

**PROSES BERPIKIR SISWA BERKEMAMPUAN TINGGI  
DALAM MENYELESAIKAN SOAL MODEL PISA  
PADA TOPIK GEOMETRI BERDASARKAN  
TEORI TIGA DUNIA MATEMATIKA**

TESIS

OLEH  
ARUM PERMATA RAHMADHANI  
NIM. 19810002



**PROGRAM STUDI MAGISTER PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
2023**

**PROSES BERPIKIR SISWA BERKEMAMPUAN TINGGI  
DALAM MENYELESAIKAN SOAL MODEL PISA  
PADA TOPIK GEOMETRI BERDASARKAN  
TEORI TIGA DUNIA MATEMATIKA**

TESIS

Diajukan kepada  
Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk memenuhi salah satu persyaratan  
dalam menyelesaikan Program Studi Magister  
Pendidikan Matematika

Oleh  
Arum Permata Rahmadhani  
NIM 19810002

**PROGRAM STUDI MAGISTER PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
2023**



**KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**  
**FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN**

Jalan Gajayana 50, Telepon (0341) 552398, Faximel (0341) 552398 Malang  
<http://tarbiyah.uin-malang.ac.id>. Email: [tarbiyah@uin-malang.ac.id](mailto:tarbiyah@uin-malang.ac.id)

**LEMBAR PERSETUJUAN**

Nama : Arum Permata Rahmadhani  
NIM : 19810002  
Program Studi : Magister Pendidikan Matematika  
Judul Tesis : Proses Berpikir Siswa Berkemampuan Tinggi dalam Menyelesaikan Soal Model PISA pada Topik Geometri Berdasarkan Teori Tiga Dunia Berpikir Matematika

Setelah diperiksa dan dilakukan perbaikan seperlunya, Tesis dengan judul sebagaimana di atas disetujui untuk diajukan ke Ujian Tesis.

Pembimbing I,

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

Pembimbing II,

Dr. Hairur Rahman, M.Si  
NIP. 19800429 200604 1 003

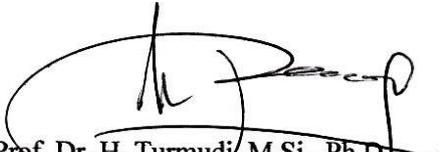
**Mengetahui:**  
Ketua Program Studi

Dr. Wahyu H. Irawan, M.Pd  
NIP. 19710420 200003 1 003

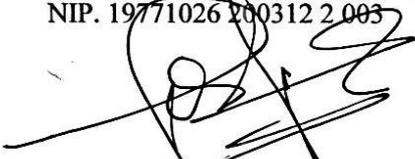
## LEMBAR PENGESAHAN

Tesis dengan judul “Proses Berpikir Siswa Berkemampuan Tinggi dalam Menyelesaikan Soal Model PISA Pada Topik Geometri Berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika” oleh Arum Permata Rahmadhani ini telah dipertahankan di depan dewan penguji dan telah dinyatakan lulus pada tanggal 30 Desember 2022.

### Dewan Penguji

  
Prof. Dr. H. Turmudji, M.Si., Ph.D  
NIP. 19571005 198203 1 006  
Penguji Utama

  
Dr. Marhayati, M.PMat  
NIP. 19771026 200312 2 003  
Ketua Penguji

  
Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001  
Sekretaris

  
Dr. Hairur Rahman, M.Si  
NIP. 19800429 200604 1 003  
Anggota

Mengesahkan,

Dekan Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan

  
Prof. Dr. H. Nur Ali, M.Pd  
NIP. 19650403 199803 1 002

## LEMBAR PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Arum Permata Rahmadhani  
NIM : 19810002  
Program Studi : Magister Pendidikan Matematika  
Judul Tesis : Proses Berpikir Siswa Berkemampuan Tinggi dalam  
Menyelesaikan Soal Model PISA pada Topik Geometri  
Berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika

menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis ini merupakan karya saya sendiri, bukan plagiasi dari karya yang telah ditulis atau diterbitkan orang lain. Adapun pendapat atau temuan orang lain dalam tugas akhir/skripsi/tesis/disertasi ini dikutip atau dirujuk sesuai kode etik penulisan karya ilmiah dan dicantumkan dalam daftar rujukan. Apabila di kemudian hari ternyata tesis ini terdapat unsur-unsur plagiasi, maka saya bersedia untuk diproses sesuai dengan peraturan yang berlaku.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya dan tanpa adanya paksaan dari pihak manapun.

Malang, 28 Desember 2022

Hormat saya,



Arum Permata Rahmadhani  
NIM. 19810002

## LEMBAR MOTO

مَنْ صَبَرَ ظَفِرَ

## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT, karena berkat limpahan rahmat dan karunia-Nya, peneliti dapat menyelesaikan tesis yang berjudul “Proses Berpikir Siswa Berkemampuan Tinggi dalam Menyelesaikan Soal Model PISA pada Topik Geometri Berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika”. Shalawat serta salam semoga senantiasa dilimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membimbing manusia dari kegelapan menuju kehidupan yang terang benderang dengan *dinul Islam*.

Tesis ini sebagai salah satu syarat memperoleh gelar magister pendidikan matematika di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Penelitian tesis ini tidak lepas dari bantuan banyak pihak, sehingga peneliti menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A selaku rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang beserta seluruh staf.
2. Prof. Dr. H. Nur Ali, M.Pd selaku dekan Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd selaku ketua Program Studi Magister Pendidikan Matematika, beserta seluruh dosen Program Studi Magister Pendidikan Matematika.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd dan Dr. Hairur Rahman, M.Si selaku dosen pembimbing yang selalu sabar, penuh perhatian, dan selalu memberikan waktu, pikiran, dan ilmu untuk membimbing, memotivasi, dan mengarahkan peneliti sehingga dapat menyelesaikan tesis ini.
5. Dra. Umy Zahroh, Ph.D, Dr. Maryono, M.Pd, dan Dr. Ummu Sholihah, M.Si selaku validator ahli yang telah memberikan masukan guna perbaikan tesis yang peneliti buat.
6. Drs. Ariadi Nur Awalukianto, M.Pd selaku kepala SMAN 1 Pandaan dan H.Marianto, S.Pd selaku kepala SMA Ma'arif Pandaan yang telah memberikan izin tempat untuk penelitian.

7. Denok Wahyu Lestari, S.Pd selaku guru matematika SMAN 1 Pandaan dan Mey Ria Yulfa, S.Pd selaku guru matematika SMA Ma'arif Pandaan yang telah mendampingi, memberikan waktu serta membimbing peneliti saat penelitian berlangsung.
8. Siswa Kelas XI IPA SMA Negeri 1 Pandaan dan Kelas XI IPA MA Ma'arif Pandaan yang menjadi subjek penelitian.
9. Seluruh mahasiswa dan alumni Program Studi Magister Pendidikan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
10. Seluruh mahasiswa angkatan 3 Program Studi Magister Pendidikan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
11. Semua pihak yang tidak dapat peneliti sebutkan satu persatu.

Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak utamanya bagi peneliti.

Malang, 28 Desember 2022

Peneliti

## DAFTAR ISI

	<b>Halaman</b>
<b>HALAMAN SAMPUL</b> .....	<b>i</b>
<b>HALAMAN PENGANTAR</b> .....	<b>ii</b>
<b>LEMBAR PERSETUJUAN</b> .....	<b>iii</b>
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	<b>iv</b>
<b>LEMBAR PERNYATAAN</b> .....	<b>v</b>
<b>LEMBAR MOTO</b> .....	<b>vi</b>
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	<b>vii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>ix</b>
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	<b>xii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>xiv</b>
<b>DAFTAR BAGAN</b> .....	<b>xvi</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	<b>xvii</b>
<b>ABSTRAK</b> .....	<b>xviii</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>xix</b>
<b>مستخلص البحث</b> .....	<b>xx</b>

### **BAB I PENDAHULUAN**

A. Latar Belakang Masalah .....	1
B. Rumusan Masalah .....	9
C. Tujuan Penelitian .....	10
D. Manfaat Penelitian .....	10
E. Orisinalitas Penelitian .....	11
F. Definisi Istilah .....	15

### **BAB II KAJIAN PUSTAKA**

A. Proses Berpikir .....	17
1. Pengertian Proses Berpikir .....	17
2. Karakteristik Proses Berpikir .....	18

3. Indikator Proses Berpikir .....	19
B. Programme for International Student Assessment (PISA) .....	20
1. Pengertian PISA .....	20
2. Soal Model PISA .....	21
C. Topik Geometri .....	23
1. Pengertian Geometri .....	23
2. Keterkaitan Soal Model PISA dengan Proses Berpikir .....	25
D. Teori Tiga Dunia Matematika .....	27
1. Definisi Teori Tiga Dunia Matematika .....	27
2. Indikator Teori Tiga Dunia Matematika .....	28
3. Indikator Proses Berpikir Berdasarkan Teori Tiga Dunia .....	29
E. Kerangka Berpikir .....	30

### **BAB III METODE PENELITIAN**

A. Pendekatan dan Jenis Penelitian .....	34
B. Data dan Sumber Data .....	35
C. Instrumen Penelitian .....	37
D. Teknik Pengumpulan Data .....	37
E. Analisis Data .....	39
F. Keabsahan Data .....	41
G. Prosedur Penelitian .....	43

### **BAB IV PAPARAN DATA DAN HASIL PENELITIAN**

A. Paparan Data Penelitian .....	44
1. Paparan data S1 .....	46
2. Paparan data S2 .....	55
3. Paparan data S3 .....	65
4. Paparan data S4 .....	75
5. Paparan data S5 .....	85
6. Paparan data S6 .....	95
B. Hasil Penelitian .....	104

## **BAB V PEMBAHASAN**

A. Proses berpikir siswa berkemampuan tinggi berdasarkan berpikir	
<i>Embodied</i> .....	112
B. Proses berpikir siswa berkemampuan tinggi berdasarkan berpikir	
<i>Symbolic</i> .....	113
C. Proses berpikir siswa berkemampuan tinggi berdasarkan berpikir	
<i>Formal</i> .....	116

## **BAB VI PENUTUP**

A. Simpulan .....	118
B. Saran .....	119

<b>DAFTAR RUJUKAN</b> .....	<b>121</b>
-----------------------------	------------

<b>LAMPIRAN-LAMPIRAN</b> .....	<b>126</b>
--------------------------------	------------

## DAFTAR TABEL

Tabel 1.1 Orisinalitas Penelitian .....	14
Tabel 2.1 Indikator Proses Berpikir .....	19
Tabel 2.2 Indikator Teori Tiga Dunia Matematika .....	28
Tabel 2.3 Indikator Proses Berpikir berdasarkan .....	29
Tabel 3.1 Pengkodean Indikator Proses Berpikir.....	39
Tabel 3.2 Pengkodean Indikator Teori Tiga Dunia Matematika .....	39
Tabel 3.3 Pengkodean Proses Berpikir Berdasarkan Teori TDM.....	40
Tabel 3.4 Aturan Pengkodean.....	41
Tabel 4.1 Pengkodean S1 pada Pembentukan Pengertian .....	48
Tabel 4.2 Hasil Pengkodean S1 pada Pembentukan Pengertian.....	48
Tabel 4.3 Pengkodean S1 pada Pembentukan Pendapat .....	51
Tabel 4.4 Hasil Pengkodean S1 pada Pembentukan Pendapat .....	51
Tabel 4.5 Pengkodean S1 pada Penarikan Kesimpulan.....	53
Tabel 4.6 Pengkodean S2 pada Pembentukan Pengertian .....	58
Tabel 4.7 Hasil Pengkodean S2 pada Pembentukan Pengertian.....	58
Tabel 4.8 Pengkodean S2 pada Pembentukan Pendapat .....	61
Tabel 4.9 Hasil Pengkodean S2 pada Pembentukan Pendapat .....	61
Tabel 4.10 Pengkodean S2 pada Penarikan Kesimpulan.....	63
Tabel 4.11 Hasil Pengkodean S2 pada Penarikan Kesimpulan .....	63
Tabel 4.12 Pengkodean S3 pada Pembentukan Pengertian .....	67
Tabel 4.13 Hasil Pengkodean S3 pada Pembentukan Pengertian.....	68
Tabel 4.14 Pengkodean S3 pada Pembentukan Pendapat .....	71
Tabel 4.15 Hasil Pengkodean S3 pada Pembentukan Pendapat .....	71
Tabel 4.16 Pengkodean S3 pada Penarikan Kesimpulan.....	73
Tabel 4.17 Hasil Pengkodean S2 pada Penarikan Kesimpulan .....	73
Tabel 4.18 Pengkodean S4 pada Pembentukan Pengertian .....	77
Tabel 4.19 Hasil Pengkodean S4 pada Pembentukan Pengertian.....	77
Tabel 4.20 Pengkodean S4 pada Pembentukan Pendapat .....	80
Tabel 4.21 Hasil Pengkodean S4 pada Pembentukan Pendapat .....	81

Tabel 4.22 Pengkodingan S4 pada Penarikan Kesimpulan.....	83
Tabel 4.23 Pengkodingan S5 pada Pembentukan Pengertian .....	88
Tabel 4.24 Hasil Pengkodingan S5 pada Pembentukan Pengertian.....	88
Tabel 4.25 Pengkodingan S5 pada Pembentukan Pendapat .....	91
Tabel 4.26 Hasil Pengkodingan S5 pada Pembentukan Pendapat .....	91
Tabel 4.27 Pengkodingan S2 pada Penarikan Kesimpulan.....	93
Tabel 4.28 Hasil Pengkodingan S5 pada Penarikan Kesimpulan .....	93
Tabel 4.29 Pengkodingan S6 pada Pembentukan Pengertian .....	97
Tabel 4.30 Hasil Pengkodingan S6 pada Pembentukan Pengertian.....	97
Tabel 4.31 Pengkodingan S6 pada Pembentukan Pendapat .....	100
Tabel 4.32 Hasil Pengkodingan S6 pada Pembentukan Pendapat .....	100
Tabel 4.33 Pengkodingan S6 pada Penarikan Kesimpulan.....	102
Tabel 4.34 Proses Berpikir S1 Berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika.....	104
Tabel 4.35 Proses Berpikir S2 Berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika.....	105
Tabel 4.36 Proses Berpikir S3 Berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika.....	106
Tabel 4.37 Proses Berpikir S4 Berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika.....	108
Tabel 4.38 Proses Berpikir S5 Berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika.....	108
Tabel 4.39 Proses Berpikir S6 Berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika.....	109
Tabel 4.40 Kesimpulan Subjek .....	110

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1 Struktur Masalah .....	45
Gambar 4.2 Hasil Kerja S1 pada Tahap Pembentukan Pengertian .....	46
Gambar 4.3 Penjabaran Alasan S1 pada Tahap Pembentukan Pendapat .....	49
Gambar 4.4 Hasil Kerja S1 pada Tahap Pembentukan Pendapat .....	50
Gambar 4.5 Hasil Kerja S1 pada Tahap Penarikan Kesimpulan .....	52
Gambar 4.6 Proses Berpikir S1 berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika.....	54
Gambar 4.7 Bagian Diketahui S1 pada Tahap Pembentukan Pengertian .....	55
Gambar 4.8 Hasil Kerja S1 pada Tahap Pembentukan Pengertian .....	57
Gambar 4.9 Potongan Hasil Kerja S1 pada Tahap Pembentukan Pendapat .....	59
Gambar 4.10 Hasil Kerja S2 pada Tahap Penarikan Kesimpulan .....	60
Gambar 4.11 Hasil Kerja S2 pada Tahap Penarikan Kesimpulan .....	62
Gambar 4.12 Proses Berpikir S2 berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika.....	64
Gambar 4.13 Bagian Diketahui S3 pada Tahap Pembentukan Pengertian .....	66
Gambar 4.14 Hasil Kerja S3 pada Tahap Pembentukan Pendapat .....	69
Gambar 4.15 Hasil Kerja S2 pada Tahap Penarikan Kesimpulan .....	72
Gambar 4.16 Proses Berpikir S3 berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika.....	74
Gambar 4.17 Hasil Kerja S4 pada Tahap Pembentukan Pengertian .....	75
Gambar 4.18 Rumus Rotasi S4 .....	78
Gambar 4.19 Hasil Kerja S4 pada Tahap Pembentukan Pendapat .....	78
Gambar 4.20 Proses Penghitungan S4 .....	79
Gambar 4.21 Hasil Kerja S4 pada Tahap Penarikan Kesimpulan .....	82
Gambar 4.22 Proses Berpikir S4 berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika.....	84
Gambar 4.23 Hasil Kerja S5 pada Tahap Pembentukan Pengertian .....	85
Gambar 4.24 Penjelasan S5 pada Bagian Diketahui .....	87
Gambar 4.25 Hasil Kerja S5 pada Tahap Pembentukan Pendapat .....	89
Gambar 4.26 Penghitungan S5 pada Tahap Penarikan Kesimpulan.....	92
Gambar 4.27 Hasil Kerja S5 pada Tahap Penarikan Kesimpulan .....	92
Gambar 4.28 Proses Berpikir S5 berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika.....	94
Gambar 4.29 Hasil Kerja S6 pada Tahap Pembentukan Pengertian .....	96

Gambar 4.30 Hasil Kerja S6 pada Tahap Pembentukan Pendapat .....	99
Gambar 4.31 Hasil Kerja S6 pada Tahap Penarikan Kesimpulan .....	101
Gambar 4.32 Proses Berpikir S6 berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika....	103

## DAFTAR BAGAN

Bagan 2.1 Kerangka Berpikir.....	33
Bagan 3.1 Pemilihan Subjek Penelitian .....	36
Bagan 3.2 Keabsahan Data .....	42

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Kisi-Kisi Instrumen Tes .....	126
Lampiran 2 Lembar Soal.....	127
Lampiran 3 Lembar Jawaban .....	129
Lampiran 4 Kisi-Kisi Instrumen .....	133
Lampiran 5 Lembar Validasi Instrumen Tes .....	142
Lampiran 6 Surat Izin Penelitian.....	154
Lampiran 7 Lembar Jawaban Subjek.....	156
Lampiran 8 Dokumentasi Penelitian.....	162

## ABSTRAK

Rahmadhani, Arum Permata. 2022. *Proses Berpikir Siswa Berkemampuan Tinggi dalam Menyelesaikan Soal Model PISA pada Topik Geometri Berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika*. Tesis, Program Studi Magister Pendidikan Matematika, Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing (I) Dr. Abdussakir, M.Pd (II) Dr. Hairur Rahman, M.Si.

