

**ANALISIS DINAMIK MODEL SVEIR (*SUSCEPTIBLE-
VACCINATED-EXPOSED-INFECTED-RECOVERED*) PADA
PENYEBARAN COVID-19**

SKRIPSI

**OLEH
UMMI KHOIRIYAH
NIM. 19610088**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023**

**ANALISIS DINAMIK MODEL SVEIR (*SUSCEPTIBLE-
VACCINATED-EXPOSED-INFECTED-RECOVERED*) PADA
PENYEBARAN COVID-19**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Ummi Khoiriyah
NIM. 19610088**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023**

**ANALISIS DINAMIK MODEL SVEIR (*SUSCEPTIBLE-
VACCINATED-EXPOSED-INFECTED-RECOVERED*) PADA
PENYEBARAN COVID-19**

SKRIPSI

**Oleh
Umami Khoiriyah
NIM. 19610088**

Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji
Tanggal 12 Juni 2023

Dosen Pembimbing I



Dr. Heni Widayani, M.Si
NIDT. 19901006 20180201 2 229

Dosen Pembimbing II



Mohammad Nafic Fauhari, M.Si
NIDT. 19870218 20160801 1 056

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

**ANALISIS DINAMIK MODEL SVEIR (*SUSCEPTIBLE-
VACCINATED-EXPOSED-INFECTED-RECOVERED*) PADA
PENYEBARAN COVID-19**

SKRIPSI

Oleh
Ummi Khoiriyah
NIM. 19610088

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 19 Juni 2023

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Anggota Penguji 1 : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

Anggota Penguji 2 : Dr. Heni Widayani, M.Si

Anggota Penguji 3 : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

.....
.....
.....
.....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Ely Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ummi Khoiriyah

NIM : 19610088

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model SVEIR (*Susceptible-Vaccinated-Exposed-Infected-Recovered*) Pada Penyebaran COVID-19

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar Pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 19 Juni 2023

Yang membuat pernyataan,



Ummi Khoiriyah
NIM. 19610088

MOTO DAN PERSEMBAHAN

“If you think you can, you can”

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua, Bapak Matrawi dan Ibu Sariyati, adik saya Moh. Ali Zein, Ramdan Khadafi, dan Ummul Khoir, beserta seluruh keluarga yang telah memberikan dukungan, dan senantiasa mendo'akan kelancaran penulis serta memberikan motivasi bagi penulis agar selalu semangat menyelesaikan pendidikan. Serta diri sendiri, yang bertahan dan berjuang dalam menyelesaikan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakaatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “*Analisis Dinamik Model SVEIR (Susceptible-Vaccinated-Exposed-Infected-Recovered) Pada Penyebaran COVID-19*”. Ketertarikan penulis terhadap bagaimana matematika dapat digunakan dalam kehidupan nyata khususnya dalam bidang kesehatan menginspirasi judul proposal skripsi ini. Sholawat dan salam semoga tercurah limpahkan kepada Baginda Nabi Besar Muhammad SAW yang membawa manusia dari jalan jahilliyah menuju jalan terang benderang yaitu addinul islam.

Bimbingan dan arahan dari berbagai pihak tidak lepas dari penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih serta penghargaan setinggi-tingginya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku Ketua Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing I, yang membimbing, motivasi dan memberikan saran yang konstruktif terhadap penulisan skripsi ini.
5. M. Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II, yang juga telah membimbing serta menasehati penulis.
6. Dr. Usman Pagalay, selaku dosen penguji seminar proposal yang telah memberikan saran dan kritikan yang bermanfaat bagi penulis.
7. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si, selaku dosen penguji seminar proposal yang juga telah memberikan saran yang bermanfaat bagi penulis.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah memberikan ilmu serta arahnya.

9. Kedua orang tua serta seluruh keluarga yang pada umumnya selalu memberikan dukungan dengan ikhlas secara moral maupun material dan do'a serta motivasi sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.

10. Fakhur Razi, Azmilia, Devi, Ais dan Soulmath 19 yang sudah membantu penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.

Semoga semua yang diberikan kepada penulis, memperoleh balasan terbaik dari Allah SWT. Penulis berharap agar para pembaca dan penulis pada umumnya dapat memperoleh manfaat dari skripsi ini.

Wassalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakaatuh

Malang, 19 Juni 2023

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGANTAR.....	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN.....	v
MOTO DAN PERSEMBAHAN	vi
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR GAMBAR.....	xi
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR SIMBOL	xiii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
مستخلص البحث.....	xvii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	6
1.4 Manfaat Penelitian	6
1.5 Batasan Masalah	6
BAB II KAJIAN TEORI.....	9
2.1 Teori Pendukung	9
2.1.1 Sistem Persamaan Diferensial.....	9
2.1.2 Model SVEIR.....	11
2.1.3 Analisis Dinamik Model Matematika	20
2.1.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen.....	20
2.1.5 Titik Kesetimbangan	22
2.1.6 Linearisasi	23
2.1.7 Kriteria Routh-Hurwitz	27
2.1.8 Matriks Generasi Selanjutnya (<i>Next Generation Matrix</i>)	28
2.1.9 Bilangan Reproduksi Dasar	30
2.1.10 Analisis Sensitivitas	31
2.2 Kajian Integrasi Model SVEIR Penyebaran COVID-19 dengan Al-Qur'an dan Hadist.....	31
2.3 Kajian Model SVEIR Penyebaran COVID-19 dengan Teori Pendukung.....	33
BAB III METODE PENELITIAN	34
3.1 Jenis Penelitian.....	34
3.2 Pra Penelitian	34
3.3 Tahapan Penelitian	34
3.3.1 Melakukan Analisis Dinamik Model SVEIR.....	34
3.3.2 Melakukan Analisis Sensitivitas Pada Bilangan Reproduksi Dasar	35
3.3.3 Melakukan Simulasi Numerik Pada Model SVEIR.....	35

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	36
4.1 Analisis Dinamik.....	36
4.1.1 Titik kesetimbangan.....	36
4.1.2 Analisis Kestabilan Loka Titik Kesetimbangan.....	41
4.1.3 Bilangan Reproduksi Dasar	49
4.2 Analisis Sensitivitas R_0	51
4.3 Simulasi Numerik Pada Model SVEIR.....	54
BAB V PENUTUP.....	59
5.1 Kesimpulan	59
5.2 Saran.....	61
DAFTAR PUSTAKA	62
LAMPIRAN.....	64
RIWAYAT HIDUP	78

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram Kompartemen Model SVEIR (Resmawan, L. Y., dkk, 2002)	10
Gambar 2.2	Diagram Kompartemen Model SVEIR Termodifikasi	11
Gambar 4.1	Hasil Simulasi Menggunakan $R_0 < 1$	55
Gambar 4.2	Hasil Simulasi Menggunakan $R_0 > 1$	57

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Nilai Awal Model SVEIR	19
Tabel 2.2	Estimasi Nilai Parameter Model	19
Tabel 4.1	Nilai Indeks Sensitivitas	52

DAFTAR SIMBOL

- S : Subpopulasi individu rentan
 V : Subpopulasi individu yang divaksin
 E : Subpopulasi individu terpapar termasuk manusia terinfeksi tanpa gejala dalam masa inkubasi
 I : Subpopulasi individu terinfeksi disertai gejala klinis
 R : Subpopulasi individu yang sembuh dari COVID-19
 N : Total populasi individu hidup
 s : Proporsi subpopulasi individu rentan dibagi total populasi $\left(\frac{S}{N}\right)$
 v : Proporsi subpopulasi individu divaksin dibagi total populasi $\left(\frac{V}{N}\right)$
 e : Proporsi subpopulasi individu terpapar dibagi total populasi $\left(\frac{E}{N}\right)$
 i : Proporsi subpopulasi individu terinfeksi dibagi total populasi $\left(\frac{I}{N}\right)$
 r : Proporsi subpopulasi individu pulih dibagi total populasi $\left(\frac{R}{N}\right)$
 Π : Tingkat kelahiran alami
 μ : Laju kematian alami manusia
 η : Peluang infeksi setelah kontak antara individu yang terinfeksi dan individu rentan yang belum mendapatkan vaksinasi
 ξ_1 : Tingkat kontak antara individu yang rentan (S) dengan individu yang terpapar (E)
 ξ_2 : Tingkat kontak antara individu yang rentan (S) dengan individu yang terinfeksi disertai gejala klinis (I)
 ξ_3 : Tingkat kontak antara individu yang sudah divaksin (V) dengan individu yang terpapar (E)
 ξ_4 : Tingkat kontak antara individu yang sudah divaksin (V) dengan individu terinfeksi yang memiliki gejala klinis (I)
 ω : Tingkat penularan sesudah selesainya masa inkubasi kemudian menjadi kelas (I)
 φ : Proporsi individu rentan yang diberi vaksin
 ρ : Proporsi individu yang terinfeksi disertai gejala klinis menjadi kelas (R)
 δ : Kematian karena terinfeksi COVID-19
 γ : Probabilitas individu (I) melakukan kontak dengan individu (V)
 θ : Laju kemungkinan individu terpapar untuk sembuh secara alami
 β : Laju kemungkinan individu sembuh untuk kembali rentan.
 α : Laju vaksinasi

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	M-File Perhitungan Nilai Eigen	64
Lampiran 2	M-File Analisis Sensitivitas	64
Lampiran 4	Hasil Perhitungan Nilai Eigen Endemik.....	65
Lampiran 3	M-File Simulasi Numerik.....	74

ABSTRAK

Khoiriyah, Ummi, 2023. **Analisis Dinamik Model SVEIR (*Susceptible-Vaccinated-Exposed-Infected-Recovered*) Pada Penyebaran COVID-19**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si, (2) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata Kunci: analisis dinamik, model matematika SVEIR, analisis sensitivitas, bilangan reproduksi dasar, bebas penyakit, endemik.

Pada penelitian ini membahas mengenai analisis dinamik model SVEIR pada penyebaran COVID-19 kemudian analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar terhadap parameter dan dilanjutkan simulasi numerik. Model tersebut terdiri dari 5 subpopulasi yaitu subpopulasi individu yang rentan (S), subpopulasi individu yang sudah divaksinasi (V), subpopulasi individu terpapar termasuk individu terinfeksi tanpa gejala dalam masa inkubasi (E), subpopulasi individu terinfeksi disertai gejala klinis (I), dan subpopulasi individu yang sudah sembuh dari COVID-19 (R). Analisis dinamik dilakukan dengan menentukan titik kesetimbangan, analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan dan bilangan reproduksi dasar (R_0). Hasil analisis dinamik diperoleh dua titik kesetimbangan, titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) bersifat stabil asimtotik jika $R_0 < 1$ dan titik kesetimbangan endemik (E_1) bersifat tidak stabil asimtotik jika $R_0 > 1$. Agar mengetahui parameter yang berpengaruh terhadap bilangan reproduksi dasar dilakukan analisis sensitivitas. Hasil analisis sensitivitas diperoleh bahwa parameter α (laju vaksinasi) memiliki indeks sensitivitas negatif yang artinya dengan memperbesar nilai parameter dan parameter yang lain tetap sama maka akan memperkecil bilangan reproduksi dasar (R_0). Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa dengan memperbesar laju vaksinasi terhadap individu rentan dapat mengurangi jumlah penyebaran COVID-19. Ketika $R_0 < 1$ dengan $\alpha = 0.001$ penyebaran penyakit dapat selesai dan hilang, dan ketika $R_0 > 1$ dengan $\alpha = 0.0003$ menunjukkan bahwa penyebaran penyakit tidak dapat berhenti atau endemik.

ABSTRACT

Khoiriyah, Umami, 2023. **Dynamic Analysis of the SVEIR Model (Susceptible-Vaccinated-Exposed-Infected-Recovered) on the Spread of COVID-19.** Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Sceince and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim. Supervisor: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si, (2) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Keyword : dynamic analysis, SVEIR mathematical model, sensitivity analysis, basic reproduction number, disease-free, endemic.

This study discusses the dynamic analysis of the SVEIR model on the spread of COVID-19 then analysis sensitivity of the basic reproduction number of parameters and continues with numerical simulations. The model consists of five subpopulations namely susceptible individual subpopulation (S), vaccinated individual subpopulation (V), exposed individual subpopulation including asymptomatic infected individuals during the incubation period (E), infected individual subpopulation with clinical symptoms (I), and subpopulation of individuals who have recovered from COVID-19 (R). Dynamic analysis is carried out by determining the equilibrium point, local stability analysis of the equilibrium point and the basic reproduction number (R_0). The results of the dynamic analysis obtained two equilibrium points, the disease-free equilibrium point (E_0) is asymptotically stable if $R_0 < 1$ and the endemic equilibrium point (E_1) is asymptotically unstable if $R_0 > 1$. In order to know the parameters that affect the basic reproduction number, a sensitivity analysis was carried out. The results of the sensitivity analysis showed that the parameter α (vaccination rate) has a negative sensitivity index, which means that by increasing the value of the parameter and the other parameters remaining the same, it would reduce the basic reproduction number (R_0). The numerical simulation results show that increasing the rate of vaccination of susceptible individuals can reduce the number of cases of COVID-19. When $R_0 < 1$ with $\alpha = 0.001$ the spread of the disease can be completed and disappears, and when $R_0 > 1$ with $\alpha = 0.0003$ indicates that the spread of the disease cannot be stopped or is endemic.

مستخلص البحث

خيريه، أم، ٢٠٢٣. التحليل الديناميكي لنموذج SVEIR (حساس - ملقح - معرض - مصاب - تعافى) في انتشار كوفيد-١٩. البحث العلمي. قسم الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج. المشرفة: (١)الدكتور هيني ويدائني، الماجستير (٢) محمد نافع جوهرى، الماجستير.

الكلمات المفتاحية: التحليل الديناميكي، النموذج الرياضي SVEIR ، تحليل الحساسية ، رقم التكاثر الأساسي، الخالي من الأمراض ، المتوطن.

تناقش هذه الدراسة التحليل الديناميكي لنموذج SVEIR في انتشار كوفيد-١٩ ثم التحليل حساسية رقم الاستنساخ الأساسي للمعلمات واستمر مع المحاكاة العددية . يتكون النموذج من ٥ مجموعات سكانية فرعية ، وهي المجموعات السكانية الفردية المعرضة للإصابة (S) ، مجموعة سكانية فرعية من الأفراد الذين تم تطعيمهم (V) ، مجموعة سكانية فرعية من الأفراد المعرضين بما في ذلك الأفراد المصابون بدون أعراض في فترة الحضانة (E) ، مجموعة سكانية فرعية من الأفراد المصابين بأعراض سريرية (I) ، ومجموعات سكانية فرعية للأفراد الذين تعافوا من كوفيد-١٩ (R). يتم إجراء التحليل الديناميكي عن طريق تحديد نقطة التوازن وتحليل الاستقرار المحلي لنقطة التوازن ورقم التكاثر الأساسي (R_0). حصلت نتائج التحليل الديناميكي على نقطتي التوازن ، نقطة التوازن الخالية من المرض (E_0) يكون مستقرًا بشكل مقارب إذا كانت $R_0 < 1$ ونقطة التوازن المتوطنة (E_1) غير المستقرة بشكل المقارب إذا كانت $R_0 > 1$. من أجل معرفة المعلمات التي تؤثر على رقم التكاثر الأساسي ، تم إجراء تحليل الحساسية. أظهرت نتائج تحليل الحساسية أن المعلمة α (معدل التطعيم) لها مؤثرة حساسية سلبية ، مما يعني أنه من خلال زيادة قيمة المعلمة والمعلمات الأخرى المتشابهة، فإن رقم التكاثر الأساسي (R_0) سوف يتم تخفيضه. تظهر نتائج المحاكاة العددية أن زيادة معدل تطعيم الأفراد المعرضين للإصابة يمكن أن يقلل من عدد حالات كوفيد-١٩. عندما $R_0 < 1$ مع $\alpha = 0.001$ يمكن أن يكتمل انتشار المرض ويخسر ، و عندما $R_0 < 1$ مع $\alpha = 0.0003$ إلى أن انتشار المرض لا يمكن وقوفه أو أنه مستوطن.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyakit menular yang dikenal dengan *Coronavirus Disease 2019* (COVID-19) pertama kali muncul di Indonesia pada awal tahun 2020. Jenis virus corona baru yang dikenal dengan *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2* (SARS-CoV-2) menyebabkan penyakit menular COVID-19 (Ndairou, F., dkk, 2020). Penyakit virus corona menular tersebut memiliki ciri-ciri seperti demam, batuk kering, sakit tenggorokan, sesak napas, dan kelelahan. Melalui percikan ludah yang dihasilkan dari batuk dan bersin, virus ini dapat menyebar dari satu orang ke orang lain. Setelah membunuh ribuan orang dalam waktu relative singkat, virus ini menjadi ancaman global. Untuk mencegah penyebaran COVID-19, masyarakat dihimbau agar menaati protokol kesehatan. Untuk mencegah penyebaran COVID-19 ini hendaklah manusia melakukan ikhtiar. Perihal ikhtiar, Allah berfirman dalam Al-Qur'an surah Ar-Ra'd ayat 11 yang mengandung arti sebagai berikut:

“Sesungguhnya Allah tidak mengubah Keadaan (nasib) sesuatu kaum sehingga mereka mengubah keadaan (perilaku) yang ada pada diri mereka sendiri” (QS. Ar-Ra'd: 11)

Pentingnya ikhtiar Rasulullah SAW juga mengisyaratkan pada hadist diriwayatkan oleh Abu Hurairah Ra. Rasulullah SAW bersabda yang artinya sebagai berikut:

“Sungguh, seorang dari kalian yang memanggul kayu bakar dan dibawa dengan punggungnya lebih baik baginya daripada dia meminta kepada orang lain, baik orang lain itu memberinya atau menolaknya” (HR. Bukhari).

Untuk mengendalikan serta mencegah COVID-19 vaksin dianggap sangat penting (Yuan Liu et al., 2020). Oleh karena itu, banyak negara menjalankan program vaksin,

diantaranya Indonesia. Tujuan untuk secara aktif meningkatkan atau menimbulkan kekebalan seseorang terhadap suatu penyakit, vaksinasi adalah pemberian vaksin kepada setiap orang agar jika mereka pernah terkena penyakit, mereka tidak akan sakit atau hanya sakit ringan, dan tidak menyebarkan penyakit. Salah satu cara kita menjalankan syariat berupa ikhtiar dhohir dalam islam adalah melalui vaksinasi. Beberapa model matematika telah dirumuskan untuk mensimulasikan penyebaran COVID-19. Seperti pada penelitian (Resmawan, L. Y., dkk, 2021) membahas model perkembangan virus COVID-19 termasuk interaksi karantina. Pada penelitian ini menggunakan model SEAIQR. Model matematika penelitian (Resmawan, L. Y., dkk, 2021) dimodifikasi dengan menggabungkan kelas populasi manusia tanpa gejala yang terinfeksi dengan kelas populasi individu yang dikarantina dengan menggunakan model SVEIR dalam penelitian (Resmawan, L. Y., dkk, 2022). Ini sesuai dengan keadaan pada saat ini bahwa karantina tidak lagi diberlakukan. Sehingga pada penelitian ini, menggunakan model SVEIR.

Model matematika penelitian untuk penyebaran COVID-19 ini merujuk pada penelitian (Resmawan, L. Y., dkk, 2022) yaitu model SVEIR. Model SVEIR terbagi menjadi 5 kelas yakni *Susceptible (S)*, *Vaccinated (V)*, *Exposed (E)*, *Infected (I)*, *Recovered (R)*. Individu pada kelas *Susceptible* merupakan individu yang rentan, *Vaccinated* merupakan individu yang sudah divaksin, *Exposed* merupakan individu terpapar termasuk individu terinfeksi tanpa gejala dalam masa inkubasi, *Infected* merupakan individu terinfeksi disertai gejala klinis, dan *Recovered* merupakan individu yang sudah sembuh dari COVID-19. Jika kekebalan vaksin menurun, kelompok kelas vaksin akan terpapar. Individu yang

telah melalui dua tahap vaksinasi masuk ke dalam kelompok individu vaksin. Ketika individu dalam populasi (S) dan populasi (V) melakukan kontak dengan individu dalam populasi (E) atau dengan individu dalam populasi (I) maka COVID-19 akan terus menular. Individu yang terinfeksi dengan tidak adanya efek samping atau gejala akan melewati masa inkubasi dan masuk ke dalam populasi (I) merupakan individu dalam populasi (E). Individu dalam populasi (I) akan pulih kemudian berpindah ke populasi (R). Parameter yang digunakan pada model ini yaitu: Π sebagai tingkat kelahiran alami, μ sebagai laju kematian alami manusia, η sebagai peluang infeksi setelah kontak antara individu yang terinfeksi dan individu rentan yang belum mendapatkan vaksinasi, ξ_1 sebagai tingkat kontak antara individu yang rentan (S) dengan individu yang terpapar (E), ξ_2 sebagai tingkat kontak antara individu yang rentan (S) dengan individu yang terinfeksi disertai gejala klinis (I), ξ_3 sebagai tingkat kontak antara individu yang sudah divaksin (V) dengan individu yang terpapar (E), ξ_4 sebagai tingkat kontak antara individu yang sudah divaksin (V) dengan individu terinfeksi yang memiliki gejala klinis (I), ω sebagai tingkat penularan sesudah selesainya masa inkubasi kemudian menjadi kelas (I), φ sebagai proporsi individu rentan yang diberi vaksin, ρ sebagai proporsi individu yang terinfeksi disertai gejala klinis menjadi kelas (R), δ sebagai kematian karena terinfeksi COVID-19, γ sebagai probabilitas individu (I) melakukan kontak dengan individu (V), θ sebagai laju kemungkinan individu terpapar untuk sembuh secara alami, β sebagai laju kemungkinan individu sembuh untuk kembali rentan, α sebagai laju vaksinasi.

Penyebaran COVID-19 telah disimulasikan dengan menggunakan beberapa model matematika. Penelitian oleh (Annas et al., 2020), memanfaatkan

parameter model vaksinasi dan isolasi individu yang terinfeksi, penyebaran COVID-19 di Indonesia disimulasikan menggunakan model dinamika SEIR. Analisis model menggunakan vaksinasi dan isolasi untuk memprediksi penyebaran COVID-19 yang dapat memperlambat penyebaran dan menghasilkan stabilitas asimtotik yang stabil secara global. Selain itu, penelitian (Nikolaos, dkk, 2021) meneliti penyebaran COVID-19 dengan membandingkan kasus penularan COVID-19 sebelum vaksinasi (menggunakan model SEIR) dan setelah vaksinasi (menggunakan model SVEIR) untuk meneliti penyebaran COVID-19. Selanjutnya penelitian (Resmawan, L. Y., dkk, 2022) penelitian ini menggunakan model SVEIR yaitu *Susceptible (S)*, *Vaccinated (V)*, *Exposed (E)*, *Infected (I)*, *Recovered (R)*. Penelitian ini menghasilkan dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Analisis sensitivitas menunjukkan bahwa parameter yang paling sensitif terhadap perubahan bilangan reproduksi dasar adalah laju vaksinasi. Peningkatan laju vaksinasi menyebabkan bilangan reproduksi dasar berkurang. Sehingga ketika laju vaksinasi terhadap individu rentan meningkat, maka dapat mengurangi jumlah penyebaran COVID-19 sehingga tidak terjadi penyebaran.

Penelitian ini difokuskan pada penyebaran COVID-19 model SVEIR pada penelitian (Resmawan, L. Y., dkk, 2022) dengan memodifikasi yaitu menambah θ sebagai laju kemungkinan individu terpapar untuk sembuh secara alami, karena dianggap individu terpapar bisa sembuh secara alami, dan β sebagai laju kemungkinan individu sembuh untuk kembali rentan. Selanjutnya model SVEIR akan dianalisis menggunakan analisis dinamik dan kontribusi parameter terhadap bilangan reproduksi dasar akan dilihat pada analisis sensitivitas. Analisis

sensitivitas dilakukan pada setiap parameter agar dapat mengetahui bagaimana pengaruh parameter-parameter terhadap angka reproduksi dasar (R_0). Kemudian menggambarkan simulasi dari perhitungan analisis dinamik dan analisis sensitivitas untuk mengetahui pengaruh α yaitu laju vaksinasi terhadap penyebaran COVID-19. Nilai parameter-parameter tersebut pada penelitian ini bersumber pada data jurnal rujukan (Resmawan, L. Y., dkk, 2022).

