

**KONTROL OPTIMAL MODEL EPIDEMI *SIR*
DENGAN PENGOBATAN TERSATURASI DAN VAKSINASI**

SKRIPSI

**OLEH:
PUTRI AHLIHA
NIM. 19610020**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023**

**KONTROL OPTIMAL MODEL EPIDEMI *SIR*
DENGAN PENGOBATAN TERSATURASI DAN VAKSINASI**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh:
PUTRI AHLIHA
NIM. 19610020**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023**

**KONTROL OPTIMAL MODEL EPIDEMI SIR
DENGAN PENGOBATAN TERSATURASI DAN VAKSINASI**

SKRIPSI

**Oleh:
Putri Ahliha
NIM. 19610020**

Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji
Malang, 31 Mei 2023

Dosen Pembimbing I



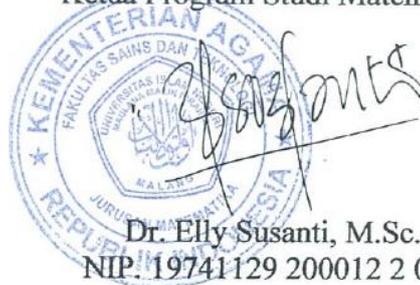
Dr. Heni Widayani, M.Si.
NIDT. 19901006 20180201 2 229

Dosen Pembimbing II



Erna Herawati, M.Pd.
NIDT. 19760723 20180201 2 222

Mengetahui,
Ketua-Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

**KONTROL OPTIMAL MODEL EPIDEMI *SIR*
DENGAN PENGOBATAN TERSATURASI DAN VAKSINASI**

SKRIPSI

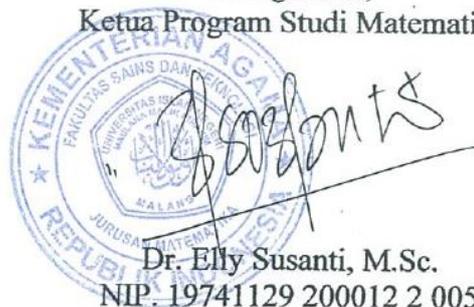
**Oleh:
Putri Ahliha
NIM. 19610020**

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 12 Juni 2023

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si.
Anggota Penguji 1 : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.
Anggota Penguji 2 : Dr. Heni Widayani M.Si.
Anggota Penguji 3 : Erna Herawati, M.Pd.

.....
.....
.....
.....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika


Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Putri Ahliha
NIM : 19610020
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Kontrol Optimal Model Epidemii *SIR* dengan Pengobatan
Tersaturasi dan Vaksinasi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri. Bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Juni 2023

Yang membuat pernyataan



SEPULUH RIBU RUPIAH
10000
TEL. 10
METERAI
TEMPEL
C8AKX482740579

Putri Ahliha

NIM. 19610020

MOTO DAN PERSEMBAHAN

Tetap menjalani segala kewajiban dan bersyukur dengan segala hasil.

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua penulis yaitu Ayahanda Mamin Abdul Hamid dan Ibunda Sarnah, kedua kakak Penulis yaitu Ari Aji Syahroji dan Tafri Jiah Aji Syahroji, beserta semua keluarga dan teman-teman yang senantiasa memberikan dukungan, do'a, nasihat dan kasih sayang kepada penulis. Dengan itu semua menjadikan penulis tetap semangat dalam menyelesaikan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur kehadiran Allah SWT atas berkat, rahmat dan ni'mat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Kontrol Optimal Model Epidem *SIR* dengan Pengobatan Tersaturasi dan Vaksinasi”. Shalawat serta salam selalu terlimpahkan kepada Baginda Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun manusia dari jalan jahilliyah menuju ke jalan keselamatan.

Penulis menyadari jika skripsi ini tidak akan dapat di selesaikan sendiri oleh penulis, tetapi banyak yang ikut serta berjuang, dengan merelakan waktu, pikiran serta tenaga dalam membantu penulis menyelesaikan kripsi ini. Oleh karena itu, melalui halaman persembahan ini dengan segala kerendahan dan ketulusan hati, penulis menghaturkan ribuan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dr. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, nasihat, do'a dan motivasi kepada penulis. Terimakasih atas semua waktu yang rela diberikan di sela-sela kesibukan Ibu.
5. Erna Herawati, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, nasihat, do'a dan motivasi kepada penulis. Terimakasih atas semua waktu yang rela diberikan di sela-sela kesibukan Ustadzah.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah memberikan ilmu selama perkuliahan.
7. Ayahanda Mamin Abdul Hamid, Ibunda Sarnah yang selalu mendo'akan, memberikan semangat dan dukungan kepada penulis baik dari segi materi

maupun batin selama perkuliahan. Terima kasih telah menjadi motivasi penulis untuk menyelesaikan tugas akhir.

8. Kakak Ari Aji Syahroji, Tafri Jiah Aji Syahroji dan Keponakan Ramadhan Ibrahimovic serta keluarga tercinta yang menjadi penyemangat bagi penulis menyelesaikan tugas akhir.
9. Temen seperjuangan Evita dari awal kuliah ke Malang sampai akhir perkuliahan.
10. Seluruh teman-teman angkatan matematika 2019 khususnya (Eliya dan Ni'mah) terima kasih atas segala pengalaman bersama selama menuntut ilmu di bangku kuliah.

Penulis menyadari bahwa penulisan proposal skripsi ini masih terdapat kekurangan. Maka dari itu, penulis sangat berharap diberikan kritik serta saran yang membangun untuk menjadi bahan perbaikan bagi penulis oleh para pembaca sehingga bertujuan untuk perbaikan bagi penulis terkait penelitian selanjutnya. Mohon maaf atas segala kelebihan dan kekurangan pada penulisan skripsi ini.
Wassalamu'alikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 12 Juni 2023



Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGANTAR	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN.....	v
MOTO DAN PERSEMBAHAN	vi
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xii
DAFTAR SIMBOL	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
مستخلص البحث.....	xvii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Manfaat Penelitian.....	5
1.5 Batasan Masalah	5
BAB II KAJIAN TEORI	7
2.1 Teori Pendukung	7
2.1.1 Persamaan Diferensial Linier Non Homogen.....	7
2.1.2 Sistem Persamaan Diferensial Linier	8
2.1.3 Bilangan Reproduksi Dasar	9
2.1.4 Model <i>SIR</i> (<i>Susceptible-Infected-Recovered</i>) Lashari (2016).	11
2.1.5 Titik Keseimbangan (<i>Equilibrium Point</i>).....	15
2.1.6 Linierisasi Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear	18
2.1.7 Nilai Eigen.....	19
2.1.8 Kontrol Optimal.....	20
2.1.9 Prinsip Maksimum Pontryagin	21
2.1.10 Metode <i>Sweep</i> Maju-Mundur	23
2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadist.....	24
2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung.....	26
BAB III METODE PENELITIAN	27
3.1 Jenis Penelitian	27
3.2 Pra Penelitian.....	27
3.3 Tahapan Penelitian	27
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	29
4.1 Analisis Model <i>SIR</i> Tanpa Kontrol ($u_1 = 0$ dan $u_2 = 0$).....	29
4.1.1 Bilangan Reproduksi Dasar R_0	30
4.1.2 Titik Keseimbangan	31
4.1.3 Analisis Kestabilan Model	35
4.2 Kontrol Optimal <i>SIR</i> dengan Kontrol u_1 dan u_2	44
4.3 Simulasi Numerik.....	53

4.4 Kajian Penelitian dalam Perspektif Islam.....	59
BAB V PENUTUP.....	61
5.1 Kesimpulan.....	61
5.2 Saran.....	61
DAFTAR PUSTAKA.....	63
LAMPIRAN.....	64
RIWAYAT HIDUP.....	73

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Nilai Awal Model Matematika <i>SIR</i>	53
Tabel 4.2 Nilai Parameter Model Matematika <i>SIR</i>	53

DAFTAR GAMBAR

Gambar	2.1	Plot Fungsi Kejadian Tersaturasi	12
Gambar	2.2	Plot Fungsi Pengobatan Tersaturasi	12
Gambar	2.3	Plot Fungsi Pengobatan u_2	13
Gambar	2.4	Plot Fungsi Pengobatan Tersaturasi dengan Nilai u_2	13
Gambar	2.5	Diagram Kompartemen <i>SIR</i> dengan Kontrol u_1 dan u_2	15
Gambar	4.1	Populasi <i>Susceptible</i> , <i>Infected</i> dan <i>Recovered</i> dengan Kontrol Vaksinasi (u_1) dan Pengobatan (u_2) maupun Tanpa Kontrol Vaksinasi (u_1) dan Pengobatan (u_2) dengan Bobot $A_1 = 0.09, A_2 = 0,02, A_3 = 0,12, B_1 = 10$, dan $B_2 = 10$ serta Parameter pada Tabel 4.2.....	55
Gambar	4.2	Kontrol Vaksinasi (u_1) dengan Fungsi Tujuan L_1, L_2 dan L_3 dengan Bobot $A_1 = 0.09, A_2 = 0,02, A_3 = 0,12, B_1 = 10$, dan $B_2 = 10$ serta Parameter pada Tabel 4.2	57
Gambar	4.3	Kontrol Pengobatan (u_2) dengan Fungsi Tujuan L_1, L_2 dan L_3 dengan Bobot $A_1 = 0.09, A_2 = 0,02, A_3 = 0,12, B_1 = 10$, dan $B_2 = 10$ serta Parameter pada Tabel 4.2	58
Gambar	4.4	Kontrol Pengobatan (u_2) dengan Fungsi Tujuan L_1, L_2 dan L_3 dengan Bobot $A_1 = 0.09, A_2 = 0,02, A_3 = 0,12, B_1 = 20$, dan $B_2 = 10$ serta Parameter pada Tabel 4.2	59

DAFTAR SIMBOL

$S(t)$: Subpopulasi individu rentan pada waktu ke- t
$I(t)$: Subpopulasi individu terinfeksi pada waktu ke- t
$R(t)$: Subpopulasi individu sembuh pada waktu ke- t
r	: Tingkat/laju kesembuhan
k	: Tingkat efek penghambatan
r_0	: Konstanta kontrol pengobatan
β	: Laju penularan
α	: Tingkat efek terinfeksi
Λ	: Laju kelahiran alami
μ	: Angka kematian alami
γ	: Pemulihan alami
δ	: Tingkat kematian akibat penyakit
u_1	: Vaksinasi
u_2	: Pengobatan
t	: Waktu
t_0	: Waktu awal
T	: Waktu terminal/ akhir
$x(t)$: Persamaan <i>state</i>
$\dot{\lambda}(t)$: Persamaan <i>costate</i>
A_1	: Bobot untuk populasi <i>susceptible</i>
A_2	: Bobot untuk populasi <i>infected</i>
B_1	: Bobot biaya untuk vaksinasi
B_2	: Bobot biaya untuk pengobatan
$u_1^*(t)$: Kontrol optimal pengobatan
$u_2^*(t)$: Kontrol optimal vaksinasi

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	M-File untuk Simulasi Model Epidemii <i>SIR</i> dengan Kontrol dan Tanpa Kontrol	64
Lampiran 2	M-File untuk Fungsi <i>State</i>	71
Lampiran 2	M-File untuk Fungsi <i>Costate</i>	72

ABSTRAK

Ahliha, Putri, 2023. **Kontrol Optimal Model Epidemii SIR Dengan Pengobatan Tersaturasi Dan Vaksinasi**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si, (2) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: Bilangan Reproduksi Dasar, Dinamik, Kontrol Optimal, Model Matematika SIR, Pengobatan Tersaturasi.

Penelitian ini membahas model epidemii SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*). Model SIR merepresentasikan laju dinamika penyebaran penyakit yang memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yang bersifat stabil asimtotik ketika $R_0 < 1$ dan endemik yang bersifat stabil asimtosik ketika $R_0 > 1$. Penelitian ini terdapat dua kontrol yaitu pengobatan (u_2) dan vaksinasi (u_1). Pengobatan untuk populasi *infected* sedangkan program vaksinasi untuk populasi *susceptible*. Penyelesaian kontrol optimal di penelitian ini menggunakan prinsip maksimum Pontryagin. Prinsip tersebut dipergunakan untuk memperoleh syarat yang optimal, persamaan *state*, *co-state*. Hasil tersebut akan disimulasikan menggunakan Runge-Kutta orde 4. Pada penelitian ini terdapat tiga fungsi tujuan yaitu L_1, L_2 , dan L_3 . Pada Fungsi tujuan pertama (L_1) menurunkan populasi *susceptible* dan *infected*, fungsi tujuan kedua (L_2) hanya menurunkan populasi *infected*, sedangkan fungsi tujuan ketiga (L_3) meminimumkan populasi *susceptible*, *infected* serta memaksimumkan populasi *recovered*. Dari ketiga fungsi tujuan tersebut didapatkan fungsi tujuan yang memberikan pengaruh signifikan dalam menurunkan populasi *susceptible*, *infected*, dan peningkatan *recovered* yaitu pada L_1 dan L_3 dibandingkan ketika tidak ada kontrol. Pada hasil simulasi tidak terlihat perbedaan yang signifikan pada L_1 dengan L_3 . Sehingga dengan menggunakan L_1 biaya yang akan dikeluarkan akan lebih minimum dibandingkan dengan L_3 . Oleh karena itu pemberian kontrol dengan menggunakan L_1 akan lebih efisien.

ABSTRACT

Ahliha, Putri, 2023. **Optimal Control of an SIR Epidemic Model with a Saturated Treatment and Vaccination.** Thesis. Study Program of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (1) Dr. Heni Widayani, M.Si., (2) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Basic Reproduction Number, Dynamic, Mathematical Model of SIR, Optimal Control, Saturated Treatment.

This study discusses the SIR (Susceptible, Infected, Recovered) epidemic model. The SIR model represents the dynamics of the spread of disease which has two equilibrium points, namely a disease-free equilibrium point which is asymptotically stable when $R_0 < 1$ and endemic which is asymptotically stable when $R_0 > 1$. In this study there were two controls, namely treatment (u_2) and vaccination (u_1). Treatment is for the infected population while the vaccination program is for the susceptible population. Completion of optimal control in this study using the Pontryagin maximum principle. This principle is used to obtain optimal conditions, state equations, shared states. These results will be simulated using Runge-Kutta order 4. In this study there are three objective functions, namely L_1, L_2 , and L_3 . The first objective function (L_1) reduces the susceptible and infected population, the second objective function (L_2) reduces only the infected population, while the third objective function (L_3) minimizes the infected susceptible population and maximizes the recovered population. From the three objective functions it is known that the objective function has a significant effect in reducing the susceptible, infected population, and increasing the recovered population at L_1 and L_3 compared to no control. In the simulation results there is no significant difference between L_1 and L_3 . So that by using L_1 the costs that must be incurred will be minimal compared to L_3 . Therefore giving control by using L_1 will be more efficient.

مستخلص البحث

اهلها ، بوتري ، ٢٠٢٣ . السيطرة المثلى على نموذج وباء SIR مع العلاج التشيع والتحصين . البحث الجامعي . قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج . والمشرقة (١) : الدكتورة هيني وبداياني، الماجستير ، (٢) إيرنا هيراواتي ، الماجستير .

الكلمات المفتاحية: الرقم الإنجابي الأساسي، لديناميكيات، التحكم الأمثل، النموذج الرياضي SIR ، الطب المشيع.

تناقش هذه الدراسة نموذج الوباء SIR (الحساس، المصاب، المتعافي). يمثل نموذج SIR الديناميكيات انتشار المرض الذي يحتوي على نقطتي توازن، وهما نقطة التوازن الخالية من الأمراض والتي تكون مستقرة بشكل مقارب عند $R_0 < 1$ والمتوتنة والتي تكون مستقرة بشكل غير متناسق عند $R_0 < 1$. في هذه الدراسة كانت هناك نوعين من الضوابط، وهما العلاج (u_2) والتطعيم (u_1). العلاج هو للسكان المصابين بينما برامج التطعيم هي للسكان المعرضين للإصابة. تستخدم تسوية التحكم المثلى في هذه الدراسة مبدأ Pontryagin الأقصى. يستخدم هذا المبدأ للحصول على الظروف المثلى ومعادلات الحالة والحالات المشتركة. سيتم محاكاة هذه النتائج باستخدام ترتيب ($Runge-Kutta 4$). في هذه الدراسة هناك ثلاث الوظائف الموضوعية، وهي L_1 و L_2 و L_3 . تعمل وظيفة الهدف الأولى (L_1) على تقليل السكان المعرضين والمصابين، بينما تقلل الوظيفة الهدف الثانية (L_2) فقط من السكان المصابين، بينما تقلل وظيفة الهدف الثالثة (L_3) من السكان المعرضين للإصابة والمصابين وتزيد من عدد السكان المتعافين. من بين الوظائف الموضوعية الثلاثة، وجد أن الوظيفة الموضوعية كان لها تأثير كبير في تقليل الفئات المعرضة للإصابة والمصابة وزيادة السكان المتعافين، وبالتحديد عند L_1 و L_3 مقارنة عندما لم يكن هناك سيطرة. في نتائج المحاكاة، لا يوجد فرق كبير بين L_1 و L_3 . بحيث تكون التكاليف التي سيتم تكبدها عند استخدام L_1 أقل تكلفة مقارنة بـ L_3 . لذلك فإن إعطاء التحكم باستخدام L_1 سيكون أكثر كفاءة.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyebaran penyakit pada suatu populasi ditandai dengan adanya individu yang terinfeksi kemudian individu tersebut dapat menularkan penyakit ke individu lainnya. Sehingga populasi tersebut dapat terklaster menjadi sub populasi tertentu, salah satunya tipe *SIR* dimana tipe tersebut memiliki tiga sub populasi yaitu *susceptible*, *infected* dan *recovered*. Model *SIR* (*Susceptible*, *Infected*, *Recovered*) merupakan model matematika yang digunakan untuk menggambarkan dinamika pada penyebaran penyakit menular (Ma & Li, 2009). Pada model *SIR*, kelompok *susceptible* merupakan individu yang tidak terinfeksi tetapi dapat tertular virus, sehingga kelompok *susceptible* mempunyai kemungkinan untuk terinfeksi dan individu yang termasuk dalam kelompok tersebut dapat berpindah ke kelompok *infected*. Kemudian kelas *infected* merupakan individu yang telah terinfeksi dan dapat menularkan penyakit pada individu *susceptible*. Pada kelas *infected* diperlukannya waktu yang disebut sebagai periode penyakit. Setelah melalui waktu tersebut, selanjutnya individu yang berada pada kelas *infected* akan sembuh dan kemudian berpindah ke kelas *recovered*. Individu yang telah berada pada kelas *recovered* maka akan kebal dalam kehidupannya atau tidak akan tertular lagi oleh penyakit tersebut. Terdapat model epidemi *SIR* dengan tingkat kejadian tersaturasi dan fungsi pengobatan tersaturasi. Penyakit dengan kejadian tersaturasi adalah penyakit TBC, campak, dan flu (Zhang, Jia, & Song, 2014). Terdapat penelitian Pagalay & Muhlish (2015) membahas secara khusus tentang penyakit TBC, tetapi pada penelitian ini tidak adanya penyakit yang dibahas secara khusus. Tingkat

kejadian tersaturasi dapat menginterpretasikan dari perubahan perilaku individu rentan ketika jumlah mereka meningkat atau dari efek berkrumun dengan individu terinfeksi. Memasukan fungsi pengobatan tersaturasi menjelaskan efek dari individu terinfeksi yang tertunda untuk pengobatan.

