

ANALISIS DINAMIK MODEL SEIAR DENGAN PENGARUH VAKSINASI

DRAF SKRIPSI

**OLEH:
MEIRA INDRIA PRATIWI
NIM. 19610019**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023**

**ANALISIS DINAMIK MODEL SEIAR DENGAN
PENGARUH VAKSINASI**

DRAF SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Meira Indria Pratiwi
NIM. 19610019**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023**

ANALISIS DINAMIK MODEL SEIAR DENGAN PENGARUH VAKSINASI

SKRIPSI

Oleh
Meira Indria Pratiwi
NIM. 19610019

Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji
Malang, 12 Juni 2023

Dosen Pembimbing I



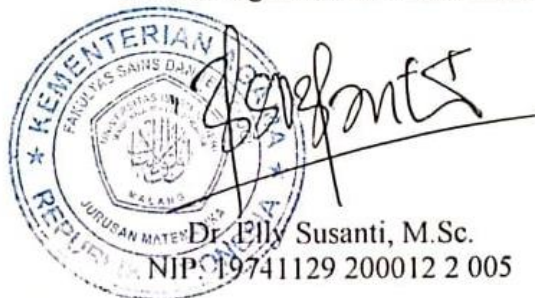
Dr. Heni Widayani, M.Si.
NIDT. 19901006 20180201 2 229

Dosen Pembimbing II



Erna Herawati, M.Pd.
NIDT. 1976072320180201 2 222

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



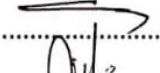
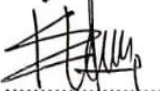
Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

ANALISIS DINAMIK MODEL SEIAR DENGAN PENGARUH VAKSINASI

SKRIPSI

Oleh
Meira Indria Pratiwi
NIM. 19610019

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 23 Juni 2023

Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si.	
Anggota Penguji 1	: Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.	
Anggota Penguji 2	: Dr. Heni Widayani, M.Si.	
Anggota Penguji 3	: Erna Herawati, M.Pd.	

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika


Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Meira Indria Pratwi

NIM : 19610019

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model SEIAR dengan Pengaruh Vaksinasi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perilaku tersebut.

Malang, 23 Juni 2023

Yang membuat pernyataan,



Meira Indria Pratiwi

NIM. 19610019

MOTO

“Selama punya Allah, semua akan berlalu dengan baik-baik saja”

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:
Ayahanda Bunandri dan Ibu Susiati tercinta.

KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji dan syukur atas kehadiran Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan proposal skripsi yang berjudul “Analisis Dinamik Model SEIAR dengan Pengaruh Vaksinasi” sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Sarjana (S1) Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Baginda Muhammad SAW, yang telah menuntun manusia dari zaman kebodohan menuju zaman islamiyyah yang penuh kebaikan melalui agama Islam.

Selanjutnya penulis menyadari banyak pihak yang telah mengarahkan serta mendukung penulis selama proses penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu penulis ingin mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang senantiasa memberi arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pelajaran yang berarti bagi penulis.
5. Erna Herawati, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang senantiasa memberi arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pelajaran yang berarti bagi penulis.
6. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen penguji skripsi yang senantiasa memberi arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pelajaran yang berarti bagi penulis.
7. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si, selaku dosen penguji skripsi yang senantiasa memberi arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pelajaran yang berarti bagi penulis.

8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim
9. Ayah Bunandri dan Ibu Susiati yang tiada henti memberikan kasih sayang, doa, semangat, dan dukungan yang merupakan motivasi terbesar bagi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Abi Dr. Isroqunnajah, M.Ag dan Ummah Ismatud Diniyah yang telah berjasa bagi penulis beserta seluruh teman-teman di PPTQ Nurul Huda yang menjadi penyemangat untuk penulis.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih belum tergolong sempurna. Oleh karena itu, penulis meminta maaf atas kesalahan yang dilakukan penulis. Akhir kata, penulis berharap skripsi ini dapat memberi manfaat bagi penulis maupun para pembaca.

Malang, 24 Maret 2023

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN DEPAN	i
HALAMAN PENGANTAR	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	Error! Bookmark not defined.
HALAMAN PENGESAHAN	Error! Bookmark not defined.
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	Error! Bookmark not defined.
MOTO	v
PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR SIMBOL	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص	xvi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	4
BAB II KAJIAN TEORI	6
2.1 Teori Pendukung	6
2.1.1 Model Matematika SEIAR COVID-19	6
2.1.2 Persamaan Diferensial	6
2.1.5 Metode Linearisasi	9
2.1.6 Kestabilan Titik Keseimbangan	11
2.1.7 Bilangan Reproduksi Dasar	11
2.1.8 Kriteria Routh-Hurwitz	12
2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits	14
2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung	15
BAB III METODE PENELITIAN	16
3.1 Jenis Penelitian	16
3.2 Pra Penelitian	16
3.3 Tahapan Penelitian	16
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	17
4.1 Analisis Dinamik	17
4.1.1 Titik Keseimbangan	22
4.1.2 Bilangan Reproduksi Dasar	25
4.1.3 Linierisasi	29
4.1.4 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan	38
4.2 Simulasi Numerik	44
4.3 Kajian Integrasi Nilai Keagamaan	45
BAB V PENUTUP	40
5.1 Kesimpulan	40
5.2 Saran	41
DAFTAR PUSTAKA	42

LAMPIRAN.....	43
RIWAYAT HIDUP	49

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Diagram kompartemen model SEIAR	13
Gambar 4.1 Simulasi numerik model SEIAR penyebaran COVID-19.....	38

DAFTAR SIMBOL

N	:	Banyaknya populasi manusia
S	:	Banyaknya populasi individu yang rentan
E	:	Banyaknya populasi individu yang terpapar
I	:	Banyaknya populasi individu yang terinfeksi
R	:	Banyaknya populasi individu yang sembuh
μ	:	Laju kelahiran/kematian
κ	:	Laju interaksi individu rentan dengan individu terinfeksi
β	:	Peluang transmisi penyebaran virus
p	:	Proporsi individu dari kelas exposed menjadi individu terinfeksi total yang menunjukkan gejala
γ	:	Laju perpindahan individu terinfeksi menjadi sembuh dan terimunisasi
σ	:	Laju vaksinasi

ABSTRAK

Pratiwi, Meira Indria. 2023. **Analisis Dinamik Model SEIAR Dengan Pengaruh Vaksinasi. Skripsi.** Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si (2) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: Analisis Dinamik, Model Epidemi, Model SEIAR, Analisis Kestabilan

Penelitian ini membahas tentang analisis dinamik model SEIAR dengan pengaruh vaksinasi. Populasi pada model SEIAR dibagi menjadi lima variabel yaitu, populasi individu rentan (S), populasi individu terpapar (E), populasi individu terinfeksi bergejala (I), populasi individu terinfeksi tanpa gejala (A), dan populasi individu sembuh (R). Adapun langkah dalam melakukan analisis perilaku model dapat dilakukan dengan cara menentukan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar serta melakukan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan, dan simulasi numerik. Titik kesetimbangan yang diperoleh adalah titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit adalah stabil sedangkan untuk hasil kestabilan titik kesetimbangan endemik menunjukkan bahwa tidak stabil.

ABSTRACT

Pratiwi, Meira Indria. 2023. **Dynamic Analysis of the SEIAR Model With Vaccination Factors**. Thesis. Mathematics Department, Science and Technology Faculty, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si (2) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Dynamic Analysis, Epidemic Model, SEIAR Model, Stability Analysis

This study discusses dynamic analysis on the SEIAR model with vaccination factors. The population in the SEIR model is divided into four variables, Susceptible (S), Exposed (E), Symptomatic Infections (I), Asymptomatic Infections (A), and Recovered (R). The steps in analyzing the behavior of the model can be done by determining the equilibrium point, basic reproduction number, stability analysis at the equilibrium point, and numerical simulations. The equilibrium point obtained is the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. The results of this study indicate that the stability of the disease-free equilibrium point is locally asymptotically stable, while the stability of the endemic equilibrium point shows that it is locally unstable.

ملخص

براتيوي ، ميرا إندرا. ٢٠٢٣. تحليل ديناميكي لنموذج SEIAR مع تأثير التطعيم. أطروحة. برنامج دراسة الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة الدولة الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشارون:

الكلمات المفتاحية: التحليل الديناميكي ، النموذج الوبائي ، نموذج SEIAR ، تحليل الاستقرار
تناقش هذه الدراسة التحليل الديناميكي لنموذج SEIAR مع تأثير التطعيم. تم تقسيم السكان في نموذج SEIAR إلى خمسة متغيرات ، وهي: السكان الأفراد المعرضين للإصابة (S) ، والسكان الأفراد المعرضين (E) ، والسكان الأفراد المصابين بأعراض (I) ، والسكان الأفراد المصابين بدون أعراض (A) ، و تعافى السكان الأفراد (ص). يمكن إجراء خطوات تحليل سلوك النموذج عن طريق تحديد نقطة التوازن ، ورقم التكاثر الأساسي وإجراء تحليل الاستقرار عند نقطة التوازن ، والمحاكاة العددية. نقطة التوازن التي تم الحصول عليها هي نقطة التوازن الخالي من المرض ونقطة التوازن المستوطنة. تشير نتائج هذه الدراسة إلى أن استقرار نقطة التوازن الخالي من الأمراض مستقر ، بينما تشير نتائج استقرار نقطة التوازن المتوطنة إلى أنها غير مستقرة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Model matematika merupakan salah satu alat yang dapat membantu mempermudah penyelesaian masalah dalam kehidupan nyata. Masalah-masalah tersebut dapat dibawa ke dalam model matematis dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu. Model matematika yang mempelajari tentang penyebaran dan kontrol penyakit disebut model epidemi. Model epidemi yang umum digunakan dalam menganalisa penyebaran penyakit yaitu model SIR. Model ini awalnya dipelajari oleh Kermack dan McKendrick. Berdasarkan karakteristiknya, model ini mengelompokkan populasi ke dalam tiga subpopulasi yaitu *susceptible* (kelompok individu yang rentan), *infected* (kelompok individu yang terinfeksi penyakit), dan *recovered* (kelompok individu yang telah sembuh dari penyakit).

Berawal dari model tersebut, banyak peneliti yang mengembangkannya seperti Pongsumpun dan Tang (2011) yang telah melakukan penelitian model penyebaran swine influenza dengan membedakan kelompok individu terinfeksi menjadi dua, yaitu *Symptomatic Infections* dan *Asymptomatic Infections*. Salah satu penyakit yang dapat dimodelkan dengan model matematika tersebut yaitu *Coronavirus Disease 2019* atau COVID-19. Ada beberapa penelitian model penyebaran COVID-19 yang juga membedakan kelompok individu terinfeksi. Abba B. Gumel dkk (2021) telah melakukan penelitian model penyebaran penyakit COVID-19 menggunakan model asumsi SEIRD yaitu populasi individu rentan (S), populasi individu terpapar (E), kelas populasi individu terinfeksi dapat diklasifikasikan menjadi tiga subpopulasi yaitu populasi individu terinfeksi dengan

gejala (I_s), populasi individu terinfeksi tanpa gejala (I_a), populasi individu terinfeksi isolasi di rumah sakit (I_h), populasi individu sembuh (R) dan populasi individu meninggal (D). Dalam penelitian ini menyajikan dasar untuk merumuskan, menganalisis, dan mensimulasikan model matematika untuk memahami dinamika COVID-19 tanpa asumsi vaksinasi.

Sebagai manusia kita memiliki kewajiban untuk berikhtiar sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam QS. An-najm ayat 39 yang artinya:

“Dan bahwasanya seorang manusia tiada memperoleh selain apa yang telah diusahakannya”

Menurut tafsir kemenag, surat An-najm menerangkan bahwa atas perbuatan yang baik, manusia hanya memperoleh ganjaran dari usahanya sendiri maka dia tidak berhak atas pahala suatu perbuatan yang tidak dilakukannya. Dari ayat tersebut, Imam Malik dan Imam Syafi'i memahami bahwa tidak sah menghadiahkan pahala amalan orang hidup berupa bacaan Al-Qur'an kepada orang mati, karena bukan perbuatan mereka dan usaha mereka. Begitu pula seluruh ibadah badaniah, seperti salat, haji dan tilawah, karena Nabi saw tidak pernah mengutarakan yang demikian kepada umat, tidak pernah menyuruhnya secara sindiran dan tidak pula dengan perantaraan nas dan tidak pula para sahabat menyampaikan kepada kita. Sekiranya tindakan itu baik, tentu mereka telah terlebih dahulu mengerjakannya (Kemenag, 2019).

Salah satu upaya penanggulangan penyebaran COVID-19 yaitu dengan mengadakan vaksinasi. Vaksinasi diberikan kepada orang yang belum terinfeksi dengan tujuan agar dapat mengurangi risiko penularan dan merangsang sistem kekebalan tubuh. Vaksinasi berpotensi lebih tinggi dalam menurunkan jumlah penderita influenza daripada penggunaan antibiotik (Kwong JC, Maaten S, Upshur

REG, 2009). Vaksinasi dianjurkan sebagai salah satu taktik untuk menangkal penyebaran COVID-19 dalam kurun waktu yang lama. Akan tetapi, seseorang yang telah divaksinasi belum tentu terbebas dari virus. Hal ini disebabkan karena virus yang belum kuat yang berada di lingkungan dapat mengakibatkan seseorang masih mungkin terpapar virus ketika berada di lingkungan populasi terinfeksi walaupun bisa jadi tidak menunjukkan gejala infeksi virus. Apabila seseorang terkena virus dan mengakibatkan harus melakukan rawat inap maka diasumsikan seseorang tersebut tidak dapat pulih secara keseluruhan karena masih terdapat sisa virus dalam tubuh meskipun tampak sudah sehat (Li, M. Y., Smith, H. L., & Wang, 2001).