Pada penelitian ini, model SVEIR dengan vaksinasi akan dianalisis dengan menerapkan analisis dinamik dan analisis sensitivitas juga akan menunjukkan kontribusi parameter terhadap bilangan reproduksi dasar, dan hasil analisis dinamika penyebaran COVID-19 melalui vaksinasi akan dikonfirmasi pada akhir simulasi numerik. Dengan mengetahui model dinamika penyebaran penyakit, diharapkan dapat membantu mengidentifikasi dan memahami hubungan penyebaran penyakit dengan parameter epidemiologis, mempertimbangkan tindakan yang harus dilakukan dalam pengendalian penyebaran penyakit di suatu wilayah.

1.2 Rumusan Masalah

Berikut merupakan bagaimana masalah pada penelitian ini dirumuskan sebagai hasil dari deskripsi latar belakang:

1. Bagaimana analisis dinamik model matematika pada penyebaran COVID-19 dengan menggunakan model SVEIR?
2. Bagaimana analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar terhadap parameter model?
3. Bagaimana simulasi numerik untuk dinamika penularan COVID-19 dengan menggunakan model SVEIR?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang ada, tujuan yang ingin dicapai pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui analisis dinamik model matematika pada penyebaran COVID-19 menggunakan model SVEIR.
2. Mengetahui analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar terhadap parameter model.
3. Mengetahui simulasi numerik untuk dinamika penularan COVID-19 menggunakan model SVEIR.

1.4 Manfaat Penelitian

Berikut merupakan manfaat dari penelitian ini:

1. Mampu menggunakan model SVEIR untuk mendapatkan analisis dinamik matematika tentang penyebaran COVID-19, sehingga dapat dimanfaatkan sebagai salah satu referensi untuk penelitian wabah di suatu wilayah.
2. Mampu menentukan analisis sensitivitas parameter terhadap bilangan reproduksi dasar, sehingga dapat memprediksi hasil suatu penelitian wabah.
3. Dengan menggunakan model SVEIR dapat mengetahui hasil simulasi numerik dinamika penularan COVID-19, sehingga dapat menjadi acuan strategi pengendalian COVID-19 di wilayah tertentu.

1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dari penelitian ini yaitu:

1. Model matematika pada penelitian ini menggunakan modifikasi penelitian (Resmawan, L. Y., dkk, 2022) dengan menambah θ sebagai laju

kemungkinan individu terpapar untuk sembuh secara alami, dan β sebagai laju kemungkinan individu sembuh untuk kembali rentan. Sehingga didapat model sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Pi N - \frac{(1-\varphi)\eta\xi_1 SE}{N} - \frac{(1-\varphi)\eta\xi_2 SI}{N} - \mu S - \varphi\alpha S + \beta R$$

$$\frac{dV}{dt} = \varphi\alpha S - \mu V - \frac{\gamma\xi_3 VE}{N} - \frac{\gamma\xi_4 VI}{N}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & \frac{(1-\varphi)\eta\xi_1 SE}{N} + \frac{(1-\varphi)\eta\xi_2 SI}{N} + \frac{\gamma\xi_3 VE}{N} + \frac{\gamma\xi_4 VI}{N} - \omega E - \mu E \\ & - \theta E \end{aligned}$$

$$\frac{dI}{dt} = \omega E - \rho I - \mu I - \delta I$$

$$\frac{dR}{dt} = \rho I - \mu R - \beta R + \theta E$$

dengan $S + V + E + I + R = N$. Berikut merupakan penyederhanaan model SVEIR di atas dengan melakukan nondimensional:

$$s = \frac{S}{N}, v = \frac{V}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{ds}{dt} = \Pi - (1-\varphi)\eta\xi_1 se - (1-\varphi)\eta\xi_2 si - \mu s - \varphi\alpha s + \beta r$$

$$\frac{dv}{dt} = \varphi\alpha s - \mu v - \gamma\xi_3 ve - \gamma\xi_4 vi$$

$$\frac{de}{dt} = (1-\varphi)\eta\xi_1 se + (1-\varphi)\eta\xi_2 si + \gamma\xi_3 ve + \gamma\xi_4 vi - \omega e - \mu e - \theta e$$

$$\frac{di}{dt} = \omega e - \rho i - \mu i - \delta i$$

$$\frac{dr}{dt} = \rho i - \mu r - \beta r + \theta e$$

2. Dengan diasumsikan:
 - a. Populasi (S) dimana setiap bayi baru lahir masuk ke dalam individu yang rentan merupakan satu-satunya target dari laju perekrutan kelahiran.
 - b. Tingkat kematian terdiri dari tingkat kematian alami yang difokuskan pada semua kelas populasi dan tingkat kematian yang disebabkan oleh COVID-19 yang hanya tertuju pada populasi (I).
 - c. Jika kekebalan individu kelas vaksin menurun, maka individu kelas vaksin akan terpapar.
 - d. Individu yang sudah melakukan dua kali tahapan vaksinasi termasuk dalam kelompok individu vaksin.
 - e. Ketika individu dalam populasi (S) dan populasi (V) melakukan kontak dengan individu di populasi (E) atau dengan individu di populasi (I), maka COVID-19 akan menular.
 - f. Individu dalam populasi (E) sudah mencakup individu yang terinfeksi tanpa gejala akan melewati masa inkubasi dan masuk ke dalam populasi (I).
 - g. Pemulihan akan terjadi pada populasi (I) dan akan berpindah ke populasi (R).
 - h. Kemungkinan individu yang sudah sembuh dari COVID-19 akan kembali menjadi rentan.
 - i. Individu yang terpapar (E) ada kemungkinan untuk sembuh secara alami.

BAB II KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial merupakan suatu sistem yang memuat 7 buah fungsi yang tidak jelas. Sistem persamaan diferensial biasanya muncul secara normal dalam masalah termasuk beberapa variabel bebas (misalnya x_1, x_2, \dots, x_n) dimana masing-masing merupakan sebuah fungsi dari satu variabel bebas (misalnya t) (Kartono, 2012).

Secara umum, suatu sistem n persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{2.1}$$

dimana x_1, x_2, \dots, x_n merupakan variable tak bebas dan t merupakan variable bebas, maka $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, dan turunan dari fungsi x_n terhadap t adalah $\frac{dx_n}{dt}$ (Kartono, 2012). Menurut (Boyce & DiPrima, 2000), sistem *autonomous* merupakan sistem persamaan diferensial biasa yang tidak bergantung pada variabel bebas.

Terdapat dua jenis sistem *autonomous*: sistem *autonomous* linear dan sistem *autonomous* nonlinear. Sistem *autonomous* linear memuat setidaknya 2 persamaan yang tidak mengandung perkalian di antara variabel tak bebasnya. Di

bawah ini merupakan contoh sistem *autonomous* linear.

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \omega e - \rho i - \mu i - \delta i \\ \frac{dr}{dt} = \rho i - \mu r - \beta r + \theta e \end{cases} \quad (2.2)$$

Berikut ini merupakan bentuk sistem persamaan diferensial linear dengan n fungsi yang tidak diketahui dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad (2.3)$$

Selain itu, sistem persamaan (2.3) dapat dinyatakan sebagai $\frac{dx}{dt} = Ax$

dengan A merupakan matriks yang dituliskan sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ dan } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Definisi 2.1 (Ross, 2010;5)

Persamaan diferensial biasa yang tak linear dikenal sebagai persamaan diferensial nonlinear. Apabila setidaknya satu dari kondisi berikut terpenuhi, sehingga persamaan diferensial dikatakan nonlinear:

1. Memuat variabel tak bebas dari turunan-turunannya berpangkat selain satu.
2. Pada variabel tak bebas dan atau turunan-turunannya terdapat perkalian.
3. Pada variabel tak bebas dengan turunan-turunannya terdapat fungsi transedental.

Di bawah ini adalah contoh sistem *autonomous* nonlinear,

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Pi N - \frac{(1-\varphi)\eta S(\xi_1 E + \xi_2 I)}{N} - \mu S - \varphi \alpha S + \beta R \\ \frac{dV}{dt} = \varphi \alpha S - \mu V - \frac{\gamma V(\xi_3 E + \xi_4 I)}{N} \end{cases} \quad (2.5)$$

Persamaan (2.5) adalah sistem persamaan diferensial nonlinear dengan variable bebas t dan variable tak bebas x_1 dan x_2 . Persamaan disebut sistem diferensial nonlinear karena memuat perkalian antara variable tak bebas x_1 dan x_2 pada persamaan pertama dan terdapat kuadrat dari variable tak bebas x_1 pada persamaan kedua.

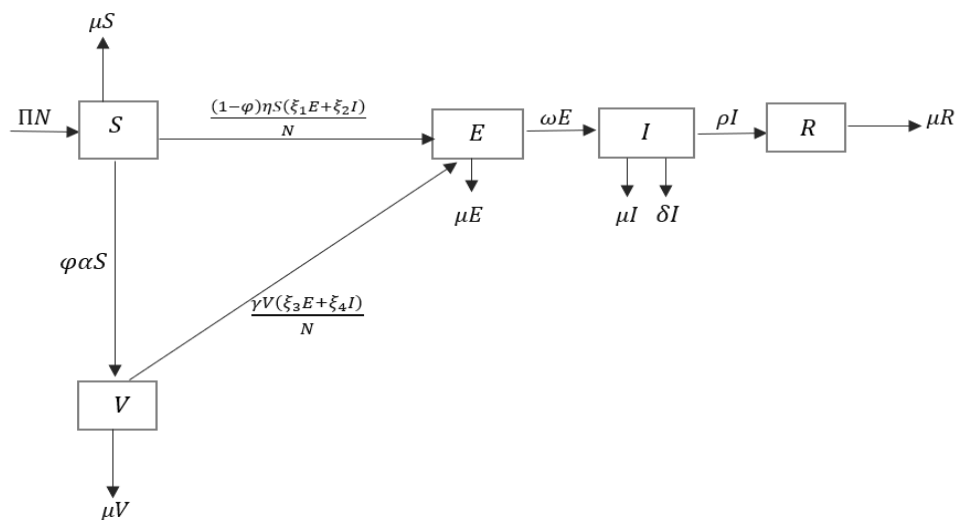
2.1.2 Model SVEIR

Pada penelitian (Resmawan, L. Y., dkk, 2022) menggunakan model SVEIR yakni *Susceptible (S)*, *Vaccinated (V)*, *Exposed (E)*, *Infected (I)*, *Recovered (R)* pada penyebaran COVID-19 untuk mengetahui seberapa berpengaruh laju vaksinasi terhadap penyebaran COVID-19. Model SVEIR pada penelitian (Resmawan, L. Y., dkk, 2022) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Pi N - \frac{(1-\varphi)\eta\xi_1 SE}{N} - \frac{(1-\varphi)\eta\xi_2 SI}{N} - \mu S - \varphi \alpha S \\ \frac{dV}{dt} &= \varphi \alpha S - \mu V - \frac{\gamma\xi_3 VE}{N} - \frac{\gamma\xi_4 VI}{N} \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{(1-\varphi)\eta\xi_1 SE}{N} + \frac{(1-\varphi)\eta\xi_2 SI}{N} + \frac{\gamma\xi_3 VE}{N} + \frac{\gamma\xi_4 VI}{N} - \omega E - \mu E \\ \frac{dI}{dt} &= \omega E - \rho I - \mu I - \delta I \\ \frac{dR}{dt} &= \rho I - \mu R \end{aligned}$$

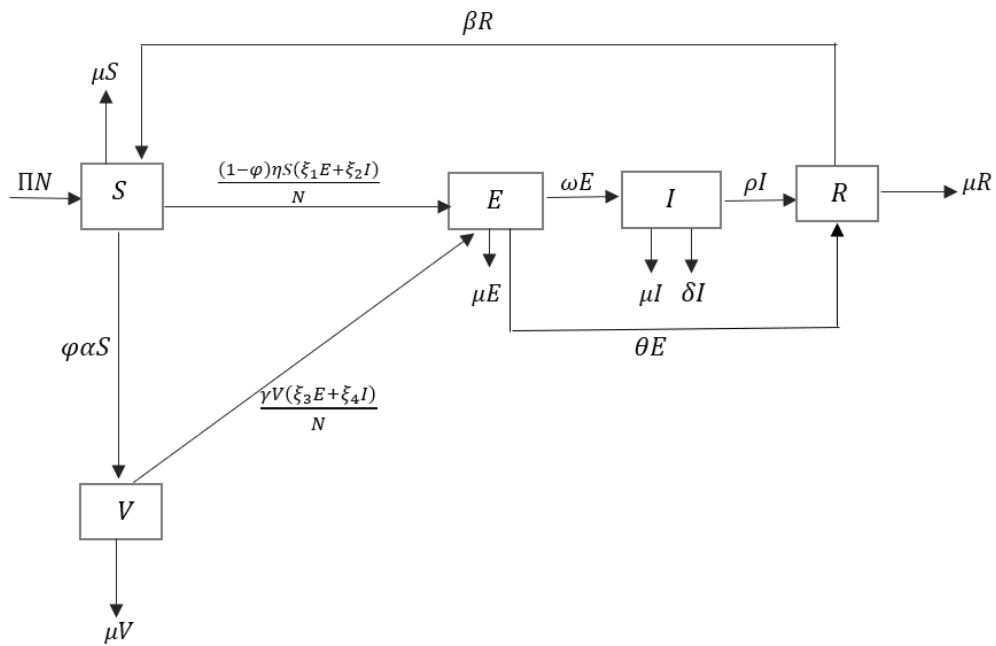
Model SVEIR dengan menggabungkan kelas populasi individu yang dikarantina ke dalam kelas populasi individu yang terpapar, akan menjadi model matematika yang digunakan dalam penelitian ini. Ini sesuai dengan keadaan pada saat ini bahwa karantina tidak lagi diberlakukan. Model matematika untuk

penyebaran COVID-19 terbagi menjadi lima subpopulasi individu dalam penelitian ini yakni: *Susceptible* (S) adalah individu yang rentan, *Vaccinated* (V) merupakan individu yang divaksin, *Exposed* (E) merupakan individu yang terpapar termasuk manusia terinfeksi tetapi tidak menunjukkan gejala apa pun selama masa inkubasi, *Infected* (I) merupakan individu terinfeksi tetapi menunjukkan gejala klinis, dan *Recovered* (R) adalah individu sembuh dari COVID-19. Berikut merupakan diagram kompartemen yang dapat digunakan untuk mengilustrasikan secara sistematis model penyebaran ini:



Gambar 2.1 Diagram Kompartemen Model SVEIR (Resmawan, L. Y., dkk, 2022)

Model SVEIR pada penelitian ini merupakan modifikasi dari penelitian (Resmawan, L. Y., dkk, 2022) dengan menambah kemungkinan individu terpapar untuk sembuh secara alami, dan kemungkinan individu sembuh untuk kembali rentan. Sehingga diagram kompartemen menjadi sebagai berikut:



Gambar 2.2 Diagram Kompartemen Model SVEIR Termodifikasi

Subpopulasi individu terbagi menjadi lima kompartemen, seperti yang ditunjukkan pada gambar 2.2 yakni *Susceptible* (S), *Vaccinated* (V), *Exposed* (E), *Infected* (I), *Recovered* (R). Berikut merupakan faktor-faktor yang mempengaruhi jumlah individu pada kompartemen model SVEIR yang dimodifikasi:

1. Perubahan Populasi Individu Pada Kompartemen *Susceptible*

$S + V + E + I + R = N$ sebesar laju ΠN berarti individu yang baru lahir masuk dalam kompartemen S setara dengan jumlah populasi hidup. Dengan jumlah populasi individu hidup N yang tidak konstan, populasi diasumsikan tertutup. Akibatnya, akan ada lebih banyak kelahiran jika jumlah populasi N semakin banyak. Peluang individu yang sudah sembuh menjadi rentan sebesar βR . Ini berarti bahwa tingkat rekrutmen kelahiran dan peluang individu yang sudah sembuh menjadi rentan berpengaruh pada peningkatan jumlah individu yang rentan di kompartemen ini.

Jumlah individu dalam kompartemen ini berkurang akibat dari perubahan

pada individu awalnya rentan menjadi terpapar (E). Selain itu berkurangnya jumlah individu di kompartemen ini disebabkan karena individu rentan menjadi terpapar dikarenakan dengan tidak adanya vaksinasi kemungkinan infeksi setelah kontak antara individu yang terinfeksi dengan individu rentan adalah sebesar ηS , laju kontak antara individu terpapar (E) dengan individu yang rentan (S) dengan proporsi sebesar $\xi_1 E$, tingkat kontak antara individu yang rentan (S) dengan individu yang terinfeksi (I) dengan proporsi sebesar $\xi_2 I$, dimana dalam setiap interaksi terdapat $(1 - \varphi)$ sebagai probabilitas individu rentan yang tidak diberikan vaksin.

Laju kematian alami sebesar μS merupakan penyebab penurunan dalam kompartemen ini, dan proporsi individu rentan yang diberikan vaksin dengan laju vaksinasi sebesar $\varphi \alpha S$. Sehingga persamaan untuk kompartemen *Susceptible* (S) diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Pi N - \frac{(1-\varphi)\eta\xi_1 SE}{N} - \frac{(1-\varphi)\eta\xi_2 SI}{N} - \mu S - \varphi \alpha S + \beta R \quad (2.6)$$

2. Perubahan Populasi Individu Pada Kompartemen *Vaccinated*

Penambahan jumlah individu yang di vaksin pada kompartemen ini dipengaruhi oleh proporsi individu rentan yang diberikan vaksin dengan laju vaksinasi sebesar $\varphi \alpha S$. Dengan proporsi sebesar $\xi_3 E$, tingkat kontak antara individu yang rentan (S) dengan individu yang terpapar (E) berpengaruh terhadap penurunan jumlah individu yang divaksin pada kompartemen ini dengan proporsi sebesar $\xi_3 E$, dan tingkat kontak antara individu yang rentan (S) dengan individu yang terinfeksi (I) dengan proporsi sebesar $\xi_4 I$ dimana disetiap interaksi terdapat γV sebagai probabilitas peluang setelah kontak antara individu yang terinfeksi dengan individu yang sudah menerima vaksin.

Selanjutnya yaitu pengurangan jumlah individu di vaksin dipengaruhi oleh laju kematian alami manusia sebesar μV . Sehingga persamaan untuk kompartemen *Vaccinated* (V) diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{dV}{dt} = \varphi\alpha S - \mu V - \frac{\gamma\xi_3 VE}{N} - \frac{\gamma\xi_4 VI}{N} \quad (2.7)$$

3. Perubahan Populasi Individu Pada Kompartemen *Exposed*

Penambahan jumlah individu terpapardalam kompartemen ini disebabkan karena perubahan pada individu yang semula rentan menjadi terpapar, akibatnya masuk dalam kompartemen *Exposed* (E). Individu yang rentan menjadi terpapar disebabkan oleh peluang infeksi setelah kontak antara individu yang terinfeksi dengan individu yang rentan yang tidak divaksinasi sebesar ηS , tingkat kontak antara individu yang rentan (S) dengan individu yang terpapar (E) dengan proporsi sebesar $\xi_1 E$, tingkat kontak antara individu yang rentan (S) dengan individu yang terinfeksi (I) dengan proporsi sebesar $\xi_2 I$, dimana probabilitas individu yang rentan tidak menerima vaksin pada setiap interaksi adalah $(1 - \varphi)$.

Penambahan selanjutnya dipengaruhi oleh adanya tingkat kontak antara individu yang rentan (S) dengan individu terpapar (E) dengan proporsi sebesar $\xi_3 E$, tingkat kontak antara individu yang rentan (S) dengan individu terinfeksi (I) dengan proporsi sebesar $\xi_4 I$ dimana disetiap interaksi terdapat γV sebagai probabilitas peluang sesudah kontak antara individu yang terinfeksi dengan individu yang sudah menerima vaksin.

Penurunan jumlah individu terpapar di kompartemen ini disebabkan karena adanya laju kematian alami sebesar μE , tingkat penularan setelah masa inkubasi berakhir dan individu berpindah ke (I) sebesar ωE , dan individu yang

terpapar ada kemungkinan untuk sembuh secara alami sebesar θE . Sehingga persamaan untuk kompartemen *Exposed* (E) diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & \frac{(1 - \varphi)\eta\xi_1 SE}{N} + \frac{(1 - \varphi)\eta\xi_2 SI}{N} + \frac{\gamma\xi_3 VE}{N} + \frac{\gamma\xi_4 VI}{N} - \omega E - \mu E \\ & - \theta E \end{aligned} \quad (2.8)$$

4. Perubahan Populasi Individu Pada Kompartemen *Infected*

Penambahan jumlah individu terinfeksi dalam kompartemen ini disebabkan karena adanya tingkat penularan setelah masa inkubasi berakhir dan individu berpindah ke (I) sebesar ωE . Penurunan jumlah individu yang terinfeksi di kompartemen ini disebabkan karena adanya tingkat pemulihan individu yang terinfeksi disertai gejala klinis yang pindah ke kelas individu yang sembuh sebesar ρI , laju kematian alami sebesar μI dan laju kematian karena terinfeksi COVID-19 sebesar δI . Sehingga persamaan untuk kompartemen *Infected* (I) diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{dI}{dt} = \omega E - \rho I - \mu I - \delta I \quad (2.9)$$

5. Perubahan Populasi Individu Pada Kompartemen *Recovered*

Penambahan jumlah individu yang sudah sembuh dalam kompartemen ini disebabkan karena adanya proporsi individu yang terinfeksi disertai gejala klinis yang pindah ke kelas individu yang sembuh sebesar ρI . Sementara itu, penurunan jumlah individu yang sudah sembuh di kompartemen ini disebabkan karena adanya laju kematian alami sebesar μR . Peluang individu yang sudah sembuh menjadi rentan adalah βR . Sehingga persamaan untuk kompartemen *Recovered* (R) diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{dR}{dt} = \rho I - \mu R - \beta R + \theta E \quad (2.10)$$

Dari persamaan (2.6) – (2.10) didapatkan model SVEIR penyebaran COVID-19 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \Pi N - \frac{(1-\varphi)\eta\xi_1 SE}{N} - \frac{(1-\varphi)\eta\xi_2 SI}{N} - \mu S - \varphi\alpha S + \beta R \\
\frac{dV}{dt} &= \varphi\alpha S - \mu V - \frac{\gamma\xi_3 VE}{N} - \frac{\gamma\xi_4 VI}{N} \\
\frac{dE}{dt} &= \frac{(1-\varphi)\eta\xi_1 SE}{N} + \frac{(1-\varphi)\eta\xi_2 SI}{N} + \frac{\gamma\xi_3 VE}{N} + \frac{\gamma\xi_4 VI}{N} - \omega E - \mu E \\
&\quad - \theta E \\
\frac{dI}{dt} &= \omega E - \rho I - \mu I - \delta I \\
\frac{dR}{dt} &= \rho I - \mu R - \beta R + \theta E
\end{aligned} \tag{2.11}$$

dengan $S + V + E + I + R = N$. Berikut merupakan penyederhanaan model SVEIR di atas dengan melakukan nondimensional:

$$s = \frac{S}{N}, v = \frac{V}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}$$

Substitusikan $s = \frac{S}{N}, v = \frac{V}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}$ ke dalam sistem persamaan

(2.11), sehingga diperoleh

$$\frac{dsN}{dt} = \Pi N - \frac{(1-\varphi)\eta\xi_1 sNeN}{N} - \frac{(1-\varphi)\eta\xi_2 sNiN}{N} - \mu sN - \varphi\alpha sN + \beta rN$$

kemudian kedua ruas dikali $\frac{1}{N}$, maka

$$\frac{dsN}{dtN} = \frac{\Pi N}{N} - \frac{(1-\varphi)\eta\xi_1 seN^2}{N^2} - \frac{(1-\varphi)\eta\xi_2 siN^2}{N^2} - \frac{\mu sN}{N} - \frac{\varphi\alpha sN}{N} + \frac{\beta rN}{N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = \Pi - (1-\varphi)\eta\xi_1 se - (1-\varphi)\eta\xi_2 si - \mu s - \varphi\alpha s + \beta r$$