Terdapat peneliti yang telah melakukan penelitian tentang penyebaran penyakit model epidemi *SIR* dengan kejadian tersaturasi (Lashari, 2016). Adanya dua upaya utama, yakni pengobatan untuk individu terinfeksi yang dinotasikan sebagai u_2 dan vaksinasi untuk individu rentan yang dinotasikan sebagai u_1 , upaya tersebut dinilai dapat membatasi penularan penyakit. Model *SIR* pada penelitian ini menggunakan kejadian tersaturasi yang didefinisikan sebagai $\frac{\beta SI}{1+kI}$ dimana β merupakan laju penularan dan k merupakan tingkat efek penghambatan. Penelitian ini juga menggunakan fungsi pengobatan tersaturasi dimana akan adanya tundaan terhadap pengobatan yang didefinisikan sebagai $\frac{(r+r_0u_2)I}{(1+\alpha I)}$, dengan r laju kesembuhan, r_0 laju konstan, dan α ukuran sejauh mana dampak pengobatan tertunda pada individu terinfeksi. Pada penelitian ini merumuskan masalah kontrol optimal dengan menggunakan fungsi *cost* yaitu meminimalkan individu rentan dan individu terinfeksi serta meminimumkan biaya pelaksanaan kedua pengendalian tersebut. Hasil penelitian ini menunjukkan perbedaan jumlah individu rentan dan terinfeksi akan lebih sedikit ketika diberikan kontrol dibandingkan tanpa diberikan kontrol. Individu sembuh akan lebih banyak ketika diberikan kontrol dibandingkan tanpa diberikan kontrol (Lashari, 2016).

Berdasarkan latar belakang, maka penelitian ini membahas model epidemi *SIR* (*Susceptible, Infected, Recovered*) dengan menggunakan kejadian tersaturasi

$\left(\frac{\beta SI}{1+kl}\right)$ serta terdapat dua kontrol yaitu vaksinasi (u_2) untuk individu rentan dan pengobatan (u_1) untuk individu terinfeksi. Pada penelitian ini menggunakan fungsi pengobatan tersaturasi $\left(\frac{(r+r_0u_2)I}{(1+\alpha I)}\right)$. Oleh karena itu, dengan adanya fungsi tersaturasi pada pengobatan maka akan adanya kondisi dimana jumlah individu terinfeksi semakin banyak dan sarana pengobatan juga terbatas, karena hal tersebut maka akan terjadi tundaan terhadap efek pengobatan. Dengan terjadinya hal tersebut maka individu juga akan mengalami keterlambatan sembuh. Sebagai manusia harus selalu berusaha sungguh-sungguh dengan cara terbaik untuk mencapai tujuan. Ketika manusia diberikan penyakit, manusia haruslah berusaha untuk mencapai kesembuhan dengan cara yang baik dan sesuai dengan aturan dalam islam. Mohonlah kepada Allah dengan tulus agar dianugerahi-Nya sebagian dari karunia-Nya yang berlimpah ruah itu. Sebagaimana firman Allah SWT dalam QS. An-Nisa ayat 32 yaitu

وَلَا تَتَمَنَّوْا مَا فَضَّلَ اللَّهُ بِهِ بَعْضَكُمْ عَلَى بَعْضٍ ۚ لِلرِّجَالِ نَصِيبٌ مِّمَّا كَتَبْنَا لِلنِّسَاءِ ۗ وَلِلنِّسَاءِ نَصِيبٌ مِّمَّا كَتَبْنَا ۗ وَسَأَلُوا اللَّهَ مِنْ فَضْلِهِ ۗ إِنَّ اللَّهَ كَانَ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيمًا (۳۲)

Artinya: “Dan janganlah kamu iri hati terhadap karunia yang telah dilebihkan Allah kepada sebagian kamu atas sebagian yang lain. (Karena) bagi laki-laki ada bagian dari apa yang mereka usahakan, dan bagi perempuan (pun) ada bagian dari apa yang mereka usahakan. Mohonlah kepada Allah sebagian dari karunia-Nya. Sungguh, Allah Maha Mengetahui segala sesuatu.”

Penelitian ini akan menggabungkan strategi pengendalian yang optimal dalam bentuk vaksinasi (u_1) dan pengobatan (u_2) untuk mengurangi individu rentan dan individu terinfeksi. Pada penelitian ini tidak ada penyakit khusus yang dibahas, oleh karena itu penelitian ini akan membahas penyakit secara umum dikarenakan penelitian ini menyajikan metode bagaimana menangani kelas masalah optimasi. Pada penelitian sebelumnya yaitu penelitian Lashari (2016) adanya

kesalahan penulisan pada nilai *costate*, oleh karena itu penelitian ini akan menyempurnakan penelitian Lashari (2016). Pada penelitian tersebut juga hanya terdapat satu fungsi tujuan, maka pada penelitian ini akan terdapat tiga fungsi tujuan dimana fungsi tersebut akan menjadi suatu persamaan. Fungsi tujuan pertama yang akan dilambangkan oleh L_1 bertujuan meminimumkan populasi rentan, meminimumkan populasi terinfeksi, meminimumkan biaya kontrol pengobatan dan meminimumkan kontrol vaksinasi. Kemudian fungsi tujuan kedua dilambangkan oleh L_2 bertujuan meminimumkan populasi rentan, meminimumkan biaya kontrol pengobatan dan meminimumkan kontrol vaksinasi. Selanjutnya fungsi tujuan yang ketiga atau L_3 yaitu bertujuan untuk meminimumkan populasi rentan, meminimumkan populasi terinfeksi, memaksimumkan populasi sembuh, meminimumkan biaya kontrol pengobatan dan meminimumkan kontrol vaksinasi. Dari ketiga fungsi tujuan tersebut akan dibandingkan hasil simulasi numeriknya. Sehingga pada penelitian ini akan melihat perbedaan tiap sub populasi ketika diberi kontrol vaksinasi u_1 dan pengobatan u_2 maupun tanpa diberi kontrol.

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana analisis dinamik model *SIR* (*Susceptible-Infected-Recovered*) tanpa kontrol pengobatan (u_2) dan vaksinasi (u_1)?
2. Bagaimana kontrol optimal *SIR* (*Susceptible-Infected-Recovered*) dengan pengobatan (u_2) dan vaksinasi (u_1)?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik model epidemi *SIR* (*Susceptible-Infected-Recovered*) dengan pengobatan (u_2) dan vaksinasi (u_1)?

1.3 Tujuan Penelitian

1. Mengetahui analisis dinamik model *SIR (Susceptible-Infected-Recovered)* tanpa kontrol pengobatan (u_2) dan vaksinasi (u_1).
2. Mengetahui kontrol optimal *SIR (Susceptible-Infected-Recovered)* dengan pengobatan (u_2) dan vaksinasi (u_1).
3. Mengetahui hasil simulasi numerik model epidemi *SIR (Susceptible-Infected-Recovered)* dengan pengobatan (u_2) dan vaksinasi (u_1).

1.4 Manfaat Penelitian

Pada penelitian ini diharapkan memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Dengan menganalisis model epidemi *SIR (Susceptible-Infected-Recovered)* tanpa kontrol maka dapat mengetahui stabilitas model tersebut agar tidak terjadi penularan penyakit yang lebih tinggi.
2. Dengan menyelesaikan masalah optimasi model epidemi *SIR (Susceptible-Infected-Recovered)* akan mengetahui dengan adanya kontrol akan menurunkan penularan penyakit serta individu sembuh akan meningkat.
3. Dengan mengetahui hasil simulasi pada model *SIR (Susceptible-Infected-Recovered)* dengan nilai awal yang diberikan maka akan dapat terlihat perbedaan tiap sub populasi dengan kontrol dan tanpa kontrol.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini memberikan batasan masalah pada objek kajian sebagai berikut:

1. Populasi terbagi menjadi tiga sub populasi, diantara lain yaitu *Susceptible (S)*, *Infected (I)*, dan *Recovered (R)*.
2. Tidak ada migrasi individu ke lokasi pengamatan.

3. Terdapat dua variabel kontrol yaitu vaksinasi (u_1) dan pengobatan (u_2)
4. Vaksinasi (u_1) harus ditujukan kepada individu rentan.
5. Pengobatan (u_2) harus ditujukan kepada individu terinfeksi.
6. Individu terinfeksi dapat sembuh secara alami maupun dengan pengobatan.
7. Diasumsikan terdapat peluang kematian alami di setiap sub populasi sebesar μ .
8. Terdapat peluang kematian individu terinfeksi akibat penyakit sebesar δ .
9. Model matematika yang digunakan yaitu model epidemi *SIR* (Lashari, 2016) sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta SI}{1 + kI} - \mu S - u_1 S$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + kI} - \frac{(r + r_0 u_2)I}{1 + \alpha I} - (\gamma + \delta + \mu)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \frac{(r + r_0 u_2)I}{1 + \alpha I} - \mu R + \mu_1 S$$

10. Pada penelitian ini menggunakan tiga fungsi tujuan sebagai berikut:

$$L_1 = A_1 S + A_2 I + \frac{1}{2} (B_1 u_1^2 + B_2 u_2^2)$$

$$L_2 = A_2 I + \frac{1}{2} (B_1 u_1^2 + B_2 u_2^2)$$

$$L_3 = A_1 S + A_2 I - A_3 R + \frac{1}{2} (B_1 u_1^2 + B_2 u_2^2)$$

BAB II KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Persamaan Diferensial Linier Non Homogen

Persamaan diferensial (PD) atau *differential equation* merupakan persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Persamaan diferensial tersebut juga dapat mengandung fungsi dirinya sendiri dan terdapat konstanta. Turunan yang dibentuk dalam sebuah persamaan diferensial tersebut akan membentuk jenis dan memperjelas dari persamaan diferensial itu sendiri (Prayudi, 2006).

Menurut Ross (1984), persamaan diferensial biasa linier orde- n dengan variable tidak bebas yaitu y dan variabel bebas yaitu t merupakan persamaan yang dapat dirumuskan dalam bentuk

$$a_0(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + a_n(t)y = F(t) \quad (2.1)$$

dimana $a_0 \neq 0$.

Jika $F(t)$ pada PD linier orde- n sama dengan nol maka PD tersebut dikatakan PD homogen atau tereduksi atau komplementer. Jika $F(t)$ pada persamaan diferensial linier orde- n tidak sama dengan nol maka persamaan diferensial tak homogen. Contoh persamaan diferensial homogen dan tak homogen sebagai berikut:

$$t \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} - 2ty = \sin t \quad (2.2)$$

$$t \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} - 2ty = 0 \quad (2.3)$$

Pada persamaan (2.2) merupakan PD tak homogen sedangkan persamaan (2.3) termasuk dalam PD homogen.

Bentuk umum dari PD linier orde- n non homogen dimana koefisiennya konstan, maka

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \dots + a_1(t)y + a_0(t)y = g(t) \quad (2.4)$$

Persamaan Diferensial Biasa (PDB) orde- n dapat diubah atau ditransformasi menjadi sistem PDB orde 1 dengan n persamaan.

2.1.2 Sistem Persamaan Diferensial Linier

Sistem persamaan diferensial merupakan kumpulan beberapa persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial linier non homogen orde satu sampai dengan n persamaan diferensial linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + a_{13}t_3 + \dots + a_{1n}t_n + f_1(t) \\ x'_2 &= a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + a_{23}t_3 + \dots + a_{2n}t_n + f_2(t) \\ x'_3 &= a_{31}t_1 + a_{32}t_2 + a_{33}t_3 + \dots + a_{3n}t_n + f_3(t) \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ x'_{n-1} &= a_{(n-1)1}t_1 + a_{(n-1)2}t_2 + a_{(n-1)3}t_3 + \dots + a_{(n-1)n}t_n + f_{(n-1)}(t) \\ x'_n &= a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + a_{n3}t_3 + \dots + a_{nn}t_n + f_n(t) \quad (\text{Hadi, dkk. 2019}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pada persamaan (2.5) dikatakan suatu sistem persamaan linier homogen ketika f_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ bernilai nol dan f_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ bernilai tak nol maka persamaan (2.5) merupakan sistem persamaan linier non homogen. Persamaan (2.5) dapat ditulis dalam bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}(t) \quad (2.6)$$

dimana A adalah $n \times n$ yang merupakan matriks koefisien dari variabel tak bebas $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, \dots, n, j = 1, 2, 3, \dots, n$, dan $f(t)$ merupakan

matriks ukuran $n \times 1$ dengan komponen $f_i(t)$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Matriks dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

(Finizo & Ladaz, 1998).

2.1.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan Reproduksi Dasar merupakan penyebaran infeksi pada penyakit yang dapat dilihat dari parameter tertentu sehingga dapat mengetahui seberapa besar atau kecilnya suatu penyakit tersebut menyebar dari individu terinfeksi kepada individu rentan di suatu populasi tertentu. Bilangan reproduksi dasar umumnya dilambangkan dengan R_0 , dimana R_0 tersebut merupakan sebuah parameter yang mendefinisikan jumlah rata-rata individu yang rentan (*susceptible*) yang telah terinfeksi. Bilangan reproduksi dasar dapat dikatakan dengan istilah nilai ambang batas epidemi (Giesecke, 2022).

Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) memiliki batas nilai yaitu 1. Kondisi R_0 mempunyai tiga kemungkinan yaitu:

1. $R_0 < 1$: Apabila jika individu yang terinfeksi menurun dan penyakit akan hilang dalam suatu populasi. Pada kasus ini diperoleh semua solusinya akan menjadi konvergen pada suatu titik kesetimbangan bebas penyakit atau *disease free equilibrium*.
2. $R_0 = 1$: Penyakit tetap menyebar dan tetap menjadi epidemik pada skala besar.
3. $R_0 > 1$: Penyakit akan meningkat sangat tinggi dengan kematian dan mewabah.

Terdapat metode untuk menentukan R_0 salah satunya yaitu metode *Next Generation Matriks (NGM)*. *Next Generation Matriks* merupakan suatu metode pencarian nilai R_0 dimana metode *NGM* tersebut pertama kali dikenalkan oleh Diekmann *et al.* (1990).

Asumsikan matriks A adalah turunan dari $\frac{dI}{dt}$ terhadap I , dimana

$$A = M - D \quad (2.7)$$

dengan

M : matriks tak negatif, $M \geq 0$ ($m_{ij} \geq 0$)

D : matriks diagonal, $D > 0$

Dari matriks M dan D diperoleh R_0 dari metode *next generatin matriks* yaitu

$$R_0 = MD^{-1}$$

Contoh 2.3

Perhitungan R_0 menggunakan metode *Next Generation Matriks (NGM)*.

Diketahui sistem persamaan diferensial non-linear orde empat sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = -b \frac{I}{S + I + R} S - \mu S + \pi$$

$$\frac{dI}{dt} = b \frac{I}{S + I + R} S - (\mu + \mu_t + c)I$$

$$\frac{dR}{dt} = cI - \mu R$$

dengan

c : Laju kesembuhan

b : Laju penularan penyakit

μ : Kematian faktor lain

μ_t : Kematian karena penyakit

Sehingga matriks A yaitu

$$A = \frac{bS}{S + I + R} - (\mu + \mu_t + c)$$

kemudian substitusikan titik bebas penyakit $(S = \frac{\pi}{\mu}, I = 0, R = 0)$, sehingga diperoleh

$$A = b - (\mu + \mu_t + c)$$

maka diketahui

$$M = b$$

dan

$$D = \mu + \mu_t + c$$

dengan demikian diperoleh

$$R_0 = MD^{-1}$$

$$R_0 = \frac{b}{\mu + \mu_t + c}$$

(Rositarini, Lestari, & Arifah, 2017)

2.1.4 Model SIR (Susceptible-Infected-Recovered) Lashari (2016)

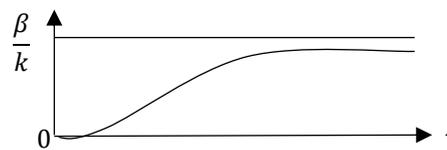
Pada model epidemi *SIR* Lashari (2016) terdapat tiga sub populasi yaitu populasi rentan (S), populasi terinfeksi (I) dan populasi sembuh (R). Pada penelitian tersebut, populasi sembuh tidak akan terinfeksi kembali. Penelitian Lashari (2016) memiliki dua kontrol yaitu vaksinasi (u_1) yang ditujukan kepada individu rentan dan pengobatan (u_2) yang ditujukan untuk individu terinfeksi. Pada penelitian tersebut Pada penelitian tersebut adanya kejadian tersaturasi dan pengobatan tersaturasi. Berikut beberapa penjelasan terkait kejadian tersaturasi pada penelitian Lashari (2016):

1. Perubahan individu rentan menjadi individu terinfeksi dengan tingkat kejadian tersaturasi dinotasikan sebagai berikut:

$$\frac{\beta SI}{1 + kI}$$

dimana β merupakan tingkat penularan dan k non-negatif yang mengukur efek penghambatan. Berikut plot fungsi kejadian tersaturasi:

dimisalkan $f_1(I) = \frac{\beta I}{1+kI}$, sehingga diperoleh plot sebagai berikut



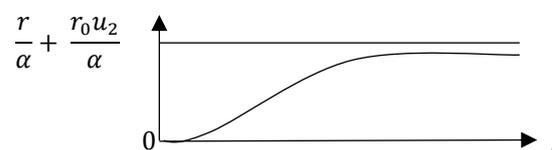
Gambar 2.1 Plot Fungsi Kejadian Tersaturasi

2. Perubahan individu terinfeksi akan sembuh dengan fungsi pengobatan tersaturasi, dinotasikan sebagai berikut:

$$\frac{(r + r_0 u_2)I}{1 + \alpha I}$$

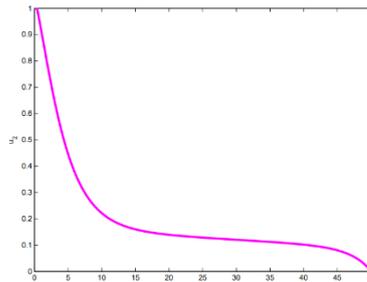
dimana r merupakan tingkat kesembuhan, r_0 merupakan konstanta kontrol pengobatan dan α positif yang mengukur sejauh mana efek yang terinfeksi tertunda untuk pengobatan. Berikut plot fungsi kejadian tersaturasi:

dimisalkan $f_2(I) = \frac{(r+r_0 u_2)I}{1+\alpha I}$, sehingga diperoleh plot sebagai berikut



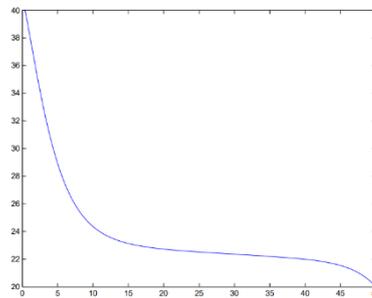
Gambar 2.2 Plot Fungsi Pengobatan Tersaturasi dengan Laju u_2 Kontasn

Misalkan terdapat fungsi u_2 sebagai berikut:



Gambar 2.3 Plot Fungsi Pengobatan u_2

Apabila diketahui nilai $r = 0.2, r_0 = 0.2, \alpha = 0.01$ untuk $\frac{r}{\alpha} + \frac{r_0 u_2}{\alpha}$, maka diperoleh batas saturasi pada pengobatan mengikuti kurva sebagai berikut:



Gambar 2.4 Plot Fungsi Pengobatan Tersaturasi dengan Nilai u_2

3. Individu terinfeksi yang tertunda untuk pengobatan, didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{1}{1 + \alpha I}$$

4. Efek psikologis dari perubahan perilaku individu rentan Ketika jumlah mereka meningkat atau dari efek berkrumun terhadap individu yang terinfeksi, didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{1}{1 + kI}$$

Kompartemen S mempresentasikan individu rentan yang dapat tertular penyakit. Jumlah individu pada kelas ini meningkat karena laju kelahiran alami yang dinotasikan dengan Λ , kemudian berkurang karena adanya kontak efektif individu terinfeksi dengan laju penularan sebesar β dan dengan kejadian tersaturasi

$\frac{1}{1+kl}$, kemudian berkurang karena kematian alami sebesar μ serta kontrol vaksinasi u_1 dikarenakan setelah pemberian vaksinasi pada populasi *susceptible* maka populasi akan berkurang dan berpindah pada populasi *recovered*. Kontak efektif dengan individu terinfeksi terjadi dengan cara berkrumun dan dengan adanya kejadian tersaturasi maka adanya kesadaran tiap individu untuk menjauhi krumunan tersebut. Persamaan untuk kompartemen S pada waktu t sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta SI}{1 + kl} - \mu S - u_1 S$$

Kompartemen I mempresentasikan individu terinfeksi yang dapat menularkan penyakit kepada individu lainnya. Kompartemen ini adanya individu yang masuk dari individu yang berubah dari rentan ke terinfeksi dengan kejadian tersaturasi kemudian berkurang karena laju kesembuhan r , kontrol pengobatan u_2 dengan kejadian tersaturasi $\frac{1}{1+al}$, laju kematian alami sebesar μ , pemulihan alami sebesar γ , dan tingkat kematian akibat penyakit sebesar δ . Persamaan untuk kompartemen I pada waktu t sebagai berikut:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + kl} - \frac{(r + r_0 u_2) I}{1 + al} - (\gamma + \delta + \mu) I$$

Kompartemen R mempresentasikan individu sembuh, dimana individu yang telah sembuh tidak dapat tertular penyakit lagi. Kompartemen R meningkat karena adanya laju pemulihan alami yang dinotasikan sebagai γ dimana terdapat sejumlah individu pada kelas *infected* yang sembuh tanpa diberikan pengobatan. Kemudian adanya jumlah individu yang masuk pada kelas R karena kontrol vaksinasi u_1 dan laju kesembuhan sebesar r beserta kontrol pengobatan u_2 dengan kejadian tersaturasi. Kemudian menurun karena adanya kematian alami sebesar μ , kematian

tersebut terjadi bukan disebabkan kerana penyakit menular ini. Persamaan untuk kompartemen R pada waktu t sebagai berikut:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \frac{(r + r_0 u_2)I}{1 + \alpha I} - \mu R + u_1 S$$

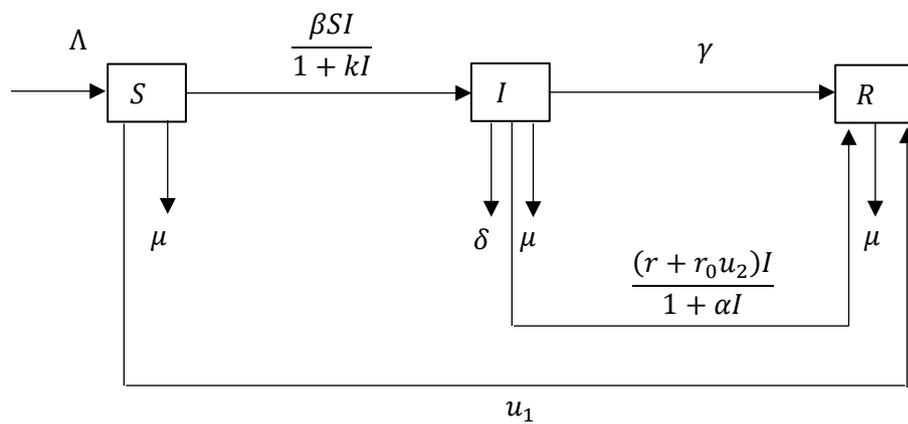
Pada penjelasan diatas mengarah pada formulasi sistem persamaan diferensial biasa sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta SI}{1 + kI} - \mu S - u_1 S$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + kI} - \frac{(r + r_0 u_2)I}{1 + \alpha I} - (\gamma + \delta + \mu)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \frac{(r + r_0 u_2)I}{1 + \alpha I} - \mu R + u_1 S$$

Berikut diagram kompartemen model SIR dengan dua kontrol yaitu vaksinasi dan pengobatan.



Gambar 2.5 Diagram Kompartemen SIR dengan Kontrol u_1 dan u_2

(Lashari, 2016)

2.1.5 Titik Kestimbangan (*Equilibrium Point*)

Titik Kestimbangan atau *Equilibrium Point* adalah titik tetap yang terjadi ketika jumlah pada populasi tertentu tidak akan ada perubahan terhadap waktu.

Misalkan terdapat sistem PD sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

Sistem persamaan tersebut akan dikatakan titik kesetimbangan atau titik *equilibrium* jika titik (x_0, y_0) memenuhi syarat $f(x_0, y_0) = 0$ dan $g(x_0, y_0) = 0$.

Sehingga pada persamaan diferensial tersebut mempunyai solusi titik *equilibrium*

(x_0, y_0) yang memiliki nilai konstan dikarenakan $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$ terhadap

titik (x_0, y_0) . Maka dari itu keadaan yang membuat $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$ dikatakan

keadaan setimbang dan juga yang memenuhi titik tersebut dikatakan sebagai titik

equilibrium atau titik kesetimbangan (Edwards & Penney, 2001).

Misalkan sistem PD dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.8)$$

Definisi 2.1

Titik kesetimbangan $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ pada sistem persamaan diferensial (2.8) memiliki tiga keadaan, sebagai berikut:

1. Stabil lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$ berlaku $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$.
2. Stabil asimtotik lokal jika titik kesetimbangan $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ stabil dan terdapat $\delta_0 > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta_0$ berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$

3. Tidak stabil jika titik kesetimbangan $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tidak memenuhi keadaan stabil lokal (Wiggins, 2003).

Contoh 2.4

Perhatikan sistem persamaan berikut

$$\frac{dS}{dt} = \mu + \beta I - \alpha SI - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I - \mu I$$

Kemudian dicari titik kesetimbangan dari persamaan diatas, sehingga diperoleh

$$\alpha SI - \beta I - \mu I = 0$$

$$I (\alpha S - \beta - \mu) = 0$$

$$\hat{I} = 0 \text{ atau } S = \frac{\beta + \mu}{\alpha}$$

Ketika tidak ada penyakit yang menyerang maka $I = 0$, substitusikan $I = 0$ ke persamaan $\frac{dS}{dt} = 0$ maka

$$\mu + \beta I - \alpha SI - \mu S = 0$$

$$\mu + \beta(0) - \alpha S(0) - \mu S = 0$$

$$-\mu S = -\mu$$

$$S = \frac{-\mu}{-\mu}$$

$$S = 1$$

diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu $(S, I) = (1, 0)$.

Jadi titik kesetimbangan pertama yaitu $(1, 0)$.

Kemudian untuk mencari titik kesetimbangan endemik, substitusikan $S = \frac{\beta + \mu}{\alpha}$ ke

persamaan $\frac{dS}{dt} = 0$ maka

$$\mu + \beta I - \alpha SI - \mu S = 0$$

$$\mu + \beta I - \alpha \left(\frac{\beta + \mu}{\alpha} \right) I - \mu \left(\frac{\beta + \mu}{\alpha} \right) = 0$$

$$\mu + \beta I - \beta I + \mu I - \mu \left(\frac{\beta + \mu}{\alpha} \right) = 0$$

$$\mu + \mu I - \mu \left(\frac{\beta + \mu}{\alpha} \right) = 0$$

$$\mu I = \mu - \mu \left(\frac{\beta + \mu}{\alpha} \right)$$

$$I = 1 - \left(\frac{\beta + \mu}{\alpha} \right)$$

sehingga diperoleh

$$(S, I) = \left(\left(\frac{\beta + \mu}{\alpha} \right), \left(1 - \frac{\beta + \mu}{\alpha} \right) \right).$$

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh maka dapat disimpulkan bahwa sistem persamaan tersebut memiliki dua titik kesetimbangan yaitu (0,1) dan

$$\left(\left(\frac{\beta + \mu}{\alpha} \right), \left(1 - \frac{\beta + \mu}{\alpha} \right) \right)$$

2.1.6 Linierisasi Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Linierisasi adalah proses dimana mengubah sistem persamaan diferensial nonlinier menjadi suatu sistem persamaan linier. Tujuan dari linearisasi sistem persamaan diferensial non linier yaitu untuk mengetahui perilaku suatu sistem disekitar titik kesetimbangan atau titik *equilibrium* sistem tersebut. Dalam mencari hasil linierisasi menggunakan Matriks Jacobian.

Definisi 2.2

Diberikan fungsi $f = f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$, dimana $f_i \in C^1(E), i = 1, 2, \dots, n, E \in \mathbb{R}^n$ dan E merupakan suatu himpunan terbuka. Sehingga jika dinyatakan dalam bentuk matrik akan diperoleh sebagai berikut:

$$J(f(\bar{x})) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial t_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial t_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial t_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial t_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial t_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

Matriks tersebut merupakan matriks Jacobian dari f di titik \bar{x} (Perko, L, 2001).

Definisi 2.3

Suatu sistem linier $Jf(\bar{x})(t - \bar{x})$ merupakan linearisasi sistem nonlinier dari $\dot{x} = f(x)$ yang terdapat disekitar \bar{x} (Perko L. , 1991).

2.1.7 Nilai Eigen

Definisi 2.4

Misalkan A adalah sebuah matriks yang memiliki ukuran $n \times n$, sehingga vektor taknol x pada R^n dikatakan vektor eigen dari matriks A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x , maka

$$Ax = \lambda x$$

Untuk λ yang merupakan skalar sebarang. Skalar λ merupakan nilai eigen dari Matriks A dan x merupakan vektor eigen dari A .

Nilai eigen dapat diperoleh dengan λ tidak boleh sama dengan nol dan jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Sehingga persamaan tersebut merupakan persamaan karakteristik dari Matriks A dan nilai eigennya merupakan skalar-skalar yang memenuhi persamaan karakteristik tersebut (Anton, 1992).

Contoh 2.5

Diberikan matriks $A \in M_2(R)$ dimana

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

perhatikan bahwa

$$\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Kemudian mencari nilai determinan dari persamaan tersebut

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \left(\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 \end{aligned}$$

maka diperoleh persamaan karakteristik dari \mathbf{A} yaitu

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) &= 0 \\ \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda + 2 &= 0 \\ (\lambda - 1)(\lambda - 2) &= 0 \end{aligned}$$

dari persamaan karakteristik, diperoleh nilai eigen dari matriks \mathbf{A} yaitu

$$\lambda_1 = 1 \text{ dan } \lambda_2 = 2$$

2.1.8 Kontrol Optimal

Definisi 2.5

Misalkan U menyatakan kelas dari semua fungsi yang kontinu bagian. Masalah kontrol optimal merupakan masalah menentukan fungsi kontrol $u^*(t)$ diantara fungsi *admissible* $u(t) \in U$ yang membawa sistem dari *state* awal x_0 kepada *state* akhir/terminal x_T yang memnuhi kondisi akhir/terminal, sesuai dengan orde pertama sistem dinamis

$$\frac{dx}{dt} = g(x(t), u(t), t) \quad (2.9)$$

Sehingga fungsional mencapai nilai maksimum. Sehingga kontrol optimal pada umumnya diformulasikan sebagai berikut

$$J(u) = \int_{t_0}^T f(x(t), u(t), t) dt \quad (2.10)$$

dengan kondisi batasnya yaitu

$$x(0) = x_0$$

$$x(T) = x_T$$

dimana

f : Fungsi yang diberikan

Variabel kontrol mengoptimalkan J dinotasikan oleh $u^*(t)$. Kemudian $u^*(t)$ disubstitusikan ke dalam persamaan *state* $x(t)$ maka akan diperoleh *state* yang optimal dan dinotasikan sebagai $x^*(t)$. Prinsip Maksimum Pontryagin merupakan prinsip yang digunakan dalam penyelesaian masalah kontrol optimal (Neilan & Lenhart, 2010).

2.1.9 Prinsip Maksimum Pontryagin

Prinsip maksimum Pontryagin digunakan dalam teori kontrol optimal untuk menemukan kontrol terbaik untuk mengambil sistem dinamis dari satu keadaan ke keadaan lain, terutama dengan adanya kendala untuk keadaan atau kontrol *input*. Hal tersebut menjelaskan bahwa diperlukannya untuk setiap kontrol optimal bersama dengan lintasan keadaan optimal untuk menyelesaikan apa yang disebut sistem Hamiltonian (H), yang merupakan masalah nilai batas dua titik serta kondisi maksimum dari kontrol Hamiltonian.

Prinsip maksimum Pontryagin merupakan penyelesaian kondisi kontrol optimal untuk menuju fungsi yang dituju. Dalam bentuk model matematika

diformulasikan sebagai berikut untuk mencari kontrol u yang akan fungsi tujuannya dioptimalkan

$$J = \int_{t_0}^T f(x, u, t) dt \quad (2.11)$$

Fungsi Hamilton didefinisikan sebagai berikut

$$H = f(t, x(t), y(t)) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) g_i(t, x(t), u(t)) \quad (2.12)$$

dimana f merupakan integral dari fungsi tujuan dan g merupakan ruas kanan persamaan *state*, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Kemudian ketika fungsi H dapat diturunkan oleh $u(t)$, yaitu

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

maka kondisi (2.12) akan terpenuhi.

Selanjutnya memeriksa turunan kedua pada fungsi H terhadap $u(t)$ untuk mengetahui kontrol tersebut. Pada fungsi H juga terdapat variabel *state* $x(t)$ dan *costate* $\lambda(t)$. Sesuai dengan persamaan (2.9), persamaan *state* dinyatakan sebagai berikut

$$x' = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = g_i(t, x(t), u(t)),$$

dan persamaan *costate* dinyatakan sebagai berikut

$$\dot{\lambda}' = \frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

Ketika nilai awal $x(0)$ dan nilai akhir $x(T)$ telah diketahui, sehingga dapat langsung ditentukan nilai turunan x' dan $\dot{\lambda}'$. Tetapi ketika tidak diketahui kondisi akhir $x(T)$ maka akan menggunakan kondisi transversal, yaitu $\dot{\lambda}(T) = 0$ sebagai kondisi terminal atau kondisi akhir.

Berdasarkan penjabaran diatas, diperoleh syarat prinsip maksimum Pontryagin sebagai berikut

$$H(t, x(t), u^*(t), \dot{\lambda}(t)) \leq H(t, x^*(t), u^*(t), \dot{\lambda}(t)) \text{ untuk setiap } t \in [0, T]$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \dot{\lambda}} \quad (\text{Persamaan state})$$

$$\frac{d\dot{\lambda}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (\text{Persamaan costate}) \quad 2.13)$$

$$\dot{\lambda}(T) = 0 \quad (\text{Kondisi transversal})$$

Jika diberi batasan $a \leq u \leq b$ pada variabel kontrol $u(t)$, maka kondisi $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$

akan menjadi sebuah persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$u^* = \begin{cases} u = a, & \text{jika } \frac{\partial H}{\partial u} < 0 \\ a \leq u \leq b, & \text{jika } \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \\ u = b, & \text{jika } \frac{\partial H}{\partial u} > 0 \end{cases}$$

(Lenhart & Workman, 2007).

2.1.10 Metode Sweep Maju-Mundur

Dalam menyelesaikan kontrol optimal dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan *state* dan persamaan *costate* dengan menggunakan metode *Sweep* Maju-Mundur. Metode *Sweep* Maju-Mundur diselesaikan dengan menggunakan Matlab dimana mendefinisikan pada M-File menggunakan parameter yang telah ditentukan. Pada simulasi penelitian ini, model epidemi *SIR* dengan menggunakan dua kontrol sehingga memiliki variabel-variabel diantaranya $S, I, R, \dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dot{\lambda}_3, u_1$, dan u_2 yang akan dinyatakan dalam notasi

$S(i), I(i), R(i), \dot{\lambda}_1(i), \dot{\lambda}_2(i), \dot{\lambda}_3(i), u_1(i), u_2(i)$, dengan $i = 0, 1, 2, \dots$. Berikut ini merupakan langkah-langkah dari algoritma *sweep* maju-mundur.

Langkah 1: Menentukan nilai awal yaitu $S(0), I(0), R(0), \dot{\lambda}_1(n) = \dot{\lambda}_2(n) = \dot{\lambda}_3(n) = 0$. Kemudian pada Langkah ini menentukan ukuran Langkah, dimana $h = 0.1$.

Langkah 2: Membuat tebakan awal pada u_1, u_2 , dan u_3 .

Langkah 3: Menghitung nilai $S(i + 1), I(i + 1), R(i + 1)$ dengan menggunakan nilai awal. Pada perhitungan ini menggunakan metode Runge Kutta orde 4 langkah maju.

Langkah 4: Menghitung nilai $\dot{\lambda}_1(p - 1), \dot{\lambda}_2(p - 1), \dot{\lambda}_3(p - 1)$ dengan kondisi transversal, pada perhitungan langkah 4 ini menggunakan metode Runge Kutta orde 4 langkah mundur.

Langkah 5: Menghitung nilai kontrol $u_1(n)$ dan $u_2(n)$.

Langkah 6: Menghitung nilai galat dari variabel $S, I, R, \dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dot{\lambda}_3, u_1$, dan u_2 berdasarkan nilai iterasi pada saat ini dan sebelumnya. Jika nilai galat lebih dari toleransi, maka kembali ke Langkah 3.

Langkah 7: Print $S^* = S, I^* = I, R^* = R, u_1^* = u_1, u_2^* = u_2$.

(Zulaikha, Trisilowati, & Fadhillah, 2017).

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadist

Dalam menjalani kehidupan pasti akan adanya ujian, salah satu ujian kehidupan yaitu diberikannya musibah berupa penyakit. Ketika diberikan penyakit kadang kala penyakit tersebut tidak kunjung sembuh. Oleh karena itu, haruslah senantiasa berusaha sebab islam merintahkan supaya tidak pernah menyerah dalam mencapai tujuan yang diinginkan. Begitu juga dengan manusia yang terkena

penyakit. Manusia harus senantiasa berusaha untuk sembuh, karena Allah SWT telah menyediakan obat untuk setiap penyakit.

Ketika manusia diberikan penyakit, manusia haruslah berusaha untuk mencapai kesembuhan dengan cara yang baik dan sesuai dengan syariat islam. Sebagaimana firman Allah SWT dalam QS. An-Najm ayat 39 yaitu

وَأَنْ لَّيْسَ لِلْإِنْسَانِ إِلَّا مَا سَعَى (٣٩)

Artinya: “Bahwa manusia hanya memperoleh apa yang telah diusahakannya”

Ayat diatas menjelaskan disamping seseorang tidak akan memikul dosa dan mudharat yang dilakukan oleh orang lain, seseorang tersebutpun tidak akan meraih manfaat dari amal baik orang lain, karena pada ayat tersebut menjelaskan bahwa manusia hanya memperoleh apa yang telah diusahakannya. Maka dari itu seseorang hanya akan menerima apa yang telah diusahakan dirinya sendiri (Shihab M. Q., 2008). Oleh karena itu manusia diwajibkan senantiasa beramal dan berikhtiar. Apapun hasilnya, kewajiban manusia hanyalah berusaha dan hasilnya hanya Allah SWT yang dapat menentukan. Setelah manusia ikhtiar maka manusia wajib tawakal yaitu sikap berserah diri atau memasrahkan semua hasil ikhtiar hanya kepada Allah SWT dan senantiasa bersabar.

