

**ANALISIS KESTABILAN MODEL POPULASI  
*PREDATOR PREY* DENGAN PEMANENAN  
PADA PENGELOLAAN PERIKANAN**

**SKRIPSI**

**OLEH  
ELIYA NUR KHAYATI  
NIM. 19610023**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2023**

**ANALISIS KESTABILAN MODEL POPULASI  
*PREDATOR PREY* DENGAN PEMANENAN  
PADA PENGELOLAAN PERIKANAN**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan  
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh  
Eliya Nur Khayati  
NIM. 19610023**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2023**

**ANALISIS KESTABILAN MODEL POPULASI  
PREDATOR PREY DENGAN PEMANENAN  
PADA PENGELOLAAN PERIKANAN**

**SKRIPSI**

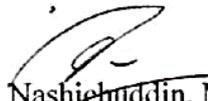
**Oleh  
Eliya Nur Khayati  
NIM. 19610023**

Telah Disetujui Untuk Diuji  
Malang, 20 Juni 2023

Dosen Pembimbing I

  
Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.  
NIP. 19770521 200501 2 004

Dosen Pembimbing II

  
Ach. Nashiehuddin, M.A.  
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika

  
Dr. Elly Susanti, M.Sc.  
NIP. 19741129 200012 2 005

**ANALISIS KESTABILAN MODEL POPULASI  
PREDATOR PREY DENGAN PEMANENAN  
PADA PENGELOLAAN PERIKANAN**

**SKRIPSI**

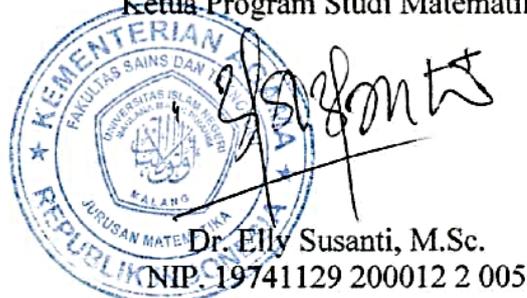
Oleh  
**Eliya Nur Khayati**  
**NIM. 19610023**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)  
Tanggal 23 Juni 2023

Ketua Penguji : Juhari, M.Si.  
Anggota Penguji 1 : Dr. Heni Widayani, M.Si.  
Anggota Penguji 2 : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.  
Anggota Penguji 3 : Ach. Nashichuddin, M.A.



Mengetahui,  
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.  
NIP. 19741129 200012 2 005

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Eliya Nur Khayati

NIM : 19610023

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Model Populasi *Predator Prey*  
Dengan Pemanenan Pada Pengelolaan Perikanan

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 Juni 2023

Yang membuat pernyataan,



Eliya Nur Khayati

NIM. 19610023

## **MOTO**

“Jangan rendah diri dengan kawan-kawan yang sudah lebih dulu bersinar, seperti langit yang lapang membentang, dunia masih cukup menampung banyak bintang, menanti kamu yang punya keberanian.”

(Najwa Shihab)

## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua penulis yaitu Ayahanda Nursandi dan Ibunda Elis Nuryana, ketiga kakak Penulis yaitu Kakak Rizka Fitrianti Amalia, Kakak Elvia Nur Azizah, dan Kakak Rizki Cahya Rani, beserta semua keluarga dan teman-teman yang senantiasa memberikan dukungan kepada penulis berupa moral ataupun material dan yang terpenting adalah kasih sayang kepada penulis. Dengan itu semua menjadikan penulis tetap semangat dalam menyelesaikan skripsi ini.

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Puji syukur kehadiran Allah SWT atas berkat, rahmat dan ni'mat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan proposal skripsi yang berjudul “Analisis Kestabilan Model Populasi *Predator Prey* dengan Pemanenan Pada Pengelolaan Perikanan”. Shalawat dan salam selalu terlimpahkan kepada Baginda Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun manusia dari jalan jahilliyah menuju ke jalan keselamatan.

Penulis menyadari bahwa proposal skripsi ini tidak dapat diselesaikan oleh penulis sendiri, tetapi banyak yang telah berkontribusi dengan memberikan waktu, pemikiran, dan tenaga mereka untuk membantu penulis dalam menyelesaikan proposal tesis ini. Oleh karena itu, pada halaman persembahan ini dengan kerendahan hati dan ketulusan hati, penulis ingin menyampaikan rasa terima kasihnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, nasihat, do'a dan motivasi kepada penulis. Terimakasih atas semua waktu yang rela diberikan di sela-sela kesibukan Ibu.
5. Ach. Nashichuddin, M.A., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, nasihat, do'a dan motivasi kepada penulis. Terimakasih atas semua waktu yang rela diberikan di sela-sela kesibukan Bapak.
6. Juhari, M.Si., selaku ketua penguji yang senantiasa menyempatkan waktunya untuk memberikan masukan dan saran kepada penulis.

Terimakasih atas semua waktu yang rela diberikan di sela-sela kesibukan Bapak.

7. Dr. Heni Widayani, M.Si., selaku penguji pertama yang telah memberikan saran yang baik dan selalu membimbing selama melakukan penelitian kepada penulis. Terimakasih atas semua waktu yang rela ibu berikan di sela-sela kesibukan.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah memberikan ilmu selama perkuliahan.
9. Ayahanda Nursandi dan Ibunda Elis Nuryana yang selalu mendo'akan, memberikan semangat dan dukungan kepada penulis baik dari segi materi maupun batin selama perkuliahan. Terima kasih telah menjadi motivasi penulis untuk menyelesaikan tugas akhir.
10. Mbak Rizka, mbak Azizah, mbak Rani serta keponakan-keponakan yang menjadi penyemangat bagi penulis menyelesaikan tugas akhir.
11. Seluruh teman-teman angkatan matematika 2019 khususnya (Ahliha dan Ni'mah) terima kasih atas segala pengalaman bersama selama menuntut ilmu di bangku perkuliahan.

Penulis menyadari bahwa penulisan proposal skripsi ini masih terdapat kekurangan. Maka dari itu, penulis sangat berharap diberikan kritik serta saran yang membangun untuk menjadi bahan perbaikan bagi penulis oleh para pembaca sehingga bertujuan untuk perbaikan bagi penulis terkait penelitian selanjutnya. Mohon maaf atas segala kelebihan dan kekurangan pada penulisan proposal skripsi ini.

Malang, 23 Juni 2023

Penulis

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN PENGAJUAN .....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN .....	iii
HALAMAN PENGESAHAN .....	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN .....	v
MOTO .....	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL .....	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR SIMBOL .....	xiv
DAFTAR LAMPIRAN .....	xv
ABSTRAK .....	xvi
ABSTRACT .....	xvii
مستخلص البحث.....	xviii
<b>BAB I PENDAHULUAN.....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan Penelitian .....	5
1.4 Manfaat Penelitian .....	6
1.5 Batasan Masalah.....	6
1.6 Definisi Istilah .....	7
<b>BAB II KAJIAN TEORI .....</b>	<b>8</b>
2.1 Teori Pendukung .....	8
2.1.1 Analisis Model Dua <i>Predator</i> dan Satu <i>Prey</i> dengan Pemanenan Ketiga Populasi Didiharyono (2021) .....	8
2.1.2 Sistem Persamaan Diferensial .....	12
2.1.3 Sistem Persamaan Diferensial Autonomous .....	16
2.1.4 Sistem Dinamik .....	17
2.1.5 Linierisasi PDB Autonomous .....	20
2.1.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen .....	21
2.2 Keseimbangan Ekosistem dalam Alqur'an .....	24
2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung .....	25
<b>BAB III METODE PENELITIAN .....</b>	<b>27</b>
3.1 Jenis Penelitian.....	27
3.2 Pra Penelitian.....	27
3.3 Tahapan Penelitian .....	27
<b>BAB IV PEMBAHASAN.....</b>	<b>29</b>
4.1 Analisis Modifikasi Model Dua <i>Predator</i> dan Satu <i>Prey</i> .....	29
4.2 Analisis Kestabilan Model Dua <i>Predator</i> dan Satu <i>Prey</i> .....	31
4.2.1 Analisis Titik Tetap .....	31
4.2.2 Linierisasi .....	42
4.2.3 Analisis Kestabilan Pada Titik Tetap .....	45
4.3 Simulasi dan Interpretasi Grafik .....	51

<b>BAB V PENUTUP</b> .....	<b>59</b>
5.1 Kesimpulan.....	<b>59</b>
5.2 Saran.....	<b>60</b>
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	<b>61</b>
<b>LAMPIRAN</b> .....	<b>64</b>
<b>RIWAYAT HIDUP</b> .....	<b>65</b>

## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Keterangan Model Didiharyono (2021).....	11
Tabel 2.2	Nilai Parameter Didiharyono (2021).....	12
Tabel 2.3	Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Dinamik (Boyce, 2009) ..	20
Tabel 2.4	Nilai Parameter Asumsi. ....	30

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1	Diagram Kompartemen dengan Penambahan Parameter $\mu_1xy$ dan $\mu_2xz$ .....	30
Gambar 4.2	Dinamika Lintasan untuk Populasi <i>Prey</i> , <i>Predator</i> Pertama dan <i>Predator</i> Kedua Terhadap Waktu Yaitu $t \in [0,365]$ .....	52
Gambar 4.3	Osilasi Sesuai Gambar 4.2.....	52
Gambar 4.4	Dinamika Lintasan untuk Populasi <i>Prey</i> , <i>Predator</i> Pertama dan <i>Predator</i> Kedua Ketika $\mu_1 = 0,2$ .....	53
Gambar 4.5	Osilasi Sesuai Gambar 4.4.....	54
Gambar 4.6	Dinamika Lintasan untuk Populasi <i>Prey</i> , <i>Predator</i> Pertama dan <i>Predator</i> Kedua Ketika $\mu_2 = 0,2$ .....	54
Gambar 4.7	Osilasi Sesuai Gambar 4.6.....	55
Gambar 4.8	Dinamika Lintasan untuk Populasi <i>Prey</i> , <i>Predator</i> Pertama dan <i>Predator</i> Kedua Ketika $\mu_1 = 0,4$ dan $\mu_2 = 0,4$ .....	55
Gambar 4.9	Osilasi Sesuai Gambar 4.8.....	55
Gambar 4.10	Dinamika Lintasan untuk Populasi <i>Prey</i> , <i>Predator</i> Pertama dan <i>Predator</i> Kedua Ketika $\mu_1 = 0,5$ dan $\mu_2 = 0,5$ .....	56
Gambar 4.11	Osilasi Sesuai Gambar 4.10.....	55

## DAFTAR SIMBOL

- $x(t)$  : Banyaknya populasi ikan *prey* (ikan Butini) pada waktu ke- $t$   
 $y(t)$  : Banyaknya populasi *predator* pertama (ikan Mujair) pada waktu ke- $t$   
 $z(t)$  : Banyaknya populasi *predator* kedua (ikan Nila) pada waktu ke- $t$   
 $r$  : Tingkat pertumbuhan intrinsik *prey*  
 $K$  : Daya dukung lingkungan  
 $\alpha$  : Laju *prey* di mangsa oleh *predator* pertama  
 $\beta$  : Laju *prey* di mangsa oleh *predator* kedua  
 $\delta$  : Laju *predator* pertama memangsa *prey*  
 $\theta$  : Laju *predator* kedua memangsa *prey*  
 $\mu_1$  : Tingkat konsumsi *predator* pertama ukuran berapapun oleh *prey*  
 $\mu_2$  : Tingkat konsumsi *predator* kedua ukuran berapapun oleh *prey*  
 $b$  : Laju kematian alami *predator* pertama  
 $c$  : Laju kematian alami *predator* kedua  
 $d$  : Variabel tingkat konversi *predator* pertama dengan parameter positif  
 $E$  : Usaha pemanenan konstan positif  
 $t$  : Waktu  
 $\rho$  : Rho (simbol asumsi untuk titik tetap keempat)  
 $\gamma$  : Gamma (simbol asumsi untuk titik tetap keempat)  
 $\tau$  : Tau (simbol asumsi untuk titik tetap keempat)

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Program Maple 18 untuk Analisis Kestabilan Di Sekitar Titik Tetap Model Dua <i>Predator</i> dan Satu <i>Prey</i> .....	59
Lampiran 2	Program Matlab untuk Grafik Simulasi ODE45 .....	65

## ABSTRAK

Khayati, Eliya Nur, 2023. **Analisis Kestabilan Model Populasi Predator Prey Dengan Pemanenan Pada Pengelolaan Perikanan**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

**Kata Kunci:** Model *Predator Prey*, Dinamik, Perikanan.

Interaksi antar tiga populasi dalam satu ekosistem dapat mengakibatkan dinamika setiap populasi mengalami perubahan terhadap pertumbuhannya. Hal ini, dilakukan analisis untuk mengetahui yang terjadi jika ketiga populasi ditempatkan di ekosistem yang sama. Tiga populasi yaitu ikan Butini kecil ( $x$ ) sebagai *prey*, ikan Mujair besar ( $y$ ) sebagai *predator* pertama dan ikan Nila besar ( $z$ ) sebagai *predator* kedua. Sehingga pembahasan difokuskan pada modifikasi model Dua *Predator* dan Satu *Prey* dengan menambahkan parameter  $\mu_1$  dan  $\mu_2$  dimana masing-masing merupakan laju *prey* memakan *predator* pertama dan *predator* kedua, dilanjut mencari kestabilan dari setiap titik tetap. Terakhir, simulasi ODE45 dilakukan untuk melihat dinamika lintasan ketiga populasi. Hasil analisis didapatkan empat titik tetap yaitu  $(TE_1)$  tidak stabil.  $(TE_2)$  tidak stabil dengan syarat kestabilan  $r > E_1$ ,  $(TE_3)$  tidak stabil dengan syarat kestabilan  $\theta > \mu_2$ , dan terakhir  $(TE_4)$  bersifat stabil asimtotik dengan syarat kestabilan  $\delta > \mu_1$ . Dengan demikian, pada kondisi nilai parameter pemangsaan *prey* terhadap *predator* pertama dan pemangsaan *prey* terhadap *predator* kedua berada di rentan  $[0, 0,4]$  dan harus tepat sama. Sehingga ketiga populasi Ikan yakni Ikan Butini kecil, Ikan Mujair besar dan Ikan Nila besar mengalami kondisi ko-eksistensi atau tidak ada yang punah. Hal ini dapat membantu masyarakat untuk mengetahui langkah atau pengawasan agar tidak sampai pada kepunahan.

## ABSTRACT

Khayati, Eliya Nur, 2023. **Stability analysis of predator prey population models with harvesting in fisheries management.** Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Sc. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

**Keywords:** Predator Prey, Dynamics, Fisheries.

The interaction between three populations in one ecosystem can result in the dynamics of each population changing its growth. In this case, an analysis is carried out to find out what happens if the three populations are placed in the same ecosystem. The three populations are small Butini fish ( $x$ ) as prey, large Mujair fish ( $y$ ) as the first predator and large Tilapia fish ( $z$ ) as the second predator. So that a special discussion on the Two Predator and One Prey modification model by adding the parameters  $\mu_1$  and  $\mu_2$  where respectively are the rate of prey eating the first predator and the second predator, continues to seek stability from each fixed point. Finally, the ODE45 simulation was carried out to see the dynamics of the movement of the three populations. The results of the analysis obtained four fixed points, namely  $(TE_1)$  is unstable.  $(TE_2)$  is unstable under conditions of stability  $r > E_1$ ,  $(TE_3)$  is unstable under conditions of stability  $\theta > \mu_2$ , and finally  $(TE_4)$  is asymptotically stable under conditions of stability  $\delta > \mu_1$ . Thus, under conditions of predation parameter values for the first predator and predation for the second predator are in the range of  $[0, 0,4]$  and must be exactly the same. So that the three fish populations, namely small Butini fish, large Mujair fish and large tilapia experience a coexistence condition or none of them become extinct. This can help the community to know the steps or supervision so as not to become extinct.

## مستخلص البحث

خياني ، إيليا نور ، ٢٠٢٣. تحليل الاستقرار لنماذج أعداد الفرائس المفترسة مع الحصاد في إدارة مصايد الأسماك. البحث الجامعي. قسم الرياضيات ، كلية التربية والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك ابراهيم الاسلامية الحكومية مالانج. المشرفة: (١) اري كوسوما اسطوتي ، الماجستير (٢) احمد ناصح الدين، الماجستير

الكلمات المفتاحية: نموذج (*Predator Prey*) ، الديناميكيا، مصايد الاسماك.

يمكن أن يتسبب التفاعل بين ثلاث مجموعات سكانية في نظام بيئي واحد في تغيير ديناميكيات كل مجموعة من السكان. مجموعة اسماء الثلاثة هي أسماك بوتيني الصغيرة (*Prey*) ( $x$ ) ، وسمك الموجير الكبيرة ( $y$ ) باعتبارها المفترس الأول وسمك نيلا الكبير ( $z$ ) باعتباره المفترس الثاني. لذلك ركزت المناقشة على تعديل نموذجي المفترس والفرائس الواحدة عن طريق إضافة معلمات ( $\mu_1$  و  $\mu_2$ ) وحيث يكون كل منهما هو المعدل الذي تأكل به الفريسة المفترس الأول والمفترس الثاني, ثم الاستمرار في إيجاد الاستقرار من كل نقطة ثابتة. أخيرا ، تم إجراء محاكاة ODE45 لمعرفة ديناميكيات المسار للسكان الثلاثة. حصلت نتائج التحليل على أربع نقاط ثابتة وهي ( $TE_1$ ) غير مستقرة ( $TE_2$ ) غير مستقر مع ظروف الاستقرار ( $r > E_1$ ) ، ( $TE_3$ ) غير مستقر مع ظروف الاستقرار ( $\theta > \mu_2$ ) ، وأخير ( $TE_4$ ) أمستقر بشكل مقارب مع ظروف الاستقرار ( $\delta > \mu_1$ ). وبالتالي ، في ظل ظروف قيمة معلمة الافتراس للفريسة المفترسة الأولى وافتراس الفريسة الثانية ، تكون عرضة للخطر، [0,4] ويجب أن تكون متطابقة تمامًا. بحيث تعيش مجموعات الأسماك الثلاثة وهي أسماك بوتيني الصغيرة وأسماك الموجير الكبيرة والبلطي الكبير حالة تعايش أو لم ينقرض أي منها. هذا يمكن أن يساعد المجتمع على معرفة الخطوات أو الإشراف حتى لا ينقرض.

