ANALISIS KONSTANTA
EULER-MASCHERONI YANG DIPERUMUM

SKRIPSI

OLEH
RAISHA INAYAH RAHMAN
NIM. 18610004

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

ANALISIS KONSTANTA
EULER-MASCHERONI YANG DIPERUMUM

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Persyaratan dalam
Memperolah Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Raisha Inayah Rahman
NIM. 18610004

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

ANALISIS KONSTANTA
EULER-MASCHERONI YANG DIPERUMUM

SKRIPSI

Oleh
Raisha Inayah Rahman
NIM. 18610004

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 22 Juni 2023

Pembimbing I	Pembimbing II
Dr. Hairur Rahman, M.Si	Erna Herawati, M.Pd
NIP. 19800429 200604 1 003	NIDT. 1976072 320180201 2222

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

ANALISIS KONSTANTA
EULER-MASCHERONI YANG DIPERUMUM

SKRIPSI

Oleh
Raisha Inayah Rahman
NIM. 18610004

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
Dan Dinyatakan Diterima sebagai salah satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 22 Juni 2023

Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M. Si	....
Anggota Penguji I	: Intan Nisfulaila, M.Si	....
Anggota Penguji II	: Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji III	: Erna Herawati, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Raisha Inayah Rahman
NIM	18610004
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Analisis Konstanta Euler-Mascheroni Yang Diperumum

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan mengambil pengambilan data, tuisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan menyantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 Juni 2023
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
10000
0999EAJX636572370

Raisha Inayah Rahman
NIM. 18610004

MOTO

"You can't hire someone to do your push ups for you."

(Jim Rohn)

"All blame is a waste of time. No matter how much fault you find with another, and regardless of how much you blame hime, it will not change you."

(Wayne Dyer)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

To (I believe) the most lovely person in the world, she is my past self. Thank you for being a hardworker and continuing to go through all the problems, even though it seems impossible. Having two jobs for living, being far from family, being independent, and being grateful, thank you for not giving up.

Yang tercinta orang tua saya, Ayahanda Abdul Rahman dan Ibunda Chalimatusa'diah yang telah memberikan dukungan, do'a, serta izin agar saya melanjutkan kuliah di Kota Malang.

To my not-cute big baby bear, Nisrina Nur Rahman, thank you for being my sister, thank you for understanding me, thank you for having the same interest with me (even though sometimes we different, thank you for always listening to me), and thank you for everything. It is hard to say, but I love you 3000.

To my cutie cats, thank you for being part of my life. When I am stressed, you guys help me a lot by seeing you guys sleep. I hope that you are always healthy and have a long life.

To GoSe's main stars named seventeen, editors, staff, and crew who always make me laugh whenever I stuck funny.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullah Wabarakatuh

Segala puji dan syukur bagi kehadirat Allah SWT Atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan proposal skripsi dengan baik.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis memperoleh berbagai bimbingan dan arahan dari banyak pihak. Oleh karenanya, ucapan terimakasih yang besar dan penghargaan yang sangat tinggi penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan banyak arahan, nasihat, motivasi serta berbagai pengalaman berharga kepada penulis.
5. Erna Herawati, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang juga telah memberikan banyak arahan, nasihat serta ilmu kepada penulis.
6. Seluruh dosen dan sivitas Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
7. Orang tua dan seluruh keluarga yang selalu memberikan dukungan do'a, semangat, dan motivasi kepada penulis hingga saat ini.

8. Seluruh teman-teman di Program Studi Matematika Angkatan 2018 yang sama-sama berjuang dalam menyelesaikan skripsi dan saling memberikan motivasi satu sama lain.
9. Sahabat-sahabat penulis, terutama Aziza Fadhilah dan Oktavia Eka Adi Rohma yang memberikan motivasi dan dorongan agar penulis menyelasaikan pendidikan strata 1 dan Nisrina Nur Rahman yang memotivasi penulis untuk menjadi orang yang lebih baik setiap harinya.
10. Semua pihak yang ikut dalam menyelesaikan skripsi ini, baik secara moril maupun materiil.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat baik bagi penulis maupun pembaca. Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada yang mempelajari ilmu-Nya. *Aamiin*

Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang,

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan
γ	Konstanta Euler-Mascheroni
H_n	Deret harmonik hingga suku ke-n
$H_n^{(a)}$	Deret harmonik hingga suku ke-n pada orde ke-a
$\zeta(m)$	Fungsi Riemann Zeta hingga suku ke-n pada orde-m
$S(m,n)$	Bilangan stirling jenis pertama
$S_{scp}(m,n)$	Bilangan stirling jenis pertama dengan *signed count permutation*
$s(m,n)$	Bilangan stirling jenis kedua
$\mathfrak{X}_k$	Konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum, dengan $$\mathfrak{X}_k = -\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m}\frac{k!}{(k+1-n)!}S(m,n)\zeta^{(k+1-n)}(m)$$
$\mathfrak{Z}_k$	Konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum, dengan $$\mathfrak{Z}_k = \frac{1}{k+1}\ln^{k+1}2-(-1)^k k!\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{4^m(2m+1)!}\sum_{n=1}^{m}\frac{S(2m+1,n)}{(k+1-n)!}\zeta^{(k+1-n)}(2m+1)$$
$\mathfrak{X}_{scp(k)}$	Konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum $\mathfrak{X}_k$ dengan *signed count permutation*.
$\mathfrak{Z}_{scp(k)}$	Konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum, $\mathfrak{Z}_k$ dengan *signed count permutation.*
k	Bilangan k pada $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$ menyatakan kondisi konstanta Euler-Mascheroni diperumum yang sedang dianalisis. Bilangan $k \in \mathbb{W}$.
n	Bilangan yang menyatakan partisi siklus bilangan Stirling pada $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$, sehingga $0 < n \leq m$. Untuk menentukan anggota n berdasarkan k, maka $n = \{1,2,3 \ldots, k+1\}$
m	Bilangan yang menyatakan objek bilangan Stirling pada $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$, sehingga $m \to \infty$.

ABSTRAK

Rahman, Raisha Inayah. 2023. **Analisis Konstanta Euler-Mascheroni Yang Diperumum**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci : Konstanta Euler-Mascheroni Yang Diperumum. Deret harmonik, Fungsi Riemann Zeta, Barisan Stirling jenis pertama.

Konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum memiliki fungsi untuk menganalisis fungsi atau barisan yang memiliki parameter tertentu di bidang berbagai. Seiring dengan kemajuan ilmu pengetahuan, konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum terus mengalami pembaharuan. Salah satunya dapat ditemukan pada *On Generalized Euler-Mascheroni Constants* oleh G. Abe-I-Kpeng, M.M. Iddirisu, dan K. Nantomah tahun 2022. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menganalisis hubungan antara konstanta Euler-Macheroni yang diperumum dengan deret harmonik, serta menganalisis konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum dengan *signed count permutation*. Dalam analisis ini, diperlukan dekomposisi fungsi Riemann Zeta dan bilangan Stirling jenis pertama. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan *(literature research)*. Hasil dari penelitian ini adalah teorema-teorema baru yang terkait dengan konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum.

ABSTRACT

Rahman, Raisha Inayah. 2023. **On The Analysis of Generalized Euler-Mascheroni Constants**. Thesis. Mathematics department, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords : Generalized Euler-Mascheroni Constant, Harmonic series, Riemann Zeta function, Stirling number of the first kind.

The generalized Euler-Mascheroni constant analyzes functions or sequences with specific parameters in various scientific fields. As scientific knowledge advances, the generalized Euler-Mascheroni constant continues to undergo renewal. One example is found in "On Generalized Euler-Mascheroni Constants" by G. Abe-I-Kpeng, M.M. Iddirisu, and K. Nantomah in 2022. The purpose of this study is to analyze the relationship between the generalized Euler-Mascheroni constant and harmonic series, as well as to examine its connection with signed count permutations. The analysis involves decomposing the Riemann Zeta function and using Stirling numbers of the first kind. The methodology employed in this study was literature research. This study yields new theorems concerning the generalized Euler-Mascheroni constant.

مستخلص البحث

الرحمن، رائيشه عناية. ٢٠٢٣. تحليل ثوابت إيلر–ماشيروني المعممة. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامةالحكوميةمالانخ
المشرف الاوّل: الدكتور خيرالرحمن، الماجستير الثاين: املاجستري يران هيراوايت

الكلمات الرئيسية: ثابت إيلر–ماشيروني المعمم، سلسلة هارمونية، دالة زيتا لريمان، أعداد ستيرلينج من .النوع الأول

الثابت المعمم لإيلر–ماشيروني يستخدم لتحليل الدوال أو التسلسلات التي تحتوي على المعامل المحددفي مجلاتالعلمية المتنوعة. مع تقدم علم المعرفة، يستمر الثابت المعمم لإيلر–ماشيروني في التجديد. واحدة من الأمثلة في هذا الصدد هي في مقالة "عن الثوابت المعممة لإيلر–ماشيروني" التي كتبها ج. أبي–إكبينغ .وم.م. إديريسو وك. نانتوماه عام ٢٠٢٢ .

الهدف من الدراسة هو تحليل العلاقة بين الثابت المعمم لإيلر–ماشيروني والتسلسل الهندسي، وتحليل العلاقة بين الثابت المعمم لإيلر–ماشيروني وترتيب العد الإشاري. في عملية التحليل، يتطلب الأمر لتحليل دالة زيتا لريمان واستخدام أعداد ستيرلينج من النوع الأول. وقد تم استخدام منهجية البحث الأدبي في هذه الدراسة .نتائج هذه الدراسة تؤدي إلى توصلات جديدة تتعلق بالثابت المعمم
لإيلر–ماشيرو ني .

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan suatu ilmu yang tidak dapat dipisahkan dalam kehidupan manusia. Matematika tidak hanya sekedar perhitungan yang sulit dan tidak berdasar, tetapi matematika adalah basis dalam menentukan sisi objektif dalam suatu bidang ilmu pengetahuan. Matematika memiliki cabang bidang di dalamnya untuk memudahkan pembelajaran serta pengaplikasiannya di berbagai bidang ilmu pengetahuan. Salah satu cabang bidang dalam matematika adalah analisis. Analisis dikenal abstrak dan sulit untuk dipahami bagi orang awam karena sulit digambarkan pada kehidupan sehari-hari dibandingkan cabang matematika lainnya. Akan tetapi penemuan dalam analisis matematika membuat perubahan yang sangat besar dalam kehidupan manusia. Contohnya penemuan konstanta π yang sangat berguna dalam kehidupan sehari-hari karena sering digunakan untuk menghitung volume kemasan, keliling lapangan, serta menghitung bahan bangunan. Selain π, e, dan i, matematika memiliki banyak konstanta yang memiliki definisinya masing-masing, simbol-simbol unik, dan panggilannya tersendiri. Salah satunya adalah konstanta Euler-Mascheroni yang dilambangkan dengan γ yang merupakan salah satu konstanta penting dalam matematika (Havil, 2009).

Konstanta Euler-Mascheroni (yang dikenal juga dengan konstanta Euler) ditemukan pada 1735 oleh matematikawan asal Swiss yang bernama Leonhard Euler yang dilambangkan c dengan lima angka di belakang koma, yaitu $0{,}57721$.

Pada 1790, Lorenzo Mascheroni, matematikawan asal Italia mempopulerkan lambang γ serta menemukan 32 digit angka dibelakang koma. Akan tetapi, hanya 19 digit pertama yang benar, dimana digit ke-20 dan 21 serta digit ke-31 dan 32 salah. Konstanta Euler-Mascheroni memiliki formula

$$\gamma_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \ln k\,, k \geq 1$$

(Mortici, 2010).

Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, konstanta Euler-Mascheroni memiliki versi yang diperumum untuk menganalisis fungsi atau barisan yang memiliki parameter tertentu. Menurut Garay (2008), pengaplikasian konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum diantaranya sebagai berikut:

1. Pemodelan partikel relativistik.
2. Mengubah biofisika membran ke *worldsheets* pada teori dawai.
3. Chen-Willmore *submanifolds*.

Diantara banyaknya konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum, terdapat dua teorema yang diperoleh Kpeng,dkk (2022), yaitu:

$$\mathfrak{X}_k = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{k!}{(k+1-n)!} S(m,n) \zeta^{(k+1-n)}(m),$$

$$\mathfrak{Z}_k = \frac{1}{k+1} \ln^{k+1} 2 - (-1)^k k! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m (2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S(2m+1,n)}{(k+1-n)!} \zeta^{(k+1-n)}(2m+1)$$

dimana $k \in \mathbb{W}$ dan $n = 1,2,\ldots,k+1$ serta $S(m,n)$ merupakan barisan stirling jenis pertama dan $\zeta(m)$ merupakan fungsi Riemann Zeta orde-m.

Dalam QS Luqman ayat 27 yang berbunyi

وَلَوْ أَنَّ مَا فِي الْأَرْضِ مِنْ شَجَرَةٍ أَقْلَامٌ وَالْبَحْرُ يَمُدُّهُ مِنْ بَعْدِهِ سَبْعَةُ أَبْحُرٍ مَا نَفِدَتْ
كَلِمَاتُ اللَّهِ ۗ إِنَّ اللَّهَ عَزِيزٌ حَكِيمٌ ﴿٢٧﴾

Artinya:

Dan seandainya pohon-pohon di bumi menjadi pena dan lautan (menjadi tinta), ditambahkan kepadanya tujuh lautan (lagi) setelah (keringnya)nya, niscaya tidak akan habis-habisnya (dituliskan) kalimat-kalimat Allah. Sesungguhnya Allah Mahaperkasa, Mahabijaksana (Al-Qur'an, 31 : 27).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa ilmu Allah SWT sangatlah luas dan tidak ada satu makhluk ciptaan-Nya yang menguasai seluruh ilmu-Nya. Adanya konstanta Euler-Mascheroni beserta rahasia-rahasia yang masih menjadi misteri tentunya tidak lepas dari kehendak Allah SWT. Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, konstanta Euler-Mascheroni akan memiliki berbagai versi yang diperumum. Sehingga pada pembahasan ini penulis akan menganalisis teorema konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum oleh Kpeng,dkk.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penilitian ini adalah

1. Bagaimana menganalisis hubungan konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum pada $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$ dengan deret harmonik?
2. Bagaimana menganalisis konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum pada $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$ dengan *signed count permutation*?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini adalah

1. Menganalisis hubungan konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum pada $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$ dengan deret harmonik.