Pada penelitian ini adanya tundaan terhadap efek pengobatan maka individu juga akan mengalami keterlambatan untuk sembuh. Maka dari itu manusia yang mengalami musibah berupa penyakit harus senantiasa sabar untuk mencapai kesembuhan. Dalam islam dijelaskan mengenai tentang sabar dalam QS Al-Baqarah ayat 153:

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا اسْتَعِينُوا بِالصَّبْرِ وَالصَّلَاةِ إِنَّ اللَّهَ مَعَ الصَّابِرِينَ (١٥٣)

Artinya: “Wahai orang-orang yang beriman! Mohonlah pertolongan (kepada Allah) dengan sabar dan salat. Sungguh, Allah beserta orang-orang yang sabar.”

Oleh karena itu sebagai manusia wajib sabar dan berserah diri atas apa yang telah terjadi dan selalu meminta pertolongan kepada Allah SWT.

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Pada penelitian ini dibutuhkannya teori-teori pendukung untuk mencapai tujuan pada topik masalah yang telah diangkat. Topik yang diangkat pada penelitian ini yaitu menentukan kontrol optimal model epidemi *SIR* dengan pengobatan tersaturasi. Berdasarkan dengan topik yang diangkat bahwa model epidemi *SIR* adalah model epidemi dengan periode waktu tertentu untuk penyebaran penyakit menular. Persamaan pada model *SIR* disajikan dalam bentuk persamaan diferensial biasa yang bergantung pada waktu. Oleh karena itu diperlukannya teori pendukung untuk menyelesaikan analisis kontrol optimal model *SIR* dengan pengobatan tersaturasi.

Teori pendukung yang digunakan dalam menyelesaikan analisis dinamik yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit, titik ekuilibrium endemik, linierisasi, nilai eigen dan vektor eigen, serta bilangan reproduksi dasar. Setelah itu untuk menentukan kontrol optimal pada penyebaran penyakit menular yaitu teori kontrol optimal dan prinsip maksimum Pontryagin. Kemudian dilanjutkan dengan simulasi numerik terhadap model penyebaran penyakit pada sub populasi dengan dan tanpa kontrol optimal menggunakan parameter yang telah tersedia beserta simulasi numerik fungsi kontrol optimal.

BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Berdasarkan tujuan dari penelitian ini, maka penelitian ini merupakan penelitian kajian teori atau menggunakan metode literatur. Dengan menggunakan metode studi literatur akan diperoleh kajian data informasi yang dibutuhkan pada penelitian ini serta teori pendukung yang berkaitan dengan kasus pada penelitian ini. Sumber literatur akademik dapat diperoleh dari buku, jurnal ilmiah, dan paper. Informasi dan teori pendukung yang diperlukan pada penelitian ini yaitu yang berkaitan atau berkorelasi dengan teori kontrol optimal model *SIR* (*Susceptible-Infected-Recovered*) dan pengobatan tersaturasi.

3.2 Pra Penelitian

Sebelum memulai penelitian, peneliti mengumpulkan sejumlah referensi yang sesuai dengan penelitian ini, sehingga peneliti memahami alur penelitian lebih mendalam. Peneliti mempelajari obyek yang akan diteliti sehingga peneliti dapat mengetahui tujuan dari penelitian ini.

3.3 Tahapan Penelitian

Pada penelitian ini diawali dengan mencari jurnal sebagai rujukan utama, kemudian memahami kasus dari jurnal yang telah diperoleh. Kemudian dengan kasus yang diambil, peneliti melakukan beberapa tahapan untuk memperoleh persamaan kontrol optimal model *SIR* pada penyebaran penyakit menular dengan langkah-langkah sebagai berikut:

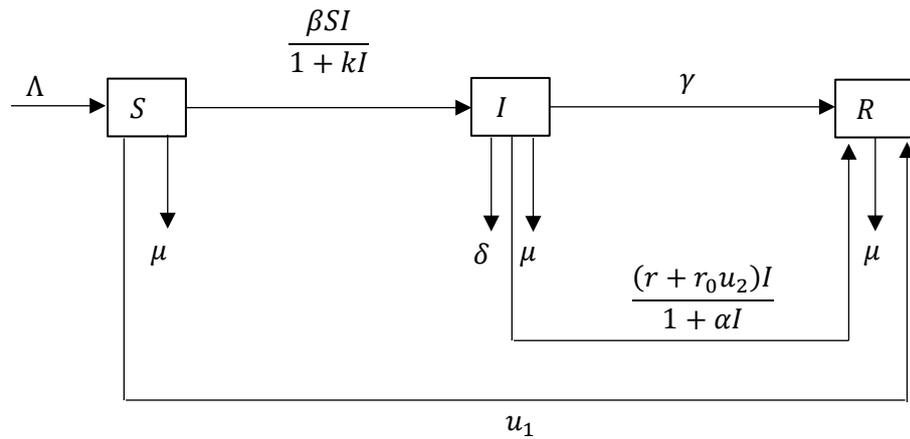
1. Melakukan analisis sistem dinamik model *SIR* tanpa kontrol $u_1 = 0$ dan $u_2 = 0$, dengan tahapan sebagai berikut:

1. Menentukan titik kesetimbangan (*equilibrium point*) bebas penyakit dan endemik.
 2. Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) untuk penyebaran penyakit menular.
 3. Menganalisis kestabilan Model.
2. Melakukan perhitungan kontrol optimal *SIR* dengan dua kontrol yaitu kontrol pengobatan (u_2) dan kontrol vaksinasi (u_1), dengan tahapan sebagai berikut:
1. Menentukan bentuk fungsi Tujuan
 2. Menentukan bentuk Hamilton.
 3. Menentukan persamaan *state*.
 4. Menentukan persamaan *costate*.
 5. Menentukan kondisi stasioner.
3. Mensimulasikan model epidemi *SIR* dengan dua kontrol yaitu kontrol pengobatan (u_2) dan kontrol vaksinasi (u_1). dengan tahapan sebagai berikut:
1. Mensimulasikan model persamaan sehingga diperoleh plot tiap subpopulasi dengan kontrol dan tanpa kontrol.
 2. Menganalisis hasil simulasi yang telah diperoleh.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Model *SIR* akan dibagi menjadi tiga subpopulasi yang terdiri dari kelas individu rentan (*susceptible*), kelas individu terinfeksi (*infected*) dan kelas individu sembuh (*recovered*).

Berikut ini merupakan diagram model epidemik *SIR* dengan kontrol.



Gambar 4.1 Diagram Model Epidemik *SIR* Dengan Kontrol

Sesuai dengan Gambar 4.1 maka akan diperoleh formulasi sistem persamaan diferensial biasa sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \frac{\beta SI}{1 + kI} - \mu S - u_1 S \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{1 + kI} - \frac{(r + r_0 u_2) I}{1 + \alpha I} - (\gamma + \delta + \mu) I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I + \frac{(r + r_0 u_2) I}{1 + \alpha I} - \mu R + u_1 S \end{aligned} \quad (4.1)$$

Lashari (2016).

4.1 Analisis Model *SIR* Tanpa Kontrol ($u_1 = 0$ dan $u_2 = 0$)

Pada tiga persamaan dalam sistem (4.1) terdapat kontrol u_1 dan u_2 , ketika diasumsikan u_1 dan u_2 bernilai nol yang artinya tidak ada tindakan vaksinasi untuk

populasi rentan dan pengobatan untuk populasi terinfeksi, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda - \frac{\beta SI}{1 + kI} - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{1 + kI} - \frac{rI}{1 + \alpha I} - (\gamma + \delta + \mu)I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I + \frac{rI}{1 + \alpha I} - \mu R\end{aligned}\quad (4.2)$$

4.1.1 Bilangan Reproduksi Dasar R_0

Bilangan reproduksi dasar R_0 diperoleh dengan menggunakan matriks *next generation*. Diketahui:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + kI} - \frac{rI}{1 + \alpha I} - (\gamma + \delta + \mu)I$$

Turunan pertama dari $\frac{dI}{dt}$ adalah $\frac{d^2I}{dt^2}$, sehingga diperoleh

$$\frac{d^2I}{dt^2} = \frac{\beta S_0}{(1 + kI)^2} - \frac{r}{(1 + \alpha I)^2} - (\gamma + \delta + \mu)$$

kemudian substitusikan titik bebas penyakit

$$E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right)$$

ke dalam persamaan $\frac{d^2I}{dt^2}$

$$\begin{aligned}\left. \frac{d^2I}{dt^2} \right|_{E_0} &= \frac{\beta S}{(1 + kI_0)^2} - \frac{r}{(1 + \alpha I)^2} - (\gamma + \delta + \mu) \\ &= \frac{\beta \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right)}{(1 + k(0))^2} - \frac{r}{(1 + \alpha(0))^2} - (\gamma + \delta + \mu) \\ &= \frac{\beta \Lambda}{\mu} - r - (\gamma + \delta + \mu)\end{aligned}$$

Akan dicari tahu kondisi yang menyebabkan $\frac{d^2I}{dt^2} > 0$, sehingga

$$\frac{\beta\Lambda - r\mu - (\gamma + \delta + \mu)\mu}{\mu} > 0$$

$$\beta\Lambda - (r + \gamma + \delta + \mu)\mu > 0$$

$$\frac{\beta\Lambda}{(r + \gamma + \delta + \mu)\mu} - 1 > 0$$

$$\frac{\beta\Lambda}{(r + \gamma + \delta + \mu)\mu} > 1$$

dengan demikian diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta\Lambda}{(r + \gamma + \delta + \mu)\mu}$$

Maka ketika $R_0 > 1$ akan mengakibatkan $\frac{d^2I}{dt^2} > 0$, sehingga fungsi $I(t)$ akan

selalu naik dan ketika $R_0 < 1$ akan mengakibatkan $\frac{d^2I}{dt^2} < 0$, sehingga fungsi

$I(t)$ akan turun.

4.1.2 Titik Keseimbangan

Pada model ini, terdapat dua titik keseimbangan yaitu titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik.

1. Titik Keseimbangan Bebas Penyakit (E_0)

Terjadi ketika tidak ada penyakit yang menyerang maka $I_0 = 0$.

Substitusikan $I_0 = 0$ ke persamaan $\frac{dS}{dt} = 0$ dan $\frac{dR}{dt} = 0$

$$\frac{dS}{dt} = 0$$

$$\Lambda - \frac{\beta S_0(0)}{1 + k(0)} - \mu S_0 = 0$$

$$\Lambda - \mu S_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow S_0 = \Lambda$$

$$\Leftrightarrow S_0 = \frac{\Lambda}{\mu} \quad (4.3)$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= 0 \\ \gamma I_0 + \frac{rI_0}{1 + \alpha I_0} - \mu R_0 &= 0 \\ \gamma(0) + \frac{r(0)}{1 + \alpha(0)} - \mu R_0 &= 0 \\ -\mu R_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow R_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu

$$E_0 = (S_0, I_0, R_0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right)$$

2. Titik Kesetimbangan Endemik (E_1)

Untuk menentukan titik kesetimbangan endemik diasumsikan terdapat individu yang terinfeksi penyakit sehingga $I^* \neq 0$. Titik kesetimbangan endemik dilambangkan dengan E_1 .

Akan dicari nilai S^* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS^*}{dt} &= 0 \\ \Lambda - \frac{\beta S^* I^*}{1 + kI^*} - \mu S^* &= 0 \\ \frac{\beta S^* I^*}{1 + kI^*} + \mu S^* &= \Lambda \\ \left(\frac{\beta I^*}{1 + kI^*} + \mu \right) S^* &= \Lambda \\ \left(\frac{\beta I^*}{1 + kI^*} + \mu \right) S^* &= \Lambda \end{aligned}$$

$$S^* = \frac{\Lambda}{\left(\frac{\beta I^*}{1 + kI^*} + \mu\right)}$$

$$S^* = \frac{\Lambda}{\left(\frac{\beta I^* + \mu(1 + kI^*)}{1 + kI^*}\right)}$$

$$S^* = \frac{\Lambda(1 + kI^*)}{\beta I^* + \mu(1 + kI^*)}$$

Selanjutnya substitusikan S^* ke dalam persamaan $\frac{dI^*}{dt} = 0$, sehingga diperoleh

$$\frac{dI^*}{dt} = 0$$

$$\frac{\beta S^* I^*}{1 + kI^*} - \frac{rI^*}{1 + \alpha I^*} - (\gamma + \delta + \mu)I^* = 0$$

$$\beta \left(\frac{\Lambda(1 + kI^*)}{\beta I^* + \mu(1 + kI^*)} \right) I^* - \frac{rI^*}{1 + \alpha I^*} - (\gamma + \delta + \mu)I^* = 0$$

$$\frac{\beta I^* \Lambda}{\beta I^* + \mu(1 + kI^*)} - \frac{rI^*}{1 + \alpha I^*} - (\gamma + \delta + \mu)I^* = 0$$

Karena $\beta I^* + \mu(1 + kI^*) \neq 0$ dan $1 + \alpha I^* \neq 0$, maka

$$\Leftrightarrow \beta I^* \Lambda(1 + \alpha I^*) - rI^*(\beta I^* + \mu(1 + kI^*))$$

$$- ((\gamma + \delta + \mu)I^*)(\beta I^* + \mu(1 + kI^*))(1 + \alpha I^*) = 0$$

$$\beta \Lambda I^* + \beta \Lambda \alpha I^{*2} - r\beta I^{*2} - r\mu I^* - r\mu k I^{*2} - (\gamma + \delta + \mu)\beta I^{*2}$$

$$- (\gamma + \delta + \mu)\beta \alpha I^{*3} - (\gamma + \delta + \mu)\mu I^* - (\gamma + \delta + \mu)\mu \alpha I^{*2}$$

$$- (\gamma + \delta + \mu)\mu k I^{*2} - (\gamma + \delta + \mu)\mu k \alpha I^{*3} = 0$$

$$-(\gamma + \delta + \mu)\beta \alpha I^{*3} - (\gamma + \delta + \mu)\mu k \alpha I^{*3} + \beta \Lambda \alpha I^{*2} - r\beta I^{*2} - r\mu k I^{*2}$$

$$- (\gamma + \delta + \mu)\beta I^{*2} - (\gamma + \delta + \mu)\mu \alpha I^{*2} - (\gamma + \delta + \mu)\mu k I^{*2}$$

$$+ \beta \Lambda I^* - r\mu I^* - (\gamma + \delta + \mu)\mu I^* = 0$$

$$\begin{aligned}
& (-(\gamma + \delta + \mu)\beta\alpha - (\gamma + \delta + \mu)\mu k\alpha)I^{*3} \\
& + (\beta\Lambda\alpha - r\beta - r\mu k - (\gamma + \delta + \mu)\beta - (\gamma + \delta + \mu)\mu\alpha \\
& - (\gamma + \delta + \mu)\mu k)I^{*2} + (\beta\Lambda - r\mu - (\gamma + \delta + \mu)\mu)I^* = 0
\end{aligned}$$

Karena $R_0 = \frac{\beta\Lambda}{(r+\gamma+\delta+\mu)\mu}$, maka persamaan tersebut menjadi

$$\begin{aligned}
& (\alpha(\gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu))I^{*3} \\
& + (\alpha(\gamma + \delta + \mu)\mu + (r + \gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu) - \alpha\beta\Lambda)I^{*2} \\
& + (r + \gamma + \delta + \mu)\mu(1 - R_0)I^* = 0
\end{aligned}$$

kemudian kalikan persamaan tersebut dengan $\frac{1}{I^*}$, diperoleh

$$\begin{aligned}
& (\alpha(\gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu))I^{*2} \\
& + (\alpha(\gamma + \delta + \mu)\mu + (r + \gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu) - \alpha\beta\Lambda)I^{*1} \\
& + (r + \gamma + \delta + \mu)\mu(1 - R_0) = 0
\end{aligned}$$

Sehingga persamaan I^* memenuhi persamaan kuadrat berikut

$$AI^{*2} + BI^* + C = 0 \quad (4.5)$$

dengan

$$A = (\alpha(\gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu))$$

$$B = (\alpha(\gamma + \delta + \mu)\mu + (r + \gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu) - \alpha\beta\Lambda)$$

$$C = (r + \gamma + \delta + \mu)\mu(1 - R_0)$$

dimana nilai diskriminan

$$D = B^2 - 4AC$$

$$\begin{aligned}
D &= (\alpha(\gamma + \delta + \mu)\mu + (r + \gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu) - \alpha\beta\Lambda)^2 \\
& - 4(\alpha(\gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu))(r + \gamma + \delta + \mu)\mu(1 - R_0)
\end{aligned}$$

dengan menggunakan parameter Lashari (2016) maka diperoleh

$$D = 0.00014^2 - 4(0.00002)(-1.99998)$$

$$D = 0.00036 \geq 0$$

Perhatikan bahwa, koefisien A pada persamaan (4.5) selalu positif, kemudian nilai C positif jika $R_0 < 1$, C negatif jika $R_0 > 1$ dan $C = 0$ jika $R_0 = 1$.

Polinom (4.5) memiliki satu solusi positif ketika $C < 0$ atau $R_0 > 1$.