# BAB I PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Allah menciptakan semesta serta segala isinya dengan menggunakan pengukuran yang tepat, perhitungan yang mapan, dan aturan serta persamaan yang seimbang dan teratur (Abdussakir, 2007). Kebenaran alqur'an tidak dapat dipisahkan dari suatu bentuk aplikasi ilmu, seperti dalam Q.S. Ar-Rum: 41 yaitu

*“Telah tampak kerusakan di darat dan di laut disebabkan perbuatan tangan manusia; Allah menghendaki agar mereka merasakan sebagian dari (akibat) perbuatan mereka, agar mereka kembali (ke jalan yang benar).”*

Menurut Shihab (2003), dalam tafsir *Al-Misbah* dijelaskan bahwa pada ayat ini mengisyaratkan tentang penciptaan Allah SWT, dimana tidak ada kerusakan, pencemaran atau hilangnya keseimbangan sebagaimana awal diciptakannya, karena pada dasarnya Allah menciptakan dunia ini dalam keseimbangan dan keselarasan yang sempurna. Akan tetapi, jika ada kerusakan, pencemaran lingkungan atau hilang keseimbangan di muka bumi ini, yang disebabkan karena aktivitas manusia yang dilakukan dengan sengaja. Hal ini dapat mengubah fitrah Allah SWT terhadap lingkungan yang telah diciptakan secara seimbang dan sempurna. Oleh karena itu, kerusakan yang terjadi membuat Allah SWT dapat menurunkan bencana sebagai akibat dari perbuatan dan pelanggaran yang telah dilakukan manusia, agar mereka kembali ke jalan Allah SWT. Sehingga, manusia diharapkan dapat menjaga agar keseimbangan ekosistem yang diciptakan oleh Allah SWT tidak mengalami kerusakan dan keseimbangan akan tetap terjaga.

Keseimbangan ekosistem sendiri adalah suatu kondisi dimana ekosistem berjalan seimbang atau harmonis meskipun di dalamnya tetap terjadi aktivitas makan memakan antara *predator-prey*. Salah satu bahasan penting dalam

keseimbangan ekosistem yaitu rantai makanan. Bagian paling sederhana dari suatu rantai makanan berupa interaksi dua spesies yaitu interaksi antara spesies *prey* (mangsa) dengan spesies *predator* (pemangsa). Dimana jumlah *prey* akan selalu dipengaruhi kehadiran *predator*. Sedangkan, apabila interaksi terjadi pada tiga spesies yang terdiri dari *prey* dan dua *predator* disebut model rantai makanan tiga spesies (Pratikno, 2010). Dimana jumlah *prey* dan jumlah *predator* pertama akan dipengaruhi karena kehadiran *predator* kedua, sehingga di dalam suatu rantai makanan setiap komponennya akan saling memberi pengaruh satu sama lain. Dalam bidang matematika, model sederhana tersebut dikenal sebagai model *predator-prey* Lotka-Volterra (Boyce, 1999).

Salah satu contoh interaksi yang terjadi pada *predator-prey* Lotka Volterra dapat ditemukan pada ekosistem perairan yang memuat spesies endemik misalnya *Glossogobius matanensis* atau biasa disebut Ikan Butini  $x(t)$ . Ikan Butini merupakan ikan golongan Karnivora dimana ikan tersebut dikonsumsi juga oleh manusia dengan laju pemanenan sebesar  $E_1$  (Mamangkey, 2004). Campur tangan manusia dalam hal pemanenan tersebut dikhawatirkan merusak ekosistem yang dimaksud. Kemudian faktor kedua yaitu terdapat populasi yang dilepasliarkan oleh masyarakat seperti ikan Mujair  $y(t)$  dan ikan Nila  $z(t)$  dimana ikan tersebut merupakan ikan golongan Omnivora yang mana dapat mengancam populasi Butini kecil, sehingga cepat atau lambat ikan Butini dapat mengalami kepunahan (Faried, 2020). Oleh karena itu, model matematika *predator-prey* yang menceritakan interaksi antara ketiga populasi  $x(t)$ ,  $y(t)$  dan  $z(t)$  akan dibahas pada penelitian ini.

Analisis pada penelitian ini mengacu pada penelitian Toaha (2014) yang mana menganalisis stabilitas dan kebijakan pemanenan optimal. Dalam penelitiannya dijelaskan bahwa interaksi antar spesies yang terjadi pada suatu ekosistem dapat menyebabkan keadaan populasi suatu spesies berubah. Sehingga, salah satu penyebab kepunahan dari populasi adalah tingkat pemangsaan terhadap populasi mangsa yang sangat tinggi dan rendahnya tingkat pertumbuhan populasi mangsa. Kemudian, Didiharyono (2016) menganalisis stabilitas dua *predator* dan satu *prey* dengan Holling tipe III dan memanen pada populasi *predator*. Dari hasil analisis menunjukkan bahwa diperoleh titik interior yang stabil asimtotik dan memperoleh keuntungan yang maksimal meskipun pemanenan terjadi pada kedua populasi pemangsa. Populasi pemangsa dan mangsa juga tetap stabil meskipun dimanfaatkan dengan upaya pemanenan.

Selanjutnya, dikembangkan lagi oleh Didiharyono (2021) yang menganalisis stabilitas model populasi dua *predator* dan satu *prey* yang mana model tersebut menambahkan faktor campur tangan manusia sebagai fungsi pemanenan yang dikenakan di semua populasi *predator* dan *prey* yang terlibat. Variabel model memuat satu variabel *prey* yakni  $x(t)$  sebagai ikan Butini dan dua variabel *predator* yakni  $y(t)$  dan  $z(t)$  sebagai ikan Mujair dan ikan Nila. Pada populasi *prey* diasumsikan bahwa pertambahan populasi diawal naik secara logistik dengan pertumbuhan *prey* yang dibatasi oleh kapasitas daya dukung lingkungan. Asumsi kedua adalah karena makanan utama *predator* adalah *prey*, maka ketika tidak adanya populasi *prey* akan mengakibatkan ketersediaan makanan untuk *predator* menjadi habis. Sehingga *predator* tidak dapat hidup

karena putusnya rantai makanan. Hal ini mengakibatkan terjadi kematian alami pada kedua *predator* menjadi meningkat.

Sehingga, pembahasan pada penelitian ini diarahkan pada analisis model Didiharyono (2021) dengan memodifikasi kembali model. Dengan adanya modifikasi maka diharapkan dapat diinterpretasi efek yang muncul serta dapat memperjelas kembali interaksi yang terjadi pada penelitian sebelumnya. Pada model penelitian ini interaksi yang terjadi yaitu interaksi antara dua *predator* dan satu *prey* dimana *predator-prey* tersebut diasumsikan saling memangsa satu sama lain untuk mempertahankan hidupnya masing-masing. Dikarenakan dua *predator* adalah golongan Omnivora maka *prey* menjadi makanan utama yang dikonsumsi oleh *predator*. Sebaliknya, *prey* juga dapat memakan *predator* pertama ataupun *predator* kedua ukuran berapapun untuk menjaga kelangsungan hidupnya yang mana masing-masing sebesar  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ , hal ini dikarenakan *prey* termasuk dalam golongan karnivora.

Kemudian, simulasi pada penelitian ini akan melibatkan perubahan nilai parameter. Dalam parameter  $\mu_1$  dan  $\mu_2$  yang masing-masing menyatakan tingkat konsumsi *prey* terhadap *predator* pertama dan *predator* kedua ukuran berapapun nilainya akan di anggap 0.1, karena parameter asumsi harus lebih besar dari nol dengan tujuan mengetahui di titik mana kestabilan terjadi, sehingga pada simulasi akan diperoleh batasan nilai  $\mu_1$  dan  $\mu_2$  yang sebenarnya. Oleh karena itu, kedalaman pada penelitian ini yaitu melihat sejauh mana stabilitas yang dapat dicapai dengan penambahan parameter  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ . Sehingga penelitian ini diarahkan pada penelitian keseimbangan ketiga populasi dalam ekosistem perairan.

Banyak terjadi di sekitar kita tentang persaingan antara dua *predator* dan satu *prey*. Sehingga penelitian ini sangatlah penting untuk dikaji yaitu untuk memahami dinamika yang dihasilkan dari kegiatan penangkapan atau pemanenan ikan dan mendapatkan hasil yang optimal. Khususnya, teknologi yang mengatur kondisi alam di perairan dalam memanen populasi *predator* untuk menjaga keseimbangan ekosistem.

## 1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana analisis modifikasi model dua *predator* dan satu *prey* pada pengelolaan perikanan dengan pemanenan populasi  $x(t), y(t)$  dan  $z(t)$  dengan penambahan  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ ?
2. Bagaimana analisis kestabilan model dua *predator* dan satu *prey* pada pengelolaan perikanan dengan pemanenan populasi  $x(t), y(t)$  dan  $z(t)$  dengan penambahan  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ ?
3. Bagaimana simulasi beserta interpretasi dari model dua *predator* dan satu *prey* pada pengelolaan perikanan dengan pemanenan populasi  $x(t), y(t)$  dan  $z(t)$  dengan penambahan  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ ?

## 1.3 Tujuan Penelitian

1. Mengetahui analisis modifikasi model dua *predator* dan satu *prey* pada pengelolaan perikanan dengan pemanenan populasi  $x(t), y(t)$  dan  $z(t)$  dengan penambahan  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ .
2. Mengetahui analisis kestabilan model dua *predator* dan satu *prey* pada pengelolaan perikanan dengan pemanenan populasi  $x(t), y(t)$  dan  $z(t)$  dengan penambahan  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ .

3. Mengetahui hasil simulasi beserta interpretasi dari model dua *predator* dan satu *prey* pada pengelolaan perikanan dengan pemanenan populasi  $x(t), y(t)$  dan  $z(t)$  dengan penambahan  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ .

#### 1.4 Manfaat Penelitian

Pada penelitian ini diharapkan memberikan manfaat yaitu

1. Dengan menganalisis modifikasi model dua *predator* dan satu *prey* pada pengelolaan perikanan dengan pemanenan populasi  $x(t), y(t)$  dan  $z(t)$  dengan penambahan  $\mu_1$  dan  $\mu_2$  maka model dapat dilihat sejauh mana efek keseimbangan ekosistem yang terjadi.
2. Dengan melakukan analisis kestabilan model dua *predator* dan satu *prey* dalam populasi perikanan maka dapat mengetahui stabilitas model tersebut agar tidak terjadi kepunahan pada suatu spesies terutama pada spesies *prey*.
3. Dengan mengetahui hasil simulasi dan interpretasi dari model dua *predator* dan satu *prey* maka dapat mengetahui arah kepunahan suatu spesies.

#### 1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini memberikan batasan masalah pada objek kajian sebagai berikut:

1. Model yang diteliti mencakup 3 Populasi antara lain yaitu Ikan Butini ( $x$ ), Ikan Mujair ( $y$ ), dan Ikan Nila ( $z$ ).
2. Analisis pada penelitian ini diarahkan pada modifikasi model Didiharyono (2021).
3. Pertumbuhan *prey* mengikuti model pertumbuhan logistik.
4. Diasumsikan terjadi kematian alami pada populasi *predator* pertama dan *predator* kedua.

5. Pemanenan terjadi pada ketiga populasi yaitu *prey*, *predator* pertama dan *predator* kedua.
6. Diasumsikan bahwa pemanenan adalah suatu laju pemanenan yang sepanjang waktu konstan.
7. Model matematika Didiharyono (2021) yang akan dimodifikasi adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - E_1x(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \delta x(t)y(t) - by(t) - dy(t) - E_2y(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = \theta x(t)z(t) - cz(t) + dy(t) - E_3z(t) \end{cases}$$

## 1.6 Definisi Istilah

Berikut diberikan definisi istilah dalam penelitian ini yaitu

1. Model *predator prey* adalah model interaksi yang melibatkan populasi dua *predator* dan satu *prey*.
2. Populasi *prey* adalah ikan Butini, populasi *predator* pertama adalah ikan Mujair, dan populasi *predator* kedua adalah ikan Nila.

## BAB II KAJIAN TEORI

### 2.1 Teori Pendukung

#### 2.1.1 Analisis Model Dua *Predator* dan Satu *Prey* dengan Pemanenan

##### Ketiga Populasi Didiharyono (2021)

Model *Predator-Prey* adalah model interaksi antara makhluk hidup yang berada di dalam suatu ekosistem, dimana *prey* bertindak sebagai spesies yang dimangsa sedangkan *predator* sebagai spesies yang memangsa. Model inilah dikenal sebagai model Lotka Volterra (Boyce, 1992). Interaksi yang terjadi didalam suatu populasi antara *predator-prey* akan menyebabkan terjadinya proses makan-memakan yang dapat berpengaruh terhadap padatnya masing-masing populasi.

Didiharyono (2021) meneliti tentang interaksi populasi di pengelolaan perikanan. Penelitian tersebut melibatkan dua *predator* yaitu ( $y$  dan  $z$ ) dan satu *prey* yaitu ( $x$ ). Satu *prey* tersebut adalah ikan Butini. Kemudian terdapat *predator* yang dilepasliarkan oleh masyarakat yaitu ikan Mujair (*Oreochromis mossambicus*) dan ikan Nila (*Oreochromis niloticus*). Berdasarkan jenis makanan utama, ikan Butini ini digolongkan pada karnivora (Pemakan daging). Sedangkan ikan Mujair dan ikan Nila termasuk dalam golongan pemakan segala atau omnivora (pemakan hewan dan tumbuhan). Dari paparan sifat masing-masing populasi, maka yang terjadi pada ketiga populasi di atas ketika ditempatkan di ekosistem yang sama adalah ikan Mujair dan ikan Nila ada kemungkinan memakan ikan Butini dengan ukuran yang lebih kecil. Sehingga ikan Mujair dan ikan Nila sebagai *predator* sedangkan ikan Butini sebagai *prey*.

Ketiga populasi tersebut merupakan makhluk hidup yang terletak didalam lingkup perairan. Dalam lingkup perairan pasti menimbulkan terjadinya proses makan dan dimakan antara populasi *prey* dan populasi *predator*. Sehingga dalam interaksinya mengakibatkan adanya predasi. Predasi adalah perjuangan untuk bertahan hidup dimana *predator* bersaing demi memperebutkan *prey* (Toaha, 2013). Pada model interaksinya melibatkan tiga spesies dimana dipaparkan model yang meliputi populasi *prey*, populasi *predator* pertama, dan populasi *predator* kedua berturut-turut yaitu sebagai berikut:

### **Populasi *Prey***

Pada populasi *prey*  $x(t)$  dari waktu ke waktu laju pertumbuhan intrinsiknya sebesar ( $r$ ). Sedangkan untuk laju perkapita populasi *prey* akan berkurang sebesar  $\left(\frac{x}{K}\right)$  karena tiap bertambahnya *prey* dibatasi oleh daya dukung lingkungan (Safitri, 2019). Sehingga populasi *prey* akan mengikuti pertumbuhan logistik. Kemudian, ketika adanya interaksi *prey* dengan *predator* pertama dan *predator* kedua maka pertumbuhan *prey* akan terjadi pengurangan masing-masing sebesar  $(\alpha x(t)y(t))$  dan  $(\beta x(t)z(t))$ . Kemudian, untuk mengontrol suatu populasi agar tidak mengalami kepunahan, maka dilakukan tingkat pemanenan konstan sebesar  $(E_1 x(t))$ . Sehingga persamaannya menjadi

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - E_1 x(t)$$

### **Populasi *Predator* Pertama**

Jumlah populasi  $y(t)$  dari waktu ke waktu dipengaruhi oleh laju bertambahnya *predator* pertama yang disebabkan karna interaksi *predator* pertama dengan *prey* sebesar  $(\delta x(t)y(t))$ . Disisi lain, karena *prey* adalah

makanan utama bagi *predator* maka ketika populasi *prey* habis, populasi *predator* akan mengalami kelaparan sehingga dapat menyebabkan kematian alami pada *predator* pertama sebesar  $(by(t))$ . Kemudian, terjadi pengurangan pada *predator* pertama karena variabel tingkat konversi yaitu *predator* pertama berkurang karena dikonversi menjadi *predator* kedua sebesar  $(dy(t))$ . Kemudian, untuk mengontrol suatu populasi agar tidak mengalami kepunahan, maka dilakukan tingkat pemanenan konstan sebesar  $(E_2y(t))$ . Sehingga persamaannya membentuk

$$\frac{dy(t)}{dt} = \delta x(t)y(t) - by(t) - dy(t) - E_2y(t)$$

### **Populasi Predator Kedua**

Jumlah populasi  $z(t)$  dari waktu ke waktu dipengaruhi oleh laju bertambahnya *predator* kedua yang disebabkan karna interaksi *predator* kedua dengan *prey* sebesar  $(\theta x(t)z(t))$ . Disisi lain, ketika tidak adanya interaksi *predator-prey* atau populasi *prey* habis maka populasi ikan *predator* kedua akan mengalami kelaparan sehingga mengakibatkan kematian alami dengan tingkat kematian sebesar  $(cz(t))$ . Kemudian, terjadi penambahan pada *predator* kedua karena variabel tingkat konversi pada *predator* pertama yaitu *predator* kedua bertambah karena terkonversi dari *predator* pertama sebesar  $(dy(t))$ . Selanjutnya, untuk mengontrol suatu populasi agar tidak mengalami kepunahan, maka dilakukan tingkat pemanenan konstan sebesar  $(E_3y(t))$ . Maka persamaan menjadi

$$\frac{dz(t)}{dt} = \theta x(t)z(t) - cz(t) + dy(t) - E_3z(t)$$

Dari penjabaran diatas, maka didapatkan model matematika Didiharyono (2021) secara lengkap dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - E_1x(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \delta x(t)y(t) - by(t) - dy(t) - E_2y(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = \theta x(t)z(t) - cz(t) + dy(t) - E_3z(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Dengan keterangan data dan satuannya sebagai berikut:

**Tabel 2.1** Keterangan Model Didiharyono (2021)

Parameter	Keterangan	Satuan
$x(t)$	Banyaknya populasi <i>prey</i> pada waktu $t$	Ekor
$y(t)$	Banyaknya populasi <i>predator</i> pertama pada waktu $t$	Ekor
$z(t)$	Banyaknya populasi <i>predator</i> kedua pada waktu $t$	Ekor
$\alpha$	Laju <i>prey</i> di mangsa oleh <i>predator</i> pertama	Ekor per satuan waktu
$\beta$	Laju <i>prey</i> di mangsa oleh <i>predator</i> kedua	Ekor per satuan waktu
$\delta$	Laju <i>predator</i> pertama memangsa <i>prey</i>	Ekor per satuan waktu
$\theta$	Laju <i>predator</i> kedua memangsa <i>prey</i>	Ekor per satuan waktu
$d$	Tingkat konversi <i>predator</i> pertama	Ekor per satuan waktu
$b$	Kematian alami <i>predator</i> pertama	Ekor per satuan waktu
$c$	Kematian alami <i>predator</i> kedua	Ekor per satuan waktu
$K$	Kapasitas daya dukung lingkungan	Ekor per satuan waktu
$E_1, E_2, E_3$	Usaha pemanenan <i>prey</i> , <i>predator</i> pertama dan <i>predator</i> kedua	Ekor per satuan waktu

Parameter yang digunakan pada penelitian Didiharyono (2021), yaitu:

**Tabel 2.2** Nilai Parameter Didiharyono (2021).

Parameter	Nilai
$r$	1,6
$\alpha$	0,4
$\beta$	0,5
$\delta$	0,5
$\theta$	0,5
$d$	0,3
$b$	0,8
$c$	1,3
$K$	1000
$E_1$	0,1
$E_2$	0,3
$E_3$	0,2

dimana  $\alpha, \beta, \delta, \theta, d, b, c, E_1, E_2$  dan  $E_3$  adalah parameter positif.