Model epidemi dapat digunakan untuk memperkirakan dinamika epidemi berdasarkan faktor epidemiologi pada suatu populasi, maupun dampak dari pemberian vaksin pada penyebaran infeksi (Keeling, M. J., & Rohani, 2008). Model SEIAR ini merupakan model yang mengelompokkan individu terinfeksi dengan ditambahkannya pengaruh vaksinasi. Model epidemi SEIAR merupakan model yang terdiri dari lima kompartemen, yaitu *susceptible* (S), *exposed* (E), *infectious symptomatic* (I), *infectious asymptomatic* (A), dan *recovered* (R) dimana populasi terinfeksi dibagi menjadi dua, yaitu bergejala dan tidak bergejala. Penelitian terkait model epidemi SEIAR dengan pengaruh vaksinasi dilakukan untuk melihat signifikansi pengaruh vaksin pada proses penyebaran virus. Berdasarkan ulasan tersebut, penulis ingin melakukan penelitian dengan judul *“Analisis Dinamik Model SEIAR dengan Pengaruh Vaksinasi”*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah disampaikan diatas maka rumusan masalah dari penelitian ini adalah :

1. Bagaimana analisis dinamik model SEIAR dengan pengaruh vaksinasi?
2. Bagaimana simulasi numerik dari model SEIAR dengan pengaruh vaksinasi?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui analisis dinamik model SEIAR dengan pengaruh vaksinasi.
2. Untuk mengetahui simulasi numerik dari model SEIAR dengan pengaruh vaksinasi.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diperoleh pada penelitian ini yaitu memperbanyak pengetahuan tentang pengaruh vaksinasi pada model SEIAR sehingga dapat digunakan sebagai referensi dalam peningkatan ilmu matematika di bidang pemodelan penyebaran penyakit maupun implementasi model pada bidang lain.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini yaitu :

1. Model yang digunakan dalam pengembangan model matematika pada penelitian ini merupakan modifikasi model Ramadhani, dkk (2019) dengan meninjau bahwa populasi S rentan dapat berinteraksi pula dengan A sehingga diperoleh model baru sebagai berikut :

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = \Lambda - \beta\bar{S}\frac{(\bar{E} + \bar{I} + \bar{A})}{\bar{N}} - (\mu + \sigma)\bar{S}$$

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \beta\bar{S}\frac{(\bar{E} + \bar{I} + \bar{A})}{\bar{N}} - (\kappa + \mu)\bar{E}$$

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = \kappa p\bar{E} - (\mu + \gamma_1)\bar{I}$$

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \kappa(1-p)\bar{E} - (\mu + \gamma_2)\bar{A}$$

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \gamma_1\bar{I} + \gamma_2\bar{A} - \mu\bar{R} + \sigma\bar{S}$$

2. Laju transmisi virus dari populasi individu terpapar (E) ke individu rentan (S) sebesar β_1 berbeda dengan laju transmisi virus dari populasi individu terinfeksi dengan gejala (I) ke individu rentan (S) sebesar β_2 .
3. Laju transmisi virus dari populasi individu terpapar (E) ke individu rentan (S) sebesar β_1 berbeda dengan laju transmisi virus dari populasi individu terinfeksi tanpa gejala (A) ke individu rentan (S) sebesar β_3 .
4. Laju transmisi virus dari populasi individu terinfeksi dengan gejala (I) ke individu rentan (S) sebesar β_2 berbeda dengan laju transmisi virus dari populasi individu terinfeksi tanpa gejala (A) ke individu rentan (S) sebesar β_3 .
5. Populasi individu sembuh (R) tidak kembali ke populasi individu rentan (S).

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Model Matematika SEIAR COVID-19

Model SEIAR COVID-19 yang merupakan pengembangan model dari Ramadhani, dkk (2019) dengan model persamaan yang berjudul “*Analisis kestabilan model matematika penyebaran virus influenza A H1N1 dengan pengaruh vaksinasi pada manusia*” ini mencakup populasi individu dengan jumlah yang konsisten dan tertutup saja. Populasi pada model ini dibagi menjadi 5 sub populasi dimana populasi yang terinfeksi dibedakan menjadi dua, yaitu bergejala dan tidak bergejala. *Susceptible* (S) merupakan variabel yang mengindikasikan populasi manusia yang rentan untuk terjangkit, *Exposed* (E) merupakan variabel yang mengindikasikan populasi manusia yang terjangkit virus tetapi belum terinfeksi, *Infected* (I) merupakan variabel yang menunjukkan populasi manusia yang terkena infeksi total dan menunjukkan gejala dan (A) merupakan variabel yang mengindikasikan populasi manusia yang terkena infeksi sebagian dan tidak menunjukkan gejala, dan *Recovered* (R) merupakan variabel yang mengindikasikan populasi manusia yang pulih dan sudah divaksin. Total populasi individu dapat dituliskan sebagai $N = S + E + I + A + R$.

2.1.2 Persamaan Diferensial

Suatu persamaan yang menghasilkan fungsi yang tidak diketahui turunannya terhadap satu atau lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial. Berdasarkan jumlah variabel bebasnya terdapat dua jenis persamaan diferensial, yaitu Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan Persamaan Diferensial Parsial

(PDP). Persamaan Diferensial Biasa (PDB) yaitu suatu persamaan yang berisi satu variabel bebas sedangkan Persamaan Diferensial Parsial (PDP) yaitu suatu persamaan yang berisi lebih dari satu variabel bebas. Orde merupakan pangkat tertinggi turunan yang ada pada persamaan diferensial. Persamaan diferensial memiliki kedudukan yang tinggi dalam dunia kesehatan, rekayasa, fisika maupun beraneka ragam cabang ilmu yang lain (Boyce & DiPrima, 2009). Secara umum persamaan diferensial berbentuk :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{2.1}$$

dengan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ merupakan fungsi t dan $\mathbf{x}$ pada suatu

selang waktu t . Sistem persamaan (2.1) dapat ditulis sebagai

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\tag{2.2}$$

Jika $f_1, f_2, \dots, f_n$ masing – masing linear dalam $x_1, x_2, \dots, x_n$ maka sistem persamaan (2.2) disebut sistem persamaan differensial linear yang dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n\end{aligned}\tag{2.3}$$

Sistem persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.4)$$

dimana $\mathbf{A}$ adalah matriks berukuran $n \times n$ yaitu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Suatu sistem persamaan diferensial bias disebut nonlinear apabila sistem tersebut tidak dapat dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan (2.4).

2.1.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen diperlukan untuk mendapatkan kestabilan dari suatu sistem persamaan diferensial.

Definisi 2.1 (Anton & Rorres, 2005) Jika $\mathbf{A}$ adalah matriks $n \times n$, maka suatu vektor yang tidak nol $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$ disebut vektor karakteristik dari $\mathbf{A}$ jika $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\mathbf{x}$ yakni

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Untuk skalar λ dalam $\mathbb{R}$ maka λ disebut nilai eigen dari dan dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ . Untuk menentukan nilai eigen dari matriks, persamaan diatas dapat ditulis kembali seperti :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{x} \quad (2.5)$$

atau secara ekuivalen

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

dengan $\mathbf{I}$ adalah matriks identitas. Kemudian, jika diasumsikan bahwa persamaan karakteristik dari $\mathbf{A}$ yaitu $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \neq 0$ maka matriks $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ memiliki invers, maka dari itu persamaan (2.5) menjadi

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Hal itu bertentangan dengan vektor $\mathbf{x}$ tak nol, sehingga haruslah $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$.

2.1.4 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan yaitu penyelesaian tetap dari suatu sistem dimana sistem tersebut tidak mengalami perubahan terhadap waktu (Sulisti et al., 2014). Titik keseimbangan digunakan untuk mengetahui nilai dari bilangan reproduksi dasar. Model penyebaran penyakit memiliki dua titik keseimbangan, yaitu titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik penyakit. Titik keseimbangan bebas penyakit merupakan suatu kondisi dimana tidak ada lagi penyakit yang menyerang dalam populasi atau disebut juga tidak ada individu yang terjangkit penyakit. Sedangkan titik keseimbangan endemik penyakit merupakan suatu kondisi dimana penyakit selalu menetap dalam populasi.

2.1.5 Metode Linearisasi

Metode linierisasi yaitu metode yang digunakan untuk memecahkan persoalan dalam menemukan penyelesaian dari sistem persamaan diferensial non linier dengan menggunakan pendekatan deret Taylor dengan cara mengubah bentuk sistem persamaan diferensial non linier menjadi sistem persamaan diferensial linier untuk mempermudah menentukan penyelesaian dari sistem persamaan diferensial non linier tersebut. Penyelesaian yang diperoleh berbentuk penggambaran perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangannya.

Suatu sistem autonomous dengan f dan g adalah nonlinier, selanjutnya akan dicari pendekatan sistem linier disekitar (x^*, y^*) dengan melakukan ekspansi

menurut deret Taylor di sekitar (x^*, y^*) dan menghilangkan suku nonliniernya sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*)$$

Jika dilakukan substitusi $(x - x^*) = u$ dan $(y - y^*) = v$ maka $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$

dalam keadaan setimbang $f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0$ maka dihasilkan

persamaan linier sebagai berikut :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v$$

Sistem di atas dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Oleh sebab itu sistem linier pada titik tetap (x^*, y^*) dinyatakan dengan

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

dengan semua turunan parsial pada matrik merupakan evaluasi pada (x^*, y^*)

(Boyce & DiPrima, 2009).

2.1.6 Kestabilan Titik Keseimbangan

Umumnya kestabilan titik keseimbangan $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ dapat digolongkan menjadi seperti berikut (Wiggins, 2003):

1. Dinamakan stabil, apabila untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ termuat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga bila $\|x_0 - \hat{x}\| < \delta$ maka $\|x(t, x_0) - \hat{x}\| < \varepsilon$ untuk semua $t > t_0$.
2. Dinamakan stabil asimtotik, apabila $\hat{x}$ stabil dan termuat bilangan $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \hat{x}\| = 0$ dengan syarat $\|x_0 - \hat{x}\| < \delta_1$.
3. Dinamakan tidak stabil apabila titik keseimbangan $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ jika poin (1) tidak terpenuhi.

2.1.7 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar adalah bilangan yang menyatakan banyaknya individu rentan yang dapat terjangkit penyakit akibat tertular oleh individu terinfeksi. Bilangan tersebut digunakan sebagai parameter agar dapat mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Bilangan reproduksi dasar didapatkan dengan menemukan nilai eigen dari matriks Jacobi dari suatu sistem persamaan (model) yang dihitung pada titik equilibrium bebas penyakit. Bilangan reproduksi dasar dinotasikan dengan R_0 (Diekmann, O., dan Heesterbeek, J.A.P., 2002). Beberapa keadaan yang akan terjadi, yaitu :

1. Apabila $R_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang.
2. Apabila $R_0 = 1$, maka penyakit akan menetap.
3. Apabila $R_0 > 1$, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah.

Diasumsikan terdapat n kelas terinfeksi dan m kelas tidak terinfeksi. Kemudian diasumsikan juga x menunjukkan subpopulasi kelas terinfeksi dan y

menunjukkan subpopulasi kelas tidak terinfeksi (rentan dan atau sembuh), dan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dan $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, untuk $m, n \in \mathbb{N}$, sehingga

$$\dot{\mathbf{x}} = \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \psi_i, \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \eta_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \text{ dengan } j = 1, 2, \dots, m$$

dengan φ_i artinya laju infeksi sekunder yang bertambah pada kelas terinfeksi dan ψ_i artinya laju perubahan penyakit, kematian, dan atau kesembuhan yang menimbulkan penurunan populasi dari kelas terinfeksi.

Penghitungan bilangan reproduksi dasar (R_0), berdasarkan linearisasi dari sistem persamaan diferensial yang didekati pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Persamaan kompartemen terinfeksi yang telah dilinearisasi dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{F} - \mathbf{V})\mathbf{x}$$

dengan $\mathbf{F}$ dan $\mathbf{V}$ merupakan matriks berukuran $n \times n$, dan $\mathbf{F} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_j}(0, y_0)$ dan

$$\mathbf{V} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_j}(0, y_0).$$

Kemudian matriks $\mathbf{K}$ dinyatakan sebagai

$$\mathbf{K} = \mathbf{FV}^{-1}$$

dengan $\mathbf{K}$ dikatakan sebagai *next generation matrix*. Nilai harapan dari infeksi sekunder pada populasi rentan ialah radius spektral (nilai eigen dominan) dari matriks $\mathbf{K}$ (Van Den Driessche & Watmough, 2002) sehingga

$$R_0 = \rho(\mathbf{K}) = \rho(\mathbf{FV}^{-1})$$

2.1.8 Kriteria Routh-Hurwitz

Metode kriteria Routh-Hurwitz merupakan metode yang bertujuan untuk mendapatkan kestabilan sistem dengan cara mempertimbangkan koefisien dari

persamaan karakteristik dengan tidak menghitung akar-akarnya. Diberikan sistem dari persamaan karakteristik orde ke-n yaitu:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2.6)$$

Analisis kestabilan dapat diperoleh menggunakan determinan Hurwitz, sebagai berikut

$$\det(\mathbf{H}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_2 & \dots & 0 \\ a_1 & a_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Analisis akan stabil jika

$$\Delta_k > 0, \text{ untuk } k = 1, 2, \dots, n$$

Dapat dimulai dari kriteria untuk kuadratik sebagai berikut.

$$p(\lambda) = k_0\lambda^2 + k_1\lambda + k_2$$

diperoleh matriks Hurwitz sebagai

$$\mathbf{D}_1 = k_1 > 0,$$

dan

$$\mathbf{D}_2 = \begin{vmatrix} k_1 & k_0 \\ 0 & k_2 \end{vmatrix}$$

sehingga lebih mudah mengetes bahwa semua nilai masing-masing koefisien tersebut adalah positif.