Selanjutnya yaitu

$$\frac{dvN}{dt} = \varphi\alpha sN - \mu vN - \frac{\gamma\xi_3 vNeN}{N} - \frac{\gamma\xi_4 vNiN}{N}$$

kemudian kedua ruas dikali $\frac{1}{N}$, maka

$$\frac{dvN}{dtN} = \frac{\varphi\alpha sN}{N} - \frac{\mu vN}{N} - \frac{\gamma\xi_3 veN^2}{N^2} - \frac{\gamma\xi_4 viN^2}{N^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \varphi\alpha s - \mu v - \gamma\xi_3 ve - \gamma\xi_4 vi$$

Persamaan selanjutnya yaitu

$$\begin{aligned} \frac{deN}{dt} = & \frac{(1-\varphi)\eta\xi_1 sNeN}{N} + \frac{(1-\varphi)\eta\xi_2 sNiN}{N} + \frac{\gamma\xi_3 vNeN}{N} + \frac{\gamma\xi_4 vNiN}{N} - \omega eN \\ & - \mu eN - \theta eN \end{aligned}$$

kemudian kedua ruas dikali $\frac{1}{N}$, maka

$$\begin{aligned} \frac{deN}{dtN} = & \frac{(1-\varphi)\eta\xi_1 seN^2}{N^2} + \frac{(1-\varphi)\eta\xi_2 siN^2}{N^2} + \frac{\gamma\xi_3 veN^2}{N^2} + \frac{\gamma\xi_4 viN^2}{N^2} - \frac{\omega eN}{N} \\ & - \frac{\mu eN}{N} - \frac{\theta eN}{N} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{de}{dt} = (1-\varphi)\eta\xi_1 se + (1-\varphi)\eta\xi_2 si + \gamma\xi_3 ve + \gamma\xi_4 vi - \omega e - \mu e - \theta e$$

Persamaan selanjutnya yaitu

$$\frac{diN}{dt} = \omega eN - \rho iN - \mu iN - \delta iN$$

kemudian kedua ruas dikali $\frac{1}{N}$, maka

$$\frac{diN}{dtN} = \frac{\omega eN}{N} - \frac{\rho iN}{N} - \frac{\mu iN}{N} - \frac{\delta iN}{N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{di}{dt} = \omega e - \rho i - \mu i - \delta i$$

Selanjutnya untuk persamaan terakhir yaitu

$$\frac{drN}{dt} = \rho iN - \mu rN - \beta rN + \theta eN$$

kemudian kedua ruas dikali $\frac{1}{N}$, maka

$$\frac{drN}{dtN} = \frac{\rho iN}{N} - \frac{\mu rN}{N} - \frac{\beta rN}{N} + \frac{\theta eN}{N}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = \rho i - \mu r - \beta r + \theta e$$

Sehingga diperoleh persamaan (2.12) sebagai berikut:

$$\frac{ds}{dt} = \Pi - (1 - \varphi)\eta\xi_1se - (1 - \varphi)\eta\xi_2si - \mu s - \varphi\alpha s + \beta r$$

$$\frac{dv}{dt} = \varphi\alpha s - \mu v - \gamma\xi_3ve - \gamma\xi_4vi \quad (2.12)$$

$$\frac{de}{dt} = (1 - \varphi)\eta\xi_1se + (1 - \varphi)\eta\xi_2si + \gamma\xi_3ve + \gamma\xi_4vi - \omega e - \mu e - \theta e$$

$$\frac{di}{dt} = \omega e - \rho i - \mu i - \delta i$$

$$\frac{dr}{dt} = \rho i - \mu r - \beta r + \theta e$$

Tabel 2.1 Nilai Awal Model SVEIR

Variabel	Nilai Awal
$s(0)$	267564000 jiwa
$v(0)$	20534823 jiwa
$e(0)$	2500000 jiwa
$i(0)$	3372374 jiwa
$r(0)$	2730720 jiwa

Tabel 2.2 Estimasi Nilai Parameter Model

Parameter	$R_0 < 1$	Sumber	$R_0 > 1$	Sumber
Π	4.1×10^{-5}	(Resmawan, 2022)	4.1×10^{-5}	(Resmawan, 2022)
μ	3.57×10^{-5}	(Resmawan, 2022)	3.57×10^{-5}	(Resmawan, 2022)
η	0.2	(Resmawan, 2022)	0.2	(Resmawan, 2022)
ξ_1	0.09	(Resmawan, 2022)	0.09	(Resmawan, 2022)
ξ_2	0.07	(Resmawan, 2022)	0.07	(Resmawan, 2022)
ξ_3	0.03	Asumsi	0.03	Asumsi
ξ_4	0.02	Asumsi	0.02	Asumsi
ω	0.005	(Resmawan, 2022)	0.005	(Resmawan, 2022)
ρ	0.27	(Resmawan, 2022)	0.0027	(Resmawan, 2022)
δ	0.001	(Resmawan, 2022)	0.001	(Resmawan, 2022)

α	0.001	Asumsi	0.0003	Asumsi
φ	0.2	Asumsi	0.2	Asumsi
γ	0.01	(Resmawan, 2022)	0.01	(Resmawan, 2022)
θ	0.001	Asumsi	0.001	Asumsi
β	0.0001	Asumsi	0.0001	Asumsi

2.1.3 Analisis Dinamik Model Matematika

Validitas model matematika hanya dapat ditentukan melalui analisis perilaku dinamik. Dalam model matematika, analisis kestabilan digunakan untuk menentukan kestabilan sistem persamaan diferensial. Validitas model matematika dapat ditentukan dengan bantuan analisis kestabilan. Analisis terhadap titik kesetimbangan dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dan nilai eigen yang diperoleh dari persamaan tersebut dapat digunakan untuk mengidentifikasi kestabilannya (Boyce dan Di Prima. 2001).

2.1.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai Eigen merupakan nilai karakteristik dari suatu matriks berukuran $n \times n$, sedangkan vektor Eigen merupakan vektor kolom bukan nol yang jika dikalikan dengan suatu matriks berukuran $n \times n$ akan memperoleh vektor lain yang mempunyai nilai kelipatan dari vektor Eigen itu sendiri. Misalkan $A_{n \times n}$ dan $\bar{x} \in R^n$. Apabila $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, maka λ disebut nilai eigen dari A dan \bar{x} disebut vektor eigen terkait dengan λ . Dari persamaan $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, maka didapatkan

$$\Leftrightarrow A\bar{x} - \lambda\bar{x}$$

$$\Leftrightarrow A\bar{x} - \lambda\bar{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)\bar{x} = 0$$

Harus ada setidaknya satu solusi dari persamaan $(A - \lambda I)\bar{x} = 0$ untuk λ dapat

menjadi nilai eigen. Persamaan $(A - \lambda I)\bar{x} = 0$ memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika $\det(A - \lambda I)\bar{x} = 0$ atau $\det(\lambda I - A)\bar{x} = 0$. Persamaan karakteristik matriks A adalah persamaan $\det(A - \lambda I)\bar{x} = 0$, yang merupakan polinomial berderajat n dan memuat nilai n untuk A (Andari, 2017).

Contoh:

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 2 & 2 - \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3 - \lambda)(2 - \lambda) - 2 \cdot 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari matriks A yaitu $\lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = 1$. Langkah selanjutnya akan dicari vektor eigen dari masing-masing nilai eigen.

Untuk $\lambda_1 = 4$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Tulis sistem di atas sebagai matriks diperluas dan lakukan OBE

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right]_{B_1 / -1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \right]_{B_2 - 2B_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Dari bentuk di atas didapatkan $x_1 - x_2 = 0$ atau $x_1 = x_2 = c$, sehingga diperoleh

vektor eigen $x = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \neq 0$. Ini berarti bahwa $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ merupakan vektor eigen dari $\lambda_1 = 4$. Dengan cara yang sama diperoleh $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ merupakan vektor eigen dari $\lambda_1 = 1$.

2.1.5 Titik Keseimbangan

Pada subbab ini membahas titik keseimbangan karena penentuan titik keseimbangan diperlukan untuk menganalisis dinamik penyebaran COVID-19. Nilai bilangan reproduksi dasar dapat diketahui dengan menggunakan titik keseimbangan. Titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik merupakan dua jenis titik keseimbangan.

Definisi 2.2 (Wiggins, 2003)

Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$. Titik $\bar{x} \in R^n$ dikatakan titik keseimbangan dari $\dot{x} = f(x)$ jika memenuhi $f(\bar{x}) = 0$.

Definisi 2.3 (Sari, 2010)

Misalkan diberikan sistem *autonomous*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= Y(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= Z(x, y, z) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Titik (x^*, y^*, z^*) dengan $X(x^*, y^*, z^*) = 0, Y(x^*, y^*, z^*) = 0, Z(x^*, y^*, z^*) = 0$ disebut titik kritis persamaan (2.13). Titik keseimbangan $E(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$ adalah solusi persamaan (2.13) yang bernilai konstan karena $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 0$. Keadaan keseimbangan dan titik keseimbangan adalah kondisi yang

menghasilkan $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, dan $\frac{dz}{dt} = 0$.

Teorema 2.1 Kestabilan sistem linear (Wiggins, 2003)

Titik kesetimbangan $\bar{x} \in R^n$ persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$ dikatakan

1. Jika terdapat $\delta > 0$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$ berlaku $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$ dikatakan stabil lokal.
2. Jika titik kesetimbangan $\bar{x} \in R^n$ stabil terdapat $\delta_0 > 0$, maka solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta_0$ berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ stabil asimtotik.
3. Jika titik kesetimbangan $\bar{x} \in R^n$ tidak memenuhi (1), maka sistem tidak stabil.

Misalkan titik kesetimbangan sistem persamaan diferensial dimana $\dot{x} = f(x)$, $x \in R^n$ dan \bar{x} . Memperhatikan nilai-nilai eigen persamaan karakteristik yaitu $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, dapat digunakan untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan \bar{x} . kestabilan titik kesetimbangan umumnya berperilaku sebagai berikut:

1. Stabil jika memenuhi,
 - $R_e(\lambda_i) < 0$, untuk setiap i
 - Terdapat $R_e(\lambda_j) = 0$, untuk sebarang j dan $R_e(\lambda_j) < 0$, untuk setiap $i \neq j$.
2. Jika setidaknya ada satu i sehingga $R_e(\lambda_i) > 0$, maka dikatakan tidak stabil.

2.1.6 Linearisasi

Suatu metode yang dikenal sebagai linearisasi dapat mengubah bentuk nonlinear menjadi bentuk linear. Proses linearisasi diperlukan untuk proses

hampiran n persamaan diferensial nonlinear dengan persamaan diferensial linear untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan nonlinear karena terlalu sulit untuk menentukan kestabilan dan ketidakstabilannya.

Linearisasi adalah proses menggunakan persamaan linear untuk mendekati penyelesaian persamaan diferensial nonlinear. Proses menganalisis dan mendeskripsikan perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangannya dikenal sebagai linearisasi. Deret Taylor dari suatu sistem dapat digunakan untuk linearisasi. Untuk mencari linearisasi dapat dilakukan dengan membuat matriks Jacobian dari suatu sistem.

Linearisasi di sekitar titik kesetimbangan digunakan untuk mempelajari perilaku sistem dinamik nonlinear. Diberikan sistem

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\quad (2.14)$$

dimana titik ekstrim $(a, b); f(a, b) = g(a, b) = 0$. Pendekatan linear fungsi $f(x, y)$ di sekitar (a, b) dengan menderetkan fungsi $f(x, y)$, maka diperoleh

$$f(x, y) \cong f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + O_f \quad (2.15)$$

Sedangkan Deret Taylor fungsi $g(x, y)$ di sekitar (a, b) yaitu

$$g(x, y) \cong f(a, b) + \frac{\partial g}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)(y - b) + O_g \quad (2.16)$$

dengan O_f dan O_g merupakan suku-suku nonlinear yang selanjutnya dapat dihilangkan. Pendekatan sistem linear berikut diturunkan dari (2.14) dan (2.15):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)(y - b) \quad (2.17)$$

Persamaan (2.17) dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x - a) \\ (y - b) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Substitusikan $u = x - a$ dan $v = y - b$ diperoleh persamaan yang lebih sederhana

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

dengan $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \end{bmatrix}$ dikenal sebagai matriks jacobian Sistem (2.14)

di titik (a, b) .

Fungsi yang bergantung pada variabel x_1, x_2, \dots, x_n adalah u , dengan variabel bebas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ yaitu fungsi $u: R^n \rightarrow R$ dengan $x \in R^n$. Sebuah sistem persamaan diferensial parsial biasanya berbentuk sebagai berikut:

$$F_1(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \dots, u_{x_1 \dots x_n}) = 0$$

$$F_2(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \dots, u_{x_1 \dots x_n}) = 0$$

⋮

$$F_n(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_2}, \dots, u_{x_1 \dots x_n}) = 0$$

Berikut merupakan bentuk sistem persamaan diferensial parsial dua variabel orde satu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial t} &= f_1(u) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial t} &= f_2(u) \end{aligned} \quad (2.20)$$

⋮

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial t} = f_n(u)$$

dengan $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan nilai $u_0 = (u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0n})$. Solusi sistem (2.20)

dengan nilai awal $u_0 = u(x, t_0)$ dapat dinyatakan sabagai $u(x, t) = u(u_0, x, t)$.

Vektor $u^*(x)$ dinamakan distribusi umur *steady state* sistem (2.20), apabila $u^*(x)$

memenuhi sistem berikut (Brauer, 2008)

$$\begin{aligned} \frac{du_1^*(x)}{dx} &= f_1[u^*(x)] \\ \frac{du_2^*(x)}{dx} &= f_2[u^*(x)] \\ &\vdots \\ \frac{du_n^*(x)}{dx} &= f_n[u^*(x)] \end{aligned} \tag{2.21}$$

Sebagai contoh, asumsikan bahwa sistem (2.21) dengan nilai awal yang diberikan memiliki solusi keadaan stabil untuk kestabilan distribusi *steady state*, linearisasi sitem berikutnya dapat digunakan untuk menyelidi hal ini, linearisasi sistem persamaan diferensial parsial di sekitar kondisi *steady state* sebagai berikut, fokus pada dua persamaan awal dalam sistem (2.20) yakni

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial t} &= f_1(u_1, u_2) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial t} &= f_2(u_1, u_2) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Diberikan transformasi

$$v(x, t) = [v_1(x, t), v_2(x, t)] = [u_1(x, t) - u_1^*(x), u_2(x, t) - u_2^*].$$

Dengan menggunakan Deret Taylor f_1 dan f_2 sistem (2.22) diperoleh

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial t} \cong f_1(u^*) + \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(u^*)[u_1 - u_1^*] + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(u^*)[u_2 - u_2^*] + O_1$$

$$\begin{aligned}
&\cong \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(u^*)v_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(u^*)v_2 \\
\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial t} &\cong f_2(u^*) + \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(u^*)[u_1 - u_1^*] + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(u^*)[u_2 - u_2^*] + O_2 \\
&\cong \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(u^*)v_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(u^*)v_2
\end{aligned}$$

dimana O_1 dan O_2 merupakan suku-suku non linear, maka dapat diabaikan.

Diperoleh linearisasi sitem (2.22) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(u^*)v_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(u^*)v_2 \\
\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(u^*)v_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(u^*)v_2
\end{aligned} \tag{2.23}$$

2.1.7 Kriteria Routh – Hurwitz

Berdasarkan akar persamaan karakteristik kriteria Routh-Hurwitz adalah metode untuk memeriksa kestabilan sistem linear. Misal diberikan persamaan krakteristik orde n sebagai berikut:

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{2.24}$$

dengan $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ merupakan konstanta real. Tidak selalu untuk mengevaluasi persamaan karakteristik untuk akar-akar dan nilai eigennya secara langsung. Dalam persamaan polynomial orde ke- n , kriteria Routh–Hurwitz menunjukkan adanya akar-akar yang tidak stabil tanpa harus menyelesaikannya. Koefisien-koefisien persamaan karakteristik dapat digunakan untuk menentukan kestabilan mutlak.

Kriteria Routh lebih menekankan pada aspek formulasi runtun (*array*), sedangkan kriteria Hurwitz menekankan pada aspek determinan. Penentu matriks Hurwitz seperti yang diuraikan pada koefisien-koefisien persamaan karakteristik

(2.24), dipertimbangkan kriteria kestabilan Hurwitz sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n+1} & a_n \end{bmatrix}$$

Determinan sub-sub matriks dapat dievaluasi menggunakan matriks Hurwitz di atas sebagai berikut:

$$H_1 = [a_1], H_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}, \dots$$

Teorema 2.2

Semua akar dari polynomial (2.14) merupakan negative atau memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika determinan dari semua matriks Hurwitz merupakan positif.

$$\det(H_j) > 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

2.1.8 Matriks Generasi Selanjutnya (Next Generation Matrix)

Matriks dasar untuk model kompartemen penyebaran penyakit menular diturunkan menggunakan matriks generasi selanjutnya (*Next Generation Matrix*). Untuk model populasi yang terstruktur secara dinamis bilangan reproduksi dasar dihitung menggunakan matriks generasi selanjutnya (Zhao, Xiao-Qiang, 2017). Seluruh populasi dipecah menjadi n kompartemen dimana masing-masing terdapat $m < n$ kompartemen yang terinfeksi, menentukan bilangan reproduksi dasar dengan bantuan matriks generasi selanjutnya (Van Den Driessche, P, 2002).

Misalkan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan setiap $x_i \geq 0$ dimana $i = 1, 2, \dots, n$ menyatakan proporsi yang terinfeksi pada saat t . Jika proporsi kelas yang terinfeksi adalah m , definisi berikut berlaku: F_i adalah matriks yang

mewakili jumlah rata-rata individu baru yang terinfeksi dalam kelas ke- i dan V_i adalah matriks penurunan jumlah individu yang terinfeksi dari kelas ke- i dengan laju perpindahan individu yang masuk kedalam kelas ke- i , sehingga V_i (L. D. Oktaviani, et al, 2013)

$$V_i = V_i^- - V_i^+ \quad (2.25)$$

dimana V_i^+ menunjukkan laju perpindahan individu yang memasuki golongan i dan V_i^- menunjukkan laju perpindahan individu keluar dari golongan i . Berikut merupakan model penyebarannya penyakit:

$$\dot{x} = f_i(x) = F_i(x) - V_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n > 0 \quad (2.26)$$

Sistem (2.26) dapat ditulis sebagai hasil dari mensubstitusikan persamaan (2.25), sehingga menjadi

$$\dot{x} = F(x) - V(x) \quad (2.27)$$

dimana $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$ dan $V(x) = (V_1(x), V_2(x), \dots, V_n(x))$.

Misalkan F dan V adalah matriks $m \times m$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$F = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right]; V = \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right], 1 \leq i, j \leq m$$

dimana \bar{x} merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit. Selain itu, berikut adalah definisi matriks K :

$$K = FV^{-1}$$

yang disebut sebagai matriks generasi selanjutnya yaitu radius spektral dari matriks K merupakan nilai dari bilangan reproduksi dasar pada populasi, maka dapat ditulis

$$R_0 = \rho(FV^{-1})$$

2.1.9 Bilangan Reproduksi Dasar

Matriks generasi selanjutnya yang diperkenalkan oleh van den Driessche dan Watmough dapat digunakan untuk menentukan bilangan reproduksi dasar model SVEIR (P.van den Driessche, J., 2002). Untuk melakukan ini, pertimbangkan matriks non-negatif F , matriks non-tunggal M , dan V mengekspresikan produksi infeksi baru dan bagian transisi, masing-masing. Setelah menentukan bilangan reproduksi dasar perlu memperhatikan kondisi yang muncul (R.Resmawan, 2020)

1. Penyakit diperkirakan dapat hilang jika $R_0 < 1$.
2. Penyakit dapat dikatakan wabah jika $R_0 > 1$.
3. Penyakit dapat bertahan jika $R_0 = 1$.

Langkah-langkah untuk menentukan bilangan reproduksi dasar dengan yaitu:

1. Misalkan n merupakan jumlah kompartemen atau kelompok terinfeksi dalam populasi, dan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ merupakan kelas individu yang mungkin terinfeksi. Persamaan berikut diperoleh dengan melakukan linearisasi di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit

$$\frac{dx}{dt} = (F - V)x$$

dengan F matriks transmisi infeksi baru dalam populasi dan V matriks transisi perpindahan individu dalam kelompok (kompartemen).

2. Next Generation Matrix diperoleh dengan formula

$$K = FV^{-1}$$

3. Hitung bilangan reproduksi dasar dengan $R_0 = \rho(FV^{-1})$ adalah nilai eigen terbesar (radius spectral) dari matriks FV^{-1} .

2.1.10 Analisis Sensitivitas

Suatu pengujian untuk mengetahui bagaimana parameter-parameter mempengaruhi bilangan reproduksi dasar disebut analisis sensitivitas. Terdapat dua jenis analisis sensitivitas yaitu analisis sensitivitas lokal dan analisis sensitivitas global. Dalam penelitian ini, parameter yang mempengaruhi bilangan reproduksi dasar diidentifikasi melalui penggunaan analisis sensitivitas lokal. Pengaruh parameter terhadap bilangan reproduksi dasar sebanding dengan nilai indeks sensitivitas. Indeks sensitivitas dapat ditulis sebagai berikut dengan menurunkan R_0 terhadap parameter p (R.Resmawan, 2020)

$$C_p^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial p} \times \frac{p}{R_0}$$

dimana p merupakan parameter yang terdapat pada bilangan reproduksi dasar yaitu $\Pi, \eta, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \mu, \alpha, \gamma, \omega, \rho, \delta, \varphi$.

2.2 Kajian Integrasi Model SVEIR Penyebaran COVID-19 dengan Al-Qur'an dan Hadist

Kesehatan adalah salah satu aspek kehidupan manusia yang telah diatur dalam Islam. Al-Qur'an yaitu kitab suci umat islam yang memiliki banyak manfaat bagi umat manusia. Disebutkan dalam Al-Qur'an bahwa Al-Qur'an adalah obat bagi penyakit manusia. Kita sadar nikmat terbesar yang tidak bisa dibeli dengan uang adalah Kesehatan. Pada dasarnya manusia terus berperang melawan virus namun akhirnya tetap kalah (Jarred D, 1997). Oleh karena itu kita harus mencegah supaya tidak terpapar atau terinfeksi virus COVID-19 tersebut. Salah satu upaya untuk tidak terpapar dan terinfeksi COVID-19 yaitu dengan melalui vaksin supaya imun kita kebal akan virus COVID-19.

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui analisis dinamik model

SVEIR pada penyebaran COVID-19. Dalam Al-Qur'an dijelaskan untuk memerintahkan manusia untuk meneliti dan memperhatikan alam semesta. Allah SWT berfirman pada surah Yunus ayat 101 yang artinya sebagai berikut:

Katakanlah, "Perhatikanlah apa yang ada di langit dan di bumi!" Tidaklah bermanfaat tanda-tanda (kebesaran Allah) dan rasul-rasul yang memberi peringatan bagi orang yang tidak beriman (Q.S. Yunus: 101).

Tafsir Abdurrahman Nasir As-Sa'di terhadap QS Yunus 101: Allah SWT mengajak hamba-hamba-Nya fokus pada apa yang ada di langit dan di bumi. Makna fokus di sini merupakan dengan berpikir, merenungkan, mengambil pelajaran dan menyelesaikan apa yang ada di dalamnya, karena di dalamnya terdapat ayat-ayat dan pelajaran bagi orang-orang yang beriman. Semua itu membuktikan bahwa hanya Allah yang Maha Tinggi dan yang beerhak disembah, pemilik kebesaran dan kemuliaan, serta memiliki nama-nama dan sifat yang luar biasa. Untuk memahami bukti kekuasaan Allah dan rahasia di dalamnya sebagai keuntungan bagi mereka sendiri, Al-Qur'an memerintahkan umat manusia untuk mempelajarinya. Manusia tidak akan maju dalam hidupnya tanpa menyelidiki dan mempelajari alam semesta. Begitu juga pada penelitian ini menggunakan model matematika yaitu SVEIR, dengan harus melakukan uji validasi untuk membuktikan kebenaran dari model tersebut.