Ada dua proses dalam menuntaskan persamaan diferensial nonlinier dimana akan dicari seluruh hasil dinamikanya (Waluya, 2006). Dua proses tersebut yaitu titik kesetimbangan dan kestabilannya. Model Lotka-Volterra layak untuk dipergunakan dalam hubungan yg terjadi pada spesies yang sama atau hubungan intraspecies (Dwaradi, 2011).

### 2.1.2 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang melibatkan satu atau lebih fungsi variabel bebas dan turunannya terhadap satu atau lebih variabel bebas (Pamuntjak,1990).

**Definisi 1.** Persamaan Diferensial Linier merupakan persamaan diferensial biasa linier orde- $n$  dengan variabel bebas  $t$  dan variabel terikat  $y$ , sehingga dapat ditulis sebagai

$$a_0(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + a_n(t)y = F(t) \quad (2.2)$$

Diasumsikan bahwa  $a_0$  tidak nol,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  dan  $F$  adalah fungsi-fungsi kontinu pada interval  $a \leq t \leq b$  dan  $a_0(t) \neq 0$  untuk tiap  $t$  pada  $a \leq t \leq b$  (Ross, 1984).

Contoh persamaan diferensial linier:

Dari persamaan (2.1) dimisalkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - E_1 x(t) \\ g(x, y, z) &= \delta x(t)y(t) - by(t) - dy(t) - E_2 y(t) \\ h(x, y, z) &= \theta x(t)z(t) - cz(t) + dy(t) - E_3 z(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

sehingga dapat ditulis

$$\dot{x}(t) = f(x, y, z)$$

$$\dot{y}(t) = g(x, y, z)$$

$$\dot{z}(t) = h(x, y, z)$$

Kemudian dilinierisasi menggunakan ekspansi deret Taylor dimana proses linierisasinya berada disekitar  $(x^*, y^*, z^*)$  dan untuk titik tetap pertama yaitu  $T_1 = (0,0,0)$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &\approx f(x^*, y^*, z^*) + f_x(x^*, y^*, z^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*, z^*)(y - y^*) \\ &\quad + f_z(x^*, y^*, z^*)(z - z^*) \\ g(x, y, z) &\approx g(x^*, y^*, z^*) + g_x(x^*, y^*, z^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*, z^*)(y - y^*) \\ &\quad + g_z(x^*, y^*, z^*)(z - z^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(x, y, z) &\approx h(x^*, y^*, z^*) + h_x(x^*, y^*, z^*)(x - x^*) + h_y(x^*, y^*, z^*)(y - y^*) \\
&\quad + h_z(x^*, y^*, z^*)(z - z^*) \tag{2.4}
\end{aligned}$$

dimana:

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - E_1x(t) \\
g(x, y, z) &= \delta x(t)y(t) - by(t) - dy(t) - E_2y(t) \\
h(x, y, z) &= \theta x(t)z(t) - cz(t) + dy(t) - E_3z(t)
\end{aligned}$$

$$1. f(x, y, z) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - E_1x(t)$$

$$f_x(x, y, z) = r \left(1 - \frac{2x(t)}{K}\right) - \alpha y(t) - \beta z(t) - E_1$$

$$f_y(x, y, z) = -\alpha x(t)$$

$$f_z(x, y, z) = -\beta x(t)$$

$$2. g(x, y, z) = \delta x(t)y(t) - by(t) - dy(t) - E_2y(t)$$

$$g_x(x, y, z) = \delta y(t)$$

$$g_y(x, y, z) = \delta x(t) - b - d - E_2$$

$$g_z(x, y, z) = 0$$

$$3. h(x, y, z) = \theta x(t)z(t) - cz(t) + dy(t) - E_3z(t)$$

$$h_x(x, y, z) = \theta z(t)$$

$$h_y(x, y, z) = d$$

$$h_z(x, y, z) = \theta x(t) - c - E_3$$

lalu persamaan (2.4) disubstitusi dengan titik tetapnya menjadi

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &\approx f(x^*, y^*, z^*) + f_x(x^*, y^*, z^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*, z^*)(y - y^*) \\
&\quad + f_z(x^*, y^*, z^*)(z - z^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= (0) + (r - E_1)(x - 0) + (0)(y - 0) + (0)(z - 0) \\
&= rx - E_1x
\end{aligned}$$

$$g(x, y, z) \approx g(x^*, y^*, z^*) + g_x(x^*, y^*, z^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*, z^*)(y - y^*) \\ + g_z(x^*, y^*, z^*)(z - z^*)$$

$$g(x, y, z) \approx (0) + (0)(x - 0) + (-b - d - E_2)(y - 0) + (0)(z - 0) \\ = -by - dy - E_2y$$

$$h(x, y, z) \approx h(x^*, y^*, z^*) + h_x(x^*, y^*, z^*)(x - x^*) + h_y(x^*, y^*, z^*)(y - y^*) \\ + h_z(x^*, y^*, z^*)(z - z^*)$$

$$h(x, y, z) = (0) + (0)(x - 0) + (d)(y - 0) + (-c - E_3)(z - 0) \\ = dy - cz - E_3z$$

Sehingga diperoleh contoh persamaan diferensial linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= rx(t) - E_1x(t) \\ \dot{y}(t) &= -by(t) - dy(t) - E_2y(t) \\ \dot{z}(t) &= dy(t) - cz(t) - E_3z(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

**Definisi 2.** Persamaan diferensial non linier adalah suatu persamaan diferensial yang mengandung variabel tak bebas beserta turunannya yang mana memiliki derajat lebih dari satu atau yang memuat suatu perkalian antara variabel tak bebas beserta turunannya (Ross, 1984).

Contoh persamaan diferensial non linier:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - E_1x(t) \\ \frac{dy}{dt} &= \delta x(t)y(t) - by(t) - dy(t) - E_2y(t) \\ \frac{dz}{dt} &= \theta x(t)z(t) - cz(t) + dy(t) - E_3z(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Variabel bebas  $t$  dan variabel terikat  $x, y$  dan  $z$  digunakan dalam sistem (2.6), karena terjadi perkalian antara variabel terikat ( $x$  dan  $y$ ) serta ( $x$  dan  $z$ ) pada persamaan pertama dalam sistem (2.6), maka persamaan tersebut dikatakan

sebagai persamaan nonlinier. Kemudian, pada persamaan kedua juga terdapat perkalian antara variabel terikat ( $x$  dan  $y$ ). Lalu, pada persamaan ketiga terdapat perkalian antara variabel terikat ( $x$  dan  $z$ ). Oleh karena itu, sistem (2.6) adalah bentuk dari persamaan *predator-prey* yang bersifat nonlinier, dimana untuk menyelesaikannya perlu dilinierisasi terlebih dahulu seperti pada persamaan (2.4).

### 2.1.3 Sistem Persamaan Diferensial Autonomous

Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial autonomous

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

dimana  $f$  dan  $g$  adalah fungsi kontinu dari  $x$  dan  $y$  dan turunan parsial pertamanya juga kontinu. Oleh karena itu, jika  $f$  dan  $g$  tidak bergantung secara eksplisit terhadap  $t$ , maka persamaan (2.7) dikatakan persamaan autonomous. Sebaliknya dikatakan persamaan nonautonomous apabila  $f$  dan  $g$  bergantung secara eksplisit terhadap  $t$  (Hariyanto, 1992).

Jika bentuk sistem autonomous sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (2.8)$$

maka pada sistem (2.8) titik kritisnya adalah  $p^* = (x^*, y^*)$  sehingga

$$f(x^*, y^*) = 0 \text{ dan } g(x^*, y^*) = 0 \quad (2.9)$$

Persamaan diferensial biasa autonomous memiliki titik kesetimbangan, atau  $p^*$  dalam ruang fase di mana semua turunan variabel sama dengan nol. Titik tetap atau suatu posisi yang stabil adalah nama lain dari titik kesetimbangan. Jika demikian maka titik kesetimbangannya adalah  $p^* = x^*, y^*$  dan penyelesaian

solusi konstannya adalah  $x = x^*, y = y^*$  (untuk sembarang  $t$ ) adalah suatu solusi konstan (Robinson, 2004).

Jika sistem (2.9) adalah linier dengan koefisien konstan maka sistem autonomus memiliki bentuk berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy\end{aligned}\tag{2.10}$$

dengan  $a, b, c$  dan  $d$  merupakan konstanta. Misalkan  $ad - bc \neq 0$  maka salah satu titik kritis pada persamaan (2.10) adalah titik  $(0,0)$  serta bentuk persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda^2 - (a - d)\lambda + (ad - bc) = 0\tag{2.11}$$

dimana  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah akar-akar karakteristiknya.

#### 2.1.4 Sistem Dinamik

Sistem dinamik umumnya dipahami sebagai masalah dunia nyata yang telah direpresentasikan secara matematis menggunakan persamaan diferensial. Persamaan ini mengandung parameter yang saling berkaitan, dan perubahan parameternya akan mempengaruhi seberapa stabil kesetimbangan dari titik tersebut.

Sistem yang umumnya bergantung pada waktu dinyatakan bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t),\end{aligned}\tag{2.12}$$

dengan  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  dan  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  merupakan fungsi umum dari  $x_i = 1, 2, \dots, n$  dan waktu  $t$ . Oleh karena itu, bentuk kesetimbangan akan terjadi apabila  $\dot{x}_i = 0$  dimana  $i = 1, 2, \dots, n$ . Titik keseimbangan  $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  akan memenuhi berikut ini

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) &= 0 \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_n, t) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) &= 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

dimana  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$  (Strongatz, 1994).

Berikut diberikan definisi titik kesetimbangan serta kestabilan dari sistem (2.12).

**Definisi 3.** (Wiggins, 2003)

Titik  $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  merupakan titik kesetimbangan dari sistem (2.12) apabila  $\dot{x}_i = 0$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Contoh menentukan titik kesetimbangan:

Pada persamaan (2.1) dengan memisalkan  $\frac{dx}{dt} = 0$ ,  $\frac{dy}{dt} = 0$ , dan  $\frac{dz}{dt} = 0$  maka persamaan tersebut menjadi :

$$0 = rx(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - E_1 x(t) \tag{2.14}$$

$$0 = \delta x(t)y(t) - by(t) - dy(t) - E_2 y(t) \tag{2.15}$$

$$0 = \theta x(t)z(t) - cz(t) + dy(t) - E_3 z(t) \tag{2.16}$$

Dengan memisalkan  $z(t) = 0$ . Kemudian, disubstitusikan ke persamaan (2.16), maka diperoleh:

$$0 = \theta x(t)z(t) - cz(t) + dy(t) - E_3 z(t)$$

$$0 = \theta x(t)(0) - c(0) + dy(t) - E_3(0)$$

$$0 = dy(t)$$

Didapatkan bahwa  $z(t)$  bergantung pada  $y(t)$ . Kemudian, ketika  $y(t) = 0$  lalu disubstitusikan ke persamaan (2.15) maka :

$$0 = \delta x(t)y(t) - by(t) - dy(t) - E_2 y(t)$$

$$0 = \delta x(t)(0) - b(0) - d(0) - E_2(0)$$

Diperoleh  $z(t) = 0$  dan  $y(t) = 0$ , kemudian substitusikan ke persamaan (2.14), maka diperoleh:

$$0 = rx(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \alpha x(t)(0) - \beta x(t)(0) - E_1 x(t)$$

$$0 = rx(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right) - E_1 x(t)$$

$$rx(t)K - rx(t)^2 - E_1 x(t)K = 0$$

Sehingga didapatkan nilai  $z(t) = 0$ ,  $y(t) = 0$ ,  $x(t) = 0$  dan  $x(t) = x(t) = \frac{K(r-E_1)}{r}$ . Maka didapatkan titik kesetimbangan pertama yaitu  $(x_1(t)^*, y_1(t)^*, z_1(t)^*) = (0,0,0)$  dan titik kesetimbangan kedua  $(x_2(t)^*, y_2(t)^*, z_2(t)^*) = \left( \frac{K(r-E_1)}{r}, 0,0 \right)$ .

**Definisi 4.** (Wiggins, 1990)

Berikut diberikan definisi titik keseimbangan  $x^* \in \mathbb{R}^n$  dari sistem (2.12):

1. Titik kesetimbangan dikatakan **stabil**, jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  ada bilangan  $\delta > 0$  sedemikian sehingga setiap solusi  $x(t)$  yang memenuhi  $|x(t_0) - x^*| < \delta$  berlaku  $|x(t) - x^*| < \varepsilon$  untuk semua  $t > t_0$  dimana  $t_0 \in \mathbb{R}$ .
2. Dikatakan **stabil asimtotik lokal**, jika titik kesetimbangan  $x^* \in \mathbb{R}^n$  stabil dan ada  $a_0 > 0$  sehingga untuk setiap solusi  $x(t)$  yang memenuhi  $|x(t_0) - x^*| < a_0$  maka berlaku  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$ .
3. Dikatakan **tidak stabil**, jika titik kesetimbangan  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tidak memenuhi kondisi keduanya yaitu tidak stabil ataupun stabil asimtotik.

**Tabel 2.3** Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Dinamik (Boyce ,2009)

No	Nilai Eigen	Kestabilan	Jenis
	$\lambda_i, \lambda_j \in \mathbf{R}$		
1.	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	<i>Node/Simpul</i>
2.	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	<i>Node/Simpul</i>
3.	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Tidak Stabil	<i>Saddle/Pelana</i>
4.	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	<i>Node/Simpul</i>
5.	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	<i>Node/Simpul</i>
	$\lambda_{1,2} = a + bi \in \mathbf{C}$		
6.	$a > 0$	Tidak Stabil	Spiral
7.	$a < 0$	Stabil Asimtotik	Spiral
8.	$a = 0$	Stabil	Terpusat

### 2.1.5 Linierisasi PDB Autonomous

Persamaan Diferensial Biasa yang digunakan dalam penelitian ini bersifat nonlinier, maka harus dilinierisasi terlebih dahulu. Linearisasi adalah metode untuk mendekati persamaan diferensial linier dengan persamaan diferensial nonlinier dalam memahami masalah diferensial nonlinier (Boyce, 1999). Model akan dilinierisasi menggunakan matrik Jacobian.

**Definisi 5.** (Thomas, 2014)

Misalkan terdapat  $\dot{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  yang merupakan titik kesetimbangan pada sistem (2.12), maka bentuk matriks Jacobi di titik  $\dot{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  dari sistem tersebut yaitu

$$J(f(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

### 2.1.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Berikut diberikan definisi secara formal dari nilai Eigen dan vektor Eigen.

**Definisi 6.** Misalkan  $A$  adalah sebuah matriks yang berukuran  $n \times n$ , maka vektor bukan nol  $x$  berada di dalam  $R^n$  sehingga vektor  $x$  disebut sebagai vektor Eigen dari  $A$  jika  $Ax$  merupakan sebuah kelipatan skalar dari  $x$  yaitu

$$Ax = \lambda x \quad (2.17)$$

untuk sebarang skalar  $\lambda \in R$ . Dimana  $\lambda$  adalah suatu nilai eigen atau nilai karakteristik dari matriks  $A$  sedangkan suatu vektor eigen dari  $A$  yang berkaitan dengan  $\lambda$  disebut dengan  $x$  (Anton dan Rorres, 2004).