**Kata Kunci:** Proses Berpikir, Soal model PISA, Teori Tiga Dunia Matematika.

Soal model PISA ini merupakan soal nonrutin yang memerlukan analisis dan proses berpikir mendalam. Salah satu topik matematika yang berfokus pada definisi konsep yaitu geometri, akan tetapi proses berpikir sebagian besar siswa diabaikan dalam menyelesaikan masalah tersebut. Dalam menyelesaikan masalah matematika, setiap orang memiliki cara berpikir yang berbeda-beda karena tidak semua orang memiliki kemampuan berpikir yang sama. Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri berdasarkan teori tiga dunia matematika.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan jenis penelitiannya yaitu penelitian deskriptif. Subjek dalam penelitian ini adalah siswa dengan berkemampuan tinggi. Pengumpulan data dalam penelitian ini menggunakan tes geometri, hasil *think aloud* dan wawancara semi terstruktur. Teknik analisis data dilakukan dengan mereduksi data, proses pengkodean, menyajikan data serta menarik kesimpulan.

Hasil penelitian ini adalah : 1) Proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA topik geometri di dunia perwujudan-konseptual di penelitian ini cenderung pada tahap pembentukan pengertian; 2) Proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA topik geometri di dunia simbolis-proseptual di penelitian ini dilalui oleh semua subjek yang telah dipaparkan; 3) Proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA topik geometri di dunia formal-aksiomatik di penelitian ini cenderung pada tahap pembentukan pengertian dan pembentukan pendapat.

## ABSTRACT

Rahmadhani, Arum Permata. 2022. *The Thinking Process of Highly Able Students in Solving PISA Model Problems on the Topic of Geometry Based on the Theory of Three Mathematical Worlds*. Thesis. Mathematics Education Masters Study Program, Faculty of Tarbiyah and Teacher Training, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor (I) Dr. Abdussakir, M.Pd (II) Dr. Hairur Rahman, M.Sc.

**Keywords:** Thinking Process, PISA model questions, Theory of Three Mathematical Worlds.

This PISA model problem is a non-routine problem that requires analysis and deep thought processes. One of the mathematics topics that focuses on the definition of concepts is geometry, but the thinking processes of most students are ignored in solving these problems. In solving math problems, everyone has a different way of thinking because not everyone has the same thinking ability. This study aims to describe the thinking processes of high-ability students in solving PISA model questions on the topic of geometry based on the theory of the three worlds of mathematics.

The method used in this study uses a qualitative approach with the type of research that is descriptive research. The subjects in this study were students with high abilities. Collecting data in this study using geometry tests, think aloud results and semi-structured interviews. Data analysis techniques are carried out by reducing data, coding process, presenting data and drawing conclusions.

The results of this study are: 1) The thinking processes of high-achieving students in solving PISA model questions on the topic of geometry in the world of conceptual embodiment in this study tend to be at the stage of understanding formation; 2) The thinking processes of high-achieving students in solving PISA model problems on the topic of geometry in the symbolic-proceptual world in this study were passed by all the subjects that have been described; 3) The thinking processes of students with high abilities in solving PISA model questions on the topic of geometry in the formal-axiomatic world in this study tend to be at the stage of forming understanding and forming opinions.

## مستخلص البحث

رحمضاني ، أروم بيرماتا ٢٠٢٢. عملية تفكير الطلاب المتميزين في حل مشكلات نموذج فيسا حول موضوع الهندسة بناءً على نظرية العوالم الثلاثة للرياضيات. أطروحة ، برنامج دراسة الماجستير في تعليم الرياضيات ، كلية التربية وتدريب المعلمين ، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج . ١ (د/عبد الشاكر، الماجستير) ٢. (١ د/هيرور رحمن، الماجستير).

الكلمات المفتاحية: عملية التفكير ، أسئلة نموذج فيسا ، نظرية العوالم الرياضية الثلاثة.

مشكلة نموذج فيسا هذه هي مشكلة غير روتينية تتطلب عمليات تحليل وتفكير عميق. عملية التفكير هي الخطوات التي تتضمن نشاطًا عقليًا يتضمن التذكر ، وإبداء الآراء التي يقوم بها شخص ما للوصول إلى نتيجة في حل المشكلات. عند حل مسائل الرياضيات ، لدى كل شخص طريقة مختلفة في التفكير لأنه لا يمتلك كل شخص نفس القدرة على التفكير.

تهدف هذه الدراسة إلى وصف عمليات التفكير لدى الطلاب ذوي القدرات العالية في حل أسئلة نموذج فيسا حول موضوع الهندسة بناءً على نظرية عوالم الرياضيات الثلاثة. الطريقة المستخدمة هي نهج نوعي مع نوع من البحث هو البحث الوصفي. جمع البيانات في هذه الدراسة باستخدام الاختبارات والتفكير بصوت عالٍ والمقابلات.

نتائج هذه الدراسة هي: ١ (تميل عمليات التفكير للطلاب المتفوقين في حل أسئلة نموذج فيسا حول موضوع الهندسة في عالم التجسيد المفاهيمي في هذه الدراسة إلى أن تكون في مرحلة تكوين الفهم ٢. (تم اجتياز عمليات التفكير للطلاب المتفوقين في حل أسئلة نموذج فيسا حول موضوع الهندسة في العالم الرمزي الاستباقي في هذه الدراسة من قبل جميع المواد التي تم وصفها ؛ ٣ (تميل عمليات التفكير للطلاب ذوي القدرات العالية في حل أسئلة نموذج فيسا حول موضوع الهندسة في العالم الرسمي البديهي في هذه الدراسة إلى أن تكون في مرحلة تكوين الفهم وتكوين الآراء.

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **A. Latar Belakang Masalah**

Setiap 3 tahun sekali *Program for International Student Assessment* (PISA) mengadakan tes internasional untuk mengetahui pengetahuan dan kemampuan siswa berusia 15 tahun (Yang & Fan, 2019). Sejak tahun 2000, salah satu negara yaitu Indonesia juga terlibat mengikuti PISA. Soal-soal yang dirancang oleh PISA tersebut menerapkan konsep dari materi tentang masalah kehidupan sehari-hari yang didapat dari pembelajaran di sekolah. Hal itu merupakan manfaat yang diperoleh siswa saat mengikuti PISA. Konsep soal model PISA menunjukkan bahwa dapat menghubungkan berbagai faktor utama untuk memastikan analisis yang komprehensif, termasuk nilai ujian siswa, karakteristik pribadi mereka, dan faktor-faktor yang mempengaruhi pembelajaran di dalam maupun luar sekolah. Memiliki arah untuk mengukur literasi matematika siswa, kemahiran dalam berhitung, proses berpikir dalam memecahkan masalah, dan penerapan prinsip-prinsip matematika di luar ruang kelas (Irving dkk., 2016). Selain itu, PISA menyediakan konteks untuk perbandingan lintas negara, keputusan pembuatan kebijakan dan peningkatan praktik pendidikan nasional.

PISA mencakup strategi belajar tertentu yang digunakan oleh siswa, khususnya penggunaan hafalan, pengendalian, dan strategi elaborasi dalam proses pembelajaran. Strategi menghafal menunjukkan sejauh mana siswa menghafal materi tanpa mendemonstrasikan pemahaman tentang itu. Sebaliknya, strategi pengendalian dapat dianggap strategi pembelajaran yang lebih efektif, karena

mengharuskan siswa untuk mencari tahu apakah mereka mencoba untuk belajar dan informasi yang mereka butuhkan untuk meningkatkan pemahaman (Zhou & Wong, 2017). Setiap siswa memerlukan pemikiran tersebut untuk bisa dipergunakan dalam kehidupan sehari-hari. Khususnya dalam bidang matematika sebagai pola pikir, pola mengorganisasikan dan pembuktian logis dalam penelitian ini diperlukan untuk dapat menjawab soal-soal yang diajukan kepada peserta didik (Alamsyah, 2020).

Wu (2004) mengungkapkan jika penilaian PISA berusaha melibatkan masalah dunia nyata ke dunia matematika begitupun sebaliknya. Dapat dibayangkan bahwa siswa memiliki kemampuan prosedural yang memadai untuk menangani masalah-masalah rutin, tetapi mengalami masalah dalam menerapkan wawasan mereka untuk menangani masalah-masalah non-rutin. Seperti halnya dalam penelitian oleh Haji dkk., (2018) ketika siswa mengerjakan soal PISA mengalami kesulitan sebagai berikut: (1) kesulitan memahami soal; (2) kesulitan menghubungkan aspek kehidupan realita ke model matematika; (3) kesulitan melakukan operasi matematika; dan (4) kesulitan menginterpretasikan hasil solusi matematika terhadap masalah dunia nyata. Bagaimanapun, siswa Indonesia sebagian besar kurang siap dalam menangani pertanyaan dengan karakteristik seperti yang ada di PISA. Sehingga PISA dapat digunakan alternatif pemahaman siswa dalam mempelajari penyediaan masalah kehidupan nyata dalam konteks berbeda dan siswa dapat mengembangkan penggunaan keterampilan dasar matematika untuk memecahkan masalah.

Beberapa topik matematika diujikan pada PISA, khususnya mengenai geometri. Topik geometri itu termasuk dalam konten *space and shape* pada salah

yang merupakan salah satu konten pada PISA. Berdasarkan salah satu kesulitan yang telah dipaparkan sebelumnya, siswa mengalami kesulitan ketika berhadapan dengan topik matematika yang sangat dekat dengan kehidupan siswa. Topik matematika isinya berupa bentuk dan benda yaitu geometri yang memiliki tempat yang esensial dalam kehidupan manusia (Hwang dkk., 2015). Topik tersebut adalah geometri yang dalam PISA mendeskripsikan pemecahan masalah kontekstual dimana masalah tersebut terdapat di kehidupan sehari-hari. Sedangkan Shenglan menyatakan bahwa siswa mampu menyelesaikan persoalan tersebut meskipun mengalami kesulitan terkait permasalahan yang dihubungkan langsung dengan lingkungan sekitar berkonsep matematika (Abadi dkk., 2017).

Geometri secara tradisional menjadi salah satu bidang penting pendidikan matematika di seluruh dunia (Kuzle, 2018). Geometri merupakan cabang ilmu yang membantu individu mendapatkan kemudahan berpikir dan mencapai solusi dengan mewujudkan hasil di depan mata. Kesulitan siswa dengan geometri dikarenakan kurangnya pemahaman konsep tentang sesuatu yang berhubungan dengan masalah (Khasanah dkk., 2018). Menurut Gatot Soenarjadi (2020) geometri dapat mengembangkan pemikiran logis yang berguna dalam memecahkan masalah yang berkaitan erat dengan kehidupan sehari-hari dan penting untuk pembelajaran siswa. Ini memberikan pengalaman yang membantu siswa mengembangkan pemahaman tentang bentuk dan sifat-sifatnya, memungkinkan mereka untuk memecahkan masalah yang relevan dan untuk menerapkan sifat geometris untuk situasi dunia nyata. Sehingga banyak topik geometri yang bisa diterapkan dalam kehidupan nyata sebagai sarana pembelajaran di luar sekolah.

Geometri memberi siswa kesempatan untuk merangsang pikiran mereka, membuat latihan berpikir memecahan masalah, membandingkan, menggeneralisasi dan mengembangkan keterampilan. Geometri memiliki tempat yang luas dalam memahami struktur aksiomatik matematika dan program matematika yang berisi pembelajaran siswa. Proses belajar mengajar ini seharusnya tetap diimbangi dengan interaksi langsung bersama siswa, tidak hanya mentransfer pengetahuan / materi menggunakan metode ceramah ataupun demonstrasi saja (Fauzi & Arisetyawan, 2020). Secara umum, geometri merupakan alat yang penting bagi siswa untuk memberi makna pada lingkungannya. Seperti yang dikatakan Atebe bahwa geometri memberikan apresiasi yang lebih lengkap tentang dunia yang manusia tinggali (Rizqika dkk., 2021).

Kenyataannya dalam pembelajaran geometri, hal ini sering terjadi bahwa guru lebih bergantung pada buku pelajaran, siswa terbatas melihat gambar abstrak dan mengingat sifat-sifat bentuk pada geometri. Sejalan pemikiran Yovita yang mengatakan bahwa terdapat posisi paling memperhatikan ketika mengetahui hasil belajar geometri siswa masih rendah dalam pembelajaran matematika (Abadi dkk., 2017). Permasalahan dalam pembelajaran dapat mempengaruhi terhambatnya level berpikir siswa dalam pemahaman dan penguasaan materi matematika, khususnya pada pembelajaran geometri siswa kurang memahami konsep dasar dalam topik geometri tersebut. Meskipun demikian, sebagian besar siswa Indonesia mengalami kendala dalam menangani masalah tersebut. Sebuah penelitian yang dilakukan oleh PISA menunjukkan bahwa

kemampuan berpikir siswa terhadap geometri masih rendah, terutama dalam memahami ruang dan bentuk (Sulistiawati dkk., 2015).

Berpikir itu layaknya aplikasi komputer yang memungkinkan siswa untuk merepresentasikan yang telah mereka pelajari, ketahui dan simpan dengan representasi yang berbeda-beda (Rosen & Tager, 2014). Berpikir ialah aktivitas di mana pikiran digunakan untuk menemukan definisi, membuat penilaian, menangani persoalan atau mengambil keputusan berdasarkan informasi dan pengalaman yang terdapat di kehidupan sehari-hari (Bakry & Bakar, 2015). Setelah siswa mempelajarinya, ketika ada permasalahan siswa secara otomatis melakukan aktivitas berpikir hingga mereka mendapatkan jawaban. Karena siswa dapat mengkonstruksi dugaan dengan menggali masalah, mengidentifikasi masalah dengan membaca pertanyaan dengan cermat serta mengecek ketepatan hasil penyelesaiannya (Faizah dkk., 2020).

Siswa berpikir ketika mereka mengerti masalah yang dicari, membuat rencana serta mengerjakan rencana (Mairing, 2017). Selain itu, berpikir bukanlah aktivitas yang dapat diukur secara empirik melainkan diabstraksikan melalui kegiatan yang dihasilkan dari suatu pemikiran. Namun hingga saat ini, pendidik kurang perhatian pada setiap proses berpikir siswa yang seharusnya menjadi hal terpenting dalam proses pembelajaran dalam memecahkan masalah. Selama proses pembelajaran, siswa lebih banyak mendengarkan tetapi kurang berpikir (Putri & Zulkardi, 2018).

Proses berpikir adalah aktivitas mental atau proses yang terjadi pada kepribadian siswa ketika dihadapkan pada informasi atau masalah baru yang sedang terjadi dipandang sebagai jalan keluar dari masalah tersebut (Sari dkk.,

2019). Untuk mengetahui bagaimana proses berpikir siswa dapat dilihat dengan melakukan tes yang dilanjutkan wawancara yang mendalam tentang bagaimana cara mengerjakannya. Saat wawancara dengan guru dalam penelitian Vina I.K., dkk. (2018) bahwa guru lebih sering memberikan contoh masalah pengetahuan daripada masalah yang membutuhkan pemahaman dalam penyelesaian geometri. Oleh karena itu guru seharusnya meminta siswa untuk menceritakan bagaimana cara atau langkah yang ada dalam pikirannya ketika memecahkan masalah. Sehingga guru tidak hanya bertanya jawaban siswa tetapi juga mengkonfirmasi proses berpikir siswa ketika mendapatkan solusinya (Mairing, 2017).