Dalam HR Bukhari dan Muslim dijelaskan cara untuk mencegah penyakit tidak meluas yang artinya sebagai berikut:

"Nabi SAW bersabda: 'Janganlah yang sakit dicampurbaurkan dengan yang sehat.'" (HR Bukhari dan Muslim)

Sebaiknya orang yang terinfeksi penyakit tidak melakukan interaksi dengan orang yang tidak terinfeksi. Sama halnya yang dilakukan pada penelitian ini, dengan membagi subpopulasi individu menjadi 5 yakni: *Susceptible (S)* merupakan

individu yang rentan, *Vaccinated* (*V*) merupakan individu yang divaksin, *Exposed* (*E*) merupakan individu yang terpapar termasuk individu yang terinfeksi tanpa gejala dalam masa inkubasi, *Infected* (*I*) merupakan individu terinfeksi disertai gejala klinis, dan *Recovered* (*R*) merupakan individu yang pulih dari COVID-19. Dengan memberikan jarak diantara subpopulasi akan memperlambat penyebaran COVID-19.

2.3 Kajian Model SVEIR Penyebaran COVID-19 dengan Teori Pendukung

Analisis dinamik, analisis sensitivitas pada bilangan reproduksi dasar, dan simulasi numerik model SVEIR merupakan topik pembahasan yang dibahas dalam penelitian ini. Teori titik ekuilibrium, linearisasi, nilai eigen dan vektor eigen, kestabilan titik ekuilibrium, kriteria Routh-Hurwitz dan bilangan reproduksi dasar merupakan teori pendukung untuk menyelesaikan analisis dinamik (Boyce & DiPrima, 2001). Analisis titik kesetimbangan, menganalisis kestabilan pada titik kesetimbangan, selanjutnya menentukan bilangan reproduksi dasar dan analisis sensitivitas untuk semua parameter, serta simulasi numerik untuk mensimulasikan hasil analisis sebelumnya merupakan langkah-langkah dalam melakukan analisis dinamik. Simulasi numerik dengan variasi nilai parameter untuk menyelidiki efektivitas vaksinasi terhadap model yang dimodifikasi.

BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Pada penelitian ini menggunakan pendekatan penelitian kualitatif. Metode kualitatif digunakan untuk menjawab pertanyaan apa (*what*), bagaimana (*how*), atau mengapa (*why*) mengenai suatu fenomena (McCusker, K., & Gunaydin, S., 2015). Menurut (Prof.Dr. Sugiyono, 2017) penelitian kualitatif adalah penelitian yang menggunakan peristiwa-peristiwa yang terjadi pada saat penelitian dilakukan untuk mengumpulkan informasi tentang status peristiwa yang ada. Ketika penelitian kualitatif dilakukan secara akurat, faktual dan tepat berdasarkan fakta-fakta peristiwa yang diteliti tujuannya adalah untuk mengungkap fenomena yang terjadi.

3.2 Pra Penelitian

Tahap awal sebelum penulis melakukan penelitian disebut pra penelitian. Topik dan konsep yang akan diteliti dan dibahas merupakan subjek dari studi literatur yang dilakukan oleh peneliti. Studi literatur dilakukan dengan mengkaji jurnal-jurnal, buku, artikel, website resmi covid19.go.id, dan referensi lain yang relevan dengan penelitian yang akan dibahas. Setelah peneliti menentukan topik yang akan dibahas, kemudian peneliti memahami permasalahan yang terjadi dan mencari literatur tentang pemodelan matematika, teori yang digunakan, dan parameternya.

3.3 Tahapan Penelitian

3.3.1 Melakukan Analisis Dinamik Model SVEIR

Berikut adalah langkah-langkah untuk melakukan analisis dinamik model SVEIR:

1. Menentukan titik kesetimbangan pada model SVEIR
2. Dengan metode *Next Generation Matrix* (NGM) untuk menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0).
3. Menentukan kestabilan titik kesetimbangan berdasarkan akar karakteristik

3.3.2 Melakukan Analisis Sensitivitas Pada Bilangan Reproduksi Dasar

Adapun Langkah-langkah untuk melakukan analisis sensitivitas sebagai berikut:

1. Indeks sensitivitas dapat diketahui dengan menurunkan persamaan R_0 terhadap parameter yang akan dianalisis.
2. Analisis hasil indeks sensitivitas dengan menggunakan bilangan reproduksi dasar khususnya pada kondisi $R_0 < 1$.

3.3.3 Melakukan Simulasi Numerik Pada Model SVEIR

Adapun Langkah-langkah melakukan simulasi numerik sebagai berikut:

1. Simulasi numerik ketika infeksi COVID-19 hilang dari populasi $R_0 < 1$
2. Simulasi numerik ketika infeksi COVID-19 selalu ada di populasi $R_0 > 1$

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Analisis Dinamik

4.1.1 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan disebut juga titik ekuilibrium atau titik tetap. Model penyebaran COVID-19 dengan model SVEIR merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear. Untuk memperoleh titik keseimbangan dari model SVEIR apabila $\frac{ds}{dt} = 0, \frac{dv}{dt} = 0, \frac{de}{dt} = 0, \frac{di}{dt} = 0, \text{ dan } \frac{dr}{dt} = 0$. Sehingga sistem persamaan (2.12) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\Pi - (1 - \varphi)\eta s(\xi_1 e + \xi_2 i) - (\mu + \varphi\alpha)s + \beta r = 0 \quad (4.1)$$

$$\varphi\alpha s - (\mu + \gamma(\xi_3 e + \xi_4 i))v = 0 \quad (4.2)$$

$$(1 - \varphi)\eta s(\xi_1 e + \xi_2 i) + \gamma v(\xi_3 e + \xi_4 i) - (\omega + \mu + \theta)e = 0 \quad (4.3)$$

$$\omega e - (\rho + \mu + \delta)i = 0 \quad (4.4)$$

$$\rho i - \mu r - \beta r + \theta e = 0 \quad (4.5)$$

a. Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Titik keseimbangan bebas penyakit didefinisikan sebagai titik pada saat tidak ada penyebaran penyakit, sehingga diperoleh $i_0 = 0$ dan $e_0 = 0$. Dari persamaan (4.1) diperoleh

$$\Pi - (1 - \varphi)\eta s_0(\xi_1 e_0 + \xi_2 i_0) - (\mu + \varphi\alpha)s_0 + \beta r_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \Pi - (1 - \varphi)\eta s_0 \cdot 0 - (\mu + \varphi\alpha)s_0 + \beta r_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \Pi - 0 - (\mu + \varphi\alpha)s_0 + \beta r_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \Pi - (\mu + \varphi\alpha)s_0 = -\beta r_0$$

$$\Leftrightarrow -(\mu + \varphi\alpha)s_0 = -\beta r_0 - \Pi$$

$$\Leftrightarrow s_0 = \frac{-(\beta r_0 + \Pi)}{-(\mu + \varphi\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow s_0 = \frac{\beta r_0 + \Pi}{\mu + \varphi \alpha}$$

Kemudian substitusikan $s_0 = \frac{\beta r_0 + \Pi}{\mu + \varphi \alpha}$ ke dalam persamaan (4.2), sehingga diperoleh

$$\varphi \alpha s_0 - (\mu + \gamma(\xi_3 e_0 + \xi_4 i_0))v_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi \alpha \frac{\beta r_0 + \Pi}{\mu + \varphi \alpha} - (\mu + \gamma \cdot 0)v_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi \alpha \frac{\beta r_0 + \Pi}{\mu + \varphi \alpha} - \mu v_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\mu v_0 = -\varphi \alpha \frac{\beta r_0 + \Pi}{\mu + \varphi \alpha}$$

$$\Leftrightarrow v_0 = \varphi \alpha \frac{\beta r_0 + \Pi}{\mu + \varphi \alpha} \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$\Leftrightarrow v_0 = \varphi \alpha \frac{\beta r_0 + \Pi}{\mu^2 + \mu \varphi \alpha}$$

Kemudian substitusikan i_0 dan e_0 ke persamaan (4.5) diperoleh

$$\rho i_0 - \mu r_0 - \beta r_0 + \theta e_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho \cdot 0 - (\mu + \beta)r_0 + \theta \cdot 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - (\mu + \beta)r_0 + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(\mu + \beta)r_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow r_0 = 0$$

Selanjutnya, substitusikan r_0 pada persamaan s_0 dan v_0 sedemikian sehingga diperoleh

$$s_0 = \frac{\beta r_0 + \Pi}{\mu + \varphi \alpha}$$

$$\Leftrightarrow s_0 = \frac{\beta \cdot 0 + \Pi}{\mu + \varphi \alpha}$$

$$\Leftrightarrow s_0 = \frac{\Pi}{\mu + \varphi \alpha}$$

$$v_0 = \varphi\alpha \frac{\beta r_0 + \Pi}{\mu^2 + \mu\varphi\alpha}$$

$$\Leftrightarrow v_0 = \varphi\alpha \frac{\beta \cdot 0 + \Pi}{\mu^2 + \mu\varphi\alpha}$$

$$\Leftrightarrow v_0 = \frac{\varphi\alpha\Pi}{\mu^2 + \mu\varphi\alpha}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit dari sistem persamaan

$$(2.12) \text{ yaitu: } E_0 = (s_0, v_0, e_0, i_0, r_0) = \left(\frac{\Pi}{\mu + \varphi\alpha}, \frac{\varphi\alpha\Pi}{\mu^2 + \mu\varphi\alpha}, 0, 0, 0 \right)$$

b. Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik artinya di dalam suatu populasi selalu terdapat individu yang terinfeksi penyakit $i^* \neq 0$. Berdasarkan kondisi $i^* \neq 0$ dan persamaan tersebut maka persamaan (4.4) diperoleh

$$\omega e^* - (\rho + \mu + \delta)i^* = 0$$

$$e^* = \frac{(\rho + \mu + \delta)i^*}{\omega} \text{ atau } e^* = \varpi i^* \text{ dengan } \varpi = \frac{(\rho + \mu + \delta)}{\omega}$$

Selanjutnya dengan cara yang sama, dari persamaan (4.5) diperoleh

$$\rho i^* - \mu r^* - \beta r^* + \theta e^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho i^* - (\mu + \beta)r^* + \theta\varpi i^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho i^* - (\mu + \beta)r^* + \theta\varpi i^* = 0$$

$$\Leftrightarrow (\rho + \theta\varpi)i^* - (\mu + \beta)r^* = 0$$

$$\Leftrightarrow (\rho + \theta\varpi)i^* = (\mu + \beta)r^*$$

$$\Leftrightarrow r^* = \frac{\rho + \theta\varpi}{\mu + \beta} i^*$$

Substitusikan nilai z sedemikian sehingga diperoleh

$$r^* = \frac{\rho + \theta \left(\frac{\rho + \mu + \delta}{\omega} \right)}{\mu + \beta} i^*$$

$$r^* = \frac{\omega\rho + \theta(\rho + \mu + \delta)}{(\mu + \beta)\omega} i^* \text{ atau } r^* = \varrho i^* \text{ dengan } \varrho = \frac{\omega\rho + \theta(\rho + \mu + \delta)}{(\mu + \beta)\omega}$$

Selanjutnya substitusikan nilai e^* dan r^* pada persamaan (4.1) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& \Pi - (1 - \varphi)\eta s^*(\xi_1 e^* + \xi_2 i^*) - (\mu + \varphi\alpha)s^* + \beta r^* = 0 \\
& \Leftrightarrow \Pi - (1 - \varphi)\eta s^*(\xi_1 \varpi i^* + \xi_2 i^*) - (\mu + \varphi\alpha)s^* + \beta \varrho i^* = 0 \\
& \Leftrightarrow \Pi - (1 - \varphi)\eta(\xi_1 \varpi + \xi_2)s^* i^* - (\mu + \varphi\alpha)s^* + \beta \varrho i^* = 0 \\
& \Leftrightarrow \Pi - ((1 - \varphi)\eta(\xi_1 \varpi + \xi_2)i^* + (\mu + \varphi\alpha))s^* + \beta \varrho i^* = 0 \\
& \Leftrightarrow -((1 - \varphi)\eta(\xi_1 \varpi + \xi_2)i^* + (\mu + \varphi\alpha))s^* = -\beta \varrho i^* - \Pi \\
& \Leftrightarrow s^* = \frac{\beta \varrho i^* + \Pi}{(1 - \varphi)\eta(\xi_1 \varpi + \xi_2)i^* + (\mu + \varphi\alpha)}
\end{aligned}$$

Misalkan $\varepsilon = (1 - \varphi)\eta(\xi_1 \varpi + \xi_2)$, maka diperoleh

$$s^* = \frac{\beta \varrho i^* + \Pi}{\varepsilon i^* + (\mu + \varphi\alpha)}$$

Selanjutnya, substitusikan nilai s dan e pada persamaan (4.2)

$$\begin{aligned}
& \varphi\alpha \frac{\beta \varrho i^* + \Pi}{\varepsilon i^* + (\mu + \varphi\alpha)} - (\mu + \gamma(\xi_3 \varpi i^* + \xi_4 i^*))v^* = 0 \\
& \Leftrightarrow \varphi\alpha \frac{\beta \varrho i^* + \Pi}{\varepsilon i^* + (\mu + \varphi\alpha)} - (\mu + \gamma(\xi_3 \varpi + \xi_4)i^*)v^* = 0 \\
& \Leftrightarrow \varphi\alpha \frac{\beta \varrho i^* + \Pi}{\varepsilon i^* + (\mu + \varphi\alpha)} = (\mu + \gamma(\xi_3 \varpi + \xi_4)i^*)v^* \\
& \Leftrightarrow v^* = \frac{\varphi\alpha}{(\mu + \gamma(\xi_3 \varpi + \xi_4)i^*)} \frac{\beta \varrho i^* + \Pi}{\varepsilon i^* + (\mu + \varphi\alpha)}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusikan nilai s^* , e^* , dan v^* pada persamaan (4.3)

$$\begin{aligned}
& (1 - \varphi)\eta \frac{\beta \varrho i^* + \Pi}{\varepsilon i^* + (\mu + \varphi\alpha)} (\xi_1 \varpi i^* + \xi_2 i^*) + \gamma \frac{\varphi\alpha}{(\mu + \gamma(\xi_3 \varpi + \xi_4)i^*)} \frac{\beta \varrho i^* + \Pi}{\varepsilon i^* + (\mu + \varphi\alpha)} (\xi_3 \varpi i^* + \\
& \xi_4 i^*) - (\omega + \mu + \theta)\varpi i^* = 0 \\
& \Leftrightarrow (1 - \varphi)\eta \frac{\beta \varrho i^* + \Pi}{\varepsilon i^* + (\mu + \varphi\alpha)} (\xi_1 \varpi + \xi_2)i^* + \gamma \frac{\varphi\alpha}{(\mu + \gamma(\xi_3 \varpi + \xi_4)i^*)} \frac{\beta \varrho i^* + \Pi}{\varepsilon i^* + (\mu + \varphi\alpha)} (\xi_3 \varpi + \\
& \xi_4)i^* - (\omega + \mu + \theta)\varpi i^* = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \varphi)\eta \frac{\beta \varrho i^* + \Pi}{\varepsilon i^* + (\mu + \varphi \alpha)} (\xi_1 \varpi + \xi_2) i^* + \gamma \frac{\varphi \alpha}{(\mu + \gamma(\xi_3 \varpi + \xi_4) i^*)} \frac{\beta \varrho i^* + \Pi}{\varepsilon i^* + (\mu + \varphi \alpha)} (\xi_3 \varpi i^* + \xi_4) i^* - \frac{(\omega + \mu + \theta) \varpi i^* (\varepsilon i^* + (\mu + \varphi \alpha))}{\varepsilon i^* + (\mu + \varphi \alpha)} = 0$$

Kedua ruas dikali $\varepsilon i^* + (\mu + \varphi \alpha)$, maka diperoleh

$$\Leftrightarrow (1 - \varphi)\eta(\beta \varrho i^* + \Pi)(\xi_1 \varpi + \xi_2) i^* + \gamma \frac{\varphi \alpha}{(\mu + \gamma(\xi_3 \varpi + \xi_4) i^*)} (\beta \varrho i^* + \Pi)(\xi_3 \varpi + \xi_4) i^* - (\omega + \mu + \theta) \varpi i^* (\varepsilon i^* + (\mu + \varphi \alpha)) = 0$$

Misalkan $A_1 = (1 - \varphi)\eta(\xi_1 \varpi + \xi_2)$, $A_2 = \gamma(\xi_3 \varpi + \xi_4)$, $A_3 = \gamma \varphi \alpha(\xi_3 \varpi + \xi_4)$,

$A_4 = (\omega + \mu + \theta) \varpi$, dan $A_5 = (\mu + \varphi \alpha)$ sehingga diperoleh

$$A_1(\beta \varrho i^* + \Pi) i^* + \frac{(\beta \varrho i^* + \Pi)}{(\mu + A_2 i^*)} A_3 i^* - A_4 i^* (\varepsilon i^* + A_5) = 0$$

$$\Leftrightarrow A_1 \beta \varrho i^{*2} + i^* A_1 \Pi + \frac{A_3 \beta \varrho i^{*2} + A_3 i^* \Pi}{(\mu + A_2 i^*)} - A_4 \varepsilon i^{*2} - A_4 A_5 i^* = 0$$

$$\Leftrightarrow A_1 \beta \varrho i^{*2} \mu + A_1 \beta \varrho i^{*3} A_2 + i^* A_1 \Pi \mu + A_1 \Pi A_2 i^{*2} + A_3 \beta \varrho i^{*2} + A_3 i^* \Pi -$$

$$A_4 \varepsilon i^{*2} \mu - A_4 \varepsilon i^{*2} A_2 - A_4 A_5 i^* \mu - A_4 A_5 A_2 i^{*2} = 0$$

$$\Leftrightarrow A_1 A_2 \beta \varrho i^{*3} - A_2 A_4 \varepsilon i^{*3} + A_1 \beta \varpi \mu i^{*2} + A_1 A_2 \Pi i^{*2} + A_3 \beta \varrho i^{*2} - A_4 \varepsilon \mu i^{*2} -$$

$$A_2 A_4 A_5 i^{*2} + A_1 \Pi \mu i^* + A_3 \Pi i^* - A_4 A_5 \mu i^* = 0$$

Karena $i^* \neq 0$, maka persamaan tersebut dapat dibagi dengan i^* , sehingga menjadi

$$\Leftrightarrow A_1 A_2 \beta \varrho i^{*2} - A_2 A_4 \varepsilon i^{*2} + A_1 \beta \varpi \mu i^* + A_1 A_2 \Pi i^* + A_3 \beta \varrho i^* - A_4 \varepsilon \mu i^* -$$

$$A_2 A_4 A_5 i^* + A_1 \Pi \mu + A_3 \Pi - A_4 A_5 \mu = 0$$

$$\Leftrightarrow (A_1 A_2 \beta \varpi - A_2 A_4 \varepsilon) i^{*2} + (A_1 \beta \varpi \mu + A_1 A_2 \Pi + A_3 \beta \varpi - A_4 \varepsilon \mu -$$

$$A_2 A_4 A_5) i^* + (A_1 \Pi \mu + A_3 \Pi - A_4 A_5 \mu) = 0$$

Misalkan $\tau_1 = A_1 A_2 \beta \varpi - A_2 A_4 \varepsilon$, $\tau_2 = A_1 \beta \varpi \mu + A_1 A_2 \Pi + A_3 \beta \varpi - A_4 \varepsilon \mu -$

$A_2 A_4 A_5$, dan $\tau_3 = A_1 \Pi \mu + A_3 \Pi - A_4 A_5 \mu$ sehingga diperoleh nilai

$$i^* = \frac{-\tau_2 \pm \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3}}{2\tau_1}.$$

Karena nilai populasi tidak mungkin bernilai negatif maka diperoleh $i^* =$

$$\frac{-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3}}{2\tau_1}. \text{ Selanjutnya substitusikan persamaan } i^* \text{ pada persamaan } s^*, v^*,$$

e^* , dan r^* , sedemikian sehingga diperoleh

$$s^* = \frac{\beta\omega \frac{-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3}}{2\tau_1} + \Pi}{\varepsilon \frac{-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3}}{2\tau_1} + (\mu + \varphi\alpha)}$$

$$s^* = \frac{\beta\omega \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3} \right) + 2\tau_1\Pi}{\varepsilon \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3} \right) + 2\tau_1(\mu + \varphi\alpha)}$$

$$v^* = \frac{\varphi\alpha \frac{\beta\omega \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3} \right) + 2\tau_1\Pi}{\varepsilon \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3} \right) + 2\tau_1(\mu + \varphi\alpha)}}{\left(\mu + \gamma(\xi_3\rho + \xi_4) \frac{-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3}}{2\tau_1} \right)}$$

$$v^* = \frac{2\tau_1\varphi\alpha \frac{\beta\omega \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3} \right) + 2\tau_1\Pi}{\varepsilon \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3} \right) + 2\tau_1(\mu + \varphi\alpha)}}{\left(2\mu\tau_1 + \gamma(\xi_3\rho + \xi_4) \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3} \right) \right)}$$

$$e^* = \frac{(\rho + \mu + \delta) \frac{-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3}}{2\tau_1}}{\omega}$$

$$r^* = \frac{\omega\rho + \theta(\rho + \mu + \delta) \frac{-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3}}{2\tau_1}}{(\mu + \beta)\omega}$$

Berdasarkan hasil yang sudah diperoleh , didapatkan titik kesetimbangan

endemik dengan nilai s^*, v^*, e^*, i^*, r^* sebagaimana di atas.

4.1.2 Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan

Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui laju perubahan pada model SVEIR pada penyebaran COVID-19. Persamaan (4.1) sampai (4.5)

merupakan persamaan tak linier, untuk melakukan analisis kestabilan perlu dilakukan linierisasi terlebih dahulu dengan menggunakan matriks Jacobian.