Untuk menentukan nilai eigen matriks  $A$  berukuran  $n \times n$  dapat ditulis sebagai berikut

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (2.18)$$

Agar  $\lambda$  menjadi bentuk nilai eigen, maka paling tidak terdapat satu solusi yang tidak nol dari persamaan (2.18). Namun, persamaan (2.18) tidak memiliki solusi sama dengan nol jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.19)$$

sehingga persamaan (2.23) merupakan persamaan karakteristik dari matriks  $A$  dan skalar yang memenuhi pada persamaan karakteristiknya disebut nilai eigen.

Diberikan contoh dalam menentukan nilai Eigen dan vektor Eigen dari matrik  $A$  dengan ordo  $n \times n$  sebagai berikut:

### Contoh 2.1

Diberikan matriks

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} x$$

atau

$$\dot{x} = Ax$$

Maka dapat juga ditulis persamaan diferensialnya adalah

$$\frac{dx_1}{dt} = -4x_1 - 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 11x_2$$

**Langkah I.** mencari nilai Eigen

Nilai eigen akan diperoleh dengan menghitung

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Kemudian substitusi nilai  $A$  dan juga matriks identitas, sehingga menjadi

$$\left| \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

Lalu kalikan  $\lambda$  dengan  $I$ , maka

$$\left| \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Kemudian, operasi pengurangan dilakukan pada matriks sehingga diperoleh

$$\left| \begin{pmatrix} -4 - \lambda & -2 \\ 3 & -11 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Selanjutnya, hitung determinan matriks tersebut dan menghasilkan persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + 15\lambda + 50 = 0$$

Lakukan pemfaktoran, sehingga didapatkan nilai eigen yaitu

$$\lambda_1 = -5 \text{ dan } \lambda_2 = -10$$

**Langkah II.** mencari vektor eigen

Vektor eigen akan didapatkan dari perhitungan

$$\left( \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} - \lambda_1 \mathbf{I} \right) v^{(1)} = 0$$

Nilai eigen pertama didapatkan  $\lambda_1 = -5$ , lalu substitusi nilai  $\lambda_1 \mathbf{I}$  diperoleh

$$\left( \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Kemudian selesaikan operasi pengurangan pada matriks tersebut sehingga

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Kalikan kedua matriks sehingga didapatkan

$$v_1 - 2v_2 = 0 \text{ dan } 3v_1 - 6v_2 = 0$$

$$v_1 = 2v_2$$

Missal  $v_2 = h$  maka  $v_1 = 2h$ , sehingga diperoleh vektor eigen yaitu

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} h$$

Sama halnya, vektor eigen kedua akan didapatkan dari perhitungan

$$\left( \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} - \lambda_2 \mathbf{I} \right) v^{(2)} = 0$$

dengan  $\lambda_2 = -10$  lalu substitusi nilai  $\lambda_2 \mathbf{I}$  diperoleh

$$\left( \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Lakukan operasi pengurangan pada matriks tersebut diperoleh

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Kalikan kedua matriks maka didapatkan

$$6v_1 - 2v_2 = 0 \text{ dan } 3v_1 - v_2 = 0$$

$$v_2 = 3v_1$$

Missal  $v_1 = h$  maka  $v_2 = 3h$ , sehingga diperoleh vektor eigen yaitu

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 3h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} h$$

## 2.2 Keseimbangan Ekosistem dalam Alqur'an

Ekosistem merupakan suatu bentuk sistem interaksi atau hubungan yang terjadi antara makhluk hidup dengan lingkungan. Sedangkan keseimbangan ekosistem merupakan kondisi dimana suatu ekosistem dapat berjalan seimbang dan harmonis. Sehingga, pada makhluk yang diciptakan oleh Allah SWT tidak ada satupun yang tidak mengalami ketidakseimbangan.

Lingkungan akan dirugikan jika terjadi ketidakseimbangan di Bumi. Kerusakan lingkungan tersebut disebabkan oleh tindakan manusia karena manusia tidak bisa menjaga keseimbangan lingkungan. Seperti yang tersurat dalam Alqur'an Surat Al-Qasas ayat 77.

وَابْتَغِ فِيمَا آتَاكَ اللَّهُ الدَّارَ الْآخِرَةَ وَلَا تَنْسَ نَصِيبَكَ مِنَ الدُّنْيَا وَأَحْسِنْ كَمَا أَحْسَنَ اللَّهُ  
إِلَيْكَ ۗ وَلَا تَبْغِ الْفُسَادَ فِي الْأَرْضِ ۗ إِنَّ اللَّهَ لَا يُحِبُّ الْمُفْسِدِينَ (٧٧)

*”Dan carilah pada apa yang Telah dianugerahkan Allah kepadamu (kebahagiaan) negeri akhirat, dan janganlah kamu melupakan bahagianmu di dunia. Berbuat baiklah (kepada orang lain) sebagaimana Allah telah berbuat baik kepadamu dan janganlah kamu berbuat kerusakan di bumi. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang berbuat kerusakan”.*

Menurut Imam At-Thabari (1999) dalam tafsirnya dijelaskan bahwa Allah Berfirman “Wahai Qarun, jangan sekali kali kamu banggakan hartamu kepada

kaum-kaummu, akan tetapi carilah kebaikan untuk diakhirat dari harta yang Allah anugerahkan kepadamu dalam ketaatan kepadanya didunia”. Kemudian, jangan sia-siakan keberuntunganmu itu, hendaklah kamu melakukan sesuatu yang bisa menyelamatkanmu dari hukuman Allah di akhirat nanti. Maksudnya adalah janganlah kamu tinggalkan beramal untuk Allah selama didunia.

Jadi, dari ayat di atas menjelaskan bahwa berbuat baiklah kepada sesama dan orang lain, sebagaimana Allah sendiri yang telah berbuat baik kepada Qarun dengan melapangkan rezekinya, maka berbuat baiklah dengan cara kamu melakukan infaq atau sedekah. Dan berhentilah untuk membuat kerusakan di muka bumi ini atau melakukan sesuatu yang memang jelas dilarang oleh Allah SWT kepada kalian seperti menganiaya orang kaum sendiri, sesungguhnya Allah membenci hal yang demikian.

### **2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung**

Didiharyono (2021) menganalisis tentang stabilitas model dua *predator* dan satu *prey* dengan pemanenan dalam populasi pengelolaan perikanan. Variabel model yang digunakan pada penelitian Didiharyono (2021) terdiri dari dua variabel *predator* yakni  $y(t)$  sebagai ikan Mujair,  $z(t)$  sebagai ikan Nila dan satu *prey* yakni  $x(t)$  sebagai ikan Butini. Model yang digunakan pada penelitian Didiharyono (2021) ini bersifat nonlinier. Interaksi yang terjadi yaitu kedua *predator* memangsa populasi *prey*. Diasumsikan penambahan populasi *prey* diawal naik secara logistik. Selain itu terdapat tingkat konversi pada *predator* pertama sebesar  $d$ . Di sisi lain, karna *prey* adalah makanan utama bagi *predator*, maka ketika tidak adanya populasi *prey* akan mengakibatkan terjadinya kematian

alami pada kedua *predator*. Sehingga, perlulah adanya campur tangan manusia berupa pemanenan konstan.

Model yang digunakan pada penelitian Didiharyono (2021) ini bersifat non linier. Metode penyelesaian yang dilakukan yaitu analisis dinamik dimana titik ekuilibrium positif dari model dianalisis melalui model linierisasi dan stabilitas Routh Hurwitz. Analisis model dilakukan penentuan nilai Eigen dengan cara menggunakan analisis kestabilan. Berdasarkan nilai Eigen yang diperoleh Didiharyono (2021) dapat dikelompokkan kondisi kestabilan titik tetapnya kedalam bentuk tabel. Dari hasil analisis, terdapat kondisi tertentu yang membuat titik kesetimbangan positif stabil asimtotik serta dari penelitian tersebut menghasilkan model yang sesuai dimana populasi *predator-prey* dalam ekosistem dapat dikelola dengan baik.

Sehingga metode ini cocok untuk analisis pada masalah penelitian ini, serta kedalamannya pada penelitian ini yaitu dilakukan analisis stabilitas dua *predator* dan satu *prey* dalam pengelolaan perikanan serta dilakukan simulasi dari adanya perubahan nilai parameter. Maka tepat sekali jika metode penelitian ini merujuk pada Didiharyono (2021), akan tetapi model yang digunakan pada penelitian ini adalah hasil memodifikasi kembali model dari penelitian Didiharyono (2021).

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

#### **3.1 Jenis Penelitian**

Jenis penelitian yang digunakan yaitu penelitian studi pustaka atau kepustakaan. Metode kepustakaan merupakan suatu bentuk pendekatan penelitian kualitatif.

#### **3.2 Pra Penelitian**

Tahapan yang perlu dilakukan sebelum melakukan penelitian yaitu melakukan perencanaan terdiri dari menelaah model Didiharyono (2021) kemudian mengkaji lebih mendalam isi yang ada pada penelitian Didiharyono (2021). Selanjutnya, membedah setiap variabel model yang ada pada penelitian Didiharyono (2021) sehingga dapat mengetahui interaksi apa saja yang terjadi didalamnya.

#### **3.3 Tahapan Penelitian**

Berikut ini langkah-langkah dalam menyelesaikan penelitian:

1. Melakukan analisis modifikasi model dua *predator* dan satu *prey* pada pengelolaan perikanan dengan pemanenan populasi  $x(t), y(t)$  dan  $z(t)$  dengan penambahan  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ , yaitu
  - a. Model yang didapat dari jurnal dimodifikasi menjadi model baru dengan mendefinisikan interaksi yang terjadi.
  - b. Data yang dibutuhkan pada model sesuai pada penelitian Didiharyono (2021).

2. Menganalisis kestabilan model dua *predator* dan satu *prey* pada pengelolaan perikanan dengan pemanenan populasi  $x(t), y(t)$  dan  $z(t)$  dengan penambahan  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ , yaitu
  - a. Menentukan titik tetap
  - b. Menjalankan model melalui proses linierisasi dengan matriks Jacobian.
  - c. Menentukan nilai Eigen dari matriks Jacobian.
  - d. Dianalisis kestabilannya sesuai Tabel 2.3.
3. Melakukan hasil simulasi beserta interpretasi dari model dua *predator* dan satu *prey* pada pengelolaan perikanan dengan pemanenan populasi  $x(t), y(t)$  dan  $z(t)$  dengan penambahan  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ , yaitu
  - a. Melakukan simulasi terhadap model dua *predator* dan satu *prey* pada pengelolaan perikanan dengan pemanenan populasi  $x(t), y(t)$  dan  $z(t)$  dengan penambahan  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ .
  - b. Menginterpretasi hasil simulasi terhadap model dua *predator* dan satu *prey* pada pengelolaan perikanan dengan pemanenan populasi  $x(t), y(t)$  dan  $z(t)$  dengan penambahan  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ .

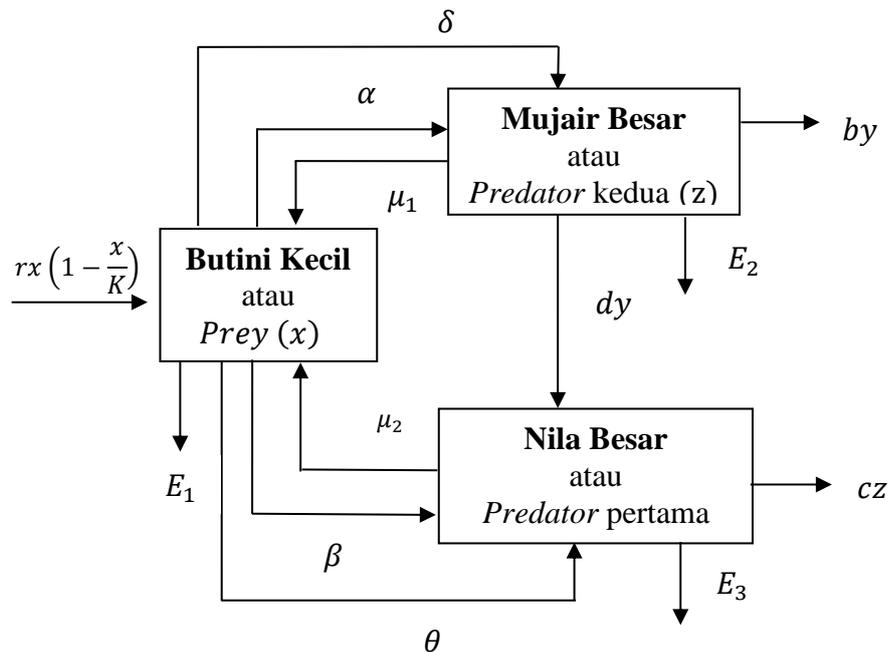
## BAB IV PEMBAHASAN

### 4.1 Analisis Modifikasi Model Dua *Predator* dan Satu *Prey*

Model interaksi terjadi pada tiga spesies atau disebut model rantai makanan tiga spesies, dimana terdapat dua *predator* dan satu *prey* yang saling memakan satu sama lain dalam lingkup perairan. Model matematika dua *predator* dan satu *prey* ini diambil dari jurnal penelitian Didiharyono (2021), dengan menganggap  $x(t)$  sebagai banyaknya populasi *prey* dengan ukuran kecil pada waktu  $t$ ,  $y(t)$  sebagai banyaknya populasi *predator* pertama dengan ukuran besar pada waktu  $t$ , dan  $z(t)$  sebagai banyaknya populasi *predator* kedua dengan ukuran besar pada waktu  $t$ . Sehingga dari model didiharyono (2021) pada persamaan (2.1) akan dimodifikasi kembali dengan memberikan asumsi tambahan dalam model yaitu

1. Terjadinya interaksi predator *pertama* dan *prey* dapat menyebabkan adanya tingkat konsumsi predator *pertama* ukuran berapapun oleh *prey* sebesar  $(\mu_1 x(t)y(t))$ , karena *prey* sifatnya herbivora sehingga ada kemungkinan untuk memangsa populasi lain ketika *prey* tersebut berkelompok.
2. Dari interaksi predator *kedua* dan *prey* juga menyebabkan adanya tingkat konsumsi predator *kedua* ukuran berapapun oleh *prey* sebesar  $(\mu_2 x(t)z(t))$ .

Berikut ini diberikan diagram kompartemen model dua *predator* dan satu *prey* pada penelitian ini yaitu sebagai berikut:



**Gambar 4.1** Diagram Kompartemen dengan Penambahan Parameter  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ .

Setelah mengkaji lebih mendalam terkait model dua *predator* dan satu *prey* dengan pengembangan asumsi di atas, maka model yang menjadi fokus pada penelitian ini yaitu sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - E_1 x(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \delta x(t)y(t) - by(t) - dy(t) - E_2 y(t) - \mu_1 x(t)y(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = \theta x(t)z(t) - cz(t) + dy(t) - E_3 z(t) - \mu_2 x(t)z(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

Dimana:

$\mu_1$  : Tingkat konsumsi *predator* pertama ukuran berapapun oleh *prey*

$\mu_2$  : Tingkat konsumsi *predator* kedua ukuran berapapun oleh *prey*

**Tabel 2.4** Nilai Parameter Asumsi.

Parameter	Nilai	Sumber	Satuan
$\mu_1$	0,1	Asumsi	$\frac{1}{\text{ekor} \cdot \text{waktu}}$
$\mu_2$	0,1	Asumsi	$\frac{1}{\text{ekor} \cdot \text{waktu}}$

Berdasarkan hasil percobaan, rentang parameter asumsi berada pada nilai  $0 \leq \mu_1 \leq 0,4$  dan  $0 \leq \mu_2 \leq 0,4$ . Sehingga pada penelitian ini diambil nilai parameter 0.1 karena pada nilai asumsi tersebut telah menghasilkan nilai yang bagus. Dalam hal ini, karena kecil sekali kemungkinan *prey* memakan *predator* pertama dan *predator* kedua.

## 4.2 Analisis Kestabilan Model Dua Predator dan Satu Prey

Berikut tahapan-tahapan dalam menentukan kestabilan yaitu mencari titik tetap terlebih dahulu kemudian melakukan linierisasi, dan yang terakhir menentukan kestabilan pada setiap titik tetapnya. Sehingga pada tahapan pertama ini yaitu menentukan titik tetap terlebih dahulu. Menurut definisi 3, titik tetap dari persamaan (4.1) akan diperoleh dengan cara  $\frac{dx(t)}{dt} = 0$ ,  $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ , dan  $\frac{dz(t)}{dt} = 0$ . Sehingga bentuk persamaan (4.1) menjadi

$$0 = rx(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - E_1 x(t) \quad (4.4a)$$

$$0 = \delta x(t)y(t) - by(t) - dy(t) - E_2 y(t) - \mu_1 x(t)y(t) \quad (4.4b)$$

$$0 = \theta x(t)z(t) - cz(t) + dy(t) - E_3 z(t) - \mu_2 x(t)z(t) \quad (4.4c)$$

### 4.2.1 Analisis Titik Tetap

#### 1. Pada titik tetap pertama yaitu $TE_1 = (x_1, y_1, z_1)$

Akan ditentukan  $(x_1^*, y_1^*, z_1^*)$  untuk titik tetap pertama, maka substitusikan terlebih dahulu ketika  $x(t) = 0$  pada persamaan (4.4b) sehingga persamaannya menjadi

$$0 = \delta x(t)y(t) - by(t) - dy(t) - E_2 y(t) - \mu_1 x(t)y(t) \quad (4.5)$$

Sehingga dari persamaan (4.5) akan didapatkan  $y(t) = 0$ . Selanjutnya substitusikan  $x(t) = 0$  dan  $y(t) = 0$  ke persamaan (4.4c) maka diperoleh

$$0 = 0 - cz(t) + 0 - 0 - 0$$

Atau dapat ditulis

$$0 = -cz(t) \quad (4.6)$$

Dari persamaan (4.6) diperoleh

$$z(t) = 0$$

Sehingga didapatkan titik tetap pertama yang memenuhi persamaan (4.4) adalah  $TE_1^* = (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ . Dapat dikatakan bahwa ketika tidak adanya populasi *prey*, maka kedua *predator* tidak bisa bertahan hidup.