Kriteria Hurwitz adalah metode yang digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan karakteristik dari sistem persamaan kontinu yang memiliki bagian real negatif. Karena seringkali dijumpai akar-akar dari persamaan karakteristik berupa parameter yang nilainya tidak mudah ditentukan maka diperlukan aturan yang menjamin bahwa akar-akar persamaan karakteristik

bernilai negatif atau ada persamaan yang bernilai positif. Aturan tersebut dikenal dengan aturan Routh-Hurwitz (Olsder, 2004).

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Allah merupakan sang pencipta dan penguasa seluruh alam. Dalam asmaul husna tercantum “al-muqtadir” yang berarti yang Maha berkuasa. Beda halnya dengan manusia, Allah sangat berkuasa atas apapun di dunia ini termasuk pada makhluknya. Sebagaimana dalam firman Allah pada surat At-Taghabun, ayat 11 yang artinya:

“Tidak ada suatu musibah pun yang menimpa seseorang kecuali dengan izin Allah; dan barangsiapa yang beriman kepada Allah niscaya Dia akan memberi petunjuk kepada hatinya. Dan Allah Maha Mengetahui segala sesuatu.”

Menurut Ibnu Katsir dalam surat tersebut menerangkan bahwa seluruh fenomena alam yang terjadi di dunia ini merupakan kuasa dan keinginan Allah. Siapa saja yang beriktikad kepada Allah, maka akan selalu ridho dengan *qadha* dan *qadar* Allah. Keyakinan tersebut akan memberi kedamaian karena terdapat kepercayaan bahwa *qadha* dan *qadar* Allah lah yang mengakibatkan semuanya terjadi (Katsir, 2000). Salah satu bentuk musibah yang dekat dengan kita yaitu ketika kita ditimpa sakit. Allah berfirman pada surat Asy-Syuara ayat 80 yang artinya :

“dan apabila aku sakit, Dialah yang menyembuhkan aku,”

Menurut Ibnu Katsir sakit disandarkan kepada Nabi Ibrahim, sekalipun pada kenyataannya berasal dari keputusan dan ketentuan-Nya, juga sebagai ciptaan-Nya, namun sengaja disandarkan kepada diri Ibrahim sebagai etika moral terhadap Allah Swt. Dalam tafsir Imam Jamaluddin al-Qasimi mengemukakan bahwa ayat ini mendeskripsikan tata krama seorang hamba Allah kepada

penciptanya. Karena terkadang penyakit timbul akibat dari perilaku manusia itu sendiri, seperti melanggar aturan kesehatan ataupun menyepelekan pola hidup sehat sehari-hari sehingga tubuh terserang penyakit. Hanya Allah lah yang dapat menyembuhkan penyakit. Suatu waktu kita akan lebih merasakan nikmat Allah ketika kita sembuh dari penyakit tersebut. (Katsir, 2000).

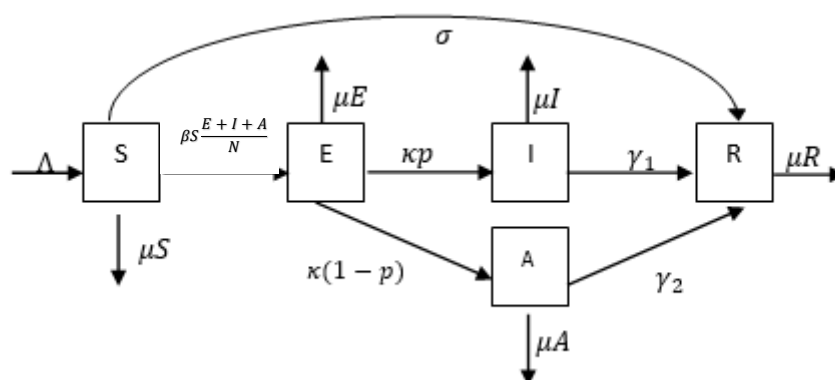
Sakit merupakan ujian dari Allah dan hanya Allah yang dapat menyembuhkannya. Maka dari itu tugas kita hanyalah yakin bahwa Allah akan mengangkat penyakit kita. Sebagaimana dalam hadits yang artinya :

“Setiap penyakit pasti memiliki obat. Bila sebuah obat sesuai dengan penyakitnya maka dia akan sembuh dengan seizin Allah Subhanahu wa Ta’ala.” (HR. Muslim).

Selain itu kita harus melakukan ikhtiar. Salah satu bentuk ikhtiar yang dapat dilakukan agar tidak terpapar COVID-19 yaitu dengan pemberian vaksinasi yang berguna untuk menaikkan tingkat kekebalan tubuh. Diharapkan pemberian vaksinasi dapat menghentikan penyebaran penyakit tersebut.

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Pembentukan model *SEIAR* penyebaran COVID-19 dapat digambarkan pada diagram kompartemen berikut:



Gambar 2.1 Diagram kompartemen model SEIAR

Berdasarkan diagram tersebut dapat ditunjukkan bahwa laju perubahan populasi rentan bertambah karena adanya laju kelahiran dan berkurang karena laju perpindahan individu rentan menjadi individu terpapar dan terinfeksi, laju kematian, dan laju individu yang telah divaksin, sehingga didapatkan persamaan:

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = \Lambda - \beta\bar{S}\frac{(\bar{E} + \bar{I} + \bar{A})}{\bar{N}} - (\mu + \sigma)\bar{S}$$

Laju perubahan populasi terpapar bertambah karena adanya rata-rata kontak antara individu terinfeksi dan individu terpapar dengan individu rentan yang diperoleh dari perkalian antara peluang transmisi penyebaran virus dari individu terinfeksi dan individu terpapar dengan individu rentan. Laju pertumbuhan individu terpapar menjadi individu terinfeksi dipengaruhi oleh laju perpindahan individu pada populasi terpapar, laju perpindahan individu terpapar dengan proporsi individu yang bisa terinfeksi dan laju kematian sehingga didapatkan persamaan:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \beta\bar{S}\frac{(\bar{E} + \bar{I} + \bar{A})}{\bar{N}} - (\kappa + \mu)\bar{E}$$

Laju perubahan populasi terinfeksi dan menunjukkan gejala bertambah karena adanya laju laju perubahan populasi terpapar menjadi terinfeksi (κ) dengan proporsi individu terpapar yang dapat terinfeksi (p) dan berkurang karena laju kematian dan laju perubahan populasi terinfeksi sebagian menjadi sembuh atau telah divaksin sehingga didapatkan persamaan:

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = \kappa p \bar{E} - (\mu + \gamma_1)\bar{I}$$

Laju perubahan populasi terinfeksi sebagian dan tidak menunjukkan gejala bertambah karena adanya laju laju perubahan populasi terpapar menjadi terinfeksi (κ) dengan proporsi ($1 - p$) individu terpapar yang dapat terinfeksi dan berkurang

karena laju kematian dan laju perubahan populasi terinfeksi sebagian menjadi sembuh atau telah divaksin sehingga didapatkan persamaan:

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \kappa(1 - p)\bar{E} - (\mu + \gamma_2)\bar{A}$$

Laju perubahan populasi sembuh atau tervaksinasi bertambah karena adanya laju perubahan populasi terinfeksi menjadi sembuh atau tervaksinasi dan berkurang karena laju kematian dan laju populasi rentan yang telah divaksin sehingga didapatkan persamaan:

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \gamma_1\bar{I} + \gamma_2\bar{A} - \mu\bar{R} + \sigma\bar{S}$$

Berdasarkan penjelasan di atas maka diperoleh kontruksi model *SEIAR* penyebaran COVID-19 dengan pengaruh vaksinasi yang terdiri dari lima bentuk sistem persamaan differensial seperti berikut:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{S}}{dt} &= \Lambda - \beta\bar{S}\frac{(\bar{E} + \bar{I} + \bar{A})}{\bar{N}} - (\mu + \sigma)\bar{S} \\ \frac{d\bar{E}}{dt} &= \beta\bar{S}\frac{(\bar{E} + \bar{I} + \bar{A})}{\bar{N}} - (\kappa + \mu)\bar{E} \\ \frac{d\bar{I}}{dt} &= \kappa p\bar{E} - (\mu + \gamma_1)\bar{I} \\ \frac{d\bar{A}}{dt} &= \kappa(1 - p)\bar{E} - (\mu + \gamma_2)\bar{A} \\ \frac{d\bar{R}}{dt} &= \gamma_1\bar{I} + \gamma_2\bar{A} - \mu\bar{R} + \sigma\bar{S}\end{aligned}\tag{2.7}$$

dengan syarat awal $\bar{S} \geq 0, \bar{E} \geq 0, \bar{I} \geq 0, \bar{A} \geq 0, \bar{R} \geq 0$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan melakukan kajian literatur. Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan kajian literatur dengan menelaah jurnal, buku maupun bahan literatur yang menunjang penelitian ini.

3.2 Pra Penelitian

Pra penelitian merupakan tahap awal yang dilakukan sebelum melakukan penelitian ini. Perkara yang dilakukan pada pra penelitian ini yaitu: mempelajari beberapa literatur yang berhubungan dengan penelitian ini, mengidentifikasi rumusan masalah penelitian, merancang konstruksi model matematika SEIAR dengan pengaruh vaksinasi, mengidentifikasi beberapa parameter yang diperlukan pada model, menentukan pengaruh vaksinasi, dan mendapatkan data penyebaran COVID-19 di Indonesia untuk simulasi pada penelitian.

3.3 Tahapan Penelitian

Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut :

1. Membangun model matematika *SEIAR* serta menentukan asumsi dan mendefinisikan parameter yang digunakan dengan asumsi adanya vaksinasi.
2. Menentukan titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit.
3. Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) dan melakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan berdasarkan nilai eigen yang diperoleh dari metode linearisasi.

4. Melakukan simulasi numerik terhadap modifikasi model matematika *SEIAR* penyebaran virus COVID-19 dengan pengaruh vaksinasi.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Analisis Dinamik

Jumlah total populasi dinotasikan sebagai $\bar{N} = (\bar{S} + \bar{E} + \bar{I} + \bar{A} + \bar{R})$. Karena total populasi konstan, sehingga $\bar{S}(t) + \bar{E}(t) + \bar{I}(t) + \bar{A}(t) + \bar{R}(t) = \bar{N}(t)$.

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{N}}{dt} &= \frac{d(\bar{S} + \bar{E} + \bar{I} + \bar{A} + \bar{R})}{dt} \\&= \frac{d\bar{S}}{dt} + \frac{d\bar{E}}{dt} + \frac{d\bar{I}}{dt} + \frac{d\bar{A}}{dt} + \frac{d\bar{R}}{dt} \\&= \left(\Lambda - \beta \bar{S} \frac{(\bar{E} + \bar{I} + \bar{A})}{\bar{N}} - (\mu + \sigma) \bar{S} \right) + \left(\beta \bar{S} \frac{(\bar{E} + \bar{I} + \bar{A})}{\bar{N}} - (\kappa + \mu) \bar{E} \right) \\&\quad + (\kappa p \bar{E} - (\mu + \gamma_1) \bar{I}) + (\kappa(1 - p) \bar{E} - (\mu + \gamma_2) \bar{A}) \\&\quad + (\gamma_1 \bar{I} + \gamma_2 \bar{A} - \mu \bar{R} + \sigma \bar{S}) \\&= \Lambda - \beta \frac{\bar{S} \bar{E}}{\bar{N}} - \beta \frac{\bar{S} \bar{I}}{\bar{N}} - \beta \frac{\bar{S} \bar{A}}{\bar{N}} - \mu \bar{S} - \sigma \bar{S} + \beta \frac{\bar{S} \bar{E}}{\bar{N}} + \beta \frac{\bar{S} \bar{I}}{\bar{N}} + \beta \frac{\bar{S} \bar{A}}{\bar{N}} - \kappa \bar{E} - \mu \bar{E} \\&\quad + \kappa p \bar{E} - \mu \bar{I} - \gamma_1 \bar{I} + \kappa \bar{E} - \kappa p \bar{E} - \mu \bar{A} - \gamma_2 \bar{A} + \gamma_1 \bar{I} + \gamma_2 \bar{A} \\&\quad - \mu \bar{R} + \sigma \bar{S} \\&= \Lambda - \mu \bar{S} - \mu \bar{E} - \mu \bar{I} - \mu \bar{A} - \mu \bar{R} \\&= \Lambda - \mu(\bar{S} + \bar{E} + \bar{I} + \bar{A} + \bar{R})\end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \Lambda - \mu \bar{N}$$

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \Lambda - \mu \bar{N}, \bar{N}(0) = \bar{N}_0$$

Misalkan $\bar{N}(t) = C e^{\lambda t}$ maka diperoleh $\frac{d\bar{N}}{dt} = \lambda C e^{\lambda t}$

Sehingga substitusi ke PDB homogen menghasilkan

$$\lambda C e^{\lambda t} = 0 - \mu C e^{\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow \lambda C e^{\lambda t} + \mu C e^{\lambda t} = 0$$

$$C e^{\lambda t} (\lambda + \mu) = 0$$

$$C e^{\lambda t} = 0 \text{ dan } \lambda = -\mu$$

$$\bar{N}_h(t) = C e^{-\mu t}$$

Pada PDB non homogen $\frac{d\bar{N}}{dt} + \mu\bar{N} = \lambda$

Misalkan $\bar{N}_p(t) = At + B$

Sehingga substitusi ke PDB homogen menghasilkan

$$A + \mu(At + B) = \Lambda$$

$$\mu At + A + \mu B = \Lambda$$

$$\mu A = 0 \leftrightarrow A = 0$$

$$A + \mu B = \Lambda \leftrightarrow B = \frac{\Lambda}{\mu}$$

$$\bar{N}_p(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$$

Jadi solusi $\bar{N}(t)$ adalah

$$\bar{N}(t) = \bar{N}_h(t) + \bar{N}_p(t)$$

$$\bar{N}(t) = C e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu}$$

Karena syarat awal $\bar{N}(0) = \bar{N}_0$, maka

$$\bar{N}(0) = C e^{-\mu(0)} + \frac{\Lambda}{\mu}$$

$$\bar{N}_0 = C + \frac{\Lambda}{\mu}$$

$$C = \bar{N}_0 - \frac{\Lambda}{\mu}$$

$$\bar{N}(t) = \left(\bar{N}_0 - \frac{\Lambda}{\mu} \right) e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu}$$

$$\bar{N}(t) = N(0)e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu}$$

Populasi total $\bar{N}$ bernilai konstan jika dan hanya jika $\frac{d\bar{N}}{dt} = 0$. Kondisi yang memenuhi $\frac{d\bar{N}}{dt} = 0$ adalah ketika $\bar{N} = \frac{\Lambda}{\mu}$.