2. Menganalisis konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum pada $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$ dengan *signed count permutation*, yang selanjutnya dilambangkan dengan $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ dan $\mathfrak{Z}_{scp(k)}$.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan referensi tambahan mengenai konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum sehingga dapat memudahkan pengembangan konsep matematika di bidang ilmu lainnya maupun lintas keilmuan sains.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah menganalisis konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum pada barisan Stirling jenis pertama dan fungsi Riemann Zeta pada m.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Deret Harmonik

Deret harmonik merupakan salah satu deret tak hingga pada matematika yang dapat diaplikasikan ke berbagai bidang sains lainnya. Menurut Havil (2009), berikut deret harmonik yang dilambangkan dengan H_n.

Definisi 2.1 Deret harmonik yang dilambangkan dengan H_n, $k, n \in \mathbb{Z}^+$ dinyatakan dengan

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Contoh 2.2 Dari Definisi 2.1, deret harmonik dapat dimodelkan sebagai berikut

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Sifat 2.3 Dari Definisi 2.1, Olaikhan (2021) menyimpulkan suatu sifat sebagai berikut

$$H_n - H_{n-1} = \frac{1}{n}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} H_n - H_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Menurut Olaikhan (2021), deret harmonik memiliki yang memiliki orde didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.4 Deret harmonik dengan orde $a \in \mathbb{Z}^+$ dinyatakan dengan

$$H_n^{(a)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$$

Contoh 2.5 Dari Definisi 2.4, dapat diberi contoh sebagai berikut :

$$H_n^{(5+x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{5+x}}$$

Menurut Erdos (1932), deret harmonik juga dapat didefinisikan dalam deret aritmatika dengan selisih d dan a merupakan suku pertama.

Definisi 2.6 Deret harmonik dapat dimodelkan dalam deret aritmatika

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a + (k-1)d}, a, d \in \mathbb{Z}$$

Contoh 2.7 Dari Definisi 2.4, misalkan $a = -2$ dan $d = 3$, maka H_n adalah

$$\begin{aligned} H_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a + (k-1)d} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{-2 + (k-1)3} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{-2 + 3k - 3} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3n - 5} \end{aligned}$$

Menurut Cowen,dkk (1980), terdapat deret harmonik bolak-balik yang didefinisikan sebagai berikut

Teorema 2.8 Deret harmonik bolak-balik $k \in \mathbb{Z}^+$ dinyatakan dengan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$$

Bukti :

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \frac{(-1)^{1+1}}{1} + \frac{(-1)^{2+1}}{2} + \frac{(-1)^{3+1}}{3} + \frac{(-1)^{4+1}}{4} + \frac{(-1)^{5+1}}{5} + \cdots \\
&= \frac{(-1)^{2}}{1} + \frac{(-1)^{3}}{2} + \frac{(-1)^{4}}{3} + \frac{(-1)^{5}}{4} + \frac{(-1)^{6}}{5} \ldots \\
&= \frac{1}{1} + \frac{(-1)}{2} + \frac{1}{3} + \frac{(-1)}{4} + \frac{1}{5} \ldots \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots
\end{aligned}$$

Akan dicari hasil dari deret diatas dengan deret Maclaurin. Deret Maclaurin adalah sebagai berikut

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x)^n$$

dimana $f^{(n)}$ = turunan f ke-n . Misalkan $f(x) = \ln(x+1)$, maka

$$\begin{aligned}
f(0) &= \ln(0+1) = \ln 1 = 0 \\
f'(0) &= (x+1)^{-1} = (0+1)^{-1} = 1 \\
f''(0) &= -(x+1)^{-2} = -(0+1)^{-2} = -1 \\
f'''(0) &= 2(x+1)^{-3} = 2(0+1)^{-3} = 2 \\
f''''(0) &= -6(x+1)^{-4} = -6(0+1)^{-4} = -6
\end{aligned}$$

Jika $x = 0$, maka

$$f(x) = \ln(1+x) = \frac{0}{0!} x^0 + \frac{1}{1!} x^1 + \frac{(-1)}{2!} x^2 + \frac{2}{3!} x^3 + \frac{(-6)}{4!} x^4 + \cdots$$

$$= x + \frac{(-1)}{2 \cdot 1 \cdot (1)^2} x^2 + \frac{2}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1)^3} x^3 + \frac{(-6)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1)^4} x^4 + \cdots$$

$$= x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \cdots$$

Untuk mencari ln 2, maka subtitusikan $x = 1$ sehingga

$$\ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{4}(1)^4 + \cdots$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

sehingga terbukti Teorema 2.8

2.2 Fungsi Riemann Zeta

Fungsi Riemann Zeta merupakan salah satu fungsi matematika yang banyak ditemukan dalam teori bilangan dan geometri. Fungsi Riemann Zeta yang ditemukan oleh Benhard Riemann pada abad ke-19 juga diaplikasikan dalam bidang fisika seperti mekanika kuantum dan teori dawai. Fungsi Riemann Zeta dalam Iwaniec (2014) yang dilambangkan dengan $\zeta(m)$ didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.9 Fungsi Riemann Zeta dengan $m \in \mathbb{C}$ dan $n \in \mathbb{Z}^+$ adalah

$$\zeta(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}$$

Contoh 2.10 Jika pada fungsi Riemann Zeta dimana $m = 2$, maka

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Bukti:

Fungsi Riemann Zeta pada $m = 2$ adalah

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Karena n menuju tak hingga, maka diperlukanlah kalkulator untuk menghitung hasilnya (koding dan hasil dapat dilihat pada lampiran).

Sehingga

1. Jika $n = 10$, maka hasilnya adalah 1.5497677311665408.
2. Jika $n = 100$, maka hasilnya adalah 1.6349839001848923.
3. Jika $n = 1000$, maka hasilnya adalah 1.6439345666815615.
4. Jika $n =$ 1.000.000, maka hasilnya adalah 1.64493306684877.

Karena semakin besar n nilainya mendekati $\frac{\pi^2}{6} = 1.64493406685$, maka $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Sifat 2.11 Dari Definisi 2.9, jika fungsi Riemann Zeta pada $m = 1$, maka dapat disimpulkan

$$\zeta(1) = H_n$$

Bukti:

Berdasarkan definisi deret harmonik pada Definisi 2.1, maka disimpulkan

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = H_n$$

Menurut Iwaniec (2014), turunan pertama dari fungsi Riemann Zeta dapat disimpulkan sebagai berikut:

Teorema 2.12 Turunan pertama fungsi Riemann Zeta dengan $m \in \mathbb{C}$ adalah

$$\zeta'(m) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^m}$$

Bukti:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\zeta}{dm} &= \frac{d}{dm}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^m}\right) \\
&= \frac{d}{dm}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-m}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d}{dm}(n^{-m})\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-m}\cdot \ln n \cdot (-1) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^m}
\end{aligned}
$$

Untuk mencari turunan ke-k, maka akan dianalisis turunan $\zeta''(m), \zeta'''(m), \zeta''''(m)$.

$$\zeta''(m) = -\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot n^{-m} \cdot \ln n \cdot (-1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^m}$$

$$\zeta'''(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln^2 n \cdot n^{-m} \cdot \ln n \cdot (-1) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^3 n}{n^m}$$

$$\zeta''''(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln^3 n \cdot n^{-m} \cdot \ln n \cdot (-1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^4 n}{n^m}$$

Remark 2.13 Dalam Iwaniec (2014), dapat disimpulkan turunan ke-k pada fungsi Riemann Zeta dengan $m \in \mathbb{C}$ dan $k \in \mathbb{Z}^+$ adalah

$$\zeta^k(m) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^k n}{n^m}$$

2.3 Barisan Stirling

Bilangan Stirling merupakan bagian dari bilangan kombinatorial yang dinamakan oleh matematikawan asal Skotlandia, yaitu James Stirling. Bilangan

Stirling terinspirasi dari pengaplikasian himpunan partisi yang pertama kali dilakukan pada upacara minum teh oleh sosialita Jepang di abad ke-16. Salah satu permainan pada upacara minum teh tersebut adalah *genji-ko*, yang serupa dengan himpunan partisi suku ke-n (Mansour & Schork, 2016).

Bilangan Stirling memiliki dua jenis, yaitu bilangan Stirling jenis pertama dan bilangan Stirling jenis kedua. Graham,dkk (1989) mendefinisikan bilangan Stirling jenis pertama sebagai bilangan yang dihasilkan dari menghitung siklus objek sebanyak m yang terpartisi pada n.

Definisi 2.14 Dalam Darwanto, dkk (2020), partisi dari sebuah himpunan A adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong $A_1, A_2, \ldots$ dari A sedemikian hingga:

1. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = A$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$

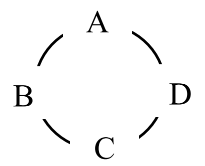
Contoh 2.15 Berdasarkan Definisi 2.14, misal terdapat himpunan $A = \{1,2,3,4,5\}$, maka terdapat partisi sebagai berikut

$$A_1 = \{1,2\}; \;\; A_2 = \{3\}; \quad A_3 = \{4,5\}$$

dimana himpunan-himpunan tersebut memenuhi syarat dalam Definisi 2.14, yaitu

1. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,2,3,4,5\} = A$
2. $A_1 \cap A_2 = \emptyset; \;\; A_2 \cap A_3 = \emptyset; \;\; A_1 \cap A_3 = \emptyset$

Contoh 2.16 Dalam Graham,dkk (1996), siklus adalah sebagaimana suatu bagian akhir yang akan tersambung dengan awal (tidak terputus). Misal terdapat himpunan $X = \{A, B, C, D\}$ yang disusun melingkar seperti berikut.



Gambar 2.1 Siklus

Sehingga untuk menyatakan himpunan X dapat dinyatakan dengan

$$\{A, B, C, D\} = \{B, C, D, A\} = \{C, D, A, B\} = \{D, A, B, C\}$$

Karenanya

$$\{A, B, C, D\} \neq \{A, B, D, C\}.$$

Definisi 2.17 Dalam Graham,dkk (1989), bilangan Stirling jenis pertama yang dilambangkan dengan $S(m, n)$, $m > n, m, n \in \mathbb{Z}^+$ adalah sebagai berikut

$$S(m, n) = (m-1) \cdot S(m-1, n) + S(m-1, n-1)$$

dimana m merupakan banyaknya suatu objek yang terpartisi sebanyak n.

Teorema 2.18 Jika $n = m$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$maka partisi objek hanya ada satu cara, sehingga

$$S(m, m) = 1$$

Bukti:

Jika terdapat objek sebanyak n (himpunan pada bilangan Stirling jenis pertama dilambangkan dengan []), dan siklusnya terbagi atas n, maka partisi objeknya sebagai berikut

$S(1,1) = [1]$

$S(2,2) = [1][2]$

$S(3,3) = [1][2][3]$

$S(4,4) = [1][2][3][4]$

$S(n, n) = [1][2][3] \ldots [n]$

Sehingga hanya ada satu cara dalam partisinya. Maka Teorema 2.18 terbukti.

Teorema 2.19 Jika $n = 1$ dan $m \in \mathbb{Z}^+$, maka bilangan Stirling jenis pertama memenuhi permutasi siklis, sehingga

$$S(m, 1) = (m-1)!$$

Bukti:

$S(m,1)$ dapat didefinisikan sebagai menghitung siklus objek sebanyak m dalam satu partisi, sehingga $S(m,1)$ memenuhi definisi permutasi siklis. Menurut Perdana (2016), kondisi permutasi dimana susunan objeknya tidak lurus akan tetapi membentuk sebuah lingkaran.

Berdasarkan teorema permutasi siklis dalam Herhyanto & Gantini (2009), misalkan ada m orang yang duduk mengelilingi meja melingkar, maka orang pertama dapat duduk dimana saja sehingga terhitung sebagai satu cara. Sedangkan $(m-1)$ orang memiliki $(m-1)\cdot(m-2)\cdot(m-3)\dots\cdot 2\cdot 1=(m-1)!$ cara.

Sehingga jika permutasi siklis yang dilambangkan dengan P_{siklis}, $m\in\mathbb{Z}^+$ dapat dinyatakan dengan

$$P_{\text{siklis}}=(m-1)!$$

maka Teorema 2.19 terbukti.

Contoh 2.20 Bilangan Stirling jenis pertama pada $m=4$ dan $n=2$ adalah

$$S(4,2)=11$$

Bukti :

Berdasarkan Definisi 2.17, $S(4,2)$ dapat diperoleh sebagai berikut

$$S(4,2)=3\cdot S(3,2)+S(3,1)$$

dengan $S(3,2)$ adalah

$$S(3,2)=2\cdot S(2,2)+S(2,1)$$

Karena berdasarkan Teorema 2.19 dan 2.20 dimana $S(2,2)=1$ dan $S(2,1)=(2-1)!=1!$, maka

$$\begin{aligned}S(3,2)&=2\cdot S(2,2)+S(2,1)\\&=2\cdot 1+1!\end{aligned}$$

$= 2 + 1$

$= 3$

Subtitusi $S(3,2)$ dan $S(3,1) = (3 - 1) = 2!$, maka

$$\begin{aligned} S(4,2) &= 3 \cdot S(3,2) + S(3,1) \\ &= 3 \cdot 3 + 2! \\ &= 9 + 2 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Untuk menghitung bilangan Stirling jenis pertama secara manual, dapat dimisalkan dengan himpunan $X = \{A, B, C, D\}$ yang akan dibagi dalam dua partisi sebagai berikut (partisi dalam bilangan Stirling jenis pertama dilambangkan dengan [ ]):

$[A, B, C][D]$, $[A, B, D][C]$, $[A, C, D][B]$, $[B, C, D][A]$,

$[A, C, B][D]$, $[A, D, B][C]$, $[A, D, C][B]$, $[B, D, C][A]$,

$[A, B][C, D]$, $[A, C][B, D]$, $[A, D][B, C]$.

sehingga diperoleh sebelas cara pada empat objek dalam dua partisi.

Menurut Graham,dkk (1989), dalam bilangan Stirling jenis pertama, penting ditentukan *signed count permutation* untuk menganalisis apakah urutannya berurutan atau tidak berurutan (disebut pula inversi). Jika berurutan atau jumlah inversi genap maka akan dilambangkan dengan 1. Sedangkan jika jumlah inversi ganjil maka akan dilambangkan dengan -1.