Persamaan yang akan dilinierisasi adalah:

$$f_1 = \Pi - (1 - \varphi)\eta\xi_1se - (1 - \varphi)\eta\xi_2si - \mu s - \varphi\alpha s + \beta r$$

$$f_2 = \varphi\alpha s - \mu v - \gamma\xi_3ve - \gamma\xi_4vi$$

$$f_3 = (1 - \varphi)\eta\xi_1se + (1 - \varphi)\eta\xi_2si + \gamma\xi_3ve + \gamma\xi_4vi - (\omega + \mu + \theta)e$$

$$f_4 = \omega e - (\rho + \mu + \delta)i$$

$$f_5 = \rho i - (\mu + \beta)r + \theta e$$

Matriks Jacobian dari persamaan di atas adalah sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial e} & \frac{\partial f_1}{\partial i} & \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial e} & \frac{\partial f_2}{\partial i} & \frac{\partial f_2}{\partial r} \\ \frac{\partial f_3}{\partial s} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial e} & \frac{\partial f_3}{\partial i} & \frac{\partial f_3}{\partial r} \\ \frac{\partial f_4}{\partial s} & \frac{\partial f_4}{\partial v} & \frac{\partial f_4}{\partial e} & \frac{\partial f_4}{\partial i} & \frac{\partial f_4}{\partial r} \\ \frac{\partial f_5}{\partial s} & \frac{\partial f_5}{\partial v} & \frac{\partial f_5}{\partial e} & \frac{\partial f_5}{\partial i} & \frac{\partial f_5}{\partial r} \end{bmatrix}$$

Perhitungan turunan dari matriks Jacobian di atas adalah sebagai berikut:

Perhitungan baris pertama

$$\frac{\partial f_1}{\partial s} = \frac{\partial(\Pi - (1 - \varphi)\eta\xi_1se - (1 - \varphi)\eta\xi_2si - \mu s - \varphi\alpha s + \beta r)}{\partial s} = -(1 - \varphi)\eta\xi_1e - (1 - \varphi)\eta\xi_2i - (\mu + \varphi\alpha)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} = \frac{\partial(\Pi - (1 - \varphi)\eta\xi_1se - (1 - \varphi)\eta\xi_2si - \mu s - \varphi\alpha s + \beta r)}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial e} = \frac{\partial(\Pi - (1 - \varphi)\eta\xi_1se - (1 - \varphi)\eta\xi_2si - \mu s - \varphi\alpha s + \beta r)}{\partial e} = -(1 - \varphi)\eta\xi_1s$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial i} = \frac{\partial(\Pi - (1 - \varphi)\eta\xi_1se - (1 - \varphi)\eta\xi_2si - \mu s - \varphi\alpha s + \beta r)}{\partial i} = -(1 - \varphi)\eta\xi_2s$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = \frac{\partial(\Pi - (1 - \varphi)\eta\xi_1se - (1 - \varphi)\eta\xi_2si - \mu s - \varphi\alpha s + \beta r)}{\partial r} = \beta$$

Perhitungan baris kedua

$$\frac{\partial f_2}{\partial s} = \frac{\partial(\varphi\alpha s - \mu v - \gamma\xi_3 ve - \gamma\xi_4 vi)}{\partial s} = \varphi\alpha$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial v} = \frac{\partial(\varphi\alpha s - \mu v - \gamma\xi_3 ve - \gamma\xi_4 vi)}{\partial v} = -\mu - \gamma\xi_3 e - \gamma\xi_4 i$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial e} = \frac{\partial(\varphi\alpha s - \mu v - \gamma\xi_3 ve - \gamma\xi_4 vi)}{\partial e} = -\gamma\xi_3 v$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial i} = \frac{\partial(\varphi\alpha s - \mu v - \gamma\xi_3 ve - \gamma\xi_4 vi)}{\partial i} = -\gamma\xi_4 v$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial r} = \frac{\partial(\varphi\alpha s - \mu v - \gamma\xi_3 ve - \gamma\xi_4 vi)}{\partial r} = 0$$

Perhitungan baris ketiga

$$\frac{\partial f_3}{\partial s} = \frac{\partial((1-\varphi)\eta\xi_1 se + (1-\varphi)\eta\xi_2 si + \gamma\xi_3 ve + \gamma\xi_4 vi - (\omega + \mu + \theta)e)}{\partial s} = (1-\varphi)\eta\xi_1 e + (1-\varphi)\eta\xi_2 i$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial v} = \frac{\partial((1-\varphi)\eta\xi_1 se + (1-\varphi)\eta\xi_2 si + \gamma\xi_3 ve + \gamma\xi_4 vi - (\omega + \mu + \theta)e)}{\partial v} = \gamma\xi_3 e + \gamma\xi_4 i$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial e} = \frac{\partial((1-\varphi)\eta\xi_1 se + (1-\varphi)\eta\xi_2 si + \gamma\xi_3 ve + \gamma\xi_4 vi - (\omega + \mu + \theta)e)}{\partial e} = (1-\varphi)\eta\xi_1 s + \gamma\xi_3 v - (\omega + \mu + \theta)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial i} = \frac{\partial((1-\varphi)\eta\xi_1 se + (1-\varphi)\eta\xi_2 si + \gamma\xi_3 ve + \gamma\xi_4 vi - (\omega + \mu + \theta)e)}{\partial i} = (1-\varphi)\eta\xi_2 s + \gamma\xi_4 v$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial r} = \frac{\partial((1-\varphi)\eta\xi_1 se + (1-\varphi)\eta\xi_2 si + \gamma\xi_3 ve + \gamma\xi_4 vi - (\omega + \mu + \theta)e)}{\partial r} = 0$$

Perhitungan baris keempat

$$\frac{\partial f_4}{\partial s} = \frac{\partial(\omega e - (\rho + \mu + \delta)i)}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial v} = \frac{\partial(\omega e - (\rho + \mu + \delta)i)}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial e} = \frac{\partial(\omega e - (\rho + \mu + \delta)i)}{\partial e} = \omega$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial i} = \frac{\partial(\omega e - (\rho + \mu + \delta)i)}{\partial i} = -(\rho + \mu + \delta)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial r} = \frac{\partial(\omega e - (\rho + \mu + \delta)i)}{\partial r} = 0$$

Perhitungan baris kelima

$$\frac{\partial f_5}{\partial s} = \frac{\partial(\rho i - (\mu + \beta)r + \theta e)}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial v} = \frac{\partial(\rho i - (\mu + \beta)r + \theta e)}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial e} = \frac{\partial(\rho i - (\mu + \beta)r + \theta e)}{\partial e} = \theta$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial i} = \frac{\partial(\rho i - (\mu + \beta)r + \theta e)}{\partial i} = \rho$$

$$\frac{\partial f_5}{\partial r} = \frac{\partial(\rho i - (\mu + \beta)r + \theta e)}{\partial r} = -(\mu + \beta)$$

Sehingga didapatkan hasil:

$$J = \begin{bmatrix} -H_1 - H_2 - (\mu + \varphi\alpha) & 0 & -H_5 & -H_6 & \beta \\ \varphi\alpha & -\mu - H_3 - H_4 & -\gamma\xi_3v & -H_8 & 0 \\ H_1 + H_2 & H_3 + H_4 & H_5 + H_7 - (\omega + \mu + \theta) & H_6 + H_8 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\rho + \mu + \delta) & 0 \\ 0 & 0 & \theta & \rho & -(\mu + \beta) \end{bmatrix}$$

Dengan

$$H_1 = (1 - \varphi)\eta\xi_1e$$

$$H_2 = (1 - \varphi)\eta\xi_2i$$

$$H_3 = \gamma\xi_3e$$

$$H_4 = \gamma\xi_4i$$

$$H_5 = (1 - \varphi)\eta\xi_1s$$

$$H_6 = (1 - \varphi)\eta\xi_2s$$

$$H_7 = \gamma\xi_3v$$

$$H_8 = \gamma\xi_4v$$

Model penyebaran penyakit mempunyai dua titik kesetimbangan, oleh karena itu analisis kestabilan dilakukan pada kedua titik kesetimbangan tersebut, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

a. Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Analisis kestabilan pada titik kesetimbangan bebas penyakit dilakukan dengan mensubstitusikan $E_0 = (s_0, v_0, e_0, i_0, r_0)$ ke dalam matriks Jacobian yang telah diperoleh. Didapatkan matrik Jacobian titik kesetimbangan bebas

penyakit ($J(E_0)$) sebagai berikut:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -(\mu + \varphi\alpha) & 0 & H_5 & -H_6 & \beta \\ \varphi\alpha & -\mu & -H_7 & -H_8 & 0 \\ 0 & 0 & H_5 + H_7 - (\omega + \mu + \theta) & H_6 + H_8 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\rho + \mu + \delta) & 0 \\ 0 & 0 & \theta & \rho & -(\mu + \beta) \end{bmatrix}$$

Dengan,

$$H_5 = (1 - \varphi)\eta\xi_1 s_0 = (1 - \varphi)\eta\xi_1 \left(\frac{\Pi}{\mu + \varphi\alpha} \right)$$

$$H_6 = (1 - \varphi)\eta\xi_2 s_0 = (1 - \varphi)\eta\xi_2 \left(\frac{\Pi}{\mu + \varphi\alpha} \right)$$

$$H_7 = \gamma\xi_3 v_0 = \gamma\xi_3 \left(\frac{\varphi\alpha\Pi}{\mu^2 + \mu\varphi\alpha} \right)$$

$$H_8 = \gamma\xi_4 v_0 = \gamma\xi_4 \left(\frac{\varphi\alpha\Pi}{\mu^2 + \mu\varphi\alpha} \right)$$

nilai eigen dari matriks $J(E_0)$ diperoleh dari persamaan

$$\det|J(E_0) - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda - \mu - \varphi\alpha & 0 & H_5 & -H_6 & \beta \\ \varphi\alpha & -\lambda - \mu & -H_7 & -H_8 & 0 \\ 0 & 0 & H_5 + H_7 - \omega - \mu - \theta - \lambda & H_6 + H_8 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -\rho - \mu - \delta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \theta & \rho & -\mu - \beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\lambda - \mu) \begin{vmatrix} -\lambda - \mu - \varphi\alpha & H_5 & -H_6 & \beta \\ 0 & H_5 + H_7 - \omega - \mu - \theta - \lambda & -H_8 & 0 \\ 0 & \omega & -\rho - \mu - \delta - \lambda & 0 \\ 0 & \theta & \rho & -\mu - \beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\lambda - \mu)(-\lambda - \mu - \varphi\alpha) \begin{vmatrix} H_5 + H_7 - \omega - \mu - \theta - \lambda & H_6 + H_8 & 0 \\ \omega & -\rho - \mu - \delta - \lambda & 0 \\ \theta & \rho & -\mu - \beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\lambda - \mu)(-\lambda - \mu - \varphi\alpha)(-\mu - \beta - \lambda) \begin{vmatrix} H_5 + H_7 - \omega - \mu - \theta - \lambda & H_6 + H_8 \\ \omega & -\rho - \mu - \delta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Didapatkan nilai eigen negatif yaitu:

$$\Rightarrow -\lambda_1 - \mu = 0$$

$$-\lambda_1 - \mu = 0$$

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\Rightarrow -\lambda_2 - \mu - \alpha\varphi = 0$$

$$\lambda_2 = -\mu - \alpha\varphi$$

$$\Rightarrow -\mu - \beta - \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_3 = -\mu - \beta$$

dan untuk 2 nilai eigen lainnya diperoleh dari persamaan $((H_5 + H_7 - \omega - \mu - \theta) - \lambda)(-(\rho + \mu + \delta) - \lambda) - \omega(H_6 + H_8) = 0$

dengan memisalkan

$$A = (H_5 + H_7 - \omega - \mu - \theta) \text{ dan } B = -(\rho + \mu + \delta)$$

Sehingga diperoleh

$$\lambda^2 - (A + B)\lambda + AB - \omega(H_6 + H_8) = 0$$

$$\lambda^2 - ((H_5 + H_7 - \omega - \mu - \theta) - (\rho + \mu + \delta))\lambda + (H_5 + H_7 - \omega - \mu - \theta)(-\rho - \mu - \delta) - \omega(H_6 + H_8) = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (H_5 + H_7 - \omega - 2\mu - \theta - \rho - \delta)\lambda - H_5\rho - H_5\mu - H_5\delta - H_7\rho - H_7\mu \\ - H_7\delta + \omega\rho + \omega\mu + \omega\delta + \mu\rho + \mu^2 + \mu\delta + \theta\rho + \theta\mu + \theta\delta \\ - H_6\omega - H_8\omega = 0 \end{aligned}$$

Maka diperoleh persamaan karakteristik

$$a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

dimana

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = H_5 + H_7 - \omega - 2\mu - \theta - \rho - \delta$$

$$\begin{aligned} a_3 = \omega\rho - H_5\rho - H_5\mu - H_5\delta - H_7\rho - H_7\mu - H_7\delta + \omega\mu + \omega\delta + \mu\rho + \mu^2 \\ + \mu\delta + \theta\rho + \theta\mu + \theta\delta - H_6\omega - H_8\omega \end{aligned}$$

Kedua nilai eigen yang lain sulit ditentukan, maka akan digunakan kriteria *Routh-Hurwitz* untuk mengetahui sifat kestabilan dari titik kesetimbangan bebas

penyakit ini. Dengan menggunakan kriteria tersebut, titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik jika dan hanya jika memenuhi kondisi

- i. $a_2 > 0$
- ii. $a_1 a_2 > a_3$

b. Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

Analisis kestabilan pada titik kesetimbangan endemik dilakukan dengan mensubstitusikan $E_1 = (s^*, v^*, e^*, i^*, r^*)$ ke dalam matriks Jacobian yang telah diperoleh. Didapatkan matriks Jacobian titik kesetimbangan endemik ($J(E_1)$) sebagai berikut:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -H_1 - H_2 - (\mu + \varphi\alpha) & 0 & -H_5 & -H_6 & \beta \\ \varphi\alpha & -\mu - H_3 - H_4 & -H_7 & -H_8 & 0 \\ H_1 + H_2 & H_3 + H_4 & H_5 + H_7 - (\omega + \mu + \theta) & H_6 + H_8 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\rho + \mu + \delta) & 0 \\ 0 & 0 & \theta & \rho & -(\mu + \beta) \end{bmatrix}$$

Dengan

$$H_1 = (1 - \varphi)\eta\xi_1 e^* = (1 - \varphi)\eta\xi_1 \left(\frac{(\rho + \mu + \delta) \frac{-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3}}{2\tau_1}}{\omega} \right)$$

$$H_2 = (1 - \varphi)\eta\xi_2 i^* = (1 - \varphi)\eta\xi_2 \left(\frac{-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3}}{2\tau_1} \right)$$

$$H_3 = \gamma\xi_3 e^* = \gamma\xi_3 \left(\frac{(\rho + \mu + \delta) \frac{-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3}}{2\tau_1}}{\omega} \right)$$

$$H_4 = \gamma\xi_4 i^* = \gamma\xi_4 \left(\frac{-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3}}{2\tau_1} \right)$$

$$H_5 = (1 - \varphi)\eta\xi_1 s^* = (1 - \varphi)\eta\xi_1 \left(\frac{\beta\omega \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3} \right) + 2\tau_1\Pi}{\varepsilon \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3} \right) + 2\tau_1(\mu + \varphi\alpha)} \right)$$

$$H_6 = (1 - \varphi)\eta\xi_2 s^* = (1 - \varphi)\eta\xi_2 \left(\frac{\beta\omega \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3} \right) + 2\tau_1\Pi}{\varepsilon \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3} \right) + 2\tau_1(\mu + \varphi\alpha)} \right)$$

$$H_7 = \gamma \xi_3 v^* = \gamma \xi_3 \left(\frac{2\tau_1 \varphi \alpha}{\left(2\mu\tau_1 + \gamma(\xi_3 \varrho + \xi_4)\right) \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1 \tau_3}\right)} \frac{\beta \varpi \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1 \tau_3}\right) + 2\tau_1 \Pi}{\varepsilon \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1 \tau_3}\right) + 2\tau_1 (\mu + \varphi \alpha)} \right)$$

$$H_8 = \gamma \xi_4 v^* = \gamma \xi_4 \left(\frac{2\tau_1 \varphi \alpha}{\left(2\mu\tau_1 + \gamma(\xi_3 \varrho + \xi_4)\right) \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1 \tau_3}\right)} \frac{\beta \varpi \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1 \tau_3}\right) + 2\tau_1 \Pi}{\varepsilon \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1 \tau_3}\right) + 2\tau_1 (\mu + \varphi \alpha)} \right)$$

Nilai eigen dari matriks $J(E_1)$ diperoleh dari persamaan $\det|J(E_1) - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} -H_1 - H_2 - \mu - \varphi \alpha - \lambda & 0 & -H_5 & -H_6 & \beta \\ \varphi \alpha & -\mu - H_3 - H_4 - \lambda & -H_7 & -H_8 & 0 \\ H_1 + H_2 & H_3 + H_4 & H_5 + H_7 - \omega - \mu - \theta - \lambda & H_6 + H_8 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -\rho - \mu - \delta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \theta & \rho & -\mu - \beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\mu - \beta - \lambda)K_1 E_1 + \beta K_2 E_1 = 0$$

K_1 : Kofaktor dari Matriks baris ke-5 kolom ke-5

K_2 : Kofaktor dari Matriks baris ke-1 kolom ke-5

dimana

$$K_1 E_1 = \begin{vmatrix} -H_1 - H_2 - \mu - \varphi \alpha - \lambda & 0 & -H_5 & \beta \\ \varphi \alpha & -\mu - H_3 - H_4 - \lambda & -H_7 & 0 \\ H_1 + H_2 & H_3 + H_4 & H_5 + H_7 - \omega - \mu - \theta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$K_2 E_1 = \begin{vmatrix} \varphi \alpha & -\mu - H_3 - H_4 - \lambda & -H_7 & \beta \\ H_1 + H_2 & H_3 + H_4 & H_5 + H_7 - \omega - \mu - \theta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \theta & -\mu - \beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Didapatkan persamaan karakteristik, yaitu

$$(\lambda^5 + a_4 \lambda^4 + a_5 \lambda^3 + a_6 \lambda^2 + a_7 \lambda + a_8) = 0$$

Karena nilai eigen dari persamaan karakteristik diatas sulit ditentukan, maka akan digunakan kriteria *Routh-Hurwitz* untuk mengetahui sifat kestabilan dari titik kesetimbangan endemik ini. Dengan menggunakan kriteria tersebut, titik kesetimbangan endemik akan stabil asimtotik jika dan hanya jika memenuhi kondisi

i. $a_8 > 0$

ii. $a_6 > 0$

$$\text{iii. } a_4 > 0$$

$$\text{iv. } a_7(a_5 a_6 - a_7) > a_4^2 a_8$$

4.1.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar merupakan jumlah rata-rata infeksi baru yang dihasilkan oleh individu terinfeksi ke dalam populasi *Susceptible*. Metode yang digunakan untuk menentukan R_0 ini yaitu metode *Driesche and Watmough*, metode ini menggunakan titik kesetimbangan bebas penyakit dan persamaan yang digunakan adalah persamaan terinfeksi, yaitu :

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= (1 - \varphi)\eta\xi_1 se + (1 - \varphi)\eta\xi_2 si + \gamma\xi_3 ve + \gamma\xi_4 vi - \omega e - \mu e - \theta e \\ &= (1 - \varphi)\eta\xi_1 se + (1 - \varphi)\eta\xi_2 si + \gamma\xi_3 ve + \gamma\xi_4 vi - (\omega + \mu + \theta)e \\ \frac{di}{dt} &= \omega e - \rho i - \mu i - \delta i \\ &= \omega e - (\rho + \mu + \delta)i \end{aligned}$$

Pada persamaan di atas didapatkan matriks \mathcal{F} yang merupakan laju kemunculan terinfeksi baru pada populasi *Infected* dan matrik \mathcal{V} merupakan laju dari perpindahan individu keluar dari populasi *Infected* dikurangi laju dari perpindahan individu masuk ke dalam populasi *Infected*, sebagai berikut :

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} (1 - \varphi)\eta\xi_1 se + (1 - \varphi)\eta\xi_2 si + \gamma\xi_3 ve + \gamma\xi_4 vi \\ \omega e \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} (\omega + \mu + \theta)e \\ (\rho + \mu + \delta)i \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dibentuk matriks Jacobi yang dievaluasi di titik kesetimbangan bebas penyakit, sehingga didapatkan hasil sebagai berikut:

$$J(F) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_e}{\partial e} & \frac{\partial \mathcal{F}_e}{\partial i} \\ \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial e} & \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial i} \end{bmatrix} \text{ dan } J(V) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}_e}{\partial e} & \frac{\partial \mathcal{V}_e}{\partial i} \\ \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial e} & \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial i} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} (1 - \varphi)\eta\xi_1 s + \gamma\xi_3 v & (1 - \varphi)\eta\xi_2 si + \gamma\xi_4 vi \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \omega + \mu + \theta & 0 \\ 0 & \rho + \mu + \delta \end{bmatrix}$$

Kemudian substitusikan titik kesetimbangan penyakit, sehingga didapatkan

$$F = \begin{bmatrix} (1 - \varphi)\eta\xi_1 \left(\frac{\Pi}{\mu + \varphi\alpha}\right) + \gamma\xi_3 \left(\frac{\varphi\alpha\Pi}{\mu^2 + \mu\varphi\alpha}\right) & (1 - \varphi)\eta\xi_2 \left(\frac{\Pi}{\mu + \varphi\alpha}\right) + \gamma\xi_4 \left(\frac{\varphi\alpha\Pi}{\mu^2 + \mu\varphi\alpha}\right) \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \omega + \mu + \theta & 0 \\ 0 & \rho + \mu + \delta \end{bmatrix}$$

Setelah itu dicari matriks *next generation* yaitu $NGM = FV^{-1}$, dimana

$$V^{-1} = \frac{1}{\det(V)} \times adj(V)$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega + \mu + \theta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho + \mu + \delta} \end{bmatrix}$$

$$NGM = FV^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 - \varphi)\eta\xi_1 \left(\frac{\Pi}{\mu + \varphi\alpha}\right) + \gamma\xi_3 \left(\frac{\varphi\alpha\Pi}{\mu^2 + \mu\varphi\alpha}\right) & (1 - \varphi)\eta\xi_2 \left(\frac{\Pi}{\mu + \varphi\alpha}\right) + \gamma\xi_4 \left(\frac{\varphi\alpha\Pi}{\mu^2 + \mu\varphi\alpha}\right) \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega + \mu + \theta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho + \mu + \delta} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(1 - \varphi)\eta\xi_1 \left(\frac{\Pi}{\mu + \varphi\alpha}\right) + \gamma\xi_3 \left(\frac{\varphi\alpha\Pi}{\mu^2 + \mu\varphi\alpha}\right)}{\omega + \mu + \theta} & \frac{(1 - \varphi)\eta\xi_2 \left(\frac{\Pi}{\mu + \varphi\alpha}\right) + \gamma\xi_4 \left(\frac{\varphi\alpha\Pi}{\mu^2 + \mu\varphi\alpha}\right)}{\rho + \mu + \delta} \\ \frac{\omega}{\omega + \mu + \theta} & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen(λ) diperoleh dari mencari persamaan karakteristik matriks NGM ,

untuk mempermudah perhitungan, dimisalkan :

$$a = \frac{(1 - \varphi)\eta\xi_1 \left(\frac{\Pi}{\mu + \varphi\alpha} \right) + \gamma\xi_3 \left(\frac{\varphi\alpha\Pi}{\mu^2 + \mu\varphi\alpha} \right)}{\omega + \mu + \theta}$$

$$b = \frac{(1 - \varphi)\eta\xi_2 \left(\frac{\Pi}{\mu + \varphi\alpha} \right) + \gamma\xi_4 \left(\frac{\varphi\alpha\Pi}{\mu^2 + \mu\varphi\alpha} \right)}{\rho + \mu + \delta}$$

$$c = \frac{\omega}{\omega + \mu + \theta}$$

sehingga $NGM = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$

Kemudian akan dihitung persamaan karakteristiknya dengan $|NGM - \lambda I| = 0$

$$|NGM - \lambda I| = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - a\lambda - bc = 0$$

Dengan menghitung nilai λ pada persamaan tersebut diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bc}}{2}, \lambda_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4bc}}{2}$$

Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai nilai eigen dominan dari matrik *next generation*, sehingga didapatkan nilai R_0 , yaitu:

$$R_0 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bc}}{2}$$

4.2 Analisis Sensitivitas R_0

Berdasarkan data yang diperoleh pada penelitian ini didapatkan nilai indeks sensitivitas R_0 terhadap masing-masing parameter. Adapun tahapan analisis sensitivitas untuk setiap parameter sebagai berikut:

Persamaan bilangan reproduksi R_0 diturunkan terhadap parameter yang akan diuji nilai sensitivitas. Adapun tahapan analisis sensitivitas untuk parameter laju vaksinansi (α) yaitu sebagai berikut:

Perhitungan indeks sensitivitas laju vaksinasi (α):

$$C_{\alpha}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \alpha} \times \frac{\alpha}{R_0}$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{(1-\varphi)\eta\xi_1 \left(\frac{\Pi}{\mu+\varphi\alpha} \right) + \gamma\xi_3 \left(\frac{\varphi\alpha\Pi}{\mu^2+\mu\varphi\alpha} \right)}{\omega+\mu+\theta} + \sqrt{\left(\frac{(1-\varphi)\eta\xi_1 \left(\frac{\Pi}{\mu+\varphi\alpha} \right) + \gamma\xi_3 \left(\frac{\varphi\alpha\Pi}{\mu^2+\mu\varphi\alpha} \right)}{\omega+\mu+\theta} \right)^2 + 4 \left(\frac{(1-\varphi)\eta\xi_2 \left(\frac{\Pi}{\mu+\varphi\alpha} \right) + \gamma\xi_4 \left(\frac{\varphi\alpha\Pi}{\mu^2+\mu\varphi\alpha} \right)}{\rho+\mu+\delta} \right) \frac{\omega}{\omega+\mu+\theta}} \right)}{2} \times \frac{\alpha}{R_0}$$

Substitusi nilai parameter Tabel 2.2 menghasilkan

$$C_{\alpha}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \alpha} \times \frac{\alpha}{R_0} = -0.00013270$$

Berdasarkan perhitungan di atas, diterapkan hal yang sama untuk menentukan hasil indeks sensitivitas R_0 terhadap masing-masing parameter diperoleh seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.1

Tabel 4.1 Nilai Indeks Sensitivitas

Parameter	Indeks sensitivitas
Π	0,00022372
β	0,00054566
μ	-0,000091042
φ	-0,00018674
α	-0,00013270
η	0,00021615
ξ_1	0,00021615
ξ_2	0,0001568
ξ_3	0,0000075684
ξ_4	0,0000073682
γ	0,0000075684
ω	-0,00022066
θ	-0,00000043326
ρ	-0,0000026050
δ	-0,000000096482

Parameter-parameter di atas mempunyai pengaruh terhadap besarnya nilai bilangan reproduksi dasar (R_0). Parameter dengan nilai indeks sensitivitas positif

memiliki arti bahwa dengan memperbesar nilai pada parameter tersebut dan nilai parameter yang lain tetap sama maka akan meningkatkan bilangan reproduksi dasar. Begitu pula dengan menurunkan nilai parameter yang memiliki indeks sensitivitas positif dengan nilai parameter yang lain tetap sama maka akan menurunkan bilangan reproduksi dasar. Sebaliknya dengan indeks sensitivitas negatif, dengan memperbesar nilai parameter yang memiliki indeks negatif, dengan parameter yang lainnya tetap sama, maka akan memperkecil bilangan reproduksi dasar. Begitu juga dengan menurunkan nilai parameter tersebut dan parameter yang lain tetap sama maka akan memperbesar bilangan reproduksi dasar.