Untuk menyederhanakan bentuk populasi pada (2.7) maka dapat dilakukan dengan tranformasi variabel dengan penskalaan masing-masing populasi dengan total populasi untuk mempermudah proses analisis model sehingga menjadi

$$S = \frac{\bar{S}}{\bar{N}}, E = \frac{\bar{E}}{\bar{N}}, I = \frac{\bar{I}}{\bar{N}}, A = \frac{\bar{A}}{\bar{N}}, R = \frac{\bar{R}}{\bar{N}}, \quad (4.1)$$

Kemudian diferensialkan persamaan (4.1) terhadap t sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{dS}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{S}}{\bar{N}} \right) \\ &= \frac{\frac{d\bar{S}}{dt}(\bar{N}) - \frac{d\bar{N}}{dt}(\bar{S})}{\bar{N}^2} \\ &= \frac{d\bar{S}}{dt} \left(\frac{1}{\bar{N}} \right) - \frac{d\bar{N}}{dt} \left(\frac{\bar{S}}{\bar{N}^2} \right) \\ &= \frac{1}{\bar{N}} \left(\frac{d\bar{S}}{dt} - \frac{\bar{S}}{\bar{N}} \frac{d\bar{N}}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{\bar{N}} \left(\mu \bar{N} - \beta \bar{S} \frac{(\bar{E} + \bar{I} + \bar{A})}{\bar{N}} - (\mu + \sigma) \bar{S} - 0 \right) \\ &= \mu - \beta \frac{\bar{S}\bar{E}}{\bar{N}^2} - \beta \frac{\bar{S}\bar{I}}{\bar{N}^2} - \beta \frac{\bar{S}\bar{A}}{\bar{N}^2} - (\mu + \sigma) \frac{\bar{S}}{\bar{N}} \\ &= \mu - \beta S(E + I + A) - (\mu + \sigma)S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{E}}{\bar{N}} \right) \\ &= \frac{\frac{d\bar{E}}{dt}(\bar{N}) - \frac{d\bar{N}}{dt}(\bar{E})}{\bar{N}^2} \\ &= \frac{d\bar{E}}{dt} \left(\frac{1}{\bar{N}} \right) - \frac{d\bar{N}}{dt} \left(\frac{\bar{E}}{\bar{N}^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\bar{N}} \left(\frac{d\bar{E}}{dt} - \frac{\bar{E}}{\bar{N}} \frac{d\bar{N}}{dt} \right) \\
&= \frac{1}{\bar{N}} \left(\beta \bar{S} \frac{(\bar{E} + \bar{I} + \bar{A})}{\bar{N}} - \frac{(\kappa + \mu)\bar{E}}{\bar{N}} - 0 \right) \\
&= \beta \frac{\bar{S}\bar{E}}{\bar{N}^2} + \beta \frac{\bar{S}\bar{I}}{\bar{N}^2} + \beta \frac{\bar{S}\bar{A}}{\bar{N}^2} - (\kappa + \mu) \frac{\bar{E}}{\bar{N}^2} \\
&= \beta S(E + I + A) - (\kappa + \mu)E
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \frac{dI}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{I}}{\bar{N}} \right) \\
&= \frac{\frac{d\bar{I}}{dt}(\bar{N}) - \frac{d\bar{N}}{dt}(\bar{I})}{\bar{N}^2} \\
&= \frac{d\bar{I}}{dt} \left(\frac{1}{\bar{N}} \right) - \frac{d\bar{N}}{dt} \left(\frac{\bar{I}}{\bar{N}^2} \right) \\
&= \frac{1}{\bar{N}} \left(\frac{d\bar{I}}{dt} - \frac{\bar{I}}{\bar{N}} \frac{d\bar{N}}{dt} \right) \\
&= \frac{1}{\bar{N}} (\kappa p \bar{E} - \mu \bar{I} - \gamma_1 \bar{I} - 0) \\
&= \kappa p \frac{\bar{E}}{\bar{N}} - \mu \frac{\bar{I}}{\bar{N}} - \gamma_1 \frac{\bar{I}}{\bar{N}} \\
&= \kappa p E - \mu I - \gamma_1 I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad \frac{dA}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{A}}{\bar{N}} \right) \\
&= \frac{\frac{d\bar{A}}{dt}(\bar{N}) - \frac{d\bar{N}}{dt}(\bar{A})}{\bar{N}^2} \\
&= \frac{d\bar{A}}{dt} \left(\frac{1}{\bar{N}} \right) - \frac{d\bar{N}}{dt} \left(\frac{\bar{A}}{\bar{N}^2} \right) \\
&= \frac{1}{\bar{N}} \left(\frac{d\bar{A}}{dt} - \frac{\bar{A}}{\bar{N}} \frac{d\bar{N}}{dt} \right) \\
&= \frac{1}{\bar{N}} (\kappa(1-p)\bar{E} - \mu \bar{A} - \gamma_2 \bar{A} - 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \kappa(1 - p) \frac{\bar{E}}{\bar{N}} - \mu \frac{\bar{A}}{\bar{N}} - \gamma_2 \frac{\bar{A}}{\bar{N}} \\
&= \kappa(1 - p)E - \mu A - \gamma_2 A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad \frac{dR}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{R}}{\bar{N}} \right) \\
&= \frac{\frac{d\bar{R}}{dt}(\bar{N}) - \frac{d\bar{N}}{dt}(\bar{R})}{\bar{N}^2} \\
&= \frac{d\bar{R}}{dt} \left(\frac{1}{\bar{N}} \right) - \frac{d\bar{N}}{dt} \left(\frac{\bar{R}}{\bar{N}^2} \right) \\
&= \frac{1}{\bar{N}} \left(\frac{d\bar{R}}{dt} - \frac{\bar{R}}{\bar{N}} \frac{d\bar{N}}{dt} \right) \\
&= \frac{1}{\bar{N}} (\gamma_1 \bar{I} + \gamma_2 \bar{A} - \mu \bar{R} + \sigma \bar{S} - 0) \\
&= \gamma_1 \frac{\bar{I}}{\bar{N}} + \gamma_2 \frac{\bar{A}}{\bar{N}} - \mu \frac{\bar{R}}{\bar{N}} + \sigma \frac{\bar{S}}{\bar{N}} \\
&= \gamma_1 I + \gamma_2 A - \mu R + \sigma S
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh sistem persamaan yang merupakan bentuk transformasi variabel dari persamaan (2.7) yaitu

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \beta S(E + I + A) - (\mu + \sigma)S \quad (4.2)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta S(E + I + A) - (\kappa + \mu)E \quad (4.3)$$

$$\frac{dI}{dt} = \kappa p E - \mu I - \gamma_1 I \quad (4.4)$$

$$\frac{dA}{dt} = \kappa(1 - p)E - \mu A - \gamma_2 A \quad (4.5)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 I + \gamma_2 A - \mu R + \sigma S \quad (4.6)$$

4.1.1 Titik Keseimbangan

- a. Titik keseimbangan bebas penyakit (*Disease Free Equilibrium Point* atau *DFE*)

Diasumsikan $I_0 = 0$, $A_0 = 0$ dan $E_0 = 0$, berdasarkan persamaan (4.2) diperoleh

$$\frac{dS}{dt} = 0$$

$$\mu - \beta S_0(E_0 + I_0 + A_0) - (\mu + \sigma)S_0 = 0$$

$$\mu - \beta S_0(0) - (\mu + \sigma)S_0 = 0$$

$$\mu - (\mu + \sigma)S_0 = 0$$

$$\mu = (\mu + \sigma)S_0$$

$$S_0 = \frac{\mu}{\mu + \sigma}$$

Berdasarkan persamaan (4.6) diperoleh

$$\frac{dR}{dt} = 0$$

$$\gamma_1 I_0 + \gamma_2 A_0 - \mu R_0 + \sigma S_0 = 0$$

$$0 - \mu R_0 + \sigma S_0 = 0$$

$$\sigma S_0 = \mu R_0$$

$$\frac{\sigma S_0}{\mu} = R_0$$

$$\frac{\sigma \left(\frac{\mu}{\mu + \sigma} \right)}{\mu} = R_0$$

$$\frac{\sigma \mu}{\mu(\mu + \sigma)} = R_0$$

$$R_0 = \frac{\sigma}{\mu + \sigma}$$

- b. Titik kesetimbangan endemik penyakit (*Endemic Equilibrium Point* atau *END*)

Berdasarkan persamaan (4.4) diperoleh

$$\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\kappa p E^* - \mu I^* - \gamma_1 I^* = 0$$

$$E^* = \frac{(\mu + \gamma_1) I^*}{\kappa p} \quad (4.7)$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (4.7) ke dalam persamaan (4.5), sehingga diperoleh

$$\frac{dA}{dt} = 0$$

$$\kappa(1 - p)E^* - \mu A^* - \gamma_2 A^* = 0$$

$$\kappa(1 - p)E^* - (\mu + \gamma_2)A^* = 0$$

$$\kappa(1 - p) \left(\frac{(\mu + \gamma_1) I^*}{\kappa p} \right) = (\mu + \gamma_2) A^*$$

$$\frac{-1(\kappa(1 - p))(\mu + \gamma_1) I^*}{(\kappa p)(\mu + \gamma_2)} = A^*$$

$$\frac{\kappa(p - 1)(\mu + \gamma_1) I^*}{\kappa p(\mu + \gamma_2)} = A^*$$

$$A^* = -\frac{(p - 1)(\mu + \gamma_1) I^*}{p(\mu + \gamma_2)} \quad (4.8)$$

Berdasarkan persamaan (4.2) diperoleh

$$\frac{dS}{dt} = 0$$

$$\mu - \beta S^*(E^* + I^* + A^*) - (\mu + \sigma)S^* = 0$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (4.7) dan (4.8) ke dalam persamaan (4.2), sehingga menghasilkan

$$\mu - \beta S^* \left(\left(\frac{(\mu + \gamma_1)I^*}{\kappa p} \right) + I^* + \left(-\frac{(p-1)(\mu + \gamma_1)I^*}{p(\mu + \gamma_2)} \right) \right) = (\mu + \sigma)S^*$$

$$\frac{\mu - \beta S^* \left(\left(\frac{(\mu + \gamma_1)I^*}{\kappa p} \right) + I^* + \left(-\frac{(p-1)(\mu + \gamma_1)I^*}{p(\mu + \gamma_2)} \right) \right)}{(\mu + \sigma)} = S^*$$

Misalkan

$$\omega = -\kappa p \gamma_1 + \kappa p \gamma_2 + \kappa \mu + \kappa \gamma_1 + \mu^2 + \mu \gamma_1 + \mu \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2$$

$$\theta = \mu p \gamma_1 - \mu p \gamma_2 + \mu \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2$$

$$\begin{aligned} \varphi = & -\beta \kappa \mu p \gamma_1 + \beta \kappa \mu p \gamma_2 + \beta \kappa \mu^2 + \beta \kappa \mu \gamma_1 + \beta \mu^3 + \beta \mu^2 \gamma_1 + \beta \mu^2 \gamma_2 \\ & + \beta \mu \gamma_1 \gamma_2 - \kappa \mu^3 - \kappa \mu^2 \sigma - \kappa \mu^2 \gamma_1 - \kappa \mu^2 \gamma_2 - \kappa \mu \sigma \gamma_1 - \kappa \mu \sigma \gamma_2 - \kappa \mu \gamma_1 \\ & \gamma_2 - \kappa \sigma \gamma_1 \gamma_2 - \mu^4 - \mu^3 \sigma - \mu^3 \gamma_1 - \mu^3 \gamma_2 - \mu^2 \sigma \gamma_1 - \mu^2 \sigma \gamma_2 - \mu^2 \gamma_1 \gamma_2 \\ & - \mu \sigma \gamma_1 \gamma_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi = & -\kappa^2 \mu p \gamma_1 + \kappa^2 \mu p \gamma_2 - \kappa^2 p \gamma_1^2 + \kappa^2 p \gamma_1 \gamma_2 - \kappa \mu^2 p \gamma_1 + \kappa \mu^2 p \gamma_2 \\ & - \kappa \mu p \gamma_1 \gamma_2 + \kappa^2 \mu^2 + 2\kappa^2 \mu \gamma_1 + \kappa^2 \gamma_1^2 + 2\kappa \mu^3 + 4\kappa \mu^2 p \gamma_1 + \kappa \mu^2 \gamma_2 \\ & + 2\kappa \mu \gamma_1^2 + 2\kappa \mu \gamma_1 \gamma_2 + \kappa \gamma_1^2 \gamma_2 + \mu^4 + 2\mu^3 \gamma_1 + \mu^3 \gamma_2 + \mu^2 \gamma_1^2 + 2\mu^2 \gamma_1 \gamma_2 \\ & + \mu \gamma_1^2 \gamma_2 \end{aligned}$$

