

**TERMODINAMIKA LUBANG HITAM REISSNER-NORDSTRÖM
DALAM TEORI $f(R)$**

SKRIPSI

Oleh:
FITRI HALIMATUS SAKDIYAH
NIM.18640050



**PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023**

**TERMODINAMIKA LUBANG HITAM REISSNER-NORDSTRÖM
DALAM TEORI $f(R)$**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:
FITRI HALIMATUS SAKDIYAH
NIM.18640050**

**PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023**

HALAMAN PERSETUJUAN

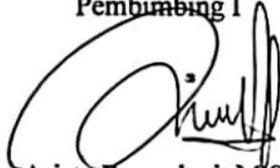
**TERMODINAMIKA LUBANG HITAM REISSNER-NORDSTRÖM
DALAM TEORI $f(R)$**

SKRIPSI

Oleh:
FITRI HALIMATUS SAKDIYAH
NIM.18640050

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Pada Tanggal: 08 Juni 2023

Pembimbing I


Arista Romadani, M.Sc
NIP. 19900905 201903 1 009

Pembimbing II


Irian, M.Si
NIP. 19691231 200604 1 003

Mengetahui,
Ketua Program Studi

Dzulham Tazi, M.Si
NIP. 19740730 200312 1 002



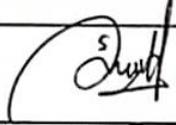
HALAMAN PENGESAHAN

TERMODINAMIKA LUBANG HITAM REISSNER-NORDSTRÖM DALAM TEORI $f(R)$

SKRIPSI

Oleh:
FITRI HALIMATUS SAKDIYAH
NIM.18640050

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Pada Tanggal, 08 Juni 2023

Penguji Utama	<u>Dr. Erna Hastuti, M.Si</u> NIP. 19811119 200801 1 009	
Ketua Penguji	<u>Muhammad Taufiqi, M.Si</u> NIP. LB. 64021	
Sekretaris Penguji	<u>Arista Romadani, M.Sc</u> NIP. 19900905 201903 1 018	
Anggota Penguji	<u>Irjan, M.Si</u> NIP. 19691231 200604 1 003	

Mengesahkan,
kepada Program Studi



Dr. Jonny Tazi, M.Si
NIP. 19740730 200312 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Fitri Halimatus Sakdiyah

NIM : 18640050

Jurusan : Fisika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Penelitian : Termodinamika Lubang Hitam Reissner-Nordstrom
dalam Teori $f(R)$

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil-alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil contekan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 08 Juni 2023

Yang Membuat Pernyataan



Fitri Halimatus Sakdiyah
NIM.18640050

MOTTO

“Allah tidak menciptakan sesuatu yang lebih kuat melebihi doa, dia telah menciptakan doa lebih kuat dari pada takdir-Nya” –Maulana Rumi

Selama keimanan masih melekat di hati maka tidak ada yang mustahil di dunia ini karena Kun Fa Yakun-Nya masih berlaku.

HALAMAN PERSEMBAHAN

Kepada Bapak Buasan dan Ibu Suprapti, karya ini adalah buah kesabaran dan keikhlasan kalian dalam membesarkan penulis. Karya ini juga menjadi bukti dan pengingat bagi penulis bahwa di masa mendatang setiap kesulitan yang datang pasti akan mendapati jalan keluar.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT atas segala rahmat, taufik dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi dengan judul “Termodinamika Lubang Hitam Reissner-Nordstrom dalam Teori $f(R)$ ”. Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun kita dari zaman jahiliyah menuju zaman ilmiah seperti sekarang.

Penulis tidak akan mampu menyelesaikan tulisan ini jika dalam prosesnya tidak didukung oleh orang-orang hebat yang senantiasa berada di sisi penulis. Terima kasih kepada Bapak Buasan dan Ibu Suprapti, Cak Agus, Mbak Yuli, Fahmi, Mbak Salwe, Habibi serta keluarga besar yang selalu memberikan keyakinan pada penulis untuk dapat menyelesaikan skripsi ini. Kepada Pak Arista dan Pak Irjan selaku pembimbing yang dengan arahan beliau sekalian penulis pada akhirnya penulis bisa sampai pada tujuannya. Kepada Bapak Bintoro, Prof. Habib Mazhari dan Prof. Pham Van Kya yang dengan rendah hati berkenan untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan penulis saat penulis tidak mampu memahami rumusan-rumusan yang rumit. Kepada teman-teman fisika teori UIN Malang, Ainayah, Iil, Riris, Anis, Mbak Risma, Kak Eko terima kasih karena sejak hari itu hingga hari ini kalian masih mau kebersamaian penulis untuk memperjuangkan mimpi-mimpi kita. Kepada Lailatul Badriyah terima kasih telah meluangkan banyak sekali waktu dan tenaganya untuk menemani penulis hingga saat ini, Kak Muly dan Dek Fitria terima kasih telah mencerahkan suasana saat penulis merasa sangat jenuh dalam menyelesaikan tulisan ini. Yang paling spesial, ucapan terima kasih kepada musisi-musisi hebat yang meskipun tanpa kehadiran kalian, lagu-

lagu kalian selalu mampu menginspirasi penulis, Uri Bangtan Boys, Uri Seborg semoga lagu-lagu kalian tetap menginspirasi banyak orang di luar sana. Dan juga, untuk Chicha dan Fakhri terima kasih sudah menjadi pahlawan siding hari itu.

Kepada orang-orang yang turut andil dalam penyelesaian skripsi ini, yang tidak mampu penulis sebutkan satu-persatu, terima kasih banyak semoga segala kebaikan kalian dibalas oleh Allah SWT dengan beribu-beribu kebaikan di masa depan.

Malang, 08 Juni 2023

Penulis

DAFTAR ISI

COVER	i
HALAMAN JUDUL	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
HALAMAN PERNYATAAN	v
MOTTO	vi
HALAMAN PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR LAMPIRAN	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
مستخلص البحث	xvi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	6
1.3 Tujuan Penelitian.....	6
1.4 Batasan Masalah.....	6
1.5 Manfaat Penelitian.....	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	8
2.1 Persamaan Medan Einstein.....	8
2.2 Lubang Hitam	13
2.2.1 Lubang Hitam Schwarzschild.....	14
2.2.2 Lubang Hitam Reissner-Nordstrom	23
2.2.3 Lubang Hitam Kerr.....	32
2.2.4 Lubang Hitam Kerr-Newman	34
2.3 Teori $f(R)$	35
2.3.1 Formalisme Metrik	36
2.3.2 Formalisme Palatini.....	40
2.3.3 Formalisme Metrik-Affine	41
2.4 Termodinamika lubang hitam.....	42
2.5 Penelitian Terdahulu.....	44
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	46
3.1 Solusi Persamaan Medan Einstein dalam Teori Gravitasi $f(R)$	46
3.2 Solusi Reissner-Nordstrom dalam teori $f(R)$	58
3.3 Termodinamika Lubang Hitam Reissner Nordstrom	75
3.4 Pembahasan	84
3.5 Entropi dalam Al-Qur'an.....	94

BAB IV PENUTUP	99
4.1 Kesimpulan.....	99
4.2 Saran.....	100
 DAFTAR PUSTAKA	 101

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3. 1	Simulasi kelengkungan ruang-waktu	46
Gambar 3. 2	Citra Lubang Hitam Supermassif	85
Gambar 3. 3	Grafik Massa LHRN.....	87
Gambar 3. 4	Grafik Massa LHRN Teori $f(R)$	88
Gambar 3. 5	Grafik Temperatur LHRN	90
Gambar 3. 6	Grafik Temperatur LHRN Teori $f(R)$	91
Gambar 3. 7	Termodinamika lubang hitam RN	92
Gambar 3. 8	Grafik Entropi LHRN.....	93
Gambar 3. 9	Grafik Entropi LHRN Teori $f(R)$	93

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Simbol Schristoffel.....	104
Lampiran 2 Simbol Ricci	110
Lampiran 3 Tensor Energi Momentum.....	113

ABSTRAK

Sakdiyah, Fitri Halimatus. 2023. **Termodinamika Lubang Hitam Reissner-Nordström dalam Teori $f(R)$** . Skripsi. Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Arista Romadani, M.Sc (II) Irjan, M.Si

Kata Kunci: Termodinamika, Reissner-Nordstrom, Teori $f(R)$

Kegagalan Einstein dalam menjelaskan fenomena gravitasi menimbulkan koreksi besar dalam persamaan medan Einstein. Salah satu modifikasi yang dilakukan yakni dengan merubah nilai kelengkungan pada ruas geometri persamaan Einstein ke dalam suatu fungsi atau yang disebut dengan teori $f(R)$. Menggunakan lubang hitam Reissner-Nordstrom sebagai objek uji persamaan medan Einstein dengan kuantitas termodinamika sebagai hasil akhir dari penelitian didapatkan besaran-besaran termodinamika lubang hitam Reissner-Nordstrom dalam teori $f(R)$ khususnya dalam kasus $f(R) = R + \alpha R^2$. Hasil dari penelitian ini didapatkan nilai besaran massa, temperatur dan entropi lubang hitam Reissner-Nordstrom dalam teori $f(R)$ memiliki kuantitas yang sama dengan lubang hitam Reissner-Nordstrom dalam tinjauan Einstein pada saat nilai gangguan $\alpha = 0$. Sedangkan dengan nilai gangguan α yang berbeda kuantitas termodinamika yang diberikan juga berbeda.

ABSTRACT

Sakdiyah, Fitri Halimatus. 2023. **Reissner- Nordström Black Hole Thermodynamics in $f(R)$ Theory**. Thesis. Department of Physics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisors: (I) Arista Romadani, M.Sc. (II) Irjan, M.Si.

Keywords: Thermodynamics, Reissner-Nordström, $f(R)$ Theory

Einstein's failure to explain the phenomenon of gravity led to major corrections in Einstein's field equations. One of the modifications made is by changing the curvature value on the geometry segment of Einstein's equations into a function or what is called the theory of $f(R)$. Using the Reissner-Nordstrom black hole as the test object for Einstein's field equations with thermodynamic quantities as the final result of the research, we get the thermodynamic quantities of Reissner-Nordstrom black holes in the $f(R)$ theory, especially in the case of $f(R) = R + \alpha R^2$. The results of this study show that the mass, temperature and entropy values of the Reissner-Nordstrom black hole in $f(R)$ theory have the same quantity as the Reissner-Nordstrom black hole in Einstein's review when the perturbation value is $a = 0$. Meanwhile, with different a disturbance values, the given thermodynamic quantity is also different.

مستخلص البحث

السعدية ، فطرى حليلة. ٢٠٢٣. الديناميكا الحرارية للثقب الأسود ريسنر نوردرستروم في نظرية $f(R)$.
أطروحة. قسم الفيزياء ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة الدولة الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج.
المشرفون: (I) اريستا رمضانى، الماجستير. (II) عرجان ، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: الديناميكا الحرارية ، Reissner-Nordström ، نظرية $f(R)$

أدى فشل أينشتاين في تفسير ظاهرة الجاذبية إلى تصحيحات كبيرة في معادلات مجال أينشتاين. أحد التعديلات التي تم إجراؤها هو تغيير قيمة الانحناء في المقطع الهندسي لمعادلات أينشتاين إلى دالة أو ما يسمى نظرية $f(R)$. باستخدام الثقب الأسود Reissner-Nordstrom ككائن اختبار لمعادلات أينشتاين الميدانية مع الكميات الديناميكية الحرارية كنتيجة نهائية للبحث ، نحصل على الكميات الديناميكية الحرارية لثقوب Reissner-Nordstrom السوداء في نظرية $f(R)$ خاصة في حالة $f(R) = R + \alpha R^2$. تظهر نتائج هذه الدراسة أن قيم الكتلة ودرجة الحرارة والانتروبيا الخاصة بالثقب الأسود Reissner-Nordstrom في نظرية $f(R)$ لها نفس كمية الثقب الأسود Reissner-Nordstrom في مراجعة أينشتاين عندما تكون قيمة الاضطراب $a = 0$. وفي الوقت نفسه ، مع اختلاف قيم الاضطراب ، تختلف الكمية الديناميكية الحرارية المعطاة أيضًا.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sebelum pengamatan Edwin Hubble dikemukakan pada tahun 1929, alam semesta dinyatakan dalam bentuk yang statis yang berarti alam semesta sudah ada seperti saat ini dan tidak akan berubah. Persepsi itu berubah setelah Hubble mengemukakan temuannya tentang pergeseran merah galaksi. Berdasarkan temuan tersebut, didapatkan kesimpulan bahwa alam semesta mulanya berada di satu titik singularitas sebelum akhirnya meledak.

Beberapa tahun sebelum penemuan Hubble, Friedmann terlebih dahulu memberikan asumsi terkait alam semesta, dimana alam semesta akan terlihat sama dari manapun titik pengamatan dan ke arah manapun alam semesta diamati atau disebut dengan alam semesta yang homogen dan isotropik. Gagasan tersebut dibuktikan oleh penemuan Arno Penzias dan Robert Wilson dengan temuan mereka menggunakan detektor gelombang mikro-supersensitif yang menangkap gelombang seragam ke arah manapun detektor tersebut diarahkan.

Terkait temuan tersebut, Al Quran terlebih dahulu sudah menjelaskan terkait penciptaan alam semesta, sebagaimana telah dijelaskan oleh Allah SWT di dalam Al-Quran yakni dalam surah Yunus ayat 3:

إِنَّ رَبَّكُمُ اللَّهُ الَّذِي خَلَقَ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ فِي سِتَّةِ أَيَّامٍ ثُمَّ اسْتَوَىٰ عَلَى الْعَرْشِ يُدَبِّرُ الْأَمْرَ
مَا مِنْ شَيْعٍ إِلَّا مِنْ بَعْدِ إِذْنِهِ ذَلِكُمْ اللَّهُ رَبُّكُمْ فَاعْبُدُوهُ أَفَلَا تَذَكَّرُونَ ﴿٣﴾

Artinya: “*Sesungguhnya Tuhan kamu ialah Allah Yang menciptakan langit dan bumi dalam enam masa, kemudian Dia bersemayam di atas ‘Arsy untuk mengatur segala urusan. Tiada seorangpun yang akan memberi syafa’at kecuali sesudah ada izin-Nya. (Dzat) yang demikian itulah Allah, Tuhan kamu, maka sembahlah Dia. Maka apakah kamu tidak mengambil pelajaran.*” (QS. Yunus (10):3)

Beberapa ulama mengartikan kata *ayyaam* atau *yaum* dalam ayat tersebut sebagai masa atau periode, bukan bermakna hari seperti yang kita ketahui saat ini, berdasarkan hal tersebut kalimat *fii sittati ayyam* memiliki makna “dalam enam masa.” Enam masa tersebut diawali dengan adanya ledakan besar, kemudian terjadi pengembangan alam semesta, kemudian memasuki masa penciptaan planet dan benda langit, masa selanjutnya melanjutkan tentang evolusi Bumi dimana permukaan Bumi perlahan terbentuk, hingga pada masa kelima dijelaskan tentang penciptaan kehidupan di Bumi dan kemudian pada masa terakhir merupakan masa penciptaan gunung, hewan dan manusia setelah prasyarat kehidupan telah selesai diciptakan. Kesesuaian antara ayat tersebut dengan hasil penelitian saat ini telah menjelaskan betapa besar kuasa Allah SWT sebagai pencipta alam semesta.

Kemudian, berdasarkan temuan dan asumsi tersebut, model alam semesta yang diusulkan oleh Friedmann dikembangkan menjadi menjadi tiga model yang lebih spesifik. Model pertama adalah alam semesta terbuka, di mana alam semesta akan terus mengembang, alam semesta tertutup di mana alam semesta akan mengalami keruntuhan atas dirinya sendiri dan alam semesta yang berjalan melambat karena pengaruh gravitasi.

Untuk membuktikan apakah alam semesta akan terus berkembang atau tidak dan mulai kembali pada titik singularitas, dapat diketahui dari laju pengembangan dan kerapatan alam semesta. Jika kerapatannya lebih sedikit dari nilai kritis maka alam semesta akan terus mengembang karena gravitasi tidak dapat menghentikan laju pengembangannya. Namun, sebaliknya jika kerapatan

lebih besar dari nilai kritis maka suatu saat gravitasi akan mampu menghentikan laju pengembangannya dan akan menyebabkan alam semesta mengerut (Nugroho 2005).

Kelajuan pengembangan dapat dihitung melalui kecepatan galaksi saat menjauhi satu sama lain dengan menggunakan efek Doppler dan diketahui laju pengembangan alam semesta saat ini 5% atau 10% setiap seribu juta tahun. Untuk kerapatan alam semesta bisa diketahui dengan menjumlahkan massa dari seluruh bintang yang teramati, jumlahnya kurang dari seperseratus dari jumlah yang diperlukan untuk menghentikan pengembangan alam semesta. Saat ini, keberadaan materi tampak pada alam semesta diperkirakan sekitar 4% dari keseluruhan massa dan energi. Sekitar 23% disebut materi gelap (partikel-partikel yang berinteraksi hanya melalui interaksi lemah dan gravitasi), dan 73% adalah energi gelap (Fadlol, Purwanto, dan Subagyo 2016).

Ketidaksesuaian ini menimbulkan koreksi besar pada persamaan medan Einstein. Modifikasi yang dilakukan pada persamaan ini dilakukan dengan dua cara. Cara pertama dilakukan modifikasi pada ruas kiri persamaan medan Einstein dengan memodifikasi nilai kelengkungan serta mengabaikan keberadaan materi gelap dan energi gelap disebut juga dengan *f(R) theory*. Sedangkan cara kedua dengan memodifikasi nilai tensor energi momentum pada ruas kanan dengan menambahkan keberadaan materi gelap dan energi gelap. Kemungkinan untuk melakukan penelitian dengan menggunakan jenis modifikasi yang kedua dibutuhkan banyak data terkait materi alam semesta untuk dapat menentukan nominasi materi yang dapat dijadikan konstanta kosmologi. Beberapa penelitian

dilakukan dengan menentukan populasi bintang untuk dijadikan nominasi dari materi gelap dan sumber dari energi gelap.

Mengutip dari ungkapan S. Chandrasekhar yang mengatakan bahwa lubang hitam alam adalah objek makroskopik paling sempurna yang ada di alam semesta: satu-satunya elemen dalam konstruksinya adalah konsep ruang dan waktu. Lubang hitam sebagai objek yang massif menjadi daerah dengan medan gravitasi yang sangat besar, tidak ada yang bisa terbebas dari tarikan gravitasinya bahkan cahaya sekalipun (Sarkar 2019). Solusi lubang hitam merupakan solusi untuk persamaan medan Einstein, yang pertama kali dikemukakan oleh Karl Schwarzschild untuk lubang hitam tak bermuatan dan tak berotasi. Pada tahun 1916 dan 1918, Reissner dan Nordstrom juga menemukan solusi lubang hitam yang tidak berputar tetapi mempunyai muatan listrik dan bersimetri bola. Tahun 1963, Roy Kerr mendapatkan solusi untuk lubang hitam yang berputar tetapi tidak bermuatan listrik. Tahun 1965, Ezra “Ted” Newman mendapatkan solusi untuk lubang hitam yang berputar dan bermuatan listrik. Jadi metrik Schwarzschild, metrik Reissner-Nordstrom, metrik Kerr, dan metrik Kerr-Newman merupakan solusi dari persamaan medan Einstein. Fakta dimana setiap lubang hitam dapat dibedakan berdasarkan hanya tiga parameter fisis, yaitu massanya, momentum sudutnya, dan muatan listriknya adalah juga sifat alamiah lubang hitam yang menghilangkan informasi yang masuk padanya. Keadaan tersebut dikenal sebagai teorema “*no-hair*”, berlaku untuk semua lubang hitam yang merupakan solusi dari persamaan medan Einstein-Maxwell tentang gravitasi dan elektromagnetik dalam teori relativitas umum. Adapun fisikawan yang menggagas teorema “*no-hair*” ini

adalah John Archibald Wheeler lebih dari empat puluh tahun yang lalu (Bernard 2017).

Pada tahun 1975, Stephen W. Hawking dalam paper-nya yang berjudul *Particle Creation by Black Holes* menerangkan bahwa lubang hitam memancarkan radiasi seperti benda hitam (*blackbody*) dengan temperatur terbatas. Suhu ini berbanding terbalik dengan masa lubang hitam, sehingga sulit untuk mengamati radiasi ini jika massa lubang hitam sangat besar. Kajian termodinamika lubang hitam sebagai objek dengan suhu ini sangat penting dalam ilmu fisika karena berkaitan dengan perubahan entropi lubang hitam selama radiasi berlangsung. Kajian tentang hal ini masih aktif dilakukan karena masih banyak yang belum dapat dijelaskan dalam radiasi lubang hitam (Simbolon 2017).

Dalam paper tersebut Hawking (1993) telah menerapkan kuatitas besaran termodinamika untuk kasus lubang hitam, sedangkan dalam karya tulis ini akan dicari besaran termodinamika menggunakan medan Einstein yang termodifikasi dengan $f(R)$ teori dengan mempertimbangkan nilai koreksi pada persamaan medan Einstein dalam Teori Relativitas Umum. Jenis modifikasi persamaan medan Einstein yang dipilih menggunakan teori $f(R)$ disebabkan termodinamika lubang hitam yang erat hubungannya dengan luasan event horizon yang merupakan unsur geometri ruang waktu relativitas umum. Solusi untuk kondisi vakum telah banyak dibahas pada beberapa penelitian lain, dalam penelitian ini akan dibahas solusi terkait lubang hitam Reissner-Nordstrom dengan pertimbangan kehadiran materi yang disebabkan oleh muatan lubang hitam sehingga menghadirkan elektromagnetik disekitar lubang hitam.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan diangkat dalam karya tulis ini mencakup:

1. Bagaimanakah bentuk persamaan medan Einstein dalam teori $f(R)$ yang didapatkan dari modifikasi aksi Hilbert?
2. Bagaimanakah solusi persamaan metrik lubang hitam Reissner-Nordstrom dalam teori $f(R)$?
3. Bagaimanakah temperatur dan entropi lubang hitam Reissner-Nordstrom dalam teori $f(R)$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dijabarkan di atas, berikut adalah tujuan dari karya tulis ini:

1. Untuk mendapatkan bentuk persamaan medan Einstein dalam teori $f(R)$ yang didapatkan dari modifikasi aksi Hilbert.
2. Untuk mendapatkan solusi persamaan metrik lubang hitam Reissner-Nordstrom dalam teori $f(R)$.
3. Untuk mendatkan temperatur dan entropi lubang hitam dalam teori $f(R)$.

1.4 Batasan Masalah

Batasan penelitian ini adalah analisis model teori $f(R)$ yang meliputi: bentuk medan Einstein termodifikasi model kasus $R + \alpha R^2$, solusi persamaan metrik Reissner-Nordström dan nilai besaran termodinamika yang meliputi massa, temperatur dan entropi.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat kepada masyarakat terutama dibidang fisika teori dan dapat digunakan sebagai referensi untuk melakukan penelitian selanjutnya khususnya di bidang inflasi kosmik. Penelitian selanjutnya yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan beberapa model teori $f(R)$ yang berbeda sebagai variasi nilai kelengkungan medan.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Medan Einstein

Hukum gerak Newton diperkenalkan pertama kali pada tahun 1687 dalam sebuah jurnal yang ditulis oleh Isaac Newton dan berhasil menjelaskan tentang gerak sebuah benda dengan kelajuan rendah, sayangnya teori ini tidak berhasil menjelaskan gerak benda dengan kelajuan tinggi. Teori relativitas khusus yang diperkenalkan oleh Einstein pada tahun 1905 berhasil menjawab hal tersebut dengan baik.

Hukum gerak Newton juga tidak dapat menjelaskan terkait dinamika gerak berkelajuan tinggi yang dari sini tercetuskan teori relativitas umum dengan dua asas pentingnya, yakni:

- Asas kesetaraan (*principle of equivalence*): Tidak ada percobaan yang dapat dilakukan di daerah kecil (lokal) yang dapat membedakan medan gravitasi dengan sistem dipercepat yang setara.
- Asas kovariansi umum (*principle of general covariance*): Hukum alam memiliki bentuk yang tetap terhadap sembarang pemilihan transformasi koordinat (Gautama 2020).