Contoh 2.21 Dari himpunan $X = \{1,2,3\}$ dapat dibentuk susunan anggotanya sebagai berikut

$$\{1,2,3\}, \{1,3,2\}, \{2,1,3\}, \{2,3,1\}, \{3,1,2\}, \{3,2,1\}$$

Sehingga jika dianalisis inversinya, maka

1. $\{1,2,3\}$ = 0 inversi, terhitung sebagai 1;
2. $\{1,3,2\}$ = 1 inversi dimana pada 3 muncul sebelum 2 (atau yang dilambangkan dengan (3,2)), sehingga terhitung sebagai -1;
3. $\{2,1,3\}$ = 1 inversi dimana (2,1), terhitung sebagai -1;
4. $\{2,3,1\}$ = 2 inversi dimana (2,1) dan (3,1), terhitung sebagai 1;
5. $\{3,1,2\}$ = 2 inversi dimana (3,1) dan (3,2), terhitung sebagai 1;
6. $\{3,2,1\}$ = 3 inversi dimana (3,2), (3,1), dan (2,1), terhitung sebagai -1;

Remark 2.22 Menurut (Adamchik, 1996), bilangan Stirling jenis pertama dengan *signed count permutation* yang dilambangkan dengan $S_{scp}(m,n)$ dengan $m \geq n, m, n \in \mathbb{Z}^+$ dapat dirumuskan sebagai berikut

$$S_{scp}(m,n) = (-1)^{n-k}[(m-1) \cdot S(m-1,n) + S(m-1,n-1)]$$

Bilangan Stirling jenis pertama berdasarkan Definisi 2.17 dapat dijabarkan sebagai berikut

Tabel 2.1 Barisan Stirling Jenis Pertama

m \ n	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	2	3	1			
4	6	11	6	1		
5	24	50	35	10	1	
6	120	274	225	85	15	1

Berdasarkan penjabaran pada Tabel 2.1, nilai $S(m,n)$ tidak dapat diketahui kecuali mengetahui $S(m-1,n-1)$, $S(m-2,n-2)$, $S(m-3,n-3)$, ... , $S(1,1)$. Sehingga direlasikan antara bilangan Stirling jenis pertama dengan deret harmonik sebagai berikut

Contoh 2.23 Ditentukan $S(m,2)$ yang direlasikan dengan deret harmonik berdasarkan Definisi 2.1 sebagai berikut

1. Jika $m=2$, maka $S(2,2)=1 \Rightarrow 1 = H_1 \cdot 1$
2. Jika $m=3$, maka $S(3,2)=3 \Rightarrow 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot 2 = H_2 \cdot 2$
3. Jika $m=4$, maka $S(4,2)=11 \Rightarrow 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}\cdot 6 = H_3 \cdot 6$
4. Jika $m=5$, maka $S(5,2)=50 \Rightarrow 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{50}{24}\cdot 24 = H_4 \cdot 24$
5. Jika $m=6$, maka $S(6,2)=274 \Rightarrow 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{274}{120}\cdot 120 = H_5 \cdot 120$

Karena bilangan yang di kali dengan dengan deret harmonik adalah $1,2,6,24,120,...$, dimana barisan bilangan tersebut membentuk hasil dari bilangan faktorial, maka dapat disimpulkan

1. Jika $m=2$, maka $H_1 \cdot 1!$
2. Jika $m=3$, maka $H_2 \cdot 2!$
3. Jika $m=4$, maka $H_3 \cdot 3!$
4. Jika $m=5$, maka $H_4 \cdot 4!$
5. Jika $m=6$, maka $H_5 \cdot 5!$

Berdasarkan penjabaran diatas, maka dapat disimpulkan bahwasanya $S(m,2)=(m-1)!\,H_m$. Sehingga akan dibuktikan kebenarannya terhadap Definisi 2.17 dengan induksi matematika sebagai berikut

$$S(m,2) = S(m,2)$$

$$(m-1)!\,H_{m-1} = (m-1)\cdot S(m-1,2) + S(m-1,1)$$

Berdasarkan Teorema 2.19, diperoleh $S(m-1,1) = (m-2)!$, maka

$$(m-1)!\,H_{m-1} = (m-1)\cdot S(m-1,2) + (m-2)!$$

sehingga pernyataan diatas memenuhi syarat-syarat induksi matematika sebagai berikut:

1. Karena $m \geq 2$, maka akan diambil $m = 2$ dan jika hasilnya 1 maka pernyataan $(m-1)!\,H_{m-1} = (m-1)\cdot S(m-1,2) + (m-2)!$ adalah benar.

$$(m-1)!\left(\frac{1}{m-1}\right) = (2-1)!\left(\frac{1}{2-1}\right) = 1!\cdot 1 = 1$$

2. Karena pernyataan $(m-1)!\,H_{m-1} = (m-1)\cdot S(m-1,2) + (m-2)!$ telah dianggap benar, maka dimisalkan $m = k$, sehingga

$$(k-1)!\,H_{k-1} = (k-1)\cdot S(k-1,2) + (k-2)!$$

3. Tentukan hasil dari $k+1$

   Untuk menentukan $k+1$, maka

$$\begin{aligned} \big((k+1)-1\big)!\,H_{(k+1)-1} &= \big((k+1)-1\big)\cdot S\big((k+1)-1,2\big) + \big((k+1)-2\big)! \\ k!\,H_k &= k\cdot S(k,2) + (k-1)! \end{aligned}$$

   Dengan menjabarkan $k!\,H_k$, diperoleh

$$\begin{aligned} k!\,H_k &= k\cdot (k-1)!\cdot H_{k-1} + k!\cdot \frac{1}{k} \\ &= k\cdot [(k-1)\cdot S(k-1,2) + (k-2)!] + (k-1)! \end{aligned}$$

   Berdasarkan Definisi 2.14, diperoleh

$$(k-1)\cdot S(k-1,2) + (k-2)! = S(k,2)$$

   maka

$$k!\,H_k = k\cdot S(k,2) + (k-1)!$$

Sehingga terbukti $S(m,2) = (m-1)!\,H_m$.

Contoh 2.24 Ditentukan $S(m,3)$ sebagai berikut

1. Jika $m = 3$, maka

$$S(3,3) = 1 \Rightarrow \left(\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(1+\frac{1}{2^2}\right)\right)\cdot\frac{2}{2} = \left((H_2)^2 - H_2^{(2)}\right)\cdot\frac{2}{2}$$

2. Jika $m = 4$, maka

$$S(4,3) = 6 \Rightarrow \left(\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2 - \left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)\right)\cdot\frac{6}{2} = \left((H_3)^2 - H_3^{(2)}\right)\cdot\frac{6}{2}$$

3. Jika $m = 5$, maka

$$S(5,3) = 35 \Rightarrow \left(\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)^2 - \left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)\right)\cdot\frac{24}{2} = \left((H_4)^2 - H_4^{(2)}\right)\cdot\frac{24}{2}$$

4. Jika $m = 6$, maka

$$S(6,3) = 225 \Rightarrow \left(\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)^2 - \left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)\right)\cdot\frac{120}{2} = \left((H_5)^2 - H_5^{(2)}\right)\cdot\frac{120}{2}$$

Karena bilangan yang di kali dengan dengan deret harmonik adalah $2,6,24,120,\ldots$ yang membentuk hasil dari faktorial, maka dapat disimpulkan

1. Jika $m = 3$, maka $\left((H_2)^2 - H_2^{(2)}\right)\cdot\frac{2!}{2}$
2. Jika $m = 4$, maka $\left((H_3)^2 - H_3^{(2)}\right)\cdot\frac{3!}{2}$
3. Jika $m = 5$, maka $\left((H_4)^2 - H_4^{(2)}\right)\cdot\frac{4!}{2}$
4. Jika $m = 6$, maka $\left((H_5)^2 - H_5^{(2)}\right)\cdot\frac{5!}{2}$

Berdasarkan penjabaran diatas, maka dapat ditentukannya bilangan Stirling jenis pertama pada $n = 3$ adalah $S(m,3) = \frac{(m-1)!}{2}((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)})$. Sehingga akan dibuktikan kebenarannya terhadap Definisi 2.17 dengan induksi matematika sebagai berikut

$$S(m,3) = S(m,3)$$

$$\frac{(m-1)!}{2}((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}) = (m-1) \cdot S(m-1{,}3) + S(m-1{,}2)$$

Berdasarkan Contoh 2.23, diperoleh $S(m-1{,}2) = (m-2)!\,H_{m-2}$, maka

$$\frac{(m-1)!}{2}((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}) = (m-1) \cdot S(m-1{,}3) + (m-2)!\,H_{m-2}$$

sehingga pernyataan diatas memenuhi syarat-syarat induksi matematika sebagai berikut:

1. Karena $m \geq 3$, maka akan diambil $m = 3$ dan jika hasilnya 1 maka pernyataan $\frac{(m-1)!}{2}((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}) = (m-1) \cdot S(m-1{,}3) + (m-2)!\,H_{m-2}$ bernilai benar.

$$\begin{aligned}\frac{(3-1)!}{2}\left((H_{3-1})^2 - H_{3-1}^{(2)}\right) &= \frac{2!}{2}\left((H_2)^2 - H_2^{(2)}\right) \\ &= 1 \cdot \left(\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(1+\frac{1}{2^2}\right)\right) \\ &= \frac{9}{4} - \frac{5}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

2. Karena pernyataan $\frac{(m-1)!}{2}((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}) = (m-1) \cdot S(m-1{,}3) + (m-2)!\,H_{m-2}$ telah dianggap benar, maka dimisalkan $m = k$, sehingga

$$\frac{(k-1)!}{2}((H_{k-1})^2 - H_{k-1}^{(2)}) = (k-1) \cdot S(k-1{,}3) + (k-2)!\,H_{k-2}$$

3. Tentukan hasil dari $k+1$

   Untuk menentukan $k+1$, maka

$$\frac{((k+1)-1)!}{2}\left(\left(H_{(k+1)-1}\right)^2 - H_{(k+1)-1}^{(2)}\right) = ((k+1)-1) \cdot S((k+1)-1{,}3) + ((k+1)-2)!\,H_{(k+1)-2}$$

$$\frac{k!}{2}\left((H_k)^2 - H_k^{(2)}\right) \quad = k \cdot S(k,3) + (k-1)!\, H_{k-1}$$

Dengan menjabarkan $\frac{k!}{2}\left((H_k)^2 - H_k^{(2)}\right)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{k!}{2}\left((H_k)^2 - H_k^{(2)}\right) &= \frac{k!}{2}\left(\left((H_{k-1})^2 - \frac{1}{k}\left(2H_{k-1} + \frac{1}{k}\right)\right) - \left(H_{k-1}^{(2)} + \frac{1}{k^2}\right)\right) \\
&= \frac{k!}{2} \cdot \left((H_{k-1})^2 - \frac{1}{k}\left(2H_{k-1} + \frac{1}{k}\right)\right) - \frac{k!}{2}\left(H_{k-1}^{(2)} + \frac{1}{k^2}\right) \\
&= \frac{k!}{2} \cdot (H_{k-1})^2 - \frac{(k-1)!}{2}\left(2H_{k-1} + \frac{1}{k}\right) - \frac{k!}{2} \cdot H_{k-1}^{(2)} - \frac{(k-1)!}{2k} \\
&= \frac{k!}{2}\left((H_{k-1})^2 - H_{k-1}^{(2)}\right) - \frac{(k-1)!}{2}\left(\left(2H_{k-1} + \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{k!}{2}\left((H_{k-1})^2 - H_{k-1}^{(2)}\right) - \frac{(k-1)!}{2}\left(2H_{k-1} + \frac{2}{k}\right) \\
&= k \cdot \frac{(k-1)!}{2}\left((H_{k-1})^2 - H_{k-1}^{(2)}\right) - (k-1)!\left(H_{k-1} + \frac{1}{k}\right) \\
&= k \cdot [(k-1) \cdot S(k-1,3) + (k-1)!\, H_{k-1}] - (k-1)!\, H_k
\end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.14 dan Contoh 2.23, diperoleh

$$(k-1) \cdot S(k-1,3) + (k-1)!\, H_{k-1} = S(k,3)$$

maka

$$\frac{k!}{2}\left((H_k)^2 - H_k^{(2)}\right) = k \cdot S(k,3) + (k-1)!\, H_{k-1}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$S(m,3) = \frac{(m-1)!}{2}\left((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right)$$

Remark 2.25 Berdasarkan penjabaran Contoh 2.23 dan 2.24, maka Adamchik(1997) merumuskan bilangan stirling jenis pertama yang direlasikan dengan bilangan harmonik (dilambangkan dengan $w(m,n)$) dengan $m \geq n$, $m, n, k \in \mathbb{W}$ adalah sebagai berikut

$$w(m,n) = \sum_{k=0}^{n-1} (1-n)_k H_{m-1}^{(k+1)} w(m, n-1-k)$$

dengan $w(m,0) = 1$ dan $(1-n)_k$ merupakan *falling factorial*.

Ditentukannya $w(m,0)$ berdasarkan sifat permutasi dimana jika terdapat n objek yang tidak mengalami partisi, maka posisi objek adalah tetap *(fixed points)*. Sehingga $w(m,0) = 1$.