Maka dapat diperoleh

$$S^* = \frac{\mu \kappa p (\mu + \gamma_2)}{\beta I(\omega) + \kappa p (\mu + \gamma_2) (\mu + \sigma)}, I^* \neq 0 \quad (4.9)$$

Dari persamaan (4.6), disubstitusikan persamaan (4.8) dan (4.9)

$$\frac{dR}{dt} = 0$$

$$\gamma_1 I^* + \gamma_2 A^* - \mu R^* + \sigma S^* = 0$$

$$\gamma_1 I^* + \gamma_2 A^* + \sigma S = \mu R^*$$

$$\frac{\gamma_1 I^* + \gamma_2 \left(-\frac{(p-1)(\mu + \gamma_1)I}{p(\mu + \gamma_2)} \right) + \sigma \left(\frac{\mu \kappa p (\mu + \gamma_2)}{\beta I(\omega) + \kappa p (\mu + \gamma_2) (\mu + \sigma)} \right)}{\mu} = R^*$$

Dengan pemisalan sebelumnya, maka diperoleh

$$R^* = \frac{(\beta(\theta)(\omega)I^2 + \kappa p(\mu + \gamma_2)(\mu + \sigma)(\theta)I + \sigma\mu\kappa p^2)}{\left(p(\mu + \gamma_2) \left(\frac{\beta I(\omega)}{+ \kappa p(\mu + \gamma_2)(\mu + \sigma)\mu} \right) \right)}$$

Dari persamaan (4.6), disubstitusikan persamaan (4.7), (4.8) dan (4.9) sehingga

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\beta S^*(E^* + I^* + A^*) - (\kappa + \mu)E^* = 0$$

$$\beta \left(\frac{\mu\kappa p(\mu + \gamma_2)}{\beta I(\omega) + \kappa p(\mu + \gamma_2)(\mu + \sigma)} \right)$$

$$\left(\left(\frac{(\mu + \gamma_1)I^*}{\kappa p} \right) + I^* + \left(-\frac{(p-1)(\mu + \gamma_1)I^*}{p(\mu + \gamma_2)} \right) \right) - (\kappa + \mu) \left(\frac{(\mu + \gamma_1)I^*}{\kappa p} \right) = 0$$

Dengan pemisalan sebelumnya, maka diperoleh

$$I^* = \frac{\varphi}{\psi\beta}$$

Dengan demikian, besar nilai titik endemiknya (*END*) adalah

$$E^* = \frac{(\mu + \gamma_1)I}{\kappa p}$$

$$A^* = -\frac{(p-1)(\mu + \gamma_1)I}{p(\mu + \gamma_2)}$$

$$S^* = \frac{\mu\kappa p(\mu + \gamma_2)}{\beta I(\omega) + \kappa p(\mu + \gamma_2)(\mu + \sigma)} \tag{4.10}$$

$$R^* = \frac{(\beta(\theta)(\omega)I^2 + \kappa p(\mu + \gamma_2)(\mu + \sigma)(\theta)I + \sigma\mu\kappa p^2)}{\left(p(\mu + \gamma_2) \left(\frac{\beta I(\omega)}{+ \kappa p(\mu + \gamma_2)(\mu + \sigma)\mu} \right) \right)}$$

$$I^* = \frac{\varphi}{\psi\beta}$$

4.1.2 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar dinotasikan dengan R_0 merupakan suatu ukuran potensi penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Bilangan reproduksi dasar

didefinisikan sebagai nilai harapan banyaknya populasi rentan yang menjadi terinfeksi selama masa infeksi berlangsung (Van Den Driessche & Watmough, 2002). Penentuan bilangan reproduksi dasar (R_0) akan dicari menggunakan metode matriks generasi selanjutnya (next generation).

Langkah-langkah penentuan bilangan reproduksi dasar sistem (2.7) antara lain sebagai berikut:

1. Menentukan persamaan yang menunjukkan terjadinya kasus baru terinfeksi dan perubahan dalam kelas individu terinfeksi yaitu E , I , dan A .
2. Menentukan linierisasi terhadap subsistem terinfeksi yang direpresentasikan dengan Matriks Jacobi (J) dan dievaluasi di E_0 sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial A} \\ \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial A} \\ \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta S_0 - (\kappa + \mu) & \beta S_0 & \beta S_0 \\ \kappa p & -(\mu + \gamma_1) & 0 \\ \kappa(1-p) & 0 & -(\mu + \gamma_2) \end{bmatrix}$$

3. Melakukan dekomposisi matriks Jacobi (J) menjadi $J = F - V$, dengan F adalah matriks transmisi yang berisi laju penambahan kasus karena interaksi populasi kelompok rentan dengan kelompok terinfeksi dan V adalah matriks transisi yang terdiri dari laju transfer keluar masuk dari populasi yang terinfeksi.

$$F = \begin{bmatrix} \beta S_0 & \beta S_0 & \beta S_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \kappa + \mu & 0 & 0 \\ -\kappa p & \mu + \gamma_1 & 0 \\ -(\kappa(1-p)) & 0 & \mu + \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Lalu menentukan invers dari $\mathbf{V}$ yaitu

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{V}|} \text{adj}(\mathbf{V})$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{V}| &= \begin{vmatrix} \kappa + \mu & 0 & 0 \\ -\kappa p & \mu + \gamma_1 & 0 \\ -(\kappa(1-p)) & 0 & \mu + \gamma_2 \end{vmatrix} \\ &= (\kappa + \mu) \begin{vmatrix} \mu + \gamma_1 & 0 \\ 0 & \mu + \gamma_2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -\kappa p & 0 \\ -(\kappa(1-p)) & \mu + \gamma_2 \end{vmatrix} \\ &\quad + 0 \begin{vmatrix} -\kappa p & \mu + \gamma_1 \\ -(\kappa(1-p)) & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\kappa + \mu) \begin{vmatrix} \mu + \gamma_1 & 0 \\ 0 & \mu + \gamma_2 \end{vmatrix} \\ &= (\kappa + \mu)(\mu + \gamma_1)(\mu + \gamma_2) \end{aligned}$$

$$\text{adj}(\mathbf{V}) = \text{kof}(\mathbf{V})$$

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \mu + \gamma_1 & 0 \\ 0 & \mu + \gamma_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\kappa p & 0 \\ -(\kappa(1-p)) & \mu + \gamma_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\kappa p & \mu + \gamma_1 \\ -(\kappa(1-p)) & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu + \gamma_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \kappa + \mu & 0 \\ -(\kappa(1-p)) & \mu + \gamma_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \kappa + \mu & 0 \\ -(\kappa(1-p)) & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \mu + \gamma_1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \kappa + \mu & 0 \\ -\kappa p & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \kappa + \mu & 0 \\ -\kappa p & \mu + \gamma_1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\mu + \gamma_1)(\mu + \gamma_2) & -(-\kappa p)(\mu + \gamma_2) & -(\kappa(1-p))(\mu + \gamma_1) \\ 0 & (\kappa + \mu)(\mu + \gamma_2) & 0 \\ 0 & 0 & (\kappa + \mu)(\mu + \gamma_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V^{-1} &= \frac{1}{|V|} \text{adj}(V) \\
&= \frac{1}{(\kappa + \mu)(\mu + \gamma_1)(\mu + \gamma_2)} \begin{bmatrix} (\mu + \gamma_1)(\mu + \gamma_2) & -(-\kappa p)(\mu + \gamma_2) & -(\kappa(1 - p))(\mu + \gamma_1) \\ 0 & (\kappa + \mu)(\mu + \gamma_2) & 0 \\ 0 & 0 & (\kappa + \mu)(\mu + \gamma_1) \end{bmatrix} \\
V^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa + \mu} & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa p}{(\kappa + \mu)(\mu + \gamma_1)} & \frac{1}{\mu + \gamma_1} & 0 \\ -\frac{\kappa(-1 + p)}{(\kappa + \mu)(\mu + \gamma_2)} & 0 & \frac{1}{\mu + \gamma_2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Hasil dari V^{-1} tersebut sesuai dengan perhitungan menggunakan Maple yang ditampilkan pada lampiran 3.

4. Menghitung $\mathcal{R}_0$ dengan menentukan $\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1})$

$$FV^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\beta\mu}{(\mu+\sigma)(\kappa+\mu)} - \frac{\beta\mu\kappa p}{(\mu+\sigma)(\kappa+\mu)(\mu+\gamma_1)} - \frac{\beta\mu\kappa p(-1+p)}{(\mu+\sigma)(\kappa+\mu)(\mu+\gamma_2)} & \frac{\beta\mu}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma_1)} & \frac{\beta\mu}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma_2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai eigen matriks (FV^{-1}) yang diperoleh dari persamaan berikut ini

$$\det(\lambda I - FV^{-1}) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} \frac{\beta\mu}{(\mu+\sigma)(\kappa+\mu)} - \frac{\beta\mu\kappa p}{(\mu+\sigma)(\kappa+\mu)(\mu+\gamma_1)} - \frac{\beta\mu\kappa p(-1+p)}{(\mu+\sigma)(\kappa+\mu)(\mu+\gamma_2)} & \frac{\beta\mu}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma_1)} & \frac{\beta\mu}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma_2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \\
&\begin{bmatrix} \lambda - \frac{\beta\mu}{(\mu+\sigma)(\kappa+\mu)} - \frac{\beta\mu\kappa p}{(\mu+\sigma)(\kappa+\mu)(\mu+\gamma_1)} - \frac{\beta\mu\kappa p(-1+p)}{(\mu+\sigma)(\kappa+\mu)(\mu+\gamma_2)} & \frac{\beta\mu}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma_1)} & \frac{\beta\mu}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma_2)} \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

$$\left(\lambda - \frac{\beta\mu}{(\mu + \sigma)(\kappa + \mu)} - \frac{\beta\mu\kappa p}{(\mu + \sigma)(\kappa + \mu)(\mu + \gamma_1)} - \frac{\beta\mu\kappa p(-1 + p)}{(\mu + \sigma)(\kappa + \mu)(\mu + \gamma_2)} \right) \lambda^2 = 0$$

Sehingga diperoleh $\lambda_{1,2} = 0$

$$\lambda_3 = \frac{\beta\mu}{(\mu + \sigma)(\kappa + \mu)} + \frac{\beta\mu\kappa p}{(\mu + \sigma)(\kappa + \mu)(\mu + \gamma_1)} + \frac{\beta\mu\kappa p(-1 + p)}{(\mu + \sigma)(\kappa + \mu)(\mu + \gamma_2)}$$

Sehingga, bilangan reproduksi dasar yang didapatkan dari nilai eigen absolut dominan adalah

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta\mu}{(\mu + \sigma)(\kappa + \mu)} + \frac{\beta\mu\kappa p}{(\mu + \sigma)(\kappa + \mu)(\mu + \gamma_1)} + \frac{\beta\mu\kappa p(-1 + p)}{(\mu + \sigma)(\kappa + \mu)(\mu + \gamma_2)}$$

4.1.3 Linierisasi

Berdasarkan sistem (4.2) hingga (4.6) diketahui bahwa sistem tersebut merupakan sistem nonlinear. Oleh karena itu, kestabilan titik kesetimbangan diperoleh dengan melakukan linearisasi sistem (4.2) hingga (4.6) untuk menghasilkan persamaan linier yang sesuai dengan menambahkan ekspansi Taylor disekitar titik kesetimbangan. Selanjutnya persamaan tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \beta S(E + I + A) - (\mu + \sigma)S = g_1(S, E, I, A, R)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta S(E + I + A) - (\kappa + \mu)E = g_2(S, E, I, A, R)$$

$$\frac{dI}{dt} = \kappa p E - \mu I - \gamma_1 I = g_3(S, E, I, A, R)$$

$$\frac{dA}{dt} = \kappa(1 - p)E - \mu A - \gamma_2 A = g_4(S, E, I, A, R)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1 I + \gamma_2 A - \mu R + \sigma S = g_5(S, E, I, A, R)$$

1. Linierisasi di sekitar $(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)$ untuk titik kesetimbangan bebas penyakit.