## 2. Pada titik tetap kedua $TE_2 = (x_2, y_2, z_2)$

Akan ditentukan  $(x_2^*, y_2^*, z_2^*)$  untuk titik tetap kedua, substitusikan terlebih dahulu ketika  $z(t) = 0$  pada persamaan (4.4c) maka:

$$\begin{aligned} 0 &= \theta x(t)z(t) - cz(t) + dy(t) - E_3 z(t) - \mu_2 x(t)z(t) \\ 0 &= 0 - 0 + dy(t) - 0 - 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dari persamaan (4.7) diperoleh

$$y(t) = 0$$

Kemudian substitusikan  $y(t) = 0$  dan  $z(t) = 0$  pada persamaan (4.4a) maka:

$$\begin{aligned} 0 &= rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - E_1 x(t) \\ 0 &= rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - 0 - 0 - E_1 x(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Persamaan (4.8) dapat ditulis

$$0 = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - E_1 x(t) \quad (4.9)$$

Bentuk sederhana dari persamaan (4.9) yaitu

$$rx(t)K - rx(t)^2 - E_1 x(t)K = 0 \quad (4.10)$$

Dari persamaan (4.10) diperoleh

$$x(t) = \frac{K(r - E_1)}{r} \quad (4.11)$$

Sehingga didapatkan titik tetap kedua yang memenuhi persamaan (4.4) adalah  $TE_2^* = (x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{K(r-E_1)}{r}, 0, 0\right)$ . Dari titik tetap yang diperoleh maka dapat diketahui bahwa *prey* akan tetap dapat eksis meskipun tidak ada populasi *predator* pertama dan *predator* kedua, dengan syarat laju pertumbuhan intrinsik *prey* harus lebih besar dari laju upaya pemanenan *prey* ( $r > E_1$ ).

### 3. Pada titik tetap ketiga $TE_3 = (x_3, y_3, z_3)$

Akan ditentukan  $(x_3^*, y_3^*, z_3^*)$  untuk titik tetap ketiga, maka substitusikan terlebih dahulu  $y(t) = 0$  pada persamaan (4.4c) maka:

$$\begin{aligned} 0 &= \theta x(t)z(t) - cz(t) + dy(t) - E_3z(t) - \mu_2x(t)z(t) \\ 0 &= \theta x(t)z(t) - cz(t) + 0 - E_3z(t) - \mu_2x(t)z(t) \\ 0 &= (\theta - \mu_2)x(t)z(t) - (c + E_3)z(t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Persamaan (4.12) dapat ditulis

$$-(\theta - \mu_2)x(t)z(t) = -(c + E_3)z(t) \quad (4.13)$$

Dari persamaan (4.13) diperoleh

$$x(t) = \frac{c + E_3}{\theta - \mu_2}$$

Diperoleh  $x(t) = \frac{c+E_3}{\theta-\mu_2}$ , kemudian mencari  $z(t)$  dengan mensubstitusi  $x(t)$

pada persamaan (4.4a) maka

$$0 = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - E_1x(t)$$

$$\begin{aligned}
0 &= r \left( \frac{c + E_3}{\theta - \mu_2} \right) \left( 1 - \frac{\left( \frac{c + E_3}{\theta - \mu_2} \right)}{K} \right) - \alpha \left( \frac{c + E_3}{\theta - \mu_2} \right) y(t) \\
&\quad - \beta \left( \frac{c + E_3}{\theta - \mu_2} \right) z(t) - E_1 \left( \frac{c + E_3}{\theta - \mu_2} \right) \\
0 &= \frac{r(c + E_3)}{\theta - \mu_2} - \frac{r(c + E_3)^2}{K(\theta - \mu_2)^2} - \frac{\alpha(c + E_3)}{\theta - \mu_2} y(t) - \frac{\beta(c + E_3)}{\theta - \mu_2} z(t) \\
&\quad - \frac{E_1(c + E_3)}{\theta - \mu_2} \\
0 &= \frac{rK(c + E_3)(\theta - \mu_2) - r(c + E_3)^2 - \alpha K(c + E_3)(\theta - \mu_2)y(t)}{K(\theta - \mu_2)^2} \\
&\quad - \frac{\beta K(c + E_3)(\theta - \mu_2)z(t) - E_1 K(c + E_3)(\theta - \mu_2)}{K(\theta - \mu_2)^2} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.14) menjadi

$$\begin{aligned}
0 &= -(c + E_3)(Ky(t)\alpha\theta - Ky(t)\alpha\mu_2 + Kz(t)\beta\theta - Kz(t)\beta\mu_2 - Kr\theta \\
&\quad + Kr\mu_2 + K\theta E_1 - KE_1\mu_2 + cr + rE_3) \tag{4.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow & (c + E_3)(K\beta\theta - K\beta\mu_2)z(t) \\
&= -(c + E_3)(Ky(t)\alpha\theta - Ky(t)\alpha\mu_2 - Kr\theta + Kr\mu_2 + K\theta E_1 \\
&\quad - KE_1\mu_2 + cr + rE_3) \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Kemudian pada persamaan (4.16) didapatkan  $z(t)$  yaitu

$$z(t) = - \frac{Ky(t)\alpha\theta - Ky(t)\alpha\mu_2 - Kr\theta + Kr\mu_2 + K\theta E_1 - KE_1\mu_2 + cr + rE_3}{K\beta\theta - K\beta\mu_2}$$

Atau dapat ditulis

$$\begin{aligned}
z(t) &= - \frac{(\alpha\theta - \alpha\mu_2)Ky(t) - Kr\theta + Kr\mu_2 + K\theta E_1 - KE_1\mu_2 + cr + rE_3}{K\beta(\theta - \mu_2)} \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Kemudian substitusi  $y(t) = 0$  pada persamaan (4.17) maka diperoleh

$$z(t) = \frac{Kr\theta - Kr\mu_2 - K\theta E_1 + KE_1\mu_2 - cr - rE_3}{K\beta(\theta - \mu_2)}$$

Sehingga didapatkan titik tetap ketiga yang memenuhi persamaan (4.4) adalah

$$\begin{aligned} TE_3^* &= (x_3, y_3, z_3) \\ &= \left( \frac{c + E_3}{\theta - \mu_2}, 0, \frac{Kr\theta - Kr\mu_2 - K\theta E_1 + KE_1\mu_2 - cr - rE_3}{K\beta(\theta - \mu_2)} \right) \end{aligned}$$

Dari titik tetap ketiga maka dapat diketahui bahwa *prey* dan *predator* kedua tetap dapat eksis meskipun tidak ada populasi *predator* pertama, dengan syarat laju *predator* kedua memangsa *prey* harus lebih besar dan tidak boleh sama dengan laju tingkat konsumsi *prey* terhadap *predator* kedua ukuran berapapun ( $\theta > \mu_2$ ) dan ( $\theta \neq \mu_2$ ).

#### 4. Pada titik tetap keempat $TE_4 = (x_4, y_4, z_4)$

Ketika  $x(t) \neq 0, y(t) \neq 0$ , dan  $z(t) \neq 0$  maka akan ditentukan  $(x_4^*, y_4^*, z_4^*)$  untuk titik tetap keempat, dan  $x(t)$  akan didapatkan pada persamaan (4.4b) yaitu

$$\begin{aligned} 0 &= \delta x(t)y(t) - by(t) - dy(t) - E_2y(t) - \mu_1x(t)y(t) \\ 0 &= (\delta - \mu_1)x(t)y(t) - (b + d + E_2)y(t) \\ \Leftrightarrow &-(\delta - \mu_1)x(t)y(t) = -(b + d + E_2)y(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Dari persamaan (4.18) akan diperoleh

$$x(t) = \frac{b + d + E_2}{\delta - \mu_1}$$

Kemudian, untuk mencari  $z(t)$  substitusikan  $x(t) = \frac{b+d+E_2}{\delta-\mu_1}$  pada persamaan (4.4a) maka

$$\begin{aligned}
0 &= rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - E_1 x(t) \\
0 &= r \left(\frac{b+d+E_2}{\delta-\mu_1}\right) \left(1 - \frac{\left(\frac{b+d+E_2}{\delta-\mu_1}\right)}{K}\right) - \alpha \left(\frac{b+d+E_2}{\delta-\mu_1}\right) y(t) \\
&\quad - \beta \left(\frac{b+d+E_2}{\delta-\mu_1}\right) z(t) - E_1 \left(\frac{b+d+E_2}{\delta-\mu_1}\right) \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.19) dapat ditulis

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{r(b+d+E_2)}{\delta-\mu_1} - \frac{r(b+d+E_2)^2}{(\delta-\mu_1)^2 K} - \frac{\alpha(b+d+E_2)y(t)}{\delta-\mu_1} \\
&\quad - \frac{\beta(b+d+E_2)z(t)}{\delta-\mu_1} - \frac{E_1(b+d+E_2)}{\delta-\mu_1} \\
0 &= \frac{Kr(b+d+E_2)(\delta-\mu_1) - Kr(b+d+E_2)^2}{(\delta-\mu_1)^2 K} \\
&\quad - \frac{Ky(t)\alpha(b+d+E_2)(\delta-\mu_1) - Kz(t)\beta(b+d+E_2)(\delta-\mu_1)}{(\delta-\mu_1)^2 K} \\
&\quad - \frac{+E_1(b+d+E_2)(\delta-\mu_1)}{(\delta-\mu_1)^2 K} \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Pada persamaan (4.20), kalikan penyebut dengan 0 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &= -(b+d+E_2)(Ky(t)\alpha\delta - Ky(t)\alpha\mu_1 + Kz(t)\beta\delta - Kz(t)\beta\mu_1 \\
&\quad - K\delta r + K\delta E_1 + Kr\mu_1 - KE_1\mu_1 + br + dr \\
&\quad + rE_2) \\
0 &= -(b+d+E_2)(K\beta\delta - K\beta\mu_1)z(t) \\
&\quad - (b+d+E_2)(Ky(t)\alpha\delta - Ky(t)\alpha\mu_1 - K\delta r + K\delta E_1 \\
&\quad + Kr\mu_1 - KE_1\mu_1 + br + dr + rE_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (b + d + E_2)(K\beta\delta - K\beta\mu_1)z(t) \\
&\quad = -(b + d + E_2)(Ky(t)\alpha\delta - Ky(t)\alpha\mu_1 - K\delta r + K\delta E_1 \\
&\quad \quad + Kr\mu_1 - KE_1\mu_1 + br + dr + rE_2) \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.21) diperoleh

$$\begin{aligned}
&z(t) \\
&= - \frac{Ky(t)\alpha\delta - Ky(t)\alpha\mu_1 - K\delta r + K\delta E_1 + Kr\mu_1 - KE_1\mu_1 + br + dr + rE_2}{K\beta\delta - K\beta\mu_1}
\end{aligned}$$

Atau dapat ditulis

$$\begin{aligned}
&z(t) \\
&= \frac{Ky(t)\alpha\mu_1 - Ky(t)\alpha\delta + (K\delta r - K\delta E_1 - Kr\mu_1 + KE_1\mu_1 - br - dr - rE_2)}{K\beta(\delta - \mu_1)}
\end{aligned}$$

dengan

$$\rho = (K\delta r - K\delta E_1 - Kr\mu_1 + KE_1\mu_1 - br - dr - rE_2)$$

Sehingga diperoleh

$$z(t) = \frac{Ky(t)\alpha\mu_1 - Ky(t)\alpha\delta + \rho}{K\beta(\delta - \mu_1)} \tag{4.22}$$

Dari hasil  $z(t)$  pada persamaan (4.2) diperoleh bahwa  $z(t)$  masih bergantung pada  $y(t)$ , maka akan dicari  $y(t)$  terlebih dahulu dengan cara mensubstitusi  $x(t)$  dan  $z(t)$  pada persamaan (4.4c), sehingga diperoleh

$$0 = \theta x(t)z(t) - cz(t) + dy(t) - E_3z(t) - \mu_2x(t)z(t)$$

$$\begin{aligned}
& 0 \\
&= \theta \left( \frac{b+d+E_2}{\delta-\mu_1} \right) \left( \frac{Ky(t)\alpha\mu_1 - Ky(t)\alpha\delta + \rho}{K\beta(\delta-\mu_1)} \right) \\
&- c \left( \frac{Ky(t)\alpha\mu_1 - Ky(t)\alpha\delta + \rho}{K\beta(\delta-\mu_1)} \right) + dy(t) \\
&- E_3 \left( \frac{Ky(t)\alpha\mu_1 - Ky(t)\alpha\delta + \rho}{K\beta(\delta-\mu_1)} \right) \\
&- \mu_2 \left( \frac{b+d+E_2}{\delta-\mu_1} \right) \left( \frac{Ky(t)\alpha\mu_1 - Ky(t)\alpha\delta + \rho}{K\beta(\delta-\mu_1)} \right) \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.23) dijabarkan sehingga dapat ditulis

$$\begin{aligned}
& 0 \\
&= \frac{\theta Ky(t)\alpha\mu_1(b+d+E_2) - \theta Ky(t)\alpha\delta(b+d+E_2) + \theta\rho(b+d+E_2)}{K\beta(\delta-\mu_1)^2} \\
&- \frac{cKy(t)\alpha\mu_1 - cKy(t)\alpha\delta + c\rho}{K\beta(\delta-\mu_1)} + dy(t) - \frac{E_3Ky(t)\alpha\mu_1 - E_3Ky(t)\alpha\delta + E_3\rho}{K\beta(\delta-\mu_1)} \\
&- \frac{\mu_2Ky(t)\alpha\mu_1(b+d+E_2) - \mu_2Ky(t)\alpha\delta(b+d+E_2) + \mu_2(b+d+E_2)\rho}{K\beta(\delta-\mu_1)^2} \\
0 &= \frac{1}{K\beta(\delta-\mu_1)^2} (\theta Ky(t)\alpha\mu_1 b + \theta Ky(t)\alpha\mu_1 d + \theta Ky(t)\alpha\mu_1 E_2 \\
&- \theta Ky(t)\alpha\delta b - \theta Ky(t)\alpha\delta d - \theta Ky(t)\alpha\delta E_2 + \theta b\rho + \theta d\rho \\
&+ \theta E_2\rho) - \frac{1}{K\beta(\delta-\mu_1)} (cKy(t)\alpha\mu_1 - cKy(t)\alpha\delta + c\rho) \\
&+ dy(t) - \frac{1}{K\beta(\delta-\mu_1)} (E_3Ky(t)\alpha\mu_1 - E_3Ky(t)\alpha\delta + E_3\rho) \\
&- \frac{1}{K\beta(\delta-\mu_1)^2} (\mu_2Ky(t)\alpha\mu_1 b + \mu_2Ky(t)\alpha\mu_1 d \\
&+ \mu_2Ky(t)\alpha\mu_1 E_2 - \mu_2Ky(t)\alpha\delta b - \mu_2Ky(t)\alpha\delta d \\
&- \mu_2Ky(t)\alpha\delta E_2 + \mu_2 b\rho + \mu_2 d\rho + \mu_2 E_2\rho) \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Samakan penyebut pada persamaan (4.24) maka

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{1}{K\beta(\delta - \mu_1)^2} (\theta Ky(t)\alpha\mu_1 b + \theta Ky(t)\alpha\mu_1 d + \theta Ky(t)\alpha\mu_1 E_2 \\
& - \theta Ky(t)\alpha\delta b - \theta Ky(t)\alpha\delta d - \theta Ky(t)\alpha\delta E_2 + \theta b\rho + \theta d\rho \\
& + \theta E_2\rho - cKy(t)\alpha\delta\mu_1 + cKy(t)\alpha\mu_1^2 + cKy(t)\alpha\delta^2 \\
& - cKy(t)\alpha\delta\mu_1 - c\rho\delta + c\rho\mu_1 + dy(t)K\beta\delta^2 - 2dy(t)K\beta\delta\mu_1 \\
& + dy(t)K\beta\mu_1^2 - Ky(t)\alpha\delta\mu_1 + E_3Ky(t)\alpha\mu_1^2 + E_3Ky(t)\alpha\delta^2 \\
& - E_3Ky(t)\alpha\delta\mu_1 - E_3\delta\rho + E_3\mu_1\rho - \mu_2Ky(t)\alpha\mu_1 b \\
& - \mu_2Ky(t)\alpha\mu_1 d - \mu_2Ky(t)\alpha\mu_1 E_2 + \mu_2Ky(t)\alpha\delta b \\
& + \mu_2Ky(t)\alpha\delta d + \mu_2Ky(t)\alpha\delta E_2 - \mu_2b\rho - \mu_2d\rho - \mu_2E_2\rho)
\end{aligned}$$