Definisi 2.26 Menurut Graham,dkk (1989), *falling factorial* adalah

$$x_k = x(x-1)(x-2)\ldots(x+k-1) = \prod_{1}^{k}(x+k-1)$$

dengan $x_0 = 1$

Contoh 2.27 Berdasarkan Definisi 2.26, contoh dari *falling factorial* pada $(1-n)_k$ adalah

1. Jika $n = 10$ dan $k = 1$, maka

$$(1-10)_1 = (1-10) = -9$$

2. Jika $n = 5$ dan $k = 3$, maka

$$(1-5)_3 = (1-5)(1-5+1)(1-5+2) = (-4)(-5)(-3) = -60$$

Berdasarkan Remark 2.25, diperoleh $w(m,n)$ sebagai berikut

Tabel 2.2 Nilai $w(m,n)$

m \ n	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	1	1				
3	1	$\frac{3}{2}$	1			
4	1	$\frac{11}{6}$	2	1		
5	1	$\frac{25}{12}$	$\frac{105}{36}$	$\frac{2035}{1728}$	1	

Untuk menentukan $S(m,n)$ pada n tertentu, maka Adamchik(1997) merumuskan bilangan stirling jenis pertama $S(m,n)$ sebagai berikut

Definisi 2.28 Bilangan Stirling jenis pertama dengan m objek, n partisi, $w(m,n)$ merupakan bilangan Stirling jenis pertama yang telah direlasikan dengan bilangan harmonik dimana $w(m,n) = \sum_{k=0}^{n-1}(1-n)_k H_{m-1}^{(k+1)} w(m,n-1-k)$, $w(m,0) = 1$, $m \geq n, m, n \in \mathbb{Z}^+$

$$S(m,n) = \frac{(m-1)!}{(n-1)!} w(m,n-1)$$

Sifat 2.29 Berdasarkan Remark 2.25 dan Definisi 2.28, dapat disimpulkan

1. $S(m,2) = (m-1)!\, H_{m-1}$
2. $S(m,3) = \frac{(m-1)!}{2}((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)})$
3. $S(m,4) = \frac{(m-1)!}{3!}((H_{m-1})^3 - 3H_{m-1}H_{m-1}^{(2)} + 2H_{m-1}^{(3)})$
4. $S(m,m-1) = \binom{m}{2}$

Bukti:

a. Sifat 2.29(1)

$$\begin{aligned} S(m,2) &= \frac{(m-1)!}{(2-1)!} w(m,2-1) \\ &= (m-1)!\, w(m,1) \end{aligned}$$

Berdasarkan Remark 2.25 dan Definisi 2.28, maka $w(m,1)$ adalah

$$\begin{aligned} w(m,1) &= \sum_{k=0}^{1-1}(1-1)_k H_{m-1}^{(k+1)} w(m,1-1-k) \\ &= (1-1)_0 H_{m-1}^{(0+1)} w(m,0-0) \\ &= (1-1)_0 H_{m-1}^{(0+1)} w(m,0) \end{aligned}$$

$$= 1 \cdot H_{m-1} \cdot 1$$

$$= H_{m-1}$$

Sehingga terbukti

$$S(m,2) = (m-1)!\,H_{m-1}$$

b. Sifat 2.29(2)

$$S(m,3) = \frac{(m-1)!}{(3-1)!} w(m,3-1)$$

$$= \frac{(m-1)!}{2!} w(m,2)$$

Berdasarkan Remark 2.25, Definisi 2.28 dan Sifat 2.29(1), maka $w(m,2)$ adalah

$$w(m,2) = \sum_{k=0}^{2-1} (1-2)_k H_{m-1}^{(k+1)} w(m,2-1-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{1} (1-2)_k H_{m-1}^{(k+1)} w(m,1-k)$$

$$= \left((1-2)_0 H_{m-1}^{(0+1)} w(m,1-0)\right) + \left((1-2)_1 H_{m-1}^{(1+1)} w(m,1-1)\right)$$

$$= \left((1-2)_0 H_{m-1} w(m,1)\right) + \left((1-2)_1 H_{m-1}^{(2)} w(m,0)\right)$$

$$= H_{m-1} \cdot H_{m-1} + (1-2) H_{m-1}^{(2)} \cdot 1$$

$$= (H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}$$

Sehingga terbukti

$$S(m,2) = \frac{(m-1)!}{2} ((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)})$$

c. Sifat 2.29(3)

$$S(m,4) = \frac{(m-1)!}{(4-1)!} w(m,4-1)$$

$$= \frac{(m-1)!}{3!} w(m,3)$$

Berdasarkan Remark 2.25, Definisi 2.28, Sifat 2.29(1), dan Sifat 2.29(2), maka $w(m,3)$ adalah

$$\begin{aligned}
w(m,3) &= \sum_{k=0}^{3-1} (1-2)_k H_{m-1}^{(k+1)} w(m, 3-1-k) \\
&= \sum_{k=0}^{2} (1-3)_k H_{m-1}^{(k+1)} w(m, 2-k) \\
&= \left((1-3)_0 H_{m-1}^{(0+1)} w(m, 2-0)\right) + \left((1-3)_1 H_{m-1}^{(1+1)} w(m, 2-1)\right) \\
&\qquad + \left((1-3)_2 H_{m-1}^{(2+1)} w(m, 2-2)\right) \\
&= \left((1-3)_0 H_{m-1} w(m,2)\right) + \left((1-3)_1 H_{m-1}^{(2)} w(m,1)\right) \\
&\qquad + \left((1-3)_2 H_{m-1}^{(3)} w(m,0)\right) \\
&= \left(H_{m-1} w(m,2)\right) + \left((1-3) H_{m-1}^{(2)} w(m,1)\right) \\
&\qquad + \left((1-3)(1-3+1) H_{m-1}^{(3)} w(m,0)\right) \\
&= \left(H_{m-1} w(m,2)\right) - 2H_{m-1}^{(2)} w(m,1) + 2H_{m-1}^{(3)} w(m,0) \\
&= H_{m-1} \cdot \left((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right) - 2H_{m-1}^{(2)} H_{m-1} + 2H_{m-1}^{(3)} \cdot 1 \\
&= (H_{m-1})^3 - H_{m-1}^{(2)} H_{m-1} - 2H_{m-1}^{(2)} H_{m-1} + 2H_{m-1}^{(3)} \\
&= (H_{m-1})^3 - 3H_{m-1}^{(2)} H_{m-1} + 2H_{m-1}^{(3)}
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti

$$S(m,2) = \frac{(m-1)!}{3!} ((H_{m-1})^3 - 3H_{m-1}^{(2)} H_{m-1} + 2H_{m-1}^{(3)})$$

d. Sifat 2.29(4)

Berdasarkan Definisi 2.17, maka $S(m, m-1)$ dapat dijabarkan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
S(m, m-1) &= (m-1) \cdot S(m-1, m-1) + S(m-1, m-2) \\
&= (m-1) \cdot 1 + S(m-1, m-2) \\
&= (m-1) + S(m-1, m-2)
\end{aligned}
$$

Menentukan $S(m-1, m-2)$, maka

$$
\begin{aligned}
S(m-1, m-2) &= (m-2) \cdot S(m-2, m-2) + S(n-2, n-3) \\
&= (m-2) + S(m-2, m-3)
\end{aligned}
$$

Menentukan $S(m-2, m-3)$, maka

$$
\begin{aligned}
S(m-2, m-3) &= (m-3) \cdot S(m-3, m-3) + S(m-3, m-4) \\
&= (m-3) + S(m-3, m-4)
\end{aligned}
$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$
\begin{aligned}
S(m, m-1) &= (m-1) + (m-2) + (m-3) + S(m-3, m-4) \\
&= (m-1) + (m-2) + (m-3) + \cdots + 2 + 1
\end{aligned}
$$

Jika $S(m, m-1)$ ditambahkan dengan $S(m, m-1)$ maka akan diperoleh

$$
\begin{aligned}
S(m, m-1) + S(m, m-1) &= [(m-1) + (m-2) + \cdots + 2 + 1] + [(m-1) + (m-2) + \cdots + 2 + 1] \\
2S(m, m-1) &= m + m + m + \cdots \\
2S(m, m-1) &= m(m-1) \\
S(m, m-1) &= \frac{m(m-1)}{2}
\end{aligned}
$$

Graham,dkk (1989) menyatakan $S(m, m-1)$ dengan koefisien binomial, dimana $\frac{m(m-1)}{2} = \binom{m}{2}$. Sehingga terbukti bahwa

$$
S(m, m-1) = \binom{m}{2}
$$

Sifat 2.30 Berdasarkan Remark 2.22 dan Sifat 2.29, maka bilangan stirling jenis pertama juga dengan *signed count permutation* dapat dinyatakan sebagai berikut:

1. $S_{scp}(m, 1) = (-1)^{m-1}(m-1)!$

2. $S_{scp}(m,2) = (-1)^m (m-1)!\, H_{m-1}$

3. $S_{scp}(m,3) = (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!}{2} ((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)})$

4. $S_{scp}(m,4) = (-1)^m \frac{(m-1)!}{3!} \left((H_{m-1})^3 - 3H_{m-1}H_{m-1}^{(2)} + 2H_{m-1}^{(3)}\right)$

5. $S_{scp}(m,m-1) = -\binom{m}{2}$

Sedangkan barisan Stirling jenis kedua dilambangkan dengan $s(m,n)$ juga membagi objek sebanyak m yang dipartisi sebanyak k. Akan tetapi berbeda dengan barisan Stirling jenis pertama yang berdasarkan permutasi, barisan Stirling jenis kedua memiliki basis kombinasi.

Menurut Graham,dkk (1989), barisan Stirling jenis kedua dapat di definisi sebagai berikut

Definisi 2.31 Barisan Stirling jenis kedua dengan $m \geq n, m, n \in \mathbb{Z}^+$ adalah

$$s(m,n) = m \cdot s(m-1,n) + s(m-1,n-1)$$

dengan $s(m,0) = 1$

Teorema 2.32 Bilangan Stirling jenis kedua dengan satu partisi maka hasilnya adalah 1

$$s(n,1) = 1$$

Bukti:

Jika terdapat objek sebanyak n dalam satu partisi (berbeda dengan bilangan Stirling jenis pertama yang partisinya dilambangkan dengan [ ], partisi pada bilangan Stirling jenis kedua dilambangkan dengan { }. Angka didalam { } merupakan objek), maka hanya ada satu cara dalam menentukan partisinya, yaitu

$s(1,1) = \{1\}$

$s(2,1) = \{1,2\}$

$s(3,1) = \{1,2,3\}$

$s(n,1) = \{1,2,3,\dots,n\}$

sehingga Teorema 2.30 terbukti.

Contoh 2.33 Berdasarkan Definisi 2.29, maka jika $m = 4$ dan $n = 2$ adalah

$$s(4,2) = 7$$

Bukti:

$s(4,2)$ dapat diperoleh sebagai berikut

$$s(4,2) = 2 \cdot s(3,2) + s(3,1)$$

dimana $s(3,2)$ adalah

$$s(3,2) = 2 \cdot s(3,1) + s(3,0)$$

Berdasarkan Teorema 2.32 dimana $s(3,1) = 1$, maka

$$\begin{aligned} s(3,2) &= 2 \cdot s(2,2) + s(2,1) \\ &= 2 \cdot 1 + 1 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} s(4,2) &= 2 \cdot s(3,2) + s(3,1) \\ &= 2 \cdot 3 + 1 \\ &= 6 + 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Jika diperoleh dengan cara manual, misal terdapat empat objek A,B,C, dan D yang dibagi menjadi dua partisi (partisi dalam bilangan stirling kenis kedua dilambangkan dengan {}) sebagai berikut

$\{A, B, C\}\{D\}$, $\{A, C, D\}\{B\}$, $\{A, B\}\{C, D\}$, $\{A, D\}\{B, C\}$.

$\{A, B, D\}\{C\}$, $\{B, C, D\}\{A\}$, $\{A, C\}\{B, D\}$,

sehingga diperoleh tujuh cara pembagian empat objek dalam dua partisi

2.4 Konstanta Euler-Mascheroni

Konstanta Euler-Mascheroni atau yang dikenal konstanta Euler memiliki nilai yang mendekati 0.5772156649015328 .... Matematikawan Leonhard Euler menemukan lima angka desimal pada 1735 dan Lorenzo Mascheroni menemukan hingga tiga puluh dua angka desimal pada 1790, walaupun yang dinyatakan benar hanya 19 digit. Akan tetapi, bilangan pasti dari konstanta Euler-Mascheroni masih belum ditemukan dan masih menjadi misteri sampai hari ini (Mortici, 2010).

Definisi 2.34 Konstanta Euler-Mascheroni dalam Dunham (1999) adalah

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln k$$

Dikarenakan suku n menuju tak hingga, terdapat pertanyaan pada Dunham (1999) apakah $n + 1$ riil atau tidak. Sehingga munculah teorema berikut

Teorema 2.35 Jika γ_n merupakan konstanta Euler-Mascheroni, maka γ_{n+1} riil.

Bukti:

Untuk membuktikan γ_{n+1} merupakan riil, maka akan dicari luas antara γ_{n+1} dan γ_n.

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1} - \gamma_n &= \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right] - \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right] \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n\end{aligned}$$

Karena akan dicari luas antara γ_{n+1} dan γ_n, maka akan ditentukan integralnya ketiga ruasnya. Sehingga

$$\int \left[\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n\right] dn = \int \frac{1}{n+1} dn - \int \ln(n+1)\, dn + \int \ln n \; dn$$

Jika pada $\int \frac{1}{n+1} dn$ terdapat $u = n + 1$ dan $du = dn$, maka

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{n+1} dn &= \int \frac{1}{u}\, dn \\ &= \int \frac{1}{u}\, du \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|n+1| + C \end{aligned}$$

Sedangkan $\int \ln n\, dn$, akan digunakan cara $\int u dv = uv - \int v du$, jika $u = \ln n \to du = \frac{1}{n}$ dan $dv = 1 \to v = n$, maka

$$\begin{aligned} \int \ln n\, dn &= n \ln n - \int n \cdot \frac{1}{n}\, dn \\ &= n \ln n - \int 1 \; dn \\ &= n \ln n - n + C \end{aligned}$$

Untuk $\int \ln(n+1)\, dn$ akan dimisalkan $u = n + 1$, sehingga

$$\begin{aligned} \int \ln u\, dn &= \int \ln u\, du \\ &= u \ln u - u + C \\ &= (n+1)\ln(n+1) - (n+1) + C \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n\right] dn &= \ln|n+1| - \big((n+1)\ln(n+1) - (n+1)\big) + n \ln n - n + C \\ &= \ln|n+1| - (n+1)\ln(n+1) + n + 1 + n \ln n - n + C \end{aligned}$$

$$= \ln|n+1| - n\ln(n+1) - \ln(n+1) + 1 + n\ln n + C$$

$$= -n\ln(n+1) + n\ln n + 1 + C$$

Karena $\gamma_{n+1} - \gamma_n \neq 0$, maka terbukti Teorema 2.35.

2.5 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an/Hadits

Ilmu dalam bahasa Arab berasal dari kata kerja عَلِمَ يَعْلَمُ عِلْمًا *('aliman ya'lamu 'aliman)*, yang maknanya adalah pengetahuan atas sesuatu dengan yakin dan cahaya dari Allah yang diberikan kepada hati hamba yang dicintai-Nya. Dalam Lisanul Arab disebutkan bahwa ilmu adalah lawan dari *al-jahl* (kebodohan), apabila satu orang dikatakan *'aalimun* atau *'aliimun* sedangkan untuk jamak dikatakan *ulamaa* (Al-Jawi, 2018).