$$g_1(S, E, I, A, R)$$

$$\begin{aligned} &\approx g_1(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0) + \frac{\partial g_1}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(S - S^*) \\ &+ \frac{\partial g_1}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(E - E^*) \\ &+ \frac{\partial g_1}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(I - I^*) \\ &+ \frac{\partial g_1}{\partial A}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(A - A^*) \\ &+ \frac{\partial g_1}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(R - R^*) \end{aligned}$$

$$g_2(S, E, I, A, R)$$

$$\begin{aligned} &\approx g_2(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0) + \frac{\partial g_2}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(S - S^*) \\ &+ \frac{\partial g_2}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(E - E^*) \\ &+ \frac{\partial g_2}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(I - I^*) \\ &+ \frac{\partial g_2}{\partial A}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(A - A^*) \\ &+ \frac{\partial g_2}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(R - R^*) \end{aligned}$$

$$g_3(S, E, I, A, R)$$

$$\begin{aligned} &\approx g_3(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0) + \frac{\partial g_3}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(S - S^*) \\ &+ \frac{\partial g_3}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(E - E^*) \\ &+ \frac{\partial g_3}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(I - I^*) \\ &+ \frac{\partial g_3}{\partial A}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(A - A^*) \\ &+ \frac{\partial g_3}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(R - R^*) \end{aligned}$$

$$g_4(S, E, I, A, R)$$

$$\begin{aligned} &\approx g_4(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0) + \frac{\partial g_4}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(S - S^*) \\ &+ \frac{\partial g_4}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(E - E^*) \\ &+ \frac{\partial g_4}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(I - I^*) \\ &+ \frac{\partial g_4}{\partial A}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(A - A^*) \\ &+ \frac{\partial g_4}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(R - R^*) \end{aligned}$$

$$g_5(S, E, I, A, R)$$

$$\begin{aligned} &\approx g_5(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0) + \frac{\partial g_5}{\partial S}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(S - S^*) \\ &+ \frac{\partial g_5}{\partial E}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(E - E^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial g_5}{\partial I}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(I - I^*) \\
& + \frac{\partial g_5}{\partial A}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(A - A^*) \\
& + \frac{\partial g_5}{\partial R}(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0)(R - R^*)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan

$$\begin{aligned}
g_1(S, E, I, A, R) \\
& \approx (0) + (-\beta(E + I + A) - (\mu + \sigma))(S - S^*) \\
& + (-\beta S)(E - E^*) + (-\beta S)(I - I^*) + (-\beta S)(A - A^*) \\
& + (0)(R - R^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2(S, E, I, A, R) \\
& \approx (\beta S(E + I + A) - (\kappa + \mu)E) + (\beta(E + I + A))(S - S^*) \\
& + (\beta S - (\kappa + \mu))(E - E^*) + (\beta S)(I - I^*) + (\beta S)(A - A^*) \\
& + (0)(R - R^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_3(S, E, I, A, R) \\
& \approx (0) + (0)(S - S^*) + (\kappa p)(E - E^*) + (-\mu - \gamma_1)(I - I^*) \\
& + (0)(A - A^*) + (0)(R - R^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_4(S, E, I, A, R) \\
& \approx (0) + (0)(S - S^*) + (\kappa(1 - p))(E - E^*) + (0)(I - I^*) \\
& + (-\mu - \gamma_2)(A - A^*) + (0)(R - R^*)
\end{aligned}$$

$$g_5(S, E, I, A, R)$$

$$\approx (0) + (\sigma)(S - S^*) + (0)(E - E^*) + (\gamma_1)(I - I^*) \\ + (\gamma_2)(A - A^*) + (-\mu)(R - R^*)$$

Maka dapat dibentuk matriks Jacobi

$$J(DFE) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial S} & \frac{\partial g_1}{\partial E} & \frac{\partial g_1}{\partial I} & \frac{\partial g_1}{\partial A} & \frac{\partial g_1}{\partial R} \\ \frac{\partial g_2}{\partial S} & \frac{\partial g_2}{\partial E} & \frac{\partial g_2}{\partial I} & \frac{\partial g_2}{\partial A} & \frac{\partial g_2}{\partial R} \\ \frac{\partial g_3}{\partial S} & \frac{\partial g_3}{\partial E} & \frac{\partial g_3}{\partial I} & \frac{\partial g_3}{\partial A} & \frac{\partial g_3}{\partial R} \\ \frac{\partial g_4}{\partial S} & \frac{\partial g_4}{\partial E} & \frac{\partial g_4}{\partial I} & \frac{\partial g_4}{\partial A} & \frac{\partial g_4}{\partial R} \\ \frac{\partial g_5}{\partial S} & \frac{\partial g_5}{\partial E} & \frac{\partial g_5}{\partial I} & \frac{\partial g_5}{\partial A} & \frac{\partial g_5}{\partial R} \end{pmatrix}$$

Atau dapat ditulis

$$J(DFE)$$

$$= \begin{pmatrix} -\beta(E_0 + I_0 + A_0) - (\mu + \sigma) & (-\beta S_0) & (-\beta S_0) & (-\beta S_0) & 0 \\ \beta(E_0 + I_0 + A_0) & \beta S_0 - (\kappa + \mu) & (\beta S_0) & (\beta S_0) & 0 \\ 0 & \kappa p & -\mu - \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa(1 - p) & 0 & -\mu - \gamma_2 & 0 \\ \sigma & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{pmatrix}$$

Selanjutnya substitusi nilai titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu $DFE =$

$$(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0) = (\frac{\mu}{\mu + \sigma}, 0, 0, 0, \frac{\sigma}{\mu + \sigma}), \text{ sehingga didapatkan matriks Jacobi}$$

seperti berikut,

$$J(DFE) = \begin{pmatrix} -(\mu + \sigma) & -\frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} & -\frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} & -\frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} & 0 \\ 0 & \frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} - (\kappa + \mu) & \frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} & \frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} & 0 \\ 0 & \kappa p & -\mu - \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa(1 - p) & 0 & -\mu - \gamma_2 & 0 \\ \sigma & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{pmatrix}$$

2. Linierisasi di sekitar $(S^*, E^*, I^*, A^*, R^*)$ untuk titik kesetimbangan endemik

$$g_1(S, E, I, A, R)$$

$$\begin{aligned} &\approx (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) + \frac{\partial g_1}{\partial S}(S^*, E^*, I^*, A^*, R^*)(S - S^*) \\ &+ \frac{\partial g_1}{\partial E}(S^*, E^*, I^*, A^*, R^*)(E - E^*) \\ &+ \frac{\partial g_1}{\partial I}(S^*, E^*, I^*, A^*, R^*)(I - I^*) \\ &+ \frac{\partial g_1}{\partial A}(S^*, E^*, I^*, A^*, R^*)(A - A^*) \\ &+ \frac{\partial g_1}{\partial R}(S^*, E^*, I^*, A^*, R^*)(R - R^*) \end{aligned}$$

$$g_2(S, E, I, A, R)$$

$$\begin{aligned} &\approx (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) + \frac{\partial g_2}{\partial S}(S^*, E^*, I^*, A^*, R^*)(S - S^*) \\ &+ \frac{\partial g_2}{\partial E}(S^*, E^*, I^*, A^*, R^*)(E - E^*) \\ &+ \frac{\partial g_2}{\partial I}(S^*, E^*, I^*, A^*, R^*)(I - I^*) \\ &+ \frac{\partial g_2}{\partial A}(S^*, E^*, I^*, A^*, R^*)(A - A^*) \\ &+ \frac{\partial g_2}{\partial R}(S^*, E^*, I^*, A^*, R^*)(R - R^*) \end{aligned}$$

$$g_3(S, E, I, A, R)$$

$$\begin{aligned} &\approx (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) + \frac{\partial g_3}{\partial S}(S^*, E^*, I^*, A^*, R^*)(S - S^*) \\ &+ \frac{\partial g_3}{\partial E}(S^*, E^*, I^*, A^*, R^*)(E - E^*) \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial g_3}{\partial I} (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) (I - I^*)$$

$$+ \frac{\partial g_3}{\partial A} (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) (A - A^*)$$

$$+ \frac{\partial g_3}{\partial R} (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) (R - R^*)$$

$$g_4(S, E, I, A, R)$$

$$\approx (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) + \frac{\partial g_4}{\partial S} (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) (S - S^*)$$

$$+ \frac{\partial g_4}{\partial E} (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) (E - E^*)$$

$$+ \frac{\partial g_4}{\partial I} (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) (I - I^*)$$

$$+ \frac{\partial g_4}{\partial A} (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) (A - A^*)$$

$$+ \frac{\partial g_4}{\partial R} (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) (R - R^*)$$

$$g_5(S, E, I, A, R)$$

$$\approx (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) + \frac{\partial g_5}{\partial S} (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) (S - S^*)$$

$$+ \frac{\partial g_5}{\partial E} (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) (E - E^*)$$

$$+ \frac{\partial g_5}{\partial I} (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) (I - I^*)$$

$$+ \frac{\partial g_5}{\partial A} (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) (A - A^*)$$

$$+ \frac{\partial g_5}{\partial R} (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*) (R - R^*)$$

Sehingga diperoleh persamaan

$$\begin{aligned}
 g_1(S, E, I, A, R) \\
 &\approx (\mu - \beta S(E + I + A) - (\mu + \sigma)S) \\
 &+ (-\beta(E + I + A) - (\mu + \sigma))(S - S^*) + (-\beta S)(E - E^*) \\
 &+ (-\beta S)(I - I^*) + (-\beta S)(A - A^*) + (0)(R - R^*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_2(S, E, I, A, R) \\
 &\approx (\beta S(E + I + A) - (\kappa + \mu)E) \\
 &+ (\beta(E + I + A))(S - S^*) + (\beta S - (\kappa + \mu))(E - E^*) \\
 &+ (\beta S)(I - I^*) + (\beta S)(A - A^*) + (0)(R - R^*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_3(S, E, I, A, R) \\
 &\approx (\kappa p E - \mu I - \gamma_1 I) + (0)(S - S^*) + (\kappa p)(E - E^*) \\
 &+ (-\mu - \gamma_1)(I - I^*) + (0)(A - A^*) + (0)(R - R^*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_4(S, E, I, A, R) \\
 &\approx (\kappa(1 - p)E - \mu A - \gamma_2 A) + (0)(S - S^*) \\
 &+ (\kappa(1 - p))(E - E^*) + (0)(I - I^*) + (-\mu - \gamma_2)(A - A^*) \\
 &+ (0)(R - R^*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_5(S, E, I, A, R) \\
 &\approx (\gamma_1 I + \gamma_2 A - \mu R + \sigma S) + (\sigma)(S - S^*) + (0)(E - E^*) \\
 &+ (\gamma_1)(I - I^*) + (\gamma_2)(A - A^*) + (-\mu)(R - R^*)
 \end{aligned}$$

Maka dapat dibentuk matriks Jacobi

$$J(END) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial S} \frac{\partial g_1}{\partial E} \frac{\partial g_1}{\partial I} \frac{\partial g_1}{\partial A} \frac{\partial g_1}{\partial R} \\ \frac{\partial g_2}{\partial S} \frac{\partial g_2}{\partial E} \frac{\partial g_2}{\partial I} \frac{\partial g_2}{\partial A} \frac{\partial g_2}{\partial R} \\ \frac{\partial g_3}{\partial S} \frac{\partial g_3}{\partial E} \frac{\partial g_3}{\partial I} \frac{\partial g_3}{\partial A} \frac{\partial g_3}{\partial R} \\ \frac{\partial g_4}{\partial S} \frac{\partial g_4}{\partial E} \frac{\partial g_4}{\partial I} \frac{\partial g_4}{\partial A} \frac{\partial g_4}{\partial R} \\ \frac{\partial g_5}{\partial S} \frac{\partial g_5}{\partial E} \frac{\partial g_5}{\partial I} \frac{\partial g_5}{\partial A} \frac{\partial g_5}{\partial R} \end{pmatrix}$$

Atau dapat ditulis

$$J(END) = \begin{pmatrix} -\beta(E^* + I^* + A^*) - (\mu + \sigma) & (-\beta S^*) & (-\beta S^*) & (-\beta S^*) & 0 \\ \beta(E^* + I^* + A^*) & \beta S^* - (\kappa + \mu) & (\beta S^*) & (\beta S^*) & 0 \\ 0 & \kappa p & -\mu - \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa(1 - p) & 0 & -\mu - \gamma_2 & 0 \\ \sigma & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{pmatrix}$$

Selanjutnya substitusi nilai titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu $END =$

$(S^*, E^*, I^*, A^*, R^*)$, sehingga didapatkan matriks Jacobi seperti berikut,

$$J(END) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ 0 & \kappa p & -\mu - \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa(1 - p) & 0 & -\mu - \gamma_2 & 0 \\ \sigma & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{pmatrix}$$

dimana,

$$a_{11} = -\beta \left(\left(\frac{(\mu + \gamma_1)I^*}{\kappa p} \right) + \left(\frac{\varphi}{\psi \beta} \right) + \left(-\frac{(p-1)(\mu + \gamma_1)I^*}{p(\mu + \gamma_2)} \right) \right) - (\mu + \sigma)$$

$$a_{12} = -\beta \left(\frac{\mu \kappa p (\mu + \gamma_2)}{\beta I^*(\omega) + \kappa p (\mu + \gamma_2) (\mu + \sigma)} \right)$$

$$a_{13} = -\beta \left(\frac{\mu \kappa p (\mu + \gamma_2)}{\beta I^*(\omega) + \kappa p (\mu + \gamma_2) (\mu + \sigma)} \right)$$

$$a_{14} = -\beta \left(\frac{\mu \kappa p (\mu + \gamma_2)}{\beta I^*(\omega) + \kappa p (\mu + \gamma_2) (\mu + \sigma)} \right)$$

$$a_{21} = \beta \left(\left(\frac{(\mu + \gamma_1) I^*}{\kappa p} \right) + \left(\frac{\varphi}{\psi \beta} \right) + \left(-\frac{(p-1)(\mu + \gamma_1) I^*}{p(\mu + \gamma_2)} \right) \right)$$

$$a_{22} = \beta \left(\frac{\mu \kappa p (\mu + \gamma_2)}{\beta I^*(\omega) + \kappa p (\mu + \gamma_2) (\mu + \sigma)} \right) - (\kappa + \mu)$$

$$a_{23} = \beta \left(\frac{\mu \kappa p (\mu + \gamma_2)}{\beta I^*(\omega) + \kappa p (\mu + \gamma_2) (\mu + \sigma)} \right)$$

$$a_{24} = \beta \left(\frac{\mu \kappa p (\mu + \gamma_2)}{\beta I^*(\omega) + \kappa p (\mu + \gamma_2) (\mu + \sigma)} \right)$$

4.1.4 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

1. Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Titik keseimbangan bebas penyakit yang diperoleh adalah $DFE =$