Sehingga dapat ditulis

$$\begin{aligned}
0 = & \theta Ky(t)\alpha\mu_1 b + \theta Ky(t)\alpha\mu_1 d + \theta Ky(t)\alpha\mu_1 E_2 - \theta Ky(t)\alpha\delta b \\
& - \theta Ky(t)\alpha\delta d - \theta Ky(t)\alpha\delta E_2 + \theta b\rho + \theta d\rho + \theta E_2\rho \\
& - cKy(t)\alpha\delta\mu_1 + cKy(t)\alpha\mu_1^2 + cKy(t)\alpha\delta^2 - cKy(t)\alpha\delta\mu_1 \\
& - c\rho\delta + c\rho\mu_1 + dy(t)K\beta\delta^2 - 2dy(t)K\beta\delta\mu_1 + dy(t)K\beta\mu_1^2 \\
& - Ky(t)\alpha\delta\mu_1 + E_3Ky(t)\alpha\mu_1^2 + E_3Ky(t)\alpha\delta^2 - E_3Ky(t)\alpha\delta\mu_1 \\
& - E_3\delta\rho + E_3\mu_1\rho - \mu_2Ky(t)\alpha\mu_1 b - \mu_2Ky(t)\alpha\mu_1 d \\
& - \mu_2Ky(t)\alpha\mu_1 E_2 + \mu_2Ky(t)\alpha\delta b + \mu_2Ky(t)\alpha\delta d \\
& + \mu_2Ky(t)\alpha\delta E_2 - \mu_2b\rho - \mu_2d\rho - \mu_2E_2\rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow & -(\theta Ky(t)\alpha\mu_1 b + \theta Ky(t)\alpha\mu_1 d + \theta Ky(t)\alpha\mu_1 E_2 - \theta Ky(t)\alpha\delta b \\
& - \theta Ky(t)\alpha\delta d - \theta Ky(t)\alpha\delta E_2 - cKy(t)\alpha\delta\mu_1 + cKy(t)\alpha\mu_1^2 \\
& + cKy(t)\alpha\delta^2 - cKy(t)\alpha\delta\mu_1 + dy(t)K\beta\delta^2 - 2dy(t)K\beta\delta\mu_1 \\
& + dy(t)K\beta\mu_1^2 - Ky(t)\alpha\delta\mu_1 + E_3Ky(t)\alpha\mu_1^2 + E_3Ky(t)\alpha\delta^2 \\
& - E_3Ky(t)\alpha\delta\mu_1 - \mu_2Ky(t)\alpha\mu_1 b - \mu_2Ky(t)\alpha\mu_1 d \\
& - \mu_2Ky(t)\alpha\mu_1 E_2 + \mu_2Ky(t)\alpha\delta b + \mu_2Ky(t)\alpha\delta d \\
& + \mu_2Ky(t)\alpha\delta E_2) \\
& = (b\theta - b\mu_2 - c\delta + c\mu_1 + d\theta - d\mu_2 - \delta E_3 + \theta E_2 - E_2\mu_2 \\
& + E_3\mu_1)\rho \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.25) menjadi

$$\begin{aligned}
& (-\theta K\alpha\mu_1 b - \theta K\alpha\mu_1 d - \theta K\alpha\mu_1 E_2 + \theta K\alpha\delta b + \theta K\alpha\delta d + \theta K\alpha\delta E_2 + cK\alpha\delta\mu_1 \\
& - cK\alpha\delta^2 + cK\alpha\delta\mu_1 - dK\beta\delta^2 + 2dK\beta\delta\mu_1 - dK\beta\mu_1^2 \\
& - E_3K\alpha\mu_1^2 - E_3K\alpha\delta^2 + E_3K\alpha\delta\mu_1 + \mu_2K\alpha\mu_1 b + \mu_2K\alpha\mu_1 d \\
& + \mu_2K\alpha\mu_1 E_2 - \mu_2K\alpha\delta b - \mu_2K\alpha\delta d - \mu_2K\alpha\delta E_2)y(t) \\
& = (b\theta - b\mu_2 - c\delta + c\mu_1 + d\theta - d\mu_2 - \delta E_3 + \theta E_2 - E_2\mu_2 \\
& + E_3\mu_1)\rho
\end{aligned}$$

Sehingga dari penjabaran persamaan (4.26) akan diperoleh

$$y(t) = \frac{(b\theta - b\mu_2 - c\delta + c\mu_1 + d\theta - d\mu_2 - \delta E_3 + \theta E_2 - E_2\mu_2 + E_3\mu_1)\rho}{K\tau(\delta - \mu_1)}$$

dengan

$$\gamma = (b\theta - b\mu_2 - c\delta + c\mu_1 + d\theta - d\mu_2 - \delta E_3 + \theta E_2 - E_2\mu_2 + E_3\mu_1)$$

$$\begin{aligned}
\tau & = (\alpha b\theta - \alpha b\mu_2 - \alpha c\delta + \alpha c\mu_1 + \alpha d\theta - \alpha d\mu_2 - \alpha\delta E_3 + \alpha\theta E_2 - \alpha E_2\mu_2 \\
& + \alpha E_3\mu_1 - \beta d\delta + \beta d\mu_1)
\end{aligned}$$

Maka dapat diperoleh

$$y(t) = \frac{\gamma\rho}{K\tau(\delta - \mu_1)}$$

Lalu substitusikan  $y(t) = \frac{\gamma\rho}{K\tau(\delta - \mu_1)}$  pada persamaan (4.22) maka diperoleh

$$z(t) = \frac{d\rho}{K\tau} \quad (4.27)$$

Sehingga didapatkan titik tetap keempat yang memenuhi persamaan (4.4) adalah

$$TE_4^* = (x_4, y_4, z_4) = \left( \frac{b + d + E_2}{\delta - \mu_1}, \frac{\gamma\rho}{K\tau(\delta - \mu_1)}, \frac{d\rho}{K\tau} \right)$$

Dari titik tetap keempat yang diperoleh maka dapat diketahui bahwa ketiga populasi yaitu *prey*, *predator* pertama dan *predator* kedua dapat hidup secara berdampingan, dengan syarat laju *predator* pertama memangsa *prey* harus lebih besar dari tingkat konsumsi *prey* terhadap *predator* pertama ukuran berapapun ( $\delta > \mu_1$ ) dan ( $\delta \neq \mu_1$ ).

Berdasarkan analisis titik-titik tetap, dapat disimpulkan bahwa terdapat empat titik tetap dengan syarat eksistensi sebagai berikut:

- a.  $TE_1^*(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ ,
- b.  $TE_2^*(x^*, y^*, z^*) = \left( \frac{K(r-E_1)}{r}, 0, 0 \right)$  dengan syarat eksistensi  $r > E_1$ .
- c.  $TE_3^*(x^*, y^*, z^*) = \left( \frac{c+E_3}{\theta-\mu_2}, 0, \frac{Kr\theta-Kr\mu_2-K\theta E_1+KE_1\mu_2-cr-rE_3}{K\beta(\theta-\mu_2)} \right)$  dengan syarat eksistensi  $\theta > \mu_2$  dan  $\theta \neq \mu_2$ .
- d.  $TE_4^*(x^*, y^*, z^*) = \left( \frac{b+d+E_2}{\delta-\mu_1}, \frac{\gamma\rho}{K\tau(\delta-\mu_1)}, \frac{d\rho}{K\tau} \right)$  dengan syarat eksistensi  $\delta > \mu_1$  dan  $\delta \neq \mu_1$ .

Setelah mendapatkan titik tetap, langkah selanjutnya yaitu melakukan tahap linierisasi pada model.

#### 4.2.2 Linierisasi

Linierisasi merupakan proses mentransformasikan persamaan diferensial nonlinier menjadi persamaan diferensial linier yang dilakukan dengan menggunakan metode deret Taylor disekitar masing-masing titik tetapnya.

Dari model dua *predator* dan satu *prey* pada persamaan (4.2) akan dimisalkan bahwa

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \alpha x(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - E_1 x(t) \\ g(x, y, z) &= \delta x(t)y(t) - by(t) - dy(t) - E_2 y(t) - \mu_1 y(t) \\ h(x, y, z) &= \theta x(t)z(t) - cz(t) + dy(t) - E_3 z(t) - \mu_2 z(t) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Persamaan (4.28) dapat menjadi bentuk

$$\dot{x}(t) = f(x, y, z)$$

$$\dot{y}(t) = g(x, y, z)$$

$$\dot{z}(t) = h(x, y, z)$$

Proses linierisasi di sekitar titik tetap  $(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$  dimana  $i = 1, 2, 3, 4$  dengan deret Taylor sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)(x(t) - x^*) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)(y(t) - y^*) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)(z(t) - z^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= g(x_i^*, y_i^*, z_i^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)(x(t) - x^*) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial y}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)(y(t) - y^*) + \frac{\partial g}{\partial z}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)(z(t) - z^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= h(x_i^*, y_i^*, z_i^*) + \frac{\partial h}{\partial x}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)(x(t) - x^*) \\ &\quad + \frac{\partial h}{\partial y}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)(y(t) - y^*) + \frac{\partial h}{\partial z}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)(z(t) - z^*) \end{aligned}$$

dimana  $x(t) = x(t) - x^*$ ,  $y(t) = y(t) - y^*$ ,  $z(t) = z(t) - z^*$ . Keadaan ini akan selalu berlaku  $f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) = g(x_i^*, y_i^*, z_i^*) = h(x_i^*, y_i^*, z_i^*) = 0, i = 1, 2, 3, 4$  sehingga persamaanya menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)x(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)y(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)z(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)x(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)y(t) + \frac{\partial g}{\partial z}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \frac{\partial h}{\partial x}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)x(t) + \frac{\partial h}{\partial y}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)y(t) + \frac{\partial h}{\partial z}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)z(t) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Setelah dilinierisasi kemudian akan dihitung nilai Eigen dari setiap titik tetap melalui matriks Jacobian. Sehingga pada sistem (4.29) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} \bigg|_{(x_i^*, y_i^*, z_i^*)}$$

Kemudian turunkan setiap persamaan (4.28) terhadap  $x, y$  dan  $z$  sebagai berikut

1. Terhadap  $x(t)$

$$\frac{\partial f}{\partial x(t)} = r - \frac{2rx(t)}{K} - \alpha y(t) - \beta z(t) - E_1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x(t)} = \delta y(t) - \mu_1 y(t)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x(t)} = \theta z(t) - \mu_2 z(t)$$

2. Terhadap  $y(t)$

$$\frac{\partial f}{\partial y(t)} = -\alpha x(t)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y(t)} = \delta x(t) - \mu_1 x(t) - b - d - E_2$$

$$\frac{\partial h}{\partial y(t)} = d$$

3. Terhadap  $z(t)$

$$\frac{\partial f}{\partial z(t)} = -\beta x(t)$$

$$\frac{\partial g}{\partial z(t)} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial z(t)} = \theta x(t) - \mu_2 x(t) - c - E_3 - \mu_2$$

Maka didapatkan bentuk matriks jacobiannya ( $A$ ) yaitu

$$A = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

dengan

$$J_{11} = r - \frac{2rx(t)}{K} - \alpha y(t) - \beta z(t) - E_1$$

$$J_{12} = -\alpha x(t)$$

$$J_{13} = -\beta x(t)$$

$$J_{21} = \delta y(t) - \mu_1 y(t)$$

$$J_{22} = \delta x(t) - \mu_1 x(t) - b - d - E_2$$

$$J_{23} = 0$$

$$J_{31} = \theta z(t) - \mu_2 z(t)$$

$$J_{32} = d$$

$$J_{33} = \theta x(t) - \mu_2 x(t) - c - E_3$$

Persamaan (4.30) adalah bentuk matriks Jacobian untuk model dua *predator* dan satu *prey*.

### 4.2.3 Analisis Kestabilan Pada Titik Tetap

#### 1. Pada titik tetap pertama yaitu $TE_1 = (x_1, y_1, z_1)$

Matriks Jacobi dari titik tetap pertama diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} r - E_1 & 0 & 0 \\ 0 & -b - d - E_2 & 0 \\ 0 & d & -c - E_3 \end{bmatrix}$$

Nilai Eigen akan dicari dengan

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} r - E_1 & 0 & 0 \\ 0 & -b - d - E_2 & 0 \\ 0 & d & -c - E_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (4.31)$$

Dari persamaan (4.31) dapat ditulis

$$\left| \begin{bmatrix} r - E_1 & 0 & 0 \\ 0 & -b - d - E_2 & 0 \\ 0 & d & -c - E_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{vmatrix} r - E_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -b - d - E_2 - \lambda & 0 \\ 0 & d & -c - E_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga untuk titik tetap pertama  $TE_1$  diperoleh nilai Eigen yaitu

$$\lambda_1 = r - E_1 \quad \lambda_2 = -b - d - E_2 \quad \lambda_3 = -c - E_3$$

Dengan mensubstitusi nilai parameter, maka didapatkan nilai Eigen yaitu

$$\lambda_1 = 1,5 \quad \lambda_2 = -1,4 \quad \lambda_3 = -1,5$$

Berdasarkan hasil nilai Eigen tersebut disimpulkan bahwa titik tetap pertama  $TE_1 = (0, 0, 0)$  tidak stabil karena terdapat nilai Eigen yang bernilai positif pada  $\lambda_1$ .

## 2. Pada titik tetap kedua $TE_2 = (x_2, y_2, z_2)$

Matriks Jacobi dari titik tetap kedua diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{r - E_1}{r}\right) - r & -\frac{\alpha K(r - E_1)}{r} & -\frac{\beta K(r - E_1)}{r} \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & d & J_{33} \end{bmatrix}$$

dengan

$$J_{22} = \frac{\delta K(r - E_1)}{r} - \frac{\mu_1 K(r - E_1)}{r} - b - d - E_2$$

$$J_{33} = \frac{\theta K(r - E_1)}{r} - \frac{\mu_2 K(r - E_1)}{r} - c - E_3$$

Nilai Eigen akan dicari dengan

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{r - E_1}{r}\right) - r & -\frac{\alpha K(r - E_1)}{r} & -\frac{\beta K(r - E_1)}{r} \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & d & J_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (4.32)$$

Dari persamaan (4.32) dapat ditulis

$$\left| \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{r - E_1}{r}\right) - r & -\frac{\alpha K(r - E_1)}{r} & -\frac{\beta K(r - E_1)}{r} \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & d & J_{33} \end{bmatrix} \right|$$

$$- \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{vmatrix} r - r + E_1 - r - \lambda & -\frac{\alpha K(r - E_1)}{r} & -\frac{\beta K(r - E_1)}{r} \\ 0 & J_{22} - \lambda & 0 \\ 0 & d & J_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga untuk titik tetap kedua  $TE_2$  diperoleh nilai Eigen yaitu

$$\lambda_1 = -r + E_1$$

$$\lambda_2 = J_{22}$$

$$= \frac{\delta K(r - E_1)}{r} - \frac{\mu_1 K(r - E_1)}{r} - b - d - E_2$$

$$= \frac{\delta Kr - \delta KE_1 - \mu_1 Kr + \mu_1 KE_1}{r} - b - d - E_2$$

$$= \frac{\delta Kr - \delta KE_1 - \mu_1 Kr + \mu_1 KE_1 - br - dr - E_2 r}{r}$$

$$= \frac{(\delta r - \delta E_1 - \mu_1 r + \mu_1 E_1)K - br - dr - E_2 r}{r}$$

$$\lambda_3 = \frac{\theta K(r - E_1)}{r} - \frac{\mu_2 K(r - E_1)}{r} - c - E_3$$

$$= \frac{\theta Kr - \theta KE_1 - \mu_2 Kr + \mu_2 KE_1}{r} - c - E_3$$

$$= \frac{\theta Kr - \theta KE_1 - \mu_2 Kr + \mu_2 KE_1 - cr - E_3 r}{r}$$

$$= \frac{K(\theta r + \mu_2 E_1) - \theta K E_1 - \mu_2 K r - c r - E_3 r}{r}$$

Dengan mensubstitusi nilai parameter, maka didapatkan nilai Eigen yaitu

$$\lambda_1 = -1,5 \quad \lambda_2 = 373,5 \quad \lambda_3 = -373,6$$

Berdasarkan hasil nilai Eigen tersebut dikatakan bahwa  $TE_2 = \left(\frac{K(r-E_1)}{r}, 0, 0\right)$

tidak stabil karena terdapat nilai Eigen yang bernilai positif pada  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$ .

### 3. Pada titik tetap ketiga $TE_3 = (x_3, y_3, z_3)$

Matriks Jacobi dari titik tetap ketiga diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

dengan

$$J_{11} = r - \frac{2r(c + E_3)}{(\theta - \mu_2)K} - \frac{Kr\theta - Kr\mu_2 - K\theta E_1 + KE_1\mu_1 - cr - rE_3}{(\theta - \mu_2)K} - E_1$$

$$J_{12} = -\frac{\alpha(c + E_3)}{(\theta - \mu_2)}$$

$$J_{13} = -\frac{\beta(c + E_3)}{(\theta - \mu_2)}$$

$$J_{21} = 0$$

$$J_{22} = \frac{\delta(c + E_3)}{(\theta - \mu_2)} - \frac{\mu_1(c + E_3)}{(\theta - \mu_2)} - b - d - E_2$$

$$J_{23} = 0$$

$$J_{31} = \frac{\theta(Kr\theta - Kr\mu_2 - K\theta E_1 + KE_1\mu_2 - cr - rE_3)}{K\beta(\theta - \mu_2)}$$

$$- \frac{\mu_2(Kr\theta - Kr\mu_2 - K\theta E_1 + KE_1\mu_2 - cr - rE_3)}{K\beta(\theta - \mu_2)}$$

$$J_{32} = d$$

$$J_{33} = \frac{\theta(c + E_3)}{(\theta - \mu_2)} - \frac{\mu_2(c + E_3)}{(\theta - \mu_2)} - c - E_3$$

Dengan mensubstitusi nilai parameter, sehingga didapatkan

$$A = \begin{bmatrix} -0,006 & -1,5 & -1,875 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 1,1952 & 0,3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Nilai Eigen akan dicari dengan

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} -0,006 & -1,5 & -1,875 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 1,1952 & 0,3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (4.33)$$

Dari persamaan (4.33) dapat ditulis

$$\left| \begin{bmatrix} -0,006 & -1,5 & -1,875 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 1,1952 & 0,3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Maka diperoleh

$$\begin{vmatrix} -0,006 - \lambda & -1,5 & -1,875 \\ 0 & 0,1 - \lambda & 0 \\ 1,1952 & 0,3 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga untuk titik tetap ketiga  $TE_3$  diperoleh nilai Eigen yaitu

$$\lambda_1 = -0,003 + 1,49699398796388i$$

$$\lambda_2 = 0,1$$

$$\lambda_3 = -0,003 + 1,49699398796388i$$

Menghitung persamaan karakteristik pada titik tetap ketiga sangat rumit sehingga digunakan substitusi nilai parameter. Berdasarkan hasil nilai eigen yang diperoleh disimpulkan bahwa pada titik tetap ketiga yaitu  $TE_3 = (3,75, 0, 2,988)$  menunjukkan kondisi tidak stabil, karena terdapat nilai eigen positif pada  $\lambda_2$ . Sehingga dengan alasan yang sama dapat dikatakan

bahwa populasi *prey*, *predator* pertama, *predator* kedua tidak dapat hidup berdampingan yang akan membuat kepunahan di antara spesies tersebut.