Hakikat ilmu berasal dari Allah SWT dan diperoleh manusia melalui usahanya sendiri berdasarkan kekuatan rekayasanya (*basyariyah*), ataupun anugerah yang langsung diberikan oleh Allah SWT (*mukasyafah*).

Salah satu ayat yang menerangkan ilmu *basyariyah* (disebut juga *'ilm kasbi*) adalah QS Al-Ghasyiyah ayat 17-20 yang berbunyi

أَفَلَا يَنْظُرُونَ إِلَى الْإِبِلِ كَيْفَ خُلِقَتْ ۚ ﴿١٧﴾ وَإِلَى السَّمَاءِ كَيْفَ رُفِعَتْ ۚ ﴿١٨﴾
وَإِلَى الْجِبَالِ كَيْفَ نُصِبَتْ ۚ ﴿١٩﴾ وَإِلَى الْأَرْضِ كَيْفَ سُطِحَتْ ۚ ﴿٢٠﴾

Artinya :

"Maka tidaklah mereka memerhatikan unta, bagaimana diciptakan?; Dan langit, bagaimana ditinggikan?; dan bagaimana gunung-gunung ditegakkan?; dan bagaimana bumi dihamparkan?" (Al-Qur'an, 88:17-20).

Unta adalah salah satu hewan yang sering disebut dalam Al-Qur'an. Menurut (Siregar, 2021), Unta tidak hanya berfungsi sebagai kendaraan di masa lalu, namun juga memiliki karakteristik unik baik dari anatomi tubuhnya maupun sifatnya. Keunikan unta yang dapat kita pelajari antara lain:

1. Setia (terlihat dari sifat unta yang setia pada majikannya),
2. Kuat walaupun berada di tengah kondisi yang tidak mendukung (terlihat dari unta yang tetap kuat walaupun tidak minum berhari-hari di padang tandus),
3. Bermanfaat bagi orang lain (terlihat dari manfaat unta yang tidak hanya sebagai transportasi, namun unta dapat menghasilkan susu yang dapat dikonsumsi manusia, bulu yang dapat digunakan sebagai bahan pakaian, dan kotorannya yang dapat menjadi pupuk kendang).

Sedangkan ilmu *mukasyafah* (disebut juga *'ilm ladunni*) diterangkan dalam QS Al-Kahfi ayat 65 yang berbunyi

فَوَجَدَا عَبْدًا مِنْ عِبَادِنَا آتَيْنَاهُ رَحْمَةً مِنْ عِنْدِنَا وَعَلَّمْنَاهُ مِنْ لَدُنَّا عِلْمًا ﴿٦٥﴾

Artinya :

"Lalu mereka berdua bertemu dengan seorang hamba di antara hamba-hamba Kami, yang telah Kami berikan rahmat kepadanya dari sisi Kami, dan yang telah Kami ajarkan ilmu kepadanya dari sisi Kami" (Al-Qur'an, 18:65).

QS Al-Kahfi ayat 65 mengisahkan pertemuan Nabi Musa dan Nabi Khidhr, dimana Allah SWT telah melimpahkan kepada Nabi Khidhr ilmu yang langsung diberikan dari sisi Allah (*'ilm ladunni*).

Dalam (Thahir dan Khoiruddin, 2020) yang mempelajari penafsiran Al-Razi dalam *Mafātiḥ al-Ghayb*, untuk mempelajari *'ilm ladunni* diperlukan sikap *tawādhu'* (rendah hati) daripada *takabbur* (sombong).

Hal ini ditunjukkan (QS. Al-Kahfi, 18:66-70) bahwa syarat Nabi Khidir pada Nabi Musa adalah untuk tidak bertanya kecuali diterangkan sendiri oleh Nabi Khidir. Namun Nabi Musa tidak bersikap *tawādhu'* sehingga muncullah sifat *su'udzon* (prasangka buruk).

Pada kenyataannya, ayat-ayat Al-Qur'an menerangkan *'ilm kasbi* lebih banyak ketimbang *'ilm ladunni*. Hal ini dikarenakan bahwa hanya dalam keadaan dan syarat tertentu saja Allah menganugerahkan ilmu-Nya kepada hamba-Nya. Akan tetapi Allah memberikan kesempatan kepada manusia untuk berupaya dan berolah pikir sebagai salah satu kelebihan manusia dibanding umat lainnya. Manusia dapat memperoleh ilmu dari berbagai sumber. Salah satunya adalah dengan menguji kemampuan akalnya melalui *trial and error* (coba-coba), pengamatan, percobaan, uji kemungkinan (probabilitas), dan usaha lainnnya yang dimampu untuk mendapat pengetahuan baru yang belum didapatkan sebelumnya (Idris, 2019).

Ilmu matematika merupakan bagian dari *'ilm kasbi* dimana diperlukannya kajian dan penguasaan yang mendalam terhadap penemuan-penemuan sebelumnya serta *trial and error* untuk mendapatkan suatu persamaan baru yang dapat diaplikasikan pada bidang keilmuan lainnya serta bermanfaat bagi manusia, baik dirasakan secara langsung maupun tidak.

2.6 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Seiring berkembangnya ilmu pengetahun, konstanta Euler-Mascheroni memiliki banyak versi. Diantaranya adalah konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum oleh (Kpeng, dkk, 2022).

Teorema 2.36

$$\mathfrak{X}_k = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{k!}{(k+1-n)!} S(m,n) \zeta^{(k+1-n)}(m), k \in \mathbb{W}.$$

Teorema 2.37

$$\mathfrak{Z}_k = \frac{1}{k+1}\ln^{k+1} 2 - (-1)^k k! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m (2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S(2m+1,n)}{(k+1-n)!} \zeta^{(k+1-n)}(2m+1)$$

dengan $k \in \mathbb{W}$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode penelitian kepustakaan atau riset literatur (*literature research*). Riset adalah suatu proses yang berkaitan dengan metode dan prosedur yang sistematik. Dalam proses penyelesaian penelitian, akan menemui dua kendala, yaitu semakin menekuni topik penelitian, maka akan semakin meragukan topik tersebut, dan terdapat kesenjangan antara teori dan latihan. Sehingga dalam proses riset literatur, diperlukan latihan (eksperimen, eksplorasi, serta pengembangan kemampuan dan keterampilan), melatih dan mengembangkan visi, percaya diri dalam menyelesaikan permasalahan, serta menyelesaikan penelitian (Harris, 2020).

Kegiatan yang dapat dilakukan dalam penelitian ini meliputi pengumpulan data kepustakaan, analisis topik melalui pembacaan dan pemahaman, serta pengolahan bahan penelitian.

3.2 Pra Penelitian

Dalam menentukan topik penelitian, peneliti melakukan pencarian topik dengan mengumpulan berbagai macam jurnal dan penelitian lainnya yang dapat diakses secara daring. Kemudian peneliti memilih jurnal "*On Generalized Euler-Mascheroni Constants*" karya G.Abe-I-Kpeng,dkk (2022) yang dijadikan bahan dalam memahami konsep dasar serta rumus masalah beserta batasannya yang akan dibahas pada penelitian ini. Pemahaman materi yang diperlukan dalam penelitian ini meliputi konstanta Euler-Mascheroni klasik maupun yang telah diperumum., deret harmonik, fungsi Riemann Zeta, dan barisan Stirling jenis pertama. Selanjutnya, peneliti mencari dan memilih ayat-ayat Al-Qur'an yang dapat diintegrasikan pada topik penelitian ini.

3.3 Tahapan Penelitian

Langkah-langkah yang dapat dilakukan dalam menganalisa kontanta Euler-Mascheroni yang diperumum adalah sebagai berikut :

1. Subtitusi bilangan k pada konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$.
2. Subtitusi fungsi Riemann Zeta dan barisan Stirling jenis pertama pada konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$.
3. Menganalisis korelasi konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$ dengan deret harmonik.
4. Menganalisis konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$ dengan *signed count permutation* yang dilambangkan dengan $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ dan $\mathfrak{Z}_{scp(k)}$.
5. Menentukan teorema berdasarkan hasil analisis kontanta Euler-Mascheroni yang diperumum.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4. 1 Analisis Konstanta Euler-Mascheroni Yang Diperumum

Pada skripsi ini, dianalisis konstanta Euler-Mascheroni yang Diperumum karya K.Apeng,dkk (2022), yaitu

$$\mathfrak{X}_k = -\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m}\frac{k!}{(k+1-n)!}S(m,n)\zeta^{(k+1-n)}(m)$$

$$\mathfrak{Z}_k = \frac{1}{k+1}\ln^{k+1} 2 - (-1)^k k!\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{4^m(2m+1)!}\sum_{n=1}^{m}\frac{S(2m+1,n)}{(k+1-n)!}\zeta^{(k+1-n)}(2m+1)$$

serta konstanta Euler-Mascheroni yang Diperumum dengan *signed count permutation* sebagai berikut

$$\mathfrak{X}_{scp(k)} = -\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m}\frac{k!}{(k+1-n)!}S_{scp}(m,n)\zeta^{(k+1-n)}(m)$$

$$\mathfrak{Z}_{scp(k)} = \frac{1}{k+1}\ln^{k+1} 2 - (-1)^k k!\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{4^m(2m+1)!}\sum_{n=1}^{m}\frac{S_{scp}(2m+1,n)}{(k+1-n)!}\zeta^{(k+1-n)}(2m+1)$$

dimana

1. Bilangan k pada $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$ menyatakan kondisi konstanta Euler-Mascheroni diperumum yang sedang dianalisis. Bilangan $k \in \mathbb{W}$.
2. n merupakan bilangan yang banyaknya menyatakan partisi pada bilangan Stirling jenis pertama pada $\mathfrak{X}_k$,$\mathfrak{Z}_k$, $\mathfrak{X}_{scp(k)}$, dan $\mathfrak{Z}_{scp(k)}$, sehingga $0 < n \leq m$, $n = 1,2,3 \dots, k+1$
3. m merupakan bilangan yang menyatakan banyakanya objek bilangan Stirling jenis pertama pada $\mathfrak{X}_k$,$\mathfrak{Z}_k$, $\mathfrak{X}_{scp(k)}$, dan $\mathfrak{Z}_{scp(k)}$.

Teorema 4.1 Jika $\mathfrak{X}_k$ dengan $k = 0,\ m \in \mathbb{Z}^+$, maka

$$\mathfrak{X}_0 = 1 - H_m$$

Bukti:

Karena $\mathfrak{X}_k$ adalah

$$\mathfrak{X}_k = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{k!}{(k+1-n)!} S(m,n) \zeta^{(k+1-n)}(m)$$

Maka $\mathfrak{X}_k$ dengan $k = 0$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}_0 \quad &= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{0!}{(0+1-n)!} S(m,n) \zeta^{(0+1-n)}(m) \\
&= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(1-n)!} S(m,n) \zeta^{(1-n)}(m)
\end{aligned}$$

Karena $n = 1$, maka

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}_0 \quad &= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\frac{1}{(1-1)!} S(m,1) \zeta^{(1-1)}(m) \right] \\
&= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\frac{1}{0!} S(m,1) \zeta^{(0)}(m) \right] \\
&= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{S(m,1)}{m!} \cdot \zeta(m)
\end{aligned}$$

Subtitusi $S(m,1)$ dan $\zeta(m)$ pada $\mathfrak{X}_0$. Karena $S(m,1) = (m-1)!$, maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}_0 \quad &= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(m-1)!}{m!} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} \\
&= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1^m}
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots$$

$$= 1 - H_m$$

Teorema 4.2 Jika $\mathfrak{X}_k$ dengan $k = 1$, maka

$$\mathfrak{X}_1 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{H_{m-1}(2^m + 1) - \ln 2}{m \cdot 2^m}$$

Bukti:

Karena $\mathfrak{X}_k$ adalah

$$\mathfrak{X}_k = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{k!}{(k+1-n)!} S(m,n) \zeta^{(k+1-n)}(m)$$

Maka $\mathfrak{X}_k$ dengan $k = 1$ adalah

$$\mathfrak{X}_1 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{1!}{(1+1-n)!} S(m,n) \zeta^{(1+1-n)}(m)$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(2-n)!} S(m,n) \zeta^{(2-n)}(m)$$

Karena $n = 1,2$ maka

$$\mathfrak{X}_1 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\frac{1}{(2-1)!} S(m,1) \zeta^{(2-1)}(m) + \frac{1}{(2-2)!} S(m,2) \zeta^{(2-2)}(m) \right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\frac{1}{1!} S(m,1) \zeta'(m) + \frac{1}{0!} S(m,2) \zeta^{0}(m) \right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} [S(m,1)\zeta'(m) + S(m,2)\zeta(m)]$$

Subtitusi $S(m,1) = (m-1)!$ dan $S(m,2) = (m-1)!\,H_{m-1}$, sehingga diperoleh

$$\mathfrak{X}_1 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}[(m-1)!\,\zeta'(m) + (m-1)!\,H_{m-1}\zeta(m)]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}[(m-1)!\,(\zeta'(m) + H_{m-1}\zeta(m))]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}(\zeta'(m) + H_{m-1}\zeta(m)$$

Subtitusi $\zeta(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}$ dan $\zeta'^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^m}$, maka diperoleh

$$\mathfrak{X}_1 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^m} + H_{m-1}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}\right)$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}\left(-\left(\frac{\ln 1}{1^m} + \frac{\ln 2}{2^m}\right) + H_{m-1}\left(\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m}\right)\right)$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}\left(-\frac{\ln 2}{2^m} + H_{m-1}\left(1 + \frac{1}{2^m}\right)\right)$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}\left(-\frac{\ln 2}{2^m} + H_{m-1} + \frac{H_{m-1}}{2^m}\right)$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{2^m H_{m-1} + H_{m-1} - \ln 2}{2^m}\right)$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{H_{m-1}(2^m + 1) - \ln 2}{2^m}\right)$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{H_{m-1}(2^m + 1) - \ln 2}{m \cdot 2^m}$$

Teorema 4.3 Jika $\mathfrak{X}_0 = 1 - H_m$ dan $\mathfrak{X}_1 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{H_{m-1}(2^m+1)+-\ln 2}{m \cdot 2^m}$, maka

$$\mathfrak{X}_1 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m \cdot 2^m}\left(\left(1 - \mathfrak{X}_0 - \frac{1}{m}\right)(2^m + 1) - \ln 2\right)$$

Bukti :