$(S_0, E_0, I_0, A_0, R_0) = (\frac{\mu}{\mu+\sigma}, 0, 0, 0, \frac{\sigma}{\mu+\sigma})$, sehingga diperoleh matriks Jacobi

berikut ini,

$$J(DFE) = \begin{pmatrix} -(\mu + \sigma) & -\frac{\beta \mu}{\mu + \sigma} & -\frac{\beta \mu}{\mu + \sigma} & -\frac{\beta \mu}{\mu + \sigma} & 0 \\ 0 & \frac{\beta \mu}{\mu + \sigma} - (\kappa + \mu) & \frac{\beta \mu}{\mu + \sigma} & \frac{\beta \mu}{\mu + \sigma} & 0 \\ 0 & \kappa p & -\mu - \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & k(1-p) & 0 & -\mu - \gamma_2 & 0 \\ \sigma & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dicari nilai eigen dari matriks tersebut, $\det(J(DFE) - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} -(\mu + \sigma) & -\frac{\beta\mu}{\mu+\sigma} & -\frac{\beta\mu}{\mu+\sigma} & -\frac{\beta\mu}{\mu+\sigma} & 0 \\ 0 & \frac{\beta\mu}{\mu+\sigma} - (k + \mu) & \frac{\beta\mu}{\mu+\sigma} & \frac{\beta\mu}{\mu+\sigma} & 0 \\ 0 & kp & -\mu - \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & k(1-p) & 0 & -\mu - \gamma_2 & 0 \\ \sigma & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

0

$$\det \begin{pmatrix} -(\mu + \sigma + \lambda) & -\frac{\beta\mu}{\mu+\sigma} & -\frac{\beta\mu}{\mu+\sigma} & -\frac{\beta\mu}{\mu+\sigma} & 0 \\ 0 & \frac{\beta\mu}{\mu+\sigma} - (\kappa + \mu + \lambda) & \frac{\beta\mu}{\mu+\sigma} & \frac{\beta\mu}{\mu+\sigma} & 0 \\ 0 & \kappa p & -(\mu + \gamma_1 + \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \kappa(1-p) & 0 & -(\mu + \gamma_2 + \lambda) & 0 \\ \sigma & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -(\mu + \lambda) \end{pmatrix} =$$

0

Untuk memperoleh nilai determinan matriks 5×5 , maka dapat menggunakan metode ekspansi kofaktor dari matriks (DFE) sebagai berikut:

$$-(\mu + \lambda) \begin{vmatrix} -(\mu + \sigma + \lambda) & -\frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} & -\frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} & -\frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} \\ 0 & \frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} - (\kappa + \mu + \lambda) & \frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} & \frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} \\ 0 & \kappa p & -(\mu + \gamma_1 + \lambda) & 0 \\ 0 & \kappa(1-p) & 0 & -(\mu + \gamma_2 + \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(-(\mu + \lambda))(-(\mu + \gamma_2 + \lambda)) \begin{vmatrix} -(\mu + \sigma + \lambda) & -\frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} & -\frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} \\ 0 & \frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} - (\kappa + \mu + \lambda) & \frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} \\ 0 & \kappa p & -(\mu + \gamma_1 + \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(-(\mu + \lambda))(-(\mu + \gamma_2 + \lambda))(-(\mu + \gamma_1 + \lambda)) \begin{vmatrix} -(\mu + \sigma + \lambda) & -\frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} \\ 0 & \frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} - (\kappa + \mu + \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(-(\mu + \lambda))(-(\mu + \gamma_2 + \lambda))(-(\mu + \gamma_1 + \lambda))(-(\mu + \sigma + \lambda)) \left(\frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} - (\kappa + \mu + \lambda) \right) = 0$$

Setelah diperoleh determinan matrik DFE, maka dapat ditentukan nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_1 = -\mu < 0$$

$$\lambda_2 = -\mu - \gamma_2 < 0$$

$$\lambda_3 = -\mu - \gamma_1 < 0$$

$$\lambda_4 = -\mu - \sigma < 0$$

$$\lambda_5 = \frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} - \kappa - \mu$$

Berdasarkan hasil tersebut dapat diketahui empat nilai eigen merupakan bilangan negatif $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0$. Dengan demikian , sifat titik kesetimbangan bebas penyakit pada populais SEIAR adalah stabil dengan syarat kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit DFE bergantung pada kondisi $\lambda_5 < 0$. Kondisi $\lambda_5 < 0$ ekuivalen dengan $\frac{\beta\mu}{\mu + \sigma} < \kappa + \mu$

$$\kappa + \mu \leftrightarrow \frac{\beta\mu}{(\mu + \sigma)(\kappa + \mu)} < 1.$$

2. Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

Untuk menentukan kestabilan lokal titik kesetimbangan endemik maka dicari nilai eigen dengan mensubtitusikan titik kesetimbangan endemik $END = (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*)$, sehingga didapatkan matriks Jacobi

$$J(END) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ 0 & kp & -\mu - \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & k(1 - p) & 0 & -\mu - \gamma_2 & 0 \\ \sigma & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{pmatrix}$$

dimana,

$$a_{11} = -\beta \left(\left(\frac{(\mu + \gamma_1)I^*}{\kappa p} \right) + \left(\frac{\varphi}{\psi\beta} \right) + \left(-\frac{(p-1)(\mu + \gamma_1)I^*}{p(\mu + \gamma_2)} \right) \right) - (\mu + \sigma)$$

$$a_{12} = -\beta \left(\frac{\mu\kappa p(\mu + \gamma_2)}{\beta I^*(\omega) + \kappa p(\mu + \gamma_2)(\mu + \sigma)} \right)$$

$$a_{13} = -\beta \left(\frac{\mu\kappa p(\mu + \gamma_2)}{\beta I^*(\omega) + \kappa p(\mu + \gamma_2)(\mu + \sigma)} \right)$$

$$a_{14} = -\beta \left(\frac{\mu\kappa p(\mu + \gamma_2)}{\beta I^*(\omega) + \kappa p(\mu + \gamma_2)(\mu + \sigma)} \right)$$

$$a_{21} = \beta \left(\left(\frac{(\mu + \gamma_1)I^*}{\kappa p} \right) + \left(\frac{\varphi}{\psi\beta} \right) + \left(-\frac{(p-1)(\mu + \gamma_1)I^*}{p(\mu + \gamma_2)} \right) \right)$$

$$a_{22} = \beta \left(\frac{\mu\kappa p(\mu + \gamma_2)}{\beta I^*(\omega) + \kappa p(\mu + \gamma_2)(\mu + \sigma)} \right) - (\kappa + \mu)$$

$$a_{23} = \beta \left(\frac{\mu\kappa p(\mu + \gamma_2)}{\beta I^*(\omega) + \kappa p(\mu + \gamma_2)(\mu + \sigma)} \right)$$

$$a_{24} = \beta \left(\frac{\mu\kappa p(\mu + \gamma_2)}{\beta I^*(\omega) + \kappa p(\mu + \gamma_2)(\mu + \sigma)} \right)$$

Selanjutnya dicari nilai eigen dari matriks tersebut, $\det(\mathbf{J}(END) - \lambda \mathbf{I}) = 0$

$$\det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ 0 & \kappa p & -\mu - \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & k(1-p) & 0 & -\mu - \gamma_2 & 0 \\ \sigma & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -\mu \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} & 0 \\ 0 & kp & -(\mu + \gamma_1 + \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & k(1-p) & 0 & -(\mu + \gamma_2 + \lambda) & 0 \\ \sigma & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & -(\mu + \lambda) \end{pmatrix} = 0$$

Untuk memperoleh nilai determinan matriks 5×5 , maka dapat menggunakan metode ekspansi kofaktor dari matriks END sebagai berikut:

$$(-\mu - \lambda) \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} \\ 0 & kp & -(\mu + \gamma_1 + \lambda) & 0 \\ 0 & k(1-p) & 0 & -(\mu + \gamma_2 + \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\mu - \lambda)(-(\mu + \gamma_2 + \lambda)) \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & kp & -(\mu + \gamma_1 + \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\mu - \lambda)(-(\mu + \gamma_2 + \lambda))(-(\mu + \gamma_1 + \lambda)) \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\mu - \lambda)(-(\mu + \gamma_2 + \lambda))(-(\mu + \gamma_1 + \lambda))((\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22}) - (a_{21})(a_{12})) = 0$$

Setelah diperoleh determinan matrik END, maka dapat ditentukan nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_1 = -\mu < 0$$

$$\lambda_2 = -\mu - \gamma_2 < 0$$

$$\lambda_3 = -\mu - \gamma_1 < 0$$

Untuk mencari λ_4 dan λ_5 dengan menggunakan persamaan karakteristik dimana

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

Sehingga diperoleh matriks Hurwitz sebagai

$$D_1 = a_1 > 0,$$

dan

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix}$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal jika $a_1 > 0$ dan $a_0 > 0$.

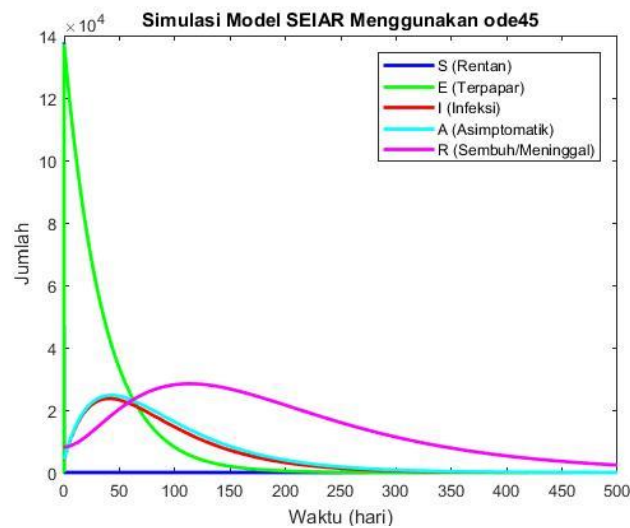
$$a_1 > 0 \leftrightarrow - \left(\left(-\beta \left(\left(\frac{(\mu + \gamma_1)I^*}{\kappa p} \right) + \left(\frac{\varphi}{\psi \beta} \right) + \left(-\frac{(p-1)(\mu + \gamma_1)I^*}{p(\mu + \gamma_2)} \right) \right) - (\mu + \sigma) \right) + \right. \\ \left. \left(\beta \left(\frac{\mu \kappa p (\mu + \gamma_2)}{\beta I^*(\omega) + \kappa p (\mu + \gamma_2)(\mu + \sigma)} \right) - (\kappa + \mu) \right) \right) > 0$$

$$a_0 > 0 \leftrightarrow \left(\left(-\beta \left(\left(\frac{(\mu + \gamma_1)I^*}{\kappa p} \right) + \left(\frac{\varphi}{\psi \beta} \right) + \left(-\frac{(p-1)(\mu + \gamma_1)I^*}{p(\mu + \gamma_2)} \right) \right) - (\mu + \sigma) \right) \left(\beta \left(\frac{\mu \kappa p (\mu + \gamma_2)}{\beta I^*(\omega) + \kappa p (\mu + \gamma_2)(\mu + \sigma)} \right) - (\kappa + \mu) \right) \right. \\ \left. - \left(\left(\beta \left(\frac{\mu \kappa p (\mu + \gamma_2)}{\beta I^*(\omega) + \kappa p (\mu + \gamma_2)(\mu + \sigma)} \right) - (\kappa + \mu) \right) \left(-\beta \left(\frac{(\mu + \gamma_1)I^*}{\kappa p} \right) + \left(\frac{\varphi}{\psi \beta} \right) + \left(-\frac{(p-1)(\mu + \gamma_1)I^*}{p(\mu + \gamma_2)} \right) \right) - (\mu + \sigma) \right) \right) > 0$$

Berdasarkan hasil tersebut dapat diketahui bahwa semua nilai eigen memiliki bagian real negatif. Dengan demikian, sifat titik kesetimbangan endemik penyakit pada populasi SEIAR adalah stabil asimtotik.

4.2 Simulasi Numerik

Pada tahap ini dilakukan simulasi numerik pada model SEIAR penyebaran COVID-19 dengan mensubstitusikan nilai awal variabel S sebesar 137760, variabel E sebesar 0, variabel I sebesar 3926, variabel A sebesar 4099, variabel R sebesar 7756 dan nilai parameter pada lampiran menggunakan metode ODE45 dengan aplikasi MATLAB. Simulasi numerik yang digunakan yaitu simulasi model SEIAR penyebaran COVID-19 dengan mensubstitusikan nilai parameter $\nu = 70\%$.



Gambar 4.1 Simulasi Numerik Model SEIAR Penyebaran COVID-19

Berdasarkan Gambar 4.1 dan analisis kestabilan titik kesetimbangan endemik yang diperoleh pada persamaan 4.10, grafik variabel S yang menggambarkan subpopulasi susceptible mengalami kestabilan asimtotik yang mencapai populasi 0 pada waktu tertentu. variabel E yang menggambarkan subpopulasi exposed mengalami kestabilan asimtotik yang mencapai populasi 850 pada waktu tertentu.

Grafik variabel I yang menggambarkan subpopulasi infected mengalami kestabilan asimtotik yang mencapai populasi 1800 pada waktu tertentu. Grafik variabel A yang menggambarkan subpopulasi infeksi tanpa gejala mengalami kestabilan asimtotik yang mencapai populasi 1900 pada waktu tertentu. Grafik variabel R yang menggambarkan subpopulasi recovered juga akan mengalami kestabilan asimtotik yang mencapai populasi 5000 pada waktu tertentu.

Berdasarkan Gambar (4.1) dapat diketahui pula bahwa penambahan nilai parameter vaksinasi akan mempengaruhi titik kesetimbangan pada subpopulasi infected menjadi semakin rendah. Hal tersebut menunjukkan bahwa faktor vaksinasi dapat menekan jumlah populasi terinfeksi sehingga semakin sedikit individu yang dapat menyebarkan virus COVID-19.