Topik geometri berfokus pada definisi konsep akan tetapi proses berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah sebagian besar diabaikan. Dalam belajar geometri pun siswa melakukan proses berpikir untuk memecahkan masalah ketika mempelajarinya. Proses berpikir diperlukan untuk mencapai tujuan pengajaran geometri seperti, penalaran dan pembuktian, mengasosiasi, pemecahan masalah, komunikasi, berpikir kritis, berpikir kreatif, penelitian dan penyelidikan, dan berpikir dengan mengembangkan perspektif yang berbeda. Driscoll dalam penelitiannya (Bulbul & Guler, 2020) menunjukkan bahwa lingkungan dibutuhkan untuk siswa memiliki waktu dan kapasitas untuk berpikir tentang suatu masalah yang diberikan dan lingkungan tersebut harus mencakup masalah nonrutin agar dapat terselesaikan. Dalam sains, seni, arsitektur, teknik, singkatnya dalam setiap elemen yang dimiliki manusia, geometri membuat dirinya jelas dan bersarang dengan kehidupan sehari-hari (Moru dkk., 2021).

Matematika pada PISA meliputi penalaran matematis, kemampuan untuk menggambarkan, memahami, serta memprediksi kenyataan menggunakan

konsep prosedur, dan alat matematika. Baykul mendefinisikan konsep penalaran sebagai kemampuan untuk berpikir secara menyeluruh dan membuat keputusan (Ilhan, 2021). Selain itu, peran memori kerja dalam proses berpikir bagi siswa ketika memecahkan masalah setiap materi penting untuk diperhatikan, karena masing-masing langkah mengharuskan siswa untuk mengakses informasi yang telah disimpan sebelumnya dan menerapkan proses pemecahan masalah dalam berbagai situasi dunia nyata (Satsangi dkk., 2019).

Posisi geometri di deretan bidang studi matematika termasuk unggul dan didukung oleh banyak topik lain dalam matematika. Saat memahami geometri, otomatis proses berpikir siswa akan berjalan untuk dapat mendapatkan solusi / hasil akhir dari permasalahan geometri. Penyelesaian setiap siswa belum tentu sama karena setiap proses berpikir yang dilalui siswa berbeda-beda (Rinaldi dkk., 2019). Proses berpikir yang terjadi pada siswa saat mengerjakan matematika PISA merupakan aktivitas yang sangat kompleks pula (Stacey, 2011). Untuk menyelesaikan suatu permasalahan matematika dibutuhkan konsep khusus matematika, keterampilan dan proses berpikir siswa tersebut.

Dalam memecahkan masalah matematika, setiap manusia punya cara pikir yang beragam karena tak semua manusia mampu berpikir yang sama. Siswa yang melalui proses pemecahan masalah dapat diberikan pengalaman dengan memanfaatkan pengetahuan dan kemampuan yang dimilikinya (Jalan dkk., 2016). Suatu masalah pada umumnya berisi tentang apa yang sedang terjadi yang mendorong seseorang untuk mengatasinya, namun seseorang tidak secara langsung menemukan strategi atau cara untuk memutuskan bagaimana menyelesaikannya (Maryono, 2020). Ini karena, seseorang dapat mengatasi

masalah dengan baik apabila didukung oleh kemampuan untuk menghadapi rintangan selanjutnya.

Teori yang telah dicetuskan oleh David Tall dinamai dengan teori tiga dunia berpikir matematis. Perkembangan kemajuan dunia memiliki karakteristik sendiri untuk menjamin kebenarannya. Tiga dunia dalam teori tersebut, pertama dunia perwujudan (konsep), selanjutnya dunia simbolik (proceptual) dan dunia formal (aksioma) (Palharini & Almeida, 2015). Dunia perwujudan berpikir tentang gambaran objek yang dapat diamati, dibayangkan dan dipahami dalam pikiran yang membentuk gambaran konsep. Dunia simbolik lanjutan dari dunia perwujudan dengan gambaran yang dituangkan dalam pikiran melalui tindakan menghitung menggunakan simbol. Selanjutnya dunia formal perkembangan dari simbolik yang dirusmuskan ke dalam aksioma.

Teori tiga dunia matematika adalah teori tentang berpikir, sehingga tergolong dalam aliran kognitif (Faizah dkk., 2022). Hanya implikasi untuk pembelajaran yang dapat menunjukkan bahwa jika pembelajaran tatap muka jika dimulai di dunia formal, pemahaman siswa akan kurang tertancap kuat. Belajar harus dimulai dari dunia perwujudan, lalu simbolik, kemudian formal. Proses berpikir pasti ada di setiap pembelajaran apapun materinya dan dimanapun berada. Jadi teori ini meliputi seluruh proses berpikir untuk setiap materi dalam matematika. David Tall juga mengatakan bahwa ada tiga *set-before* mendasar yang dipikirkan orang ketika menggunakan sesuatu termasuk pengenalan pertama terhadap pola, persamaan, dan perbedaan (Tall, 2020). Kedua, pengulangan serangkaian tindakan hingga siswa terbiasa, serta yang terakhir yaitu bahasa untuk mendeskripsikan dan memperbaiki cara berpikir perihal sesuatu.

Wardhani (2019) mengungkapkan topik geometri menggabungkan elemen abstrak dari pengalaman visual dan spasial, seperti bidang, pola, pengukuran dan pemetaan. Geometri menyediakan pendekatan untuk pemecahan masalah melalui gambar, bagan, sistem koordinat, vektor, dan transformasi. Geometri berperan dalam menumbuhkan proses berpikir siswa dan berdampak pada materi pembelajaran lainnya di bidang matematika.

Pemanfaatan hasil PISA untuk meningkatkan kualitas pembelajaran matematika, khususnya peran geometri juga diharapkan dapat mengembangkan proses berpikir siswa saat menyelesaikan soal model PISA konten *shape n space*. Khususnya, peran geometri juga diharapkan mampu membina proses berpikir siswa dengan mengaitkan tiga dunia berpikir matematika. Oleh karena itu untuk memulai analisis kebutuhan lebih lanjut perlu ditelusuri bagaimana siswa berpikir ketika menerima masalah PISA. Menurut uraian diatas, peneliti ingin mengambil judul “Proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri berdasarkan teori tiga dunia matematika”.

## **B. Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang masalah di atas maka rumusan masalah penelitian ini, sebagai berikut : bagaimana proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri berdasarkan teori tiga dunia matematika david tall ?

### **C. Tujuan Penelitian**

Bertitik tolak dari rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian, sebagai berikut : mendeskripsikan proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri berdasarkan teori tiga dunia matematika david tall

### **D. Manfaat Penelitian**

Hasil penelitian ini nantinya diharapkan akan memberikan manfaat sebagai berikut.

#### **1. Secara Teoritis**

Hasil penelitian ini dibutuhkan bisa dimanfaatkan menjadi sumbangan pemikiran untuk memperbaiki dan memperkaya khazanah keilmuan, serta menjadi bahan referensi dan tambahan pustaka UIN Maliki Malang. Memberikan pemahaman dan pengetahuan mengenai cara berpikir siswa berkemampuan tinggi saat menangani soal model PISA dengan topik geometri, sehingga dapat digunakan bahan riset lanjutan bagi para peneliti yang membahas kasus serupa.

#### **2. Secara Praktis**

Dari hasil penelitian diharapkan akan memberikan manfaat bagi,

##### **a. Siswa**

Penelitian ini diharapkan mampu mengembangkan proses berpikir siswa melalui soal model PISA dengan topik geometri, sehingga pemahaman siswa dan hasil belajar lebih baik.

b. Guru

Sebagai bahan pertimbangan dengan cara lain dan masukan pada pembelajaran supaya guru lebih memperhatikan bagaimana proses berpikir siswa bekerja saat mengerjakan soal model PISA dengan topik geometri sehingga guru dapat memberikan pemahaman setiap penyelesaian masalah.

c. Peneliti

3. Peneliti dapat memahami lebih mendalam tentang proses berpikir siswa dalam menyelesaikan soal model PISA berdasarkan teori tiga dunia berpikir matematika.

## **E. Orisinalitas Penelitian**

Beberapa penelitian terdahulu yang dikutip pada penelitian ini tentang proses berpikir dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri berdasarkan teori tiga dunia matematika disajikan dapat dipaparkan sebagai berikut.

1. Penelitian yang dilakukan oleh Mulyadi dan Muhtadi (2019) berfokus tentang level berpikir geometri siswa berdasarkan teori van hiele yang ditinjau dari gender. Berdasarkan penelitian Mulyadi dan Muhtadi maka penelitian yang dilakukan peneliti memiliki kesamaan pada penggunaan proses berpikir siswa dengan menyelesaikan masalah pada materi geometri. Sedangkan pembedanya terletak pada teori yang digunakan pada penelitian ini menggunakan teori van hiele.

2. Penelitian yang dilakukan oleh Astuti, dkk (2019) berfokus pada soal *Higher Order Thinking Skills* untuk melihat proses berpikir siswa berdasarkan pemahaman konseptual dan prosedural. Berdasarkan penelitian Astuti, dkk maka penelitian yang dilakukan peneliti memiliki kesamaan pada penggunaan proses berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah. Sedangkan pembedanya terletak pada siswa yang menyelesaikan soal *Higher Order Thinking Skills* berdasarkan pemahaman konseptual dan prosedural.
3. Penelitian yang dilakukan oleh Wijayanti (2020) berfokus pada proses berpikir siswa laki-laki dan siswa perempuan dalam menyelesaikan masalah matematika materi fungsi. Berdasarkan penelitian Wijayanti maka penelitian yang dilakukan peneliti memiliki kesamaan pada penggunaan proses berpikir siswa. Sedangkan pembedanya lebih berfokus pada siswa SMP dalam menyelesaikan masalah matematika pada materi fungsi.
4. Penelitian yang dilakukan oleh Annizar (2020) berfokus pada kemampuan pemecahan masalah matematis siswa dalam menyelesaikan soal PISA pada topik geometri. Berdasarkan penelitian Annizar maka penelitian yang dilakukan peneliti memiliki kesamaan bahwa siswa menyelesaikan soal PISA dengan topik geometri. Sedangkan pembedanya terletak pada penggunaan kemampuan siswa dalam memecahkan masalah matematis menggunakan tahapan polya.
5. Penelitian yang dilakukan oleh Putri dan Wijayanti (2019) berfokus untuk mengetahui tingkat penalaran matematika siswa berdasarkan jenis kelamin dengan menggunakan soal TIMSS. Berdasarkan penelitian Putri dan Wijayanti maka penelitian yang dilakukan peneliti memiliki kesamaan bahwa

ada atau tidaknya perbedaan dalam jenis kelamin. Sedangkan perbedaan penelitian ini lebih terfokus pada penalaran siswa dalam menyelesaikan soal TIMSS.

6. Penelitian yang dilakukan oleh Suryaningsih dan Susanah (2021), berfokus pada profil komunikasi matematika siswa dalam menuntaskan soal PISA ditinjau dari kemampuan matematika. Berdasarkan penelitian Suryaningsih dan Susanah maka penelitian yang dilakukan peneliti memiliki kesamaan bahwa siswa diminta untuk menyelesaikan soal PISA. Sedangkan pembedanya terletak pada penggunaan profil komunikasi matematika yang ditinjau dari kemampuan matematika.
7. Penelitian yang dilakukan oleh Sugiyono dan Wijayanti (2018) berfokus pada representasi matematis antara siswa laki-laki dan siswa perempuan dalam menuntaskan soal model PISA. Berdasarkan penelitian Sugiyono dan Wijayanti maka penelitian yang dilakukan peneliti memiliki kesamaan bahwa siswa diminta untuk menyelesaikan soal model PISA. Sedangkan pembedanya terletak pada penggunaan representasi matematika siswa.
8. Penelitian yang dilakukan oleh Ambarwati, dkk (2018) berfokus untuk menganalisis kemampuan visual spasial siswa dalam menyelesaikan soal matematika berstandar PISA konten *shape and space* ditinjau dari level berpikir geometri van hiele. Berdasarkan penelitian Ambarwati, dkk maka penelitian yang dilakukan peneliti memiliki kesamaan bahwa siswa diminta untuk menyelesaikan soal model PISA. Sedangkan pembedanya terletak pada penggunaan kemampuan visual spasial yang ditinjau dari teori van hiele.

9. Penelitian yang dilakukan oleh Hidayati (2017) berfokus untuk menelaah kesesuaian pada tahap perkembangan kognitif Piaget antara siswa laki-laki dan siswa perempuan. Berdasarkan penelitian Hidayati maka penelitian yang dilakukan peneliti memiliki kesamaan bahwa ada atau tidaknya perbedaan dalam jenis kelamin. Sedangkan pembedanya terfokus pada penggunaan tahapan perkembangan kognitif matematika siswa berdasarkan teori Piaget.
10. Penelitian yang dilakukan oleh Amalia dan Manoy (2021) berfokus untuk mendeskripsikan proses berpikir siswa *Adversity Quotient* (AQ) tipe *climber*, dan *quitter* dalam menyelesaikan masalah matematika berdasarkan langkah Polya. Berdasarkan penelitian Amalia dan Manoy maka penelitian yang dilakukan peneliti memiliki kesamaan pada penggunaan proses berpikir siswa. Sedangkan pembedanya terletak pada penyelesaian masalah matematika berdasarkan tahapan pada Polya.

Selanjutnya untuk memudahkan dalam memahami paparan mengenai penelitian terdahulu dan penelitian ini disajikan pada Tabel 1.1.

**Tabel 1.1 Orisinalitas Penelitian**

No.	Judul Penelitian	Persamaan	Perbedaan	Orisinalitas Penelitian
1.	Iyad Mulyadi dan Dedi Muhtadi (2019), Proses berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah geometri berdasarkan Teori Van Hiele ditinjau dari gender	Proses berpikir siswa dan materi geometri	Menggunakan Teori Van Hiele dan ditinjau dari gender	Penelitian yang saya lakukan menggunakan teori tiga dunia matematika
2.	Puji Astuti, dkk (2019), Proses Berpikir Siswa dalam Menyelesaikan Soal Higher Order Thinking Skills Berdasarkan Pemahaman Konseptual dan Prosedural	Meneliti tentang proses berpikir siswa	Siswa menyelesaikan soal <i>Higher Order Thinking Skills</i> berdasarkan pemahaman konseptual dan prosedural	Siswa menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri berdasarkan teori tiga dunia matematika

**Lanjutan Tabel 1.1.**

No.	Judul Penelitian	Persamaan	Perbedaan	Orisinalitas Penelitian
3.	Erin Wahyu Wijayanti (2020), Proses Berpikir Siswa SMP dalam Menyelesaikan Masalah Matematika Materi Fungsi Ditinjau dari Perbedaan Jenis Kelamin	Proses berpikir siswa	Menyelesaikan soal matematika pada materi fungsi	Menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri
4.	Anas Ma'ruf Annizar (2020), Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Siswa dalam Menyelesaikan Soal PISA pada Topik Geometri	Siswa menyelesaikan soal model PISA pada materi geometri	Penelitian ini berfokus pada kemampuan siswa dalam memecahkan masalah matematis menggunakan tahapan polya	Meneliti tentang proses berpikir siswa dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri menggunakan teori tiga dunia matematika
5.	Astrie Karina Putri & Pradnyo Wijayanti (2019), Profil Penalaran Matematika Siswa SMP dalam Menyelesaikan Soal TIMSS Ditinjau dari Jenis Kelamin	Ditinjau dari jenis kelamin	Penelitian ini meneliti tentang penalaran siswa dalam menyelesaikan soal TIMSS	Meneliti tentang proses berpikir siswa dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri
6.	Amelia Suryaningsih & Susannah (2021), Profil Komunikasi Matematika Siswa dalam Menyelesaikan Soal PISA Ditinjau dari Kemampuan Matematika	Siswa menyelesaikan soal model PISA	Penelitian ini berfokus untuk mengetahui profil komunikasi siswa yang ditinjau dari kemampuan matematika	Meneliti tentang proses berpikir siswa berdasarkan teori tiga dunia matematika
7.	Aswin B. S., & Pradnyo W. (2018), Representasi Matematis Siswa dalam Menyelesaikan Soal Model PISA Ditinjau dari Perbedaan Jenis Kelamin	Siswa menyelesaikan soal model PISA	Meneliti tentang representasi matematis siswa	Meneliti tentang proses berpikir siswa
8.	Ambarwati, dkk (2018), Analisis Kemampuan Visual Spasial Siswa dalam Menyelesaikan Soal Matematika Berstandar PISA Konten Shape and Space ditinjau dari Level Berpikir Geometri Van Hiele	Siswa menyelesaikan soal matematika model PISA	Fokus penelitian untuk menganalisis kemampuan visual spasial siswa dan ditinjau dari level berpikir geometri van hiele	Penelitian yang saya lakukan berfokus pada proses berpikir siswa berdasarkan teori tiga dunia matematika
9.	Nita Hidayati (2017), Tahap Perkembangan Kognitif Matematika Siswa SMP Kelas VII Berdasarkan Teori Piaget Ditinjau dari Perbedaan Jenis Kelamin	Perbedaan jenis kelamin	Penelitian ini menggunakan tahap perkembangan kognitif matematika siswa berdasarkan Piaget	Menggunakan teori tiga dunia matematika

**Lanjutan Tabel 1.1.**

No.	Judul Penelitian	Persamaan	Perbedaan	Orisinalitas Penelitian
10.	Hardina Fitri A. & Janet Trineke M. (2021), Proses Berpikir Siswa Dalam Menyelesaikan Masalah Matematika Berdasar Langkah Polya Ditinjau Dari <i>Adversity Quotient</i>	Meneliti tentang proses berpikir siswa	Penelitian ini berfokus dalam menyelesaikan masalah matematika berdasarkan tahapan pada polya	Penelitian yang saya lakukan berfokus pada proses berpikir siswa berdasarkan teori tiga dunia matematika

**F. Definisi Istilah**

a. Proses berpikir

Proses berpikir merupakan suatu perilaku setiap individu dalam mengingat kembali memori tentang pengetahuan, informasi untuk dipergunakan dalam memecahkan masalah dan selanjutnya diolah sesuai kebutuhan.

b. Soal model PISA

Soal model PISA merupakan soal yang penyajiannya mengaitkan kerangka kerja soal-soal pada PISA.

c. Teori Tiga Dunia Matematika

Teori Tiga Dunia Matematika yang dikembangkan oleh David Tall merupakan teori tentang berpikir matematis serta implikasinya dalam pembelajaran dimulai dari dunia perwujudan, lalu simbolik, kemudian formal. Oleh karena itu teori David Tall ini dapat diimplementasikan di bidang pendidikan melalui pelatihan pedagogis yang dimulai dari pengenalan konsep, mempresentasikannya dalam bentuk simbol, hingga siswa diperkenalkan dengan definisi.