Berdasarkan selisih deret harmonik antara n dan $n-1$ sebagai berikut

$$H_m - H_{m-1} = \frac{1}{m}$$

maka $\mathfrak{X}_0 = 1 - H_m$ yang dinyatakan dalam bentuk H_{m-1} adalah

$$H_{m-1} = 1 - \mathfrak{X}_0 - \frac{1}{m}$$

Sehingga jika disubtitusi terhadap $\mathfrak{X}_1 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{H_{m-1}(2^m+1)+-\ln 2}{m\cdot 2^m}$, maka

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}_1 \quad &= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m\cdot 2^m}\left(H_{m-1}(2^m+1) - \ln 2\right) \\
&= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m\cdot 2^m}\left(\left(1 - \mathfrak{X}_0 - \frac{1}{m}\right)(2^m+1) - \ln 2\right)
\end{aligned}$$

Teorema 4.4 Jika $\mathfrak{X}_k$ dengan $k = 2$, maka

$$\mathfrak{X}_2 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}\left[\frac{(H_{m-1} - \ln 2)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{2^m} + \frac{(H_{m-1} - \ln 3)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{3^m} + (H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right]$$

Bukti:

Karena $\mathfrak{X}_k$ adalah

$$\mathfrak{X}_k = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m} \frac{k!}{(k+1-n)!} S(m,n)\zeta^{(k+1-n)}(m)\,, k \in \mathbb{W}.$$

Maka $\mathfrak{X}_k$ dengan $k = 2$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}_2 \quad &= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m} \frac{2!}{(2+1-n)!} S(m,n)\zeta^{(2+1-n)}(m) \\
&= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m} \frac{2!}{(3-n)!} S(m,n)\zeta^{(3-n)}(m)
\end{aligned}$$

Karena $n = 1,2,3$ maka

$$\mathfrak{X}_2 \quad = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} [\frac{2}{(3-1)!} S(m,1)\zeta^{(3-1)}(m) + \frac{2}{(3-2)!} S(m,2)\zeta^{(3-2)}(m) + \frac{2}{(3-3)!} S(m,3)\zeta^{(3-3)}(m)]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\frac{2}{2!} S(m,1)\zeta''(m) + \frac{2}{1!} S(m,2)\zeta'(m) + \frac{2}{(3-3)!} S(m,3)\zeta(m)\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} [S(m,1)\zeta''(m) + 2S(m,2)\zeta'(m) + 2S(m,3)\zeta(m)]$$

Subtitusi $S(m,1) = (m-1)!$, $S(m,2) = (m-1)!\, H_{m-1}$, dan $S(m,3) = \frac{(m-1)!}{2}((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)})$ maka diperoleh

$$\mathfrak{X}_2 \quad = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} [(m-1)!\, \zeta''(m) + 2(m-1)!\, H_{m-1}\zeta'(m) + 2(\frac{(m-1)!}{2}\left((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right))\zeta(m)]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[(m-1)!\, \zeta''(m) + 2(m-1)!\, H_{m-1}\zeta'(m) + (m-1)!\left((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right)\zeta(m)\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[(m-1)!\left(\zeta''(m) + 2H_{m-1}\zeta'(m) + \left((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right)\zeta(m)\right)\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\zeta''(m) + 2H_{m-1}\zeta'(m) + \left((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right)\zeta(m)\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\zeta''(m) + 2H_{m-1}\zeta'(m) + \left((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right)\zeta(m)\right]$$

Subtitusi $\zeta(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}$, $\zeta'^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^m}$, dan $\zeta''^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln^2 n}{n^m}$, maka diperoleh

$$\mathfrak{X}_2 \quad = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}\left[(-1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^m} + 2H_{m-1}\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^m}\right) + \left((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^m} - 2H_{m-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^m}\right) + \left((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}\left[\left(\frac{\ln^2 1}{1^m} + \frac{\ln^2 2}{2^m} + \frac{\ln^2 3}{3^m}\right) - 2H_{m-1}\left(\frac{\ln 1}{1^m} + \frac{\ln 2}{2^m} + \frac{\ln 3}{3^m}\right) + \left((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right)\left(\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m}\right)\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}\left[\frac{\ln^2 2}{2^m} + \frac{\ln^2 3}{3^m} - \frac{2H_{m-1}\cdot \ln 2}{2^m} - \frac{2H_{m-1}\cdot \ln 3}{3^m} + (H_{m-1})^2 + \frac{(H_{m-1})^2}{2^m} + \frac{(H_{m-1})^2}{3^m} - H_{m-1}^{(2)} - \frac{H_{m-1}^{(2)}}{2^m} - \frac{H_{m-1}^{(2)}}{3^m}\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}\left[\frac{\ln^2 2 - 2H_{m-1}\cdot \ln 2 + (H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}}{2^m} + \frac{\ln^2 3 - 2H_{m-1}\cdot \ln 3 + (H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}}{3^m} + (H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}\left[\frac{(H_{m-1} - \ln 2)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{2^m} + \frac{(H_{m-1} - \ln 3)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{3^m} + (H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right]$$

Teorema 4.5 Jika $\mathfrak{X}_k$ dengan $k = n$ dan $m = n + 1$, maka

$$\mathfrak{X}_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot H_n^{(n+1)}}{2}$$

Bukti:

Karena $\mathfrak{X}_k$ adalah

$$\mathfrak{X}_k = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m} \frac{k!}{(k+1-n)!} S(m,n)\zeta^{(k+1-n)}(m)\,, k \in \mathbb{W}.$$

Maka $\mathfrak{X}_k$ dengan $k = n$ adalah

$$\mathfrak{X}_n = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m} \frac{n!}{(n+1-n)!} S(m,n)\zeta^{(n+1-n)}(m)$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m} n!\, S(m,n)\zeta(m)$$

Karena diambil $m = n + 1$, maka akan disubtitusikan $n = m - 1$

$$\mathfrak{X}_n = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m} n!\, S(m,n)\zeta(m)$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot (m-1)!\, S(m, m-1)\zeta(m)$$

Subtitusi $S(m, m-1) = \frac{m!}{(m-2)!2!}$, maka

$$\mathfrak{X}_n = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot (m-1)(m-2)! \cdot \frac{m!}{(m-2)!\,2!}\zeta(m)$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(m-1)}{2}\zeta(m)$$

dan dikembalikan lagi kedalam bentuk n sehingga

$$\mathfrak{X}_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \zeta(n+1)$$

Jika dinyatakan dalam deret harmonik, maka diperoleh

$$\mathfrak{X}_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot H_n^{(n+1)}}{2}$$

Teorema 4.6 Jika $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ dengan $k = 0$, maka

$$\mathfrak{X}_{scp(0)} = 1 - \ln 2$$

Bukti:

Karena $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ adalah

$$\mathfrak{X}_{scp(k)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{k!}{(k+1-n)!} S_{scp}(m,n) \zeta^{(k+1-n)}(m)\, , k \in \mathbb{W}.$$

Maka $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ dengan $k = 0$ adalah

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{scp(0)} &= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{0!}{(0+1-n)!} S_{scp}(m,n) \zeta^{(0+1-n)}(m) \\ &= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(1-n)!} S_{scp}(m,n) \zeta^{(1-n)}(m) \end{aligned}$$

Karena $n = 1$, maka

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{scp(0)} &= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\frac{1}{(1-1)!} S_{scp}(m,1) \zeta^{(1-1)}(m) \right] \\ &= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\frac{1}{0!} S_{scp}(m,1) \zeta^{(0)}(m) \right] \end{aligned}$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{S_{scp}(m,1)}{m!} \cdot \zeta(m)$$

Subtitusi $S_{scp}(m,1) = (-1)^{m-1}(m-1)!$ dan $\zeta(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}$, maka diperoleh

$$\mathfrak{X}_{scp(0)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{m!} \cdot \zeta(m)$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m}(m-1)!}{(-1)\cdot m \cdot (m-1)!} \cdot \left(\frac{1}{1^m}\right)$$

$$= \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}$$

Subtitusi deret harmonik bolak-balik dimana $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} = \ln 2$, maka diperoleh

$$\mathfrak{X}_{scp(0)} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}$$

$$= 1 - \ln 2$$

Teorema 4.7 Jika $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ dengan $k = 1$, maka

$$\mathfrak{X}_{scp(1)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \left(\frac{\ln 2 + H_{m-1}}{2^m} + H_{m-1}\right)$$

Bukti:

Karena $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ adalah

$$\mathfrak{X}_{scp(k)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{k!}{(k+1-n)!} S_{scp}(m,n) \zeta^{(k+1-n)}(m)\,, k \in \mathbb{W}.$$

Maka $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ dengan $k = 1$ adalah

$$\mathfrak{X}_{scp(1)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{1!}{(1+1-n)!} S_{scp}(m,n) \zeta^{(1+1-n)}(m)$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(2-n)!} S_{scp}(m,n)\zeta^{(2-n)}(m)$$

Karena $n = 1,2$ maka

$$\mathfrak{X}_{scp(1)} \quad = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\left[\frac{1}{(2-1)!} S_{scp}(m,1)\zeta^{(2-1)}(m) + \frac{1}{(2-2)!} S_{scp}(m,2)\zeta^{(2-2)}(m)\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\left[\frac{1}{1!} S_{scp}(m,1)\zeta'(m) + \frac{1}{0!} S_{scp}(m,2)\zeta^{0}(m)\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\left[S_{scp}(m,1)\zeta'(m) + S_{scp}(m,2)\zeta(m)\right]$$

Subtitusi $S_{scp}(m,1) = (-1)^{m-1}(m-1)!$ dan $S_{scp}(m,2) = (-1)^{m}(m-1)!\,H_{m-1}$, maka diperoleh

$$\mathfrak{X}_{scp(1)} \quad = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\left[S_{scp}(m,1)\zeta'(m) + S_{scp}(m,2)\zeta(m)\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!}\left[(-1)^{m-1}(m-1)!\,\zeta'(m) + (-1)^{m}(m-1)!\,H_{m-1}\zeta(m)\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)!}\left[(-1)^{m}(m-1)!\left((-1)^{-1}\zeta'(m) + H_{m-1}\zeta(m)\right)\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{m}\left[-\zeta'(m) + H_{m-1}\zeta(m)\right]$$

Karena $n = 1,2$ serta subtitusi $\zeta(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}$ dan $\zeta'^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^m}$, maka diperoleh

$$\mathfrak{X}_{scp(k)} \quad = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{m}\left[-\left(-\left(\frac{\ln 1}{1^m} + \frac{\ln 2}{2^m}\right)\right) + H_{m-1}\left(\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m}\right)\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{m}\left[\frac{\ln 2}{2^m} + H_{m-1} + \frac{H_{m-1}}{2^m}\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{m}\left[\frac{\ln 2 + H_{m-1}}{2^m} + H_{m-1}\right]$$

Teorema 4.8

Jika $\mathfrak{X}_{scp(0)} = 1 - \ln 2$ dan $\mathfrak{X}_{scp(1)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\left(\frac{\ln 2 + H_{m-1}}{2^m} + H_{m-1}\right)$, maka

$$\mathfrak{X}_{scp(1)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\left[\frac{1-\mathfrak{X}_{scp(0)}}{2^m} + H_{m-1}\left(\frac{1}{2^m}+1\right)\right]$$

Bukti:

Karena $\mathfrak{X}_{scp(0)} = 1 - \ln 2$, maka

$$\ln 2 = 1 - \mathfrak{X}_{scp(0)}$$

Sehingga jika disubtitusi pada $\mathfrak{X}_{scp(1)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\left(\frac{\ln 2 + H_{m-1}}{2^m} + H_{m-1}\right)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_{scp(1)} &= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\left[\frac{\ln 2 + H_{m-1}}{2^m} + H_{m-1}\right] \\ &= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\left[\frac{1-\mathfrak{X}_{scp(0)} + H_{m-1}}{2^m} + H_{m-1}\right] \\ &= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\left[\frac{1-\mathfrak{X}_{scp(0)}}{2^m} + H_{m-1}\left(\frac{1}{2^m}+1\right)\right]\end{aligned}$$

Teorema 4.9 Jika $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ dengan $k = 2$, maka

$$\mathfrak{X}_{scp(2)} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\left[\frac{(H_{m-1} - \ln 2)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{2^m} + \frac{(H_{m-1} - \ln 3)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{3^m} + (H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right]$$

Bukti:

Jika $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ adalah

$$\mathfrak{X}_{scp(k)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{k!}{(k+1-n)!} S_{scp}(m,n) \zeta^{(k+1-n)}(m)\,, k \in \mathbb{W}.$$

Maka $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ dengan $k = 2$ adalah

$$\mathfrak{X}_{scp(2)} = -\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m}\frac{2!}{(2+1-n)!}S_{scp}(m,n)\zeta^{(2+1-n)}(m)$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{n=1}^{m}\frac{2!}{(3-n)!}S_{scp}(m,n)\zeta^{(3-n)}(m)$$

Karena $n = 1,2,3$, maka

$$\mathfrak{X}_{scp(2)} = -\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!}[\frac{2}{(3-1)!}S_{scp}(m,1)\zeta^{(3-1)}(m) + \frac{2}{(3-2)!}S_{scp}(m,2)\zeta^{(3-2)}(m) + \frac{2}{(3-3)!}S_{scp}(m,3)\zeta^{(3-3)}(m)]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!}\left[\frac{2}{2!}S_{scp}(m,1)\zeta''(m) + \frac{2}{1!}S_{scp}(m,2)\zeta'(m) + \frac{2}{(3-3)!}S_{scp}(m,3)\zeta(m)\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!}[S_{scp}(m,1)\zeta''(m) + 2S_{scp}(m,2)\zeta'(m) + 2S_{scp}(m,3)\zeta(m)]$$

Subtitusi $S_{scp}(m,1) = (-1)^{m-1}(m-1)!$, $S_{scp}(m,2) = (-1)^{m}(m-1)!\,H_{m-1}$, dan $S_{scp}(m,3) = (-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{2}((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)})$ serta subtitusi $\zeta(m) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^m}$, $\zeta'^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^m}$, dan $\zeta''^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^2 n}{n^m}$ maka diperoleh

$$\mathfrak{X}_{scp(2)} = -\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!}\left[(-1)^{m-1}(m-1)!\,(-1)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^m} + 2(-1)^m(m-1)!\,H_{m-1}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^m}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{2}{2}(-1)^{m-1}(m-1)!\left((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^m}\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^m} - 2H_{m-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^m}\right) - \left((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^m}\right]$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\left[-\left(\frac{\ln^2 1}{1^m} + \frac{\ln^2 2}{2^m} + \frac{\ln^2 3}{3^m}\right) - 2H_{m-1}\left(\frac{\ln 1}{1^m} + \frac{\ln 2}{2^m} + \frac{\ln 3}{3^m}\right)\right.$$
$$\left. - \left((H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right)\left(\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m}\right)\right]$$

$$= \sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\left[\frac{(H_{m-1} - \ln 2)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{2^m} + \frac{(H_{m-1} - \ln 3)^2 - H_{m-1}^{(2)}}{3^m} + (H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right]$$