Hukum gerak Newton menyatakan bahwa besarnya gaya yang diterima sebuah benda yang diam bernilai sama dengan hasil kali masa inersia dan percepatannya.

$$\vec{F} = m_I a \tag{2.1}$$

Berdasarkan asas kesetaraan, gravitasi diyakini sebagai properti alam semesta yang melengkungkan ruang dan waktu karena kehadiran materi. Semakin masif materi tersebut, maka ruang dan waktu yang berada disekitarnya akan semakin melengkung. Materi melengkungkan ruang-waktu disekitarnya, dan kelengkungan ruang waktu menentukan pergerakan materi di dalamnya. Einstein memperkenalkan persamaan medan Einstein untuk memberikan hubungan untuk kehadiran materi dan kelengkungan ruang-waktu tersebut.

Berdasarkan analisa Newton, energi dan masa harus memberikan hasil yang setara. Sekalipun energi tersebut tidak memiliki masa diam, seperti medan listrik dan radiasi, harus memberikan efek yang sama. Kehadiran masa dan energi tersebut menyebabkan kelengkungan ruang-waktu yang dari sini disebut sebagai gravitasi.

Dibutuhkan sebuah persamaan yang memberikan hubungan antara kelengkungan ruang-waktu (geometri) dengan sebab kehadiran materi. Untuk mendapatkan persamaan tersebut, sebuah tensor dengan kontribusi materi dan energi yakni tensor rank dua $T_{\mu\nu}$ dan tensor gravitasi yang mewakili geometri diberikan oleh $G_{\mu\nu}$. Persamaan yang didapatkan dari menghubungkan dua tensor tersebut harus memiliki sifat korespondensi, di mana jika persamaan tersebut direduksi akan didapatkan persamaan Newton untuk benda non-relativistik.

Persamaan medan Einstein bisa diturunkan dari persamaan aksi terkecil. Aksi yang paling umum untuk relativitas umum dalam vakum menggunakan aksi Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{g} \frac{1}{2\kappa} R \quad (2.2)$$

Jika mempertimbangkan kehadiran medan materi, maka aksi umumnya dapat dituliskan sebagai

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left(\frac{1}{2\kappa} L_{EH} + L_M \right) \quad (2.3)$$

Dimana $g = |\det(g_{\mu\nu})|$ dan Einstein-Hilbert serta lagrangian materi diberikan

$$L_{EH} = R \quad L_M = L(\psi, \partial_\mu \psi; g_{\mu\nu}) \quad (2.4)$$

Pada persamaan di atas ψ dilambangkan sebagai medan materi dan $\kappa = 8\pi G$, dimana G adalah konstanta gravitasi Newton dan $c = \hbar = 1$

Selanjutnya akan ditinjau dengan rinci derivasi persamaan Einstein. Untuk mendapatkan persamaan Relativitas Umum dari aksi (2.3) perlu mengitung variasi aksi yang sehubungan dengan tensor metrik.

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

Diasumsikan bahwa kedua variasi metrik di atas untuk turunan pertamanya akan musnah pada batas $\partial\Sigma$ (dimana Σ merupakan hipervolume pada manifold ruang-waktu)

$$\delta g_{\mu\nu} \Big|_{\partial\Sigma} = 0, \quad \delta(\partial_\mu g_{\mu\nu}) \Big|_{\partial\Sigma} = 0 \quad (2.6)$$

Variasi orde pertama untuk aksi (2.3) Einstein-Hilbert adalah

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left(\delta(\sqrt{g})g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{g}\delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}) \right) \quad (2.7)$$

Mengoperasikan prinsip variasi pada kedua ruas, maka akan dihasilkan bentuk variasi pada persamaan aksi sebagai berikut

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} = & \int d^4x \sqrt{g} \left\{ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right\} \delta g^{\mu\nu} + \\ & \int d^4x \sqrt{g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{g} \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\nu) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Integral akhir dari relasi (2.8) dapat ditransformasikan menjadi integral permukaan melalui teorema Gauss-Stokes dapat dipertimbangkan hasil akhir untuk variasi S_{EH} dapat ditulis sebagai

$$\delta S_{EH} = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right\} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.9)$$

Setelah menghitung integral variasi $\delta S_{EH} / \delta g^{\mu\nu}$ dan mengaturnya ke nol, pada akhirnya mendapat persamaan gravitasi Einstein untuk ruang vakum

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (2.10)$$

Untuk bagian yang tersisa, mari analisis persamaan aksi (2.3) secara keseluruhan yang juga dapat ditulis

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \mathcal{S}_{EH} + \mathcal{S}_M = \int d^4x \left(\frac{1}{2\kappa} \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_M \right) \quad (2.11)$$

Di mana \mathcal{L}_{EH} dan \mathcal{L}_M adalah densitas lagrangian yang diberikan

$$\mathcal{L}_{EH} = \sqrt{g}\mathcal{L}_{EH} \quad \mathcal{L}_M = \sqrt{g}\mathcal{L}_M \quad (2.12)$$

Menvariasikan aksi (2.11) sehubungan dengan invers metrik, mendapatkan

$$\frac{1}{2\kappa} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad (2.13)$$

Telah melihat bahwa suku pertama dari relasi di atas memberikan tensor Einstein $G_{\mu\nu}$ yang didefinisikan oleh (2.9) atau (2.10) sebagai

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.14)$$

Membandingkan (2.13) dengan persamaan Einstein lengkap

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

Dapat memrikan definisi untuk tensor stress-energi momentum sebagai fungsi dari metrik dan lagrangian materi

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.16)$$

Dapat dibuktikan bahwa tensor stress-energi momentum (2.16) dapat memenuhi kepatutan yang diperlukan dari tensor energi-momentum (Sporea 2014).

2.2 Lubang Hitam

Lubang hitam merupakan sebuah tempat di luar angkasa dengan gravitasi yang sangat kuat sehingga tidak ada benda yang dapat terlepas dari tarikannya bahkan cahaya sekalipun. Black hole terbentuk setelah sebuah bintang kehabisan energi dan bahan bakarnya, sehingga inti bintang akan jatuh.

Di dalam Al Quran, penjelasan tentang lubang hitam dapat dikaji dalam surah At-Takwir ayat 15-16.

فَلَا أُقْسِمُ بِالْخُنَّسِ ۝ الْجَوَّارِ الْكُنَّسِ ۝

Artinya: “*Aku bersumpah demi bintang tersembunyi. Yang bergerak cepat yang menyapu.*” (QS. At-Takwir (81): 15-16).

Penyebutan bintang dalam ayat ini diikuti dengan tiga sifat yang sangat bersesuaian dengan sifat dari lubang hitam. Sifat pertama adalah tersembunyi, seperti yang diketahui lubang hitam memiliki medan gravitasi yang sangat besar sehingga keberadaannya tidak mudah untuk diketahui, salah satu indikasi keberadaannya dapat dilihat dari kehadiran materi disekitar lubang hitam. Sifat yang kedua adalah bergerak dengan cepat, dimana pergerakan lubang hitam yang kita ketahui juga memiliki pergerakan demikian dan yang terakhir adalah sifat menyapu, sesuai dengan dampak dari besarnya medan gravitasi lubang hitam yang membuat lubang hitam mampu menyerap segala materi yang dilewatinya.

Dari penjelasan tersebut, lubang hitam secara garis besar terdiri dari empat jenis, yakni lubang hitam tidak bermuatan dan tidak berotasi (Schwarzschild), lubang hitam bermuatan dan tidak berotasi (Reissner-Nordstrom), lubang hitam berotasi (Kerr) dan lubang hitam bermuatan dan berotasi (Kerr-Newman).

2.2.1 Lubang Hitam Schwarzschild

Menurut Frolov & Novikov dalam Triyanta (2014) menyatakan bahwa lubang hitam didefinisikan sebagai suatu daerah di ruang-waktu dengan medan gravitasi yang sangat kuat sehingga cahaya pun tidak dapat lolos. Lubang hitam terbentuk dari runtuhnya objek bermassa M yang memiliki ukuran lebih kecil dari radius Schwarzschild.

Persamaan medan Einstein dituliskan (Gautama 2020):

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

Dimana $G_{\mu\nu}$ adalah *tensor Einstein*, kemudian $T_{\mu\nu}$ adalah tensor energi momentum, $R_{\mu\nu}$ untuk tensor Ricci dan R skalar Ricci. Solusi Schwarzschild adalah solusi persamaan medan Einstein untuk ruang waktu vakum disekitar objek massif yang statik simetri bola. Dikatakan statik karena benda tidak bergantung waktu, sehingga medannya pun tak bergantung waktu. Dikatakan spiral jika tidak bergantung pada suku θ dan φ .

Dimulai dari ruang waktu datar Minkowski dengan elemen garisnya berupa:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.18)$$

Diperkenalkan koordinat bola dengan mengubah variabelnya dan didapatkan elemen garisnya:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \quad (2.19)$$

Bentuk umum dari metrik ruang waktunya adalah,

$$ds^2 = e^{2\alpha(r,t)}c^2dt^2 - e^{2\beta(r,t)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \quad (2.20)$$

Dimana $\alpha(r,t)$ dan $\beta(r,t)$ adalah dua fungsi yang ditentukan oleh persamaan Einstein. Bentuk metrik di atas didapatkan dari hasil asumsi coba-coba atau yang biasa disebut ansatz. Berdasarkan bentuk metrik di atas, dapat dituliskan tensor kovarian ruang waktu simetri bola:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\beta(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Dengan determinan metrik,

$$\begin{aligned} g &= \det(g_{\mu\nu}) \\ &= -e^{2(\alpha+\beta)}r^4\sin^2\theta \end{aligned} \quad (2.22)$$

Untuk tensor kontravariannya dituliskan,

$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2\alpha(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\beta(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Selanjutnya bisa dicari simbol Christoffel dari metrik tersebut. Definisi dari simbol Christoffel sendiri ialah,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right) \quad (2.24)$$

Karena metrik yang digunakan merupakan metrik diagonal, maka simbol Christoffel akan bernilai jika komponen indeksnya $\alpha = \beta$, maka persamaan di atas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right) \quad (2.25)$$

Nilai simbol Christoffel yang tidak nol akan didapatkan dengan syarat berikut:

1. Suku pertama dalam kurung tidak nol, jika $\nu \neq \mu = \alpha$
2. Suku kedua dalam kurung tidak nol, jika $\mu \neq \nu = \alpha$
3. Suku ketiga dalam kurung tidak nol, jika $\alpha \neq \mu = \nu$
4. Ketika $\alpha = \mu = \nu$

Syarat pertama dan kedua didapatkan karena sifat simetri dari simbol Christoffel yang dituliskan dalam hubungan:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} \quad (2.26)$$

Maka untuk nilai simbol Christoffel yang tidak nol adalah sebagai berikut:

Untuk $\nu \neq \mu = \alpha$ dan simetrinya $\mu \neq \nu = \alpha$, maka $\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\mu} \partial_{\nu} g_{\mu\mu}$

$$\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \partial_r e^{2\alpha} = \alpha' \quad (2.27)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2} e^{-2\beta} \partial_t e^{2\beta} = \dot{\beta} \quad (2.28)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2r^2} \partial_r r^2 = \frac{1}{r} \quad (2.29)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \partial_r r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{r} \quad (2.30)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \partial_\theta r^2 \sin^2 \theta = \cot \theta \quad (2.31)$$

Untuk $\alpha \neq \mu = \nu$, maka $\Gamma_{\mu\mu}^\alpha = -\frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \partial_\alpha g_{\mu\mu}$

$$\Gamma_{11}^0 = -\frac{1}{2} e^{-2\alpha} \partial_t (-e^{2\beta}) = \dot{\beta} e^{2(\beta-\alpha)} \quad (2.32)$$

$$\Gamma_{00}^1 = -\frac{1}{2} (-e^{-2\beta}) \partial_r e^{2\alpha} = a' e^{2(\alpha-\beta)} \quad (2.33)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} e^{-2\beta} \partial_r r^2 = -r e^{-2\beta} \quad (2.34)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{1}{2} e^{-2\beta} \partial_r r^2 \sin^2 \theta = -r \sin^2 \theta e^{-2\beta} \quad (2.35)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{2r^2} \partial_\theta r^2 \sin^2 \theta = -\sin \theta \cos \theta \quad (2.36)$$

Untuk $\alpha = \mu = \nu$, maka $\Gamma_{\mu\mu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\mu} \partial_\mu g_{\mu\mu}$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \partial_t e^{2\alpha} = \dot{\alpha} \quad (2.37)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} e^{-2\beta} \partial_r e^{2\beta} = \beta' \quad (2.38)$$

Setelah didapatkan nilai dari simbol Christoffel yang tidak nol, dapat dicari Ricci tensornya dengan menggunakan persamaan,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \quad (2.39)$$

Dengan sifat kesimetriannya, didapatkan tensor Ricci yang tidak nol adalah:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{\alpha 0}^\alpha + \Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha 0}^\beta \Gamma_{0\beta}^\alpha \\ &= (\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2) + e^{2(\alpha-\beta)} \left\{ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \right\} \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} R_{01} &= \partial_\alpha \Gamma_{01}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{\alpha 1}^\alpha + \Gamma_{01}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha 1}^\beta \Gamma_{0\beta}^\alpha \\ &= \dot{\beta} \left(\alpha' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) - \dot{\beta} e^{2(\alpha-\beta)} \alpha' \dot{\beta} e^{2(\alpha-\beta)} \\ &= \frac{2\dot{\beta}}{r} \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$R_{11} = \partial_\alpha \Gamma_{11}^\alpha - \partial_1 \Gamma_{\alpha 1}^\alpha + \Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha 1}^\beta \Gamma_{1\beta}^\alpha \quad (2.42)$$

$$= -e^{2(\alpha-\beta)}(\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2) + \left\{ -\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\beta'}{r} + \alpha'\beta' \right\}$$

$$R_{22} = \partial_\alpha \Gamma_{22}^\alpha - \partial_2 \Gamma_{\alpha 2}^\alpha + \Gamma_{22}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha 2}^\beta \Gamma_{2\beta}^\alpha \quad (2.43)$$

$$= -e^{-2\beta}(\alpha'r - \beta'r + 1) + 1$$

$$R_{33} = \partial_\alpha \Gamma_{33}^\alpha - \partial_3 \Gamma_{\alpha 3}^\alpha + \Gamma_{33}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha 3}^\beta \Gamma_{3\beta}^\alpha \quad (2.44)$$

$$= -\sin^2\theta e^{-2\beta}(\alpha'r - \beta'r + 1) + \sin^2\theta$$

$$= \sin^2\theta R_{22}$$

Dapat ditentukan skalar Riccinya adalah:

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = e^{-2\alpha} R_{00} - e^{-2\beta} R_{11} - \frac{1}{r^2} \left(R_{22} + \frac{\sin^2\theta R_{22}}{\sin^2\theta} \right) \quad (2.45)$$

$$= 2e^{-2\beta} \left[\alpha'' - \alpha'\beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{2}{r^2} + 2e^{2(\alpha-\beta)}(\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2)$$

Dengan menerapkan syarat static pada persamaan, suku yang diturunkan terhadap waktu akan dihilangkan, maka nilai tensor Ricci dan skalar Riccinya menjadi:

$$R_{00} = e^{2(\alpha-\beta)} \left\{ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \right\} \quad (2.46)$$

$$R_{11} = -\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} + \alpha'\beta' \quad (2.47)$$

$$R_{22} = -e^{-2\beta}(a'r - \beta'r + 1) + 1 \quad (2.48)$$

$$R_{33} = \sin^2\theta R_{22} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = 2e^{-2\beta} \left[\alpha'' - \alpha'\beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{2}{r^2} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Substitusikan hasil yang didapat pada persamaan medan Einstein.

Dituliskan kembali persamaan medan Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Maka, untuk G_{00} adalah,

$$\begin{aligned} G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} \\ &= \frac{2\beta'e^{2(\alpha-\beta)}}{r} - \frac{e^{2(\alpha-\beta)}}{r^2} + \frac{e^{2\alpha}}{r^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Untuk komponen G_{11} adalah:

$$\begin{aligned} G_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} \\ &= \frac{2\alpha'}{r} - \frac{e^{2\beta}}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Untuk komponen G_{22} adalah:

$$\begin{aligned} G_{22} &= R_{22} - \frac{1}{2}Rg_{22} \\ &= r^2e^{-2\beta} \left(\alpha'' - \alpha'\beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Untuk komponen G_{33} adalah:

$$\begin{aligned}
G_{33} &= R_{33} - \frac{1}{2}Rg_{33} \\
&= G_{22} \sin^2 \theta \\
&= r^2 e^{-2\beta} \left(\alpha'' - \alpha' \beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} \right) \sin^2 \theta = 0
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Geometri ruang-waktu harus tereduksi menjadi ruang waktu Minkowski untuk jarak yang sangat jauh dari massa sumber karena disebabkan oleh pengaruh gravitasi yang melemah. Maka dari itu, dengan mempertimbangkan syarat asimtotik untuk $r \gg$ maka $g \rightarrow \eta$, persamaan diatas memberikan $\beta = -\alpha$. Substitusikan pada persamaan di atas, menjadi:

$$2\alpha' e^{2\alpha} r + e^{2\alpha} = 1 \tag{2.55}$$

Karena $e^{2\alpha} + 2\alpha' e^{2\alpha} r = \frac{\partial}{\partial r} (r e^{2\alpha})$, maka

$$\begin{aligned}
r e^{2\alpha} &= \int dr = r - r_s \\
e^{2\alpha} &= 1 - \frac{r_s}{r}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Di mana r_s adalah sebuah tetapan integrasi berdimensi panjang yang belum diketahui nilainya dengan mesubstitisikan $\beta = -\alpha$ dan $e^{2\alpha}$ dalam ansatz pada persamaan di atas akan diperoleh:

$$ds^2 \equiv c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{2.57}$$

Metrik di atas dikenal sebagai metrik Schwarzschild yang memberikan geometri ruang di sekitar ruang massif simetri bola. Meskipun pada daerah terluar nilai tensor energi momentumnya sama dengan nol atau vakum, namun terdapat

induksi medan gravitasi dari sumber melengkung ruang di sekelilingnya. Dalam limit medan lemah, persamaan medan Einstein dapat didekati dengan metrik Minkowski dan akan memenuhi persamaan gravitasi Newton, menggunakan pendekatan perturbasi orde pertama

$$g_{00} \cong (1 + 2\Phi/c^2) \quad (2.58)$$

Dengan $\Phi = -\frac{2GM}{c^2}$ ialah potensial gravitasi Newton. Membandingkan persamaan dan persamaan maka didapatkan nilai dari kuantitas r_s

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.59)$$

Penyelesaian solusi untuk persamaan medan vakum dapat dilakukan tanpa mensubstitusikan nilai dari $R_{\mu\nu}$ dan \mathcal{R} . Kondisi vakum menunjukkan bahwa nilai tensor Ricci bernilai nol pada kasus ruang vakum $T_{\mu\nu} = 0$ jadi hanya perlu memilih persamaan-persamaan dari syarat $R_{\mu\nu} = 0$ untuk dapat mengetahui $e^{2\alpha}$ dan $e^{2\beta}$. Dipilih R_{00} , R_{11} dan R_{22} untuk daerah eksterior.

$$e^{2(\alpha-\beta)} \left\{ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \right\} = 0 \quad (2.60)$$

$$-\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} + \alpha'\beta' = 0 \quad (2.61)$$

$$-e^{-2\beta} (\alpha'r - \beta'r + 1) + 1 = 0 \quad (2.62)$$

Menjumlahkan persamaan (2.60) dan (2.61)

$$\frac{2}{r}(\alpha' + \beta') = 0 \rightarrow \beta' = -\alpha' \quad (2.63)$$

Menyulihkan persamaan (2.55) dan (2.56)

$$e^{2\alpha}(2\alpha'r + 1) - 1 = 0 \quad (2.64)$$

Diperoleh hasil yang sama dengan (2.55) sehingga didapatkan kembali hasil dari $e^{2\alpha} = 1 - r_s/r$.

Pada akhirnya dituliskan metrik Schwarzschild sebagai berikut:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.65)$$

2.2.2 Lubang Hitam Reissner-Nördstrom

Solusi Reissner-Nordstrom merupakan solusi medan Einstein yang menggambarkan ruang waktu di luar sebuah bola pejal statik bermasa M dan bermuatan Q . Lubang hitam sendiri dapat dibedakan berdasarkan massa, momentum sudut dan muatan listrik adalah juga sifat alamiah yang menghilangkan informasi yang masuk padanya. Keadaan tersebut dikenal sebagai teorema “*no-hair*”, berlaku untuk semua lubang hitam yang merupakan solusi dari persamaan medan Einstein-Maxwell tentang gravitasi dan elektromagnetik dalam teori relativitas umum. Nilai dari tensor energi momentum dalam kasus ini tidaklah nol dikarenakan kehadiran medan lain (Bernard 2017).

Persamaan Einstein-Maxwell dapat diturunkan dari persamaan aksi,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (2.66)$$

Dengan g adalah determinan metrik $g_{\mu\nu}$, R adalah skalar Ricci dalam dan $F_{\mu\nu}$ adalah tensor kuat medan dalam ruang melengkung yang dituliskan sebagai

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \quad (2.67)$$

Menvariasi aksi pada persamaan terhadap $g^{\mu\nu}$ menghasilkan persamaan medan Einstein-Maxwell

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.68)$$

Dimana $G_{\mu\nu}$ adalah tensor Einstein yang mempresentasikan bentuk geometri runag waktu dan $T_{\mu\nu}$ adalah tensor energi-momentum yang mepresentasikan kehadiran materi. Dari persamaan di atas didapatkan hubungan fisis antara geometri dan kehadiran materi. Secara fisis persamaan di atas menggambarkan kesesuaian bentuk geometri dan kehadiran materi.

Untuk perumusan medan elektrovakum simetri bola bisa dimulai dari pemilihan ansatz metrik simetri bola,

$$ds^2 = e^{2\alpha(r)} c^2 dt^2 - e^{2\beta(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.69)$$

Dan determinan metriknya,

$$\sqrt{-g} = e^{\alpha+\beta} r^2 \sin\theta \quad (2.70)$$

Jika sumber memiliki muatan total Q , maka berdasarkan hukum Coulomb terdapat medan listrik pada jarak r sebesar

$$E_1 = -\partial_1 V \quad (2.71)$$

Dengan hubungan pada persamaan (2.71) komponen tensor kuat medan yang tidak nol dapat disajikan dalam bentuk tensor kovarian

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & 0 & 0 \\ -E_1/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

Karena tensor metriknya berbentuk diagonal maka dengan mudah didapatkan $F^{\mu\nu} = g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} F_{\mu\nu}$, menggunakan persamaan Maxwell dalam vakum

$$(F^{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\mu} = (g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} F_{\mu\nu} \sqrt{-g})_{,\mu} = 0 \quad (2.73)$$

Untuk komponen $F_{10} = -F_{01}$, diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{E_1}{c} e^{\alpha+\beta} r^2 \sin \theta \right) = 0 \quad (2.74)$$

Kedua ruas diintegrasikan terhadap r , didapatkan

$$E_1 e^{-(\alpha+\beta)r^2} = C \rightarrow E_1 = \frac{C}{r^2} e^{(\alpha+\beta)} \quad (2.75)$$

C adalah sebuah tetapan yang tidak bergantung pada t ataupun r . Jika ditinjau dari jarak yang sangat jauh dari sumber, maka efek kelengkungan sangat kecil hingga daerah itu dapat didekati dengan ruang Minkowski

$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{\alpha(r)+\beta(r)} = 1$, maka medan listrik simetri bola dalam ruang Minkowski diketahui berbentuk

$$E_1^{(\text{Min})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{k_c Q}{r^2} \quad (2.76)$$

Maka dari syarat batas asimtotik, diketahui $C = k_c Q$, sehingga diperoleh tensor medan elektrovakum simetri bola,

$$F_{\mu\nu} = k_c \begin{pmatrix} 0 & Qe^{(\alpha+\beta)}/cr^2 & 0 & 0 \\ -Qe^{(\alpha+\beta)}/cr^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

Untuk perumusan metrik Reissner-Nordstrom dapat dimulai dengan meninjau komponen 00 dari tensor stress-energi momentum elektromagnetik. Tensor stress-energi momentum dituliskan

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F_{\mu\rho} F_{\alpha\nu} g^{\rho\alpha} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \quad (2.78)$$

Untuk komponen 00 dapat dituliskan

$$T_{00} = \frac{1}{\mu_0} \left(F_{01} F_{10} g^{11} + \frac{1}{4} g_{00} (F_{01} F^{01} + F_{10} F^{10}) \right) \quad (2.79)$$

Substitusikan nilai $F_{\mu\nu}$ dan $F^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{1}{\mu_0} \left\{ \left(\frac{k_c Q e^{(\alpha+\beta)}}{cr^2} \right) \left(-\frac{k_c Q e^{(\alpha+\beta)}}{cr^2} \right) (-e^{-2\beta}) - \frac{1}{4} e^{2\alpha} \cdot 2e^{-2(\alpha+\beta)} \left(\frac{k_c Q e^{(\alpha+\beta)}}{cr^2} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{e^{2\alpha}}{\mu_0} \left\{ \left(\frac{k_c Q}{cr^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_c Q}{cr^2} \right)^2 \right\} = \frac{e^{2\alpha}}{2\mu_0} \left\{ \left(\frac{k_c Q}{cr^2} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Konstanta k_c memenuhi nilai $1/4\pi\epsilon_0$ dan $\pi_0\epsilon_0 = 1/c^2$, maka akan diperoleh nilai dari tensor stress-energi momentum untuk komponen 00 adalah

$$T_{00} = \frac{e^{2\alpha}}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^4} \quad (2.81)$$

Bentuk ruas kiri untuk persamaan medan simetri sudah didapatkan pada perhitungan sebelumnya serta disajikan tensor stress-energi momentum untuk medan elektrovakum. dapat mensubstitusikan komponen 00 pada persamaan medan Einstein:

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}\mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00} \quad (2.82)$$

Menyulihkan tensor dan skalar Ricci metrik sietri bola dari persamaan di ruas kiri dengan syarat asimtotik Minkowski $\beta = -\alpha$ serta persamaan pada ruas kanan, maka akan diperoleh:

$$-\frac{2\alpha'e^{4\alpha}}{r} - \frac{e^{4\alpha}}{r^2} + \frac{e^{2\alpha}}{r^2} = \frac{GQ^2}{4\pi c^4\epsilon_0} \frac{e^{2\alpha}}{r^4} \quad (2.83)$$

$$e^{2\alpha} + 2\alpha're^{2\alpha} = 1 - \frac{GQ^2}{4\pi c^4\epsilon_0 r^2} \quad (2.84)$$

Mengetahui bahwa $e^{2\alpha} + 2\alpha're^{2\alpha} = \frac{\partial}{\partial r}(re^{2\alpha})$, maka

$$re^{2\alpha} = \int \left(1 - \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) dr = r + \frac{GQ^2}{4\pi c^4\epsilon_0 r} + C \quad (2.85)$$

$$e^{2\alpha} = 1 + \frac{C}{r} + \frac{GQ^2}{4\pi c^4\epsilon_0 r^2}$$

Dengan C adalah tetapan integrasi. Substiusikan persamaan pada ansatz didapatkan

$$ds^2 = \left(1 + \frac{C}{r} + \frac{GQ^2}{4\pi c^4 \epsilon_0 r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{C}{r} + \frac{GQ^2}{4\pi c^4 \epsilon_0 r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.86)$$

Mengingat untuk limit $Q = P \rightarrow 0$, maka persamaan di atas haruslah tereduksi menjadi metrik Schwarzschild, sehingga diperoleh $C = -\frac{2GM}{c^2} = -r_s$.