Berdasarkan tabel indeks sensitivitas di atas, sebagai contoh selain parameter laju kelahiran dan probabilitas individu (I) melakukan kontak dengan individu (V) yang berpengaruh pada besarnya bilangan reproduksi dasar, bilangan reproduksi dasar dapat diturunkan dengan menurunkan nilai parameter yang memiliki indeks positif, seperti contohnya parameter ξ_1 (Tingkat kontak antara individu yang rentan (S) dengan individu yang terpapar (E)) dan ξ_3 (Tingkat kontak antara individu yang sudah divaksin (V) dengan individu yang terpapar (E)). Indeks sensitivitas ω (Tingkat penularan sesudah selesainya masa inkubasi kemudian menjadi kelas (I)) merupakan salah satu parameter yang berpengaruh negatif. Selanjutnya yaitu dapat dilakukan untuk membuat $R_0 < 1$ antara lain:

- a. Mengurangi ξ_1 (kontak antara individu yang rentan (S) dengan individu yang terpapar (E)). Misalnya menggunakan masker dengan menggunakan masker untuk perlindungan diri untuk mencegah virus dari orang lain masuk ke dalam tubuh.

- b. Mengurangi ξ_3 (kontak antara individu yang sudah divaksin (V) dengan individu yang terpapar (E)).
- c. Mengurangi β (laju kemungkinan individu sembuh untuk kembali rentan). Misalnya dengan menjaga imunitas tubuh.
- d. Meningkatkan parameter α (laju vaksinasi) yaitu semisal dengan melakukan perawatan yang baik dan menjaga imun tubuh dengan melakukan vaksinasi, serta menjaga kebersihan.

4.3 Simulasi Numerik Pada Model SVEIR

Pada bagian ini akan dilakukan simulasi yang bertujuan untuk mensimulasikan hasil yang telah didapatkan pada analisis sebelumnya. Pada simulasi pertama akan digambarkan kondisi penyebaran covid menggunakan beberapa percobaan nilai α . Penelitian ini menggunakan percobaan $\alpha = 0.001$ dan $\alpha = 0.0003$.

a. Simulasi Numerik Ketika $R_0 < 1$

Hasil simulasi menggunakan $\alpha = 0.001$ ditunjukkan pada Gambar 4.2. Hasil dengan nilai $\alpha = 0.001$ diperoleh nilai $R_0 = 0.5709$. dan hasil analisis masing-masing titik kesetimbangan berdasarkan nilai eigen yaitu:

Nilai eigen titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh dari matriks Jacobi $J(E_0)$ dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel 2.2 ketika $R_0 < 1$, sehingga didapatkan nilai eigen berikut: $\lambda_1 = -0.000235700000000$, $\lambda_2 = -0.000035700000000$, $\lambda_3 = -0.000135700000000$, $\lambda_4 = -0.003198459807490$, $\lambda_5 = -0.271075708274711$. Dari nilai eigen tersebut dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit ini stabil asimtotik karena semua nilai eigen bernilai endemik. Nilai eigen titik kesetimbangan bebas endemik diperoleh dari

matriks Jacobi $J(E_1)$ dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel 2.2 ketika $R_0 < 1$, sehingga didapatkan nilai eigen berikut:

$$\lambda_2 = -0.000135696933152 + 0.000000000013317i$$

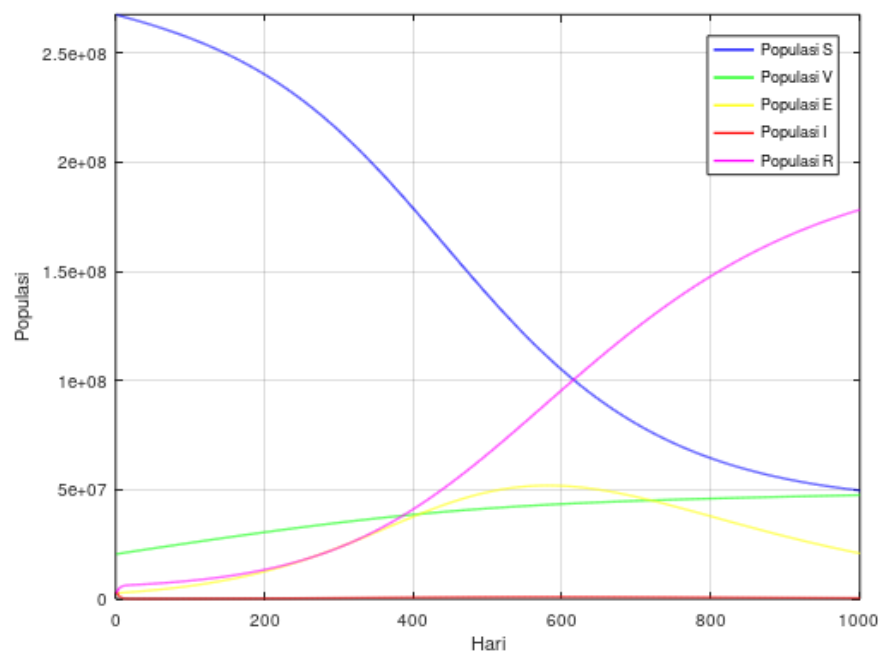
$$\lambda_3 = -0.000235704401762 + 0.000000000434629i$$

$$\lambda_4 = 0.001947457087426 + 0.000725430816745i$$

$$\lambda_5 = -0.271141922882937 - 0.000007902384570i$$

Dari nilai eigen tersebut dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan endemik ini tidak stabil karena terdapat nilai eigen yang bernilai positif.

Selain itu, nilai bilangan reproduksi $R_0 = 0.5709$ tersebut menunjukkan bahwa penyebaran covid dapat selesai dan hilang dari wilayah penyebarannya. Hasil grafik yang ditunjukkan pada Gambar 4.1 terlihat bahwa jumlah populasi E mencapai puncaknya diantara hari ke 400 hingga hari ke 600. Pada hari berikutnya populasi semakin menurun yang menunjukkan kasus penyebaran covid semakin menurun.

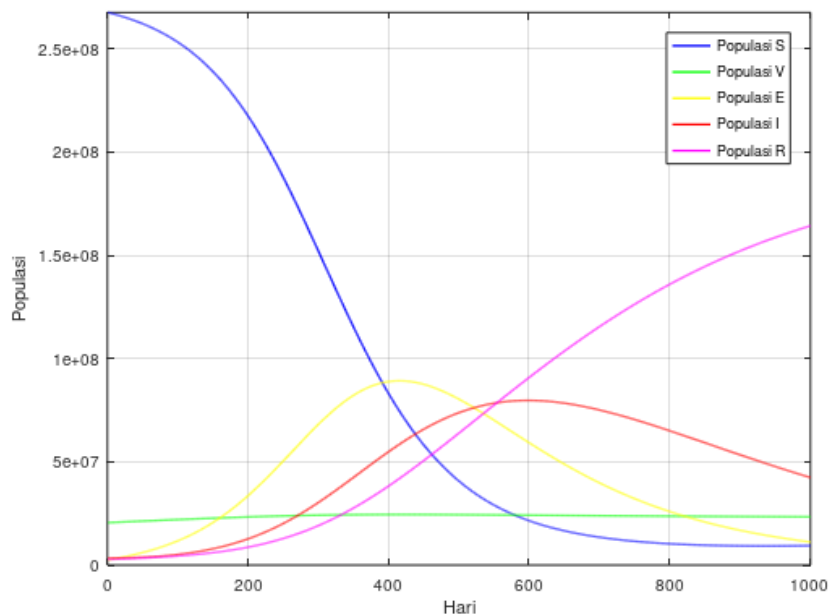


Gambar 4.1 Hasil Simulasi Menggunakan $R_1 < 1$

b. Simulasi Numerik Ketika $R_0 > 1$

Hasil percobaan yang kedua dengan nilai $\alpha = 0.0003$ diperoleh bilangan reproduksi $R_0 = 1.2888$ dan hasil analisis masing-masing titik kesetimbangan berdasarkan nilai eigen yaitu: Nilai eigen titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh dari matriks Jacobi $J(E_0)$ dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel 2.2 ketika $R_0 > 1$, sehingga didapatkan nilai eigen berikut $\lambda_1 = -0.000095700000000, \lambda_2 = -0.000035700000000, \lambda_3 = -0.000135700000000, \lambda_4 = 0.000440617177461, \lambda_5 = -0.271126727011238$. Dari nilai eigen tersebut dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit ini tidak stabil karena terdapat nilai eigen yang bernilai positif. Nilai eigen titik kesetimbangan endemik dari matriks Jacobi $J(E_1)$ dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel 2.2 ketika $R_0 > 1$, sehingga didapatkan nilai eigen berikut: $\lambda_1 = -0.000035700000188, \lambda_2 = -0.00009569287939, \lambda_3 = -0.000135707064774, \lambda_4 = 0.004206194691047, \lambda_5 = -0.271166680045844$. Dari nilai eigen tersebut dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan endemik ini tidak stabil karena terdapat nilai eigen yang bernilai positif.

Selain itu, nilai bilangan reproduksi $R_0 = 1.2888$ tersebut menunjukkan penyebaran covid yang tidak dapat berhenti atau endemik pada suatu wilayah. Hasil percobaan menggunakan $\alpha = 0.0003$ ditunjukkan pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2 Hasil Simulasi Menggunakan $R_0 > 1$

Al-Qur'an sebagai obat telah memenuhi prinsip-prinsip pengobatan, karena di dalamnya dijelaskan bahwa Allah yang menyembuhkan segala penyakit. Al-Qur'an adalah kitab petunjuk, maka di dalamnya disebutkan sesuatu yang haram dan yang halal yang kemudian hal itu akan menjadi petunjuk bagi manusia untuk membedakan mana yang buruk dan yang baik bagi kesehatan. Al-Qur'an merupakan kitab yang mengandung kebenaran, karena berasal dari sisi Allah langsung, sehingga di dalamnya penuh keyakinan yang benar dan tidak mengandung tahayul. Adapun takhayul, maka itu adalah buatan manusia sendiri.

Dalam surat *al-Syuarā'* ayat 80 dijelaskan yang berarti:

“Dan apabila aku sakit, dialah yang menyembuhkan aku.”

Maksud dari ayat tersebut adalah bahwasanya hanya Allah yang menyembuhkan segala penyakit. Dalam Tafsir *al-Azhar* ditegaskan bahwa manusia hanya berusaha mencari obat, tapi Allah-lah yang menyembuhkannya.

Mengingat al-Qur'an adalah obat bagi orang yang beriman, maka ia dapat diterima, diyakini kebenarannya dan mengandung keberkahan yang diciptakan

Allah di dalamnya. Al-Qur'an memenuhi kaidah-kaidah pengobatan, karena di dalamnya terdapat petunjuk untuk menjaga kesehatan, adanya keringanan dalam mengerjakan suatu amalan wajib, sehingga tidak memberatkan bagi si sakit dan tidak menyebabkan sakitnya semakin bertambah parah, di dalamnya juga terdapat informasi tentang pencegahan agar seseorang tidak terserang suatu penyakit (Abdul Malik Abdul K.A., 1987). Seperti halnya kita melakukan penelitian ini untuk mengetahui analisis dinamik model SVEIR pada penyebaran penyakit COVID-19, tetapi untuk mencegah penyakit ini agar tidak meluas dari kesadaran diri sendiri.

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan dan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, maka diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Berdasarkan analisis dinamik model SVEIR penyebaran COVID-19 didapatkan dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) dan titik kesetimbangan endemik (E_1).

- a. Titik kesetimbangan bebas penyakit menghasilkan 2 titik tetap sebagai berikut:

$$E_0 = (s_0, v_0, e_0, i_0, r_0) = \left(\frac{\Pi}{\mu + \varphi\alpha}, \frac{\varphi\alpha\Pi}{\mu^2 + \mu\varphi\alpha}, 0, 0, 0 \right)$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit ini bersifat stabil asimtotik jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz dan nilai eigennya.

- b. Titik kesetimbangan endemik menghasilkan 5 titik tetap sebagai berikut:

$$E_1 = (s^*, v^*, e^*, i^*, r^*)$$

$$s^* = \frac{\beta\varpi \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3} \right) + 2\tau_1\Pi}{\varepsilon \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3} \right) + 2\tau_1(\mu + \varphi\alpha)}$$

$$v^* = \frac{2\tau_1\varphi\alpha}{\left(2\mu\tau_1 + \gamma(\xi_3\rho + \xi_4) \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3} \right) \right)} \frac{\beta\varpi \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3} \right) + 2\tau_1\Pi}{\varepsilon \left(-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3} \right) + 2\tau_1(\mu + \varphi\alpha)}$$

$$i^* = \frac{-\tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3}}{2\tau_1}$$

$$e^* = \frac{(\rho + \mu + \delta) - \tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3}}{\omega} \frac{1}{2\tau_1}$$

$$r^* = \frac{\omega\rho + \theta(\rho + \mu + \delta) - \tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 - 4\tau_1\tau_3}}{(\mu + \beta)\omega} \frac{1}{2\tau_1}$$

Titik kesetimbangan endemik ini bersifat stabil asimtotik jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz dan nilai eigennya.

2. Berdasarkan hasil analisis sensitivitas diperoleh bahwa laju vaksinasi merupakan parameter dengan nilai indeks negatif, selanjutnya yaitu dapat dilakukan untuk membuat $R_0 < 1$ antara lain:
 - a. Mengurangi ξ_1 (kontak antara individu yang rentan (S) dengan individu yang terpapar (E)). Misalnya menggunakan masker dengan menggunakan masker untuk perlindungan diri untuk mencegah virus dari orang lain masuk ke dalam tubuh
 - b. Mengurangi ξ_3 (kontak antara individu yang sudah divaksin (V) dengan individu yang terpapar (E)).
 - c. Mengurangi β (laju kemungkinan individu sembuh untuk kembali rentan). Misalnya dengan menjaga imunitas tubuh.
 - d. Meningkatkan parameter α (laju vaksinasi) yaitu semisal dengan melakukan perawatan yang baik dan menjaga imun tubuh dengan melakukan vaksinasi, serta menjaga kebersihan.
3. Berdasarkan simulasi numerik yang dilakukan terhadap model SVEIR diperoleh:
 - a. Pada kondisi bebas penyakit
 Berdasarkan hasil simulasi saat $R_0 < 1$ dengan percobaan $\alpha = 0.001$, dan diperoleh nilai $R_0 = 0.5709$. Bilangan reproduksi tersebut menunjukkan bahwa penyebaran penyakit COVID-19 dapat

selesai dan hilang dari wilayah penyebarannya.

b. Pada kondisi endemik

Berdasarkan hasil simulasi saat $R_0 > 1$ dengan percobaan $\alpha = 0.0003$, dan diperoleh nilai $R_0 = 1.2888$. Bilangan reproduksi tersebut menunjukkan penyebaran COVID-19 yang tidak dapat berhenti atau endemik pada suatu wilayah.

5.2 Saran

Pada penelitian ini membahas model matematika penyebaran COVID-19 dengan 5 populasi yaitu *Susceptible (S)*, *Vaccinated (V)*, *Exposed (E)*, *Infected (I)*, *Recovered (R)* akan tetapi belum membahas pengaruh besar indeks sensitivitas parameter terhadap R_0 . Untuk penelitian selanjutnya diharapkan untuk membahas pengaruh besar indeks sensitivitas parameter terhadap R_0 .

DAFTAR PUSTAKA

- Abdul Malik Abdul Karim Amrullah. (1987). *Tafsir Al-Azhar Jilid 6*. Jakarta: Yayasan Nurul Islam. 235-236
- Abdurrahman bin Nashir as-Sa'di, Syaikh. 2015. *Tafsir Al-Qur'an jilid 7*. Jakarta: Darul Haq
- Al-Qur'an Terjemahan. (2015). *Departemen Agama RI*. Bandung: CV Darus Sunnah
- Andari, Ari. (2017). *Aljabar Linier Elementer* Malang UB Press
- Annas, S., Isbar Pratama, M., Rifandi, M., Sanusi, W., & Side, S. (2020). Stability Analysis and Numerical Simulation of SEIR Model for Pandemic COVID-19 Spread in Indonesia. *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, 110072.
<https://doi.org/10.1016/J.CHAOS.2020.110072>
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2000). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (seventh ed).
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2001). *Elementary Differential Equations and Boundawey Value Problem*. New York: Von Hoffman Press.
- Brauer F., dkk. (2008) *Mathematical Epidemiology*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York.
- J. M. Diamond. (1997). *Guns, Germs, and Steel: The Fates of Human Societies*. W.W. Norton & Co. ISBN 0-393-06131-0
- Kartono. (2012). *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- L. D. Oktafiani, A. Kusnanto and Jahaudin. (2013). Bilangan Reproduksi Dasar Model West Nile Virus Menggunakan Matriks Next Generation. *Jurnal Manajemen & Agribisnis*. vol. 12, no. No 1, pp. 63-78.
- Ndairou, F., Area, I., Nieto, J. J., & Torres, D. F. (2020). Mathematical modeling of COVID-19 transmission dynamics with a case study of Wuhan. *Choos Solitons & Fractals*, 109846.
- N. P. rachaniotis, T. K. Dasaklis, F. Fotopoulos, & P. Tiniotis, (2021). A Two-Phase Stochastic Dynamic Model for COVID-19 Mid-Term Policy Recommendations in Greece: A Pathway toward Mass Vaccination.

- P. Van den Driessche, J. (2002). Reproduction Numbers and Subthreshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, 29-48.
- R. Resmawan, L. Y. (2020). Sensitivity Analysis of Mathematical Model of Coronavirus Disease (COVID-19) Transmission. *Cauchy*, 91.
- R. Resmawan, A. R. Nuha, & L. Yahya, (2021). Analisis Dinamik Model Transmisi COVID-19 dengan Melibatkan Intervensi Karantina. *Jambura Journal of Mathematics*, vol. 3, no. 1, pp. 66-79.
- R. Resmawan, L. Yahya, Refandi S. Pakaya, Hasan S. Panigoro, & Agusyarif Rezka Nuha, (2022). Analisis Dinamik Model Penyebaran COVID-19 dengan Vaksinasi. *Jambura Journal Biomath*, vol. 3, no. 1, pp. 29-38.
<https://doi.org/10.34312/jjbm.v3i1.13176>
- Ross, Shepley L. (2010). *Differential Equations*. Delhi: Rajv Book Binding House.
- Sari, Damayekti Intan Permata. (2010). *Model Epidemik SIS dengan Vaksinasi dan Imigrasi*. Skripsi. Tidak diterbitkan. Malang: UNIBRAW Malang.
- Van Den Driessche, P., Watmough, J. (2002). Reproduction Numbers and Subthreshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*. 180 (1–2): 29–48. doi:10.1016/S0025-5564(02)00108-6
- Wiggins, Stephen. 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos: Second Edition*. New York: Springer-Verlag.
- Yuan Liu, Zhi Ning, Yu Chen, Ming Guo, Yingle Liu, Nirmal K. gali, Lisun, dkk. (2020). Aerodynamic Analysis of SARS-CoV-2 in Two Wuhan Hospitals. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2271-3>
- Zhao, Xiao-Qiang. (2017). *Theory of Basic Reproduction Ratios, Dynamical Systems in Population Biology*, CMS Books in Mathematics, Springer International Publishing, hlm. 285–315, doi: 10.1007/978-3-319-56433-3_11

LAMPIRAN

Lampiran 1: M-File Perhitungan Nilai Eigen

```

clc;clear;
syms lambda Pi h1 h2 h3 h4 h5 h6 h7 h8 v beta mu p alpha nu eps1
eps2 eps3 eps4 gamma omega theta rho delta
JE0 = [-(mu+p*alpha) 0 h5 -h6 beta
        p*alpha -mu -h7 -h8 0
        0 0 h5+h7-(omega+mu+theta) h6+h8 0
        0 0 omega -(rho+mu+delta) 0
        0 0 theta rho -(mu+beta)]
dje0 = det(JE0-eye(5)*lambda)==0
solve(dje0,lambda)
JE1 = [-h1-h2-(mu+p*alpha) 0 -h5 -h6 beta
        p*alpha -mu-h3-h4 -h7 -h8 0
        h1+h2 h3+h4 h5+h7-(omega+mu+theta) h6+h8 0
        0 0 omega -(rho+mu+delta) 0
        0 0 theta rho -(beta+mu)]
dje1 = det(JE1-eye(5)*lambda)==0
solve(dje1,lambda)

```

Lampiran 2: M-file Analisis Sensitivitas

```

clear;clc;
syms Pi bet m p alp nu eps1 eps2 eps3 eps4
gam omega theta rho delta
pi = 4.1e-5;
Beta = 0.0001;
Mu = 3.57e-5;
P = 0.2;
Alpha = 0.0003;
Nu = 0.2;
Eps1 = 0.09;
Eps2 = 0.07;
Eps3 = 0.03;
Eps4 = 0.02;
Gamma = 0.01;
Omega = 0.005;
Theta = 0.001;
Rho = 0.27;
Delta = 0.001;
r0 = 5709;
Cpi=sensitivitasR0(Pi,pi,r0);
Cbeta=sensitivitasR0(Pi,Beta,r0);
Cmu=sensitivitasR0(m,Mu,r0);
Cp=sensitivitasR0(p,P,r0);
Calpha=sensitivitasR0(alp,Alpha,r0);
Cnu=sensitivitasR0(nu,Nu,r0);
Caps1=sensitivitasR0(eps1,Eps1,r0);
Ceps2=sensitivitasR0(eps2,Eps2,r0);
Ceps3=sensitivitasR0(eps3,Eps3,r0);
Ceps4=sensitivitasR0(eps4,Eps4,r0);
Cgamma=sensitivitasR0(gam,Gamma,r0);
Comega=sensitivitasR0(omega,Omega,r0);
Ctheta=sensitivitasR0(theta,Theta,r0);
Crho=sensitivitasR0(rho,Rho,r0);