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik yaitu

$$E_1 = (S^*, I^*) = \left(\frac{\Lambda(1 + kI^*)}{\beta I^* + \mu(1 + kI^*)}, I^* \right)$$

4.1.3 Analisis Kestabilan Model

Dalam menganalisis kestabilan titik kesetimbangan, digunakan matriks Jacobian yang bertujuan untuk menentukan nilai eigen. Asumsikan persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = f_1(S(t), I(t), R(t))$$

$$\frac{dI}{dt} = f_2(S(t), I(t), R(t))$$

$$\frac{dR}{dt} = f_3(S(t), I(t), R(t))$$

sehingga diperoleh

$$f_1(S(t), I(t), R(t)) = \Lambda - \frac{\beta SI}{1 + kI} - \mu S$$

$$f_2(S(t), I(t), R(t)) = \frac{\beta SI}{1 + kI} - \frac{rI}{1 + \alpha I} - (\gamma + \delta + \mu)I$$

$$f_3(S(t), I(t), R(t)) = \gamma I + \frac{rI}{1 + \alpha I} - \mu R$$

turunkan $f_1(S(t), I(t), R(t))$, $f_2(S(t), I(t), R(t))$, $f_3(S(t), I(t), R(t))$

terhadap S

$$\frac{\partial f_1(S(t), I(t), R(t))}{\partial S} = -\frac{\beta I}{1 + kI} - \mu$$

$$\frac{\partial f_2(S(t), I(t), R(t))}{\partial S} = \frac{\beta I}{1 + kI}$$

$$\frac{\partial f_3(S(t), I(t), R(t))}{\partial S} = 0$$

turunkan $f_1(S(t), I(t), R(t))$, $f_2(S(t), I(t), R(t))$, $f_3(S(t), I(t), R(t))$ terhadap I

$$\frac{\partial f_1(S(t), I(t), R(t))}{\partial I} = -\frac{\beta S}{(1 + kI)^2}$$

$$\frac{\partial f_2(S(t), I(t), R(t))}{\partial I} = \frac{\beta S}{(1 + kI)^2} - \frac{r}{(1 + \alpha I)^2} - (\gamma + \delta + \mu)$$

$$\frac{\partial f_3(S(t), I(t), R(t))}{\partial I} = \gamma + \frac{(r + r_0 u_2)}{(1 + \alpha I)^2}$$

turunkan $f_1(S(t), I(t), R(t))$, $f_2(S(t), I(t), R(t))$, $f_3(S(t), I(t), R(t))$

terhadap R

$$\frac{\partial f_1(S(t), I(t), R(t))}{\partial R} = 0$$

$$\frac{\partial f_2(S(t), I(t), R(t))}{\partial R} = 0$$

$$\frac{\partial f_3(S(t), I(t), R(t))}{\partial R} = -\mu$$

sehingga diperoleh matriks jacobi sebagai berikut:

$$J(S, I, R) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(S(t), I(t), R(t))}{\partial S} & \frac{\partial f_1(S(t), I(t), R(t))}{\partial I} & \frac{\partial f_1(S(t), I(t), R(t))}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2(S(t), I(t), R(t))}{\partial S} & \frac{\partial f_2(S(t), I(t), R(t))}{\partial I} & \frac{\partial f_2(S(t), I(t), R(t))}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3(S(t), I(t), R(t))}{\partial S} & \frac{\partial f_3(S(t), I(t), R(t))}{\partial I} & \frac{\partial f_3(S(t), I(t), R(t))}{\partial R} \end{bmatrix}$$

$$J(S, I, R) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta I}{1 + kI} - \mu & -\frac{\beta S}{(1 + kI)^2} & 0 \\ \frac{\beta I}{1 + kI} & \frac{\beta S}{(1 + kI)^2} - \frac{r}{(1 + \alpha I)^2} - (\gamma + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & \gamma + \frac{r}{(1 + \alpha I)^2} & -\mu \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

1. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit (E_0)

Untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh dengan cara mensubstitusikan nilai titik $E_0(S_0, I_0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$ ke matriks

Jacobi (4.6) sehingga diperoleh

$$J(S, I, R) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta I}{1 + kI} - \mu & -\frac{\beta S}{(1 + kI)^2} & 0 \\ \frac{\beta I}{1 + kI} & \frac{\beta S}{(1 + kI)^2} - \frac{r}{(1 + \alpha I)^2} - (\gamma + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & \gamma + \frac{r}{(1 + \alpha I)^2} & -\mu \end{bmatrix}$$

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta(0)}{1 + k(0)} - \mu & -\frac{\beta\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)}{(1 + k(0))^2} & 0 \\ \frac{\beta(0)}{1 + k(0)} & \frac{\beta\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)}{(1 + k(0))^2} - \frac{r}{(1 + \alpha(0))^2} - (\gamma + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & \gamma + \frac{r}{(1 + \alpha(0))^2} & -\mu \end{bmatrix}$$

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\beta\Lambda}{\mu} - r - (\gamma + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & \gamma + r & -\mu \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks Jacobi yang telah diperoleh, maka dapat menentukan persamaan karakteristik pada matriks $J(E_0)$ dengan persamaan sebagai berikut:

$$|J(E_0) - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\mu & -\frac{\beta\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\beta\Lambda}{\mu} - r - (\gamma + \delta + \mu) & 0 \\ 0 & \gamma + r & -\mu \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\frac{\beta\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\beta\Lambda}{\mu} - r - (\gamma + \delta + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma + r & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

selanjutnya menentukan nilai determinan, digunakan metode Sarrus sebagai berikut:

$$|J(E_0) - \lambda I| = |A|$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\frac{\beta\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\beta\Lambda}{\mu} - r - (\gamma + \delta + \mu) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma + r & -\mu - \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} -\mu - \lambda & -\frac{\beta\Lambda}{\mu} \\ 0 & \frac{\beta\Lambda}{\mu} - r - (\gamma + \delta + \mu) - \lambda \\ 0 & \gamma + r \end{matrix}$$

$$(-\mu - \lambda)(-\mu - \lambda) \left(\frac{\beta\Lambda}{\mu} - r - (\gamma + \delta + \mu) - \lambda \right) = 0$$

sehingga diperoleh tiga nilai eigen, sebagai berikut:

1. Nilai eigen yang pertama (λ_1) yaitu

$$-\mu - \lambda = 0$$

$$\lambda_1 = -\mu < 0$$

2. Nilai eigen kedua (λ_2) yaitu

$$-\mu - \lambda = 0$$

$$\lambda_2 = -\mu < 0$$

3. Nilai eigen ketiga (λ_3) yaitu

$$\frac{\beta\Lambda}{\mu} - r - (\gamma + \delta + \mu) - \lambda = 0$$

$$\lambda_3 = \frac{\beta\Lambda}{\mu} - (r + \gamma + \delta + \mu)$$

$$\lambda_3 = (R_0 - 1)(r + \gamma + \delta + \mu)$$

Oleh karena itu, semua nilai eigen dari persamaan karakteristik jelas real serta negatif ketika $R_0 < 1$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa kesetimbangan bebas penyakit (E_0) stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1 \rightarrow \lambda_i < 0, i = 1,2,3$.

2. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik (E_1)

Untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan endemik menggunakan dua persamaan berikut ini:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \frac{\beta SI}{1 + kI} - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{1 + kI} - \frac{rI}{1 + \alpha I} - (\gamma + \delta + \mu)I \end{aligned} \quad (4.7)$$

Sebelumnya telah diperoleh persamaan kuadrat pada kesetimbangan endemik dari persamaan (4.5) diperoleh

$$AI^{*2} + BI^* + C = 0$$

dengan

$$A = (\alpha(\gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu))$$

$$B = (\alpha(\gamma + \delta + \mu)\mu + (r + \gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu) - \alpha\beta\Lambda)$$

$$C = (r + \gamma + \delta + \mu)\mu(1 - R_0)$$

Pada sistem persamaan (4.7) memiliki *backward bifurcation* ketika $R_0 = 1$ jika dan hanya jika $B < 0$. Adanya *backward bifurcation* pada $R_0 = 0$ maka $C = 0$ sehingga diperoleh

$$(r + \gamma + \delta + \mu)\mu(1 - R_0) = 0$$

$$(r + \gamma + \delta + \mu)\mu \left(1 - \frac{\beta\Lambda}{(r + \gamma + \delta + \mu)\mu} \right) = 0$$

$$(r + \gamma + \delta + \mu)\mu - \beta\Lambda = 0$$

$$\beta\Lambda = (r + \gamma + \delta + \mu)\mu$$

Sistem pada persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk α .

Pada kondisi $B < 0$ dengan $\beta\Lambda = (r + \gamma + \delta + \mu)\mu$ akan setara dengan

$$(\alpha(\gamma + \delta + \mu)\mu + (r + \gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu) - \alpha\beta\Lambda) < 0$$

$$\alpha(\gamma + \delta + \mu)\mu + (r + \gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu) < \alpha\beta\Lambda$$

$$\alpha(\gamma + \delta + \mu)\mu + (r + \gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu) < \alpha(r + \gamma + \delta + \mu)\mu$$

$$\alpha(\gamma + \delta + \mu)\mu + (r + \gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu) < \alpha(\gamma + \delta + \mu)\mu + \alpha\mu r$$

$$(r + \gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu) < \alpha\mu r$$

$$\frac{(r + \gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu)}{\mu r} < \alpha$$

$$\alpha > \frac{\beta\Lambda(\beta + k\mu)}{\mu^2 r}$$

Jadi *backward bifurcation* terjadi pada $R_0 = 1$ jika dan hanya jika $\alpha > \frac{\beta\Lambda(\beta+k\mu)}{\mu^2 r}$.

Kemudian analisis stabil asimtotik lokal pada kesetimbangan endemik ketika $R_0 > 1$ dengan matriks jacobian yang diperoleh pada sistem (4.6) sebagai berikut:

$$J(S, I) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta I}{1 + kI} - \mu & -\frac{\beta S}{(1 + kI)^2} \\ \frac{\beta I}{1 + kI} & \frac{\beta S}{(1 + kI)^2} - \frac{r}{(1 + \alpha I)^2} - (\gamma + \delta + \mu) \end{bmatrix}$$

dari sistem persamaan (4.7) yang memenuhi kesetimbangan endemik yaitu

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + kI} - \frac{rI}{1 + \alpha I} - (\gamma + \delta + \mu)I$$

ketika $\frac{dI}{dt} = 0$, maka

$$\frac{\beta SI}{1 + kI} - \frac{rI}{1 + \alpha I} - (\gamma + \delta + \mu)I = 0$$

Kemudian kalikan dengan $\frac{1}{(1+kI)}$ dan karena $I \neq 0$ maka ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} \frac{\beta S}{(1+kI)^2} - \frac{r}{(1+kI)(1+\alpha I)} - \frac{(\gamma + \delta + \mu)}{(1+kI)} &= 0 \\ \frac{\beta S}{(1+kI)^2} &= \frac{r}{(1+\alpha I)(1+kI)} + \frac{(\gamma + \delta + \mu)}{(1+kI)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sehingga diperoleh determinan $J(S, I)$ yaitu

$$\begin{aligned} \det J(S, I) &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \det J(S, I) &= \left(-\frac{\beta I}{1+kI} - \mu \right) \left(\frac{\beta S}{(1+kI)^2} - \frac{r}{(1+\alpha I)^2} - (\gamma + \delta + \mu) \right) \\ &\quad + \left(\frac{\beta S}{(1+kI)^2} \right) \left(\frac{\beta I}{1+kI} \right) \\ &= \left(-\frac{\beta I}{1+kI} \right) \left(\frac{\beta S}{(1+kI)^2} \right) + \left(\frac{\beta I}{1+kI} \right) \left(\frac{r}{(1+\alpha I)^2} \right) + \left(\frac{\beta I}{1+kI} \right) (\gamma + \delta + \mu) \\ &\quad - (\mu) \left(\frac{\beta S}{(1+kI)^2} \right) + (\mu) \left(\frac{r}{(1+\alpha I)^2} \right) + (\mu)(\gamma + \delta + \mu) \\ &\quad + \left(\frac{\beta S}{(1+kI)^2} \right) \left(\frac{\beta I}{1+kI} \right) \\ &= \left(\frac{\beta I}{1+kI} \right) \left(\frac{r}{(1+\alpha I)^2} \right) + \left(\frac{\beta I}{1+kI} \right) (\gamma + \delta + \mu) - (\mu) \left(\frac{\beta S}{(1+kI)^2} \right) \\ &\quad + (\mu) \left(\frac{r}{(1+\alpha I)^2} \right) + (\mu)(\gamma + \delta + \mu) \end{aligned}$$

Kemudian substitusikan persamaan (4.8) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\beta I}{1+kI} \right) \left(\frac{r}{(1+\alpha I)^2} \right) + \left(\frac{\beta I}{1+kI} \right) (\gamma + \delta + \mu) \\ &\quad - (\mu) \left(\frac{(\gamma + \delta + \mu)}{1+kI} + \frac{r}{(1+\alpha I)(1+kI)} \right) + (\mu) \left(\frac{r}{(1+\alpha I)^2} \right) \\ &\quad + (\mu)(\gamma + \delta + \mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1 + \alpha I)^2(1 + kI)} (\beta I r + \beta I(\gamma + \delta + \mu)(1 + \alpha I)^2 \\
&\quad - \mu(\gamma + \delta + \mu)(1 + \alpha I)^2 - \mu r(1 + \alpha I) + \mu r(1 + kI) \\
&\quad + \mu(\gamma + \delta + \mu)(1 + \alpha I)^2(1 + kI)) \\
&= \frac{1}{(1 + \alpha I)^2(1 + kI)} (\beta I r + \beta I(\gamma + \delta + \mu)(1 + \alpha I)^2 \\
&\quad + \mu(\gamma + \delta + \mu)kI(1 + \alpha I)^2 + \mu r kI - \mu r \alpha I) \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Persamaan (4.9) akan bernilai positif jika dan hanya jika

$$\beta I r + \beta I(\gamma + \delta + \mu)(1 + \alpha I)^2 + \mu(\gamma + \delta + \mu)kI(1 + \alpha I)^2 + \mu r kI > \mu r \alpha I$$

perhatikan bahwa $I \neq 0$ maka ekuivalen dengan

$$\beta r + \beta(\gamma + \delta + \mu)(1 + \alpha I)^2 + \mu(\gamma + \delta + \mu)k(1 + \alpha I)^2 + \mu r k > \mu r \alpha$$

sehingga telah diperoleh

$$\begin{aligned}
&\mu k(\gamma + \delta + \mu)(1 + \alpha I)^2 + \mu r k - \beta(\gamma + \delta + \mu)(1 + \alpha I)^2 - \beta r \\
&> (r + \gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu)
\end{aligned}$$

Jadi $\det J(S, I) > 0$ jika

$$(r + \gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu) > \mu r \alpha$$

atau

$$\alpha < \frac{(r + \gamma + \delta + \mu)(\beta + k\mu)}{\mu r} = \frac{\beta \Lambda(\beta + k\mu)}{\mu^2 r} = a_0$$

Kemudian pada persamaan (4.7) tidak memiliki *backward bifurcation* pada kondisi dibawah ini

$$\text{tr } J(S, I) = a_{11} + a_{22}$$

$$\text{tr } J(S, I) = -\frac{\beta I}{1 + kI} - \mu + \frac{\beta S}{(1 + kI)^2} - \frac{r}{(1 + \alpha I)^2} - (\gamma + \delta + \mu)$$

subtitusikan persamaan (4.8) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\beta I}{1+kI} - \mu + \frac{\beta S}{(1+kI)^2} - \frac{r}{(1+\alpha I)^2} - (\gamma + \delta + \mu) \\
&= -\frac{\beta I}{1+kI} - \mu + \frac{(\gamma + \delta + \mu)}{1+kI} + \frac{r}{(1+\alpha I)(1+kI)} - \frac{r}{(1+\alpha I)^2} \\
&\quad - (\gamma + \delta + \mu) \\
&= \frac{1}{(1+\alpha I)^2(1+kI)} \left(-\beta I(1+\alpha I)^2 - \mu(1+kI)(1+\alpha I)^2 \right. \\
&\quad \left. + (\gamma + \delta + \mu)(1+\alpha I)^2 + r(1+\alpha I) - r(1+kI) \right. \\
&\quad \left. - (\gamma + \delta + \mu)(1+\alpha I)^2(1+kI) \right) \\
&= \frac{1}{(1+\alpha I)^2(1+kI)} \left(-\beta I(1+\alpha I)^2 - \mu(1+kI)(1+\alpha I)^2 + \alpha r I - kr I \right. \\
&\quad \left. - (\gamma + \delta + \mu)kI(1+\alpha I)^2 \right) \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.10) akan bernilai positif jika dan hanya jika

$$\beta I(1+\alpha I)^2 + \mu(1+kI)(1+\alpha I)^2 + krI + (\gamma + \delta + \mu)kI(1+\alpha I)^2 > \alpha r I$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\mu(1+kI)(1+\alpha I)^2 + krI + (\gamma + \delta + \mu)kI(1+\alpha I)^2 + \beta I(1+\alpha I)^2 \\
&> \mu k I + \beta I + (\gamma + \delta + \mu)k I + kr I
\end{aligned}$$

Jadi $\text{tr} J(S, I) > 0$ jika

$$\mu k I + \beta I + (\gamma + \delta + \mu)k I + kr I > \alpha r I$$

atau

$$\alpha < \frac{\mu k + \beta + (\gamma + \delta + \mu)k + kr}{r} = a_1$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa jika $R_0 > 1$ maka kesetimbangan endemik

adalah stabil asimtotik lokal jika

$$\alpha < \min \{a_0, a_1\}$$

$$\alpha < \min \left\{ \frac{\beta \Lambda (\beta + k\mu)}{\mu^2 r}, \frac{\mu k + \beta + (\gamma + \delta + \mu)k + kr}{r} \right\}$$

4.2 Kontrol Optimal *SIR* dengan Kontrol u_1 dan u_2

Pada model *SIR* dalam persamaan (4.1) adanya dua kontrol yaitu vaksinasi (u_1) yang ditujukan kepada individu rentan dan pengobatan (u_2) yang ditujukan kepada individu terinfeksi. Pada bagian ini akan menentukan strategi untuk meminimalkan jumlah individu rentan $S(t)$, individu terinfeksi $I(t)$ dan memaksimalkan individu sembuh $R(t)$ selama interval waktu $[0; T]$, serta meminimalkan biaya yang dikeluarkan untuk program vaksinasi dan pengobatan.

Jika $u_1(t) = 1$ dan $u_2(t) = 1$, maka pemberian kedua kontrol tersebut dapat dikatakan efektif. Kemudian ketika $u_1(t) = 0$ dan $u_2(t) = 0$, maka pemberian kontrol sama sekali tidak berpengaruh dalam mengurangi jumlah individu rentan dan individu terinfeksi serta tidak berpengaruh dalam memaksimalkan individu sembuh. Sehingga pada penelitian ini akan menentukan kedua kontrol yaitu $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ yang optimal dan akan disimbolkan oleh $u_1^*(t)$ dan $u_2^*(t)$, sehingga upaya pemberian kontrol tersebut dilakukan dapat semaksimal mungkin dengan biaya kedua kontrol yang minimum.

Berdasarkan penjelasan sebelumnya maka dapat diformulasikan fungsi biaya terhadap dua kontrol yaitu $B_1 u_1^2(t)$ dan $B_2 u_2^2(t)$ dimana B_1 dan B_2 merupakan bobot biaya untuk variabel-variabel kontrol serta adanya bobot A_1 dan A_2 dimana bobot tersebut merupakan bobot untuk individu rentan dan terinfeksi. Dengan demikian pada penelitian ini akan terdapat tiga fungsi tujuan untuk dibandingkan pada simulasi numerik, sebagai berikut (Lashari, 2016):

$$f_1(u_1, u_2) = \int_0^T \left(A_1 S + A_2 I + \frac{1}{2} (B_1 u_1^2 + B_2 u_2^2) \right) dt = \int_0^T L_1 dt \quad (4.11)$$

$$f_2(u_1, u_2) = \int_0^T \left(A_2 I + \frac{1}{2} (B_1 u_1^2 + B_2 u_2^2) \right) dt = \int_0^T L_2 dt \quad (4.12)$$

$$f_3(u_1, u_2) = \int_0^T \left(A_1 S + A_2 I - A_3 R + \frac{1}{2} (B_1 u_1^2 + B_2 u_2^2) \right) dt = \int_0^T L_3 dt \quad (4.13)$$

Fungsi tersebut merupakan fungsi Lagrange, fungsi Lagrange pertama (L_1) pada persamaan (4.11) bertujuan untuk meminimumkan jumlah individu rentan, jumlah individu terinfeksi, biaya untuk vaksinasi serta biaya untuk pengobatan. Untuk fungsi Lagrange kedua (L_2) pada persamaan (4.12) bertujuan meminimumkan jumlah individu terinfeksi, biaya untuk vaksinasi serta biaya untuk pengobatan. Kemudian pada fungsi Lagrange ketiga (L_3) pada persamaan (4.13) bertujuan meminimumkan jumlah individu rentan, jumlah individu terinfeksi, biaya untuk vaksinasi, biaya untuk pengobatan dan memaksimumkan jumlah individu sembuh. Nilai $\frac{1}{2}$ yang ada pada fungsi Lagrange tersebut menunjukkan bahwa bobot yang menyatakan kepentingan dari biaya kedua kontrol yaitu u_1 dan u_2 adalah sama. Selanjutnya masalah kontrol optimal diselesaikan dengan memenuhi kondisi pada prinsip maksimum Pontryagin (Graian dan Essayed, 2010).