Menuliskan $\frac{GQ^2}{4\pi c^4 \epsilon_0} \equiv r_Q^2$, solusi di atas dapat dituliskan kembali ke dalam bentuk

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.87)$$

Metrik di atas merupakan metrik Reissner-Nordstrom yang memberikan geometri ruang-waktu di sekitar sumber massif static simetri bola bermuatan.

Dengan mengamati bentuk metrik Reissner-Nordstrom, tampak bahwa metrik menunjukkan singularitas bila $\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) = 0$ oleh karena $ds \rightarrow -\infty$.

Singularitas ini muncul pada

$$r = \begin{cases} 0 \\ r_{H-} = \frac{r_s}{2} - \sqrt{\frac{r_s^2}{4} - r_Q^2} \\ r_{H+} = \frac{r_s}{2} + \sqrt{\frac{r_s^2}{4} - r_Q^2} \end{cases}$$

Bila $r_Q \leq r_s/2$. Adapun jika $r_Q > r_s/2$, maka lubang hitam Reissner-Nordstrom tidak memiliki solusi horizon yang memungkinkan pengamat luar dapat melihat singularitas dalam lubang hitam (*naked singularity*).

Kesesuaan antara geometri dan kehadiran materis sudah dengan jelas diberikan pada persamaan (2.68), dapat membuktikan hal itu dengan

menentukan semua komponen yang tidak nol kemudian disulihkan pada persamaan (2.82).

Dengan unit $G = c = 4\pi\epsilon_0 = 1$, maka metrik di atas dapat dituliskan kembali menjadi

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.88)$$

Metrik di atas memiliki vector potensial $[A_\mu] = A_0, A_1, A_2, A_3$ dengan $A_0 = -\frac{Q}{r}$ dan $A_i = 0$ untuk $i = 1, 2, 3$

Untuk simbol Christoffel yang tidak nol berdasarkan metrik tersebut adalah

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{Mr - Q^2}{r\Delta}, \Gamma_{00}^0 = \frac{(Mr - Q^2)\Delta}{r^5}, \quad (2.89)$$

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{Mr - Q^2}{r\Delta}, \Gamma_{22}^1 = -\frac{\Delta}{r}, \quad (2.90)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{\Delta \sin^2 \theta}{r}, \Gamma_{12}^2 = r^{-1}, \quad (2.91)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \Gamma_{23}^3 = \cot \theta \quad (2.92)$$

Dengan

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 \quad (2.93)$$

Kemudian untuk tensor Ricci yang tidak nol didapatkan

$$R_{00} = -\frac{\Delta Q^2}{r^6}, \quad (2.94)$$

$$R_{11} = \frac{Q^2}{\Delta r^2} \quad (2.95)$$

$$R_{22} = -\frac{Q^2}{r^2} \quad (2.96)$$

$$R_{33} = -\frac{Q^2 \sin^2 \theta}{r^2} \quad (2.97)$$

Sedangkan untuk skalar Riccinya bernilai nol

$$\mathcal{R} = 0 \quad (2.98)$$

Sekarang dapat melanjutkan pekerjaan untuk mendapatkan komponen tensor Einstein

$$G_{00} = -\frac{\Delta Q^2}{r^6} \quad (2.99)$$

$$G_{11} = \frac{Q^2}{\Delta r^2} \quad (2.100)$$

$$G_{22} = -\frac{Q^2}{r^2} \quad (2.101)$$

$$G_{33} = -\frac{Q^2 \sin^2 \theta}{r^2} \quad (2.102)$$

Untuk melengkapi persamaan medan Einstein-Maxwell harus menemukan komponen tak nol untuk tensor stress energi momentum.

Dengan hubungan yang diberikan pada persamaan (2.67) serta mengingat turunan kovarian $\nabla_\alpha v_b = \partial_\alpha v_b - \Gamma_{ba}^c v_c$ dan sifat simetrik dari simbol Christoffel Γ_{ba}^c , maka persamaan tersebut dapat dituliskan dengan

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.103)$$

Dapat ditulis untuk nilai tensor kuat medan

$$F_{01} = -F_{10} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = -\frac{Q}{r^2} \quad (2.104)$$

Komponen-komponen matriks $[F_{\alpha\beta}]$ untuk medan Maxwell yang mengisi ruang waktu pada persamaan adalah

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -Q/r^2 & 0 & 0 \\ Q/r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

Didapatkan produk skalar $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = g^{\alpha c} g^{\beta d} F_{\alpha\beta} F_{cd} = -\frac{2Q^2}{r^4} \quad (2.106)$$

Sekarang dapat mencari nilai dari tensor energi momentum dengan menggunakan persamaan (2.78). Dan untuk komponen yang tidak nol adalah

$$T_{00} = -\left(\frac{1}{4\pi}\right) \frac{\Delta Q^2}{2r^6} \quad (2.107)$$

$$T_{11} = \left(\frac{1}{4\pi}\right) \frac{Q^2}{2\Delta r^2} \quad (2.108)$$

$$T_{22} = -\left(\frac{1}{4\pi}\right) \frac{Q^2}{2r^2} \quad (2.109)$$

$$T_{33} = -\left(\frac{1}{4\pi}\right) \frac{Q^2 \sin^2 \theta}{2r^2} \quad (2.110)$$

Jika mensubstitusikan persamaan (2.99) – (2.102) dan (2.107) – (2.110) ke dalam persamaan medan Einstein-Maxwell dapat dilihat bahwa seluruh komponen tensor Einstein dan tensor energi-momentum Maxwell ini memenuhi persamaan (2.68) (Bernard 2017).

2.2.3 Lubang Hitam Kerr

Lubang hitam Kerr merupakan bentuk lubang hitam yang tidak memiliki muatan tetapi berotasi. Solusi lubang hitam Kerr bisa didapatkan dengan Algoritma Newman-Janis langkah yang harus dilakukan adalah membentuk metrik Schwarzschild ke dalam koordinat null dengan menerapkan transformasi $u = t - r^*$ dengan r^* adalah koordinat *tortoise* yang diberikan oleh (Irawan 2016)

$$dr = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dr^* \quad (2.111)$$

Sehingga bentuk metrik Schwarzschild dengan ungkapan koordinat null menjadi:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) du^2 - 2du dr + r^2 d\Omega^2 \quad (2.112)$$

Tensor matrik untuk elemen garis tersebut adalah:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.113)$$

Dengan bentuk kontravariannya:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \left(1 - \frac{2m}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (2.114)$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) du^2 - 2du dr - 4mr a \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} du d\phi \quad (2.115)$$

$$+ 2a \sin^2 \theta dr d\phi + \rho^2 d\theta^2$$

$$- \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} (a^2 \sin^2 \theta \Delta - (r^2 + a^2)) d\phi^2$$

Dengan,

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.116)$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2mr \quad (2.117)$$

Pada persamaan (2.115) merupakan metrik Kerr yang didapatkan dari hasil transformasi pada tensor matrik (2.113) dan (2.114) yang menggambarkan masaa M yang berotasi. Parameter rotasinya ditunjukkan dengan adanya suku a yang sebanding dengan momentum sudut.

2.2.4 Lubang Hitam Kerr-Newman

Lubang hitam Kerr-Newman merupakan lubang hitam yang memiliki muatan serta berotasi. Solusi untuk lubang hitam Kerr-Newman merupakan generalisasi dari solusi persamaan Reissner-Nordstrom menggunakan Algoritma Newman-Janis. Metrik Reissner-Nordstrom ditransformasikan dengan menggunakan $u = t - r^*$, di mana r^* adalah tortoise koordinat yang memenuhi (Irawan 2016).

$$dr = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dr^* \quad (2.118)$$

Sehingga bentuk metrik Reissner-Nordstrom menjadi:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) du^2 - 2du dr + r^2 d\Omega^2 \quad (2.119)$$

Dengan tensor matriknya:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.120)$$

Dan bentuk kontravariannya:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (2.121)$$

Dengan mentransformasikan tensor matrik pada persamaan (2.120) dan (2.121) didapatkan solusi persamaan metrik lubang hitam Jerr Newman

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2mr - Q^2}{\rho^2}\right) du^2 - 2du dr \\ & - 2a \sin^2 \frac{(2mr - Q^2)\theta}{\rho^2} dud\phi \\ & + 2a \sin^2 \theta drd\phi + \rho^2 d\theta^2 \\ & - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} (a^2 \sin^2 \theta \Delta - (r^2 + a^2)d\phi^2) \end{aligned} \quad (2.122)$$

Elemen garis di atas menggambarkan bentuk lubang hitam berotasi dan bermuatan.

2.3 Teori $f(R)$

Upaya modifikasi untuk menyatukan relativitas umum dengan tiga gaya dasar yakni: elektromagnetik, gaya nuklir lemah dan gaya kuat memberikan sebuah bentuk modifikasi yang dikatakan paling sederhana yang dilakukan pada relativitas umum. Yakni dengan menambahkan invariant orde tinggi pada aksi standart Einstein-Hilbert yang mengarah pada sebuah teori gravitasi orde tinggi. Kelas teori tersebut yang disebut dengan $f(R)$ gravitasi yang diperoleh dari menambahkan nilai kelengkungan pada skalar Ricci dengan tujuan dapat

mempelajari evolusi alam semesta seperti hari ini tanpa memerlukan energi gelap atau pun materi gelap.

$$\mathcal{S}_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} R \right\} \quad (2.123)$$

Dengan cara tersebut

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) \quad (2.124)$$

Di mana $f(R)$ adalah fungsi arbitrary dari skalar Ricci R . Keadaan menarik dari tindakan ini ialah menggabungkan kesederhanaan matematis dengan cukup umum. Misalkan mengambil ekspansi deret dari f .

$$f(R) = \dots + \frac{a_2}{R^2} + \frac{a_1}{R} - 2\Lambda + R + b_2 R^2 + b_3 R^3 + \dots \quad (2.125)$$

Dimana a_i dan b_j adalah koefisien dengan dimensi yang sesuai.

Untuk mendapatkan persamaan medan Einstein, dapat menerapkan prinsip variasi pada aksi (2.124). Variasi tersebut dapat dilakukan dengan dua cara. Pendekatan yang paling mendasar adalah dengan bervariasi aksi \mathcal{S} sehubungan dengan tensor metrik $g^{\mu\nu}$ atau disebut juga sebagai formalisme metrik. Sedangkan variasi yang lainnya disebut sebagai variasi Palatini, di mana variasi aksi sehubungan dengan koneksi dan metrik jika mengasumsikan keduanya sebagai variable independen. Meski dengan cara yang berbeda, kedua jenis variasi tersebut memberikan hasil bentuk medan Einstein yang sama.

2.3.1 Formalisme Metrik

Berikut akan dijabarkan bentuk variasi menggunakan formalism metrik.

Aksi dalam formalism metrik terdiri dari dua persamaan

$$\mathcal{S}_{met} = \mathcal{S}_G(g_{\mu\nu}) + \mathcal{S}_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (2.126)$$

Di mana \mathcal{S}_M merupakan aksi dari materi dan ψ adalah medan dari materi.

Kemudian dapat menuliskan aksi total dalam $f(R)$ teori sebagai

$$\mathcal{S}_{met} = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \mathcal{S}_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (2.127)$$

Kerjakan terlebih dahulu untuk ruas pertama. Aksi untuk $f(R)$ teori tanpa kehadiran materi dituliskan sebagai

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) \quad (2.128)$$

Dilakukan prinsip variasi terhadap metrik $g^{\mu\nu}$ untuk aksi di atas didapatkan

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left((\delta \sqrt{-g}) f(R) + \sqrt{-g} \delta f(R) \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f \delta g^{\mu\nu} + f'(R) \delta R \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f \delta g^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + f'(R) [R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}] \right) \end{aligned} \quad (2.129)$$

Terlebih dahulu hitung suku $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ dengan menggunakan identitas berikut

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) \quad (2.130)$$

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = -\frac{1}{2}[g_{\lambda\mu}\nabla_\nu(\delta g^{\lambda\sigma}) + g_{\lambda\nu}\nabla_\mu(\delta g^{\lambda\sigma}) - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\nabla^\sigma(\delta g^{\alpha\beta})] \quad (2.131)$$

Secara berturut-turut didapatkan

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}(\nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)) \\ &= g_{\alpha\beta}\square(\delta g^{\alpha\beta}) - \nabla_\beta\nabla_\alpha(\delta g^{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (2.132)$$

Substitusikan pada persamaan (2.129) didapatkan (Sean.M 2004)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f\delta g^{\mu\nu} + f'(R)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right. \\ &\quad \left.+ f'(R)[g_{\alpha\beta}\square(\delta g^{\alpha\beta}) - \nabla_\beta\nabla_\alpha(\delta g^{\alpha\beta})]\right) \end{aligned} \quad (2.133)$$

Dengan menggunakan integral parsial untuk suku ketiga dan keempat, serta mengabaikan suku batas dan memasukkan unsur materi, serta mensyaratkan

$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$ maka persamaan aksinya menjadi

$$\begin{aligned} \delta S_{met} &= \int d^4x\sqrt{g}\left\{f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R)\right. \\ &\quad \left.+ g_{\mu\nu}\square f'(R) - \kappa T_{\mu\nu}\right\}\delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.134)$$

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square]f'R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.135)$$

Persamaan (2.135) merupakan persamaan Einstein yang baru di mana $\nabla^{\mu} \equiv d/dR$, ∇_{μ} adalah turunan kovarian standar yang didapatkan dari koneksi Levi-Civita dan $\square = \nabla^{\mu} \nabla_{\mu}$ adalah operator Laplace untuk empat dimensi.

Dapat dilihat bahwa persamaan Einstein yang baru merupakan persamaan diferensial orde empat dalam metrik $g_{\mu\nu}$. Dalam kasus tertentu, ketika $f'(R)$ adalah konstan, maka dua suku pada sisi kiri persamaan di atas akan lenyap. Jika $f'(R)$ adalah konstan maka $f(R)$ adalah fungsi linier dari R dan teorinya akan tereduksi menjadi Relativitas Umum biasa.

Trace dari persamaan (2.135) adalah

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\square f'(R) = \kappa T \quad (2.136)$$

Persamaan ini merupakan hubungan diferensial antara R dan T , bertentangan dengan aljabar pada relativitas umum, di mana $R + T = 0$. Persamaan (2.136) menunjukkan bahwa $f(R)$ teori dapat memiliki lebih banyak solusi dari pada teori klasik Einstein.

Persamaan (2.136) dengan $T = 0$ tidak selalu menyiratkan bahwa $R = 0$ atau R adalah konstan. Dari relativitas umum kita tahu bahwa skalar Ricci yang konstan akan memberikan solusi simetris maksimal. Dalam kasus $f(R)$ untuk $R = \text{konstan}$ dan $T_{\mu\nu} = 0$, persamaan di atas akan berkurang menjadi

$$f'(R)R - 2f(R) = 0 \quad (2.137)$$

Kemudian bentuk dari fungsi f akan memberikan bentuk dari solusi simetri maksimal, sebagai berikut: jika f dipilih sedemikian sehingga $R = 0$

adalah akar persamaan (2.137) dan kami memperkenalkan solusi ini pada persamaan (2.135) maka akan diperoleh $R_{\mu\nu} = 0$ dan ruang simetri maksimal adalah ruang-waktu Minkowski, ketikan bentuk f mengarah pada akar $R = \pm C$ untuk persamaan (2.137) berikut ini $R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}C/4$, kasus di mana solusi simetri maksimal adalah de Sitter (+C) atau anti de Sitter (-C) ruang waktu analog dengan relativitas umum ketikan konstanta kosmologi hadir.

Untuk mengakhiri sub bab ditulis ulang persamaan medan dari $f(R)$ teori dalam bentuk persamaan Einstein sebagai berikut:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \\ &= \frac{\kappa T_{\mu\nu}}{f'(R)} + g_{\mu\nu} \frac{f(R) - Rf'(R)}{2f'(R)} \\ &\quad + \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R)}{f'(R)} = \frac{\kappa}{f'(R)} \left[T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(eff)} \right] \end{aligned} \quad (2.138)$$

Kemudian diperkenalkan tensor stress-energi efektif

$$T_{\mu\nu}^{(eff)} \equiv \left[\frac{f(R) - Rf'(R)}{2} g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) \right] \quad (2.139)$$

2.3.2 Formalisme Palatini

Aksi yang digunakan dalam formalism ini sama dengan aksi yang digunakan pada formalism metrik, hanya saja tensor Reimann dan tensor Ricci dibangun dengan menggunakan koneksi independen. Persamaan aksi dapat ditulis (Sotiriou and Faraoni 2010):

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (2.140)$$

Menvariasikan aksi pada persamaan (2.140) secara independen sehubungan dengan metrik dan koneksi, masing-masing, dan menggunakan rumus

$$\delta R_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \bar{\nabla}_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \quad (2.141)$$

Menghasilkan

$$\begin{aligned} f'(R)R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} \\ = \kappa T_{\mu\nu}, -\bar{\nabla}_\lambda(\sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}) \\ + \bar{\nabla}_\sigma(\sqrt{-g}f'(R)g^{\sigma(\mu)}\delta_\lambda^{\nu)}) = 0 \end{aligned} \quad (2.142)$$

Didapatkan trace dari persamaan (2.142), menunjukkan

$$\bar{\nabla}_\sigma(\sqrt{-g}f'(R)g^{\sigma\mu}) = 0 \quad (2.143)$$

Dengan mengimplikasikan persamaan tersebut dapat dituliskan persamaan medan dengan bentuk:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = \kappa G T_{\mu\nu} \quad (2.144)$$

$$\bar{\nabla}_\lambda(\sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}) = 0 \quad (2.145)$$

2.3.3 Formalisme Metrik-Affine

Persamaan aksi untuk formalisme metrik Affine memiliki bentuk sebagai berikut (Sotiriou and Faraoni 2010):

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M(g_{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \psi) \quad (2.146)$$

Dengan bentuk persamaan medan yang dapat dituliskan:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.147)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} [-\bar{\nabla}_\lambda(\sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu}) + \bar{\nabla}_\sigma(\sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\sigma})\delta_\lambda^\nu] \\ + 2f'(R)g^{\mu\sigma}S_{\sigma\lambda}^\nu = \kappa \left(\Delta_\lambda^{\mu\nu} - \frac{2}{3}\Delta_\sigma^{\sigma[\nu}\delta_\lambda^{\mu]} \right) \end{aligned} \quad (2.148)$$

$$S_{\mu\sigma}^\sigma = 0. \quad (2.149)$$

2.4 Termodinamika lubang hitam

Lubang hitam merupakan objek besar yang memiliki medan gravitasi yang kuat sehingga cahaya pun tak dapat lepas darinya. Berdasarkan relativitas umum, lubang hitam hanya bisa menyerap materi dan ukurannya tidak berkurang, hingga Hawking mengemukakan bahwa lubang hitam memancarkan partikel termal dan dengan demikian menguap. Berdasarkan temuan tersebut, diusulkan terkait kuantitas termodinamika diantaranya entropi dan temperaturnya.

Empat hukum mekanika lubang hitam dalam teori relativitas umum Einstein sangat erat hubungannya dengan hukum termodinamika biasa. Kuantitas termodinamika lubang hitam adalah temperatur Hawking $T = k/2\pi$, entropi $S = A/4G$ dan energi E , dimana k adalah permukaan gravitasi, A luasan event

horizon dan $E = M$ adalah massa lubang hitam. Temperatur Hawking dan entropi saling berhubungan dengan identitas $TdS = dE$ yang juga disebut sebagai hukum pertama termodinamika lubang hitam. secara umum, hukum pertama termodinamika lubang hitam terkait dengan perubahan energi, dE ketika lubang hitam bervariasi dari keadaan diam ke keadaan diam lainnya dengan:

$$dE = \frac{k}{8\pi} dA + \text{syarat kerja, atau } dE = TdS + \text{syarat kerja} \quad (2.150)$$

"Istilah kerja" diberikan secara berbeda tergantung pada jenis lubang hitam. Untuk keluarga lubang hitam KerrNewman, hukum pertama termodinamika lubang hitam menyatakan bahwa terdapat perbedaan dalam massa M , luas cakrawala A , momentum sudut J , dan muatan listrik Q dari dua di dekatnya lubang hitam dihubungkan oleh $dM = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ$, dimana $\Omega = \frac{\partial M}{\partial J}$ adalah kecepatan sudut dan $\Phi = \frac{\partial M}{\partial Q}$ adalah muatan potensial.

Sifat termodinamika cakrawala lubang hitam dapat diperluas ke cakrawala ruangwaktu selain cakrawala lubang hitam. Misalnya, ruang waktu de Sitter dengan radius ℓ cakrawala peristiwa kosmologis. Cakrawala ini, seperti cakrawala lubang hitam, bisa dianggap sebagai sistem termodinamika yang terkait dengan suhu Hawking $T = 1/2\pi\ell$ dan entropi $S = A/4G$, di mana $A = 4\pi\ell^2$ adalah area cakrawala kosmologis. Untuk ruang de Sitter asimtotik, seperti ruang-waktu Schwarzschild-de Sitter, masih ada ruang kosmologis cakrawala yang berperilaku seperti cakrawala lubang hitam dengan entropi sebanding dengan luas cakrawala kosmologis dan suhu Hawkingnya diberikan oleh $T = k/2\pi$, di mana k adalah gravitasi permukaan cakrawala kosmologis. Sangat mudah untuk memverifikasi

bahwa cakrawala kosmologis dari ruang-waktu ini memenuhi hukum pertama termodinamika lubang hitam dalam bentuk $TdS = -dM$, di mana minus muncul karena fakta bahwa ketika massa lubang hitam M meningkat, radius cakrawala kosmologis berkurang. Dalam kerangka kerja ini, hukum pertama $TdS = -dE$ termodinamika horizon kosmologis tidak melibatkan istilah kerja juga. Dengan menerapkan yang pertama hukum termodinamika ($TdS = -dE$) terhadap horizon semu dari dimensi $(n + 1)$ alam semesta Friedman-Robertson-Walker (FRW) dan dengan menghitung aliran panas melalui cakrawala yang jelas dapat diturunkan Friedmann persamaan alam semesta FRW dengan kelengkungan spasial apa pun, di mana seseorang mengasumsikan bahwa horizon semu memiliki suhu dan entropi yang dinyatakan dengan

$$T = \frac{1}{2\pi\tilde{r}_A}, \quad S = \frac{A}{4G} \quad (2.151)$$

Dimana, A adalah luasan event horizon dengan radius \tilde{r}_A (Akbar dan Cai 2007).