## **BAB II**

### **KAJIAN PUSTAKA**

#### **A. Proses Berpikir**

##### **1. Pengertian Proses Berpikir**

Berpikir adalah kemampuan alami yang dimiliki manusia sebagai anugerah berharga dari Tuhan Yang Maha Esa. Dengan kemampuan ini, manusia memperoleh kedudukan yang mulia bersamanya, membedakan mereka dari makhluk lain. Berpikir adalah tindakan manusia yang mengarah pada penemuan yang diarahkan pada tujuan. Johnson mengartikan bahwa berpikir adalah cara pikiran memproses dan mentransmisikan informasi (stimulus) yang masuk melalui panca indera ke otak sadar atau bawah sadar, tempat terciptanya makna dan beberapa konsep (Silalahi dkk., 2020). Ketika berpikir, menjadikan setiap manusia memahami apa yang dia cari, menyelesaikan persoalan, dan menentukan hasil akhir. Cara berpikir manusia digunakan untuk benteng dalam menghadapi kehidupan agar dapat memahami makna dimanapun.

Berpikir selalu terkait dengan masalah yang muncul dari masalah sekarang maupun masa lalu bahkan mungkin yang belum terjadi. Itulah proses pemecahan masalah yang disebut proses berpikir. Proses berpikir merupakan suatu aktivitas mental untuk membangun dan mendapatkan informasi (Maulana, 2018). Menurut Hidayanto, berpikir adalah cara pandang atau ide berdasarkan data, fakta dan pengalaman serta pengetahuan yang telah dimiliki (Ulinikmah & Rahayu, 2021). Sehingga Rahaju mendefinisikan berpikir sebagai kegiatan memahami sesuatu yang dialami atau mencari pemecahan masalah yang

bersangkutan dengan cara mengaitkan information yang dimiliki sehingga diperoleh jawaban (Nurfadzilah & Rahaju, 2018). Jadi proses berpikir dalam penelitian ini adalah proses selangkah demi selangkah yang melibatkan aktivitas mental yang meliputi mengingat, membuat pendapat atau argumen yang dilakukan seseorang untuk mendapatkan suatu kesimpulan dalam menyelesaikan soal.

## **2. Karakteristik Proses Berpikir**

Proses berpikir dalam pembelajaran di sekolah tak hanya berfokus pada pengetahuan mapel, namun pada kemampuan umum siswa dalam menyerap informasi. Dengan kata lain, sistem pembelajaran hendaknya mendorong siswa untuk menyelidiki dan mengembangkan sendiri sekaligus mampu memberi keputusan sesuai dengan proses berpikirnya sendiri (Fathurrohman, 2017).

Tujuan proses berpikir ialah memecahkan atau menyelesaikan masalah atau persoalan tersebut dengan menggabungkan satu informasi dengan informasi yang lain sehingga ditemukan jawaban atau solusinya (Daulay, 2014). Pada saat seseorang berpikir terjadi proses tanya jawab dalam pikirannya untuk menempatkan koneksi informasi yang dimilikinya secara tepat. Pertanyaan-pertanyaan inilah yang memberikan arahan kepada pikirannya. Dalam proses berpikir terdapat suatu kegiatan dalam alam kesadaran untuk menghubungkan pengetahuan-pengetahuan, pengertian-pengertian dan ingatan yang dimiliki oleh seseorang.

Hasil berpikir merupakan sesuatu yang dihasilkan melalui proses berpikir dan membawa atau mengarahkan untuk mencapai tujuan dan sasaran (Sunaryo, 2011). Hasil berpikir dapat berupa ide, gagasan, penemuan dan

pemecahan masalah, keputusan serta selanjutnya dapat dikonkretisasi ke arah perwujudan, baik berupa tindakan untuk mencapai tujuan kehidupan praksis maupun untuk mencapai tujuan keilmuan tertentu.

Proses berpikir itu pada pokoknya ada tiga langkah, yaitu pembentukan pengertian, pembentukan pendapat, dan penarikan kesimpulan (Suciono, 2021).

Berikut proses yang dilewati dalam berpikir (Ahmadi & Supriyono, 2008) :

1. Proses pembentukan pengertian, yaitu menghilangkan karakteristik umum sesuatu, hanya menyisakan karakter khusus.
2. Pembentukan pendapat, yaitu pikiran menggabungkan (menguraikan) beberapa pengertian; sehingga menjadi tanda masalah itu.
3. Pembentukan kesimpulan, yaitu pikiran menarik keputusan-keputusan dari keputusan yang lain.

### 3. Indikator Proses Berpikir

Proses berpikir yang diteliti dalam penelitian ini adalah kegiatan siswa pada saat menyelesaikan soal model PISA dan saat diwawancarai mengenai proses mengerjakan permasalahan tersebut. Dalam penelitian ini proses berpikir dapat dilihat dari data yang diperoleh berupa hasil pengerjaan dari siswa dalam menyelesaikan masalah serta hasil wawancara siswa di saat maupun setelah mengerjakan soal. Adapun indikator proses berpikir dalam penelitian ini yang diajabarkan dari 3 tahapan sebagai berikut.

**Tabel 2.1 Indikator Proses Berpikir**

Tahapan Proses Berpikir	Indikator
Pembentukan pengertian	<ul style="list-style-type: none"> <li>a. Siswa memahami soal</li> <li>b. Siswa menganalisis data pada soal</li> <li>c. Siswa menyusun informasi yang diketahui dan yang ditanyakan</li> <li>d. Siswa menguraikan atau mengungkapkan dengan kalimatnya sendiri</li> </ul>

---

Pembentukan pendapat	<ul style="list-style-type: none"> <li>e. Siswa ingin menyelesaikan soal</li> <li>a. Siswa mencoba mencari solusi</li> <li>b. Siswa mengaitkan materi yang sudah diperoleh</li> <li>c. Siswa mendapatkan ide saat menyelesaikan soal</li> <li>d. Siswa memiliki alasan logis setiap langkah penyelesaian</li> <li>e. Siswa menggunakan informasi yang telah diperoleh</li> <li>f. Siswa mensubstitusi data ke dalam rumus</li> <li>g. Siswa menyelesaikan soal dengan langkah-langkah yang runtut dan benar</li> </ul>
Penarikan kesimpulan	<ul style="list-style-type: none"> <li>a. Siswa memeriksa ketepatan perhitungan</li> <li>b. Siswa mengecek kesesuaian alasan setiap langkah pengerjaan</li> <li>c. Siswa mengecek kesesuaian langkah menyelesaikan soal</li> <li>d. Siswa meyakini kebenaran jawabannya</li> <li>e. Siswa menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya</li> </ul>

---

## **B. Programme for International Student Assesment (PISA)**

### **1. Pengertian PISA**

PISA adalah program penilaian siswa international yang diselenggarakan oleh OECD (*Organisation for Economic Co-operation and Development*) dilaksanakan tiga tahunan berskala besar dan berfokus pada siswa berusia 15 tahun memanfaatkan pengetahuan dan keterampilan mereka yang sudah ada untuk memecahkan masalah kehidupan sehari-hari. Setiap implementasi didasarkan pada salah satu bidang antara keterampilan membaca, literasi matematika dan literasi sains (Gungor & Kabasakal, 2020).

PISA berkaitan dengan kapasitas literasi yang akan dibutuhkan siswa dalam kehidupan dewasa daripada kurikulum dan pengetahuan sekolah. Oleh karena itu, PISA mengukur keterampilan pemecahan masalah siswa dalam masing-masing domain kunci, serta kinerja kapasitas pemecahan masalah interdisipliner mereka. Pertama kali dilaksanakan pada tahun 2000, ujian ini diulang setiap tiga tahun dan masing-masing domain-domain tersebut di atas memiliki bobot pemeriksaan yang bervariasi. Misalnya, membaca pada tahun 2000, Matematika pada tahun 2003 dan Sains pada tahun 2006 difokuskan lebih

dekat daripada yang lain. Selama periode antara survei PISA pertama (2000) dan terakhir (2018), keduanya berubah dalam kualifikasi yang dibutuhkan untuk dunia bisnis dan pengembangan pengukuran metode dan teknologi telah membawa beberapa perubahan dalam definisi dan pengukuran kompetensi ini dan jenis masalah yang digunakan dalam proses.

PISA menggunakan kehidupan nyata skenario untuk mengukur penerapan pengetahuan dan keterampilan siswa dipelajari dari sekolah dalam memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari (Demir, 2018). Sesuai dengan definisi tersebut, PISA diharapkan dapat menggunakan keterampilan matematika dalam situasi-situasi di mana siswa dapat menghadapi situasi kehidupan nyata (misalnya belanja, perjalanan, perhitungan keuangan atau masalah politik, dll.) selain masalah matematika khas yang mereka temui di sekolah.

Tujuan PISA bukan untuk menilai apakah siswa telah secara efektif menghafal pengetahuan, tetapi untuk menilai apakah mereka mampu secara efektif menerapkan pengetahuan ini dan membuat penalaran lebih lanjut. Hasil PISA memberikan evaluasi dan pemantauan efisiensi pendidikan di tingkat internasional, dan hasil dari penilaian ini dibahas dan dipelajari oleh banyak peneliti. Hasil ini dapat menjadi referensi penting dan dasar bagi organisasi pendidikan dalam merumuskan kebijakan pendidikan.

## **2. Soal model PISA**

Saat ini salah satu soal matematika yang dapat melihat proses berpikir siswa adalah soal model PISA yang menekankan pada kemampuan literasi.

Literasi diartikan sebagai kemampuan untuk menggunakan pengetahuan dan hasil belajar yang diperoleh dari masalah yang dihadapi hingga mampu membuat kesimpulan dengan menganalisis serta berkomunikasi secara efektif dengan orang lain (Bozak & Aybek, 2020). McCrone dan Dossey telah mendefinisikan literasi matematika tidak hanya dalam kehidupan akademik di sekolah, tetapi juga dalam kehidupan sehari-hari dan bisnis (Demir, 2018).

Literasi matematika mencakup proses berpikir matematika dan untuk memahami bagaimana matematika tertanam kuat dalam kehidupan pribadi, akademik dan sosial. Dengan demikian, literasi matematika merupakan kegiatan siswa untuk merumuskan, menetapkan, dan menerjemahkan matematika ke beberapa variasi cara penyelesaian dari permasalahan yang ada (Yavuz & Atar, 2020). Hal ini termasuk penalaran matematis yang menggunakan konsep matematika, prosedur, fakta dan alat untuk menggambarkan, menjelaskan serta menganalisa permasalahan. Sehingga membantu siswa untuk mengenali masalah matematika dalam kehidupan sehari-hari. Dengan adanya literasi matematika siswa inilah, soal model PISA dapat melihat proses berpikir siswa yang mempengaruhi prestasi belajar matematika siswa tersebut.

Unsur soal PISA yang diujikan terdiri dari tiga aspek di antaranya konten, konteks, dan kompetensi. Aspek pertama pada PISA yaitu konten, aspek ini terdiri dari 4 bagian yaitu: (1) *change and relationship*, kategori ini berkaitan dengan aspek konten matematika fungsi dan aljabar; (2) *space and shape*, berhubungan dengan geometri; (3) *quantity*, kategori ini berhubungan dengan bilangan dan pola bilangan; (4) *uncertainty and data*, kategori ini berkaitan dengan peluang dan statistika. Aspek kedua yang diuji pada soal-soal berstandar

PISA yaitu konteks. Soal PISA melibatkan 4 konteks yaitu: (1) *personal*, dalam hal ini matematika diinterpretasikan dengan masalah sehari-hari; (2) *occupational*, matematika dirumuskan dan diklasifikasikan dalam masalah pendidikan dan pekerjaan siswa disekolah dan dilingkungan tempat bekerja; (3) *societal*, penggunaan matematika dalam kehidupan bermasyarakat; (4) *scientific*, matematika dihubungkan dengan kegiatan ilmiah yang lebih bersifat abstrak. Kompetensi merupakan aspek ketiga yang diujikan pada soal-soal PISA. Aspek kompetensi terdiri dari 3 kelompok yaitu

- a) Kelompok reproduksi meminta siswa untuk memperlihatkan kemampuan mereka untuk memahami fakta, sifat-sifat dari objek, menggunakan kebiasaan rutin, dan perhitungan standar.
- b) Kelompok koneksi, siswa mengubah masalah nonrutin dari kontekstual ke model matematika
- c) Kelompok refleksi, siswa menemukan ide matematika terhadap permasalahan yang diberikan

Jadi, soal model PISA adalah soal non-rutin menggunakan mengacu dalam ciri soal-soal PISA yang memakai skenario kehidupan nyata buat mengukur penggunaan fakta & kemampuan siswa yang sudah diperoleh berdasarkan sekolah pada memecahkan masalah kehidupan sehari-hari.

## **C. Topik Geometri**

### **1. Pengertian Geometri**

Pada penelitian ini, berfokus soal PISA pada konten *space and shape*. Konten ini berkaitan dengan aspek konten matematika pada kurikulum sekolah

yaitu geometri. Istilah geometri berasal dari kata Yunani "geometrien" dan terdiri dari kombinasi kata "geo" yang berarti "tempat" dan "metrik" yang berarti "ukuran". Geometri pertama kali digambarkan sebagai bidang ilmu mempelajari ukuran dan kekecilan benda (Erdogan, 2017). Digambarkan sebagai cabang matematika yang mengkaji titik, garis, bidang, bentuk planar, ruang, bentuk spasial dan hubungan di antara mereka, serta pengukuran seperti panjang, sudut, luas dan volume bentuk geometris. Dalam konteks ini, benda dan bentuk geometris, fitur-fiturnya, dan hubungannya satu sama lain bentuk lain subjek geometri.

Geometri didasarkan pada empat elemen dasar istilah yang tidak ditentukan, istilah yang ditentukan, aksioma dan teorema (Erdogan, 2017). Titik, garis, bidang, dan ruang adalah istilah yang tidak ditentukan. Definisi istilah-istilah ini tidak boleh dibuat dengan menggunakan konsep lain. Istilah yang ditentukan adalah istilah yang didefinisikan dalam bahasa dan aturan logika, tergantung pada istilah yang tidak ditentukan dan istilah yang ditentukan sebelumnya. Ruas garis, setengah garis, sudut dan segitiga dapat ditampilkan sebagai contoh. Kemudian, tujuan dasar geometri dapat dinyatakan sebagai mengenali sifat-sifat benda geometris dalam bidang dan ruang.

Geometri adalah cabang ilmu yang membantu individu mendapatkan kemudahan berpikir dan mencapai solusi dengan mewujudkan hasil di depan mata. Geometri adalah aspek matematika yang berhubungan dengan studi tentang berbagai bentuk. Menurut Telima (2011) bentuk-bentuk geometri ini mungkin datar atau padat. Bentuk bidang adalah bentuk geometris sedemikian rupa sehingga garis lurus yang menghubungkan dua titik di atasnya seluruhnya terletak

di permukaan. Bentuk padat di sisi lain dibatasi oleh permukaan yang mungkin tidak sepenuhnya direpresentasikan pada permukaan bidang.