Berikut ini merupakan tahapan penyelesaian Model *SIR* dengan kontrol, langkah pertama dalam menyelesaikan kontrol optimal adalah membentuk fungsi Hamilton. Dalam prinsip minimum Pontryagian, Hamilton dibentuk berdasarkan fungsi tujuan dan persamaan state. Pada penelitian ini terdapat tiga fungsi tujuan, sehingga akan terdapat tiga fungsi Hamilton. Berikut merupakan fungsi Hamilton:

1. Untuk fungsi tujuan pertama (L_1)

$$H_1 = H(u(t), x(t), \lambda(t))$$

$$\begin{aligned}
H_1 &= L_1(S, I, u_1, u_2) + \dot{\lambda}_1 \left[\Lambda - \frac{\beta SI}{1 + kI} - \mu S - u_1 S \right] \\
&+ \dot{\lambda}_2 \left[\frac{\beta SI}{1 + kI} - \frac{(r + r_0 u_2)I}{1 + \alpha I} - (\gamma + \delta + \mu)I \right] \\
&+ \dot{\lambda}_3 \left[\gamma I + \frac{(r + r_0 u_2)I}{1 + \alpha I} - \mu R + u_1 S \right] \tag{4.14}
\end{aligned}$$

2. Untuk fungsi tujuan kedua (L_2)

$$\begin{aligned}
H_2 &= H(u(t), x(t), \dot{\lambda}(t)) \\
H_2 &= L_2(I, u_1, u_2) + \dot{\lambda}_1 \left[\Lambda - \frac{\beta SI}{1 + kI} - \mu S - u_1 S \right] \\
&+ \dot{\lambda}_2 \left[\frac{\beta SI}{1 + kI} - \frac{(r + r_0 u_2)I}{1 + \alpha I} - (\gamma + \delta + \mu)I \right] \\
&+ \dot{\lambda}_3 \left[\gamma I + \frac{(r + r_0 u_2)I}{1 + \alpha I} - \mu R + u_1 S \right] \tag{4.15}
\end{aligned}$$

3. Untuk fungsi tujuan ketiga (L_3)

$$\begin{aligned}
H_3 &= H(u(t), x(t), \dot{\lambda}(t)) \\
H_3 &= L_3(S, I, R, u_1, u_2) + \dot{\lambda}_1 \left[\Lambda - \frac{\beta SI}{1 + kI} - \mu S - u_1 S \right] \\
&+ \dot{\lambda}_2 \left[\frac{\beta SI}{1 + kI} - \frac{(r + r_0 u_2)I}{1 + \alpha I} - (\gamma + \delta + \mu)I \right] \\
&+ \dot{\lambda}_3 \left[\gamma I + \frac{(r + r_0 u_2)I}{1 + \alpha I} - \mu R + u_1 S \right] \tag{4.16}
\end{aligned}$$

dimana $\dot{\lambda}_1$, $\dot{\lambda}_2$, dan $\dot{\lambda}_3$ merupakan fungsi adjoint yang terkait dengan persamaan untuk keadaan S , I , dan R masing-masing.

Berdasarkan Hamiltonian yang telah diperoleh, maka dapat ditentukan persamaan *state* dan *co-state*. Persamaan *state* adalah turunan fungsi Hamilton terhadap masing-masing $\dot{\lambda}_1$, $\dot{\lambda}_2$, dan $\dot{\lambda}_3$, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \dot{\lambda}} = \Lambda - \frac{\beta SI}{1 + kI} - \mu S - u_1 S$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \dot{\lambda}_2} = \frac{\beta SI}{1 + kI} - \frac{(r + r_0 u_2)I}{1 + \alpha I} - (\gamma + \delta + \mu)I$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \dot{\lambda}_3} = \gamma I + \frac{(r + r_0 u_2)I}{1 + \alpha I} - \mu R + u_1 S$$

dengan kondisi awal $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$ dan $R(0) = R_0$

Kemudian Persamaan *costate* dapat diperoleh dari turunan fungsi Hamilton terdapat S , I , dan R .

1. Untuk H_1 , diperoleh $\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dot{\lambda}_3$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_1}{\partial t} = -\frac{\partial H_1}{\partial S}$$

$$= -\left(\left(-\frac{\beta I}{(1 + kI)} - \mu - u_1 \right) \dot{\lambda}_1 + \left(\frac{\beta I}{(1 + kI)} \right) \dot{\lambda}_2 + u_1 \dot{\lambda}_3 + A_1 \right)$$

$$= -\left(\frac{\beta I}{(1 + kI)} (-\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2) + u_1 (-\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_3) - \mu \dot{\lambda}_1 + A_1 \right)$$

$$= \frac{\beta I}{(1 + kI)} (\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2) + u_1 (\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_3) + \mu \dot{\lambda}_1 - A_1$$

$$= \frac{\beta (\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2) I}{(1 + kI)} + (\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_3) u_1 + \mu \dot{\lambda}_1 - A_1$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_2}{\partial t} = -\frac{\partial H_1}{\partial I}$$

$$= -\left(-\left(\frac{\beta S}{(1 + kI)^2} \right) \dot{\lambda}_1 + \left(\frac{\beta S}{(1 + kI)^2} - \frac{(r + r_0 u_2)}{(1 + \alpha I)^2} - (\gamma + \delta + \mu) \right) \dot{\lambda}_2 \right.$$

$$\left. + \left(\gamma + \frac{(r + r_0 u_2)}{(1 + \alpha I)^2} \right) \dot{\lambda}_3 \right) + A_2$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(\frac{\beta S}{(1+kI)^2}(-\dot{\lambda}_1+\dot{\lambda}_2) + \frac{(r+r_0u_2)}{(1+\alpha I)^2}(-\dot{\lambda}_2+\dot{\lambda}_3) - (\gamma+\delta+\mu)\dot{\lambda}_2 + \gamma\dot{\lambda}_3\right) \\
&\quad + A_2 \\
&= \frac{\beta S}{(1+kI)^2}(\dot{\lambda}_1-\dot{\lambda}_2) + \frac{(r+r_0u_2)}{(1+\alpha I)^2}(\dot{\lambda}_2-\dot{\lambda}_3) + (\gamma+\delta+\mu)\dot{\lambda}_2 - \gamma\dot{\lambda}_3 - A_2 \\
&= \frac{\beta(\dot{\lambda}_1-\dot{\lambda}_2)S}{(1+kI)^2} + \frac{(r+r_0u_2)(\dot{\lambda}_2-\dot{\lambda}_3)}{(1+\alpha I)^2} + (\gamma+\delta+\mu)\dot{\lambda}_2 - \gamma\dot{\lambda}_3 - A_2 \\
\frac{\partial \dot{\lambda}_3}{\partial t} &= -\frac{\partial H_1}{\partial R} \\
&= -(-\mu\dot{\lambda}_3) \\
&= \mu\dot{\lambda}_3
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh tiga persamaan *costate* ketika menggunakan fungsi tujuan pertama (L_1) yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{\lambda}_1}{\partial t} &= \frac{\beta(\dot{\lambda}_1-\dot{\lambda}_2)I}{(1+kI)} + (\dot{\lambda}_1-\dot{\lambda}_3)u_1 + \mu\dot{\lambda}_1 - A_1 \\
\frac{\partial \dot{\lambda}_2}{\partial t} &= \frac{\beta(\dot{\lambda}_1-\dot{\lambda}_2)S}{(1+kI)^2} + \frac{(r+r_0u_2)(\dot{\lambda}_2-\dot{\lambda}_3)}{(1+\alpha I)^2} + (\gamma+\delta+\mu)\dot{\lambda}_2 - \gamma\dot{\lambda}_3 - A_2 \\
\frac{\partial \dot{\lambda}_3}{\partial t} &= \mu\dot{\lambda}_3
\end{aligned}$$

2. Untuk H_2 , diperoleh $\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dot{\lambda}_3$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{\lambda}_1}{\partial t} &= -\frac{\partial H_2}{\partial S} \\
&= -\left(\left(-\frac{\beta I}{(1+kI)} - \mu - u_1\right)\dot{\lambda}_1 + \left(\frac{\beta I}{(1+kI)}\right)\dot{\lambda}_2 + u_1\dot{\lambda}_3\right) \\
&= -\left(\frac{\beta I}{(1+kI)}(-\dot{\lambda}_1+\dot{\lambda}_2) + u_1(-\dot{\lambda}_1+\dot{\lambda}_3) - \mu\dot{\lambda}_1\right) \\
&= \frac{\beta I}{(1+kI)}(\dot{\lambda}_1-\dot{\lambda}_2) + u_1(\dot{\lambda}_1-\dot{\lambda}_3) + \mu\dot{\lambda}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2)I}{(1 + kI)} + (\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_3)u_1 + \mu\dot{\lambda}_1 \\
\frac{\partial \dot{\lambda}_2}{\partial t} &= -\frac{\partial H_2}{\partial I} \\
&= -\left(-\left(\frac{\beta S}{(1 + kI)^2}\right)\dot{\lambda}_1 + \left(\frac{\beta S}{(1 + kI)^2} - \frac{(r + r_0 u_2)}{(1 + \alpha I)^2} - (\gamma + \delta + \mu)\right)\dot{\lambda}_2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\gamma + \frac{(r + r_0 u_2)}{(1 + \alpha I)^2}\right)\dot{\lambda}_3 + A_2\right) \\
&= -\left(\frac{\beta S}{(1 + kI)^2}(-\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2) + \frac{(r + r_0 u_2)}{(1 + \alpha I)^2}(-\dot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_3) - (\gamma + \delta + \mu)\dot{\lambda}_2 + \gamma\dot{\lambda}_3 \right. \\
&\quad \left. + A_2\right) \\
&= \frac{\beta S}{(1 + kI)^2}(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2) + \frac{(r + r_0 u_2)}{(1 + \alpha I)^2}(\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_3) + (\gamma + \delta + \mu)\dot{\lambda}_2 - \gamma\dot{\lambda}_3 - A_2 \\
&= \frac{\beta(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2)S}{(1 + kI)^2} + \frac{(r + r_0 u_2)(\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_3)}{(1 + \alpha I)^2} + (\gamma + \delta + \mu)\dot{\lambda}_2 - \gamma\dot{\lambda}_3 - A_2 \\
\frac{\partial \dot{\lambda}_3}{\partial t} &= -\frac{\partial H_2}{\partial R} \\
&= -(-\mu\dot{\lambda}_3) \\
&= \mu\dot{\lambda}_3
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh tiga persamaan *costate* ketika menggunakan fungsi tujuan

kedua (L_2) yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial t} &= \frac{\beta(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2)I}{(1 + kI)} + (\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_3)u_1 + \mu\dot{\lambda}_1 \\
\frac{\partial \dot{\lambda}_2}{\partial t} &= \frac{\beta(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2)S}{(1 + kI)^2} + \frac{(r + r_0 u_2)(\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_3)}{(1 + \alpha I)^2} + (\gamma + \delta + \mu)\dot{\lambda}_2 - \gamma\dot{\lambda}_3 - A_2 \\
\frac{\partial \dot{\lambda}_3}{\partial t} &= \mu\dot{\lambda}_3
\end{aligned}$$

3. Untuk H_3 , diperoleh $\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dot{\lambda}_3$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{\lambda}_1}{\partial t} &= -\frac{\partial H_3}{\partial S} \\
&= -\left(\left(-\frac{\beta I}{(1+kI)} - \mu - u_1 \right) \dot{\lambda}_1 + \left(\frac{\beta I}{(1+kI)} \right) \dot{\lambda}_2 + u_1 \dot{\lambda}_3 + A_1 \right) \\
&= -\left(\frac{\beta I}{(1+kI)} (-\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2) + u_1 (-\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_3) - \mu \dot{\lambda}_1 + A_1 \right) \\
&= \frac{\beta I}{(1+kI)} (\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2) + u_1 (\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_3) + \mu \dot{\lambda}_1 - A_1 \\
&= \frac{\beta (\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2) I}{(1+kI)} + (\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_3) u_1 + \mu \dot{\lambda}_1 - A_1 \\
\frac{\partial \dot{\lambda}_2}{\partial t} &= -\frac{\partial H_3}{\partial I} \\
&= -\left(-\left(\frac{\beta S}{(1+kI)^2} \right) \dot{\lambda}_1 + \left(\frac{\beta S}{(1+kI)^2} - \frac{(r+r_0 u_2)}{(1+\alpha I)^2} - (\gamma + \delta + \mu) \right) \dot{\lambda}_2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\gamma + \frac{(r+r_0 u_2)}{(1+\alpha I)^2} \right) \dot{\lambda}_3 + A_2 \right) \\
&= -\left(\frac{\beta S}{(1+kI)^2} (-\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2) + \frac{(r+r_0 u_2)}{(1+\alpha I)^2} (-\dot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_3) - (\gamma + \delta + \mu) \dot{\lambda}_2 + \gamma \dot{\lambda}_3 \right. \\
&\quad \left. + A_2 \right) \\
&= \frac{\beta S}{(1+kI)^2} (\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2) + \frac{(r+r_0 u_2)}{(1+\alpha I)^2} (\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_3) + (\gamma + \delta + \mu) \dot{\lambda}_2 - \gamma \dot{\lambda}_3 - A_2 \\
&= \frac{\beta (\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2) S}{(1+kI)^2} + \frac{(r+r_0 u_2) (\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_3)}{(1+\alpha I)^2} + (\gamma + \delta + \mu) \dot{\lambda}_2 - \gamma \dot{\lambda}_3 - A_2 \\
\frac{\partial \dot{\lambda}_3}{\partial t} &= -\frac{\partial H_3}{\partial R} \\
&= -(-\mu \dot{\lambda}_3 - A_3) \\
&= \mu \dot{\lambda}_3 + A_3
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh tiga persamaan *costate* ketika menggunakan fungsi tujuan ketiga (L_3) yaitu

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_1}{\partial t} = \frac{\beta(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2)I}{(1 + kI)} + (\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_3)u_1 + \mu\dot{\lambda}_1 - A_1$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_2}{\partial t} = \frac{\beta(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2)S}{(1 + kI)^2} + \frac{(r + r_0u_2)(\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_3)}{(1 + \alpha I)^2} + (\gamma + \delta + \mu)\dot{\lambda}_2 - \gamma\dot{\lambda}_3 - A_2$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_3}{\partial t} = \mu\dot{\lambda}_3 + A_3$$

dengan kondisi transversal

$$\dot{\lambda}_i(T) = 0, i = 1, 2, 3$$

$$\dot{\lambda}_1(T) = \dot{\lambda}_2(T) = \dot{\lambda}_3(T)$$

Kontrol optimal $u_1^*(t)$ dan $u_2^*(t)$ diperoleh jika $\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$ dan $\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$

kondisi tersebut dikatakan kondisi stasioner, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$$

$$2\frac{1}{2}B_1u_1^* - \dot{\lambda}_1S^* + \dot{\lambda}_2S^* = 0$$

$$B_1u_1^* + (-\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2)S^* = 0$$

$$B_1u_1^* = (\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2)S^*$$

$$u_1^* = \frac{(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2)S^*}{B_1}$$

dan

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$$

$$2\frac{1}{2}B_2u_2^* - \frac{r_0I^*}{1 + \alpha I^*}\dot{\lambda}_2 + \frac{r_0I^*}{1 + \alpha I^*}\dot{\lambda}_3 = 0$$

$$B_2 u_2^* + \frac{r_0 I^*}{1 + \alpha I^*} (-\dot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_3) = 0$$

$$B_2 u_2^* + \frac{(-\dot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_3) r_0 I^*}{1 + \alpha I^*} = 0$$

$$B_2 u_2^* = \frac{(\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_3) r_0 I^*}{1 + \alpha I^*}$$

$$u_2^* = \frac{(\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_3) r_0 I^*}{B_2 (1 + \alpha I^*)}$$

Variabel kontrol pada model epidemik *SIR* dengan vaksinasi dan pengobatan didefinisikan $u_{1 \min} \leq u_1(t) \leq u_{1 \max}$ dan $u_{2 \min} \leq u_2(t) \leq u_{2 \max}$, sehingga diperoleh

$$u_1^* = \begin{cases} u_{1 \min} & \frac{(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2) S^*}{B_1} < 0 \\ \frac{(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2) S^*}{B_1} & \frac{(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2) S^*}{B_1} = 0 \\ u_{1 \max} & \frac{(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2) S^*}{B_1} > 0 \end{cases}$$

dan

$$u_2^* = \begin{cases} u_{2 \min} & \frac{(\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_3) r_0 I^*}{B_2 (1 + \alpha I^*)} < 0 \\ \frac{(\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_3) r_0 I^*}{B_2 (1 + \alpha I^*)} & \frac{(\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_3) r_0 I^*}{B_2 (1 + \alpha I^*)} = 0 \\ u_{2 \max} & \frac{(\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_3) r_0 I^*}{B_2 (1 + \alpha I^*)} > 0 \end{cases}$$

sehingga fungsi kontrol u_1^* dan u_2^* dinyatakan sebagai berikut:

$$u_1^* = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2) S^*}{B_1} \right\} \right\}$$

dan

$$u_2^* = \min \left\{ 1, \max \left\{ 0, \frac{(\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_3) r_0 I^*}{B_2 (1 + \alpha I^*)} \right\} \right\}$$

4.3 Simulasi Numerik

Pada simulasi ini, sistem optimalitas diselesaikan dengan menggunakan *software* Matlab dengan metode Runge-Kutta orde 4. Nilai awal dan parameter penelitian ini mengacu pada penelitian Lashari (2016). Simulasi numerik pada penelitian ini bertujuan untuk mengetahui perbedaan populasi *susceptible*, *infected* dan *recovered* antara diberi kontrol dan tanpa diberi kontrol. Kontrol berupa vaksinasi (u_1) ditujukan kepada populasi rentan bertujuan untuk mengontrol populasi *susceptible* sehingga mengalami penurunan. Untuk kontrol berupa pengobatan (u_2) ditujukan kepada populasi yang telah terinfeksi penyakit sehingga diharapkan dengan adanya pengobatan tersebut, individu terinfeksi dapat sembuh sehingga pada populasi terinfeksi berkurang. Kasus ini akan menggunakan nilai $T = 50$, dimana T tersebut merepresentasikan waktu (dalam hari) ketika vaksinasi dan pengobatan dihentikan. Parameter yang digunakan sebagai berikut:

Tabel 4.1 Nilai Awal Model Matematika *SIR*

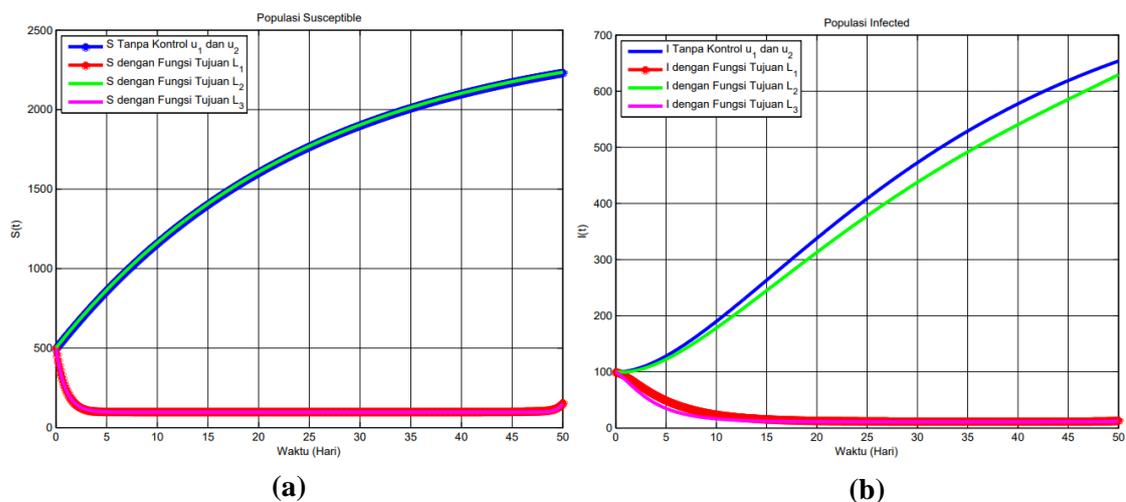
Variabel	Deskripsi	Nilai Awal	Referensi
$S(t)$	Subpopulasi individu <i>susceptible</i> pada waktu ke- t	500	Lashari (2016)
$I(t)$	Subpopulasi individu <i>infected</i> pada waktu ke- t	100	Lashari (2016)
$R(t)$	Subpopulasi individu <i>recovered</i> pada waktu ke- t	0	Lashari (2016)

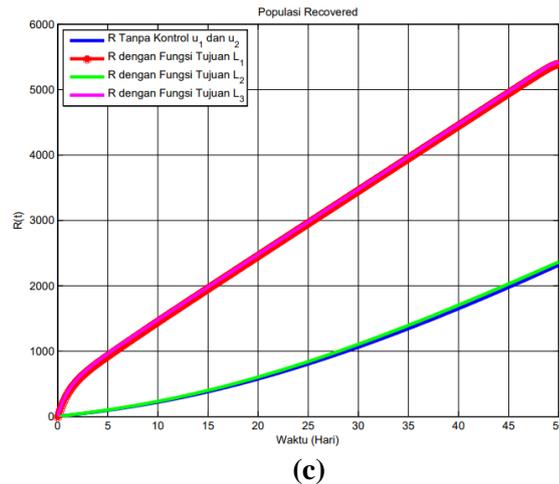
Tabel 4.2 Nilai Parameter Model Matematika *SIR*

Parameter	Deskripsi	Nilai	Satuan	Referensi
Λ	Laju kelahiran alami	100	Orang Per hari	Lashari (2016)
β	Laju penularan	0,02	Orang Per hari	Lashari (2016)
μ	Laju kematian alami	0,000039	Orang Per hari	Lashari (2016)
α	Laju efek terinfeksi	0,01	Orang Per hari	Lashari (2016)
γ	Laju pemulihan alami	0,08	Orang Per hari	Lashari (2016)

δ	Laju kematian akibat penyakit	0,02	Orang Per hari	Lashari (2016)
k	Laju efek penghambatan	0,5	Orang Per hari	Lashari (2016)
r	Laju kesembuhan	0,2	Orang Per hari	Lashari (2016)
r_0	Konstanta kontrol pengobatan	0,2	Orang Per hari	Lashari (2016)
A_1	Bobot individu <i>susceptible</i>	0,09		Lashari (2016)
A_2	Bobot individu <i>infected</i>	0,02		Lashari (2016)
A_3	Bobot individu <i>recovered</i>	0,12		Asumsi
B_1	Bobot biaya untuk kontrol vaksinasi	10		Lashari (2016)
B_2	Bobot biaya untuk kontrol pengobatan	10		Lashari (2016)

Pada simulasi ini ketika kondisi tanpa kontrol maka tidak adanya pemberian dua kontrol yaitu vaksinasi dan pengobatan, sehingga nilai $u_1(t) = 0$ dan $u_2(t) = 0$. Sedangkan ketika kondisi dengan variabel kontrol maka nilai $u_1(t) \neq 0$ dan $u_2(t) \neq 0$ dimana akan adanya pemberian dua kontrol yaitu vaksinasi dan pengobatan. Berikut merupakan hasil simulasi numerik untuk populasi *susceptible*, *Infected*, dan *recovered* dengan kontrol vaksinasi (u_1) dan pengobatan (u_2) maupun tanpa kontrol.





Gambar 4.1 Populasi *Susceptible*, *Infected*, *Recovered* dengan Kontrol Vaksinasi (u_1) dan Pengobatan (u_2) maupun Tanpa Kontrol u_1 dan u_2 dengan Bobot $A_1 = 0.09$, $A_2 = 0.02$, $A_3 = 0.12$, $B_1 = 10$, dan $B_2 = 10$ serta Parameter pada Tabel 4.2

Berdasarkan Gambar 4.1 dapat dilihat dampak dari menggunakan fungsi tujuan L_1 menyebabkan penurunan populasi *susceptible* pada Gambar 4.1 (a), dimana dari jumlah populasi awal 500 menjadi 100. Kemudian Gambar 4.1 (b) pada populasi *infected* mengalami penurunan dari jumlah populasi awal 100 menjadi 50. Penurunan dari dua subpopulasi tersebut diimbangi dengan meningkatnya populasi *recovered* pada Gambar 4.1 (c), jumlah populasi awal 0 menjadi 5250 pada hari terakhir. Hal tersebut dapat terjadi dikarenakan pada fungsi tujuan pertama L_1 adanya tujuan untuk meminimumkan populasi *susceptible* dan meminimumkan populasi *infected* sehingga kontrol u_1 yang ditujukan kepada populasi *susceptible* dan kontrol u_2 yang ditujukan kepada populasi *infected* akan bekerja maksimal.

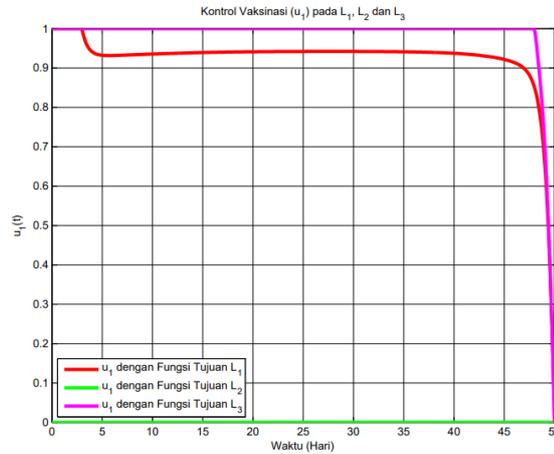
Kemudian dengan menggunakan fungsi tujuan kedua L_2 tidak adanya perubahan populasi S , I , dan R sama seperti tidak adanya pemberian kontrol u_1 dan u_2 . Hal tersebut terjadi dikarenakan pada fungsi tujuan kedua L_2 hanya meminimumkan populasi *infected*, sehingga hanya kontrol u_2 yang digunakan. Maka dari itu karena L_2 tidak ada tujuan meminimumkan populasi *susceptible*

sehingga populasi *susceptible* akan terus meningkat dan ketika ada interaksi antara *susceptible* dengan *infected* yang akan menyebabkan populasi *susceptible* yang tinggi dan kemungkinan besar akan berpindah pada populasi *infected*.

Fungsi tujuan ketiga L_3 akan menyebabkan populasi *susceptible* menurun dari populasi awal 500 menjadi 100 dapat dilihat pada Gambar 4.1 (a). Kemudian dari Gambar 4.1 (b) dapat dilihat bahwa populasi *infected* menurun dari jumlah populasi awal 100 menjadi 20. Menurunnya kedua populasi tersebut diimbangi dengan meningkatnya populasi *recovered* dari jumlah populasi awal 0 menjadi 5250. Hal tersebut terjadi sama seperti menggunakan fungsi tujuan pertama L_1 tetapi adanya perbedaan di hari pertama hingga hari ke-15 lebih banyak penurunan dengan menggunakan L_3 hal tersebut disebabkan karena adanya tujuan untuk memaksimalkan populasi *recovered*. Sehingga dengan menggunakan fungsi tujuan ketiga L_3 akan menurunkan populasi *susceptible*, *infected* serta meningkatnya populasi *recovered*.

Dari ketiga fungsi tujuan tersebut didapatkan fungsi tujuan yang memberikan pengaruh signifikan dalam menurunkan populasi *susceptible*, *infected*, dan peningkatan *recovered* yaitu pada L_1 dan L_3 dibandingkan ketika tidak ada kontrol. Pada hasil simulasi tidak terlihat perbedaan yang signifikan pada L_1 dengan L_3 . Sehingga dengan menggunakan L_1 biaya yang akan dikeluarkan akan lebih minimum dibandingkan dengan L_3 . Oleh karena itu pemberian kontrol dengan menggunakan L_1 akan lebih efisien.

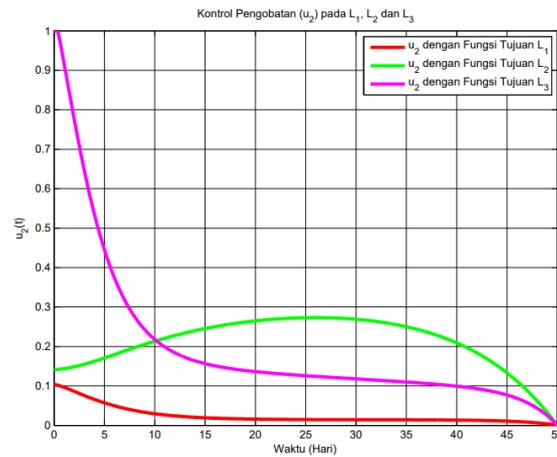
Kemudian hasil simulasi numerik dari kontrol program vaksinasi (u_1) untuk individu *susceptible* sebagai berikut:



Gambar 4.2 Kontrol Vaksinasi (u_1) dengan Fungsi Tujuan L_1 , L_2 dan L_3 dengan Bobot $A_1 = 0,09$, $A_2 = 0,02$, $A_3 = 0,12$, $B_1 = 10$, dan $B_2 = 10$ serta Parameter pada Tabel 4.2

Kontrol vaksinasi (u_1) yang ditujukan kepada populasi *susceptible* dari hasil simulasi pada Gambar 4.4 menunjukkan bahwa ketika u_1 dengan fungsi tujuan pertama (L_1) akan bekerja secara efektif. Sehingga berpengaruh pada jumlah populasi *susceptible* yang dapat dilihat pada Gambar 4.1 bahwa dengan L_1 populasi *susceptible* menurun, hal tersebut juga terjadi pada kontrol vaksinasi (u_1) dengan fungsi tujuan ketiga (L_3). Selanjutnya untuk u_1 pada fungsi tujuan kedua (L_2) hasil simulasi menunjukkan bahwa kontrol tidak bekerja dikarenakan tidak adanya tujuan untuk meminimumkan populasi *susceptible* sehingga pada Gambar 4.1 populasi *susceptible* dengan L_2 tetap meningkat.

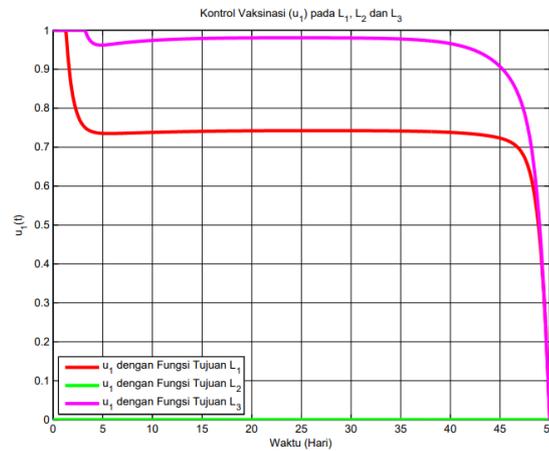
Hasil simulasi numerik dari kontrol program pengobatan (u_2) untuk individu *infected* sebagai berikut:



Gambar 4.3 Kontrol Pengobatan (u_2) dengan Fungsi Tujuan L_1 , L_2 dan L_3 dengan Bobot $A_1 = 0.09$, $A_2 = 0.02$, $A_3 = 0.12$, $B_1 = 10$, dan $B_2 = 10$ serta Parameter pada Tabel 4.2

Hasil simulasi untuk u_2 dengan fungsi tujuan pertama (L_1) dan fungsi tujuan ketiga (L_3) menunjukkan bahwa kontrol bekerja sampai dengan hari terakhir, hal tersebut terjadi dikarenakan adanya populasi *infected* maka dibutuhkannya kontrol sehingga pada Gambar 4.1 dan 4.2 dimana untuk L_1 dan L_3 terbukti dengan menurunnya populasi *susceptible* dan *infected*, serta pada Gambar 4.3 populasi *recovered* meningkat. Kemudian untuk u_2 dengan fungsi tujuan kedua (L_2) hasil simulasi menunjukkan bahwa adanya kenaikan dan kemudian berhasil menurun, hal tersebut terjadi akibat L_2 hanya meminimumkan populasi *infected* sehingga ketika populasi *susceptible* meningkat maka akan berpengaruh pada populasi *infected* dikarenakan adanya interaksi antar kedua populasi tersebut.

Selain menggunakan bobot $B_1 = 10$ dan $B_2 = 10$ juga dilakukan eksplorasi simulasi ketika bobot $B_1 = 20$ dan $B_2 = 10$ sehingga diperoleh plot u_1 sebagai berikut:



Gambar 4.4 Kontrol Vaksinasi (u_1) dengan Fungsi Tujuan L_1, L_2 dan L_3 dengan Bobot $A_1 = 0.09, A_2 = 0.02, A_3 = 0.12, B_1 = 20$, dan $B_2 = 10$ serta Parameter pada Tabel 4.2

Dimana hasil simulasi menunjukkan hanya plot u_1 yang menunjukkan perbedaan, sedangkan plot solusi u_2 yang dimana sama seperti Gambar 4.3 tidak adanya perubahan, kemudian plot solusi *susceptible, infected, recovered* sama seperti Gambar 4.1 dimana $B_1 = 10$ dan $B_2 = 10$.

4.4 Kajian Penelitian dalam Perspektif Islam

Pada penelitian ini membahas tentang penyakit menular yang merupakan sebuah penyakit dimana dapat ditularkan dari individu yang satu dengan individu lainnya. Penyakit tersebut juga dapat mewabah ketika tidak ada suatu tindakan atau usaha untuk pencegahan penularan penyakit tersebut, karena pada dasarnya Rasulullah SAW sangat mendorong manusia mencari pengobatan ketika mereka sakit. Oleh karena itu manusia diwajibkan untuk berusaha ketika terkena penyakit dan senantiasa beribadah untuk mendapatkan kesembuhan dari Allah SWT, sebagaimana firman Allah SWT dalam surat Al-Insyirah ayat 8 yaitu

وَالِي رَبِّكَ فَارْعَبْ (۸)

Artinya: "dan hanya kepada Tuhanmulah engkau berharap."

Dalam penelitian ini adanya usaha berupa pemberian dua kontrol yaitu vaksinasi (u_1) untuk individu *susceptible* dengan tujuan berkurangnya individu yang terinfeksi. Kemudian kontrol berupa pengobatan (u_2) untuk individu *infected* dengan tujuan tidak terjadinya peningkatan individu yang terinfeksi, sebagaimana firman Allah SWT surat Ar-Ra'd ayat 11 yaitu

لَهُ مُعَقِّبَاتٌ مِّنْ بَيْنِ يَدَيْهِ وَمِنْ خَلْفِهِ يَحْفَظُونَهُ مِنْ أَمْرِ اللَّهِ إِنَّ اللَّهَ لَا يُعَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّىٰ يُعَيِّرُوهُمَا
بِأَنفُسِهِمْ وَإِذَا أَرَادَ اللَّهُ بِقَوْمٍ سُوءًا فَلَا مَرَدَّ لَهُ ۗ وَمَا لَهُمْ مِنْ دُونِهِ مِنْ وَالٍ (۱۱)

Artinya: "Baginya (manusia) ada malaikat-malaikat yang selalu menjaganya bergiliran, dari depan dan belakangnya. Mereka menjaganya atas perintah Allah. Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum sebelum mereka mengubah keadaan diri mereka sendiri. Dan apabila Allah menghendaki keburukan terhadap suatu kaum, maka tak ada yang dapat menolaknya dan tidak ada pelindung bagi mereka selain Dia."

Dalam surat Ar-Rad ayat 11 tersebut terdapat potongan ayat dengan arti "Sesungguhnya Allah tidak mengubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka mengubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri." Pada potongan ayat tersebut menjelaskan bahwa manusia dapat berusaha secara maksimal dan cara yang baik maka Allah SWT akan mengubah keadaan manusia tersebut dan pada ayat tersebut juga menunjukkan bahwa meskipun manusia memohon pertolongan kepada Allah SWT tetapi tidak adanya usaha untuk mengubah keadaannya, maka Allah SWT tidak akan merubah apapun dalam hidupnya. Oleh karena itu pada penelitian ini membuktikan bahwa dengan adanya usaha berupa pemberian dua kontrol akan mengurangi individu *susceptible* serta mengurangi individu *infected* sehingga dapat di pastikan bahwa penyakit tersebut tidak akan mewabah.

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pembahasan sebelumnya, diperoleh kesimpulan yaitu sebagai berikut:

1. Pada model *SIR* (*Susceptible, Recovered, Infected*) tanpa kontrol vaksinasi (u_1) dan pengobatan (u_2) diperoleh dua titik kestimbangan. Titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) yang bersifat stabil ketika bilangan reproduksi dasar bernilai kurang dari satu. Pada titik kesetimbangan endemik (E_1) bersifat stabil ketika bilangan reproduksi dasar bernilai lebih dari satu.
2. Model *SIR* (*Susceptible, Recovered, Infected*) dengan kontrol pengobatan (u_2) dan vaksinasi (u_1) dimana menggunakan Prinsip Pontryagin diperoleh kontrol yang optimal. Kontrol optimal yang telah diperoleh bergantung pada beberapa parameter yaitu konstanta kontrol pengobatan, tingkat efek terinfeksi, jumlah populasi *susceptible* dan *infected*, serta bobot biaya untuk vaksinasi dan pengobatan.
3. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa dengan adanya dua kontrol yaitu pengobatan (u_2) untuk populasi *infected* dan vaksinasi (u_1) untuk populasi *susceptible* dengan menggunakan fungsi tujuan L_1 dan L_3 dapat meminimalkan jumlah populasi *susceptible*, *infected* serta memaksimalkan populasi *recovered*.