2.5 Penelitian Terdahulu

Penelitian terdahulu yang dilakukan oleh Dombriz, Dobado dan Maroto (2009) dengan judul Black Hole in $f(R)$ Theory, dibahas tentang solusi lubang hitam statis simetri bola dengan beberapa kelengkungan konstan dan tanpa muatan listrik. Dibahas pula terkait besaran termodinamika lubang hitam dalam teori $f(R)$ yang memberikan hasil serupa dengan besaran termodinamika lubang hitam dalam relativitas umum standar.

Penelitian terdahulu yang dilakukan oleh S. Carlip (2015) dengan judul *Black Hole Thermodynamics*, di mana dalam penelitian ini dibahas tentang penemuan termodinamika lubang hitam serta meringkas beberapa cara independen untuk dapat memperoleh termodinamika lubang hitam dan (mungkin) mekanika statistik dari sifat lubang hitam. Hasil dari penelitian ini adalah sebuah pernyataan bahwa lubang hitam merupakan struktur paling sederhana dalam relativitas umum yang memiliki sistem sangat kompleks dan jumlah keadaan internal yang luar biasa sehingga dapat menejaskan tentang kelengkungan ruang waktu serta aproksimasi energi rendah. Namun sayangnya termodinamika lubang hitam masih belum mampu menjelaskan hubungan terkait gravitasi dan mekanika kuantum karena hilangnya informasi kuantum saat mendekati singularitas lubang hitam.

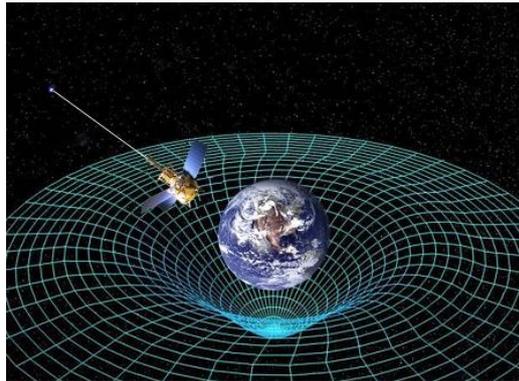
Penelitian selanjutnya yang dilakukan oleh Sudipta Sarkar (2019) dengan judul *Black Hole Thermodynamics: General Relativity & Beyond*, dimana penelitian ini menyajikan survei komprehensif dari berbagai versi hukum pertama dan hukum kedua mekanika lubang hitam dan relativitas umum. Di mana hasil penelitian ini menunjukkan besaran termodinamika pada lubang hitam sangat bergantung pada event horizon lubang hitam.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Solusi Persamaan Medan Einstein dalam Teori Gravitasi $f(R)$

Persamaan medan Einstein merupakan persamaan yang menunjukkan kelengkungan geometri dikarenakan adanya kehadiran materi.



Gambar 3. 1 Simulasi kelengkungan ruang-waktu
Sumber: (NASA 2005)

Teori Relativitas Umum yang dikembangkan oleh Einstein berhasil menjelaskan gravitasi sebagai properti kelengkungan ruang waktu. Meskipun sangat sukses menjelaskan tentang gravitasi, namun ada beberapa hal yang tidak berhasil dijelaskan oleh teori ini, yakni adanya materi gelap dan energi gelap yang memiliki peranan penting dalam pengembangan alam semesta. Jelasnya, energi gelap merupakan sesuatu di alam semesta yang membantu mendorong benda-benda di alam semesta untuk terus mengembang dan memperluas alam semesta, sedangkan materi gelap melakukan hal yang sebaliknya di mana materi gelap dalam alam semesta memiliki hubungan penting dengan gravitasi yang kehadirannya dapat memperlambat laju alam semesta, di sinilah Teori Relativitas Umum tidak dapat menjelaskan gravitasi dalam skala alam semesta. Sebab

tersebut yang menyebabkan adanya usulan untuk dilakukan modifikasi pada persamaan medan Einstein.

Modifikasi pada persamaan medan Einstein dapat dilakukan dengan dua cara yakni dengan memodifikasi nilai kelengkungan pada ruas kiri persamaan medan Einstein atau dengan menghadirkan materi gelap dan energi gelap pada ruas kanan persamaan medan Einstein (Sotiriou and Faraoni 2010).

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Sebagaimana yang telah dijelaskan pada dasar teori di bab 2, persamaan medan Einstein diturunkan dari aksi Hilbert, dimana pada aksi Hilbert kelengkungan geometri pada alam semesta hanya dilambangkan dengan R sedangkan dalam modifikasi persamaan medan Einstein jenis pertama, nilai kelengkungan akan berupa sebuah fungsi. Aksi Hilbert untuk Teori Relativitas Umum dituliskan:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R$$

Teori tersebut dikenal dengan $f(R)$ teori dimana nilai kelengkungan skalar Ricci R dimodifikasi dalam bentuk suatu fungsi $f(R)$ dengan f adalah sembarang fungsi. Secara umum, bentuk modifikasi dalam aksi tersebut dapat dituliskan:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + f(R)) \quad (3.1)$$

Untuk mempermudah perhitungan, suku di atas dibagi menjadi dua komponen S_1 dan S_2 dengan definisi sebagai berikut:

$$S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (3.2)$$

$$S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) \quad (3.3)$$

Diberlakukan prinsip variasi pada S_1 sehingga:

$$\delta S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} \delta R \quad (3.4)$$

Dengan menggunakan ketentuan pada prinsip variasi, maka setiap suku pada persamaan aksi di atas menjadi:

$$\delta S_1 = \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) R + \int d^4x \sqrt{-g} \delta R \quad (3.5)$$

Diberikan definisi $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, maka prinsip variasinya harus mengenai setiap suku pada definisi R , menjadi:

$$\delta S_1 = \int d^4x \left(\delta(\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}) \right) \quad (3.6)$$

Pada orde pertama prinsip variasi mengenai suku $\sqrt{-g}$, untuk menghitung variasi determinan g dari metrik, berdasarkan

$$g = g_{\mu\nu} \text{adj}(g_{\mu\nu}) \quad (3.7)$$

maka untuk variasi δg

$$\delta g = \text{adj}(g_{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} \quad (3.8)$$

Definisi untuk adjoin pada matrik adalah $\text{adj} = g g^{\mu\nu}$, sehingga

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (3.9)$$

karena divariasikan terhadap $\delta g^{\mu\nu}$ alih-alih terhadap $\delta g_{\mu\nu}$, diturunkan hubungan antara $\delta g^{\mu\nu}$ dan $\delta g_{\mu\nu}$ menggunakan hubungan di bawah ini

$$g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (3.10)$$

Menggunakan fakta bahwa konstanta tensor δ_ν^μ tidak berubah terhadap variasi, maka dituliskan

$$\delta g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} + g^{\mu\sigma} \delta g_{\sigma\nu} = 0 \quad (3.11)$$

Persamaan di atas dikalikan dengan $g^{\rho\nu}$ kemudian diatur ulang dan didapatkan

$$\delta g_{\mu\rho} = -g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu} \delta g_{\sigma\nu} \quad (3.12)$$

Kemudian dilakukan penamaan kembali dengan menyulihkan $\rho \leftrightarrow \nu$ dan dikalikan kembali dengan $g_{\mu\nu}$ untuk mendapatkan

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu} g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu} \delta g_{\sigma\rho} = -\delta_\nu^\sigma g^{\rho\nu} \delta g_{\sigma\rho} \\ &= -g^{\sigma\rho} \delta g_{\sigma\rho} = -g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Menyisipkan persamaan di atas pada (2.11) sekarang dapat dihitung variasi untuk $\sqrt{-g}$ yakni

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \delta g = -\frac{1}{2\sqrt{g}} g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (3.14)$$

Untuk mengekstrak persamaan medan dari (3.6) perlu untuk dilakukan pemfaktoran variasi $\delta g^{\mu\nu}$. Untuk melakukan hal tersebut, perlu diketahui $\delta R_{\mu\nu}$ dalam hal variasi metrik dan turunannya. Karena tensor Ricci diperoleh dari tensor kelengkungan Riemann yang memenuhi persamaan

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda \quad (3.15)$$

Sehingga untuk mencari variasi tensor kelengkungan Reimann salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan menghitung variasi kelengkungan tensor. Tensor Reimann diberikan sebagai

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \quad (3.16)$$

Dalam hal koneksi $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ merupakan koneksi Christoffel yang didefinisikan oleh

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \quad (3.17)$$

sehingga variasi untuk tensor Ricci didapatkan

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \delta R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} \\ &= \partial_{\lambda}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}) - \partial_{\nu}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}) + \delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Berdasarkan fakta tersebut dapat memilih untuk mengerjakan koordinat geodesik lokal pada sebuah titik arbitrary P di mana simbol Christoffel dapat dibuat nol ($\Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} = 0$) dan pada titik itu juga berlaku bahwa turunan biasa identik dengan turunan kovarian yang didefinisikan oleh

Defnisi dari turunan kovarian dapat dipahami dengan mengambil tensor kovarian (0,1) dan kontravarian (1,0)

$$\begin{aligned} \nabla_{\nu}T_{\nu} &= \partial_{\mu}T_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}T_{\rho} \\ \nabla_{\nu}T^{\nu} &= \partial_{\mu}T^{\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}T^{\rho} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Simbol Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ tidak termasuk tenor, tetapi variasi terhadap simbol Christoffel merupakan tensor, sehingga jika diterapkan prinsip variasi terhadap turunan kovariannya akan menghasilkan

$$\nabla_{\lambda}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}) = \partial_{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma}\delta\Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma}\delta\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \quad (3.20)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan di atas pada variasi kelengkungan skalar, maka akan menghasilkan:

$$\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} &= \nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\lambda) + \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma\delta\Gamma_{\sigma\mu}^\lambda - \partial_\nu\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda + \delta\Gamma_{\lambda\sigma}^\lambda\Gamma_{\nu\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \\
&= \nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Dengan

$$\nabla_\nu(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) = \partial_\nu\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma\delta\Gamma_{\sigma\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^\lambda \tag{3.21}$$

Untuk mendapatkan nilai variasi pada orde ketiga, dapat menerapkan persamaan (3.21) pada persamaan (3.6), sehingga

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - g^{\mu\nu}\nabla_\nu(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) \\
&= \nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) \\
&= \nabla_\sigma(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Kemudian persamaan (3.22) dan (3.14) disubstitusikan pada persamaan (3.6), sehingga

$$\begin{aligned}
\delta S_1 &= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right\}\delta g^{\mu\nu} + \int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \\
&\quad \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\sigma(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^\sigma - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Integral akhir dari relasi (3.23) dapat ditransformasikan menjadi integral permukaan melalui teorema Gauss-Stokes maka integral suku ke tiga akan hilang. Mempertimbangkan hasil akhir untuk variasi S_1 dapat ditulis sebagai

$$\delta S_1 = \int d^4x\sqrt{g}\left\{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right\}\delta g^{\mu\nu} \tag{3.24}$$

Setelah menghitung integral variasi $\delta S_1 / \delta g^{\mu\nu}$ dan mengaturnya ke nol, pada akhirnya kita mendapat persamaan gravitasi Einstein untuk ruang vakum

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (3.25)$$

dengan menggunakan cara yang sama pada S_1 untuk variasi S_2 didapatkan:

$$\delta S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) = \int d^4x \left((\delta \sqrt{-g}) f(R) + \sqrt{-g} \delta f(R) \right) \quad (3.26)$$

Pada orde pertama persamaan aksi S_2 , hasil variasi determinan g memiliki hasil yang sama dengan persamaan (3.14), sehingga untuk hasil variasi pada suku pertama dapat disubstitusikan dari persamaan (3.26). Untuk suku kedua dimana f adalah suatu fungsi yang mengandung kuantitas R sehingga prinsip variasinya menjadi

$$\delta S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f \delta g^{\mu\nu} + f'(R) \delta R \right) \quad (3.27)$$

dengan definisi dari skalar Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, maka

$$\delta S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f \delta g^{\mu\nu} + f'(R) [R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}] \right) \quad (3.28)$$

Menggunakan beberapa identitas pada persamaan (3.21) untuk menghitung hasil variasi pada orde ketiga persamaan (3.28)

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left(\nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) \right) \quad (3.29)$$

untuk mendapatkan nilai variasi untuk $\delta \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ dan $\delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda$, menggunakan identitas berikut

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = -\frac{1}{2} [g_{\lambda\mu} \nabla_\nu (\delta g^{\lambda\sigma}) + g_{\lambda\nu} \nabla_\mu (\delta g^{\lambda\sigma}) - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^\sigma (\delta g^{\alpha\beta})] \quad (3.30)$$

sehingga

$$\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = -\frac{1}{2}[g_{\sigma\nu}\nabla_{\mu}(\delta g^{\sigma\lambda}) + g_{\sigma\mu}\nabla_{\nu}(\delta g^{\sigma\lambda}) - g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\nabla^{\lambda}(\delta g^{\alpha\beta})] \quad (3.31)$$

dan

$$\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} = -\frac{1}{2}[g_{\sigma\lambda}\nabla_{\mu}(\delta g^{\sigma\lambda}) + g_{\sigma\mu}\nabla_{\nu}(\delta g^{\sigma\lambda}) - g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}\nabla^{\lambda}(\delta g^{\alpha\beta})] \quad (3.32)$$

Substitusikan hasil (3.31) dan (3.32) pada persamaan (3.29)

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}(\nabla_{\lambda}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda})) \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_{\lambda}[g_{\sigma\nu}\nabla_{\mu}(\delta g^{\sigma\lambda}) + g_{\sigma\mu}\nabla_{\nu}(\delta g^{\sigma\lambda}) - g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\nabla^{\lambda}(\delta g^{\alpha\beta})] - \\ &\quad \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_{\nu}[g_{\sigma\lambda}\nabla_{\mu}(\delta g^{\sigma\lambda}) + g_{\sigma\mu}\nabla_{\nu}(\delta g^{\sigma\lambda}) - g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}\nabla^{\lambda}(\delta g^{\alpha\beta})] \end{aligned} \quad (3.33)$$

mengoperasikan perkalian pada persamaan (3.33) menghasilkan

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}[\nabla_{\lambda}\nabla_{\sigma}(\delta g^{\sigma\lambda}) + \nabla_{\lambda}\nabla_{\sigma}(\delta g^{\sigma\lambda}) - g_{\alpha\beta}\nabla_{\lambda}\nabla^{\lambda}(\delta g^{\alpha\beta})] \\ &\quad - \frac{1}{2}[g_{\sigma\lambda}\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}(\delta g^{\sigma\lambda}) + \nabla_{\sigma}\nabla_{\lambda}(\delta g^{\sigma\lambda}) - \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}(\delta g^{\alpha\beta})] \end{aligned} \quad (3.34)$$

dengan definisi $\nabla_{\lambda}\nabla^{\lambda} = \square$, maka persamaan di atas menjadi

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = -g_{\alpha\beta}\square(g^{\alpha\beta}) + \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}(\delta g^{\alpha\beta}) \quad (3.35)$$

Substitusikan hasil tersebut pada persamaan (3.28)

$$\begin{aligned} \delta S_2 &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f\delta g^{\mu\nu} + f'(R)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. - f'(R)[g_{\alpha\beta}\square(\delta g^{\alpha\beta}) + \nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}(\delta g^{\alpha\beta})] \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Semua suku memiliki nilai $\delta g^{\mu\nu}$ jika pada orde ketiga nilai indeksnya disamaratakan sehingga dapat ditulis

$$\delta S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square f'(R) + \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) \right\} \delta g^{\mu\nu} \quad (3.37)$$

dengan hasil integral variasi $\frac{\delta S_2}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$, maka didapatkan solusi medan Einstein untuk aksi S_2

$$f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - [g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu] f'(R) = 0 \quad (3.38)$$

Jika hasil variasi aksi S_1 dan S_2 digabungkan, maka akan menghasilkan persamaan medan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - [g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu] f'(R) \\ = 8\pi G T_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$8\pi G T_{\mu\nu}$ merupakan tensor energi momentum yang dalam keadaan vakum akan sama dengan nol, maka persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} (1 + f'(R)) - \frac{1}{2} (R + f(R)) g_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu} \square - \nabla_\nu \nabla_\mu) f'(R) \\ = 8\pi G T_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Persamaan (3.40) merupakan solusi persamaan medan Einstein dengan nilai modifikasi kelengkungan skalar secara umum $R + f(R)$. Nilai kelengkungan dapat divariasikan menjadi berbagai fungsi dengan mempertimbangkan kondisi keadaan pada objek uji.

3.1.2 Solusi Metrik untuk Kasus $f(R) = R + \alpha R^2$

Sebagaimana yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa dalam modifikasi persamaan medan Einstein, kelengkungan ruang-waktu akan diperumum ke dalam suatu bentuk fungsi $f(R)$, dimana fungsi $f(R)$ sendiri merupakan suatu fungsi terhadap R . Penelitian ini menggunakan bentuk kelengkungan dalam orde dua karena menyesuaikan pada jenis lubang hitam yang digunakan sebagai objek uji. Pemilihan lubang hitam sebagai objek uji pun berdasarkan beberapa pertimbangan yang akan dijelaskan dalam bagian selanjutnya.

Menggunakan pendekatan teori medan efektif untuk menentukan koreksi gravitasi kuantum, dinyatakan bahwa lubang hitam Reissne-Nordstrom menerima koreksi gravitasi kuantum dalam bentuk orde dua disebabkan tidak menghilangnya tensor energi momentum dalam lubang hitam jenis ini (Campos Delgado 2022).

Salah satu bentuk nilai kelengkungan yang ditawarkan dalam bentuk orde dua adalah $f(R) = R + \alpha R^2$ (Sporea 2014). Bentuk tersebut diperkenalkan oleh Starobinsky (1980) dimana, α adalah konstan.

Solusi untuk jenis kelengkungan ini didapatkan dengan cara matematis yang sama seperti pada bagian 3.1. Dimulai dari menuliskan persamaan aksi yang sudah dimodifikasi dengan menggunakan model Starobinsky

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + \alpha R^2) \quad (3.41)$$

Agar menjadi lebih mudah untuk menemukan solusinya, maka persamaan aksi tersebut dipecah menjadi dua bagian

$$S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} R$$

$$S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} f \alpha R^2$$
(3.42)

Hasil variasi pada aksi pertama akan menghasilkan solusi medan Einstein yang sama dengan persamaan (3.25) sedangkan untuk variasi pada aksi kedua akan menghasilkan nilai baru karena adanya nilai pada fungsi R . Dengan α adalah sebuah konstanta, maka

$$\delta S_2 = \alpha \int d^4x \sqrt{-g} R^2$$
(3.43)

dengan menerapkan prinsip variasi maka

$$S_2 = \alpha \int d^4x (\delta \sqrt{-g} R^2 + \sqrt{-g} \delta R^2)$$
(3.44)

Pada suku pertama prinsip variasi mengenai $\sqrt{-g}$ yang telah diketahui hasilnya sama seperti pada persamaan (3.14), sehingga untuk orde pertama hasil variasinya adalah

$$\alpha \int d^4x (\delta \sqrt{-g} R^2) = -\frac{1}{2} \alpha \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} R^2$$
(3.45)

Sedangkan untuk hasil variasi yang mengenai R^2 adalah

$$\alpha \int d^4x (\sqrt{-g} \delta R^2) = 2\alpha \int d^4x \sqrt{-g} R \delta R$$
(3.46)

Terlebih dahulu dicari nilai variasi R dengan memanfaatkan identitas $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ sehingga

$$2\alpha \int d^4x \sqrt{-g} R \delta R = \int d^4x \sqrt{-g} R (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu})$$
(3.47)

dengan menggunakan identitas pada persamaan (3.31), (3.32) untuk mendapatkan nilai variasi dari $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ seperti pada persamaan (3.35) Maka variasi dari persamaan (3.47) akan menjadi

$$2\alpha \int d^4x \sqrt{-g} R \delta R = \int d^4x \sqrt{-g} \left(R \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - R g_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) + R \nabla_\nu \nabla_\mu (\delta g^{\mu\nu}) \right) \quad (3.48)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.45) dan (3.48) pada persamaan (3.44), maka hasil variasi untuk S_2 adalah

$$\begin{aligned} \delta S_2 = & -\frac{1}{2} \alpha \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} R^2 \\ & + 2\alpha \int d^4x \sqrt{-g} \left(R \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - R g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \\ & + R \nabla_\nu \nabla_\mu (\delta g^{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Setiap ruas persamaan (3.49) memiliki nilai $\delta g^{\mu\nu}$ sehingga dapat disederhanakan

$$\begin{aligned} \delta S_2 = & \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \alpha (g_{\mu\nu} R^2) \right. \\ & \left. + 2\alpha (R R_{\mu\nu} - R g_{\mu\nu} + R \nabla_\nu \nabla_\mu) \delta g^{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Dapat dituliskan solusi persamaan medannya dengan hasil integral

$\frac{\delta S_2}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$, maka

$$2\alpha R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \alpha g_{\mu\nu} R^2 - 2\alpha R g_{\mu\nu} + 2\alpha R \nabla_\nu \nabla_\mu \quad (3.51)$$

kemudian gabungkan hasil variasi aksi S_1 dan S_2 untuk mendapatkan solusi medan Einstein dalam teori $f(R)$ dengan kasus $R + \alpha R^2$

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + 2\alpha RR_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\alpha g_{\mu\nu}R^2 - 2\alpha Rg_{\mu\nu}\square + 2\alpha R\nabla_\nu\nabla_\mu \quad (3.52)$$

Menyesuaikan dengan bentuk umumnya seperti pada persamaan (3.40), sehingga persamaan di atas menjadi

$$R_{\mu\nu}(1 + \alpha 2R) - \frac{1}{2}(R + \alpha R^2)g_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)\alpha 2R = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

Dimana $T_{\mu\nu}$ merupakan tensor energi momentum sebagai bentuk kehadiran materi yang menyebabkan adanya kelengkungan pada persamaan medan Einstein.

3.2 Solusi Reissner-Nordstrom dalam teori $f(R)$

3.2.1 Solusi Reissner-Nordstrom

Semua sistem yang terikat secara gravitasi–bintang, galaksi, gugus galaksi–bermuatan positif dan memiliki rasio terhadap massa 100 Coulomb per massa matahari, sehingga materi intergalaksi yang berkembang bebas terkompensasi memiliki muatan negatif (Bally and Harrison 1978). Pertanyaan itu merujuk pada penemuan terbesar fisika dalam lima puluh terakhir bahwa lubang hitam memiliki entropi. Muatan di dalam lubang hitam tidak selalu bisa diabaikan (Zajaiek and Tursunov 2019). Sinar kosmik yang sampai ke Bumi merupakan hasil radiasi partikel bermuatan dengan energi yang sangat tinggi, secara umum partikel bermuatan dasar yang melewati lubang hitam non-netral dapat mengalami gaya elektromagnetik sebanyak enam belas kali gaya gravitasi untuk massa lubang hitam pusat galaksi dan muatannya tujuh belas kali lipat. Secara kebetulan, proses ini dapat menjelaskan bagaimana sinar kosmik dapat dideteksi dengan energi yang sangat tinggi.

Kondisi muatan nol dapat dibenarkan jika pengamat hanya terpaku pada partikel foton dan materi netral di sekitar lubang hitam, namun dinamika partikel bermuatan seperti elektron dan proton dapat terpengaruh secara signifikan oleh medan listrik lubang hitam. Medan listrik lubang hitam dapat bekerja dan mempercepat partikel hingga kecepatan relativistik yang besar (Campos Delgado 2022; Zajaiek and Tursunov 2019). Mengamati dua fenomena tersebut, jenis lubang hitam Reissner-Norstrom merupakan objek uji yang paling sesuai dengan tinjauan tersebut.