4.3 Kajian Integrasi Nilai Keagamaan

Dalam Islam memerintahkan umatnya untuk selalu menerapkan ajaran-ajaran yang diperintahkan, salah satunya yaitu dengan berikhtiar. Ikhtiar adalah perilaku berusaha dengan sungguh-sungguh dengan cara yang baik dan sesuai dengan ketentuan yang berlaku. Secara sederhana, ikhtiar dapat dikatakan sebagai usaha lahiriah yang dilakukan oleh manusia untuk mencapai suatu tujuan. Dengan berikhtiar, maka seseorang akan selalu berusaha untuk mencoba hingga tujuan yang diinginkannya tercapai. Oleh sebab itu, dalam Islam, seorang hamba tidak baik untuk bermalas-malasan atau berputus asa jika sudah beberapa kali gagal dalam menggapai tujuan.

Konsep ikhtiar dapat dianalogikan dalam pembahasan skripsi ini. Salah satu bentuk ikhtiar yang dapat dilakukan adalah ikhtiar dalam hal pengobatan terhadap

suatu penyakit. Rasulullah juga mengajarkan umatnya untuk berobat ketika mengalami sakit. Telah dijelaskan juga dalam hadist:

“Berobatlah, sebab sesungguhnya Allah ‘Azza wa Jalla tidak meletakkan penyakit kecuali meletakkan baginya obat. Kecuali satu penyakit (tidak ada obatnya) yaitu usia tua”(HR. Abu Dawud).

Pada hadist di atas menunjukkan bahwa Allah SWT menurunkan penyakit disertai diturunkannya obat, sehingga sebagai seorang muslim diizinkan untuk berikhtiar mengobati maupun mencegah suatu penyakit. Penyakit yang dibahas pada skripsi ini yaitu COVID-19. Bentuk ikhtiar yang dilakukan pemerintah ketika maraknya virus tersebut yaitu dengan diadakannya vaksinasi yang berguna untuk menaikkan tingkat kekebalan tubuh. Diharapkan pemberian vaksinasi dapat menghentikan penyebaran penyakit tersebut.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan dan hasil pembahasan pada penelitian ini, maka diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Berdasarkan analisis dinamik model matematika SEIAR dengan pengaruh vaksinasi diperoleh :

- a. Titik kesetimbangan bebas penyakit menghasilkan 2 titik tetap sebagai berikut

$$X_0^* = (S_0^*, E_0^*, I_0^*, A_0^*, R_0^*) = (\frac{\mu}{\mu+\sigma}, 0, 0, 0, \frac{\sigma}{\mu+\sigma})$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit ini bersifat stabil berdasarkan nilai eigennya.

- b. Titik kesetimbangan endemik penyakit menghasilkan 5 titik tetap sebagai berikut

$$X^* = (S^*, E^*, I^*, A^*, R^*)$$

$$E^* = \frac{(\mu + \gamma_1)I}{\kappa p}$$

$$A^* = -\frac{(p-1)(\mu + \gamma_1)I}{p(\mu + \gamma_2)}$$

$$S^* = \frac{\mu \kappa p (\mu + \gamma_2)}{\beta I(\omega) + \kappa p (\mu + \gamma_2) (\mu + \sigma)}$$

$$R^* = \frac{(\beta(\theta)(\omega)I^2 + \kappa p (\mu + \gamma_2) (\mu + \sigma) (\theta)I + \sigma \mu \kappa p^2)}{(p(\mu + \gamma_2) (\beta I(\omega) + \kappa p (\mu + \gamma_2) (\mu + \sigma) \mu))}$$

$$I^* = \frac{\varphi}{\psi \beta}$$

Berdasarkan data tabel pada lampiran 1, titik kesetimbangan endemik penyakit ini bersifat tidak stabil. Perlu dilakukan analisa lebih lanjut apakah titik kesetimbangan endemik ini memiliki kondisi khusus sehingga menjadi stabil.

2. Berdasarkan hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa nilai parameter vaksinasi dapat mengurangi penyebaran virus COVID-19.

5.2 Saran

Penulis menyarankan untuk penelitian selanjutnya dapat dikembangkan model matematika SEIAR ini dengan ditambahkannya kontrol optimal dengan variabel dan parameter baru lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., & Rorres, C. (2005). *Elementary Linear Algebra* (5th ed). P.Silaban, & I.Susila, Trans.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Textbook and Student Solutions Manual Set*. 796.
http://books.google.com/books?id=q3lmPgAACAAJ&dq=elementary+differential+equations+and+boundary+value+problems&hl=&cd=16&source=gbs_api%5Cnpapers3://publication/uuid/9096B1C5-0F87-4FEA-AA72-C3E07E930C19
- Diekmann, O., dan Heesterbeek, J.A.P. (2002). *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation*.
- Katsir, A. A. F. I. I. (2000). *Tafsir al-Qur'an al- Adzim, juz 8*. Bandung: Sinar Baru Algesindo.
- Keeling, M. J., & Rohani, P. (2008). *Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals*.
- Kemenag. (2019). *Dipetik November 25, 202*.
- Kwong JC, Maaten S, Upshur REG, P. D. & M. F. (2009). The Effect of Universal Influenza Immunization on Antibiotic Prescriptions: An Ecological Study. *Clinical Infectious Diseases* 49, 750 – 756.
- Li, M. Y., Smith, H. L., & Wang, L. (2001). *Global Dynamic of an SEIR Epidemic Model With Vertical Transmission, Society for Industrial and Applied Mathematics*. 62(1), 58–69.
- Olsder, G. &. (2004). *Mathematical Systems Theory*.
- Sulisti, H., Noviani, E., & Kusumastuti, N. (2014). Analisis Kestabilan Model Dinamika Penyebaran Penyakit Flu Burung. *Bimaster*, 03(3), 235–244.
<http://download.portalgaruda.org/article.php?article=266336&val=2316&title=ANALISIS KESTABILAN MODEL DINAMIKA PENYEBARAN>

PENYAKIT FLU BURUNG

- Van Den Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180(1–2), 29–48.
[https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6)
- Wiggins, S. (2003). Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. In *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Issue January 2003). <https://doi.org/10.1007/b97481>

LAMPIRAN

Lampiran 1. Nilai Awal Model Penyebaran COVID-19 merujuk pada <https://covid19.go.id>. Angka yang dipakai merupakan nilai taksiran.

Variabel	Nilai Awal	Keterangan
$S(0)$	137760 orang	Banyaknya Populasi Individu yang Rentan
$E(0)$	0 orang	Banyaknya Populasi Individu yang Terpapar
$I(0)$	3926 orang	Banyaknya Populasi Individu yang Terinfeksi dengan Gejala
$A(0)$	4099 orang	Banyaknya Populasi Individu yang Terinfeksi tanpa Gejala
$R(0)$	7756 orang	Banyaknya Populasi Individu yang Sembuh
N	153541 orang	Banyaknya Populasi Penduduk Kota Blitar

Lampiran 2. Nilai parameter model matematika SEIAR

Parameter	Nilai	Keterangan	Satuan	Sumber
μ	0.00833333333333	Laju kelahiran / kematian	Per Hari	(Khanh, 2014)
β	0.005	Peluang transmisi penyebaran virus	Per Hari	Asumsi
κ	0.02	Laju interaksi individu rentan dengan individu terinfeksi	Per Hari	Asumsi
p	0.5	Proporsi individu dari kelas exposed menjadi individu terinfeksi total yang menunjukkan gejala	Proporsi	(Khanh, 2014)
$1-p$	0.5	Banyaknya Populasi Individu yang Sembuh	Proporsi	(Khanh, 2014)
γ_1	0.01	Laju perpindahan individu terinfeksi menjadi sembuh dan terimunisasi	Per Hari	(Khanh, 2014)

γ_2	0.00833333333333	Laju perpindahan individu terinfeksi menjadi sembuh dan terimunisasi	Per Hari	(Khanh, 2014)
σ	70%	Presentase vaksinasi	Per Hari	Asumsi

Lampiran 3. Script Maple untuk menentukan bilangan reproduksi dasar

> restart; with(linalg);

[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, sumbasis, swapcol, swaprow, sylveste, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]

$$> F := \begin{bmatrix} \beta \cdot S - (\kappa + \mu) & \beta \cdot S & \beta \cdot S \\ \kappa \cdot p & -(\mu + \gamma_1) & 0 \\ \kappa \cdot (1 - p) & 0 & -(\mu + \gamma_2) \end{bmatrix}$$

$$F := \begin{bmatrix} S\beta - \kappa - \mu & \beta S & \beta S \\ \kappa p & -\mu - \gamma_1 & 0 \\ \kappa(1 - p) & 0 & -\mu - \gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$> V := \begin{bmatrix} \kappa + \mu & 0 & 0 \\ \kappa \cdot p & \mu + \gamma_1 & 0 \\ -\kappa \cdot (1 - p) & 0 & \mu + \gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$V := \begin{bmatrix} \kappa + \mu & 0 & 0 \\ \kappa p & \mu + \gamma_1 & 0 \\ -\kappa(1 - p) & 0 & \mu + \gamma_2 \end{bmatrix}$$

> Z := inverse(V);

$$Z := \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa + \mu} & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa p}{(\kappa + \mu)(\mu + \gamma_1)} & \frac{1}{\mu + \gamma_1} & 0 \\ -\frac{\kappa(-1 + p)}{(\kappa + \mu)(\mu + \gamma_2)} & 0 & \frac{1}{\mu + \gamma_2} \end{bmatrix}$$

> K := evalm(F&*Z);

$$K := \begin{bmatrix} \frac{S\beta - \kappa - \mu}{\kappa + \mu} - \frac{\beta S \kappa p}{(\kappa + \mu)(\mu + \gamma_1)} - \frac{\beta S \kappa(-1 + p)}{(\kappa + \mu)(\mu + \gamma_2)} & \frac{\beta S}{\mu + \gamma_1} & \frac{\beta S}{\mu + \gamma_2} \\ \frac{\kappa p}{\kappa + \mu} - \frac{(-\mu - \gamma_1)\kappa p}{(\kappa + \mu)(\mu + \gamma_1)} & \frac{-\mu - \gamma_1}{\mu + \gamma_1} & 0 \\ \frac{\kappa(1 - p)}{\kappa + \mu} - \frac{(-\mu - \gamma_2)\kappa(-1 + p)}{(\kappa + \mu)(\mu + \gamma_2)} & 0 & \frac{-\mu - \gamma_2}{\mu + \gamma_2} \end{bmatrix}$$

Lampiran 4. Script Matlab untuk menentukan solusi numerik model SEIAR penyebaran COVID-19 dengan Metode ODE45

```
% Inisialisasi waktu simulasi
tspan = [0 500];

% Inisialisasi kondisi awal
S0 = 137760; E0 = 0; I0 = 3926; A0 = 4099; R0 = 7756;
y0 = [S0 E0 I0 A0 R0];

% Parameter model
mu = 0.0083;
beta = 0.005;
kappa = 0.02;
p = 0.5;
gamma(1) = 0.01;
gamma(2) = 0.0083;
sigma = 0.7

% Fungsi yang merepresentasikan sistem persamaan diferensial
odefun = @(t,y) [mu-beta*y(1)*(y(2)+y(3)+y(4))-mu*y(1)-sigma*y(1);
                 beta*y(1)*(y(2)+y(3)+y(4))-kappa*y(2)-mu*y(2);
                 kappa*p*y(2)-mu*y(3)-gamma(1)*y(3);
                 kappa*(1-p)*y(2)-mu*y(4)-gamma(2)*y(4);
                 gamma(1)*y(3)+gamma(2)*y(4)-mu*y(5)+sigma*y(1)];

% Solusi numerik menggunakan metode ode45
[t,y] = ode45(odefun, tspan, y0);

% Plot hasil simulasi
plot(t, y(:,1), 'b-', t, y(:,2), 'g-', t, y(:,3), 'r-', t, y(:,4),
      'c-', t, y(:,5), 'm-', 'LineWidth', 2)
xlabel('Waktu (hari)')
ylabel('Jumlah')
title('Simulasi Model SEIAR Menggunakan ode45')
legend('S (Rentan)', 'E (Terpapar)', 'I (Infeksi)', 'A
      (Asimtomatik)', 'R (Sembuh/Meninggal)')
```

□

RIWAYAT HIDUP



Meira Indria Pratiwi, lahir di Kota Batu pada tanggal 03 Mei 2001. Biasa dipanggil Meira. Anak tunggal dari Bapak Bunandri dan Ibu Susiati. Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN ORO-ORO OMBO BATU. Kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMPN 03 BATU. Selanjutnya, menempuh jenjang pendidikan menengah atas di MAN KOTA BATU. Setelah itu melanjutkan pendidikan perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Meira Indria Pratiwi
NIM : 19610019
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model SEIAR Dengan Pengaruh Vaksinasi
Pembimbing I : Dr. Heni Widayani, M.Si.
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	24 November 2022	Konsultasi Bab I	1.
2.	2 Desember 2022	Revisi Bab I	2.
3.	12 Desember 2022	Konsultasi Bab II	3.
4.	14 Desember 2022	Revisi Bab II	4.
5.	19 Desember 2022	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan Bab II	5.
6.	22 Desember 2022	Revisi Kajian Agama	6.
7.	22 Desember 2022	Konsultasi Bab III	7.
8.	28 Desember 2022	ACC Bab I, II, III	8.
9.	1 Maret 2023	Konsultasi Bab IV dan V	9.
10.	11 Maret 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	10.
11.	31 Maret 2023	Revisi Kajian Agama	11.
12.	19 Mei 2023	ACC Bab IV, V	12.
13.	23 Juni 2023	ACC keseluruhan	13.

Malang, 23 Juni 2023

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc

NIP. 19741129 200012 2 005