#### 4. Pada titik tetap keempat $TE_4 = (x_4, y_4, z_4)$

Matriks Jacobi dari titik tetap keempat diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

dengan

$$J_{11} = r - \frac{2r(b+d+E_2)}{(\delta-\mu_1)K} - \frac{\alpha\sigma\omega}{K\rho(\delta-\mu_1)} - \frac{\beta d\sigma}{K\rho} - E_1$$

$$J_{12} = -\frac{\alpha(b+d+E_2)}{\delta-\mu_1}$$

$$J_{13} = -\frac{\beta(b+d+E_2)}{\delta-\mu_1}$$

$$J_{21} = \frac{\delta\sigma\omega}{K\rho(\delta-\mu_1)} - \frac{\mu_1\sigma\omega}{K\rho(\delta-\mu_1)}$$

$$J_{22} = \frac{\delta(b+d+E_2)}{\delta-\mu_1} - \frac{\mu_1(b+d+E_2)}{\delta-\mu_1} - b - d - E_2$$

$$J_{23} = 0$$

$$J_{31} = -\frac{\theta d\sigma}{K\rho} - \frac{\mu_2 d\sigma}{K\rho}$$

$$J_{32} = d$$

$$J_{33} = \frac{\theta(b+d+E_2)}{\delta-\mu_1} - \frac{\mu_2(b+d+E_2)}{\delta-\mu_1} - c - E_3$$

Dengan mensubstitusi nilai parameter, sehingga didapatkan

$$A = \begin{bmatrix} -0,0056 & -1,4 & -1,75 \\ 0,3146 & 0 & 0 \\ 0,9438 & 0,3 & -0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Nilai Eigen akan dicari dengan

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -0,0056 & -1,4 & -1,75 \\ 0,3146 & 0 & 0 \\ 0,9438 & 0,3 & -0,1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \quad (4.34)$$

Dari persamaan (4.34) dapat ditulis

$$\left| \begin{bmatrix} -0,0056 & -1,4 & -1,75 \\ 0,3146 & 0 & 0 \\ 0,9438 & 0,3 & -0,1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Maka diperoleh

$$\begin{vmatrix} -0,0056 - \lambda & -1,4 & -1,75 \\ 0,146 & 0 - \lambda & 0 \\ 0,9438 & 0,3 & -0,1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga untuk titik tetap keempat  $TE_4$  diperoleh nilai Eigen yaitu

$$\lambda_1 = -0,00279999999583650 + 1,44642737796296i$$

$$\lambda_2 = -0,00279999999583650 - 1,44642737796296i$$

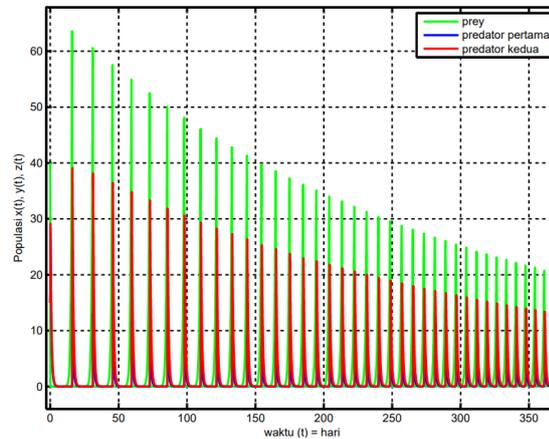
$$\lambda_3 = -0,1$$

Menghitung persamaan karakteristik pada titik tetap keempat sangat rumit sehingga digunakan substitusi nilai parameter. Berdasarkan hasil nilai Eigen tersebut dikatakan bahwa  $TE_4 = (3,5, 0,7865263158, 2,359578947)$  menunjukkan kondisi Stabil Asimtotik karena semua nilai eigen yang didapatkan bernilai negatif. Sehingga dapat dikatakan bahwa populasi *prey*, *predator* pertama, *predator* kedua dapat hidup secara berdampingan.

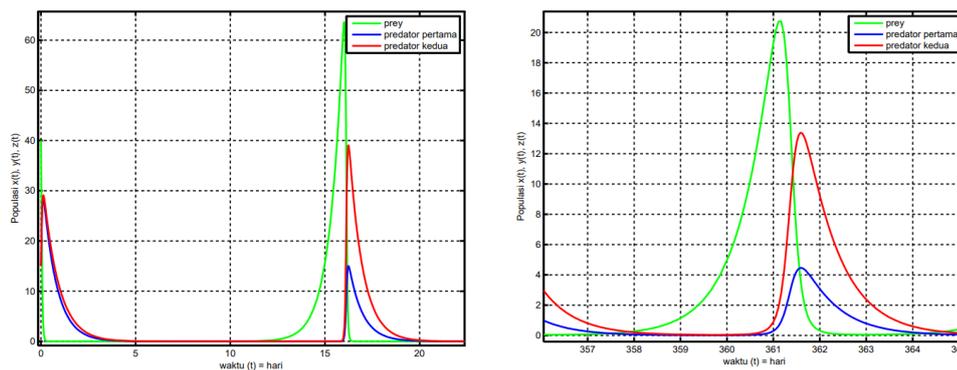
### 4.3 Simulasi dan Interpretasi Grafik

Pada bagian ini akan digambarkan tentang keseimbangan antara populasi *prey*, *predator* pertama dan *predator* kedua. Pada bagian pertama diberikan nilai parameter  $r = 1,6$ ,  $K = 1000$ ,  $\alpha = 0,4$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\delta = 0,5$ ,  $\theta = 0,5$ ,  $d = 0,3$ ,

$b = 0,8$ ,  $c = 1,3$ ,  $\mu_1 = 0,1$ ,  $\mu_2 = 0,1$ ,  $E_1 = 0,1$ ,  $E_2 = 0,3$ ,  $E_3 = 0,2$  dan diambil nilai awal  $X(0) = 40$ ,  $Y(0) = 15$ ,  $Z(0) = 15$ . Pada kasus ini, simulasi model hanya dilakukan pada  $TE_4$  sehingga didapatkan hasil sebagai berikut:



**Gambar 4.2** Dinamika Lintasan untuk Populasi *Prey*, *Predator* Pertama dan *Predator* Kedua Terhadap Waktu Yaitu  $t \in [0, 365]$



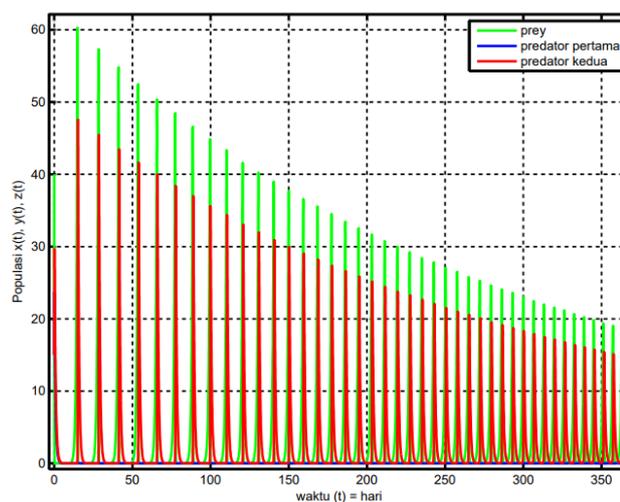
**Gambar 4.3** Osilasi Sesuai Gambar 4.2

Berdasarkan grafik hasil simulasi pada Gambar 4.2 dan Gambar 4.3 dapat diketahui bahwa dalam satu tahun terjadi 37 osilasi, dari populasi *prey* dengan nilai awal 40 ekor mengalami kenaikan yang cukup drastis pada hari ke-12 yaitu mencapai suatu titik 63,5. Akan tetapi, kenaikan *prey* tersebut menyebabkan populasi *predator* pertama dan *predator* kedua dengan nilai awal sebesar 15 ekor kemudian mengalami kenaikan tepat di hari dimana *prey* memuncak dengan selang beberapa jam masing-masing menuju ke suatu titik 15,2 dan 39.

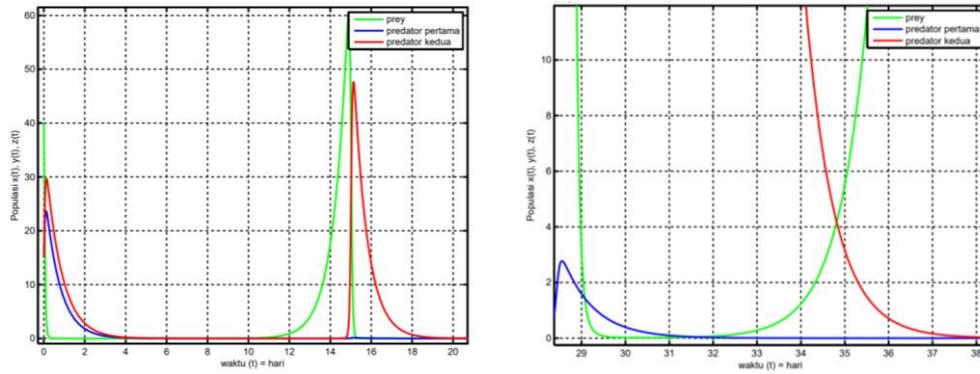
Kenaikan *predator* pertama dan *predator* kedua yang akhirnya menyebabkan *prey* kembali menurun ke suatu titik 0,003. Sehingga dari penurunan *prey* tersebut menyebabkan *predator* pertama dan *predator* kedua juga mengalami penurunan di beberapa menit kemudian hingga masing-masing ke suatu titik 0,004 dan 0,013. Kemudian, dari penurunan *predator* tersebut, akhirnya *prey* kembali mengalami kenaikan.

Osilasi ini akan terus menerus hingga osilasi terakhir yaitu di hari ke-361 populasi *prey* menurun hingga mencapai nilai 0,05. Sehingga, pada hari yang sama maka populasi *predator* pertama dan *predator* kedua juga mengalami penurunan hingga mencapai nilai masing-masing 0,17 dan 0,16. Jadi dari hari ke hari ketiga populasi akan selalu mengalami penurunan dan kenaikan, akan tetapi tidak sampai pada kepunahan.

Selanjutnya akan dilakukan simulasi terkait batasan nilai  $\mu_1$  dan  $\mu_2$  untuk mengantisipasi terjadinya kepunahan. Pertama ketika nilai parameter  $\mu_1 > \mu_2$ .

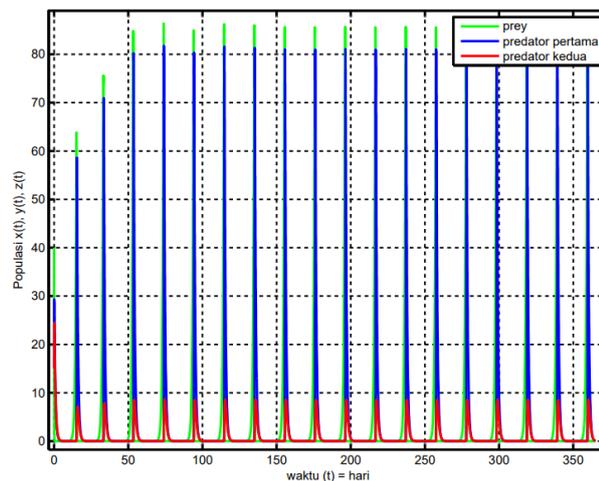


**Gambar 4.4** Dinamika Lintasan untuk Populasi *Prey*, *Predator* Pertama dan *Predator* Kedua Ketika  $\mu_1 = 0,2$

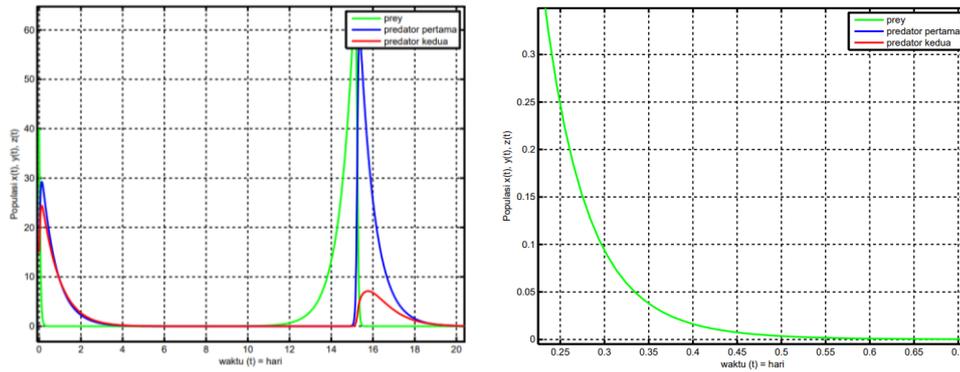


**Gambar 4.5** Osilasi Sesuai Gambar 4.4

Pada Gambar 4.4 dan Gambar 4.5 dapat diketahui bahwa ketika nilai  $\mu_1 = 0.2$  artinya tingkat konsumsi *prey* terhadap *predator* pertama sebesar 0.2 atau  $\mu_1 > \mu_2$  maka terlihat bahwa *predator* pertama cenderung akan punah pada hari ke- 33 sedangkan *predator* kedua dan *prey* tetap dapat hidup dengan osilasi yang terus menerus. Kemudian kestabilan tersebut terjadi jika  $TE_5 = (3,75, 0, 2,9988)$ . Hal ini tidak boleh dalam keseimbangan ekosistem karena terdapat satu populasi yang berada di titik nol. Selanjutnya simulasi ketika nilai parameter  $\mu_1 < \mu_2$ .

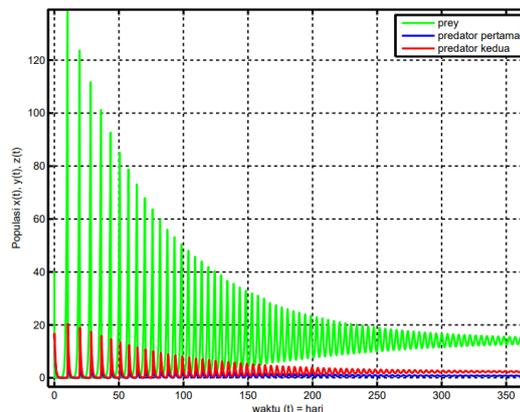


**Gambar 4.6** Dinamika Lintasan untuk Populasi *Prey*, *Predator* Pertama dan *Predator* Kedua Ketika  $\mu_2 = 0,2$

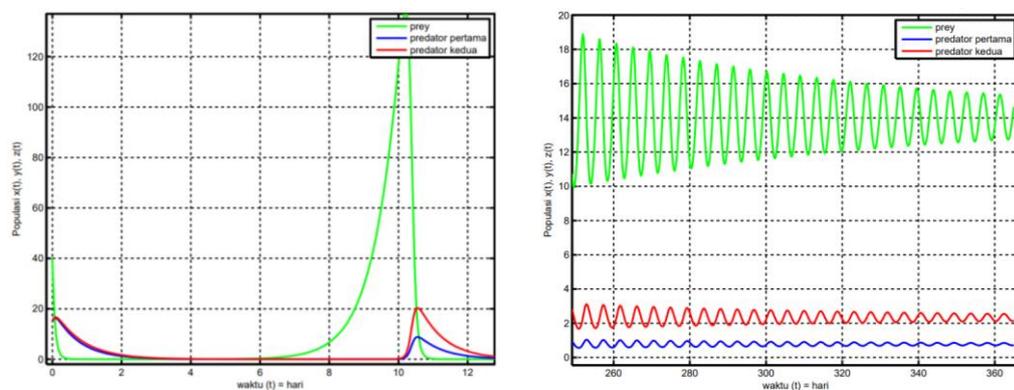


**Gambar 4.7** Osilasi Sesuai Gambar 4.6

Pada Gambar 4.6 dan Gambar 4.7 dapat diketahui bahwa ketika nilai  $\mu_2 = 0,2$  artinya tingkat konsumsi *prey* terhadap *predator* kedua sebesar 0,2 atau  $\mu_1 < \mu_2$  maka terlihat bahwa *prey* hamper akan punah dan itu terjadi pada hari pertama, sehingga kepunahan *prey* tersebut membuat *predator* pertama dan *predator* kedua juga mengalami kepunahan. Selanjutnya simulasi ketika nilai parameter  $\mu_1 = \mu_2$ .

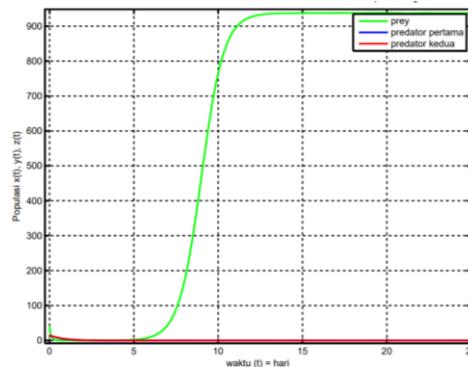


**Gambar 4.8** Dinamika Lintasan untuk Populasi *Prey*, *Predator* Pertama dan *Predator* Kedua Ketika  $\mu_1 = 0,4$  dan  $\mu_2 = 0,4$

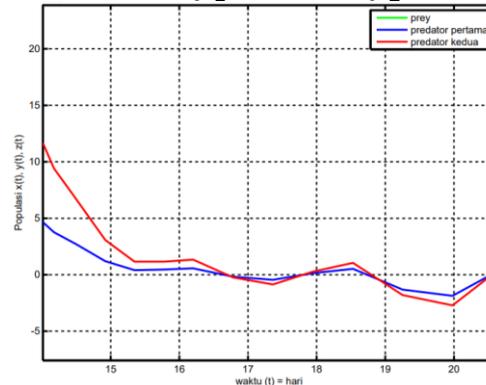


**Gambar 4.9** Osilasi Sesuai Gambar 4.8

Pada Gambar 4.8 dan Gambar 4.9 dapat diketahui bahwa ketika nilai  $\mu_1 = 0,4$  dan  $\mu_2 = 0,4$  artinya tingkat konsumsi *prey* terhadap *predator* pertama dan *predator* kedua sebesar 0,4 atau  $\mu_1 = \mu_2$ . Maka terlihat bahwa ketiga populasi tersebut dapat hidup secara berdampingan dengan banyaknya osilasi. Kemudian kestabilan tersebut terjadi pada titik tetap  $TE_6 = (14, 0,77, 2,33)$ . Selanjutnya simulasi ketika nilai parameter  $\mu_1 = \mu_2 = 0,5$ .