Perbandingan yang paling nampak dari beberapa lubang hitam yang telah diperkenalkan adalah kegunaan dari lubang hitam tersebut sebagai objek uji geometri. Lubang hitam Reissner Nordstrom sendiri digunakan untuk mengkaji geometri atau benda langit yang bermassa serta bermuatan, solusi yang didapatkan sering kali disebut sebagai solusi lubang hitam Reissner Nordstrom. Solusi lubang hitam Reissner Nordstrom merupakan solusi persamaan medan Einstein statik untuk benda bermassa dan bermuatan. Diambil bentuk simetri bola sebagai sumber muatan, maka medan elektromagnetik yang dipancarkan mengikuti bentuk simetri bola.

$$ds^2 = e^{2\alpha(r,t)}c^2dt^2 - e^{2\beta(r,t)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \quad (3.53)$$

Mengikuti elemen garis di atas, dapat dituliskan metrik kovarian $g_{\mu\nu}$ berikut:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\beta(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

dengan bentuk kontravariannya menjadi:

$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2\alpha(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\beta(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Mengingat kembali persamaan umum Medan Einstein ialah:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right)$$

Untuk mendapatkan nilai tensor Ricci, dimana:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \quad (3.56)$$

Sebelum mendapatkan nilai tensor Ricci terlebih dahulu harus didapatkan simbol Christoffel, sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\beta &= g^{\beta\alpha} \Gamma_{\alpha,\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} g^{\beta\sigma} (\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Dengan $\sigma = 0$, maka nilai dari simbol Christoffel yang tidak nol adalah:

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &= \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{10}) \\ &= \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \partial_r e^{2\alpha} = \alpha' \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{01} + \partial_0 g_{11} - \partial_1 g_{01}) \\ &= \frac{1}{2} e^{-2\beta} \partial_t e^{2\beta} = \dot{\beta} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} (\partial_1 g_{10} + \partial_1 g_{10} - \partial_0 g_{11}) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2\alpha} \partial_t (-e^{2\beta}) = \dot{\beta} e^{2(\beta-\alpha)} \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{01} - \partial_1 g_{00}) \\ &= -\frac{1}{2}(-e^{-2\beta})\partial_r e^{2\alpha} = \alpha' e^{2(\alpha-\beta)}\end{aligned}\quad (3.61)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-2\alpha}\partial_t e^{2\alpha} = \dot{\alpha}\end{aligned}\quad (3.62)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-2\beta}\partial_r e^{2\beta} = \beta'\end{aligned}\quad (3.63)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}) \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2\beta}\partial_r r^2 = -r e^{-2\beta}\end{aligned}\quad (3.64)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{31} - \partial_1 g_{33}) \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2\beta}\partial_r r^2 \sin^2 \theta = -r \sin^2 \theta e^{-2\beta}\end{aligned}\quad (3.65)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{12} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{12}) \\ &= \frac{1}{2r^2}\partial_r r^2 = \frac{1}{r}\end{aligned}\quad (3.66)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33}) \\ &= -\frac{1}{2r^2}\partial_\theta r^2 \sin^2 \theta = -\sin \theta \cos \theta\end{aligned}\quad (3.67)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{13} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{13}) \\ &= \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta}\partial_r r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{r}\end{aligned}\quad (3.68)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{23} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{23}) \\ &= \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta}\partial_\theta r^2 \sin^2 \theta = \cot \theta\end{aligned}\quad (3.69)$$

Setelah didapatkan komponen Simbol Christoffel tidak nol, dapat dicari komponen tensor Ricci yang tidak nol sebagai berikut:

$$R_{00} = (\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2) + e^{2(\alpha-\beta)} \left\{ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \right\} \quad (3.70)$$

$$R_{01} = \dot{\beta} \left(\alpha' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) - \dot{\beta} e^{2(\alpha-\beta)} \alpha' \dot{\beta} e^{2(\alpha-\beta)} = \frac{2\dot{\beta}}{r} \quad (3.71)$$

$$R_{11} = -e^{2(\alpha-\beta)} (\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2) + \left\{ -\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\beta'}{r} + \alpha'\beta' \right\} \quad (3.72)$$

$$R_{22} = -e^{-2\beta} (\alpha'r - \beta'r + 1) + 1 \quad (3.73)$$

$$R_{33} = -\sin^2\theta e^{-2\beta} (\alpha'r - \beta'r + 1) + \sin^2\theta = \sin^2\theta R_{22} \quad (3.74)$$

Sebab syarat statik pada persamaan, maka suku yang diturunkan terhadap waktu dihilangkan, maka nilai tensor Ricci berubah menjadi

$$R_{00} = e^{2(\alpha-\beta)} \left\{ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \right\} \quad (3.75)$$

$$R_{11} = -\alpha'' - \alpha'^2 + \frac{2\beta'}{r} + \alpha'\beta' \quad (3.76)$$

$$R_{22} = -e^{-2\beta} (\alpha'r - \beta'r + 1) + 1 \quad (3.77)$$

$$R_{33} = \sin^2\theta R_{22} \quad (3.78)$$

Kehadiran materi menyebabkan tensor energi momentum tidak bernilai nol. Berdasarkan hukum Gauss, medan listrik di sekitar bola yang memiliki total muatan listrik q adalah

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.79)$$

Menggunakan definisi potensial skalar

$$V = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.80)$$

Maka potensial listrik disekitar bola yang memiliki total muatan listrik Q adalah

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (3.81)$$

Karena lubang hitam Reissner Nordstrom tidak berotasi, sehingga tidak menghasilkan medan magnet, maka komponen dari potensial vector \mathbf{A} bernilai nol. Komponen-komponen dari potensial 4 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A_\nu = \left(\frac{V}{c}, 0, 0, 0 \right) \quad (3.82)$$

Melalui definisi tensor kuat medan yang diberikan oleh persamaan

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.83)$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_r/c & 0 & 0 \\ -E_r/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

Dengan $E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ tensor energi momentum untuk medan elektromagnetik di sekitar lubang hitam Reissner Nordstrom yang digambarkan sebagai sebuah bola statik dengan total muatan Q dapat diperoleh dengan persamaan

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\rho} F_\nu^\rho + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda} \quad (3.85)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.85), terlebih dahulu dicari komponen kontravarian dari $F_{\mu\nu}$, dimana bentuk kovarian dari tensor kuat medan tersebut adalah

$$F^{\rho\lambda} = g^{\rho\mu} g^{\lambda\nu} F_{\mu\nu} \quad (3.86)$$

Menggunakan definisi tersebut, komponen tidak nol dari persamaan tersebut diberikan oleh

$$\begin{aligned} F^{01} &= g^{0\mu} g^{1\nu} F_{\mu\nu} = g^{00} g^{10} F_{01} \\ &= e^{-2\alpha} (-e^{2\beta}) E/c^2 = -\frac{E}{c} e^{-2\alpha-2\beta} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Kemudian

$$\begin{aligned} F^{10} &= g^{1\mu} g^{0\nu} F_{\mu\nu} = g^{11} g^{01} F_{10} \\ &= (-e^{-2\beta}) e^{2\alpha} (-E/c^2) = \frac{E}{c} e^{-2\alpha-2\beta} \\ &= -F^{01} \end{aligned} \quad (3.88)$$

Maka, tensor kuat medan dalam bentuk kontravariannya adalah

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E}{c} e^{-2\alpha-2\beta} & 0 & 0 \\ \frac{E}{c} e^{-2\alpha-2\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.85) juga dibutuhkan nilai dari tensor campuran kuat medan

$$F_v^\rho = g_{\nu\gamma} F^{\gamma\rho} \quad (3.90)$$

Dapat dicari komponen tidak nol dengan menggunakan identitas tersebut

$$\begin{aligned} F_0^1 &= g_{0\gamma} F^{\gamma 1} = g_{00} F^{01} \\ &= e^{2\alpha} \left(-\frac{E}{c} e^{-2\alpha-2\beta} \right) = -\frac{E}{c} e^{-2\beta} \end{aligned} \quad (3.91)$$

Dan

$$\begin{aligned}
F_1^0 &= g_{1\gamma} F^{\gamma 0} = g_{11} F^{10} \\
&= -e^{2\beta} \left(\frac{E}{c} e^{-2\alpha-2\beta} \right) = -\frac{E}{c} e^{-2\alpha}
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Dengan $c = 1$, maka tensor energi momentum yang tidak nol adalah

$$T_{00} = \frac{1}{2} E^2 e^{-2\beta} \tag{3.93}$$

$$T_{11} = -\frac{1}{2} E^2 e^{-2\alpha} \tag{3.94}$$

$$T_{22} = \frac{1}{2} r^2 E^2 e^{-2\alpha-2\nu} \tag{3.95}$$

$$T_{33} = \sin^2 \theta T_{22} \tag{3.96}$$

Komponen pada persamaan umum medan Einstein telah didapatkan, sehingga dapat disubstitusikan dalam bentuk komponen 00 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \\
e^{2(\alpha-\beta)} \left\{ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \right\} &= \frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{2} E^2 e^{-2\beta}
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Dalam komponen 11

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{11} \\
-\alpha'' - \alpha'^2 + \frac{2\beta'}{r} + \alpha'\beta' &= \frac{8\pi G}{c^4} - \frac{1}{2} E^2 e^{-2\alpha}
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Dalam komponen 22

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{22} \\
-e^{-2\beta} (\alpha'r - \beta'r + 1) + 1 &= \frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{2} r^2 E^2 e^{-2\alpha-2\beta}
\end{aligned} \tag{3.99}$$

Jika persamaan (3.97) dikalikan dengan $e^{2\beta}$ dan persamaan (3.98) dikalikan dengan $e^{2\alpha}$ maka, persamaan (3.97) dan (3.98) akan berubah menjadi

$$\begin{aligned} e^{2(\alpha-\beta)} \left\{ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \right\} &= \frac{8\pi G}{c^4} - \frac{1}{2} E^2 e^{-2\beta} \\ -\alpha'' - \alpha'^2 + \frac{2\beta'}{r} + \alpha'\beta' &= \frac{8\pi G}{c^4} - \frac{1}{2} E^2 e^{-2\alpha} \end{aligned} \quad (3.100)$$

Kemudian kedua persamaan tersebut dijumlahkan menjadi

$$\frac{2\alpha'}{r} + \frac{2\beta'}{r} = 0 \quad (3.101)$$

$$\alpha + \beta = \text{konstan}$$

Persamaan tersebut mengartikan bahwa pada saat nilai $r \rightarrow \infty$, maka metrik akan kembali pada bentuk Minkowski sehingga $e^{2\alpha} \rightarrow 1$ dan $e^{2\beta} \rightarrow 1$, sehingga $\alpha = 0$ dan $\beta = 0$, maka

$$\alpha + \beta = 0$$

$$\alpha = -\beta$$

Dan persamaan (3.100) menjadi

$$\begin{aligned} -e^{-2\beta}(a'r - \beta'r + 1) + 1 &= \frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{2} r^2 E^2 e^{-2\alpha-2\beta} \\ -e^{-2\beta}(-2\beta'r + 1) + 1 &= \frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{2} r^2 E^2 e^{-2\alpha-2\alpha} \end{aligned} \quad (3.102)$$

Dengan $(1 - 2\beta') - e^{-2\beta} = \frac{d}{dr}[-re^{-2\beta}] = -1$, sehingga

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}[-re^{2\alpha}] + 1 &= \frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{2} r^2 E^2 \\ \frac{d}{dr}[-re^{2\alpha}] &= \frac{4\pi G}{c^4} r^2 E^2 - 1 \\ \frac{d}{dr}[-re^{2\alpha}] &= \frac{4\pi G}{c^4} r^2 \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 r^4} - 1 \\ \frac{d}{dr}[-re^{2\alpha}] &= \frac{Gq^2}{4\pi^2 \epsilon_0 r^2 c^4} - 1 \\ -re^{2\alpha} &= \int \left(\frac{Gq^2}{4\pi^2 \epsilon_0 r^2 c^4} - 1 \right) dr \\ -re^{2\alpha} &= -\frac{Gq^2}{4\pi^2 \epsilon_0 r c^4} - r + C \\ -e^{2\alpha} &= -\frac{Gq^2}{4\pi^2 \epsilon_0 r^2 c^4} - 1 + \frac{C}{r}\end{aligned}\tag{3.103}$$

Dengan $C = 2M$ dan $\frac{Gq^2}{4\pi\epsilon_0 c^4} = Q^2$, maka

$$e^{2\alpha} = \frac{Q^2}{r^2} + 1 - \frac{2M}{r}\tag{3.104}$$

Sehingga diperoleh solusi Reissner Nordstrom berikut

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2\tag{3.105}$$

3.2.2 Solusi dengan Teori Gangguan

Kehadiran nilai α pada bentuk $R + \alpha R^2$ sebagai konstanta gangguan membuat solusi persamaan Reissner-Nordstrom mampu didapatkan dengan menggunakan metode gangguan. Sebagaimana yang sudah dijeaskan sebelumnya,

nilai modifikasi nilai kelengkungan diterapkan pada aksi Hilbert dan menghasilkan persamaan medan Einstein termodifikasi, kemudian solusi tersebut digunakan untuk mendapatkan solusi metrik Reissner-Nordstrom (Ky, Ky, and Van 2018).

Menuliskan kembali persamana (3.52) yang mana persamaan tersebut merupakan persamaan medan Einstein termodifikasi dengan nilai kelengkungan berorde dua.

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + 2\alpha RR_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\alpha g_{\mu\nu}R^2 - 2\alpha Rg_{\mu\nu}\square + 2\alpha R\nabla_\nu\nabla_\mu$$

Jika diamati lebih dalam, persamaan diatas seakan-akan menyajikan dua persamaan yang dijadikan satu. Dua ruas kanan merupakan persamaan medan Einstein secara umum, sedangkan ruas yang lainnya merupakan hasil dari variasi nilai kelengkungan yang baru saja ditambahkan. Tujuan dari metode gangguan adalah untuk menyesuaikan persamaan yang dihasilkan dari variasi nilai kelengkungan yang baru dengan persamaan medan Einstein pada umumnya.

Dengan mengumpamakan $h(R) = R^2$ dan turunan pertamanya $h'(R) = 2R$ maka persamaan (3.52) dapat dituliskan

$$R_{\mu\nu}(1 + \alpha h'(R)) - \frac{1}{2}(R + \alpha h(R))g_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)\alpha h'(R) - \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.106)$$

Dimana $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, dalam bentuk tensor campuran, persamaan (3.106) menjadi

$$R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R - \alpha kh'(\kappa T) \left(T_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu T \right) - \frac{\alpha}{2}\delta_\nu^\mu h^{(\kappa T)} \\ - \alpha \delta_\nu^\mu \square^E h'(\kappa T) + \alpha \nabla^\mu \nabla_\nu^E h'(\kappa T) = -\kappa T_\nu^\mu \quad (3.107)$$

Atau dapat dituliskan

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} R = -\kappa T_{\nu}^{\mu} + \alpha \kappa h'(\kappa T) \left(T_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} T \right) + \frac{\alpha}{2} \delta_{\nu}^{\mu} h'(\kappa T) \\ + \alpha \delta_{\nu}^{\mu} \square^E h'(\kappa T) - \alpha \nabla^{\mu} \nabla_{\nu}^E h'(\kappa T) \quad (3.108)$$

Nilai $R = \kappa T$ dan $R_{\nu}^{\mu} = -\kappa \left(T_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} T \right)$ didapatkan dari persamaan medan Einstein secara umum, yakni

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.109)$$

Dengan menggunakan komponen metrik pada persamaan (3.54) dan (3.55) serta nilai dari tensor Ricci R_{00} (3.70) dalam bentuk tensor campuran didapatkan

$$R_0^0 = g^{00} R_{00} = e^{-2\beta} \left\{ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha' \beta' \right\} \quad (3.110)$$

Serta nilai dari kelengungan R adalah

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = e^{-2\alpha} R_{00} - e^{-2\beta} R_{11} - \frac{1}{r^2} \left(R_{22} + \frac{\sin^2 \theta R_{22}}{\sin^2 \theta} \right) \\ = e^{-2\alpha} \left\{ e^{2(\alpha-\beta)} \left\{ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha' \beta' \right\} \right\} - \\ e^{-2\beta} \left\{ -\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} + \alpha' \beta' \right\} - \frac{2}{r^2} \left\{ e^{-2\beta} (\alpha' r - \right. \quad (3.111) \\ \left. \beta' r + 1) + 1 \right\} \\ = 2e^{-2\beta} \left[\alpha'' - \alpha' \beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{2}{r^2}$$

Maka persamaan medan Einstein pada (3.109) dengan mensubstitusikan nilai pada (3.110) dan (3.111) dalam bentuk tensor campuran adalah

$$\begin{aligned}
R_0^0 - \frac{1}{2}R &= \left[e^{-2\beta} \left\{ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \right\} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[2e^{-2\beta} \left[\alpha'' - \alpha'\beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{2}{r^2} \right] = e^{-2\beta} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\beta'}{r} \right) - \frac{1}{r^2}
\end{aligned} \tag{3.112}$$

Persamaan (3.108) dapat dinyatakan dalam bentuk komponen tensor 00, sehingga persamaan (3.108) dapat dituliskan

$$\begin{aligned}
R_0^0 - \frac{1}{2}R &= -\kappa T_0^0 + \frac{\alpha}{2}h(\kappa T) + \alpha \square^E h'(\kappa T) - \alpha \nabla^0 \nabla_0^E h'(\kappa T) \\
&\quad + \alpha \kappa \left(T_0^0 - \frac{1}{2}T \right) h'(\kappa T)
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Substitusikan nilai (3.112), kemudian dengan $\nabla^i \nabla_i^E = \square^E - \nabla^0 \nabla_0^E$ persamaan (3.113) menjadi

$$\begin{aligned}
e^{-2\beta} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\beta'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} &= -\kappa T_0^0 + \frac{\alpha}{2}h(\kappa T) + \alpha \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T) + \\
&\quad \alpha \kappa \left(T_0^0 - \frac{1}{2}T \right) h'(\kappa T)
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Sehingga dapat dituliskan

$$\begin{aligned}
e^{-2\beta} \frac{2\beta'}{r} + \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\beta}) &= \kappa T_0^0 + \frac{\alpha}{2}h(\kappa T) - \alpha \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T) - \\
&\quad \alpha \kappa \left(T_0^0 - \frac{1}{2}T \right) h'(\kappa T)
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Jika $2\beta = -\ln \left[1 + \frac{c}{r} \right]$ maka,

$$-\frac{c'}{r^2} = \kappa T_0^0 - \frac{\alpha}{2}h(\kappa T) - \alpha \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T) - \alpha \kappa \left(T_0^0 - \frac{1}{2}T \right) h'(\kappa T) \tag{3.116}$$

Dengan menggunakan operasi integral, maka akan didapatkan

$$C = - \int_0^r \left[\kappa T_0^0 - \frac{\alpha}{2} h(\kappa T) - \alpha \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T) - \alpha \kappa \left(T_0^0 - \frac{1}{2} T \right) h'(\kappa T) \right] r'^2 dr' \quad (3.117)$$

Kembali substitusikan nilai c menjadi

$$2\beta = -\ln \left\{ 1 - \frac{1}{r} \int_0^r \left[\kappa T_0^0 - \frac{\alpha}{2} h(\kappa T) - \alpha \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T) - \alpha \kappa \left(T_0^0 - \frac{1}{2} T \right) h'(\kappa T) \right] r'^2 dr' \right\} \quad (3.118)$$

Untuk mendapatkan komponen metrik 00, maka nilai dari tensor energi momentum harus memiliki komponen yang sama, sehingga

$$2\beta = -\ln \left\{ 1 - \frac{1}{r} \int_0^r \left[\kappa T_0^0 - \frac{\alpha}{2} h(\kappa T_0^0) - \alpha \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) - \alpha \kappa \left(T_0^0 - \frac{1}{2} T_0^0 \right) h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right\} \quad (3.119)$$

Hasil integral pada persamaan di atas dengan T_0^0 , dimana

$$T_0^0 = g^{00} T_{00} = e^{-2\alpha} \frac{1}{2} E^2 e^{-2\beta} \quad (3.121)$$

Dengan $\beta = -\alpha$, maka

$$T_0^0 = \frac{1}{2} E^2 \quad (3.122)$$

Mengsubstitusikan persamaan di atas dalam operasi integral dengan batas 0 sampai r akan menghasilkan

$$\int_0^r \kappa \left(T_0^{0(m)} T_0^{0(e)} \right) r'^2 dr' \quad (3.123)$$

Untuk nilai $\int_0^r \kappa T_0^{0(m)} r'^2 dr' = 0$ sehingga,

$$\int_0^r \kappa (T_0^{0(m)}) r'^2 dr' = \frac{\kappa M c^2}{4\pi} \quad (3.124)$$

Sedangkan untuk $\int_0^r \kappa (T_0^{0(e)}) r'^2 dr' \neq 0$, maka

$$\int_0^r \kappa (T_0^{0(e)}) r'^2 dr' = \kappa \frac{1}{2} E^2 r'^2 dr' \quad (3.125)$$

Dengan mensubstitusikan nilai $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ dan nilai tensor energi momentum pada komponen 00 dengan nilai $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ pada ruas kanan maka menghasilkan

$$\begin{aligned} \int_0^r \kappa T_0^{0(m)} T_0^{0(e)} r'^2 dr' &= \frac{8\pi G M c^2}{4\pi c^4} - \frac{1}{2} \left(\frac{8\pi G}{4\pi\epsilon_0 c^4} \frac{q}{r^2} \right)^2 r'^2 dr' \\ \int_0^r \kappa T_0^{0(m)} T_0^{0(e)} r'^2 dr' &= \frac{2GM}{c^2} - \frac{G}{4\pi\epsilon_0^2 c^4} \frac{q^2}{r^4} r'^3 dr' \\ \int_0^r \kappa T_0^{0(m)} T_0^{0(e)} r'^2 dr' &= \frac{2GM}{c^2} - \frac{G}{4\pi\epsilon_0^2 c^4} \frac{q^2}{r} \end{aligned} \quad (3.126)$$

Persamaan (3.120) dapat dituliskan kembali

$$\begin{aligned} 2\beta = -\ln \left\{ 1 - \frac{2GM}{c^4 r} + \frac{G}{4\pi\epsilon_0^2 c^4} \frac{q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[\frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \right. \right. \\ \left. \left. \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right\} \end{aligned} \quad (3.127)$$

Persamaan (3.127) merupakan solusi untuk komponen g_{11} , dikarenakan $2\beta = -2\alpha$, maka dapat dituliskan solusi untuk g_{00} dapat dituliskan:

$$2\alpha = \ln \left\{ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{G}{4\pi\epsilon_0^2 c^4} \frac{q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[\frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right\} \quad (3.128)$$

Sehingga solusi metriknya dapat dituliskan, solusi untuk komponen g_{00}

$$g_{00} = e^{2\alpha}$$

$$g_{00} = e^{\ln \left\{ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{G}{4\pi\epsilon_0^2 c^4} \frac{q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[\frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right\}}$$

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{G}{4\pi\epsilon_0^2 c^4} \frac{q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[\frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr'$$

Sedangkan untuk g_{11} adalah

$$g_{11} = e^{2\beta}$$

$$g_{11} = e^{-\ln \left\{ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{G}{4\pi\epsilon_0^2 c^4} \frac{q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[\frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right\}}$$

$$g_{11} = -1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{G}{4\pi\epsilon_0^2 c^4} \frac{q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[\frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr'$$

$$g_{22} = -r^2$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

Dengan $G = c = 1$ dan $Q^2 = q^2/4\pi\epsilon_0^2$, maka bentuk metriknya

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[\frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right) \quad (3.129)$$

$$\frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) \left] r'^2 dr' \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[\frac{1}{2} h(\kappa T_0^0) + \nabla^i \nabla_i^E h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2} \kappa T_0^0 h'(\kappa T_0^0) \right] r'^2 dr' \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Dengan menggunakan solusi pada persamaan (3.129) tersebut, didapatkan solusi untuk kasus gangguan dengan nilai $R + \alpha R^2$. Substitusikan nilai $h(R) = R^2$ dan $h'(R) = 2R$ serta untuk nilai $R = R_0$ maka $\nabla^i \nabla_i^E 2R$ dapat dihilangkan, sehingga

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[\frac{1}{2} R_0^2 + \frac{1}{2} R_0^2 2R_0 \right] r^2 dr$$

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r} \left[\frac{1}{2} R_0^2 + R_0^3 \right] \frac{r^3}{3}$$

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha R_0^2 r^2}{6} + \frac{\alpha R_0^3 r^2}{3}$$

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha R_0^2 r^2 + 2\alpha R_0^3 r^2}{6}$$

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]$$

Kemudian untuk g_{11} diberikan

$$g_{11} = - \left\{ 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r} \int_0^r \left[\frac{1}{2} R_0^2 + \frac{1}{2} R_0^2 2R_0 \right] r^2 dr \right\}^{-1}$$

$$g_{11} = - \left\{ 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r} \left[\frac{1}{2} R_0^2 + R_0^3 \right] \frac{r^3}{3} \right\}^{-1}$$

$$g_{11} = - \left\{ 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha R_0^2 r^2}{6} + \frac{\alpha R_0^3 r^2}{3} \right\}^{-1}$$

$$g_{11} = - \left\{ 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha R_0^2 r^2 + 2\alpha R_0^3 r^2}{6} \right\}^{-1}$$

$$g_{11} = - \left\{ 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] \right\}^{-1}$$

Untuk g_{22} dan g_{33} adalah

$$g_{22} = -r^2$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

Sehingga solusi Reissner Nordstrom dalam teori $f(R)$ dengan kasus $R + \alpha R^2$ dapat dituliskan dalam bentuk elemen garis sebagai berikut

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] \right) dt^2 \\ & - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] \right)^{-1} dr^2 \quad (3.130) \\ & - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned}$$

Solusi tersebut serupa dengan solusi lubang hitam Reissner-Nordstrom dalam teori Einstein dengan adanya suku tambahan $\frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]$.