Geometri adalah cabang utama matematika, dan isinya diklasifikasikan menjadi empat bidang (Sunzuma dkk., 2020). Pertama, geometri bidang adalah komponen yang berhubungan dengan angka-angka dalam bidang dua dimensi. Kedua, geometri berfokus pada angka-angka dalam ruang tiga dimensi. Ketiga, geometri bola yang berfokus pada angka-angka di permukaan bola. Terakhir, geometri Euclidean yang berfokus pada bidang yang berdasarkan postulat Euclid dan Geometri analitik berfokus pada hubungan antara aljabar dan geometri, menggunakan grafik dan persamaan garis, kurva, serta permukaan untuk mengembangkan dan membuktikan hubungan.

Konsep geometri pada hakekatnya dialami secara informal oleh siswa sebelum mereka masuk sekolah melalui benda-benda konkrit disekitarnya yang berisi ide/pikiran geometri (Rinaldi dkk., 2019). Konsep tersebut meliputi konsep garis lurus, bangun datar, dan bangun ruang. Karena hal itu, siswa harus memiliki kemampuan untuk memahami dan menguasai geometri dengan baik. Serta peran seorang guru akan menentukan kemajuan dan keberhasilan suatu pembelajaran.

## **2. Keterkaitan Soal Model PISA pada Topik Geometri dengan Proses Berpikir**

Soal model PISA ini merupakan soal nonrutin yang memerlukan analisis dan proses berpikir mendalam. Masalah tidak rutin lebih rumit daripada masalah rutin sehingga strategi untuk memecahkan masalah mungkin tidak

langsung muncul dan memerlukan tingkat kreativitas dan orisinalitas yang tinggi dari si pemecah masalah (*solver*).

Geometri pertama kali diajarkan di tiga tingkat standar sekolah dasar pendidikan sekolah, ketika sebagian besar siswa berusia antara 8 dan 10 tahun. Pada usia ini, siswa cenderung tidak terampil dan canggung dalam menangani benda dan peralatan yang digunakan selama konstruksi bentuk geometris. Murid pada tahap ini belum untuk diperkenalkan dengan penggunaan instrumen geometris dan seringkali mereka memanfaatkannya alat bantu dasar misalnya, penggunaan koin atau cakram untuk menggambar lingkaran. Biasanya, pengajaran dan pembelajaran geometri sekolah melibatkan keterampilan manipulatif dan penggunaan instrumen geometri untuk akurasi.

Belajar cenderung menjadi lebih berorientasi praktis sebelum peserta didik mencoba untuk menulis konsep di atas kertas. Geometri salahsatu dari mapel yang paling penting dari kurikulum pembelajaran yang membantu siswa untuk belajar metode matematika dan untuk menggambarkan benda-benda geometris di sekitarnya (Hwang dkk., 2015). Dalam mempelajari geometri, siswa perlu berpikir secara mendalam untuk dapat menerapkan keterampilan geometrinya seperti visualisasi, memahami berbagai bentuk dan ruang, mendeskripsikan gambar, menggambar bentuk, memberi label pada titik-titik tertentu, serta kemampuan memahami perbedaan dan persamaan antar geometri (Muhassanah dkk., 2014). Menurut Garrett dan David dalam pendidikan matematika tradisional di sekolah dasar, menerapkan atau memverifikasi konsep atau rumus geometri biasanya diabaikan dibandingkan dengan proses berpikir pembelajaran geometri, siswa biasanya fokus pada proses berpikir untuk

menghafal rumus geometri tetapi jarang menerapkan pengetahuan geometri dalam kehidupan nyata mereka (Hwang dkk., 2015).

#### **D. Teori Tiga Dunia Matematika**

##### **1. Definisi Teori Tiga Dunia Matematika**

Teori Tiga Dunia Matematika ini merupakan teori tentang berpikir matematis. Tiga dunia pada matematika menurut Piaget, ketika berpikir secara “*empirical abstraction*” dalam mempelajari suatu materi sampai sifat-sifatnya : dimulai dari aksi (seperti hitungan), disimbolkan (seperti angka), pembentukan konsep (seperti bilangan), sampai penurunan sifat-sifat secara deduksi (seperti bagaimana mendapatkan teorema). Gray dan Tall mempunyai pemikiran bahwa terdapat tiga tipe perbedaan fundamental pada matematika (Tall, 2004). Ketiga tipe tersebut membagi matematika menjadi tiga dunia sebagai berikut.

a) Dunia pertama

Dunia berpikir wujud disebut dengan “*conseptual-embodied world*” atau “*embodied world*”. Belajar matematika mulai dari persepsi berpikir yaitu apa yang di terima dan dirasa baik fisik maupun nonfisik seperti mental atau pikiran atau perasaan.

b) Dunia kedua

Dunia berpikir simbolik disebut dengan “*proceptual-symbolic world*” atau “*proceptual world*”. Belajar matematika mulai dari aksi (seperti penjumlahan dan penghitungan), pembentukan konsep dengan menggunakan simbol, sampai proses yang dipikirkan.

c) Dunia ketiga

Dunia berpikir formal disebut dengan “*formal-axiomatic world*” atau “*formal world*”. Belajar matematika dimulai dari sifat-sifat yang dinyatakan dalam bentuk definisi formal yang digunakan sebagai aksioma.

## 2. Indikator Teori Tiga Dunia Matematika

Aspek teori tiga dunia matematika berdasarkan teori tiga dunia berpikir matematis dikategorikan menjadi tiga yaitu pertama, berpikir wujud (*embodied world world*) merupakan berpikir yang melibatkan siswa dalam penggunaan objek konkret, gerakan, dan gambar baik secara nyata maupun sekedar dibayangkan berdasarkan bayangan konsep dalam persoalan matematika. Kedua, berpikir simbolik (*proceptual-proceptual-symbolic world world*) yang merupakan berpikir dengan melibatkan visualisasi perpaduan antara gambar dan simbol, pada dunia kedua siswa mulai aksi (seperti penjumlahan dan perhitungan), pembentukan konsep dengan menggunakan simbol sampai proses yang dipikirkan. Selanjutnya ketiga, berpikir formal (*formal world*) yang melibatkan siswa dalam penggunaan definisi konsep dan sistem deduktif aksiomatik dalam matematika. Berikut dijelaskan secara rinci pada Tabel 2.2.

**Tabel 2.2 Indikator Teori Tiga Dunia Matematika**

Teori Tiga Dunia Matematika	Indikator
Dunia berpikir wujud	<ul style="list-style-type: none"> <li>a. Siswa berpikir dengan melihat gambaran dari objek konkret dan gerakan</li> <li>b. Siswa dapat merefleksikan sifat-sifat dari persepsi objek konkret</li> <li>c. Siswa membayangkan objek konkret, gerakan dan gambar dalam pikirannya</li> <li>d. Siswa dapat mewujudkan figur geometris</li> <li>e. Siswa dapat menganalisis dan mendeskripsikan konsep secara verbal</li> </ul>
Dunia berpikir simbolik	<ul style="list-style-type: none"> <li>a. Siswa berpikir melibatkan visualisasi pada simbol</li> <li>b. Siswa memulai untuk menghitung dan mengukur</li> <li>c. Siswa dapat merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika</li> </ul>

Dunia berpikir formal	<ul style="list-style-type: none"> <li>a. Siswa berpikir dengan menggunakan definisi konsep dan aksioma atau bukti matematika</li> <li>b. Siswa dapat memuculkan pengalaman dengan objek beserta sifat-sifatnya.</li> </ul>
-----------------------	---

### 3. Indikator Proses Berpikir berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika

Proses berpikir dalam belajar matematika dapat membentuk daya pikir menjadi lebih maju dan berkualitas. Dalam penelitian ini terdapat 3 langkah proses berpikir siswa yaitu pembentukan pengertian, pembentukan pendapat serta penarikan kesimpulan. Selanjutnya, proses berpikir diteliti menggunakan teori Tiga Dunia Matematika dari David Tall. Dunia pertama yaitu dunia perwujudan-konsep yang cara berpikir siswa melibatkan penggunaan objek konkret, persepsi atau gambaran dari objek yang dilihat pada soal kemudian menuangkan gambaran tersebut ke dalam pikiran melalui konsep. Dunia berpikir selanjutnya yang disebut simbolis-proseptual merupakan tindak lanjut dari dunia berpikir perwujudan melalui tindakan (menghitung) dan disimbolkan kembali. Dunia berpikir yang ketiga yaitu dunia formal-aksiomatik dengan menggunakan definisi-definisi dan aksioma. Berdasarkan Tabel 2.1 dan Tabel 2.2 didapatkan keterkaitan indikator perilaku siswa antara proses berpikir dengan teori tiga dunia matematika. Berikut dijelaskan secara rinci pada Tabel 2.3.

**Tabel 2.3 Indikator Proses Berpikir berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika**

Proses Berpikir	Pembentukan Pengertian	Pembentukan Pendapat	Penarikan Kesimpulan
<b>Tiga Dunia Berpikir Matematika</b>			
<b>Dunia pertama berpikir wujud (<i>Embodied world</i>)</b>	a. Siswa berpikir untuk memahami soal dengan melihat gambaran dari objek konkret dan gerakan	a. Siswa mencoba berpikir untuk mencari solusi dengan melihat gambaran dari objek konkret dan gerakan b. Siswa mengaitkan	a. Siswa memeriksa ketepatan perhitungan dengan melihat gambaran dari objek konkret dan
<b>(berpikir yang melibatkan wujud,</b>			

gambar konkret)	<p>b. Siswa menganalisis data pada soal dengan merefleksikan sifat-sifat dari persepsi objek konkret</p> <p>c. Siswa menyusun informasi yang diketahui dan yang ditanyakan dengan membayangkan dalam pikirannya dan mewujudkan figur geometris</p> <p>d. Siswa berpikir untuk mencoba menguraikan data dengan cara melibatkan objek konkret, gerakan, dan gambar baik secara nyata dalam matematika maupun sekedar dibayangkan serta mengungkapkan dengan kalimatnya sendiri</p> <p>e. Siswa ingin menyelesaikan soal dengan mendeskripsikan konsep secara verbal</p> <p>a. Siswa berpikir untuk memahami soal dengan melibatkan visualisasi pada simbol</p>	<p>materi yang sudah diperoleh dengan merefleksikan sifat-sifat dari persepsi objek konkret</p> <p>c. Siswa mendapatkan ide saat membayangkan dalam pikirannya untuk menyelesaikan soal tersebut dan diwujudkan ke figur geometris</p> <p>d. Siswa memiliki alasan logis setiap langkah penyelesaian</p> <p>e. Siswa dapat menggunakan informasi yang telah mereka peroleh sebelumnya dengan mengaitkan gambar-gambar, objek konkret, baik nyata maupun sekedar dibayangkan dalam persoalan matematika</p> <p>f. Siswa mensubstitusi data ke dalam rumus</p> <p>g. Siswa menyelesaikan soal dengan mendeskripsikan konsep secara verbal sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar</p> <p>a. Siswa mencoba berpikir untuk mencari solusi dengan melibatkan visualisasi pada simbol</p>	<p>gerakan</p> <p>b. Siswa mengecek kesesuaian alasan setiap langkah pengerjaan dengan membayangkan dalam pikirannya dan mewujudkan figur geometris</p> <p>c. Siswa mengecek kesesuaian langkah menyelesaikan soal yang dibayangkan dalam pikirannya dan diwujudkan ke figur geometris atau ke dalam bentuk gambar matematika</p> <p>d. Siswa meyakini kebenaran jawabannya</p> <p>e. Siswa menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya dengan mendeskripsikan konsep secara verbal</p> <p>a. Siswa memeriksa ketepatan perhitungan dengan melibatkan visualisasi pada simbol</p>
<b>Dunia kedua berpikir simbolik (Proceptual-symbolic world)</b>			

**Lanjutan Tabel 2.3.**

<b>Proses Berpikir</b> <b>Tiga Dunia Berpikir Matematika</b>	<b>Pembentukan Pengertian</b>	<b>Pembentukan Pendapat</b>	<b>Penarikan Kesimpulan</b>
<b>Dunia kedua berpikir simbolik (Proceptual-symbolic world)</b> <b>(Berpikir yang melibatkan visualisasi)</b>	<p>b. Siswa menganalisis data pada soal dengan memulai untuk menghitung dan mengukur</p> <p>c. Siswa menyusun informasi yang</p>	<p>b. Siswa mengaitkan materi yang sudah diperoleh dengan memulai untuk menghitung dan mengukur</p> <p>c. Siswa mendapatkan ide pada saat</p>	<p>b. Siswa mengecek kesesuaian alasan setiap langkah pengerjaan dengan memulai untuk menghitung dan mengukur</p>

<b>perpaduan antara gambar dan simbol-simbol matematika)</b>	diketahui dan yang ditanyakan	menyelesaikan soal tersebut dengan memvisualisasi menggunakan simbol matematika	c. Siswa mengecek kesesuaian langkah menyelesaikan soal yang dinyatakan dalam bentuk simbol matematika
	d. Siswa berpikir untuk mencoba menguraikan data dengan cara melibatkan visualisasi pada simbol matematika serta mengungkapkan dengan kalimatnya sendiri	d. Siswa memiliki alasan logis setiap langkah penyelesaian	d. Siswa meyakini kebenaran jawabannya
<b>Dunia ketiga berpikir formal (Formal)</b>  <b>(berpikir yang melibatkan siswa dalam penggunaan definisi konsep dalam matematika)</b>	e. Siswa ingin menyelesaikan soal dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika	e. Siswa dapat menggunakan informasi yang telah mereka peroleh sebelumnya dengan memvisualisasikan ke simbol dalam persoalan matematika	e. Siswa menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika
	a. Siswa berpikir untuk memahami soal dengan menggunakan definisi konsep dan aksioma atau bukti matematika	f. Siswa mensubstitusi data ke dalam rumus	g. Siswa dapat menyelesaikan soal dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar
	b. Siswa berpikir untuk memahami soal dengan menggunakan definisi konsep dan aksioma atau bukti matematika	a. Siswa mencoba berpikir untuk mencari solusi dengan menggunakan definisi konsep dan aksioma atau bukti matematika	b. Siswa memeriksa ketepatan perhitungan dengan menggunakan definisi konsep dan aksioma atau bukti matematika

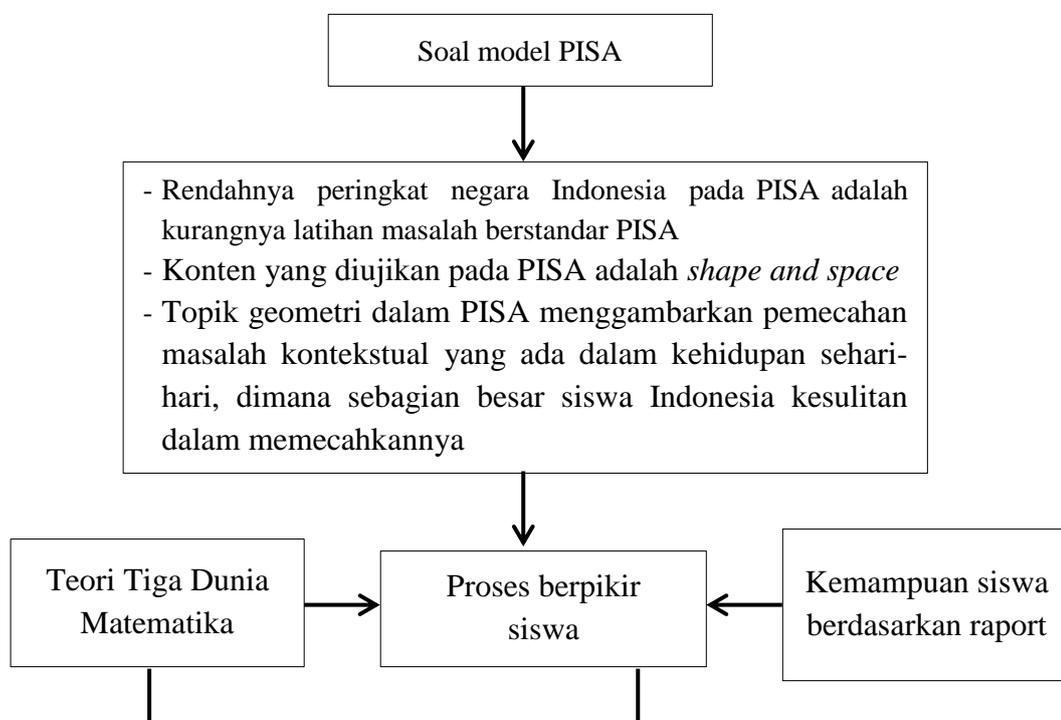
**Lanjutan Tabel 2.3.**

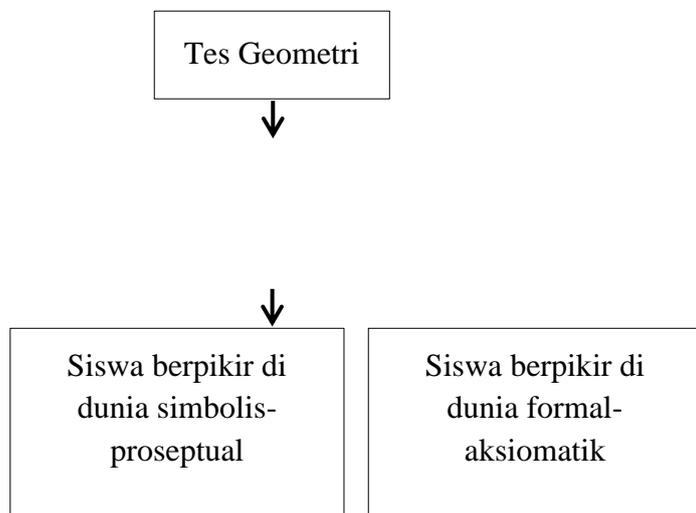
<b>Proses Berpikir</b>  <b>Tiga Dunia Berpikir Matematika</b>	<b>Pembentukan Pengertian</b>	<b>Pembentukan Pendapat</b>	<b>Penarikan Kesimpulan</b>
<b>Dunia ketiga berpikir formal (Formal)</b>  <b>(berpikir yang melibatkan siswa dalam penggunaan</b>	c. Siswa menganalisis data pada soal dengan memunculkan pengalaman pada objek beserta sifat-sifatnya	c. Siswa mengaitkan materi yang sudah diperoleh dengan memunculkan pengalaman pada objek beserta sifat-sifatnya	c. Siswa mengecek kesesuaian alasan setiap langkah pengerjaan dengan memunculkan pengalaman pada objek beserta
<b>penggunaan</b>	d. Siswa menyusun	d. Siswa mendapatkan ide pada saat menyelesaikan soal tersebut dengan	

