \mu^2 - \frac{v}{4D^2} > 0$.

5.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat dianalisa lebih jauh perilaku solusi analitik dari persamaan adveksi-dispersi dengan pendekatan Sturm-Liouville ini menggunakan simulasi numerik ataupun membandingkan dengan solusi analitik dari pendekatan metode lain.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Qur'an dan terjemahannya. (2019). Kementerian Agama.

Amnawaty. (2014). NilaiI Islam dalam Upaya Penanggulangan Pencemaran Lingkungan Hidup. *Akademika*, 288-298.

Bear, J. (1972). *Dynamics of Fluids in Porous Media.* American Elsevier Publishing Company.

Boyce, W. E., Meade, D. B., & DiPrima, R. C. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* United States of America: WileyPLUS.

Boyce, W., & DiPrima, R. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* John Wiley & Sons, Inc.

Evans, L. (2010). *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society.

Freeze, R. A., & Cherry, J. A. (1979). *Groundwater.* Pretice-Hall.

Gelhar, L. (1993). Stochastic Subsurface Hydrology: A Primer. *Water Resources Research*, 1955-1983.

Josua, Noviani, E., & Fran, F. (2020). Fungsi Green untuk Persamaan Difusi-Adveksi dengan Syarat Batas Dirichlet. *Barekeng*, 205-216.

LeVeque, R. J. (2004). Finite-Volume Methodsfor Hyperbolic Problems. *Cambridge University Press*.

Maulida, A. (2019). Natural Disasters in The Previous People and The Causes in The Al Qur'an Perspective. *Jurnal Ilmu Al Qur'an dan Tafsir*, No. 02.

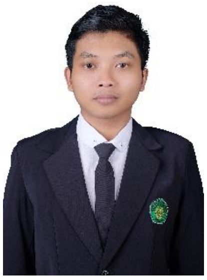
Prasetya, A., Yudianto, D., & Guan, Y. (2017). Pemodelan Numerik 1-D Adveksi-Dispersi untuk Memprediksi Konsentrasi Polutan dalam Badan Sungai. *Jurnal Teknik Sipil*, 188-194.

Rahmat, P. S. (2009). Penelitian Kualitatif. *Equilibrium*, 1-8.

Strogatz, S. (2018). *Nonlinier Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering.* Westview Press.

Todd, D., & Mays, L. (2005). *Groundwater Hydrology*. John Wiley & Sons.

RIWAYAT HIDUP



Rizha Husnur Roziqin, lahir di Blitar pada tanggal 17 September 1997. Laki-laki yang sering disapa Rizha/Reza ini merupakan anak pertama dari 3 bersaudara dari pasangan Bapak Suprianto dan Ibu Siti Yuliati. Rizha telah menempuh pendidikan formal mulai dari RA Perwanida Babadan Wlingi, setelah itu menempuh pendidikan dasar di MI MWB Bajang dan lulus pada tahun 2004. Kemudian melanjutkan ke jenjang SMP di MTs Negeri Jabung Talun Blitar dan lulus pada tahun 2013, lalu melanjutkan ke jenjang berikutnya di SMA Islam Sunan Gunung Jati Ngunut Tulungagung dan lulus pada tahun 2016. Pada tahun yang sama pula ia menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada program studi matematika. Selama menjadi mahasiswa, pada tahun pertama Rizha Berperan aktif pada organisasi daerah dalam rangka mengemban ilmu bersosial.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Rizha Husnur Roziqin
NIM	: 16610050
Fakultas / Jurusan	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	: Solusi Analitik Persamaan Adveksi-Dispersi dengan Pendekatan Sturm-Liouville
Pembimbing I	: Dr. Heni Widayani, M.Si.
Pembimbing II	: Erna Herawati, M.Pd..

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	06 Januari 2023	KONSULTASI BAB 1, 2, dan 3	1.
2.	19 Januari 2023	REVISI BAB 1, 2, dan 3	2.
3.	24 Januari 2023	KONSULTASI KAJIAN AGAMA	3.
4.	27 Januari 2023	ACC BAB 1, 2 dan 3	4.
5.	07 Februari 2023	ACC KAJIAN AGAMA	5.
6.	24 Februari 2023	KONSULTASI REVISI SEMPRO	6.
7.	10 Mei 2023	KONSULTASI BAB 4 dan 5	7.
8.	24 Mei 2023	REVISI BAB 4 dan 5	8.
9.	30 Mei 2023	ACC BAB 4 dan 5	9.
10.	15 Juni 2023	KONSULTASI REVISI SEMHAS	10.
11.	18 Juni 2023	REVISI KESIMPULAN dan ABSTRAK	11.
12.	19 Juni 2023	REVISI KAJIAN AGAMA	12.
13.	24 Juni 2023	ACC REVISI SEMHAS	13.
14.	27 Juni 2023	ACC KESELURUHAN	14.

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP.197411292000122005