3.3 Termodinamika Lubang Hitam Reissner Nordstrom

Berdasarkan perhitungan Hawking, luas event horizon akan mengecil seiring waktu, dikarenakan penciptaan partikel disekitar event horizon yang menyebabkan pengurangan jumlah massa pada lubang hitam (Hawking 1993). Namun, hal ini bertentangan dengan hukum kedua termodinamika, dimana nilai entropi pada sistem tertutup/terisolasi akan selalu bertambah. Kemudian J.

Bekenstein menemukan hubungan antara kenaikan massa, entropi dan luasan event horizon (Bekenstein 1973). Nilai entropi pada lubang hitam diberikan oleh

$$S = \frac{k_B A}{4l_p} \quad (3.131)$$

Dengan k_B merupakan konstanta Boltzman, l_p adalah panjang Plank dan A merupakan luasan area lubang hitam. luas even horizon dapat dijabarkan dengan

$$A = 4\pi r^2 \quad (3.132)$$

Diketahui bahwa nilai jar-jari event horizon didefinisikan dengan $r^2 = \frac{2GM}{c^2}$, sehingga persamaan (3.131) dapat dituliskan menjadi

$$S = \frac{8\pi k_B GM}{4l_p c^2} \quad (3.133)$$

Seluruh besaran pada persamaan (3.133) memiliki nilai yang konstan, kecuali kuantitas massa. Dari hubungan tersebut, dapat disimpulkan bahwa semakin bertambahnya massa akan semakin menambah nilai entropi pada lubang hitam. Makna fisis yang diberikan dari persamaan tersebut sesuai dengan teori-teori yang sebelumnya telah dikemukakan, bahwa event horizon akan bertambah dengan seiring bertambahnya massa dalam lubang hitam, serta bersesuaian dengan hukum kedua termodinamika terkait entropi dalam sistem tertutup/terisolasi.

Persamaan (3.133) menunjukkan bahwa hanya kuantitas massa yang memiliki nilai serupa variabel, sehingga dapat dicari terlebih dahulu nilai dari massa suatu lubang hitam untuk kemudian didapatkan kuantitas termodinamika yang lain menggunakan persamaan termodinamika dalam lubang hitam berikut

$$T = \partial M / \partial S \quad (3.134)$$

Kuantitas massa didapatkan dari solusi metrik lubang hitam yang telah dicari pada bab sebelumnya. Kuantitas massa, temperatur dan entropi lubang hitam akan diterangkan pada sub bab berikut.

3.3.1 Kuantitas Massa, Temperatur dan Entropi untuk Solusi Reissner Nordstrom

Solusi metrik untuk ruang waktu simetri bola secara umum ialah

$$ds^2 = N(r)dt^2 - N(r)^{-1} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.135)$$

Solusi metrik untuk lubang hitam Reissner-Nordstrom menurut teori

Einstein adalah sebagai berikut:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.136)$$

Sehingga, dengan mencari solusi pada persamaan (3.136). Dalam bentuk r_+ dimana, $N(r_+) = 0$ maka kuantitas massa didapatkan yaitu:

$$M = \frac{Q^2}{2r} + \frac{r}{2} \quad (3.137)$$

Untuk mendapatkan kuantitas temperatur, kuantitas massa yang telah didapatkan diturunkan terhadap entropi, sehingga kuantitas massa tersebut dituliskan ke dalam bentuk kuantitas entropi dengan menggunakan relasi antara entropi dan radius peristiwa ($S = \pi r_+^2$), kuantitas massa di atas dapat dituliskan dalam bentuk entropi seperti berikut:

$$M_1 = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} Q^2}{2S^{\frac{1}{2}}}, \quad M_2 = \frac{S^{\frac{1}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \quad (3.138)$$

Dilakukan penyamaan penyebut pada masing-masing ruas sehingga

$$M(S, l, q) = \frac{\pi Q^2 + S}{2\pi^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.139)$$

Untuk mendapatkan kuantitas temperatur dan entropi dilakukan penerapan hukum pertama termodinamika yakni,

$$\partial M = T \partial S$$

Maka, kuantitas untuk temperaturnya adalah

$$T = \frac{\partial M}{\partial S}$$

Substitusikan persamaan (3.139), sehingga

$$T_1 = \frac{\pi Q^2}{2\pi^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}}} dS = -\frac{\pi^{\frac{1}{2}} Q^2}{4S^{\frac{3}{2}}} \quad (3.140)$$

$$T_2 = \frac{S}{2\pi^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}}} dS = \frac{S^{\frac{1}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}}} dS = \frac{1}{4\pi^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}}}$$

Kemudian kuantitas temperature dapat dituliskan menjadi

$$T = -\frac{\pi^{\frac{1}{2}} Q^2}{4S^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{4\pi^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}}} \quad (3.141)$$

Dilakukan penyamaan penyebut pada persamaan di atas, sehingga

$$T = \frac{-\pi Q^2 + S}{4\pi^{\frac{1}{2}} S^{\frac{3}{2}}} \quad (3.142)$$

Kuantitas entropi juga didapatkan dengan menerapkan hukum pertama termodinamika

$$S = \int \frac{dM}{T} \quad (3.143)$$

Atau

$$S = \int_0^{r_+} \frac{1}{T} \left(\frac{dM}{dr_+} \right) dr_+ \quad (3.144)$$

Turunan dari M terhadap r_+ adalah

$$\frac{\pi Q^2 + S}{2\pi^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}}}$$

$$M = \frac{\pi Q^2 + S}{2\pi^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}}} = \frac{Q^2}{2r} + \frac{r}{2} \quad (3.145)$$

$$\frac{dM}{dr_+} = \frac{-Q^2}{4r^2} + \frac{1}{2} = \frac{r^2 - Q^2}{2r^2}$$

Kuantitas tempertur jika dituliskan dalam bentuk r_+ adalah

$$T = -\frac{\pi^{\frac{1}{2}} Q^2}{4S^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{4\pi^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}}} = \frac{-\pi^{\frac{1}{2}} Q^2}{4\pi^{\frac{3}{2}} r^3} + \frac{1}{4\pi r} \quad (3.146)$$

Kemudian untuk dapat memenuhi persamaan (3.144) kuantitas termodinamika dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{1}{T} = \frac{4\pi^{\frac{3}{2}}r^3 - 4\pi^{\frac{3}{2}}Q^2r}{-\pi^{\frac{1}{2}}Q^2} \quad (4.147)$$

Substitusikan pada persamaan (3.144),

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{r_+} \left(\frac{4\pi^{\frac{3}{2}}r^3 - 4\pi^{\frac{3}{2}}Q^2r}{-\pi^{\frac{1}{2}}Q^2} \right) \left(\frac{r^2 - Q^2}{2r^2} \right) dr_+ \\ &= \int_0^{r_+} \frac{4\pi^{\frac{3}{2}}r^5 - 4\pi^{\frac{3}{2}}Q^2r^3 - 4\pi^{\frac{3}{2}}Q^2r^3 + 4\pi^{\frac{3}{2}}Q^4r}{-2\pi^{\frac{1}{2}}Q^2r^2} dr_+ \\ &= \frac{1}{-2\pi^{\frac{1}{2}}Q^2} \int_0^{r_+} \left(4\pi^{\frac{3}{2}}r^3 - 4\pi^{\frac{3}{2}}Q^2r - 4\pi^{\frac{3}{2}}Q^2r + \frac{4\pi^{\frac{3}{2}}Q^4}{r} \right) dr_+ \\ &= \frac{1}{-2\pi^{\frac{1}{2}}Q^2} \left(\pi^{\frac{3}{2}}r^4 - 2\pi^{\frac{3}{2}}Q^2r^2 - 2\pi^{\frac{3}{2}}Q^2r^2 + 4\pi^{\frac{3}{2}}Q^4 \ln r \right) \end{aligned} \quad (3.148)$$

Dituliskan dalam bentuk yang lebih sederhana sebagai berikut

$$S = \frac{\pi r^4}{-2Q^2} + 2\pi r^2 + 2\pi Q^2 \ln r \quad (3.149)$$

3.3.2 Kuantitas Massa, Temperatur dan Entropi untuk Solusi Reissner-Nordstrom dengan Metode Gangguan

Untuk mendapatkan solusi termodinamika lubang hitam Reissner Nordstrom dalam teori $f(R)$ dapat dilakukan dengan menemukan nilai kuantitas massa pada komponen $N(r)$ elemen garis. Mengikuti bentuk

$$ds^2 = N(r)dt^2 - N(r)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.150)$$

Solusi elemen garis pada persamaan (3.144) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned}
ds^2 = & \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] \right) dt^2 \\
& - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] \right)^{-1} dr^2 \quad (3.151) \\
& - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)
\end{aligned}$$

Dengan

$$N(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] \quad (3.152)$$

Kuantitas termodinamika yang bisa kita dapatkan dengan memecahkan permasalahan menggunakan persamaan (3.152) ialah dengan menemukan kuantitas massa lubang hitam M dalam bentuk entropi S serta radius kelengkungan ruang de Sitter (Soroushfar, Saffari, and Kamvar 2016).

$$M = \frac{Q^2}{2r} + \frac{R_0 r^3}{12} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] + \frac{r}{2} \quad (3.153)$$

Menggunakan hubungan antara entropi S , dan radius horizon peristiwa r_+ , ($S = \pi r_+^2$), , massa dari lubang hitam dalam bentuk entropi, muatan, konstanta α dan radius ruang de Sitter didapatkan.

$$M = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} Q^2}{2S^{\frac{1}{2}}} + \frac{R_0 S^{\frac{3}{2}}}{12\pi^{\frac{3}{2}}} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] + \frac{S^{\frac{1}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}}} \quad (3.154)$$

Dengan menggunakan persamaan pada hukum pertama termodinamika, dimana kita mendapatkan nilai temperature dengan menurunkan massa terhadap entropi ($T = \partial M / \partial S$) sehingga dari persamaan (3.154) didapatkan kuantitas temperatur.

Perhitungan diberlakukan pada setiap ruas

$$T_1 = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} Q^2}{2S^{\frac{1}{2}}} dS = -\frac{\pi^{\frac{1}{2}} Q^2}{4S^{\frac{3}{2}}} \quad (3.155)$$

$$T_2 = \frac{R_0 S^{\frac{3}{2}}}{12\pi^{\frac{3}{2}}} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] dS = \frac{3R_0 S^{\frac{1}{2}}}{24\pi^{\frac{3}{2}}} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] \quad (3.156)$$

$$T_3 = \frac{S^{\frac{1}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}}} dS = \frac{1}{4\pi^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}}} \quad (3.157)$$

Dengan menggabungkan seluruh komponen menjadi

$$T = -\frac{\pi^{\frac{1}{2}} Q^2}{4S^{\frac{3}{2}}} + \frac{3R_0 S^{\frac{1}{2}}}{24\pi^{\frac{3}{2}}} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] + \frac{1}{4\pi^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}}} \quad (3.158)$$

Menggunakan besaran $\partial M = T\partial S$, kita bisa mendapatkan nilai dari entropi lubang hitam, di mana

$$S = \int \frac{\partial M}{T} \quad (3.159)$$

Atau

$$S = \int_0^{r_+} \frac{1}{T} \left(\frac{dM}{dr_+} \right) dr_+ \quad (3.160)$$

Kuantitas massa dituliskan dalam bentuk r_+ adalah

$$M = \frac{Q^2}{2r} + \frac{R_0 r^3}{12} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] + \frac{r}{2} \quad (3.161)$$

Sehingga turunan pertamanya terhadap r_+ adalah

$$\frac{dM}{dr_+} = -\frac{Q^2}{2r^2} + \frac{R_0 r^2}{4} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] + \frac{1}{2} \quad (3.162)$$

Untuk memenuhi persamaan (3.160) disajikan kuantitas temperatur dalam bentuk r_+ adalah

$$T = \frac{-\pi^{\frac{1}{2}}Q^2}{4\pi^{\frac{3}{2}}r^3} + \frac{3\pi^{\frac{1}{2}}R_0r}{24\pi^{\frac{3}{2}}}[\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] + \frac{1}{4\pi r} \quad (3.163)$$

Untuk memenuhi persamaan (3.160) maka kuantitas temperatur dituliskan dalam bentuk

$$\frac{1}{T} = \frac{4\pi r^3}{-Q^2} + \frac{8\pi}{R_0r} \frac{1}{[\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]} + 4\pi r \quad (3.164)$$

Substitusikan persamaan (3.162) dan (3.164) pada persamaan (3.160)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{r_+} \left[\left(\frac{4\pi r^3}{-Q^2} + \frac{8\pi}{R_0r} \frac{1}{[\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]} + 4\pi r \right) \left(\frac{-Q^2}{2r^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{R_0r^2}{4} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] + \frac{1}{2} \right) \right] dr_+ \\ &= \int_0^{r_+} \left(\frac{-4\pi Q^2 r^3}{-2Q^2 r^2} + \frac{4\pi R_0 r^5 [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]}{-4Q^2} + \frac{4\pi r^3}{-2Q^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-8\pi Q^2}{2R_0 r^3 [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]} + \frac{8\pi R_0 r^2 [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]}{4R_0 r [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{8\pi}{2R_0 r [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]} - \frac{-4\pi Q^2 r}{2r^2} + \frac{4\pi R_0 r^3}{4} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\pi r}{2} \right) dr_+ \end{aligned} \quad (3.165)$$

Sederhanakan persamaan di atas

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{r_+} \left(2\pi r + \frac{\pi R_0 r^5 [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]}{-Q^2} + \frac{2\pi r^3}{-Q^2} + \frac{-4\pi Q^2}{R_0 r^3 [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi R_0 r [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]}{R_0 [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]} + \frac{4\pi}{R_0 r [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]} + \frac{-2\pi Q^2}{r} \right. \\ &\quad \left. + \pi R_0 r^3 [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] + 2\pi r \right) dr_+ \end{aligned} \quad (3.166)$$

Dengan mengoperasikan integral, maka

$$\begin{aligned}
 S = & \left(\pi r^2 + \frac{\pi R_0 r^6 [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]}{-6Q^2} + \frac{\pi r^4}{-2Q^2} + \frac{2\pi Q^2}{R_0 r^2 [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]} \right. \\
 & + \frac{\pi R_0 r^2 [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]}{R_0 [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]} + \frac{4\pi \ln r}{R_0 r [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]} \\
 & \left. - 2\pi Q^2 \ln r + \frac{\pi R_0 r^4 [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]}{4} + \pi r^2 \right) \quad (3.167)
 \end{aligned}$$

Besaran entropi yang didapatkan pada persamaan (3.167) akan memiliki nilai yang sama dengan besaran entropi untuk Reissner Nordstrom berdasarkan teori Einstein ketika nilai gangguan atau α adalah nol. Begitu pula pada kuantitas massa dan temperature. Yang membedakan hasil dari kedua teori tersebut adalah terletak pada tambahan suku pada metrik yang dihasilkan dengan menggunakan teori gangguan sebagaimana teori $f(R)$ sebagai metode perluasan dari teori Einstein.

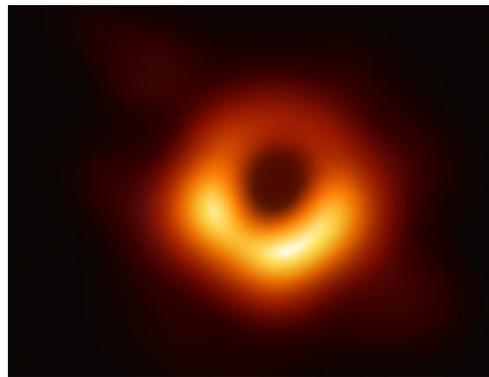
3.4 Pembahasan

Termodinamika merupakan cabang ilmu yang membahas tentang dinamika kalor dan energi. Termodinamika lubang hitam sendiri merupakan suatu cabang studi yang berusaha untuk mencari hubungan antara keberadaan lubang cakrawala peristiwa (*event horizon*) pada lubang hitam dengan hukum-hukum termodinamika. Untuk dapat menerapkan hukum-hukum termodinamika ke dalam lubang hitam, maka terlebih dahulu lubang hitam diasumsikan sebagaimana suatu sistem yang didalamnya dapat terjadi proses-proses termodinamika. Lubang hitam

dicirikan sebagai suatu sistem terisolasi yang mana masih terdapat perpindahan partikel sehingga masih memungkinkan untuk adanya perubahan kuantitas massa.

Berkenaan dengan kegagalan persamaan Einstein dalam menjelaskan beberapa fenomena langit menjadikan banyaknya keraguan pada keabsahan persamaan medan Einstein sehingga dilakukan banyak modifikasi untuk mencari model yang sesuai dengan alam semesta ini. Namun, persamaan medan Einstein tidak sepenuhnya gagal, karena fenomena alam yang diramalkan Einstein melalui persamaannya dapat dibuktikan keberadaannya saat ini.

Adanya temuan yang membuktikan kebenaran dari persamaan medan Einstein ialah sebuah penampakan dari lubang hitam supermassif yang ditangkap oleh Event Horizon Telescope (EHT) terletak di dekat galaksi Messier 87.



Gambar 3. 2 Citra Lubang Hitam Supermassif
Sumber : (EHT Collaboration 2019)

Untuk dapat memastikan jenis modifikasi yang dilakukan pada penelitian ini merupakan sebuah teori yang dapat memperumum teori Eintein, maka dilakukan perbandingan terhadap hasil yang didapatkan berdasarkan teori modifikasi dengan hasil yang diberikan berdasarkan teori Einstein.

Perbedaan hasil yang didapat dari solusi persamaan medan Einstein dan yang telah dimodifikasi terletak pada nilai kelekungannya.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (3.168)$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}(1 + \alpha 2R) - \frac{1}{2}(R + \alpha R^2)g_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu)\alpha 2R \\ = 8\pi GT_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.169)$$

Persamaan (3.168) merupakan persamaan medan Einstein dan (3.169) merupakan persamaan medan Einstein termodifikasi dengan nilai $f(R) = R + \alpha R^2$. Jika ruas yang terdapat nilai α dimana $\alpha = 0$ pada persamaan (3.169) maka persamaan tersebut akan kembali pada persamaan medan Einstein secara umum.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (3.170)$$

$$\begin{aligned} ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]\right) dt^2 \\ - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]\right)^{-1} dr^2 \\ - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (3.171)$$

Persamaan (3.170) dan persamaan (3.171) merupakan solusi metrik lubang hitam Reissner-Nordstrom menurut teori Einstein dan teori termodifikasi. Seperti pada persamaan medan Einstein (3.168) dan (3.169) jika ruas persamaan yang memiliki nilai $\alpha = 0$, maka persamaan (3.171) akan kembali pada persamaan lubang hitam Reissner-Nordstrom secara umum.

Ditinjau dari hasil kuantitas termodinamika yang dihasilkan dari dua metode yang diterapkan juga menunjukkan hasil yang sama bahwasanya jenis modifikasi dari teori Einstein dengan menggunakan teori $f(R)$ yang diujikan pada

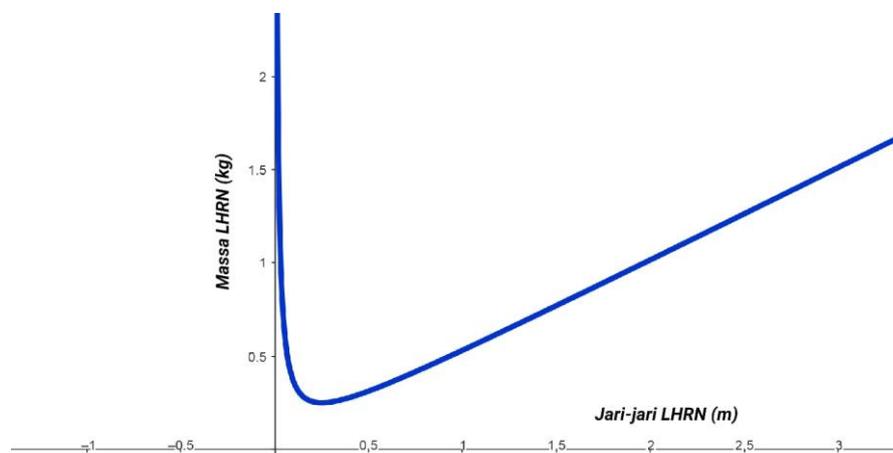
lubang hitam Reissner-Norstrom menunjukkan hasil yang sama jika nilai konstanta α sama dengan nol.

$$M(r) = \frac{\pi Q^2 + S}{2\pi^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}}} = \frac{Q^2}{2r} + \frac{r}{2} \quad (3.172)$$

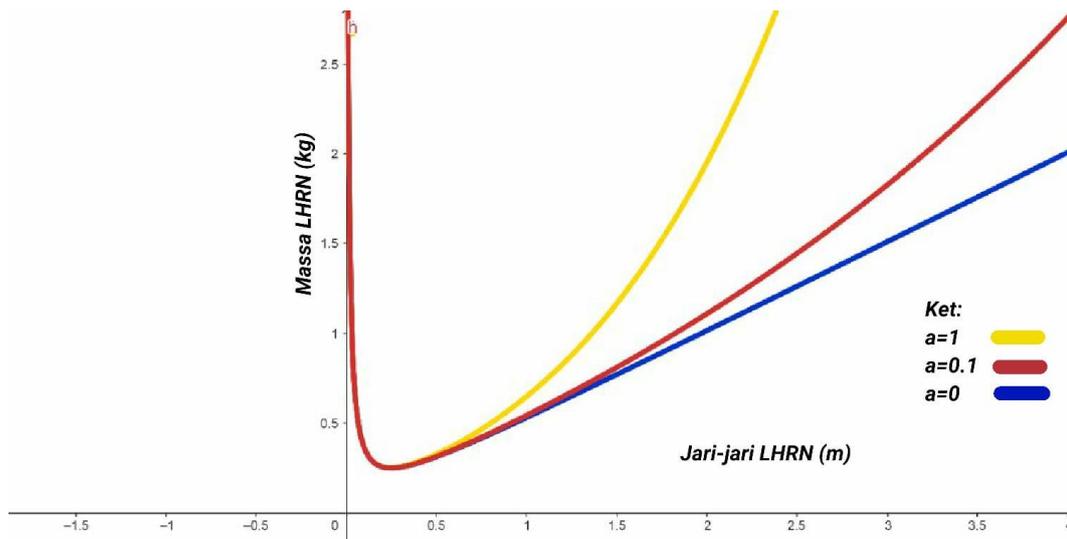
Persamaan (3,172) merupakan hasil dari nilai kuantitas termodinamika lubang hitam Reissner-Nordstrom dalam teori Einstein, kemudian dibandingkan dengan hasil yang diberikan oleh modifikasi $f(R)$ adalah

$$M(r) = \frac{Q^2}{2r} + \frac{R_0 r^3}{12} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] + \frac{r}{2} \quad (3.173)$$

Jika kedua persamaan tersebut disajikan dalam bentuk grafik maka akan menunjukkan hubungan antara massa dan jari-jari lubang hitam dengan massa merupakan variabel y dan jari-jari merupakan variabel x



Gambar 3. 3 Grafik Massa LHRN



Gambar 3. 4 Grafik Massa LHRN Teori $f(R)$

Grafik pada gambar (3.3) dan (3.4) didapatkan dengan melakukan plotting pada persamaan (3.172) untuk gambar (3.3) dan persamaan (3.173) untuk gambar (3.4). Pada proses plotting, persamaan (3.172) dan (3.173) diinputkan ke dalam aplikasi Geogebra.com sebagai fungsi terhadap r , kemudian untuk besaran lain yang tidak terdefinisi dilakukan input nilai berdasarkan tinjauan terdahulu.

Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Shaheb (2016) untuk masing-masing besaran dimana $R_0 = 4\Lambda$, dan $\Lambda = 3/l^2$ nilai besaran untuk $l = 4, Q = 0,25$. Sehingga, nilai untuk besaran $R_0 = 0,715$ dan $Q^2 = 0,0625$ dan besaran ini diberikan juga pada proses plotting untuk kuantitas temperatur dan entropi kemudian. Pada gambar (3.3) menunjukkan satu garis yang menunjukkan hubungan massa dan jari-jari untuk lubang hitam Reissner-Nordstrom dalam teori Einstein, sedangkan untuk gambar (3.4) menunjukkan 3 grafik yang berbeda dengan spesifikasi, grafik berwarna kuning diberikan untuk nilai $\alpha = 1$, grafik berwarna merah untuk nilai $\alpha = 0,1$ sedangkan biru merupakan grafik dengan nilai $\alpha = 0$. Untuk nilai $\alpha = 0$ bentuk grafik memiliki kesamaan dengan grafik pada

lubang hitam dengan teori Einstein. Pada grafik dengan $a = 0$, kuantitas massa lubang hitam dalam teori $f(R)$ memiliki kesamaan dengan kuantitas massa berdasarkan teori Einstein, karena pada saat $a = 0$ nilai kelengkungan yang semula $f(R) = R + aR^2$ akan kembali pada nilai kelengkungan persamaan medan Einstein yaitu $f(R) = R$. Karena hal tersebut, bentuk grafik yang ditampilkan pada saat $a = 0$ membentuk grafik linier dan saat $a = 0,1$ dan $a = 1$ dimana pada saat ini nilai gangguan terlihat dari yang paling kecil hingga maksimum akan membentuk grafik berdasarkan fungsi kuadrat.

Makna fisis yang dapat dipahami dari grafik (3.3) dan (3.4) adalah nilai kuantitas massa semakin bertambah seiring dengan bertambahnya nilai dari jari-jari lubang hitam. Pernyataan ini dikuatkan dengan teori terkait hubungan massa lubang hitam dan jari-jari lubang hitam yang dituliskan sebagai berikut (Kutner, 2003):

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.174)$$

Dari persamaan tersebut dapat dianalisis hubungan antara jari-jari dan massa lubang hitam, dimana ketika jari-jari lubang hitam semakin bertambah maka massa lubang hitam akan semakin bertambah. Hubungan tersebut juga yang ditunjukkan oleh grafik pada gambar (3.3) dan (3.4).

Jika diamati lebih seksama, grafik pada gambar Jika diamati lebih seksama, grafik pada gambar (3.3) dan (3.4) menunjukkan bahwa mulanya memiliki masa yang sangat besar kemudian pada nilai masanya terjadi penurunan yang sangat drastis hingga kemudian kuantitas masanya kembali membesar. Jika dikaitkan dengan fenomena Big Bang maka grafik tersebut memberikan representasi

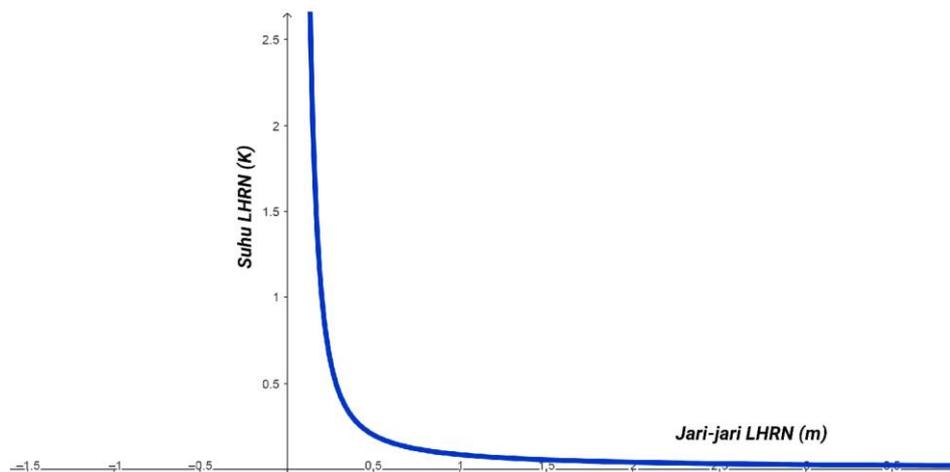
yang sesuai dengan fenomena Big Bang, dimana alam semesta yang mulanya berawal dari satu titik singularitas kemudian setelah terjadi ledakan besar alam semesta terus mengembang hingga saat ini.

Analisis selanjutnya dilakukan pada hasil kuantitas temperatur lubang hitam pada masing-masing teori, baik teori Einstein ataupun teori modifikasi $f(R)$.

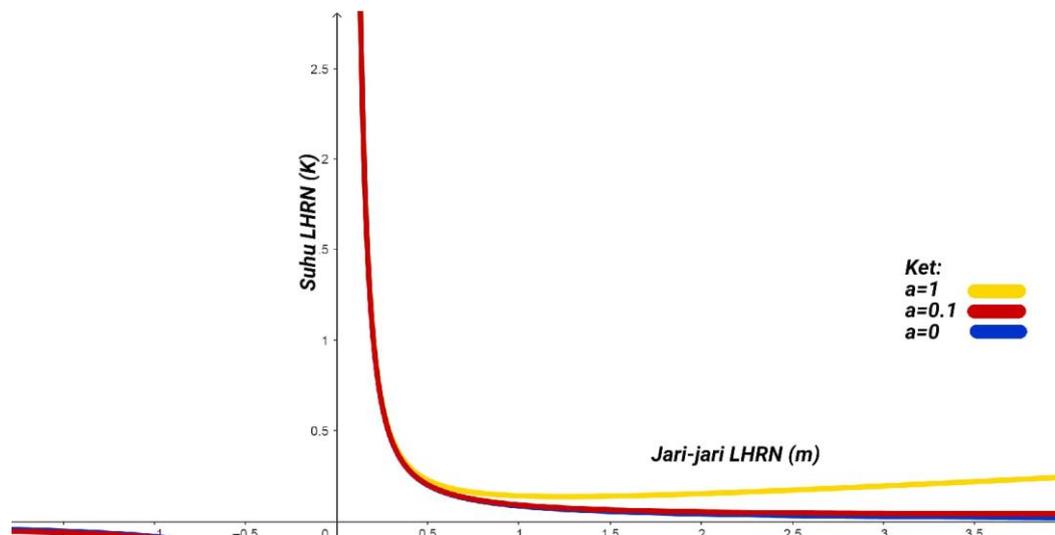
$$T(r) = -\frac{\pi^{\frac{1}{2}}Q^2}{4S^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{4\pi^{\frac{1}{2}}S^{\frac{1}{2}}} = \frac{-\pi^{\frac{1}{2}}Q^2}{4\pi^{\frac{3}{2}}r^3} + \frac{1}{4\pi r} \quad (3.175)$$

$$T(r) = -\frac{\pi^{\frac{1}{2}}Q^2}{4\pi^{\frac{3}{2}}r^3} + \frac{3R_0S^{\frac{1}{2}}}{24\pi^{\frac{3}{2}}}[\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2] + \frac{1}{4\pi r} \quad (3.176)$$

Persamaan (3.175) dan (3.176) masing-masing merupakan kuantitas temperatur lubang hitam sebagai fungsi jari-jari (r). Proses plotting dilakukan pada kedua persamaan tersebut dengan teknik yang sama dengan yang dilakukan pada pembentukan grafik pada gambar (3.3) dan (3.4) menghasilkan:



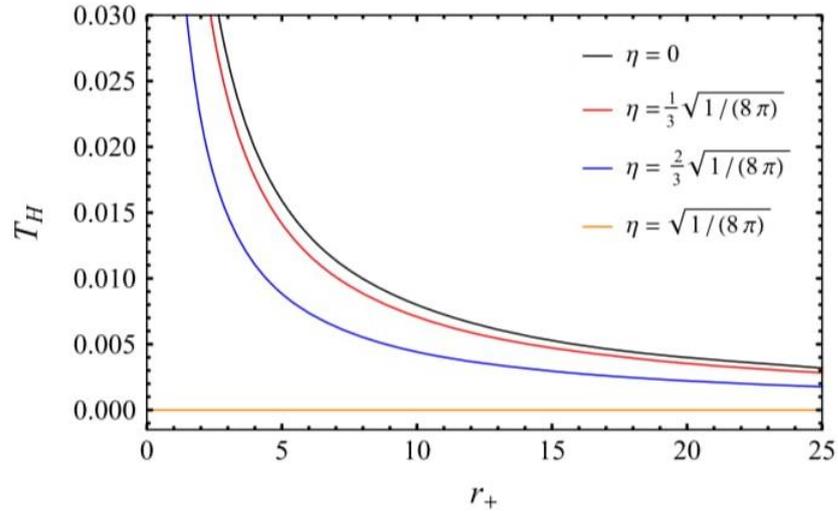
Gambar 3. 5 Grafik Temperatur LHRN



Gambar 3. 6 Grafik Temperatur LHRN Teori $f(R)$

Berbeda dengan massa lubang hitam sebelumnya yang menunjukkan perbedaan yang signifikan ketika nilai konstanta yang berbeda diberikan, perbedaan nilai α dalam kuantitas temperatur tidak menunjukkan perbedaan yang signifikan sebagaimana yang ditunjukkan oleh grafik fungsi pada gambar (3.6) di mana grafik tersebut menunjukkan bentuk hubungan dari kuantitas temperatur dalam lubang hitam Reissner Nordstrom menggunakan Teori $f(R)$ memiliki kesamaan dengan hasil grafik temperatur untuk lubang hitam Reissner Nordstrom dalam teori Einstein.

Makna fisis yang dapat diketahui berdasarkan analisis tersebut adalah relatif konstan terhadap jari-jari lubang hitam. Penelitian yang dilakukan oleh (Ramadan, Prasetyo, & Kusuma, 2018) dengan melakukan identifikasi berdasarkan temperatur lubang hitam yang dicetuskan oleh Hawking menunjukkan hasil yang serupa meskipun dilakukan dengan pendekatan yang berbeda. Dimana hasil penelitian tersebut menunjukkan hasil berikut:



Gambar 3. 7 Termodinamika lubang hitam RN

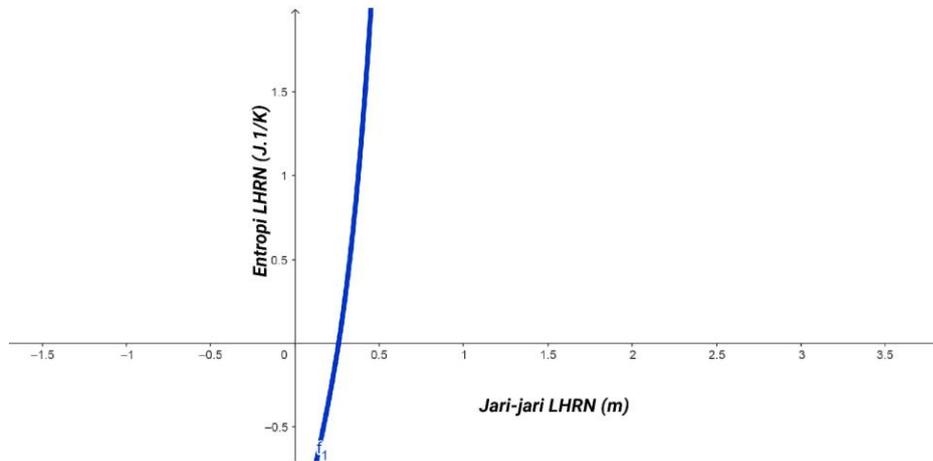
Sumber: (Ramadhan, Prasetyo, and Kusuma 2018)

Analisis kuantitas terakhir dilakukan pada kuantitas entropi. Dituliskan entropi lubang hitam Reissner-Nordstrom berdasarkan teori Einstein dan modifikasi $f(R)$ sebagai fungsi r adalah

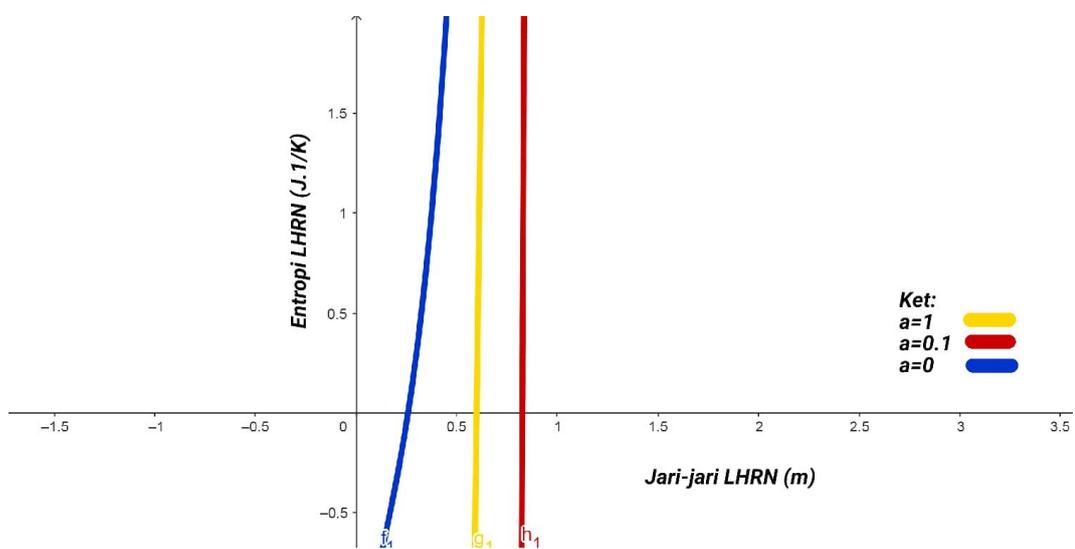
$$S(r) = \frac{\pi r^4}{-2Q^2} + 2\pi r^2 + 2\pi Q^2 \ln r \quad (3.178)$$

$$S(r) = \left(\pi r^2 + \frac{\pi R_0 r^6 [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]}{-6Q^2} + \frac{\pi r^4}{-2Q^2} + \frac{2\pi Q^2}{R_0 r^2 [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]} \right. \\ \left. + \frac{\pi R_0 r^2 [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]}{R_0 [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]} + \frac{4\pi \ln r}{R_0 r [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]} \right. \\ \left. - 2\pi Q^2 \ln r + \frac{\pi R_0 r^4 [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]}{4} + \pi r^2 \right) \quad (3.177)$$

Menggunakan besaran dan teknik yang sama pada kuantitas massa dan temperatur, didapatkan bentuk grafik untuk besaran termodinamika untuk entropi sebagai berikut:



Gambar 3. 8 Grafik Entropi LHRN



Gambar 3. 9 Grafik Entropi LHRN Teori $f(R)$

Grafik yang diberikan oleh kuantitas entropi menunjukkan hubungan yang sama dengan kuantitas masa, dinamika dengan nilai a yang berbeda memberikan perbedaan yang signifikan pada grafik fungsi hubungan entropi dalam teori $f(R)$,

untuk nilai $\alpha = 0$ kembali pada bentuk grafik lubang hitam Reissner Nordstrom dalam Teori Einstein. Pada grafik tersebut disajikan hubungan dari setiap kuantitas terhadap jari-jari (r).

Makna fisis yang dapat dianalisis dari grafik pada gambar (3.8) dan (3.9) menunjukkan bahwa entropi cenderung naik dengan nilai jari-jari sebagai luas horizon peristiwa yang relatif konstan. Keadaan ini sesuai dengan hukum kedua termodinamika yang menyatakan bahwa suatu sistem terisolasi cenderung memiliki entropi yang terus meningkat (Fitri 2014). Sebagaimana yang diketahui bahwa lubang hitam merupakan sistem yang terisolasi, sehingga grafik menunjukkan kesesuaian dengan fenomena yang ada.

3.5 Entropi dalam Al-Qur'an

Integrasi memiliki arti menyatu-padukan atau dengan pengertian lebih lanjut penggabungan dan penyatuan tersebut dilakukan pada unsur-unsur yang berbeda hingga menjadi satu pemahaman yang utuh (Rusdiana 2014). Adanya integrasi ilmu sains dan Al-Qur'an bertujuan untuk menjelaskan bagaimana Al-Qur'an sebagai pedoman umat Islam tidak hanya mengatur hubungan antara manusia, tetapi juga hukum-hukum serta fenomena alam yang terjadi saat ini.

Berdasarkan temuan yang dilakukan oleh Edwin Hubble pada tahun 1929 dikatakan bahwa galaksi di sekitar Bima Sakti bergerak menjauh seiring dengan berjalannya waktu, diduga bahwa alam semesta mulanya berasal dari satu titik massa yang besar kemudian mengalami ledakan yang dikenal juga dengan "*Big Bang*".

Pecahan massa mulanya berawal dari satu titik singularitas juga dapat dijelaskan dari hasil penelitian ini. Dimana pada gambar (3.3) dan (3.4) menunjukkan grafik hubungan massa dan jari-jari lubang hitam dilihat bahwa semula massa lubang lubang hitam terdeteksi sangat besar pada titik jari-jari yang sangat kecil, kemudian dalam waktu singkat massa lubang hitam mengalami penurunan yang sangat drastic kemudian massa lubang hitam kembali membesar seiring dengan semakin bertambahnya jari-jari lubang hitam. Menggunakan pendekatan yang berbeda, dimana terdapat nilai gangguan $a = 0,1$ hingga $a = 1$, penurunan massa terjadi pada titik jari-jari yang sama dengan teori yang disampaikan Einstein sebelum kembali mengalami peningkatan massa dan jari-jari.

Dalam penelitian ini, lubang hitam diasumsikan sebagai suatu sistem terisolasi dimana batas sistemnya ditunjukkan oleh keberadaan *event horizons*. Massa di dalam lubang hitam memiliki dua karakteristik yang berbeda dimana terdapat massa yang sudah teridentifikasi dan tidak teridentifikasi. Massa yang sejak awal berada di dalam lubang hitam merupakan sekelompok massa yang teridentifikasi, sedangkan sekumpulan partikel yang tidak terdefinisi yang berada di daerah *inner horizons* merupakan sekelompok massa yang tidak terdefinisikan. Pengembangan lubang hitam terjadi akibat adanya pertukaran antara massa teridentifikasi dan massa yang tidak teridentifikasi didalam inti lubang hitam dengan daerah disekitar *inner horizon*. Melihat fenomena tersebut, maka seluruh daerah di dalam *event horizon* merupakan daerah dengan sistem terbuka.

Memiliki karakteristik yang sama dengan lubang hitam, alam semesta merupakan sistem terisolasi yang sangat besar sedangkan massa yang ada di

dalamnya terdapat materi sebagai koefisien massa yang juga memiliki dua jenis karakteristik. Materi yang teramati saat ini merupakan jenis massa yang sudah teridentifikasi keberadaannya sedangkan *dark metter* dan *dark energy* merupakan massa alam semesta yang belum teridentifikasi. Interaksi dari kedua massa tersebut yang saat ini masih mempengaruhi proses pengembangan alam semesta. Kesamaan tersebut yang menjadi dasar penarikan kesimpulan bahwa alam semesta mulanya berawal dari satu titik singularitas sebagai mana yang telah ditunjukkan pada gambar (3.3) dan (3.4).

Al-Quran dengan sangat spesifik menjelaskan kedua fenomena tersebut yakni proses terjadinya "*Big Bang*" serta terjadinya perluasan alam semesta saat ini. Surah Al-Anbiya' ayat 30 merupakan ayat yang menjelaskan terjadinya "*Big Bang*" pada awal penciptaan alam semesta. Dimana ayat tersebut berbunyi:

أَوَلَمْ يَرَ الَّذِينَ كَفَرُوا أَنَّ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ كَانَتَا رَتْقًا فَفَتَقْنَاهُمَا ۖ وَجَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ كُلَّ

شَيْءٍ حَيٍّ أَفَلَا يُؤْمِنُونَ ﴿٣٠﴾

Artinya: "Dan apakah orang-orang yang kafir tidak mengetahui bahwasanya langit dan bumi itu keduanya dahulu adalah suatu yang padu, kemudian Kami pisahkan antara keduanya. Dan dari air Kami jadikan segala sesuatu yang hidup. Maka mengapakah mereka tiada juga beriman?"

Sedangkan fenomena alam semesta mengembang di dalam Al-Quran di jelaskan dalam Surah Az-Zariyat ayat 47, yang berbunyi sebagai berikut:

وَالسَّمَاءَ بَنَيْنَاهَا بِأَيْدٍ وَإِنَّا لَمُوسِعُونَ ﴿٤٧﴾

Artinya: "Dan langit itu kami bangun dengan kekuasaan kami dan sesungguhnya kami benar-benar meluaskannya."

Fenomena saat ini yang juga dipengaruhi oleh peristiwa *Big Bang* dan perluasan alam semesta ialah perubahan suhu alam semesta sebelum ledakan dan setelah ledakan. Grafik pada gambar (3.5) dan (3.6) menunjukkan bahwa alam semesta sebelum terjadinya ledakan memiliki suhu yang sangat tinggi dan berangsur-angsur suhunya mendekati stabil bersamaan dengan proses semakin meluasnya alam semesta. Fenomena yang terjadi sepersekian detik setelah terjadi ledakan adalah terciptanya partikel-partikel sub atom serta inti-inti atom pada saat alam semesta masih cukup panas untuk memungkinkan terjadinya interaksi antar partikel kemudian mulai mendingin saat interaksi partikel tersebut menciptakan materi-materi alam semesta saat ini dan suhu alam semesta mulai mendekati stabil saat alam semesta mengembang saat ini.

Ditinjau dari kuantitas entropi, pada gambar (3.8) dan (3.9) yang menunjukkan grafik hubungan entropi dan jari-jari lubang hitam menunjukkan bahwa entropi alam semesta selalu mengalami peningkatan dengan laju perubahan yang sangat kecil. Fenomena ini memberikan konsekuensi bahwa alam semesta masih memiliki umur yang sangat lama untuk dapat mencapai keteraturan.

Makna kata ‘meluaskan’ pada Surah Az-Zariyat ayat 47 merujuk pada peristiwa alam semesta yang senantiasa terus berkembang, terlihat bagaimana galaksi saling menjauhi satu sama lain. Sebagaimana yang kita ketahui bahwasanya alam semesta sampai saat ini mengalami perkembangan yang terus menerus disebabkan adanya entropi yang mengalami proses irreversibel dimana tidak ada pergerakan kalor yang kembali pada titik semula. Sehingga kalor yang berada di dalam semesta terus mendorong terjadinya pengembangan disebabkan adanya proses irreversibel tersebut.

Berdasarkan ayat tersebut, kita dapat melihat kekuasaan Allah melalui Al-Quran. Sebagaimana nama lain Al-Quran yakni Ar-Rahman dan Al Huda, di mana Al Quran sebagai rahmat bagi seluruh alam serta sebagai petunjuk bagi orang-orang yang berpikir. Telah banyak ayat dalam Al-Quran yang memrintahkan kita untuk berpikir tentang bagaimana Allah telah menunjukkan kuasa-Nya melalui banyaknya fenomena alam yang saat ini baru kita ketahui, namun Al Quran telah menjelaskan hal tersebut jauh sebelum para ilmuwan melakukan penelitian tentang fenomena tersebut.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

1. Persamaan medan Einstein yang didapatkan dari hasil modifikasi dalam aksi Hilbert, dituliskan sebagai berikut:

$$R_{\mu\nu}(1 + f'(R)) - \frac{1}{2}(R + f(R))g_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\nu\nabla_\mu)f'(R) = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

Untuk kasus $R + \alpha R^2$

$$R_{\mu\nu}(1 + \alpha 2R) - \frac{1}{2}(R + \alpha R^2)g_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)\alpha 2R = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

2. Solusi lubang hitam Reissner-Nordstrom dalam teori $f(R)$ adalah

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Pembeda antara solusi Reissner-Nordstrom menurut teori Einstein dengan solusi modifikasi $f(R)$ terletak pada tambahan suku $\frac{R_0 r^2}{6} [\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2]$.