<b>definisi konsep dalam matematika)</b>	informasi yang diketahui dan yang ditanyakan	menggunakan definisi konsep dalam matematika	sifat-sifatnya
	e. Siswa berpikir untuk mencoba menguraikan data dengan cara melibatkan penggunaan definisi konsep dalam matematika serta mengungkapkan dengan kalimatnya sendiri	e. Siswa memiliki alasan logis setiap langkah penyelesaian	d. Siswa mengecek kesesuaian langkah menyelesaikan soal yang dinyatakan dalam bentuk definisi konsep persoalan matematika
	f. Siswa ingin menyelesaikan soal	f. Siswa dapat menggunakan informasi yang telah mereka peroleh sebelumnya dengan mengaitkan konsep-konsep yang ada dalam matematika	e. Siswa meyakini kebenaran jawabannya
		g. Siswa mensubstitusi data ke dalam rumus	f. Siswa menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya
		h. Siswa menyelesaikan soal dengan langkah-langkah yang runtut dan benar	

### E. Kerangka Berpikir

Kerangka berpikir dalam penelitian ini menggunakan teori Tiga Dunia Berpikir Matematika (*Three Worlds of Mathematical Thinking*) yakni (1) dunia berpikir wujud (*embodied world*), (2) dunia simbolik (*proceptual-symbolic world*) dan (3) dunia berpikir formal (*formal*). Teori tersebut digunakan untuk memecahkan masalah pada soal PISA konten *space and shape*, khususnya pada topik geometri. Ketika menyelesaikan masalah tersebut melalui 3 langkah proses berpikir yaitu, pembentukan pengertian, pembentukan pendapat, dan penarikan kesimpulan. Berikut dijelaskan kerangka berpikir dalam Bagan 2.1.





**Bagan 2.1 Kerangka Berpikir**

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

#### **A. Pendekatan dan Jenis Penelitian**

Pendekatan dalam penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan jenis penelitiannya yaitu penelitian deskriptif. Menurut Bogdan dan Taylor, penelitian kualitatif adalah penelitian yang menghasilkan data deskriptif berupa kata-kata tertulis atau lisan dari orang-orang dan perilaku yang diamati. Penelitian deskriptif adalah metode penelitian yang berusaha menggambarkan objek atau subjek yang diteliti sesuai dengan fakta yang ada, dengan tujuan menggambarkan secara sistematis fakta dan karakteristik objek yang diteliti secara tepat. Sehingga dapat disimpulkan bahwa penelitian kualitatif deskriptif adalah penelitian yang menghasilkan data deskriptif berupa kata-kata yang menggambarkan keadaan dari subjek yang diteliti.

Alasan peneliti menggunakan pendekatan penelitian kualitatif deskriptif adalah peneliti akan meneliti obyek alamiah atau fakta-fakta yang terjadi di lapangan, selain itu peneliti ingin memperoleh data secara mendalam mengenai proses berpikir dalam menyelesaikan soal PISA pada topik geometri berdasarkan teori tiga dunia matematika. Fakta dicapai melalui pengkajian keterhubungan bukti-bukti dari beberapa sumber data, yaitu dokumen tes tertulis dan wawancara.

## **B. Data dan Sumber Data**

### **1. Data**

Data dalam penelitian ini adalah data terkait proses berpikir siswa dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri berdasarkan teori tiga dunia matematika. Adapun data yang dikumpulkan dalam penelitian ini berasal dari hasil tes soal model PISA, *think aloud* dan wawancara semi terstruktur.

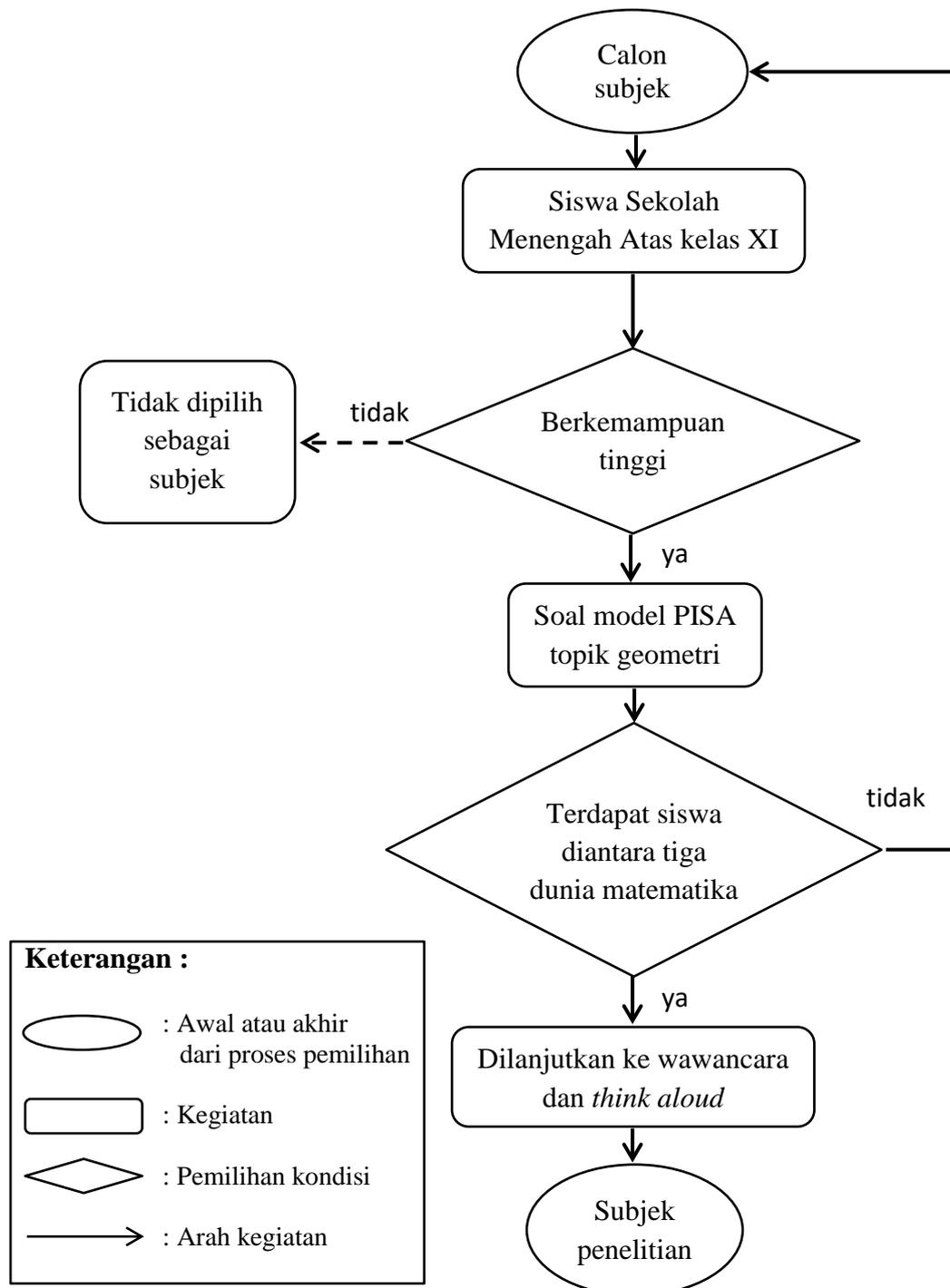
### **2. Sumber Data**

Subjek yang akan diteliti adalah siswa dengan berkemampuan tinggi. Pemilihan subjek dalam penelitian ini dibatasi 6 orang siswa Sekolah Menengah Atas. Berikut beberapa langkah-langkah dalam pemilihan subjek penelitian.

- a. Menjaring calon subjek berdasarkan pada nilai pengetahuan dan keterampilan matematika siswa yang tercantum dalam laporan pendidikan siswa (raport). Selanjutnya peneliti memilih subjek berkemampuan tinggi karena agar dapat memenuhi semua kriteria dari ketiga teori dunia matematika.
- b. Mengambil calon subjek penelitian menjadi subjek penelitian dengan mengelompokkan subjek berkemampuan tinggi.
- c. Peneliti membagikan tes geometri yang telah memenuhi soal model PISA dengan materi transformasi geometri kepada siswa sekolah menengah atas di kelas XI yang berkemampuan tinggi.
- d. Calon subjek yang memenuhi syarat sebagai subjek yaitu calon subjek yang telah menyelesaikan tes tersebut dengan indikator yang sesuai, maka

peneliti akan membatasi minimal 6 subjek untuk dikerjakan dengan *think aloud* untuk melihat proses berpikir subjek tersebut.

Untuk mempermudah penjelasan tentang penentuan subjek penelitian, dapat dilihat bagan alur pemilihan subjek sebagai berikut.



**Bagan 3.1 Pemilihan Subjek Penelitian**

### **C. Instrumen Penelitian**

Berdasarkan metode dan pendekatan yang akan dilakukan pada penelitian ini, instrumen penelitian yang digunakan sebagai berikut.

#### **1. Soal geometri**

Soal model PISA dengan topik soal geometri berbentuk uraian adalah soal yang diberikan kepada siswa untuk mendapatkan data yang akan di analisis menggunakan teori tiga dunia matematika

#### **2. Perintah *think aloud***

Perintah *think aloud* dalam penelitian ini dilakukan dengan menggunakan kamera rekaman untuk merekam semua peristiwa saat subjek mengikuti ujian seorang siswa berprestasi. Penelitian ini berdampak pada peneliti untuk menggali proses berpikir siswa dalam tes yang akan dianalisis menggunakan teori tiga dunia berpikir matematika.

#### **3. Pedoman wawancara semi terstruktur**

Wawancara semi terstruktur yang digunakan dalam penelitian ini untuk memperoleh data yang belum terungkap dari hasil tes dan *think aloud*

### **D. Teknik Pengumpulan Data**

Adapun teknik pengumpulan data yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut.

#### **1. Tes**

Pengumpulan data dengan memberikan lembar tes berupa soal model PISA pada topik geometri untuk mengetahui bagaimana siswa dalam

menyelesaikan masalah geometri yang akan dianalisis menggunakan teori tiga dunia matematika.

## **2. *Think aloud***

Data yang diperoleh dari siswa berkemampuan tinggi ditinjau dari kemampuan matematika berdasarkan nilai raport siswa. *Think aloud* dilakukan ketika siswa sedang menyelesaikan tes yang diberikan oleh peneliti untuk melihat proses berpikir dan hasil tes tersebut akan dianalisis menggunakan Teori Tiga Dunia Matematika. Ketika proses *think aloud*, peneliti menggunakan perekam suara untuk merekam pemikiran siswa secara verbal saat menyelesaikan tes geometri. Selanjutnya hasil rekaman *think aloud* dapat digunakan untuk memperkuat informasi yang diperoleh terkait proses berpikir dalam mengerjakan tes geometri tersebut.

## **3. Wawancara**

Wawancara adalah percakapan dengan alasan tertentu. Percakapan ini dilakukan oleh dua pihak, yaitu orang yang mengajukan pertanyaan dan orang yang diwawancarai, yang memberikan jawaban atas pertanyaan tersebut. Wawancara dalam penelitian ini menggunakan wawancara semi terstruktur, pewawancara dapat mengajukan pertanyaan dalam jumlah yang tidak terbatas, pertanyaan yang ditemukan data di sebelumnya tidak perlu ditanyakan secara konsisten dan menggunakan kata-kata standar, tergantung pada kondisi atau keadaan saat ini. Selama wawancara, peneliti mendengarkan dengan seksama dan mencatat apa yang dikatakan orang yang diwawancarai untuk mempelajari lebih lanjut tentang data yang tidak diketahui peneliti.

## E. Analisis Data

Analisis data pada data kualitatif penelitian ini menggunakan hasil tes, *think aloud* dan hasil wawancara. Data tersebut diproses dan disusun secara sistematis sehingga dapat dengan mudah dipahami, dan temuannya dapat diinformasikan kepada orang lain. Proses berpikir nantinya akan dinilai melalui modifikasi penilaian indikator proses berpikir dan hasil tes serta di analisis menggunakan teori tiga dunia matematika. Berikut dapat dilihat modifikasi pedoman untuk mengetahui proses berpikir siswa pada tabel berikut.

**Tabel 3.1 Pengkodean Indikator Proses Berpikir**

Tahapan Proses Berpikir	Kode
Pembentukan pengertian	PA
Pembentukan pendapat	PD
Penarikan kesimpulan	PK

Berdasarkan Tabel 3.1, peneliti akan menggunakan pedoman tabel untuk mengetahui proses berpikir siswa dalam proses menyelesaikan tes geometri dengan model PISA yang diberikan. Peneliti memberikan kode pada tahap pertama yakni tahap pembentukan pengertian di kodekan (PA). Untuk tahap kedua yakni tahap pembentukan pendapat di kodekan (PD). Dan tahap terakhir yakni tahap penarikan kesimpulan di kodekan (PK). Selanjutnya modifikasi indikator teori Tiga Dunia Matematika (TDM) disajikan pada Tabel 3.2.

**Tabel 3.2 Pengkodean Indikator Teori TDM**

Teori Tiga Dunia Matematika	Kode
Dunia berpikir wujud	Em
Dunia berpikir simbolik	Sim
Dunia berpikir formal	For

Berdasarkan tabel indikator teori tiga dunia matematika peneliti akan menggunakan kode untuk analisis hasil tes siswa untuk indikator pertama yakni berpikir wujud (*embodied world*) dikodekan (Em), indikator kedua yakni berpikir

simbolik (*symbolic world*) di kodekan (Sim), indikator ketiga yakni berpikir formal (*formal world*) dikodekan For. Dari Tabel 3.1 dan 3.2 dapat dihasilkan pengkodean pada Tabel 3.3.

**Tabel 3.3 Pengkodean Proses Berpikir Berdasarkan Teori TDM**

<b>Kegiatan Siswa</b>	<b>Kode</b>
Pembentukan pengertian secara <i>Embodied-conceptual</i>	PAEm
Pembentukan pengertian secara <i>Symbolic-proceptual</i>	PASim
Pembentukan pengertian secara <i>Formalism-Axiomatic</i>	PAFor
Pembentukan pendapat secara <i>Embodied-conceptual</i>	PDEm
Pembentukan pendapat secara <i>Symbolic-proceptual</i>	PDSim
Pembentukan pendapat secara <i>Formalism-Axiomatic</i>	PDFor
Pembentukan kesimpulan secara <i>Embodied-conceptual</i>	PKEm
Pembentukan kesimpulan secara <i>Symbolic-proceptual</i>	PKSim
Pembentukan kesimpulan secara <i>Formalism-Axiomatic</i>	PKFor

Selanjutnya data yang terkumpul tersebut dianalisis dengan menggunakan model Miles dan Huberman, yaitu reduksi data, proses pengkodean, penyajian data, dan penarikan kesimpulan atau verifikasi.

### **1. Reduksi Data**

Reduksi data dalam penelitian ini proses penggabungan segala bentuk data yang didapat di lapangan menjadi sebuah *script* yang selanjutnya dianalisis. Dari hasil rekaman wawancara, video diformat menjadi bentuk verbatim wawancara. Isi dari verbatim wawancara ini yakni proses wawancara terkait pertanyaan-pertanyaan yang sesuai pada penelitian. Sedangkan hasil video akan diformat dalam bentuk *script* untuk mendapatkan gambaran siswa visual bagaimana proses berpikir selama proses mengerjakan soal model PISA pada topik geometri.