```

```

Cdelta=sensitivitasR0(delta,Delta,r0);

function Cpi=sensitivitasR0(varr,parm,r0)
syms Pi bet m p alp nu eps1 eps2 eps3 eps4
gam omega theta rho delta
a = ((1-
p)*nu*eps1*(Pi/(m+p*alp))+gam*eps3*(p*alp*Pi/(m^2+m*p*alp)))/omega
;
b = ((1-
p)*nu*eps1*(Pi/(m+p*alp))+gam*eps3*(p*alp*Pi/(m^2+m*p*alp)))/(rho+
m+delta);
c = omega/(omega+m+theta);
R0 = (a+sqrt(a^2+4*b*c))/2;
% r0 = 0.5709;
pi = 4.1e-5;
Beta = 0.0001;
Mu = 3.57e-5;
P = 0.2;
Alpha = 0.0003;
Nu = 0.2;
Eps1 = 0.09;
Eps2 = 0.07;
Eps3 = 0.03;
Eps4 = 0.02;
Gamma = 0.01;
Omega = 0.005;
Theta = 0.001;
Rho = 0.27;
Delta = 0.001;
dr0 = diff(R0,varr);
Dr0 = subs(dr0,Pi,pi);
Dr0 = subs(Dr0,bet,Beta);
Dr0 = subs(Dr0,m,Mu);
Dr0 = subs(Dr0,p,P);
Dr0 = subs(Dr0,alp,Alpha);
Dr0 = subs(Dr0,nu,Nu);
Dr0 = subs(Dr0,eps1,Eps1);
Dr0 = subs(Dr0,eps2,Eps2);
Dr0 = subs(Dr0,eps3,Eps3);
Dr0 = subs(Dr0,eps4,Eps4);
Dr0 = subs(Dr0,gam,Gamma);
Dr0 = subs(Dr0,omega,Omega);
Dr0 = subs(Dr0,theta,Theta);
Dr0 = subs(Dr0,rho,Rho);
Dr0 = double(subs(Dr0,delta,Delta));
Cpi = Dr0*parm/r0;

```

Lampiran 3: Hasil Perhitungan Nilai Eigen Endemik

$$\begin{aligned}
& -\beta*\lambda^4 - \beta*\mu^4 - \delta*\lambda^4 - \delta*\mu^4 - h1*\lambda^4 - \\
& h2*\lambda^4 - h3*\lambda^4 - h4*\lambda^4 + h5*\lambda^4 + h7*\lambda^4 - \\
& h1*\mu^4 - h2*\mu^4 - h3*\mu^4 - h4*\mu^4 + h5*\mu^4 + h7*\mu^4 - 5*\lambda* \\
& \mu^4 - 5*\lambda^4*\mu - \lambda^4*\omega - \mu^4*\omega - \lambda^4*\rho - \\
& \mu^4*\rho - \lambda^4*\theta - \mu^4*\theta - \lambda^5 - \mu^5 - 10*\lambda^2*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu^3 - 10*\lambda^3*\mu^2 - \beta*\lambda^3*\rho - \delta*\mu^3*\omega - \\
& 4*h1*\lambda*\mu^3 - 4*h1*\lambda^3*\mu - 4*h2*\lambda*\mu^3 - \\
& 4*h2*\lambda^3*\mu - 4*h3*\lambda*\mu^3 - 4*h3*\lambda^3*\mu - \\
& 4*h4*\lambda*\mu^3 - 4*h4*\lambda^3*\mu + 4*h5*\lambda*\mu^3 + \\
& 4*h5*\lambda^3*\mu + 4*h7*\lambda*\mu^3 + 4*h7*\lambda^3*\mu - \\
& \beta*\mu^3*\rho - \beta*\lambda^3*\theta - h1*\lambda^3*\omega - \\
& h2*\lambda^3*\omega - h3*\lambda^3*\omega - h4*\lambda^3*\omega + \\
& h6*\lambda^3*\omega + h8*\lambda^3*\omega - \beta*\mu^3*\theta - \\
& h1*\mu^3*\omega - h2*\mu^3*\omega - h3*\mu^3*\omega - h4*\mu^3*\omega + \\
& h6*\mu^3*\omega + h8*\mu^3*\omega - \delta*\lambda^3*\theta - \delta*\mu^3*\theta - \\
& h1*\lambda^3*\rho - h2*\lambda^3*\rho - h3*\lambda^3*\rho - h4*\lambda^3*\rho + \\
& h5*\lambda^3*\rho + h7*\lambda^3*\rho - h1*\mu^3*\rho - h2*\mu^3*\rho - \\
& h3*\mu^3*\rho - h4*\mu^3*\rho + h5*\mu^3*\rho + h7*\mu^3*\rho - \\
& h1*\lambda^3*\theta - h2*\lambda^3*\theta - h3*\lambda^3*\theta - \\
& h4*\lambda^3*\theta - 4*\lambda*\mu^3*\omega - 4*\lambda^3*\mu*\omega - \\
& h1*\mu^3*\theta - h2*\mu^3*\theta - h3*\mu^3*\theta - h4*\mu^3*\theta - \\
& 4*\lambda*\mu^3*\rho - 4*\lambda^3*\mu*\rho - \lambda^3*\omega*\rho - \\
& 4*\lambda*\mu^3*\theta - 4*\lambda^3*\mu*\theta - \mu^3*\omega*\rho - \\
& \lambda^3*\rho*\theta - \mu^3*\rho*\theta - 6*\beta*\lambda^2*\mu^2 - \\
& 6*\delta*\lambda^2*\mu^2 - 6*h1*\lambda^2*\mu^2 - 6*h2*\lambda^2*\mu^2 - \\
& 6*h3*\lambda^2*\mu^2 - 6*h4*\lambda^2*\mu^2 + 6*h5*\lambda^2*\mu^2 + \\
& 6*h7*\lambda^2*\mu^2 - 6*\lambda^2*\mu^2*\omega - 6*\lambda^2*\mu^2*\rho - \\
& 6*\lambda^2*\mu^2*\theta - \beta*\delta*\lambda^3 - \beta*\delta*\mu^3 - \\
& \beta*h1*\lambda^3 - \beta*h2*\lambda^3 - \beta*h3*\lambda^3 - \beta*h4*\lambda^3 \\
& + \beta*h5*\lambda^3 + \beta*h7*\lambda^3 - \beta*h1*\mu^3 - \beta*h2*\mu^3 - \\
& \beta*h3*\mu^3 - \beta*h4*\mu^3 + \beta*h5*\mu^3 + \beta*h7*\mu^3 - \\
& \delta*h1*\lambda^3 - \delta*h2*\lambda^3 - \delta*h3*\lambda^3 - \\
& \delta*h4*\lambda^3 + \delta*h5*\lambda^3 + \delta*h7*\lambda^3 - \delta*h1*\mu^3 \\
& - \delta*h2*\mu^3 - \delta*h3*\mu^3 - \delta*h4*\mu^3 + \delta*h5*\mu^3 + \\
& \delta*h7*\mu^3 - 4*\beta*\lambda*\mu^3 - 4*\beta*\lambda^3*\mu - \\
& h1*h3*\lambda^3 - h1*h4*\lambda^3 - h2*h3*\lambda^3 - h2*h4*\lambda^3 + \\
& h1*h7*\lambda^3 + h3*h5*\lambda^3 + h2*h7*\lambda^3 + h4*h5*\lambda^3 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h_1 h_3 \mu^3 - h_1 h_4 \mu^3 - h_2 h_3 \mu^3 - h_2 h_4 \mu^3 + h_1 h_7 \mu^3 + \\
& h_3 h_5 \mu^3 + h_2 h_7 \mu^3 + h_4 h_5 \mu^3 - \alpha \lambda^4 p - \\
& \beta \lambda^3 \omega - 4 \delta \lambda \mu^3 - 4 \delta \lambda^3 \mu - \\
& \alpha \mu^4 p - \beta \mu^3 \omega - \delta \lambda^3 \omega - \\
& \beta \delta h_1 \lambda^2 - \beta \delta h_2 \lambda^2 - \beta \delta h_3 \lambda^2 - \\
& \beta \delta h_4 \lambda^2 + \beta \delta h_5 \lambda^2 + \beta \delta h_7 \lambda^2 - \\
& \beta \delta h_1 \mu^2 - \beta \delta h_2 \mu^2 - \beta \delta h_3 \mu^2 - \\
& \beta \delta h_4 \mu^2 + \beta \delta h_5 \mu^2 + \beta \delta h_7 \mu^2 - \\
& \beta h_1 h_3 \lambda^2 - \beta h_1 h_4 \lambda^2 - \beta h_2 h_3 \lambda^2 - \\
& \beta h_2 h_4 \lambda^2 + \beta h_1 h_7 \lambda^2 + \beta h_3 h_5 \lambda^2 + \\
& \beta h_2 h_7 \lambda^2 + \beta h_4 h_5 \lambda^2 - \beta h_1 h_3 \mu^2 - \\
& \beta h_1 h_4 \mu^2 - \beta h_2 h_3 \mu^2 - \beta h_2 h_4 \mu^2 + \beta h_1 h_7 \mu^2 \\
& + \beta h_3 h_5 \mu^2 + \beta h_2 h_7 \mu^2 + \beta h_4 h_5 \mu^2 - \\
& \alpha \beta \lambda^3 p - 3 \beta \delta \lambda \mu^2 - \\
& 3 \beta \delta \lambda^2 \mu - \delta h_1 h_3 \lambda^2 - \delta h_1 h_4 \lambda^2 - \\
& \delta h_2 h_3 \lambda^2 - \delta h_2 h_4 \lambda^2 + \delta h_1 h_7 \lambda^2 + \\
& \delta h_3 h_5 \lambda^2 + \delta h_2 h_7 \lambda^2 + \delta h_4 h_5 \lambda^2 - \\
& \alpha \beta \mu^3 p - \delta h_1 h_3 \mu^2 - \delta h_1 h_4 \mu^2 - \\
& \delta h_2 h_3 \mu^2 - \delta h_2 h_4 \mu^2 + \delta h_1 h_7 \mu^2 + \\
& \delta h_3 h_5 \mu^2 + \delta h_2 h_7 \mu^2 + \delta h_4 h_5 \mu^2 - \\
& \alpha \delta \lambda^3 p - \beta \delta \lambda^2 \omega - \alpha \delta \mu^3 p - \\
& \beta \delta \mu^2 \omega - 3 \beta h_1 \lambda \mu^2 - 3 \beta h_1 \lambda^2 \mu - \\
& 3 \beta h_2 \lambda \mu^2 - 3 \beta h_2 \lambda^2 \mu - 3 \beta h_3 \lambda \mu^2 \\
& - 3 \beta h_3 \lambda^2 \mu - 3 \beta h_4 \lambda \mu^2 - \\
& 3 \beta h_4 \lambda^2 \mu + 3 \beta h_5 \lambda \mu^2 + \\
& 3 \beta h_5 \lambda^2 \mu + 3 \beta h_7 \lambda \mu^2 + \\
& 3 \beta h_7 \lambda^2 \mu - \alpha h_3 \lambda^3 p - \alpha h_4 \lambda^3 p + \\
& \alpha h_5 \lambda^3 p + \alpha h_7 \lambda^3 p - \beta h_1 \lambda^2 \omega - \\
& \beta h_2 \lambda^2 \omega - \beta h_3 \lambda^2 \omega - \\
& \beta h_4 \lambda^2 \omega + \beta h_6 \lambda^2 \omega + \\
& \beta h_8 \lambda^2 \omega - 3 \delta h_1 \lambda \mu^2 - 3 \delta h_1 \lambda^2 \mu \\
& \mu - 3 \delta h_2 \lambda \mu^2 - 3 \delta h_2 \lambda^2 \mu -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3*\delta*h3*\lambda*\mu^2 - 3*\delta*h3*\lambda^2*\mu - \\
& 3*\delta*h4*\lambda*\mu^2 - 3*\delta*h4*\lambda^2*\mu + \\
& 3*\delta*h5*\lambda*\mu^2 + 3*\delta*h5*\lambda^2*\mu + \\
& 3*\delta*h7*\lambda*\mu^2 + 3*\delta*h7*\lambda^2*\mu - \alpha*h3*\mu^3*p - \\
& \alpha*h4*\mu^3*p + \alpha*h5*\mu^3*p + \alpha*h7*\mu^3*p - \\
& \beta*h1*\mu^2*\omega - \beta*h2*\mu^2*\omega - \beta*h3*\mu^2*\omega - \\
& \beta*h4*\mu^2*\omega + \beta*h6*\mu^2*\omega + \beta*h8*\mu^2*\omega - \\
& \beta*\delta*\lambda^2*\theta - \delta*h1*\lambda^2*\omega - \\
& \delta*h2*\lambda^2*\omega - \delta*h3*\lambda^2*\omega - \\
& \delta*h4*\lambda^2*\omega - \beta*\delta*\mu^2*\theta - \beta*h1*\lambda^2*\rho - \\
& \beta*h2*\lambda^2*\rho - \beta*h3*\lambda^2*\rho - \beta*h4*\lambda^2*\rho + \\
& \beta*h5*\lambda^2*\rho + \beta*h7*\lambda^2*\rho - \delta*h1*\mu^2*\omega - \\
& \delta*h2*\mu^2*\omega - \delta*h3*\mu^2*\omega - \delta*h4*\mu^2*\omega - \\
& 3*h1*h3*\lambda*\mu^2 - 3*h1*h3*\lambda^2*\mu - 3*h1*h4*\lambda*\mu^2 - \\
& 3*h1*h4*\lambda^2*\mu - 3*h2*h3*\lambda*\mu^2 - 3*h2*h3*\lambda^2*\mu - \\
& 3*h2*h4*\lambda*\mu^2 - 3*h2*h4*\lambda^2*\mu + 3*h1*h7*\lambda*\mu^2 + \\
& 3*h1*h7*\lambda^2*\mu + 3*h3*h5*\lambda*\mu^2 + 3*h3*h5*\lambda^2*\mu + \\
& 3*h2*h7*\lambda*\mu^2 + 3*h2*h7*\lambda^2*\mu + 3*h4*h5*\lambda*\mu^2 + \\
& 3*h4*h5*\lambda^2*\mu - \beta*h1*\mu^2*\rho - \beta*h2*\mu^2*\rho - \\
& \beta*h3*\mu^2*\rho - \beta*h4*\mu^2*\rho + \beta*h5*\mu^2*\rho + \\
& \beta*h7*\mu^2*\rho - \beta*h3*\lambda^2*\theta - \beta*h4*\lambda^2*\theta - \\
& 4*\alpha*\lambda*\mu^3*p - 4*\alpha*\lambda^3*\mu*p - \\
& 3*\beta*\lambda*\mu^2*\omega - 3*\beta*\lambda^2*\mu*\omega - \\
& h1*h3*\lambda^2*\omega - h1*h4*\lambda^2*\omega - h2*h3*\lambda^2*\omega - \\
& h2*h4*\lambda^2*\omega + h1*h8*\lambda^2*\omega + h3*h6*\lambda^2*\omega \\
& + h2*h8*\lambda^2*\omega + h4*h6*\lambda^2*\omega - \beta*h3*\mu^2*\theta - \\
& \beta*h4*\mu^2*\theta - h1*h3*\mu^2*\omega - h1*h4*\mu^2*\omega - \\
& h2*h3*\mu^2*\omega - h2*h4*\mu^2*\omega + h1*h8*\mu^2*\omega + \\
& h3*h6*\mu^2*\omega + h2*h8*\mu^2*\omega + h4*h6*\mu^2*\omega - \\
& \delta*h1*\lambda^2*\theta - \delta*h2*\lambda^2*\theta - \delta*h3*\lambda^2*\theta \\
& - \delta*h4*\lambda^2*\theta - \alpha*\lambda^3*\omega*p - \\
& 3*\delta*\lambda*\mu^2*\omega - 3*\delta*\lambda^2*\mu*\omega -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta * h_1 * \mu^2 * \theta - \delta * h_2 * \mu^2 * \theta - \delta * h_3 * \mu^2 * \theta - \\
& \delta * h_4 * \mu^2 * \theta - \alpha * \mu^3 * \omega * \rho - 3 * \beta * \lambda * \mu^2 * \rho - \\
& 3 * \beta * \lambda^2 * \mu * \rho - h_1 * h_3 * \lambda^2 * \rho - h_1 * h_4 * \lambda^2 * \rho - \\
& h_2 * h_3 * \lambda^2 * \rho - h_2 * h_4 * \lambda^2 * \rho + h_1 * h_7 * \lambda^2 * \rho + \\
& h_3 * h_5 * \lambda^2 * \rho + h_2 * h_7 * \lambda^2 * \rho + h_4 * h_5 * \lambda^2 * \rho - \\
& h_1 * h_3 * \mu^2 * \rho - h_1 * h_4 * \mu^2 * \rho - h_2 * h_3 * \mu^2 * \rho - h_2 * h_4 * \mu^2 * \rho + \\
& h_1 * h_7 * \mu^2 * \rho + h_3 * h_5 * \mu^2 * \rho + h_2 * h_7 * \mu^2 * \rho + h_4 * h_5 * \mu^2 * \rho - \\
& \alpha * \lambda^3 * \rho * \theta - \beta * \lambda^2 * \omega * \rho - \\
& 3 * \beta * \lambda * \mu^2 * \theta - 3 * \beta * \lambda^2 * \mu * \theta - \\
& h_1 * h_3 * \lambda^2 * \theta - h_1 * h_4 * \lambda^2 * \theta - h_2 * h_3 * \lambda^2 * \theta - \\
& h_2 * h_4 * \lambda^2 * \theta - 3 * h_1 * \lambda * \mu^2 * \omega - \\
& 3 * h_1 * \lambda^2 * \mu * \omega - 3 * h_2 * \lambda * \mu^2 * \omega - \\
& 3 * h_2 * \lambda^2 * \mu * \omega - 3 * h_3 * \lambda * \mu^2 * \omega - \\
& 3 * h_3 * \lambda^2 * \mu * \omega - 3 * h_4 * \lambda * \mu^2 * \omega - \\
& 3 * h_4 * \lambda^2 * \mu * \omega + 3 * h_6 * \lambda * \mu^2 * \omega + \\
& 3 * h_6 * \lambda^2 * \mu * \omega + 3 * h_8 * \lambda * \mu^2 * \omega + \\
& 3 * h_8 * \lambda^2 * \mu * \omega - \alpha * \mu^3 * \rho * \theta - \beta * \mu^2 * \omega * \rho - \\
& h_1 * h_3 * \mu^2 * \theta - h_1 * h_4 * \mu^2 * \theta - h_2 * h_3 * \mu^2 * \theta - \\
& h_2 * h_4 * \mu^2 * \theta - \alpha * \lambda^3 * \rho * \theta - 3 * \delta * \lambda * \mu^2 * \theta - \\
& 3 * \delta * \lambda^2 * \mu * \theta - \alpha * \mu^3 * \rho * \theta - 3 * h_1 * \lambda * \mu^2 * \rho - \\
& 3 * h_1 * \lambda^2 * \mu * \rho - 3 * h_2 * \lambda * \mu^2 * \rho - 3 * h_2 * \lambda^2 * \mu * \rho - \\
& 3 * h_3 * \lambda * \mu^2 * \rho - 3 * h_3 * \lambda^2 * \mu * \rho - 3 * h_4 * \lambda * \mu^2 * \rho - \\
& 3 * h_4 * \lambda^2 * \mu * \rho + 3 * h_5 * \lambda * \mu^2 * \rho + 3 * h_5 * \lambda^2 * \mu * \rho + \\
& 3 * h_7 * \lambda * \mu^2 * \rho + 3 * h_7 * \lambda^2 * \mu * \rho - \beta * \lambda^2 * \rho * \theta - \\
& h_1 * \lambda^2 * \omega * \rho - h_2 * \lambda^2 * \omega * \rho - h_3 * \lambda^2 * \omega * \rho - \\
& - h_4 * \lambda^2 * \omega * \rho - 3 * h_1 * \lambda * \mu^2 * \theta - \\
& 3 * h_1 * \lambda^2 * \mu * \theta - 3 * h_2 * \lambda * \mu^2 * \theta - \\
& 3 * h_2 * \lambda^2 * \mu * \theta - 3 * h_3 * \lambda * \mu^2 * \theta - \\
& 3 * h_3 * \lambda^2 * \mu * \theta - 3 * h_4 * \lambda * \mu^2 * \theta - \\
& 3 * h_4 * \lambda^2 * \mu * \theta - \beta * \mu^2 * \rho * \theta - h_1 * \mu^2 * \omega * \rho - \\
& h_2 * \mu^2 * \omega * \rho - h_3 * \mu^2 * \omega * \rho - h_4 * \mu^2 * \omega * \rho - \\
& h_1 * \lambda^2 * \rho * \theta - h_2 * \lambda^2 * \rho * \theta - h_3 * \lambda^2 * \rho * \theta -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h4*\lambda^2*\rho*\theta - 3*\lambda*\mu^2*\omega*\rho - \\
& 3*\lambda^2*\mu*\omega*\rho - h1*\mu^2*\rho*\theta - h2*\mu^2*\rho*\theta - \\
& h3*\mu^2*\rho*\theta - h4*\mu^2*\rho*\theta - 3*\lambda*\mu^2*\rho*\theta - \\
& 3*\lambda^2*\mu*\rho*\theta - 6*\alpha*\lambda^2*\mu^2*p - \\
& \beta*\delta*h1*h3*\lambda - \beta*\delta*h1*h4*\lambda - \\
& \beta*\delta*h2*h3*\lambda - \beta*\delta*h2*h4*\lambda + \\
& \beta*\delta*h1*h7*\lambda + \beta*\delta*h3*h5*\lambda + \\
& \beta*\delta*h2*h7*\lambda + \beta*\delta*h4*h5*\lambda - \beta*\delta*h1*h3*\mu - \\
& \beta*\delta*h1*h4*\mu - \beta*\delta*h2*h3*\mu - \beta*\delta*h2*h4*\mu + \\
& \beta*\delta*h1*h7*\mu + \beta*\delta*h3*h5*\mu + \beta*\delta*h2*h7*\mu + \\
& \beta*\delta*h4*h5*\mu - \beta*\delta*h1*h3*\omega - \beta*\delta*h1*h4*\omega - \\
& \beta*\delta*h2*h3*\omega - \beta*\delta*h2*h4*\omega - \\
& 2*\beta*\delta*h1*\lambda*\mu - 2*\beta*\delta*h2*\lambda*\mu - \\
& 2*\beta*\delta*h3*\lambda*\mu - 2*\beta*\delta*h4*\lambda*\mu + \\
& 2*\beta*\delta*h5*\lambda*\mu + 2*\beta*\delta*h7*\lambda*\mu - \\
& \beta*\delta*h1*\lambda*\omega - \beta*\delta*h2*\lambda*\omega - \\
& \beta*\delta*h3*\lambda*\omega - \beta*\delta*h4*\lambda*\omega - \\
& \beta*\delta*h1*\mu*\omega - \beta*\delta*h2*\mu*\omega - \\
& \beta*\delta*h3*\mu*\omega - \beta*\delta*h4*\mu*\omega - \\
& 2*\beta*h1*h3*\lambda*\mu - 2*\beta*h1*h4*\lambda*\mu - \\
& 2*\beta*h2*h3*\lambda*\mu - 2*\beta*h2*h4*\lambda*\mu + \\
& 2*\beta*h1*h7*\lambda*\mu + 2*\beta*h3*h5*\lambda*\mu + \\
& 2*\beta*h2*h7*\lambda*\mu + 2*\beta*h4*h5*\lambda*\mu - \\
& \beta*h1*h3*\lambda*\omega - \beta*h1*h4*\lambda*\omega - \\
& \beta*h2*h3*\lambda*\omega - \beta*h2*h4*\lambda*\omega + \\
& \beta*h1*h8*\lambda*\omega + \beta*h3*h6*\lambda*\omega + \\
& \beta*h2*h8*\lambda*\omega + \beta*h4*h6*\lambda*\omega - \\
& 2*\delta*h1*h3*\lambda*\mu - 2*\delta*h1*h4*\lambda*\mu - \\
& 2*\delta*h2*h3*\lambda*\mu - 2*\delta*h2*h4*\lambda*\mu + \\
& 2*\delta*h1*h7*\lambda*\mu + 2*\delta*h3*h5*\lambda*\mu + \\
& 2*\delta*h2*h7*\lambda*\mu + 2*\delta*h4*h5*\lambda*\mu - \\
& \beta*h1*h3*\mu*\omega - \beta*h1*h4*\mu*\omega - \beta*h2*h3*\mu*\omega -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta^2 h^4 \mu \omega + \beta h^1 h^8 \mu \omega + \beta h^3 h^6 \mu \omega + \\
& \beta h^2 h^8 \mu \omega + \beta h^4 h^6 \mu \omega - \beta \Delta h^3 \lambda \theta - \\
& - \beta \Delta h^4 \lambda \theta - 2 \beta \Delta \lambda \mu \omega - \\
& \Delta h^1 h^3 \lambda \omega - \Delta h^1 h^4 \lambda \omega - \\
& \Delta h^2 h^3 \lambda \omega - \Delta h^2 h^4 \lambda \omega - \\
& \beta \Delta h^3 \mu \theta - \beta \Delta h^4 \mu \theta - \beta h^1 h^3 \lambda \rho - \\
& \beta h^1 h^4 \lambda \rho - \beta h^2 h^3 \lambda \rho - \beta h^2 h^4 \lambda \rho + \\
& \beta h^1 h^7 \lambda \rho + \beta h^3 h^5 \lambda \rho + \beta h^2 h^7 \lambda \rho + \\
& \beta h^4 h^5 \lambda \rho - \Delta h^1 h^3 \mu \omega - \Delta h^1 h^4 \mu \omega - \\
& \Delta h^2 h^3 \mu \omega - \Delta h^2 h^4 \mu \omega - \beta h^1 h^3 \mu \rho - \\
& \beta h^1 h^4 \mu \rho - \beta h^2 h^3 \mu \rho - \beta h^2 h^4 \mu \rho + \\
& \beta h^1 h^7 \mu \rho + \beta h^3 h^5 \mu \rho + \beta h^2 h^7 \mu \rho + \\
& \beta h^4 h^5 \mu \rho - 2 \beta h^1 \lambda \mu \omega - \\
& 2 \beta h^2 \lambda \mu \omega - 2 \beta h^3 \lambda \mu \omega - \\
& 2 \beta h^4 \lambda \mu \omega + 2 \beta h^6 \lambda \mu \omega + \\
& 2 \beta h^8 \lambda \mu \omega - 2 \beta \Delta \lambda \mu \theta - \\
& \Delta h^1 h^3 \lambda \theta - \Delta h^1 h^4 \lambda \theta - \\
& \Delta h^2 h^3 \lambda \theta - \Delta h^2 h^4 \lambda \theta - \\
& 2 \Delta h^1 \lambda \mu \omega - 2 \Delta h^2 \lambda \mu \omega - \\
& 2 \Delta h^3 \lambda \mu \omega - 2 \Delta h^4 \lambda \mu \omega - \\
& \Delta h^1 h^3 \mu \theta - \Delta h^1 h^4 \mu \theta - \Delta h^2 h^3 \mu \theta - \\
& \Delta h^2 h^4 \mu \theta - 2 \beta h^1 \lambda \mu \rho - \\
& 2 \beta h^2 \lambda \mu \rho - 2 \beta h^3 \lambda \mu \rho - \\
& 2 \beta h^4 \lambda \mu \rho + 2 \beta h^5 \lambda \mu \rho + \\
& 2 \beta h^7 \lambda \mu \rho - \beta h^3 \lambda \omega \rho - \\
& \beta h^4 \lambda \omega \rho - 2 \beta h^3 \lambda \mu \theta - \\
& 2 \beta h^4 \lambda \mu \theta - 2 h^1 h^3 \lambda \mu \omega - \\
& 2 h^1 h^4 \lambda \mu \omega - 2 h^2 h^3 \lambda \mu \omega - \\
& 2 h^2 h^4 \lambda \mu \omega + 2 h^1 h^8 \lambda \mu \omega + \\
& 2 h^3 h^6 \lambda \mu \omega + 2 h^2 h^8 \lambda \mu \omega + \\
& 2 h^4 h^6 \lambda \mu \omega - \beta h^3 \mu \omega \rho - \\
& \beta h^4 \mu \omega \rho - 2 \Delta h^1 \lambda \mu \theta -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2*\delta*h2*\lambda*\mu*\theta - 2*\delta*h3*\lambda*\mu*\theta - \\
& 2*\delta*h4*\lambda*\mu*\theta - 2*h1*h3*\lambda*\mu*\rho - \\
& 2*h1*h4*\lambda*\mu*\rho - 2*h2*h3*\lambda*\mu*\rho - \\
& 2*h2*h4*\lambda*\mu*\rho + 2*h1*h7*\lambda*\mu*\rho + \\
& 2*h3*h5*\lambda*\mu*\rho + 2*h2*h7*\lambda*\mu*\rho + \\
& 2*h4*h5*\lambda*\mu*\rho - \beta*h3*\lambda*\rho*\theta - \\
& \beta*h4*\lambda*\rho*\theta - 2*\beta*\lambda*\mu*\omega*\rho - \\
& h1*h3*\lambda*\omega*\rho - h1*h4*\lambda*\omega*\rho - \\
& h2*h3*\lambda*\omega*\rho - h2*h4*\lambda*\omega*\rho - \\
& 2*h1*h3*\lambda*\mu*\theta - 2*h1*h4*\lambda*\mu*\theta - \\
& 2*h2*h3*\lambda*\mu*\theta - 2*h2*h4*\lambda*\mu*\theta - \\
& \beta*h3*\mu*\rho*\theta - \beta*h4*\mu*\rho*\theta - h1*h3*\mu*\omega*\rho - \\
& h1*h4*\mu*\omega*\rho - h2*h3*\mu*\omega*\rho - h2*h4*\mu*\omega*\rho - \\
& 2*\beta*\lambda*\mu*\rho*\theta - h1*h3*\lambda*\rho*\theta - \\
& h1*h4*\lambda*\rho*\theta - h2*h3*\lambda*\rho*\theta - h2*h4*\lambda*\rho*\theta - \\
& 2*h1*\lambda*\mu*\omega*\rho - 2*h2*\lambda*\mu*\omega*\rho - \\
& 2*h3*\lambda*\mu*\omega*\rho - 2*h4*\lambda*\mu*\omega*\rho - \\
& h1*h3*\mu*\rho*\theta - h1*h4*\mu*\rho*\theta - h2*h3*\mu*\rho*\theta - \\
& h2*h4*\mu*\rho*\theta - 2*h1*\lambda*\mu*\rho*\theta - \\
& 2*h2*\lambda*\mu*\rho*\theta - 2*h3*\lambda*\mu*\rho*\theta - \\
& 2*h4*\lambda*\mu*\rho*\theta - \alpha*\beta*\delta*\lambda^2*p - \\
& \alpha*\beta*\delta*\mu^2*p - \alpha*\beta*h3*\lambda^2*p - \\
& \alpha*\beta*h4*\lambda^2*p + \alpha*\beta*h5*\lambda^2*p + \\
& \alpha*\beta*h7*\lambda^2*p - \alpha*\beta*h3*\mu^2*p - \alpha*\beta*h4*\mu^2*p + \\
& \alpha*\beta*h5*\mu^2*p + \alpha*\beta*h7*\mu^2*p - \alpha*\delta*h3*\lambda^2*p \\
& - \alpha*\delta*h4*\lambda^2*p + \alpha*\delta*h5*\lambda^2*p + \\
& \alpha*\delta*h7*\lambda^2*p - \alpha*\delta*h3*\mu^2*p - \alpha*\delta*h4*\mu^2*p \\
& + \alpha*\delta*h5*\mu^2*p + \alpha*\delta*h7*\mu^2*p - \\
& 3*\alpha*\beta*\lambda*\mu^2*p - 3*\alpha*\beta*\lambda^2*\mu*p - \\
& \alpha*\beta*\lambda^2*\omega*p - 3*\alpha*\delta*\lambda*\mu^2*p - \\
& 3*\alpha*\delta*\lambda^2*\mu*p - \alpha*\beta*\mu^2*\omega*p - \\
& \alpha*\delta*\lambda^2*\omega*p - \alpha*\beta*\lambda^2*p*\rho -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha \delta \mu^2 \omega^p - 3 \alpha h^3 \lambda \mu^2 p - \\
& 3 \alpha h^3 \lambda^2 \mu p - 3 \alpha h^4 \lambda \mu^2 p - \\
& 3 \alpha h^4 \lambda^2 \mu p + 3 \alpha h^5 \lambda \mu^2 p + \\
& 3 \alpha h^5 \lambda^2 \mu p + 3 \alpha h^7 \lambda \mu^2 p + \\
& 3 \alpha h^7 \lambda^2 \mu p - \alpha \beta \mu^2 p^\rho - \\
& \alpha \beta \lambda^2 p^\theta - \alpha h^3 \lambda^2 \omega^p - \\
& \alpha h^4 \lambda^2 \omega^p + \alpha h^6 \lambda^2 \omega^p + \\
& \alpha h^8 \lambda^2 \omega^p - \alpha \beta \mu^2 p^\theta - \\
& \alpha h^3 \mu^2 \omega^p - \alpha h^4 \mu^2 \omega^p + \\
& \alpha h^6 \mu^2 \omega^p + \alpha h^8 \mu^2 \omega^p - \\
& \alpha \delta \lambda^2 p^\theta - \alpha \delta \mu^2 p^\theta - \\
& \alpha h^3 \lambda^2 p^\rho - \alpha h^4 \lambda^2 p^\rho + \\
& \alpha h^5 \lambda^2 p^\rho + \alpha h^7 \lambda^2 p^\rho - \alpha h^3 \mu^2 p^\rho \\
& - \alpha h^4 \mu^2 p^\rho + \alpha h^5 \mu^2 p^\rho + \alpha h^7 \mu^2 p^\rho - \\
& \alpha h^3 \lambda^2 p^\theta - \alpha h^4 \lambda^2 p^\theta - \\
& 3 \alpha \lambda \mu^2 \omega^p - 3 \alpha \lambda^2 \mu \omega^p - \\
& \alpha h^3 \mu^2 p^\theta - \alpha h^4 \mu^2 p^\theta - \\
& 3 \alpha \lambda \mu^2 p^\rho - 3 \alpha \lambda^2 \mu p^\rho - \\
& \alpha \lambda^2 \omega^p p^\rho - 3 \alpha \lambda \mu^2 p^\theta - \\
& 3 \alpha \lambda^2 \mu p^\theta - \alpha \mu^2 \omega^p p^\rho - \\
& \alpha \lambda^2 p^\rho \theta - \alpha \mu^2 p^\rho \theta - \\
& \alpha \beta \delta h^3 \lambda p - \alpha \beta \delta h^4 \lambda p + \\
& \alpha \beta \delta h^5 \lambda p + \alpha \beta \delta h^7 \lambda p - \\
& \alpha \beta \delta h^3 \mu p - \alpha \beta \delta h^4 \mu p + \\
& \alpha \beta \delta h^5 \mu p + \alpha \beta \delta h^7 \mu p - \\
& \alpha \beta \delta h^3 \omega^p - \alpha \beta \delta h^4 \omega^p - \\
& 2 \alpha \beta \delta \lambda \mu p - \alpha \beta \delta \lambda \omega^p - \\
& \alpha \beta \delta \mu \omega^p - 2 \alpha \beta h^3 \lambda \mu p - \\
& 2 \alpha \beta h^4 \lambda \mu p + 2 \alpha \beta h^5 \lambda \mu p + \\
& 2 \alpha \beta h^7 \lambda \mu p - \alpha \beta h^3 \lambda \omega^p - \\
& \alpha \beta h^4 \lambda \omega^p + \alpha \beta h^6 \lambda \omega^p + \\
& \alpha \beta h^8 \lambda \omega^p - 2 \alpha \delta h^3 \lambda \mu p -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2*\alpha*\delta*h4*\lambda*\mu*p + 2*\alpha*\delta*h5*\lambda*\mu*p + \\
& 2*\alpha*\delta*h7*\lambda*\mu*p - \alpha*\beta*h3*\mu*\omega*p - \\
& \alpha*\beta*h4*\mu*\omega*p + \alpha*\beta*h6*\mu*\omega*p + \\
& \alpha*\beta*h8*\mu*\omega*p - \alpha*\beta*\delta*\lambda*p*\theta - \\
& \alpha*\delta*h3*\lambda*\omega*p - \alpha*\delta*h4*\lambda*\omega*p - \\
& \alpha*\beta*\delta*\mu*p*\theta - \alpha*\beta*h3*\lambda*p*\rho - \\
& \alpha*\beta*h4*\lambda*p*\rho + \alpha*\beta*h5*\lambda*p*\rho + \\
& \alpha*\beta*h7*\lambda*p*\rho - \alpha*\delta*h3*\mu*\omega*p - \\
& \alpha*\delta*h4*\mu*\omega*p - \alpha*\beta*h3*\mu*p*\rho - \\
& \alpha*\beta*h4*\mu*p*\rho + \alpha*\beta*h5*\mu*p*\rho + \\
& \alpha*\beta*h7*\mu*p*\rho - 2*\alpha*\beta*\lambda*\mu*\omega*p - \\
& \alpha*\delta*h3*\lambda*p*\theta - \alpha*\delta*h4*\lambda*p*\theta - \\
& 2*\alpha*\delta*\lambda*\mu*\omega*p - \alpha*\delta*h3*\mu*p*\theta - \\
& \alpha*\delta*h4*\mu*p*\theta - 2*\alpha*\beta*\lambda*\mu*p*\rho - \\
& \alpha*\beta*\lambda*\omega*p*\rho - 2*\alpha*\beta*\lambda*\mu*p*\theta - \\
& 2*\alpha*h3*\lambda*\mu*\omega*p - 2*\alpha*h4*\lambda*\mu*\omega*p + \\
& 2*\alpha*h6*\lambda*\mu*\omega*p + 2*\alpha*h8*\lambda*\mu*\omega*p - \\
& \alpha*\beta*\mu*\omega*p*\rho - 2*\alpha*\delta*\lambda*\mu*p*\theta - \\
& 2*\alpha*h3*\lambda*\mu*p*\rho - 2*\alpha*h4*\lambda*\mu*p*\rho + \\
& 2*\alpha*h5*\lambda*\mu*p*\rho + 2*\alpha*h7*\lambda*\mu*p*\rho - \\
& \alpha*\beta*\lambda*p*\rho*\theta - \alpha*h3*\lambda*\omega*p*\rho - \\
& \alpha*h4*\lambda*\omega*p*\rho - 2*\alpha*h3*\lambda*\mu*p*\theta - \\
& 2*\alpha*h4*\lambda*\mu*p*\theta - \alpha*\beta*\mu*p*\rho*\theta - \\
& \alpha*h3*\mu*\omega*p*\rho - \alpha*h4*\mu*\omega*p*\rho - \\
& \alpha*h3*\lambda*p*\rho*\theta - \alpha*h4*\lambda*p*\rho*\theta - \\
& 2*\alpha*\lambda*\mu*\omega*p*\rho - \alpha*h3*\mu*p*\rho*\theta - \\
& \alpha*h4*\mu*p*\rho*\theta - 2*\alpha*\lambda*\mu*p*\rho*\theta == 0
\end{aligned}$$