3. Kuantitas massa, temperatur dan entropi lubang hitam Reissner-Nordstrom dalam teori $f(R)$ memiliki kesesuaian dengan kuantitas termodinamika lubang hitam dalam teori yang dimiliki oleh Einstein pada saat nilai gangguan $\alpha = 0$. Berdasarkan hasil plot grafik perbandingan teori Einstein dengan teori termodifikasi menunjukkan massa lubang hitam mulanya

berada di satu titik singularitas sebelum kemudian mengalami penambahan massa yang sebanding dengan perubahan jari-jari. Untuk kuantitas temperatur lubang hitam menunjukkan bahwa temperatur lubang hitam mendekati kestabilan seiring dengan bertambahnya jari-jari lubang hitam. Untuk kuantitas entropi menunjukkan bahwa entropi lubang hitam terus meningkat dengan nilai jari-jari yang tetap sesuai dengan hukum kedua termodinamika tentang sistem terisolasi dengan batas sistemnya adalah *event horizon*.

4.2 Saran

Dapat dilakukan pada penelitian selanjutnya dengan menggunakan jenis lubang hitam yang berbeda serta dalam kasus untuk nilai kelengkungan yang berbeda pula.

Kuantitas-kuantitas massa yang diperhitungkan dalam penelitian ini adalah massa, temperatur dan entropi, dimana besaran tersebut didapatkan dari hukum pertama termodinamika

DAFTAR PUSTAKA

- Akbar, M., and Rong Gen Cai. 2007. "Thermodynamic Behavior of Field Equations for $f(R)$ Gravity." *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics* 648(2–3): 243–48.
- Bally, John, and E. R. Harrison. 1978. "The Electrically Polarized Universe." *The Astrophysical Journal* (220): 743–44.
- Bekenstein, Jacob D. 1973. "Black Holes and Entropy." *Physical Review D* 7(8): 2333–46.
- Bernard, Canisius. 2017. "Metrik Reissner-Nordström Dalam Teori Gravitasi Einstein." *Jurnal Fisika dan Aplikasinya* 13(1): 1.
- Campos Delgado, Ruben. 2022. "Quantum Gravitational Corrections to the Entropy of a Reissner–Nordström Black Hole." *European Physical Journal C* 82(3): 1–19.
- Carlip, S. 2015. "Black Hole Thermodynamics." University of California.
- Cruz-Dombriz, A. de la, A. Dobado, and A. L. Maroto. 2009. "Black Holes in $f(R)$ Theories." *General Relativity and Quantum Cosmology*: 1–19.
- EHT Collaboration. 2019. "First-Ever Image of a Black Hole Published by the Event Horizon Telescope Collaboration." *Event Horizon Telescope*. <http://evenhorizontelescope.org>.
- Fadlol, Abu, Agus Purwanto, and Bintoro A Subagyo. 2016. "Solusi Reissner-Nordström Dalam Teori Gravitasi $f(R)$." (1).
- Fitri, A. E. 2014. "Simulasi Monitoring Emisi Gas SO₂ Sebagai Indikator Bahaya Letusan Gunung Api Untuk Melatihkan Tindakan Evakuasi." *Jurnal Inovasi Fisika*.
- Gautama, Sungkar E. 2020. "Pengantar Teori Relativitas Umum Dan Kosmologi." : 223.
- Hawking, S. W. 1993. "Particle Creation by Black Holes." *Euclidean Quantum Gravity* 220: 167–88.
- Irawan, Andika. 2016. "Kajian Ruang Waktu Kerr-Newman Dalam Gravitasi Einstein." Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Ky, Nguyen Anh, Pham Van Ky, and Nguyen Thi Hong Van. 2018. "Erratum to: Perturbative Solutions of the $f(R)$ -Theory of Gravity in a Central Gravitational Field and Some Applications (The European Physical Journal C, (2018), 78, 7, (539), 10.1140/Epjc/S10052-018-6023-6)." *European Physical Journal C* 78(8).
- NASA. 2005. "NASA's Gravity Probe B Spacecraft Aims to Confirm Einstein's

- Theory of Relativity or Privise The First Evidence Against It.” *NASA.gov*.
- Nugroho, Ikhsanul Ardi. 2005. *Teori Segala Sesuatu Asal-Usul Dan Kepunahan Alam Semesta*. II. Yogyakarta: Pustaka Pelajar Offset.
- Ramadhan, Handika S., Ilham Prasetyo, and Auliya M. Kusuma. 2018. “Higher-Dimensional Black Holes with Dirac-Born-Infeld (DBI) Global Defect.” *General Relativity and Gravitation* 50(96).
- Rusdiana, A. 2014. “Integrasi Pendidikan Agama Islam dengan Sains dan Teknologi.” *Jurnal Istek* 2(8).
- Sarkar, Sudipta. 2019. 51 *General Relativity and Gravitation Black Hole Thermodynamics: General Relativity and Beyond*.
- Sean.M, Carrol. 2004. *An Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry*. San Francisco: Addison Wesley.
- Shaheb Soroushfar, Reza Saffari, and Negin Kamvar. 2016. “Thermodynamic Geometry of Black Holes in $f(R)$ Gravity.” University of Guilan.
- Simbolon, Managamtua. 2017. “Temperatur Hawking Untuk Lubang Hitam McVittie.” Universitas Katolik Parahyanga.
- Soroushfar, Saheb, Reza Saffari, and Negin Kamvar. 2016. “Thermodynamic Geometry of Black Holes in $f(R)$ Gravity.” *European Physical Journal C* 76(9).
- Sotiriou, Thomas P, and Valerio Faraoni. 2010. “ $F(R)$ Theories of Gravity.”
- Sporea, Ciprian A. 2014. “Notes on $f(R)$ Theories of Gravity.” (4). <http://arxiv.org/abs/1403.3852>.
- Starobinsky, A A. 1980. “A New Type Of Isotropic Cosmological Models Without Singularity.” *Physic Letter* 91(1): 99–102.
- Triyanta, Y Tiando. 2014. “Transfer Panas Lubang Hitam Schwarchild.” *Jurnal MIPA* 37(2): 130–35.
- Zajaiek, Michal, and Arman Tursunov. 2019. “The Electic Charge of Black Holes: Is It Really Always Negligible?” *Observatory* 139(1273): 231–36.

LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

Simbol Christoffel

Elemen garis untuk simetri bola didefinisikan sebagai

$$ds^2 = e^{2\alpha(r,t)}c^2dt^2 - e^{2\beta(r,t)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

Mengikuti elemen garis di atas, dapat dituliskan metrik kovarian $g_{\mu\nu}$

berikut:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\beta(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

dengan bentuk kontravariannya menjadi:

$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2\alpha(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\beta(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix}$$

Simbol Christoffel didefinisikan dengan:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} &= g^{\beta\alpha}\Gamma_{\alpha,\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}g^{\beta\sigma}(\partial_{\nu}g_{\mu\sigma} + \partial_{\mu}g_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

Sehingga untuk $\beta = \alpha = 0$,

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0g_{00} + \partial_0g_{00} - \partial_0g_{00}) = \frac{1}{2}e^{-2\alpha}\partial_t e^{2\alpha} = \dot{\alpha}$$

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1g_{00} + \partial_0g_{10} - \partial_0g_{01}) = \frac{1}{2}e^{-2\alpha}\partial_r e^{2\alpha} = \alpha'$$

$$\Gamma_{02}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2g_{00} + \partial_0g_{20} - \partial_0g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{03}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3g_{00} + \partial_0g_{30} - \partial_0g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0g_{10} + \partial_1g_{00} - \partial_0g_{10}) = \frac{1}{2}e^{-2\alpha}\partial_r e^{2\alpha} = \alpha'$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1g_{10} + \partial_1g_{10} - \partial_0g_{11}) = -\frac{1}{2}e^{-2\alpha}\partial_t(-e^{2\beta}) = \dot{\beta}e^{2(\beta-\alpha)}$$

$$\Gamma_{12}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2g_{10} + \partial_1g_{20} - \partial_0g_{12}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3g_{10} + \partial_1g_{30} - \partial_0g_{13}) = 0$$

$$\Gamma_{20}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0g_{20} + \partial_2g_{00} - \partial_0g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{21}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1g_{20} + \partial_2g_{10} - \partial_0g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2g_{20} + \partial_2g_{20} - \partial_0g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{23}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3g_{20} + \partial_2g_{30} - \partial_0g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{30}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0g_{30} + \partial_3g_{00} - \partial_0g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1g_{30} + \partial_3g_{10} - \partial_0g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2g_{30} + \partial_3g_{20} - \partial_0g_{32}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3g_{30} + \partial_3g_{30} - \partial_0g_{33}) = 0$$

Untuk $\beta = \alpha = 1$,

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0g_{01} + \partial_0g_{01} - \partial_1g_{00}) = -\frac{1}{2}(-e^{-2\beta})\partial_r e^{2\alpha} = \alpha'e^{2(\beta-\alpha)}$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1g_{01} + \partial_0g_{11} - \partial_1g_{01}) = \frac{1}{2}e^{-2\beta}\partial_t e^{2\beta} = \dot{\beta}$$

$$\Gamma_{02}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2g_{01} + \partial_0g_{21} - \partial_1g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{03}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3g_{01} + \partial_0g_{31} - \partial_1g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0g_{11} + \partial_1g_{01} - \partial_1g_{10}) = \frac{1}{2}e^{-2\beta}\partial_t e^{2\beta} = \dot{\beta}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1g_{11} + \partial_1g_{11} - \partial_1g_{11}) = \frac{1}{2}e^{-2\beta}\partial_r e^{2\beta} = \beta'$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2g_{11} + \partial_1g_{21} - \partial_1g_{12}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3g_{11} + \partial_1g_{31} - \partial_1g_{13}) = 0$$

$$\Gamma_{20}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0g_{21} + \partial_2g_{01} - \partial_1g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1g_{21} + \partial_2g_{11} - \partial_1g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2g_{21} + \partial_2g_{21} - \partial_1g_{22}) = -\frac{1}{2}e^{-2\beta}\partial_r r^2 = -re^{-2\beta}$$

$$\Gamma_{23}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3g_{21} + \partial_2g_{31} - \partial_1g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{30}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0g_{31} + \partial_3g_{01} - \partial_1g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1g_{31} + \partial_3g_{11} - \partial_1g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2g_{31} + \partial_3g_{21} - \partial_1g_{32}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3g_{31} + \partial_3g_{31} - \partial_1g_{33})$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2\beta}\partial_r r^2 \sin^2 \theta = -r \sin^2 \theta e^{-2\beta}$$

Untuk $\beta = \alpha = 2$,

$$\Gamma_{00}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{02} + \partial_0 g_{02} - \partial_2 g_{00}) = 0$$

$$\Gamma_{01}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{02} + \partial_0 g_{12} - \partial_2 g_{01}) = 0$$

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{02} + \partial_0 g_{22} - \partial_2 g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{03}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{02} + \partial_0 g_{32} - \partial_2 g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{10}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{12} + \partial_1 g_{02} - \partial_2 g_{10}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{12} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{12}) = \frac{1}{2r^2} \partial_r r^2 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{13}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{12} + \partial_1 g_{32} - \partial_2 g_{13}) = 0$$

$$\Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{22} + \partial_2 g_{02} - \partial_2 g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{23}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{22} + \partial_2 g_{32} - \partial_2 g_{23}) = 0$$

$$\Gamma_{30}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_0 g_{32} + \partial_3 g_{02} - \partial_2 g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{32} + \partial_3 g_{12} - \partial_2 g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{32} + \partial_3 g_{22} - \partial_2 g_{32}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33}) = -\frac{1}{2r^2}\partial_\theta r^2 \sin^2 \theta = -\sin \theta \cos \theta$$

Untuk $\beta = \alpha = 3$,

$$\Gamma_{00}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{03} + \partial_0 g_{03} - \partial_3 g_{00}) = 0$$

$$\Gamma_{01}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{03} + \partial_0 g_{13} - \partial_3 g_{01}) = 0$$

$$\Gamma_{02}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{03} + \partial_0 g_{23} - \partial_3 g_{02}) = 0$$

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{03} + \partial_0 g_{33} - \partial_3 g_{03}) = 0$$

$$\Gamma_{10}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{13} + \partial_1 g_{03} - \partial_3 g_{10}) = 0$$

$$\Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{13} + \partial_1 g_{13} - \partial_3 g_{11}) = 0$$

$$\Gamma_{12}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{13} + \partial_1 g_{23} - \partial_3 g_{12}) = 0$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{13} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{13}) = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \partial_r r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{20}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0 g_{23} + \partial_2 g_{03} - \partial_3 g_{20}) = 0$$

$$\Gamma_{21}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1 g_{23} + \partial_2 g_{13} - \partial_3 g_{21}) = 0$$

$$\Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2 g_{23} + \partial_2 g_{23} - \partial_3 g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3 g_{23} + \partial_2 g_{33} - \partial_3 g_{23}) = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \partial_\theta r^2 \sin^2 \theta = \cot \theta$$

$$\Gamma_{30}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_0g_{33} + \partial_3g_{03} - \partial_3g_{30}) = 0$$

$$\Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1g_{33} + \partial_3g_{13} - \partial_3g_{31}) = 0$$

$$\Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2g_{33} + \partial_3g_{23} - \partial_3g_{32}) = 0$$

$$\Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3g_{33} + \partial_3g_{33} - \partial_3g_{33}) = 0$$

LAMPIRAN 2

Simbol Ricci

Setelah didapatkan nilai dari simbol Christoffel yang tidak nol, dapat dicari Ricci tensornya dengan menggunakan persamaan,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha$$

Dengan sifat kesimetriannya, didapatkan tensor Ricci yang tidak nol adalah:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{\alpha 0}^\alpha + \Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha 0}^\beta \Gamma_{0\beta}^\alpha \\ &= \{\partial_0 \Gamma_{00}^0 + \partial_1 \Gamma_{00}^1\} - \{\partial_0 \Gamma_{00}^0 + \partial_0 \Gamma_{10}^1\} + \{\Gamma_{00}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{10}^1) + \\ &\quad \Gamma_{00}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3)\} - \{(\Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{01}^0) + \\ &\quad (\Gamma_{10}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{01}^1)\} \\ &= \{\ddot{\alpha} + \alpha'' e^{2(\alpha-\beta)} + 2\alpha'(\alpha' - \beta') e^{2(\alpha-\beta)}\} - \{(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta})\} + \\ &\quad \left\{ \dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} + \alpha'^2 e^{2(\alpha-\beta)} + \alpha'\beta' e^{2(\alpha-\beta)} + \frac{\alpha'}{r} e^{2(\alpha-\beta)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\alpha'}{r} e^{2(\alpha-\beta)} \right\} - \{ \dot{\alpha}^2 + \alpha'^2 e^{2(\alpha-\beta)} + \alpha'^2 + \dot{\beta}^2 \} \\ &= (\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2) + e^{2(\alpha-\beta)} \left\{ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{01} &= \partial_\alpha \Gamma_{01}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{\alpha 1}^\alpha + \Gamma_{01}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha 1}^\beta \Gamma_{0\beta}^\alpha \\ &= \{\partial_0 \Gamma_{01}^0 + \partial_1 \Gamma_{01}^1\} - \{\partial_0 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3)\} + \{\Gamma_{01}^0 (\Gamma_{00}^0 + \\ &\quad \Gamma_{10}^1) + \Gamma_{01}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3)\} - \{(\Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^0) + \\ &\quad (\Gamma_{11}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{01}^1)\} \\ &= \dot{\beta} \left(\alpha' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) - \dot{\beta} e^{2(\alpha-\beta)} \alpha' \dot{\beta} e^{2(\alpha-\beta)} = \frac{2\dot{\beta}}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_\alpha \Gamma_{11}^\alpha - \partial_1 \Gamma_{\alpha 1}^\alpha + \Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha 1}^\beta \Gamma_{1\beta}^\alpha \\
&= \{\partial_0 \Gamma_{11}^0 + \partial_1 \Gamma_{11}^1\} - \{\partial_1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3)\} + \{\Gamma_{11}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{10}^1) + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3)\} - \{(\Gamma_{01}^0 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^0) + (\Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1) + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{13}^3\} \\
&= \{\ddot{\beta} e^{2(\alpha-\beta)} + 2\dot{\beta}(\dot{\beta} - \dot{\alpha})e^{2(\alpha-\beta)} + \beta''\} - \left\{\alpha'' + \beta'' - \frac{2}{r^2}\right\} + \left\{\dot{\beta} e^{2(\alpha-\beta)}(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) + \beta' \left(\alpha' + \beta' - \frac{2}{r}\right)\right\} - \left\{\alpha'^2 + 2\dot{\beta}^2 e^{2(\alpha-\beta)} + \beta'^2 + \frac{2}{r^2}\right\} \\
&= -e^{2(\alpha-\beta)}(\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2) + \left\{-\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\beta'}{r} + \alpha'\beta'\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_\alpha \Gamma_{22}^\alpha - \partial_2 \Gamma_{\alpha 2}^\alpha + \Gamma_{22}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha 2}^\beta \Gamma_{2\beta}^\alpha \\
&= \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{32}^3 + \{\Gamma_{22}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3)\} - \{\Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{23}^3\} \\
&= -e^{-2\beta}(\alpha' r - \beta' r + 1) + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_\alpha \Gamma_{33}^\alpha - \partial_3 \Gamma_{\alpha 3}^\alpha + \Gamma_{33}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha 3}^\beta \Gamma_{3\beta}^\alpha \\
&= \{\partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2\} - \{0\} + \{\Gamma_{33}^1 (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3\} - \{\Gamma_{13}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{31}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3\} \\
&= -\sin^2 \theta e^{-2\beta}(\alpha' r - \beta' r + 1) + \sin^2 \theta = \sin^2 \theta R_{22}
\end{aligned}$$

Dapat ditentukan skalar Riccinya adalah:

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = e^{-2\alpha} R_{00} - e^{-2\beta} R_{11} - \frac{1}{r^2} \left(R_{22} + \frac{\sin^2 \theta R_{22}}{\sin^2 \theta} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-2\alpha} \left\{ (\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2) + e^{2(\alpha-\beta)} \left\{ \alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \alpha'\beta' \right\} \right\} - \\
&\quad e^{-2\beta} \left\{ -e^{2(\alpha-\beta)} (\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2) + \left\{ -\alpha'' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \alpha'\beta' \right\} \right\} - \frac{2}{r^2} \{ e^{-2\beta} (\alpha'r - \beta'r + 1) + 1 \} \\
&= 2e^{-2\beta} \left[\alpha'' - \alpha'\beta' + \alpha'^2 + \frac{2\alpha'}{r} - \frac{2\beta'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] - \frac{2}{r^2} + 2e^{2(\alpha-\beta)} (\dot{\alpha}\dot{\beta} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}^2)
\end{aligned}$$

LAMPIRAN 3

Tensor Energi Momentum

Definisi tensor kuat medan adalah:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.1)$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_r/c & 0 & 0 \\ -E_r/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Dengan $E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ tensor energi momentum untuk medan elektromagnetik di sekitar lubang hitam Reissner Nordstrom adalah

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\rho}F_\nu^\rho + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda} \quad (3.3)$$

Persamaan (3.3) dapat diselesaikan jika $F^{\rho\lambda}$ dan F_ν^ρ diketahui.

$$F^{\rho\lambda} = g^{\rho\mu}g^{\lambda\nu}F_{\mu\nu}$$

Menggunakan definisi tersebut, komponen tidak nol dari persamaan tersebut diberikan oleh

$$\begin{aligned} F^{01} &= g^{0\mu}g^{1\nu}F_{\mu\nu} \\ &= g^{00}g^{10}F_{01} \\ &= e^{-2\alpha}(-e^{2\beta})E/c^2 = -\frac{E}{c}e^{-2\alpha-2\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{10} &= g^{1\mu}g^{0\nu}F_{\mu\nu} \\ &= g^{11}g^{01}F_{10} = (-e^{-2\beta})e^{2\alpha}(-E/c^2) = \frac{E}{c}e^{-2\alpha-2\beta} = -F^{01} \end{aligned}$$

Maka, tensor kuat medan dalam bentuk kontravariannya adalah

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E}{c}e^{-2\alpha-2\beta} & 0 & 0 \\ \frac{E}{c}e^{-2\alpha-2\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Sehingga,

$$F_v^\rho = g_{\nu\gamma}F^{\gamma\rho}$$

Dapat dicari komponen tidak nol dengan menggunakan identitas tersebut

$$\begin{aligned} F_0^1 &= g_{0\gamma}F^{\gamma 1} \\ &= g_{00}F^{01} \\ &= e^{2\alpha} \left(-\frac{E}{c}e^{-2\alpha-2\beta} \right) \\ &= -\frac{E}{c}e^{-2\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1^0 &= g_{1\gamma}F^{\gamma 0} \\ &= g_{11}F^{10} \\ &= -e^{2\beta} \left(\frac{E}{c}e^{-2\alpha-2\beta} \right) \\ &= -\frac{E}{c}e^{-2\alpha} \end{aligned}$$

Untuk tensor energi momentumnya adalah

$$\begin{aligned} T_{00} &= -F_{0\rho}F_0^\rho + \frac{1}{4}g_{00}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda} \\ &= -F_{01}F_0^1 + \frac{1}{4}g_{00}(F_{0\sigma}F^{0\sigma} + F_{1\sigma}F^{1\sigma}) \\ &= -F_{01}F_0^1 + \frac{1}{4}g_{00}(F_{01}F^{01} + F_{01}F^{01}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -F_{01}F_0^1 + \frac{1}{4}g_{00}2F_{01}F^{01} \\
&= -\frac{E}{c}\left(-\frac{E}{c}e^{-2\beta}\right) + \frac{1}{2}e^{2\alpha}\frac{E}{c}\left(-\frac{E}{c}e^{(-2\alpha-2\beta)}\right) \\
&= \left(\frac{E}{c}\right)^2 e^{-2\beta} + \frac{1}{2}\cdot -\left(\frac{E}{c}\right)^2 e^{-2\beta} = \frac{1}{2}E^2 e^{-2\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{11} &= -F_{1\rho}F_1^\rho + \frac{1}{4}g_{11}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda} \\
&= -F_{10}F_1^0 + \frac{1}{4}g_{11}(F_{01}F^{01} + F_{10}F^{10}) \\
&= -F_{10}F_1^0 + \frac{1}{4}g_{11}2F_{01}F^{01} \\
&= -\frac{E}{c}\left(-\frac{E}{c}e^{-2\alpha}\right) + \frac{1}{2}e^{2\beta}\frac{E}{c}\left(-\frac{E}{c}e^{(-2\alpha-2\beta)}\right) \\
&= -\left(\frac{E}{c}\right)^2 e^{-2\alpha} + \frac{1}{2}\left(-\frac{E}{c}\right)^2 e^{-2\alpha} = -\frac{1}{2}E^2 e^{-2\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{22} &= -F_{2\rho}F_2^\rho + \frac{1}{4}g_{22}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda} \\
&= \frac{1}{4}g_{22}(F_{01}F^{01} + F_{10}F^{10}) \\
&= \frac{1}{4}g_{22}2F_{01}F^{01} \\
&= \frac{1}{2}r^2\frac{E}{c}\left(-\frac{E}{c}e^{(-2\alpha-2\beta)}\right) = \frac{1}{2}r^2E^2 e^{-2\alpha-2\alpha-2\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{33} &= -F_{3\rho}F_3^\rho + \frac{1}{4}g_{33}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda} \\
&= \frac{1}{4}g_{33}(F_{01}F^{01} + F_{10}F^{10}) \\
&= \frac{1}{4}g_{33}2F_{01}F^{01} \\
&= \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\frac{E}{c}\left(-\frac{E}{c}e^{(-2\alpha-2\beta)}\right) \\
&= \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta E^2 e^{-2\alpha-2\alpha-2\beta} = \sin^2\theta T_{22}
\end{aligned}$$



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

JURUSAN FISIKA

Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp. / Fax. (0341) 558933
Website : <http://fisika.uin-malang.ac.id>, e-mail : fs@uin-malang.ac.id

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Fitri Halimatul Saadigah
NIM : 18640050
Fakultas/Program Studi : SAINTEK / FISIKA
Judul Skripsi : TERMODINAMIKA LUBANG HITAM REISSNER-NORDSTROM
DALAM TEORI F(R)
Pembimbing 1 : Ariyta Komadani, M.Sc
Pembimbing 2 : Irjan, M.Si

• Konsultasi Fisika

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	19 Mei 2022	Konsultasi judul & BAB I	
2	31 Mei 2022	Konsultasi BAB II	
3	2 Juni 2022	Konsultasi BAB III	
4	24 Juni 2022	ACC Lempro	
5	29 November 2022	Konsultasi BAB III-IV	
6	29 November 2022	Revisi Hasil	
7	15 Desember 2022	Revisi Hasil	
8	17 Januari	Revisi Hasil	
9	8 Februari	ACC Hasil	
10	19 Juni	ACC integrasi hasil	

• Konsultasi Integrasi

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	8 Desember 2022	Konsultasi Integrasi	
2	25 Mei 2023	Revisi Hasil	
3	26-06-2023	ACC Hasil	