**Gambar 4.10** Dinamika Lintasan untuk Populasi *Prey*, *Predator* Pertama dan *Predator* Kedua Ketika  $\mu_1 = 0,5$  dan  $\mu_2 = 0,5$



**Gambar 4.11** Osilasi Sesuai Gambar 4.10

Pada Gambar 4.9 dapat diketahui bahwa ketika nilai  $\mu_1 = 0,5$  dan  $\mu_2 = 0,5$  artinya tingkat konsumsi *prey* terhadap *predator* pertama dan *predator* kedua sebesar 0,5 atau  $\mu_1 = \mu_2$ . Maka terlihat bahwa ketiga populasi tersebut tidak dapat hidup secara berdampingan yaitu pada hari ke-17 terjadi kepunahan pada *predator* pertama dan *predator* kedua. Kemudian kestabilan tersebut terjadi jika titik tetap  $TE_6 = (937,5, 0, 0)$ . Hal ini tidak boleh dalam keseimbangan ekosistem karena terdapat dua populasi yang berada di titik nol.

Maka dari analisis di atas didapatkan empat titik tetap beserta kestabilannya yaitu pertama  $TE_1^* = (0, 0, 0)$  diketahui bahwa tidak ada syarat kestabilan pada titik tetap pertama maka dikatakan tidak stabil secara umum. Kedua,  $TE_2^* = \left(\frac{K(r-E_1)}{r}, 0, 0\right)$  diketahui bahwa tidak stabil secara umum dan syarat eksistensi yaitu laju pertumbuhan intrinsik *prey* harus lebih besar dari laju pemanenan terhadap *prey*. Sehingga dalam hal ini, *prey* tetap dapat eksis meskipun tanpa adanya *predator*.

Pada titik tetap ketiga,  $TE_3^* = \left(\frac{c+E_3}{\theta-\mu_2}, 0, \frac{Kr\theta-Kr\mu_2-K\theta E_1+KE_1\mu_2-cr-rE_3}{K\beta(\theta-\mu_2)}\right)$

dengan nilai parameter yang diberikan, maka secara khusus dikatakan tidak stabil karna diperoleh nilai Eigen yang bertanda positif dan syarat eksistensinya berada di titik tetap  $TE_3 = (3,75, 0, 2,988)$ . Hal ini, terlihat bahwa *predator* pertama tidak dapat hidup berdampingan dengan *prey* dan *predator* kedua. Keempat,  $TE_4^* = \left(\frac{b+d+E_2}{\delta-\mu_1}, \frac{\gamma\rho}{K\tau(\delta-\mu_1)}, \frac{d\rho}{K\tau}\right)$  dengan nilai parameter yang diberikan, maka secara khusus dikatakan stabil Asimtotik karena diperoleh ketiga nilai Eigen kompleks dan real bertanda negatif. Sehingga populasi *prey*, *predator* pertama dan *predator* kedua dapat hidup secara berdampingan pada titik tetap  $TE_4 = (3,5, 0,7865263158, 2,359578947)$ .

Selanjutnya, dari ketiga perubahan nilai parameter  $\mu_1$  dan  $\mu_2$  di atas dapat disimpulkan bahwa tingkat konsumsi  $\mu_1$  harus tepat sama dengan  $\mu_2$  dan hanya berada pada maksimal kurang dari 0,4. Maka keseimbangan ekosistem tersebut akan tetap terjaga dan kepunahan tidak terjadi. Artinya kecil sekali kemungkinan *predator* dimakan oleh *prey*, akan tetapi kecil kemungkinan itu belum tentu tidak ada, karena apabila *prey* berinteraksi dengan *predator* secara beramai-ramai atau

berkelompok maka ada kemungkinan mujair mati karena dimakan oleh *prey*, sehingga untuk nilai  $\mu_1$  dan  $\mu_2$  tetap ada dengan batas tersebut.

Sebagaimana dalam Alqur'an surat Ar-Rum ayat 41. Allah menciptakan alam serta segala isinya dengan tepat dan sempurna. Dalam hal ini, keseimbangan ekosistem akan tetap terjaga apabila masyarakat selalu memberi perhatian yang baik terhadap lingkungan sekitar. Salah satu cara yang perlu dilakukan yaitu tidak melakukan pemanenan yang berlebihan. Sama halnya dengan hasil pada penelitian ini yaitu ada batasan nilai parameter tingkat konsumsi di dalam lingkup perairan yang harus diperhatikan, sehingga manusia dapat mengambil langkah yang harus dilakukan. Apabila hal tersebut tidak dilakukan, maka kerusakan di darat maupun di laut akan terjadi, sehingga keseimbangan ekosistem cepat atau lambat akan mengalami ketidakstabilan yang menyebabkan kepunahan pada suatu populasi.

## BAB V PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

1. Dalam penyelesaian analisis modifikasi model dua *predator* dan satu *prey* pada pengelolaan perikanan dengan pemanenan di ketiga populasi diperoleh model sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - ax(t)y(t) - \beta x(t)z(t) - E_1x(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \delta x(t)y(t) - by(t) - dy(t) - E_2y(t) - \mu_1x(t)y(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \theta x(t)z(t) - cz(t) + dy(t) - E_3z(t) - \mu_2x(t)z(t)\end{aligned}$$

2. Dari model tersebut didapatkan empat titik tetap yaitu pada titik tetap pertama  $TE_1 = (0, 0, 0)$  tanpa ada syarat. Titik tetap kedua  $TE_2 = \left(\frac{K(r-E_1)}{r}, 0, 0\right)$  dengan syarat eksistensi secara umum yaitu laju pertumbuhan intrinsik *prey* harus lebih besar dan tidak boleh sama dengan laju upaya pemanenan *prey*. Titik tetap ketiga dengan nilai parameter yang diberikan, maka secara khusus akan eksis pada titik tetap  $TE_3 = (3,75, 0, 2,988)$ . Titik tetap keempat dengan nilai parameter yang diberikan, maka secara khusus akan eksis pada titik tetap  $TE_4 = (3,5, 0,7865263158, 2,359578947)$ . Dimana kestabilan tersebut terdapat pada titik tetap keempat yang ditunjukkan dengan nilai eigen dari ketiganya yang merupakan bilangan kompleks dan real bertanda negatif yang dapat dinyatakan bahwa titik tetap tersebut dikatakan stabil Asimtotik artinya ketiga populasi yaitu populasi *prey*, *predator* pertama dan *predator* kedua dapat hidup secara berdampingan dan tidak terjadi kepunahan pada spesies.

3. Dari simulasi dan hasil interpretasi didapatkan bahwa ketiga populasi tersebut ketika  $\mu_1 > \mu_2$  maka populasi *predator* pertama akan punah. Akan tetapi, ketika  $\mu_1 < \mu_2$  maka ketiga populasi tersebut tidak dapat hidup secara berdampingan. Selanjutnya, ketika  $\mu_1 = \mu_2$  maka ketiga populasi tersebut dapat hidup secara berdampingan pada batasan yang hanya berada pada maksimal di angka 0,4.

## 5.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan analisis kestabilan dengan memodifikasi kembali model dimana ketika terdapat populasi yang mendekati nol bisa ditambahkan campur tangan manusia lagi berupa penambahan bibit atau pada populasi *prey* bisa dibagi dua artinya terdapat *prey* kecil dan *prey* besar sehingga dapat diketahui seberapa besar ukutan *prey* harus dipanen agar dinamikanya akan dapat dilihat lebih jelas lagi.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. (2007). *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Al-Qur'an* dan Terjemahannya. (2019). Kementerian Agama RI.
- Anton, H. dan Rorres, C. (2004). *Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- At-Thabari, dan Muhammad, A. J. (1999). *Jami' al-Bayan Fi Ta'wil al-Qur'an*, Beirut, Lebanon.
- Boyce, W.E, dan DiPrima, R. C. (1992). *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem. Fifth Edition*. John Wiley & Sons, Inc: New York.
- Boyce, W.E, dan DiPrima, R.C. (1999). *ODE Architect Companion*. New York: John Willey & Sons, Inc.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. United State of America: John Willey & Sons.
- Didiharyono, D. (2016). *Stability analysis of one prey two predator model with Holling type III function response and harvesting*. Journal of Math Sciences 1 (2) 50-54.
- Didiharyono, D., Toaha, S., & Kusuma, J.(2021). *Stability analysis of two predator and one prey population model with harvesting in fisheries management*. In *IOP Conference Series:Earth and Environmental Science* **921**. IOP Publishing.
- Dwaradi, H. (2011). *Analisis Model Mangsa-pemangsa Michaelis-Menten dengan Pemanenan pada Populasi Mangsa*. Skripsi tidak dipublikasikan. Bogor: Institut Pertanian Bogor.
- Fariied, D., & Trianto, M. (2020). *Stomach Content Analysis of Tilapia Fish (Oreochromis mossambicus) in Talaga Lake Waters Donggala Regency*. BIO-EDU: Jurnal Pendidikan Biologi, 5(3), 118-128. (n.d.).
- Hariyanto, S. Sumarno dan Soehardjo. (1992). *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Mamangkey, J. Jack. (2004). *Ekologi Ikan Butini (Glossogobius matanensis) di Danau Matano*. (n.d.).
- Pamuntjak, R, J,S. (1990). *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: ITB.

- Pratikno, W.B., & Sunarsih. (2010). *Model Dinamis Rantai Makanan Tiga Spesies*. Semarang: Vol 13
- Robinson, R.C. (2004). *An Introduction to Dynamical System Continuous and Discrete*. New Jersey: pearson Education, In.
- Ross, S.L. (1984). *Differensial Equations Third Edition*. Singapore: John Willey & Sons, Inc.
- Safitri, O., & Mardlijah, M. (2019). *Kontrol Optimum pada Model Prey-Predator dengan Pemanenan pada Ikan Prey dan Ikan Predator*. Limits: Journal of Mathematics and Its Applications, 16(1), 39-49.
- Shihab. M. Quraish. (2003). Tafsir al-Misbah, Pesan, Kesan, dan Keserasian al-Qur'an, vol 11, Jakarta; Lentera Hati.
- Strogatz, S.H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics. Biology, Chemistry and Engeeneering*. Addison-wesley Publishing Company, Canada.
- Thomas, G.B. (2014) *Thomas's Calculus. Early Transcendentals, Thirteenth Edition*. Pearson Education: USA.
- Toaha, S. (2013). *Pemodelan Matematika dalam Dinamika Populasi. Dua Satu Press: Makassar*.
- Toaha, S. (2014). Stability analysis and optimal harvesting policy of prey-predator model with stage structure for predator. Applied Mathematical Sciences, 8(159), 7923-7934.
- Waluya, S.B. (2006). *Persamaan Diferensial* . Yogyakarta Graha Ilmu.
- Wiggins, S. (1990). Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer– Verlag, New York.
- Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. Springer-Verlag, New York.

## LAMPIRAN

### Lampiran 1. Program Maple 18 Untuk Analisis Kestabilan Disekitar Titik Tetap Model Dua *Predator* dan Satu *Prey*

```
> restart;
>
r := 1.6; b := .8; c := 1.3; alpha := .4; beta := .5; delta := .5; theta := .5; K := 1000; d
:= .3; E1 := .1; E2 := .3; E3 := .2; μ1 := 0.1; μ2 := 0.1;

> dX := r·X·(1 - (X/K)) - (alpha·Y·X) - (beta·Z·X) - (E1·X);
> dY := -b·Y + (delta·Y·X) - (d·Y) - (E2·Y) - (μ1·X·Y);
> dZ := -c·Z + (theta·Z·X) + (d·Y) - (E3·Z) - (μ2·X·Z);

> titiktetap := solve( {dX, dY, dZ}, {X, Y, Z});
>
titiktetap1 := titiktetap[1]; titiktetap2 := titiktetap[2]; titiktetap3 := titiktetap[3]; titiktetap4
:= titiktetap[4];

titiktetap1 := {X=0., Y=0., Z=0.}
titiktetap2 := {X=937.5000000, Y=0., Z=0.}
titiktetap3 := {X=3.500000000, Y=0.7865263158, Z=2.359578947}
titiktetap4 := {X=3.750000000, Y=0., Z=2.988000000}

> with(plots) : with(linalg) :
> jac := jacobian([dX, dY, dZ], [X, Y, Z]);
jac := 
$$\begin{bmatrix} 1.5 - 0.003200000000X - 0.4Y - 0.5Z & -0.4X & -0.5X \\ 0.4Y & 0.4X - 1.4 & 0 \\ 0.4Z & 0.3 & 0.4X - 1.5 \end{bmatrix}$$

> titiktetap1 := titiktetap[1];
> jac1 := subs(titiktetap1, evalm(jac));
> eigenvals(jac1);
> titiktetap2 := titiktetap[2];
> jac2 := subs(titiktetap2, evalm(jac));
> eigenvals(jac2);
> titiktetap3 := titiktetap[3];
> jac3 := subs(titiktetap3, evalm(jac));
> eigenvals(jac3);
> titiktetap4 := titiktetap[4];
> jac4 := subs(titiktetap4, evalm(jac));
> eigenvals(jac4);
```

## Lampiran 2. Program Matlab untuk Grafik Simulasi ODE45

```
function dy = cobacoba(t,y)
r=1.6;
b=0.8;
c=1.3;
t=0.4; %alpha
u=0.5; %beta
v=0.5; %delta
w=0.5; %theta
K=1000;
d=0.3;
e=0.1; %E(1)
f=0.3; %E(2)
g=0.2; %E(3)
m=0.1; %miu(1)
n=0.1; %miu(2)

dy = zeros(3,1);% a column vector

dy(1) = r * y(1) * (1 - (y(1)/K)) - t * y(1) * y(2) - u * y(1) *
y(3) - e * y(1);
dy(2) = -b * y(2) + v * y(1) * y(2) - d * y(2) - f * y(2) - m *
y(1) * y(2);
dy(3) = -c * y(3) + w * y(1) * y(3) + d * y(2) - g * y(3) - n *
y(1) * y(3);
```

### Berikut Script Untuk Memanggil:

```
clc;
clear all;
close all;

% options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-5 1e-5 1e-
5]);
[T,Y] = ode45(@cobacoba,[0 365],[40 15 15],0.01);

figure(1);
plot(T,Y(:,1),'-g',T,Y(:,2),'-b',T,Y(:,3),'-black')
xlabel('waktu (t) = hari');
ylabel('Populasi x(t), y(t), z(t)');
title('Grafik kompetisi antara ketiga populasi dengan penambahan
miu_1 dan miu_2');
legend('prey', 'predator pertama', 'predator kedua');
grid on
```

## RIWAYAT HIDUP



Eliya Nur Khayati, lahir di Kota Pasuruan pada tanggal 9 Mei 2001. Nama panggilan Eliya, saat ini tinggal di Kota Pasuruan, Jawa Timur. Anak terakhir dari empat saudara perempuan dari Bapak Nursandi dan Ibu Elis Nuryana. Pendidikan dasar yang ditempuh di SDN Pohjentrek 1 dan lulus pada tahun 2013. Setelah itu penulis melanjutkan Pendidikan ke SMPN 6 Pasuruan dan lulus pada tahun 2016, kemudian melanjutkan ke jenjang MA di MAN Kota Pasuruan dan lulus pada tahun 2019. Selanjutnya pada tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan ke jenjang perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan mengambil jurusan program studi Matematika. Selama menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang penulis aktif menjadi pengurus KOMET di UIN Malang.



**KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Eliya Nur Khayati  
NIM : 19610023  
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika  
Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Model Populasi *Predator Prey*  
dengan Pemanenan Pada Pengelolaan Perikanan  
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.  
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	21 November 2022	Konsultasi Bab I, II Matematika	1.
2.	25 November 2022	Revisi Bab I Matematika	2.
3.	29 November 2022	Konsultasi Bab I, III Matematika	3.
4.	1 Desember 2022	Revisi Bab I, III Matematika	4.
5.	9 Desember 2022	Konsultasi Bab I, II Agama	5.
6.	16 Desember 2022	Revisi Bab I, II Agama	6.
7.	26 Desember 2022	ACC untuk Seminar Proposal	7.
8.	23 Februari 2023	Konsultasi Bab IV Matematika	8.
9.	6 Maret 2023	Revisi Bab IV Matematika	9.
10.	21 Maret 2023	Konsultasi Bab IV Agama	10.
11.	12 April 2023	Revisi Bab IV Agama	11.
12.	15 Mei 2023	ACC untuk Seminar Hasil	12.
13.	1 Juni 2023	Konsultasi Bab IV Matematika	13.
14.	5 Juni 2023	Revisi Bab IV Matematika	14.
15.	13 Juni 2023	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	15.



**KEMENTERIAN AGAMA RI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI**  
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

16.	14 Juni 2023	ACC untuk Sidang Skripsi	16.
17.	23 Juni 2023	ACC Keseluruhan	17.

Malang, 23 Juni 2023

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc

NIP. 19741129 200012 2 005