5.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan mempertimbangkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Penelitian selanjutnya dapat menggunakan tipe model yang berbeda, seperti *SEIR* dimana adanya penambahan subpopulasi *exposed* dan penelitian dapat merujuk pada satu penyakit.
2. Penelitian selanjutnya dapat menambahkan kontrol sebagai upaya untuk menurunkan jumlah populasi terinfeksi.
3. Penelitian selanjutnya dapat membandingkan antar kontrol sehingga mengetahui kontrol mana yang paling berperan dalam menurunkan jumlah populasi terinfeksi.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Quran* dan Terjemahannya. (2019). Kementerian Agama RI
- Anton, H. (1992). *Aljabar Linier Elementer Edisi ke-5*. Jakarta: Erlangga.
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2001). *Differential Equation and Linear Algebra*. New Jersey: Prentice Hall Inc.
- Finizo, & Ladaz. (1998). *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.
- Giesecke, J. (2022). *Modern Infectious Disease Epidemiology, Second Edition*. Florida: CRC Press.
- Grainan, M. dan Essayed, A. (2010). Optimal Control of Multi Item Inventory Model with Natural Deterioration Function. *International Mathematical Forum*.
- Lashari, A. A. (2016). Optimal Kontrol of an Epidemic Model with a Saturated Treatment. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 186.
- Lenhart, S., & Workman, J. T. (2007). *Optimal Control Applied to Biological Models*. United States: CRC Press.
- Ma, Z., & Li, J. (2009). *Dinamical Modeling and Analysis of Epiemics*. Singapore: World Scientific Publishing.
- Neilan, R. M., & Lenhart, S. (2010). An Introduction to Optimal Control with an Application in Disease Modeling. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 67-81.
- Pagalay, U., & Muhlish. (2015). Solusi Numerik Untuk Imunologi Model Tbc Menggunakan Runge Kutta Fehlberg Dan Adams Bashforth Metode Multon. *Jurnal Tekonologi*.
- Perko, L. (1991). *Differential Equation and Dynamical System*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Prayudi. (2006). *Matematika Teknik Persamaan Diferensial, Transformasi Laplace, Deret Fourier*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Rositarini, O., Lestari, D., & Arifah, H. (2017). Analisis Numerik Model Epidemi Sir (Susceptible, Infected, Recovered) Pada Penyebaran Penyakit Tuberculosis Di Yogyakarta. *Seminar Matematika Dan Pendidikan Matematika Uny*, 171-178.
- Ross, S. L. (1984). *Differential Equation*. Singapore: John Wiley and Sons.
- Shihab, M. Q (2008). *Tafsir Al-Misbah, Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.
- Zhang, J., Jia, J., & Song, X. (2014). Analysis of an SEIR Epidemic Model with Saturated Incidence. *Hindawi*.
- Zulaikha, Trisilowati, & Fadhillah, I. (2017). Kontrol Optimal pada Model Epidemi SEIQR dengan Tingkat Kejadian Standar. *Prosiding SI MaNIs*, 41-51.

LAMPIRAN

Lampiran 1: M-File untuk Simulasi Model Epidemii SIR dengan Kontrol dan Tanpa Kontrol

```
clc;
clear all;
close all;

%Jumlah individu pada subpopulasi awal t=0
S0=500;
I0=100;
R0=0;

%Parameter-parameter
lambda=100;
beta=0.02;
mu=0.000039;
alpha=0.01;
gamma=0.08;
delta=0.02;
k=0.5;
r=0.2;
ro=0.2;
A1=0.09;
A2=0.02;
A3=0.12;
B1=10;
B2=10;
u1max=1;
u2max=1;
h=0.1;%h=1/Z misal: h=1/10=0.1
t=0:h:50;%dari 0 sampai 50 dipartisi dengan jarak h=0.1
Z=length(t);%banyaknya t

%membentuk matrik baris isinya nol dengan z baris, 1kolom
u1=zeros(Z,1); u1old=zeros(Z,1);
u2=zeros(Z,1); u2old=zeros(Z,1);
S=zeros(Z,1); Sold=zeros(Z,1);
I=zeros(Z,1); Iold=zeros(Z,1);
R=zeros(Z,1); Rold=zeros(Z,1);

%p1 adalah lambda_1 dsb
k1=zeros(Z,1);k1old=zeros(Z,1);
k2=zeros(Z,1);k2old=zeros(Z,1);
k3=zeros(Z,1);k3old=zeros(Z,1);

%kontrol ada 2 pada u_1 dan u_1old
tes=1;
it=0;
while tes >1e-3
    u1old=u1;
    u2old=u2;
    Sold=S; Iold=I; Rold=R;
    k1old=k1; k2old=k2; k3old=k3;
```

```

S(1)=S0; I(1)=I0; R(1)=R0;
J(it+1)=0;

for i=1:Z-1
J(it+1)=J(it+1)+h*((A1*S(Z))+(A2*I(Z))+(0.5*B1*u1old(i)^2)+(0.5*B2
*u2old(i)^2));

    y=[S(i) I(i) R(i)];
%RungeKutta
p1=h*state(y,lambda,beta,k,mu,u1old(i),u2old(i),r,ro,alpha,gamma,d
elta);
p2=h*state(y+0.5*p1,lambda,beta,k,mu,u1old(i),u2old(i),r,ro,alpha,g
amma,delta);
p3=h*state(y+0.5*p2,lambda,beta,k,mu,u1old(i),u2old(i),r,ro,alpha,g
amma,delta);
p4=h*state(y+p3,lambda,beta,k,mu,u1old(i),u2old(i),r,ro,alpha,gamma
,delta);

y=y+(1/6)*(p1+2*p2+2*p3+p4);
S(i+1)=y(1);
I(i+1)=y(2);
R(i+1)=y(3);
end

%Plot populasi tanpa kontrol
if it == 0
figure(1)
plot(t,S,'b-','LineWidth',3);
hold on;
figure(2)
plot(t,I,'b-','LineWidth',3);
hold on;
figure(3)
plot(t,R,'b-','LineWidth',3);
hold on;
end
k1(Z)=0; k2(Z)=0; k3(Z)=0;

for i=1:Z-1
    je=Z-i;
    y=[k1(je+1) k2(je+1) k3(je+1)];

p1=h*costate(y,beta,k,mu,u1old(je+1),u2old(je+1),r,ro,alpha,gamma,d
elta,S(je+1),I(je+1),A1,A2);
p2=h*costate(y-
0.5*p1,beta,k,mu,u1old(je+1),u2old(je+1),r,ro,alpha,gamma,delta,S(j
e+1),I(je+1),A1,A2);
p3=h*costate(y-
0.5*p2,beta,k,mu,u1old(je+1),u2old(je+1),r,ro,alpha,gamma,delta,S(j
e+1),I(je+1),A1,A2);
p4=h*costate(y-
p3,beta,k,mu,u1old(je+1),u2old(je+1),r,ro,alpha,gamma,delta,S(je+1)
,I(je+1),A1,A2);

y=y-(1/6)*(p1+2*p2+2*p3+p4);
k1(je)=y(1);
k2(je)=y(2);

```

```

k3(je)=y(3);

temp2=min([(k1(je)-k2(je))*S(je)]/B1 ulmax]);
u1(je)=max([temp2 0]);

temp5=min([(k2(je)-k3(je))*ro*I(je)]/(B2*(1+(alpa*I(je))))
u2max]);
u2(je)=max([temp5 0]);

end

eS=sum(abs(S-Sold));
eI=sum(abs(I-Iold));
eR=sum(abs(R-Rold));
ek1=sum(abs(k1-k1old));
ek2=sum(abs(k2-k2old));
ek3=sum(abs(k3-k3old));
eu1=sum(abs(u1-u1old));
eu2=sum(abs(u2-u2old));
%error = sum dari error yang lama dengan yang baru
tes=eS+eI+eR+ek1+ek2+ek3+eu1+eu2;
it=it+1;
u1=(0.5*u1+0.5*u1old);
u2=(0.5*u2+0.5*u2old);
end

figure(1)
plot(t,S,'r*-','LineWidth',3);
hold on;

figure(2)
plot(t,I,'r*-','LineWidth',3);
hold on;

figure(3)
plot(t,R,'r*-','LineWidth',3);
hold on;

figure(4)
plot(t,u1,'r-','LineWidth',3);
hold on;

figure(5)
plot(t,u2,'r-','LineWidth',3);
hold on;

tes=1;
it=0;
while tes >1e-3
    u1old=u1;
    u2old=u2;
    Sold=S; Iold=I; Rold=R;
    k1old=k1; k2old=k2; k3old=k3;
    S(1)=S0; I(1)=I0; R(1)=R0;
    J(it+1)=0;

    for i=1:Z-1

```

```

J(it+1)=J(it+1)+h*(A2*I(Z))+(0.5*B1*u1old(i)^2)+(0.5*B2*u2old(i)^2);
);

    y=[S(i) I(i) R(i)];
%RungeKutta
p1=h*state(y,lambda,beta,k,mu,u1old(i),u2old(i),r,ro,alpha,gamma,delta);
p2=h*state(y+0.5*p1,lambda,beta,k,mu,u1old(i),u2old(i),r,ro,alpha,gamma,delta);
p3=h*state(y+0.5*p2,lambda,beta,k,mu,u1old(i),u2old(i),r,ro,alpha,gamma,delta);
p4=h*state(y+p3,lambda,beta,k,mu,u1old(i),u2old(i),r,ro,alpha,gamma,delta);

y=y+(1/6)*(p1+2*p2+2*p3+p4);
S(i+1)=y(1);
I(i+1)=y(2);
R(i+1)=y(3);
end
k1(Z)=0; k2(Z)=0; k3(Z)=0;

for i=1:Z-1
    je=Z-i;
    y=[k1(je+1) k2(je+1) k3(je+1)];

    p1=h*costate1(y,beta,k,mu,u1old(je+1),u2old(je+1),r,ro,alpha,gamma,delta,S(je+1),I(je+1),A2);
    p2=h*costate1(y-0.5*p1,beta,k,mu,u1old(je+1),u2old(je+1),r,ro,alpha,gamma,delta,S(je+1),I(je+1),A2);
    p3=h*costate1(y-0.5*p2,beta,k,mu,u1old(je+1),u2old(je+1),r,ro,alpha,gamma,delta,S(je+1),I(je+1),A2);
    p4=h*costate1(y-p3,beta,k,mu,u1old(je+1),u2old(je+1),r,ro,alpha,gamma,delta,S(je+1),I(je+1),A2);

    y=y-(1/6)*(p1+2*p2+2*p3+p4);
    k1(je)=y(1);
    k2(je)=y(2);
    k3(je)=y(3);

    temp2=min([(k1(je)-k2(je))*S(je)]/B1 ulmax]);
    u1(je)=max([temp2 0]);

    temp5=min([(k2(je)-k3(je))*ro*I(je)]/(B2*(1+(alpha*I(je)))) u2max]);
    u2(je)=max([temp5 0]);

end

eS=sum(abs(S-Sold));
eI=sum(abs(I-Iold));
eR=sum(abs(R-Rold));
ek1=sum(abs(k1-k1old));
ek2=sum(abs(k2-k2old));
ek3=sum(abs(k3-k3old));

```

```

eu1=sum(abs(u1-u1old));
eu2=sum(abs(u2-u2old));
%error = sum dari error yang lama dengan yang baru
tes=eS+eI+eR+ek1+ek2+ek3+eu1+eu2;
it=it+1;
u1=(0.5*u1+0.5*u1old);
u2=(0.5*u2+0.5*u2old);
end

figure(1)
plot(t,S,'g-','LineWidth',3);
hold on;

figure(2)
plot(t,I,'g-','LineWidth',3);
hold on;

figure(3)
plot(t,R,'g-','LineWidth',3);
hold on;

figure(4)
plot(t,u1,'g-','LineWidth',3);
hold on;

figure(5)
plot(t,u2,'g-','LineWidth',3);
hold on;

tes=1;
it=0;
while tes >1e-3
    ulold=u1;
    u2old=u2;
    Sold=S; Iold=I; Rold=R;
    k1old=k1; k2old=k2; k3old=k3;
    S(1)=S0; I(1)=I0; R(1)=R0;
    J(it+1)=0;

    for i=1:Z-1
        J(it+1)=J(it+1)+h*((A1*S(Z))+(A2*I(Z))-
            (A3*R(Z))+(0.5*B1*u1old(i)^2)+(0.5*B2*u2old(i)^2));

        y=[S(i) I(i) R(i)];
        %RungeKutta
        p1=h*state(y,lambda,beta,k,mu,u1old(i),u2old(i),r,ro,alpha,gamma,de
            lta);
        p2=h*state(y+0.5*p1,lambda,beta,k,mu,u1old(i),u2old(i),r,ro,alpha,g
            amma,delta);
        p3=h*state(y+0.5*p2,lambda,beta,k,mu,u1old(i),u2old(i),r,ro,alpha,g
            amma,delta);
        p4=h*state(y+p3,lambda,beta,k,mu,u1old(i),u2old(i),r,ro,alpha,gamma
            ,delta);

        y=y+(1/6)*(p1+2*p2+2*p3+p4);
        S(i+1)=y(1);
    end
end

```

```

I(i+1)=y(2);
R(i+1)=y(3);
end

k1(Z)=0; k2(Z)=0; k3(Z)=0;

for i=1:Z-1
    je=Z-i;
    y=[k1(je+1) k2(je+1) k3(je+1)];

    p1=h*costate2(y,beta,k,mu,u1old(je+1),u2old(je+1),r,ro,alpha,gamma,
    delta,S(je+1),I(je+1),A1,A2,A3);
    p2=h*costate2(y-
    0.5*p1,beta,k,mu,u1old(je+1),u2old(je+1),r,ro,alpha,gamma,delta,S(j
    e+1),I(je+1),A1,A2,A3);
    p3=h*costate2(y-
    0.5*p2,beta,k,mu,u1old(je+1),u2old(je+1),r,ro,alpha,gamma,delta,S(j
    e+1),I(je+1),A1,A2,A3);
    p4=h*costate2(y-
    p3,beta,k,mu,u1old(je+1),u2old(je+1),r,ro,alpha,gamma,delta,S(je+1)
    ,I(je+1),A1,A2,A3);

    y=y-(1/6)*(p1+2*p2+2*p3+p4);
    k1(je)=y(1);
    k2(je)=y(2);
    k3(je)=y(3);

    temp2=min([(k1(je)-k2(je))*S(je)]/B1 ulmax]);
    u1(je)=max([temp2 0]);

    temp5=min([(k2(je)-k3(je))*ro*I(je)]/(B2*(1+(alpha*I(je))))
    u2max]);
    u2(je)=max([temp5 0]);

end

eS=sum(abs(S-Sold));
eI=sum(abs(I-Iold));
eR=sum(abs(R-Rold));
ek1=sum(abs(k1-k1old));
ek2=sum(abs(k2-k2old));
ek3=sum(abs(k3-k3old));
eu1=sum(abs(u1-u1old));
eu2=sum(abs(u2-u2old));
%error = sum dari error yang lama dengan yang baru
tes=eS+eI+eR+ek1+ek2+ek3+eu1+eu2;
it=it+1;
u1=(0.5*u1+0.5*u1old);
u2=(0.5*u2+0.5*u2old);
end

figure(1)
plot(t,S,'m','LineWidth',3);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('S(t)');
grid on;

```

```

legend({'S Tanpa Kontrol u1 dan u2','S dengan Kontrol u1 dan u2
untuk L1','S dengan Kontrol u1 dan u2 untuk L2','S dengan Kontrol
u1 dan u2 untuk L3'},'location','northwest');
title('Populasi Susceptible');
hold on;

```

```

figure(2)
plot(t, I, 'm', 'LineWidth', 3);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('I(t)');
grid on;
legend({'I Tanpa Kontrol u_1 dan u_2','I dengan Kontrol u_1 dan
u_2 untuk L_1','I dengan Kontrol u_1 dan u_2 untuk L_2','I dengan
Kontrol u_1 dan u_2 untuk L_3'},'location','northwest');
title('Populasi Infected');
hold on;

```

```

figure(3)
plot(t, R, 'm', 'LineWidth', 3);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('R(t)');
grid on;
legend({'R Tanpa Kontrol u_1 dan u_2','R dengan Kontrol u_1 dan
u_2 untuk L_1','R dengan Kontrol u_1 dan u_2 untuk L_2','R dengan
Kontrol u_1 dan u_2 untuk L_3'},'location','northwest');
title('Populasi Recovered');
hold on;

```

```

figure(4)
plot(t, u1, 'm', 'LineWidth', 3);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('u_1(t)');
grid on;
legend({'u_1 untuk L_1','u_1 untuk L_2','u_1 untuk
L_3'},'Location','southwest');
title('Kontrol Vaksinasi (u_1) pada L_1, L_2 dan L_3');
hold on;

```

```

figure(5)
plot(t, u2, 'm', 'LineWidth', 3);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('u_2(t)');
legend('u_2 untuk L_1','u_2 untuk L_2','u_2 untuk L_3');
grid on;
title('Kontrol Pengobatan (u_2) pada L_1, L_2 dan L_3');
hold on;

```

Lampiran 2: M-File untuk Fungsi *State*

```
function dy=state(y,lambda,beta,k,mu,u1,u2,r,ro,alpa,gamma,delta)

x(1)=lambda-((beta*y(1)*y(2))/(1+(k*y(2))))-(mu*y(1))-(u1*y(1));
x(2)=((beta*y(1)*y(2))/(1+(k*y(2))))-
((r+(ro*u2))*y(2))/(1+(alpa*y(2)))-((gamma+delta+mu)*y(2));
x(3)=(gamma*y(2))+((r+ro*u2)*y(2))/(1+(alpa*y(2)))-
(mu*y(3))+u1*y(1);

dy=[x(1) x(2) x(3)];
```

Lampiran 3: M-File untuk Fungsi Costate

```

%Persamaan Co-State
function dk =
costate(y,beta,k,mu,u1,u2,r,ro,alpa,gamma,delta,S,I,A1,A2)
k1=y(1);
k2=y(2);
k3=y(3);

%lambda1=k1,lambda2=k2,lambda3=k3
x(1)=(beta*(k1-k2)*I)/(1+(k*I))+ (k1-k2)*u1+(mu*k1)-A1;
x(2)=(beta*(k1-k2)*S)/((1+(k*I))^2)+((r+(ro*u2))*(k2-
k3))/(1+(alpa*I))^2+((gamma+delta+mu)*k2)-(gamma*k3)-A2;
x(3)=mu*k3;

dk=[x(1) x(2) x(3)];

```

RIWAYAT HIDUP



Putri Ahliha, lahir di kota Bekasi pada tanggal 7 Januari 2001. Nama panggilan Ahliha, saat ini tinggal di Kota Bekasi, Jawa Barat. Putri satu-satunya dan terakhir dari tiga bersaudara dari Bapak Mamin Abdul Hamid dan Ibu Sarnah. Pendidikan dasar yang ditempuh di SDN Mustika Jaya 1 dan lulus pada tahun 2013. Setelah itu penulis melanjutkan Pendidikan ke SMPN 26 Bekasi dan lulus pada tahun 2016, kemudian melanjutkan ke jenjang SMA di SMA Daya Utama dan lulus pada tahun 2019. Selanjutnya penulis melanjutkan pendidikan ke jenjang perguruan tinggi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan mengambil program studi Matematika. Selama menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang penulis aktif menjadi pengurus HMJ Matematika “Integral” UIN Malang.



BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Putri Ahliha
NIM : 19610020
Fakultas / Program Studi : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Kontrol Optimal Model Epidemii SIR dengan Pengobatan Tersaturasi dan Vaksinasi
Pembimbing I : Dr. Heni Widayani, M.Si
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	11 - Oktober 2022	Konsultasi Bab 1, 2	1.
2.	4 - November 2022	Revisi Bab 1,2	2.
3.	11 - November 2022	Konsultasi Kajian Agama	3.
4.	4 - Desember 2022	ACC Bab 1, 2, 3	4.
5.	11 - Desember 2022	Konsultasi Kajian Agama	5.
6.	23 - Febuari 2023	Konsultasi Bab 4	6.
7.	28 - Febuari 2023	Konsultasi Kajian Agama	7.
8.	7 - Maret 2023	Konsultasi Bab 4, 5	8.
9.	11 - April 2023	Konsultasi Bab 4, 5	9.
10.	11 - April 2023	Konsultasi Kajian Agama	10.
11.	15 - Mei 2023	ACC Bab 4,5	11.
12.	12 - Juni 2023	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 12 Juni 2023

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc

NIP. 19741129 200012 2 005