Teorema 4.10 Jika $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ dengan $k = n$, $m = n + 1$, maka

$$\mathfrak{X}_{scp(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot H_n^{(n+1)}}{2}$$

Bukti:

Jika $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ adalah

$$\mathfrak{X}_{scp(k)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{k!}{(k+1-n)!} S_{scp}(m,n) \zeta^{(k+1-n)}(m)\,, k \in \mathbb{W}.$$

Maka $\mathfrak{X}_{scp(k)}$ dengan $k = n$ adalah

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_{scp(n)} &= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} \frac{n!}{(n+1-n)!} S_{scp}(m,n) \zeta^{(n+1-n)}(m) \\ &= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} n!\, S_{scp}(m,n) \zeta(m)\end{aligned}$$

Karena diambil $m = n + 1$, maka akan disubtitusikan $n = m - 1$

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_{scp(n)} &= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=1}^{m} n!\, S_{scp}(m,n) \zeta(m) \\ &= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot (m-1)!\, S_{scp}(m, m-1) \zeta(m)\end{aligned}$$

Subtitusi $S_{scp}(m, m-1) = -\binom{m}{2}$, maka

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_{scp(n)} &= -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot (m-1)(m-2)! \cdot \frac{(-1) \cdot m!}{(m-2)!\, 2!} \zeta(m) \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(m-1)}{2} \zeta(m)\end{aligned}$$

dan dikembalikan lagi kedalam bentuk n sehingga

$$\mathfrak{x}_{scp(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \zeta(n+1)$$

Jika dinyatakan dalam deret harmonik maka

$$\mathfrak{x}_{scp(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot H_n^{(n+1)}}{2}$$

Teorema 4.11 Jika $\mathfrak{Z}_k$ dengan $k = 0$, maka

$$\mathfrak{Z}_0 = \ln 2 - \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)} \zeta(2m+1)\right]$$

Bukti:

Jika $\mathfrak{Z}_k$ adalah

$$\mathfrak{Z}_k = \frac{1}{k+1} \ln^{k+1} 2 - (-1)^k k! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S(2m+1,n)}{(k+1-n)!} \zeta^{(k+1-n)}(2m+1)$$

dengan $k \in \mathbb{W}$. Sehingga jika $k = 0$, maka

$$\mathfrak{Z}_0 = \frac{1}{0+1} \ln^{0+1} 2 - \left[(-1)^0 0! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S(2m+1,n)}{(0+1-n)!} \zeta^{(0+1-n)}(2m+1)\right]$$

$$= \ln 2 - \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S(2m+1,n)}{(1-n)!} \zeta^{(1-n)}(2m+1)\right]$$

Karena $n = 1$ serta disubtitusi $S(2m+1,1) = 2m!$ maka diperoleh

$$\mathfrak{Z}_0 = \ln 2 - \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \left(\frac{S(2m+1,1)}{(1-1)!} \zeta^{(1-1)}(2m+1)\right)\right]$$

$$= \ln 2 - \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{S(2m+1,1)}{4^m(2m+1)!} \zeta(2m+1)\right]$$

$$= \ln 2 - \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{2m!}{4^m(2m+1)!} \zeta(2m+1)\right]$$

$$= \ln 2 - \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)} \zeta(2m+1)\right]$$

Teorema 4.12 Jika $\mathfrak{Z}_k$ dengan $k = 1$, maka

$$\mathfrak{Z}_1 = \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)} \big(\zeta'(2m+1) + H_{2m}\zeta(2m+1)\big)\right]$$

Bukti:

Karena $\mathfrak{Z}_k$ adalah

$$\mathfrak{Z}_k = \frac{1}{k+1} \ln^{k+1} 2 - (-1)^k k! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S(2m+1,n)}{(k+1-n)!} \zeta^{(k+1-n)}(2m+1)$$

dengan $k \in \mathbb{W}$. Maka $\mathfrak{Z}_k$ dengan $k = 1$ adalah

$$\mathfrak{Z}_1 \quad = \frac{1}{1+1} \ln^{1+1} 2 - \left[(-1)^1 1! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S(2m+1,n)}{(1+1-n)!} \zeta^{(1+1-n)}(2m+1)\right]$$

$$= \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S(2m+1,n)}{(2-n)!} \zeta^{(2-n)}(2m+1)\right]$$

Karena $n = 1{,}2$ serta disubtitusi $S(2m+1{,}1)$ dan $S(2m+1{,}2)$ sebagai berikut dan diperoleh

$$\mathfrak{Z}_1 \quad = \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \left(\frac{S(2m+1{,}1)}{(2-1)!} \zeta^{(2-1)}(2m+1) + \frac{S(2m+1{,}2)}{(2-2)!} \zeta^{(2-2)}(2m+1)\right)\right]$$

$$= \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \left(\frac{S(2m+1{,}1)}{1!} \zeta'(2m+1) + \frac{S(2m+1{,}2)}{0!} \zeta(2m+1)\right)\right]$$

$$= \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \big(S(2m+1{,}1)\zeta'(2m+1) + S(2m+1{,}2)\zeta(2m+1)\big)\right]$$

$$= \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \big((2m+1-1)!\,\zeta'(2m+1) + (2m+1-1)!\,H_{2m+1-1}\zeta(2m+1)\big)\right]$$

$$= \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \big(2m!\,\zeta'(2m+1) + 2m!\,H_{2m}\zeta(2m+1)\big)\right]$$

$$= \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)(2m)!} \left(2m! \left(\zeta'(2m+1) + H_{2m}\zeta(2m+1) \right) \right) \right]$$

$$= \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)} \left(\zeta'(2m+1) + H_{2m}\zeta(2m+1) \right) \right]$$

Teorema 4.13 Jika $\mathfrak{Z}_k$ dengan $k = n$ dan $m = \frac{n}{2}$, maka

$$\mathfrak{Z}_n = \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(n+1)}{4^{n+1}(n-1)!} \right]$$

Bukti:

Karena $\mathfrak{Z}_k$ adalah

$$\mathfrak{Z}_k = \frac{1}{k+1} \ln^{k+1} 2 - (-1)^k k! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S(2m+1,n)}{(k+1-n)!} \zeta^{(k+1-n)}(2m+1)$$

dengan $k \in \mathbb{W}$.

Maka $\mathfrak{Z}_k$ dengan $k = n$ adalah

$$\mathfrak{Z}_n = \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S(2m+1,n)}{(n+1-n)!} \zeta^{(n+1-n)}(2m+1) \right]$$

$$= \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} S(2m+1,n)\, \zeta(2m+1) \right]$$

Karena diambil $m = \frac{n}{2}$, maka $n = 2m$, sehingga dapat disubtitusi terhadap $S(2m+1,2m)$, sehingga

$$\mathfrak{Z}_n = \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{S(2m+1,2m)\zeta(2m+1)}{4^m(2m+1)!} \right]$$

$$= \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\zeta(2m+1)}{4^m(2m+1)!} \cdot \frac{(2m+1)!}{(2m-1)!\,2!} \right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\zeta(2m+1)}{2 \cdot 4^m \cdot (2m-1)!}\right]$$

Kembalikan dalam bentuk n sehingga

$$\mathfrak{Z}_n = \frac{1}{n+1}\ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(n+1)}{4^{n+1}(n-1)!}\right]$$

Berdasarkan Definisi 2.14, jika dinyatakan dalan deret harmonik, maka

$$\mathfrak{Z}_n = \frac{1}{n+1}\ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(n+1)}}{4^{n+1}(n-1)!}\right]$$

Teorema 4.14 Jika $\mathfrak{Z}_{scp(k)}$ dengan $k = 0$, maka

$$\mathfrak{Z}_{scp(0)} = \ln 2 + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4^m(2m+1)}\zeta(2m+1)\right]$$

Bukti:

Jika $\mathfrak{Z}_{scp(k)}$ adalah

$$\mathfrak{Z}_{scp(k)} = \frac{1}{k+1}\ln^{k+1} 2 - (-1)^k k! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S_{scp}(2m+1,n)}{(k+1-n)!}\zeta^{(k+1-n)}(2m+1)$$

dengan $k \in \mathbb{W}$. Sehingga jika $k = 0$, maka

$$\mathfrak{Z}_{scp(0)} = \frac{1}{0+1}\ln^{0+1} 2 - \left[(-1)^0 0! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S_{scp}(2m+1,n)}{(0+1-n)!}\zeta^{(0+1-n)}(2m+1)\right]$$

$$= \ln 2 - \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S_{scp}(2m+1,n)}{(1-n)!}\zeta^{(1-n)}(2m+1)\right]$$

Karena $n = 1$ dan subtitusi $S_{scp}(2m+1,1) = (-1)^{m-1}2m!$, maka diperoleh

$$\mathfrak{Z}_{scp(0)} = \ln 2 - \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S_{scp}(2m+1,1)}{0!}\zeta^{(0)}(2m+1)\right]$$

$$= \ln 2 - \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{S_{scp}(2m+1,1)}{4^m(2m+1)!}\zeta(2m+1)\right]$$

$$= \ln 2 - \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}2m!}{4^m(2m+1)2m!}\zeta(2m+1)\right]$$

$$= \ln 2 - \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{4^m(2m+1)(-1)}\zeta(2m+1)\right]$$

$$= \ln 2 + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{4^m(2m+1)}\zeta(2m+1)\right]$$

Teorema 4.15 Jika $\mathfrak{Z}_{scp(k)}$ dengan $k = 1$, maka

$$\mathfrak{Z}_{scp(1)} = \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4^m(2m+1)}\left(-\zeta'(2m+1) + H_{m-1}\zeta(2m+1)\right)\right]$$

Bukti:

Jika $\mathfrak{Z}_{scp(k)}$ adalah

$$\mathfrak{Z}_{scp(k)} = \frac{1}{k+1}\ln^{k+1} 2 - (-1)^k k! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S_{scp}(2m+1,n)}{(k+1-n)!}\zeta^{(k+1-n)}(2m+1)$$

dengan $k \in \mathbb{W}$, maka $\mathfrak{Z}_{scp(k)}$ ketika $k = 1$ adalah

$$\mathfrak{Z}_{scp(1)} = \frac{1}{1+1}\ln^{1+1} 2 - \left[(-1)^1 1! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S_{scp}(2m+1,n)}{(1+1-n)!}\zeta^{(1+1-n)}(2m+1)\right]$$

$$= \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S_{scp}(2m+1,n)}{(2-n)!}\zeta^{(2-n)}(2m+1)\right]$$

Karena $n = 1,2$ serta subtitusi $S_{scp}(m,1) = (-1)^{m-1}(m-1)!$ dan

$S_{scp}(m,2) = (-1)^m(m-1)!\,H_{m-1}$ sebagai berikut, maka diperoleh

$$\mathfrak{Z}_{scp(1)} = \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)!}\left[\frac{S_{scp}(2m+1,1)}{1!}\zeta'(2m+1) + \frac{S_{scp}(2m+1,2)}{0!}\frac{S_{scp}(2m+1,n)}{(2-n)!}\zeta^{(2-n)}(2m+1)(2m+1)\right]\right]$$

$$= \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m (2m+1)!} \left(S_{scp}(2m+1,1)\zeta'(2m+1) + S_{scp}(2m+1,2)\zeta(2m+1) \right) \right]$$

$$= \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m (2m+1)!} \left((-1)^{m-1} 2m!\, \zeta'(2m+1) + (-1)^m 2m!\, H_{m-1} \zeta(2m+1) \right) \right]$$

$$= \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m 2m!}{4^m (2m+1) 2m!} \left(-\zeta'(2m+1) + H_{m-1} \zeta(2m+1) \right) \right]$$

$$= \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4^m (2m+1)} \left(-\zeta'(2m+1) + H_{m-1} \zeta(2m+1) \right) \right]$$

Teorema 4.16 Jika $\mathfrak{Z}_{scpk(k)}$ dengan $k = n$, dan $m = \frac{n}{2}$ adalah

$$\mathfrak{Z}_{scp(n)} = \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} 2 + \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{H_n^{(n+1)}}{2 \cdot 4^m (2m-1)!} \right]$$

Bukti:

Jika $\mathfrak{Z}_{scp(k)}$ adalah

$$\mathfrak{Z}_{scp(k)} = \frac{1}{k+1} \ln^{k+1} 2 - (-1)^k k! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m (2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S_{scp}(2m+1,n)}{(k+1-n)!} \zeta^{(k+1-n)}(2m+1)$$

dengan $k \in \mathbb{W}$. Maka $\mathfrak{Z}_{scp(k)}$ dengan $k = n$, adalah

$$\mathfrak{Z}_{scp(n)} = \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m (2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} \frac{S_{scp}(2m+1,n)}{(n+1-n)!} \zeta^{(n+1-n)}(2m+1) \right]$$

$$= \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m (2m+1)!} \sum_{n=1}^{m} S_{scp}(2m+1,n)\, \zeta(2m+1) \right]$$

Karena diambil $m = \frac{n}{2}$, maka $n = 2m$, sehingga dapat disubtitusi terhadap $S_{scp}(2m+1,2m)$ dan diperoleh

$$\mathfrak{Z}_{scp(n)} = \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{S(2m+1,2m)\zeta(2m+1)}{4^m (2m+1)!} \right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\zeta(2m+1)}{4^m(2m+1)!} \cdot \frac{-(2m+1)!}{(2m-1)!\,2!}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\ln^{n+1} 2 + \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\zeta(2m+1)}{2 \cdot 4^m(2m-1)!}\right]$$

Kembalikan dalam bentuk n sehingga

$$\mathfrak{Z}_{scp(n)} = \frac{1}{n+1}\ln^{n+1} 2 + \left[(-1)^n n! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(n+1)}{4^{n+1}(n-1)!}\right]$$

Jika dinyatakan dalam deret harmonik, maka

$$\mathfrak{Z}_{scp(n)} = \frac{1}{n+1}\ln^{n+1} 2 + \left[(-1)^n n! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(n+1)}}{4^{n+1}(n-1)!}\right]$$

4. 2 Kajian Agama dengan Pembahasan

Dalam menganalisis konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum, semakin memperjelas luasnya ilmu Allah SWT sebagaimana yang diterangkan dalam QS Luqman ayat 27.