Lampiran 4: M-File Simulasi Numerik

```

S      = zeros;
E      = zeros;
I      = zeros;
R      = zeros;
V      = zeros;

```

```

h = 1;
h2 = h/2;

```

```

N          = 270000000;
S(1)      = 267564000;
V(1)      = 20534823;
E(1)      = 2500000;
I(1)      = 3372374;
R(1)      = 2730720;

```

```

iterasi = 1000;
Pi       = 4.1e-5;
beta     = 0.0001;
mu       = 3.57e-5;
p        = 0.2;
alpha    = 0.0003;
nu       = 0.2;
eps11    = 0.09;
eps12    = 0.07;
eps13    = 0.03;
eps14    = 0.02;
gamma    = 0.01;
omega    = 0.005;
theta    = 0.001;
rho      = 0.0027;
delta    = 0.001;

```

```

s = @(S,E,I,R,V) Pi*N+beta*R-(mu+p*alpha+(((1-
p)*nu*(eps11*E+eps12*I))/N))*S;
v = @(S,E,I,R,V) p*alpha*S-(mu+((gamma*(eps13*E+eps14*I))/N))*V;
e = @(S,E,I,R,V) (((1-
p)*nu*(eps11*E+eps12*I))/N)*S+((gamma*(eps13*E+eps14*I))/N)*V-
(mu+omega+theta)*E;
i = @(S,E,I,R,V) omega*E-(rho+mu+delta)*I;
r = @(S,E,I,R,V) rho*I+theta*E-(beta+mu)*R;

```

```

a = ((1-
p)*nu*eps11*(Pi/(mu+p*alpha))+gamma*eps13*(p*alpha*Pi/(mu^2+mu*p*a
lpha)))/(omega+mu+theta);
b = ((1-
p)*nu*eps12*(Pi/(mu+p*alpha))+gamma*eps14*(p*alpha*Pi/(mu^2+mu*p*a
lpha)))/(rho+mu+delta);
c = omega/(omega+mu+theta);

```

```

R0 = (a+sqrt(a^2+4*b*c))/2;

```

```

iter=1;
while iter<=iterasi

```

```

    k1S = s(S(iter),E(iter),I(iter),R(iter),V(iter));
    k1E = e(S(iter),E(iter),I(iter),R(iter),V(iter));
    k1I = i(S(iter),E(iter),I(iter),R(iter),V(iter));
    k1R = r(S(iter),E(iter),I(iter),R(iter),V(iter));

```

```

k1V = v(S(iter),E(iter),I(iter),R(iter),V(iter));

k2S =
s(S(iter)+(h2*k1S),E(iter)+(h2*k1E),I(iter)+(h2*k1I),R(iter)+(h2*k1R),V(iter)+(h2*k1V));
k2E =
e(S(iter)+(h2*k1S),E(iter)+(h2*k1E),I(iter)+(h2*k1I),R(iter)+(h2*k1R),V(iter)+(h2*k1V));
k2I =
i(S(iter)+(h2*k1S),E(iter)+(h2*k1E),I(iter)+(h2*k1I),R(iter)+(h2*k1R),V(iter)+(h2*k1V));
k2R =
r(S(iter)+(h2*k1S),E(iter)+(h2*k1E),I(iter)+(h2*k1I),R(iter)+(h2*k1R),V(iter)+(h2*k1V));
k2V =
v(S(iter)+(h2*k1S),E(iter)+(h2*k1E),I(iter)+(h2*k1I),R(iter)+(h2*k1R),V(iter)+(h2*k1V));

k3S =
s(S(iter)+(h2*k2S),E(iter)+(h2*k2E),I(iter)+(h2*k2I),R(iter)+(h2*k2R),V(iter)+(h2*k2V));
k3E =
e(S(iter)+(h2*k2S),E(iter)+(h2*k2E),I(iter)+(h2*k2I),R(iter)+(h2*k2R),V(iter)+(h2*k2V));
k3I =
i(S(iter)+(h2*k2S),E(iter)+(h2*k2E),I(iter)+(h2*k2I),R(iter)+(h2*k2R),V(iter)+(h2*k2V));
k3R =
r(S(iter)+(h2*k2S),E(iter)+(h2*k2E),I(iter)+(h2*k2I),R(iter)+(h2*k2R),V(iter)+(h2*k2V));
k3V =
v(S(iter)+(h2*k2S),E(iter)+(h2*k2E),I(iter)+(h2*k2I),R(iter)+(h2*k2R),V(iter)+(h2*k2V));

k4S =
s(S(iter)+h*k3S,E(iter)+h*k3E,I(iter)+h*k3I,R(iter)+h*k3R,V(iter)+h*k3V);
k4E =
e(S(iter)+h*k3S,E(iter)+h*k3E,I(iter)+h*k3I,R(iter)+h*k3R,V(iter)+h*k3V);
k4I =
i(S(iter)+h*k3S,E(iter)+h*k3E,I(iter)+h*k3I,R(iter)+h*k3R,V(iter)+h*k3V);
k4R =
r(S(iter)+h*k3S,E(iter)+h*k3E,I(iter)+h*k3I,R(iter)+h*k3R,V(iter)+h*k3V);
k4V =
v(S(iter)+h*k3S,E(iter)+h*k3E,I(iter)+h*k3I,R(iter)+h*k3R,V(iter)+h*k3V);

if S(iter)+(h/6)*(k1S + 2*k2S + 2*k3S + k4S)<=1
    S(iter+1)=0;
else
    S(iter+1)=S(iter)+(h/6)*(k1S + 2*k2S + 2*k3S + k4S);
end

if E(iter)+(h/6)*(k1E + 2*k2E + 2*k3E + k4E)<=1
    E(iter+1)=0;

```

```

else
    E(iter+1)=E(iter)+(h/6)*(k1E + 2*k2E + 2*k3E + k4E);
end

if I(iter)+(h/6)*(k1I + 2*k2I + 2*k3I + k4I)<=1
    I(iter+1)=0;
else
    I(iter+1)=I(iter)+(h/6)*(k1I + 2*k2I + 2*k3I + k4I);
end

if R(iter)+(h/6)*(k1R + 2*k2R + 2*k3R + k4R)<=1
    R(iter+1)=0;
else
    R(iter+1)=R(iter)+(h/6)*(k1R + 2*k2R + 2*k3R + k4R);
end

if V(iter)+(h/6)*(k1V + 2*k2V + 2*k3V + k4V)<=1
    V(iter+1)=0;
else
    V(iter+1)=V(iter)+(h/6)*(k1V + 2*k2V + 2*k3V + k4V);
end
iter=iter+1;
end
fig = figure;
plot(S, 'color', 'B', 'linewidth', 1.3);hold on;grid on
plot(V, 'color', 'G', 'linewidth', 1.3);hold on
plot(E, 'color', 'Y', 'linewidth', 1.3);hold on
plot(I, 'color', 'R', 'linewidth', 1.3);hold on
plot(R, 'color', 'M', 'linewidth', 1.3);hold on
legend({'Populasi S', 'Populasi V', 'Populasi E', 'Populasi
I', 'Populasi R'}, 'Location', 'northeast')
xlabel('Hari')
ylabel('Populasi')
% title('Hasil Simulasi')
xlim([0 length(S)])
ylim([0 max([max(S) max(V) max(E) max(I) max(R)])])

```

RIWAYAT HIDUP



Ummi Khoiriyah, biasa dipanggil ismi, lahir di Kab Sumenep pada tanggal 16 Mei 2001. Tinggal di Kalinganyar, anak pertama dari empat bersaudaradari Bapak Matrawi dan Ibu Sariyati, dan merupakan kakak pertama dari Moh. Ali Zein, Ramdan Khadafi, dan Ummul Khoir. Penulis menempuh pendidikan dasar di SDN Angon- Angon 2 dan lulus pada tahun 2013. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 1 Arjasa hingga tahun 2016. Setelah itu penulis melanjutkan pendidikan dasar di SMA Ibrahimy Sukorejo dan lulus pada tahun 2019. Penulis melanjutkan pendidikan lebih tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan mengambil Program Studi Matematika. Selama menempuh pendidikan penulis dipercayai untuk menjadi asisten laboratorium mata kuliah Praktikum Analisis Numerik I pada tahun 2023. Di luar kampus sendiri penulis mengikuti kegiatan seperti kursus online dan seminar. Selain itu penulis juga mengikuti organisasi di luar kampus yaitu IKMASS (Ikatan Mahasiswa Alumni Salafiyah Syafi'iyah).



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ummi Khoiriyah
NIM : 19610088
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model SVEIR (Susceptible-Vaccinated-Exposed-Infected-Recovered) Pada Penyebaran COVID-19
Pembimbing I : Dr. Heni Widayani, M.Si
Pembimbing II : M. Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tapda Tangan
1.	22 November 2022	Konsultasi Bab I	1.
2.	30 November 2022	Revisi Bab I	2.
3.	8 Desember 2022	Konsultasi Bab II	3.
4.	14 Desember 2022	Revisi Bab II	4.
5.	19 Desember 2022	Konsultasi Kajian Agama Bab I, Bab II	5.
6.	22 Desember 2022	Revisi Kajian Agama Bab I, Bab II	6.
7.	22 Desember 2022	Konsultasi Bab III	7.
8.	27 Desember 2022	ACC Bab I, II, III	8.
9.	27 Februari 2023	Revisi Bab I, II, III	9.
10.	3 Maret 2023	Konsultasi Bab IV, V	10.
11.	17 Maret 2023	Konsultasi Kajian Agama	11.
12.	10 April 2023	ACC Bab IV, V	12.
13.	22 Mei 2023	Revisi Bab IV, V	13.
14.	19 Juni 2023	ACC seluruh Bab	14.

Malang, 19 Juni 2023

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc

NIP. 19741129 200012 2 005