### **2. Proses Pengkodean**

Dalam penelitian ini, peneliti memakai metode manual menggunakan menaruh kode-kode awal misalnya tabel indikator & urutan wawancara. Dalam proses pengkodean pada penelitian ini, peneliti mengumpulkan data berdasarkan

setiap keterangan yg diperoleh sinkron dengan tujuan penelitian. Hasil pengkodean nantinya akan dijelaskan & dijabarkan. Adapun saat paparan data terdapat beberapa koding dan satuan dalam penelitian ini yang dijelaskan pada Tabel 3.4.

**Tabel 3.4 Aturan Pengkodingan**

No.	Koding	Satuan
1	P	Peneliti
2	$S_i, i = 1,2,3,4,5,6$	Subjek Penelitian
3	$PA_i, i = 1,2,3,4,5$	Pembentukan pengertian
4	$PDi, i = 1,2,3,4,5,6,7$	Pembentukan pendapat
5	$PK_i, i = 1,2,3,4,5$	Penarikan kesimpulan
6	$Em_i, i = 1,2,3,4,5$	Dunia berpikir wujud
7	$Sim_i, i = 1,2,3$	Dunia berpikir simbolik
8	$For_i, i = 1,2$	Dunia berpikir formal
9	$T_i, i = 1,2,3, \dots$	<i>Think Aloud</i>
10	$Wi, i = 1,2,3, \dots$	Wawancara

### 3. Penyajian Data

Peneliti memaparkan data penelitian yang direduksi dan menguraikan rumusan masalah sehingga mendapatkan data yang akurat berupa proses berpikir siswa SMA dalam menyelesaikan masalah geometri berdasarkan teori Tiga Dunia Matematika.

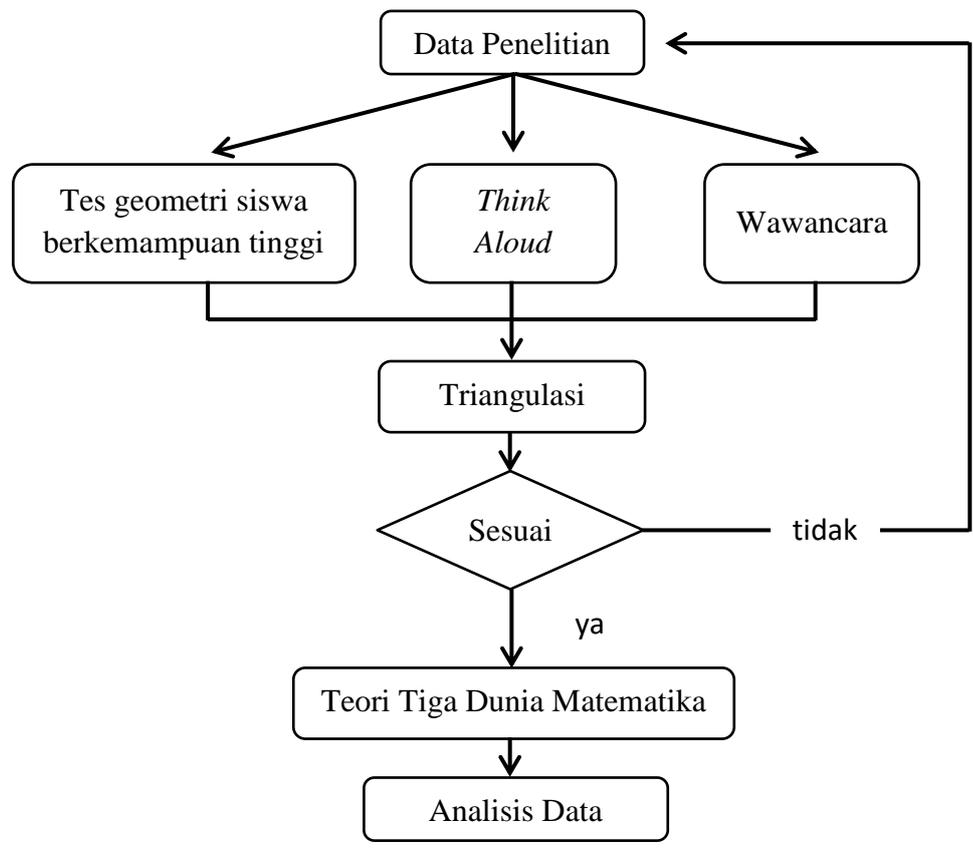
### 4. Penarikan Simpulan

Langkah yang terakhir yaitu penarikan kesimpulan dan verifikasi. Maksudnya adalah menarik kesimpulan dari data yang telah disajikan sebelumnya dalam bentuk teks naratif. Kesimpulan dalam penelitian ini merupakan jawaban dari fokus penelitian.

## F. Keabsahan Data

Setelah mengumpulkan data, selanjutnya dilakukan pengecekan keabsahan data dengan triangulasi. Triangulasi adalah teknik pemeriksaan

keabsahan data yang memanfaatkan sesuatu yang lain, di luar data itu untuk keperluan pengecekan atau sebagai pembanding terhadap data itu. Dalam penelitian ini dilakukan triangulasi metode. Triangulasi ini dilakukan dengan cara menggabungkan atau membandingkan informasi yang telah terkumpul sehingga data yang diperoleh benar-benar absah dan objektif. Dalam penelitian kualitatif peneliti menggunakan metode *Think Aloud*, untuk memperoleh kebenaran informasi yang benar dan sesuai. Dalam penelitian ini, peneliti juga bisa menggunakan metode wawancara untuk mengecek kebenarannya. Informasi yang diperoleh dari data hasil tes tertulis dan data hasil wawancara dikumpulkan untuk dijadikan penarikan kesimpulan. Pengecekan keabsahan data dapat dilihat pada Bagan 3.2 berikut.



**Bagan 3.2 Keabsahan Data**

## **G. Prosedur Penelitian**

Penelitian ini memiliki beberapa tahapan prosedur yakni :

1. Tahap persiapan, peneliti mempersiapkan keperluan untuk penelitian seperti mempersiapkan lokasi penelitian, subjek penelitian dan instrumen penelitian.
2. Tahap pelaksanaan, tahap pelaksanaan penelitian ini diawali dengan memberikan lembar tes soal PISA topik geometri untuk diselesaikan oleh siswa berkemampuan tinggi. Selama proses pengerjaan peneliti merekam semua gerak-gerik siswa untuk melihat proses berpikir dan menganalisis hasil jawaban siswa berdasarkan teori Tiga Dunia Matematika.
3. Tahap analisis data, data kemudian diurai sesuai dengan rumusan masalah sehingga mendapatkan data yang akurat berupa proses berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah geometri menggunakan teori Tiga Dunia Matematika.
4. Tahap penyusunan laporan, selanjutnya hasil analisis dibahas lebih mendalam hingga muncul kesimpulan dan membuat laporan hasil penelitian.

Setelah dilakukan beberapa tahapan prosedur penelitian, kemudian peneliti dapat mendeskripsikan tentang proses berpikir dalam menyelesaikan masalah geometri dengan menggunakan teori Tiga Dunia Matematika.

## BAB IV

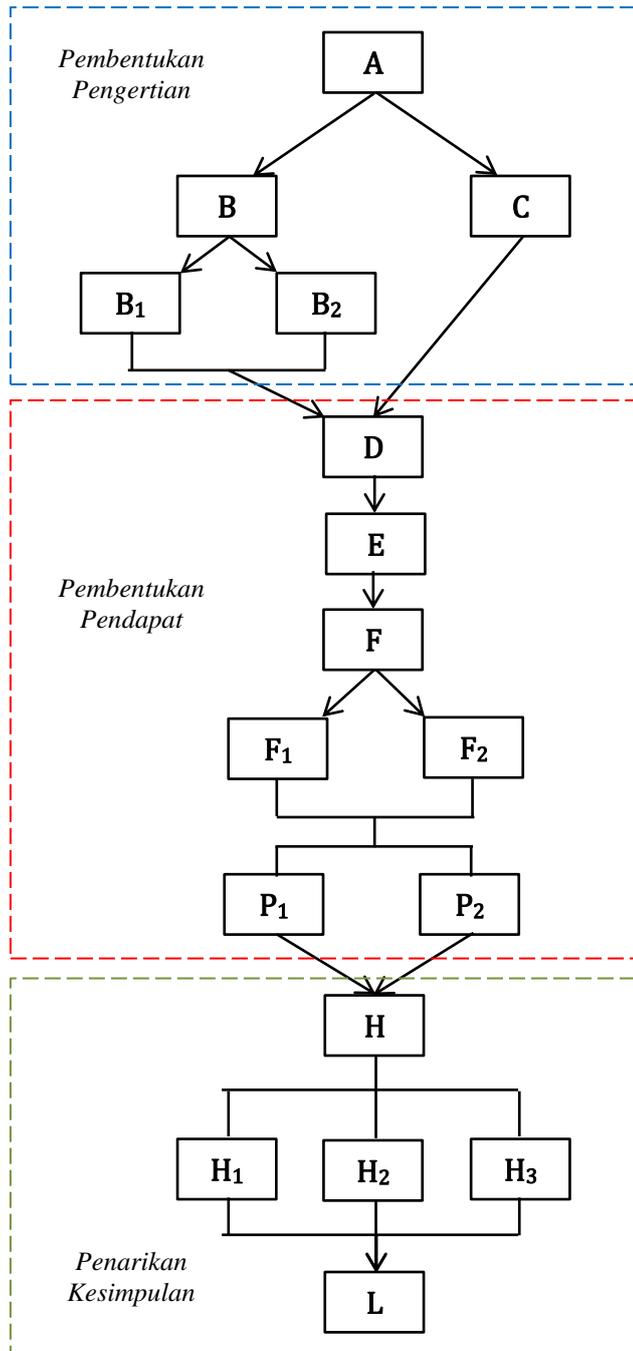
### PAPARAN DATA DAN HASIL PENELITIAN

#### A. Paparan Data

Pada bagian ini dipaparkan data hasil penelitian tentang proses berpikir siswa dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri berdasarkan teori tiga dunia matematika. Data pada penelitian ini diperoleh melalui kegiatan tes geometri yang disertai kegiatan *think aloud*. Selain itu peneliti juga melakukan wawancara semi terstruktur untuk menggali sekaligus melakukan verifikasi informasi yang berkaitan dengan tahapan proses berpikir subjek ketika menyelesaikan persoalan matematika. Dengan demikian data penelitian yang dimaksud adalah hasil tes geometri, hasil *think aloud*, dan hasil wawancara semi terstruktur.

Berdasarkan hasil jawaban subjek, peneliti menggambarkan jaringan ide berkaitan soal model PISA yang nantinya akan dilihat penjelasan alur penyelesaian masalah geometri berdasarkan ketiga dunia berpikir matematika. Subjek yang terpilih sebanyak 6 siswa berkemampuan tinggi dan kemudian akan dianalisis berdasarkan indikator proses berpikir siswa berdasarkan teori tiga dunia matematika.

Berikut susunan alur pengerjaan pada instrumen tes geometri (Lampiran 2) yang digunakan untuk mengamati proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA topik geometri pada Gambar 4.1.



Keterangan :

- A : Memahami masalah
- B : Informasi diketahui
- C : Informasi ditanya
- B<sub>1</sub> : Informasi diketahui koordinat awal ujung sorot lampu
- B<sub>2</sub> : Informasi diketahui koordinat titik pusat lampu sorot setiap detik
- D : Membuat permisalan
- E : Kecepatan rotasi lampu sorot setiap detik
- F : Menentukan titik awal dan titik pusat
- F<sub>1</sub> : Membuat grafik koordinat kartesius
- F<sub>2</sub> : Membuat garis dari 2 titik
- P<sub>1</sub> : Menggunakan matriks transformasi
- P<sub>2</sub> : Menggunakan definisi konsep
- H : Menentukan titik bayangan
- H<sub>1</sub> : Menggunakan busur
- H<sub>2</sub> : Menentukan nilai persamaan matriks
- H<sub>3</sub> : Menentukan nilai fungsi
- L : Menentukan nilai kesimpulan
- → : Alur berpikir subjek
- □ : Langkah subjek

**Gambar 4.1 Struktur Masalah**

Selanjutnya data penelitian terkait proses berpikir subjek berkemampuan tinggi dipaparkan secara rinci melalui tahapan proses berpikir

siswa berdasarkan teori tiga dunia matematika dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri dijabarkan sebagai berikut :

## 1. Paparan data S1

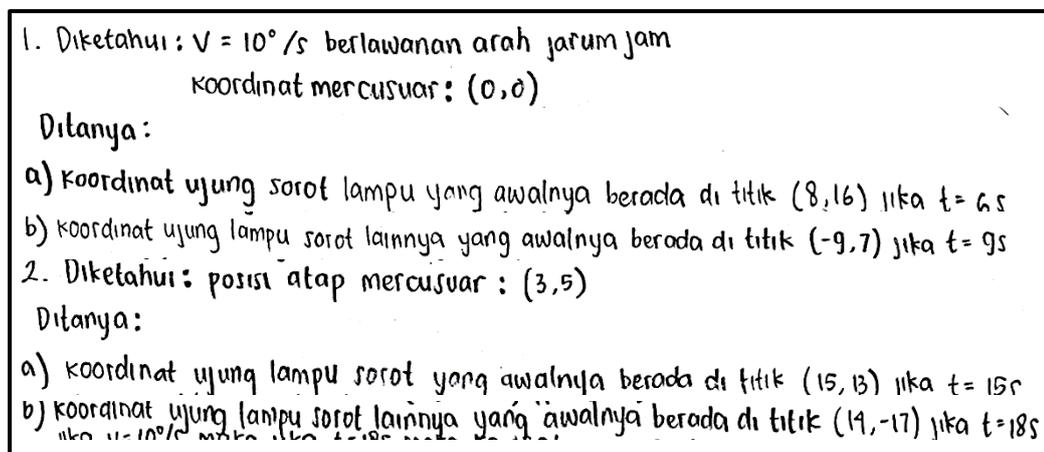
Berikut paparan data terkait subjek 1 (S1) terkait proses berpikir siswa berdasarkan teori tiga dunia matematika.

### a. Tahap Pembentukan Pengertian

Pada tahap ini subjek mengalami kebingungan, karena soal yang ada pada tes belum pernah didapat selama di kelas. Subjek berusaha untuk memahami soal (PA1) dengan cara membaca berulang kali dan mencoba mengingat dan menanyakan ke peneliti terkait materi yang digunakan dalam tes geometri (PA2) dari hasil *think aloud* berikut.

*“Haduh soal apa yaa ini, kok kayak beda sama yang diajarin yaa. Ini tentang apa ya kak ? sebentar, ini yang diketahui ada kecepatan, posisi atap mercusuar terus diminta mencari koordinat ujung sorot lampu (sambil terus membaca berulang kali serta menuliskan informasi yang ada pada soal)” (T1S1)*

Berdasarkan usaha S1 diatas menunjukkan setelah proses awal agar dapat memahami maksud tes geometri tersebut serta mencoba menuliskan informasi apa saja yang didapatnya seperti pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2 Hasil Kerja S1 pada Tahap Pembentukan Pengertian

Setelah S1 membaca soal yang diberikan dengan seksama, selanjutnya menuliskan informasi yang diketahui dan yang ditanyakan pada soal. S1 menuliskan arah perputaran lampu sorot bergerak berlawanan arah jarum jam dan kecepatan ( $v$ ) rotasi lampu  $10^\circ$  perdetik ( $10^\circ/s$ ) (**PA3Sim1**). Selain itu menuliskan apa yang diminta dalam soal dengan menentukan bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah beberapa detik dengan titik awal dan titik menara mercusuar sebagai titik pusatnya. Kegiatan S1 pada tahap pembentukan pengertian ini dapat diamati dari hasil wawancara (**W1S1**) berikut.

P : *Apa yang kamu lakukan setelah menerima lembar soal ini ?*

S1 : *saya baca berulang kali, soalnya itu beda sama yang diajarin di kelas kak*

P : *Jadi bagaimana kamu mengerti maksud soal ini ?*

S1 : *awalnya susah kak, karena ndak pernah dapat soal cerita seperti ini, jadi bingung mau ngapain.*

P : *Ketika kamu membaca membaca soal ini, apakah kamu paham apa yang dimaksud dan apa yang diminta dari soal ini?*

S1 : *kalau membaca soal itu, bingung maksud soalnya itu kayak gimana*

P : *bagaimana langkah awal kamu untuk menyelesaikan ini ?*

S1 : *saya tulis apa yang diketahui dan ditanyakan terlebih dahulu, dan yang diketahui kecepataannya dan titik koordinatnya. Jadi kalau yang nomor 1 letak menara mercusuar berada di titik 0,0 dan yang ditanyakan ujung sorot lampu setelah 6 dan 9 detik, sedangkan yang nomor 2 letak menara mercusuar berada di titik 3,5 dan yang ditanyakan ujung sorot lampu setelah 15 dan 18 detik (**PA4**).*

Berdasarkan hasil T1S1, Gambar 4.2 dan W1S1, stigma awal S1 menganggap tes geometri ini susah akhirnya dapat memahami maksud soal dengan melibatkan visualisasi pada simbol serta menguraikan dengan kalimatnya sendiri dengan menyusun informasi yang diketahui dan yang ditanyakan (**PASim**). S1 dapat menganalisis data pada soal sesuai dengan W1S1 bahwa informasi yang ditanyakan yaitu bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah 6 dan 9 detik dengan titik pusat (0,0) serta bayangan koordinat ujung sorot lampu

setelah 15 dan 18 detik dengan titik pusat (3,5) Sehingga S1 dapat melanjutkan menyelesaikan permasalahan dengan informasi yang ada (**PA5**).