Ilmu Allah SWT diturunkan kepada setiap manusia di muka bumi ini yang memiliki keunikan masing-masing, baik dari sudut pandang masing-masing individu, budaya setempat, serta pemahamannya yang berasal dari Allah SWT. Dalam QS Ali Imran ayat 7 yang berbunyi

هُوَ ٱلَّذِيٓ أَنزَلَ عَلَيۡكَ ٱلۡكِتَٰبَ مِنۡهُ ءَايَٰتٞ مُّحۡكَمَٰتٌ هُنَّ أُمُّ ٱلۡكِتَٰبِ وَأُخَرُ مُتَشَٰبِهَٰتٞۖ فَأَمَّا ٱلَّذِينَ فِي
قُلُوبِهِمۡ زَيۡغٞ فَيَتَّبِعُونَ مَا تَشَٰبَهَ مِنۡهُ ٱبۡتِغَآءَ ٱلۡفِتۡنَةِ وَٱبۡتِغَآءَ تَأۡوِيلِهِۦۖ وَمَا يَعۡلَمُ تَأۡوِيلَهُۥٓ إِلَّا ٱللَّهُۗ وَ
ٱلرَّٰسِخُونَ فِي ٱلۡعِلۡمِ يَقُولُونَ ءَامَنَّا بِهِۦ كُلّٞ مِّنۡ عِندِ رَبِّنَاۗ وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّآ أُوْلُواْ ٱلۡأَلۡبَٰبِ ٧

Artinya :

"Dialah yang menurunkan Al-Kitab(Al-Qur'an) kepada kamu. Di antara (isi)nya ada ayat-ayat yang muhkamaat, itulah pokok-pokok isi Al-Qur'an dan

yang lain (ayat-ayat) mutasyabihat. Adapun orang-orang yang dalam hatinya condong pada kesesatan, mereka mengikuti yang mutasyabihat untuk mencari-cari fitnah dan untuk mencari-cari takwilnya, padahal tidak ada yang mengetahui takwilnya kecuali Allah. Dan orang-orng yang ilmunya mendalam berkata, "Kami beriman kepadanya (Al-Qur'an), semuanya dari sisi Tuhan kami." Tidak ada yang dapat mengambil pelajaran kecuali orang yang berakal" (Al-Qur'an, 3:7).

Sehingga untuk melengkapi pembahasan dalam proses menganalisis konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum, diperlukan pendapat dari matematikawan lain dalam bentuk teori maupun teorema. Sebagaimana dijelaskan dalam QS Al-Hujurat ayat 13 yang berbunyi

يٰٓاَيُّهَا النَّاسُ اِنَّا خَلَقْنٰكُمْ مِّنْ ذَكَرٍ وَّاُنْثٰى وَجَعَلْنٰكُمْ شُعُوْبًا وَّقَبَاۤىِٕلَ لِتَعَارَفُوْا ۚ اِنَّ اَكْرَمَكُمْ عِنْدَ اللّٰهِ
اَتْقٰىكُمْ ۗاِنَّ اللّٰهَ عَلِيْمٌ خَبِيْرٌ ﴿١٣﴾

Artinya :

"Wahai manusia! Sungguh, Kami telah menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan, kemudian Kami jadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku agar kamu saling mengenal. Sesungguhnya yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah ialah orang yang paling bertakwa. Sungguh, Allah Maha Mengetahui, Mahateliti" (Al-Qur'an, 49:13).

Dengan melalui proses *trial and error*, maka ditemukanlah pembahasan sebagaimana yang telah dijelaskan pada subbab sebelumnya yang diharapkan diaplikasikan pada bidang keilmuan lainnya agar bermanfaat bagi kehidupan manusia serta makhluk semesta alam.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diatas, maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Hubungan konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$ dengan deret harmonik antara lain
   a. $\mathfrak{X}_0 = 1 - H_m$
   b. $\mathfrak{X}_1 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{H_{m-1}(2^m+1)-\ln 2}{m\cdot 2^m}$
   c. $\mathfrak{X}_2 = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m}\left[\frac{(H_{m-1}-\ln 2)^2-H_{m-1}^{(2)}}{2^m} + \frac{(H_{m-1}-\ln 3)^2-H_{m-1}^{(2)}}{3^m} + (H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right]$
   d. $\mathfrak{X}_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot H_n^{(n+1)}}{2}$
   e. $\mathfrak{Z}_0 = \ln 2 - \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)}\zeta(2m+1)\right]$
   f. $\mathfrak{Z}_1 = \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{4^m(2m+1)}\left(\zeta'(2m+1) + H_{2m}\zeta(2m+1)\right)\right]$
   g. $\mathfrak{Z}_n = \frac{1}{n+1}\ln^{n+1} 2 - \left[(-1)^n n! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(n+1)}{4^{n+1}(n-1)!}\right]$
2. Konstanta Euler-Mascheroni yang diperumum pada $\mathfrak{X}_k$ dan $\mathfrak{Z}_k$ dengan *signed count permutation* antara lain
   a. $\mathfrak{X}_{scp(0)} = 1 - \ln 2$
   b. $\mathfrak{X}_{scp(1)} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\left(\frac{\ln 2 + H_{m-1}}{2^m} + H_{m-1}\right)$
   c. $\mathfrak{X}_{scp(2)} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}\left[\frac{(H_{m-1}-\ln 2)^2-H_{m-1}^{(2)}}{2^m} + \frac{(H_{m-1}-\ln 3)^2-H_{m-1}^{(2)}}{3^m} + (H_{m-1})^2 - H_{m-1}^{(2)}\right]$
   d. $\mathfrak{X}_{scp(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot H_n^{(n+1)}}{2}$

e. $\mathfrak{Z}_{scp(0)} = \ln 2 + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4^m(2m+1)} \zeta(2m+1)\right]$

f. $\mathfrak{Z}_{scp(1)} = \frac{\ln^2 2}{2} + \left[\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4^m(2m+1)} \left(-\zeta'(2m+1) + H_{m-1}\zeta(2m+1)\right)\right]$

g. $\mathfrak{Z}_{scp(n)} = \frac{1}{n+1} \ln^{n+1} 2 + \left[(-1)^n n! \sum_{m=2}^{\infty} \frac{H_n^{(n+1)}}{2 \cdot 4^m (2m-1)!}\right]$

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, maka disarankan pada penelitian selanjutnya untuk menganalisis teorema-teorema pada skripsi ini pada fungsi Riemann Zeta pada $m + 1$ serta merelasikan pada bilangan Bell.

DAFTAR PUSTAKA

Adamchik, Victor. (1997). *On Stirling Numbers and Euler Sums.* Journal of Computational and Applied Mathematics, 119-130.

Al-Jawi, A.H.D.S. (2018). *Jalan Penuntut Ilmu; Mengurai Wasiat Imam Syafi'I Untuk Penuntut Ilmu Dalam Syair-Syairnya.* Jombang: Maktabah Abi Harits Al-Jawi.

Al-Qur'an Terjemahan. (2014). *Al-Qur'an Terjemah Al-Ikhlas.* Jakarta : SAMAD.

Al-Qur'an Terjemahan. (2022). *Al-Qur'an Online*. mushaf.id.

Cowen, C. C., Davidson, K. R., & Kaufman, R. P. (1980). Rearranging the alternating harmonic series. *The American Mathematical Monthly*, *87*(10), 817-819.

Darwanto, Dinata, Karsoni Berta, Junaidi. (2020). *Teori Himpunan*. Kotabumi: Penerbit Universitas Muhammadiyah Kotabumi.

Dunham, W. (1999). *Euler : The Master of Us All.* Washington DC: The Mathematical Association Of America.

Erdos, P. (1932). Egy Kürschák-Féle Elemi Számelméleti Tétel Általánosítása (Generalization of an elementary number-theoretic theorem of K¨ursch´ak, in Hungarian), Mat. Fiz, Lapok 39, 17–24.

Garay, Oscar J. (2008). *Extremals Of The Generalized Euler-Bernoulli Energy And Applications*. JGSP 12, 27-61.

Glazer, E.M., McConnell, J.W. (2002).*Real-Life Math : everyday use of mathemathical concept.* New York: Addison-Wesley Publishing Company.

Graham, Ronald L., Knuth, Donald E., Patashnik, Oren. (1989). *Concrete Mathematics Second Edition.* London: Greenwood Press.

Harris, D. (2020). *Literature Review and Research Design (A Guide to Effective Research Practice).* New York: Routledge.

Havil, Julian. (2009). *Gamma : Exploring Euler's Constant*. New Jersey: Prince University Press.

Herhyanto, N., & Gantini, T. (2009). *Pengantar Statistika Matematika*. Bandung: Yrama Widya.

Idris, Z. (2019). *Dikotomi Ilmu Dalam Perspektif Dan Sejarah Islam*. Depok: KARIMA (Karya Ilmu Media Aulia).

Iwaniec, H. (2014). *Lectures on the Riemann Zeta Function.* USA: American Mathematical Society.

Karatsuba, A.A., & Voronin, S.M. (1992). *The Riemann Zeta-Function*. Berlin: Walter de Gruyter.

Kpeng, G.Abe-I., Iddrisu, M.M., & Nantomah, K. (2022). On Generalized Euler–Mascheroni Constants. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *10*(1), 226-235.

Mansour, T., & Schork, M. (2016). *Commutation Realtions, Normal Ordering, and Stirling Numbers.* Boca Raton: CRC Press.

Mortici, C. (2010). On some Euler–Mascheroni type sequences. *Computers & Mathematics with Applications*, *60*(7), 2009-2014.

Mortici, C. (2010). On new sequences converging towards the Euler–Mascheroni constant. *Computers & Mathematics with Applications*, *59*(8), 2610-2614.

Olaikhan, S.A. (2021). *An Introduction To The Harmonic Series And Logarithmic Integrals (For High School Students Up To Researchers)*. ISBN 9781736736012.

Perdana, Sukma Adi. (2016). *Formulasi Model Permutasi Siklis dengan Objek Multinomial*. Jurnal Gantang Vol.1 No.1, 54-57.

Siregar, Akhiruddin. (2021). *Keistimewaan Unta Dalam Perspektif Al-Qur'an dan Relevansinya dengan Zoologi*. Repository UIN SUSKA RIAU.

Thahir,A. Halil & Khoiruddin, Ahmad Mughni (2020). *Pesan Moral Dibalik Kisah Nabi Musa dan Nabi Khidir Dalam QS. Al-Kahfi (Studi Atas Penafsiran al-Razi dalam Mafātiḥ al-Ghayb).* Jurnal IAIN Kediri.

LAMPIRAN

Koding fungsi riemann zeta dengan python :

```
import math
m=int(input("Put a number of m : "))
n = int(input("Put a number of n : "))
total_sum=0
for i in range (1,n):
  riemann_zeta=1/math.pow(i,m)
  total_sum=total_sum + riemann_zeta
print(total_sum)
```

Hasil Riemann Zeta Ketika $m = 2$

n	HASIL
1	1
10	1.5497677311665408
20	1.5961632439130233
50	1.625132733621529
100	1.6349839001848923
500	1.642936065514894
1000	1.6439345666815615
10000	1.6448340718480652
50000	1.6449140670482416
100000	1.6449240668982423
500000	1.644932066850254
1000000	1.64493306684877

RIWAYAT HIDUP

Raisha Inayah Rahman, dilahirkan di Kota Samarinda pada tanggal 26 Juli 2000. Penulis merupakan putri sulung dari Bapak Abdul Rahman, A.Md. Kom dan Ibu Chalimatusa'Diah, A.Md. Kom, serta memiliki satu adik perempuan.

Riwayat pendidikannya antara lain RA Al-Ikhlas Tanjung Selor (2005), SDN 002 Berau (2012), SMPN 2 Samarinda (2015), dan SMAN 10 Samarinda (2018). Pada tahun yang sama penulis menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil program studi matematika.

Riwayat karir penulis antara lain *Private tutor* pada (2020-2022), *English tutor* di Pare ILC Samarinda (2021-2022), *Math Tutor* di PT Benesse Indonesia (2022-*current*) dan *Coding Tutor* di PT Brightchamps Edutech Indonesia (2022-*current*).

Penulis dapat dihubungi melalui *raisharhmn@gmail.com*.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Raisha Inayah Rahman
NIM : 18610004
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Analisis Konstanta Euler-Mascheroni Yang Diperumum
Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	6 September 2022	KONSULTASI BAB 1	1.
2.	11 Oktober 2022	KONSULTASI KAJIAN AGAMA	2.
3.	22 September 2022	REVISI BAB 1	3.
4.	13 Oktober 2022	KONSULTASI BAB 2	4.
5.	14 Oktober 2022	REVISI KAJIAN AGAMA	5.
6.	17 Oktober 2022	ACC KAJIAN AGAMA	6.
7.	21 Oktober 2022	KONSULTASI BAB 1, 2 dan 3	7.
8.	8 November 2022	REVISI BAB 2 dan 3	8.
9.	15 November 2022	REVISI BAB 3	9.
10.	18 November 2022	ACC BAB 1, 2 dan 3	10.
11.	7 Februari 2023	KONSULTASI REVISI SEMPRO	11.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

12.	5 April 2023	KONSULTASI BAB 4 dan 5	12.
13.	8 Maret 2023	ACC BAB 4 dan 5	13.
14.	9 Mei 2023	KONSULTASI KAJIAN AGAMA	14.
15.	10 Mei 2023	REVISI KAJIAN AGAMA	15.
16.	11 Mei 2023	ACC KAJIAN AGAMA	16.
17.	29 Mei 2023	KONSULTASI REVISI SEMHAS	17.
18.	7 Juni 2023	KONSULTASI KAJIAN AGAMA	18.
19.	8 Juni 2023	ACC KAJIAN AGAMA	19.
20.	10 Juni 2023	ACC REVISI SEMHAS	20.
21.	12 Juni 2023	ACC BAB 1,2,3,4,dan 5	21.
22.	20 Juni 2023	ACC KESELURUHAN	22.
23.	20 Juni 2023	ACC KAJIAN AGAMA	23.

Malang, 22 Juni 2023
Mengetahui,
Ketua Program Studi

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 197411292000122005