Adapun pengkodean S1 pada tahap pembentukan pengertian dipaparkan pada Tabel 4.1.

**Tabel 4.1 Pengkodean S1 pada Pembentukan Pengertian**

No.	Perilaku	Keterangan
1	PA1	Mampu memahami soal
2	PA2	Mampu menganalisis data pada soal
3	PA3Sim1	Mampu menyusun informasi yang diketahui dan ditanyakan dengan menggunakan simbol matematika
4	PA4	Mampu mengungkapkan dengan kalimatnya sendiri
5	PA5	Ada rasa ingin menyelesaikan soal

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.1, proses berpikir berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat dihasilkan pengkodean sebagai berikut.

**Tabel 4.2 Hasil Pengkodean S1 pada Pembentukan Pengertian**

Kode	Kegiatan Siswa
PASim	Pembentukan pengertian secara <i>Symbolic-proceptual</i>

#### **b. Tahap Pembentukan Pendapat**

Pada tahap ini, S1 berpikir untuk menjelaskan solusi dengan melibatkan visualisasi pada simbol (**PD1Sim1**) dan menganalisis informasi yang diketahui pada soal dengan memulai menghitung. S1 mendapatkan ide (**PD3**) dan mengaitkan materi transformasi geometri dengan melihat buku catatannya (**PD2**). Hal ini diperkuat dengan wawancara (**W2S1**) berikut.

P : Apakah ada kaitannya materi pada soal dengan materi yang telah kamu pelajari ?

S1 : ada kak, tentang rotasi

Setelah S1 mengetahui kesesuaian materi terhadap soal, S1 dapat menghitung penyelesaiannya dengan menggunakan matriks transformasi

geometri (PD2Sim2). Berdasarkan informasi yang diketahui, S1 menjelaskan titik-titik koordinat ujung sorot lampu tersebut dirotasikan pada titik-titik pusat tertentu sehingga memperoleh titik koordinat bayangan (PD4). Sehingga penjabaran alasan S1 sebagai berikut.

jika  $v = 10^\circ/s$  maka jika  $t = 6s$ , maka kecepatannya  $60^\circ/s$   
 jika  $v = 10^\circ/s$  maka jika  $t = 9s$  maka kecepatannya  $90^\circ/s$   
 jika  $v = 10^\circ/s$  maka jika  $t = 15s$  maka kecepatannya  $150^\circ/s$   
 jika  $v = 10^\circ/s$  maka jika  $t = 18s$  maka kecepatannya  $180^\circ/s$

**Gambar 4.3 Penjabaran Alasan S1 pada Tahap Pembentukan Pendapat**

Berdasarkan Gambar 4.3 diperkuat juga saat diwawancarai oleh peneliti, S1 mengutarakan alasan logis di setiap langkah penyelesaiannya secara cepat yang dapat dilihat dari hasil *think aloud* berikut.

“Jika kecepatan rotasi lampu sorot setiap 1 detik sebesar  $10^\circ$ , maka saat 6 detik sebesar  $6 \times 10^\circ = 60^\circ$ , sehingga dapat menyatakan dengan persamaan matriks sejauh  $60^\circ$  begitupun dengan nomor 1 opsi B. Sedangkan nomor 2 (sambil berpikir apa yang membedakan) dengan titik menara mercusuar yang berbeda tetapi cara penghitungan sudut yang dicari sama.” (T2S1)

Pada tahap pembentukan pendapat dari hasil W2S1, Gambar 4.3 dan T2S1 nampak bahwa S1 telah mencoba mencari solusi dengan mengaitkan materi yang sudah diperoleh. S1 mengutarakan bahwa untuk mendapatkan sudut ( $\alpha$ ) dalam merotasikan titik yang diminta dengan mengalikan antara kecepatan ( $v$ ) rotasi lampu sorot dengan waktu ( $t$ ) yang diketahui pada soal. Jika  $v = 10^\circ/s$  maka saat  $t = 6s$  diperoleh  $\alpha = 6 \times 10^\circ/s = 60^\circ$ ; Jika  $v = 10^\circ/s$  maka saat  $t = 9s$  diperoleh  $\alpha = 9 \times 10^\circ/s = 90^\circ$ ; Jika  $v = 10^\circ/s$  maka saat  $t = 15s$  diperoleh  $\alpha = 15 \times 10^\circ/s = 150^\circ$ ; Jika  $v = 10^\circ/s$  maka saat  $t = 18s$

diperoleh  $\alpha = 180^\circ/s = 180^\circ$ . Selanjutnya subjek mengutarakan informasi yang telah diperoleh dengan mensubstitusi data ke dalam rumus persamaan matriks transformasi geometri (PD6) seperti Gambar 4.4.

<p>1a</p> $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 8\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} + 8 \end{pmatrix}$ <p>2a</p>	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 - 3 \\ -17 - 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -11 \\ 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 27 \end{pmatrix}$
<p>b</p> $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \end{pmatrix}$ <p>b</p>	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 - 3 \\ 13 - 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -6\sqrt{3} - 4 \\ 6 - 4\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sqrt{3} - 1 \\ 11 - 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$

**Gambar 4.4 Hasil Kerja S1 pada Tahap Pembentukan Pendapat**

Hasil jawaban S1 (Gambar 4.4) dapat diperkuat kembali dari hasil wawancara (W3S1) berikut.

- P : *Bagaimana langkah-langkah kamu untuk mencari solusinya ?*
- S1 : *Ini kan kecepatannya 10° per detik, jadi kalo t nya 6 detik berarti kecepatannya 60°. Karna 10x6. Dimasukkan rumusnya ke rotasi (matriks transformasi). Ini kan (x, y) pake titik sorot lampu awalnya. Yang B juga begitu tinggal mengganti yang 9x10 jadi 90°. Yang nomer 2 juga sama, karna ini 15 detik jadi sudut nya 150°. Terus karna posisi atas mercusuar nya (3,5) dan ujung lampu sorot (15,13). Jadi (15,13) ditaruh di depan terus dikurangi posisi atap mercusuar nya (PD5Sim2).*
- P : *Terus bagaimana cara menghitung kamu untuk mendapatkan titik koordinat ini ?*
- S1 : *jadi ini kan bentuk matriks ya kak, yaa berarti cara nya seperti yang sudah diajarkan sewaktu materi matriks kak*

Dari hasil data jawaban siswa (Gambar 4.4) dan hasil wawancara (W3S1) memiliki kesamaan yang menunjukkan bahwa S1 dapat berpikir menggunakan informasi yang diperoleh dengan memvisualisasikan ke simbol dalam persoalan matematika. Hal ini dikarenakan S1 dapat merepresentasikan

data ke dalam simbol matematika yaitu titik koordinat awal ujung sorot lampu  $P(x,y) = (8,16); (-9,7); (15,13); (14,-17)$  dirotasikan pada  $O(0,0)$  dan  $O(3,5)$  sejauh  $\alpha = 60^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 180^\circ$  maka memperoleh titik  $P'(x',y')$ . Sehingga S1 mampu menyelesaikan soal sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar (**PD7Sim 3**).

Adapun pengkodean S1 pada tahap pembentukan pendapat dipaparkan pada Tabel 4.3.

**Tabel 4.3 Pengkodean S1 pada Pembentukan Pendapat**

No.	Perilaku	Keterangan
1	PD1Sim1	Mampu mencari solusi dengan melibatkan visualisasi pada simbol
2	PD3	Mendapatkan ide saat menyelesaikan soal
3	PD2	Dapat mengaitkan materi yang sudah diperoleh
4	PD2Sim2	Mampu mengaitkan materi yang telah diperoleh dengan memulai untuk menghitung
5	PD4	Mampu mengungkapkan alasan logis di setiap langkah penyelesaian
6	PD6	Mampu menyubstitusi data ke dalam rumus
7	PD5Sim2	Dapat menghitung informasi yang telah diperoleh sebelumnya
8	PD7Sim3	Mampu menyelesaikan soal dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.3, proses berpikir berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat dihasilkan pengkodean sebagai berikut.

**Tabel 4.4 Hasil Pengkodean S1 pada Pembentukan Pendapat**

Kode	Kegiatan Siswa
PDSim	Pembentukan pendapat secara <i>Symbolic-proceptual</i>

### c. Tahap Penarikan Kesimpulan

Setelah melalui proses pengerjaan dan menemukan solusi penyelesaian, S1 ini tidak melakukan pengecekan kembali akan tetapi sudah meyakini

kebenaran jawabannya (PK4). Hal ini dapat dilihat dari hasil wawancara (W4S1) berikut.

P : Setelah mendapatkan hasilnya, apakah kamu memeriksa kembali jawaban atas ketepatan perhitungannya?

S1 : endak kak

P : apakah jawaban kamu sudah sesuai dengan apa yang diketahui dan ditanyakan pada soal ?

S1 : iya kak sesuai

P : Apakah kamu yakin langkah-langkah kamu sesuai dengan hasil jawabannya ?

S1 : yakin kak, tapi saya sempat ragu karna ada jawabannya yang berbentuk akar

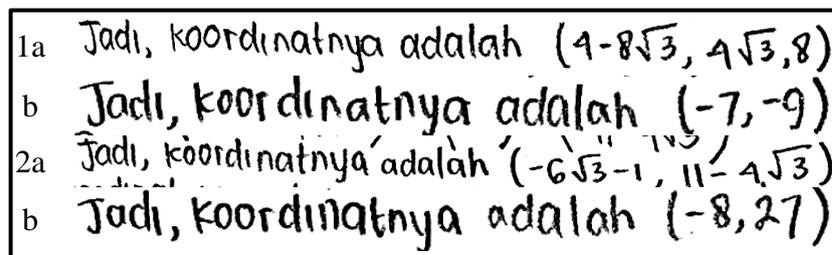
P : terus bagaimana ?

S1 : yaa tetap saya biarkan dalam bentuk akar seperti itu

Dari hasil wawancara (W4S1) subjek sempat ragu dengan jawaban yang diperoleh seperti yang diutarakan dalam *think aloud* berikut.

“setelah mengerjakan ini itu kayak gini oh kayak gini cara mengerjakan, dan yang opsi B itu lebih gampang karna ndak ada akar akarnya. Terus yang 1a sama cara nya yang kayak 2a.” (T3S1)

Berikut hasil kesimpulan S1 dituliskan ke dalam lembar jawaban.



1a Jadi, koordinatnya adalah  $(4-8\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 8)$   
b Jadi, koordinatnya adalah  $(-7, -9)$   
2a Jadi, koordinatnya adalah  $(-6\sqrt{3}-1, 11-4\sqrt{3})$   
b Jadi, koordinatnya adalah  $(-8, 27)$

Gambar 4.5 Hasil Kerja S1 pada Tahap Penarikan Kesimpulan

Hal ini diperkuat kembali melalui wawancara (W5S1) berikut.

P : Bagaimana kesimpulan yang kamu dapat dari hasil pekerjaanmu ?

S1 : yaa jadi perlakuan dari nomor 1 dan 2 itu berbeda, memiliki rumus yang berbeda. Terkhusus pada titik pusat ada yang  $(0, 0)$  dan  $(3, 5)$  (PK5).

Subjek menyebutkan dari hasil W5S1 bahwa rumus matriks transformasi yang digunakan ada perbedaan dikarenakan posisi atap menara

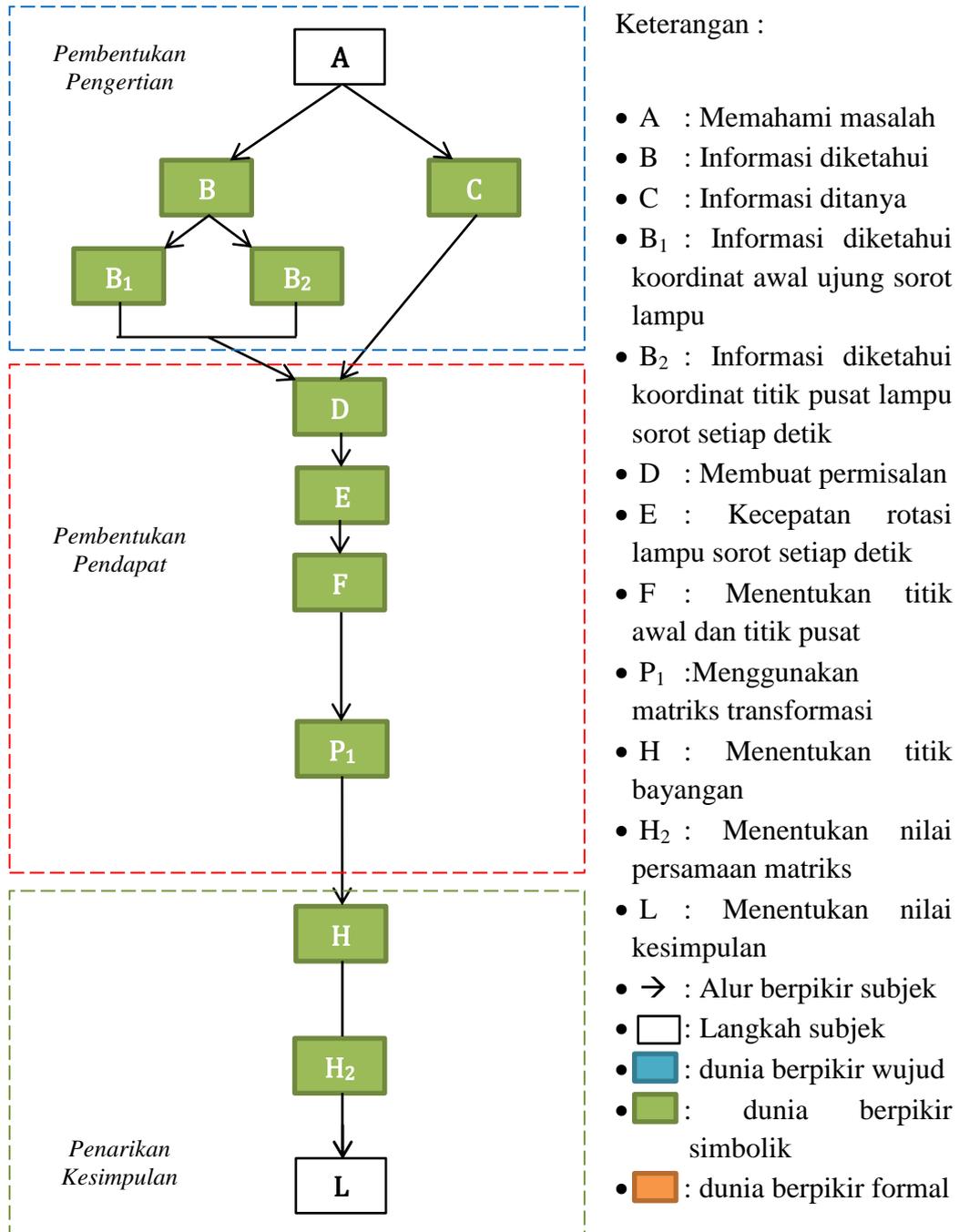
mercusuar. Berdasarkan hasil W4S1, Gambar 4.5 dan T3S1 terdapat kesamaan bahwa S1 tidak memeriksa ketepatan perhitungan akan tetapi telah mengecek kesesuaian setiap langkah penyelesaian yang mengatakan rumus rotasi untuk nomor 1 berbeda dengan nomor 2 dikarenakan ada perbedaan titik koordinat pusatnya. Selanjutnya S2 menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya yaitu koordinatnya menjadi  $(4 - 8\sqrt{3}, 4\sqrt{3} + 8); (-7, -9); (-6\sqrt{3} - 1, 11 - 4\sqrt{3}); (-8, 27)$ . Proses berpikir yang dilalui S1 ini yaitu berpikir secara *symbolic*.

Adapun pengkodean S1 pada tahap penarikan kesimpulan dipaparkan pada Tabel 4.5.

**Tabel 4.5 Pengkodean S1 pada Penarikan Kesimpulan**

No.	Perilaku	Keterangan
1	PK4	Telah meyakini kebenaran jawabannya
2	PK5	Mampu menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.2, 4.4 dan 4.5, dapat disimpulkan bahwa proses berpikir S1 dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri cenderung ke dalam dunia kedua berpikir simbolik. Dunia berpikir simbolis-proseptual dilalui oleh S1 dikarenakan semua tahapan proses berpikirnya langsung melalui tindakan berupa menghitung, pembentukan konsep dengan menggunakan simbol tanpa menuangkan gambaran dari pemikirannya. Paparan data tentang proses berpikir S1 berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat ditunjukkan pada Gambar 4.6.



**Gambar 4.6** Proses Berpikir S1 berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika

## 2. Paparan data S2

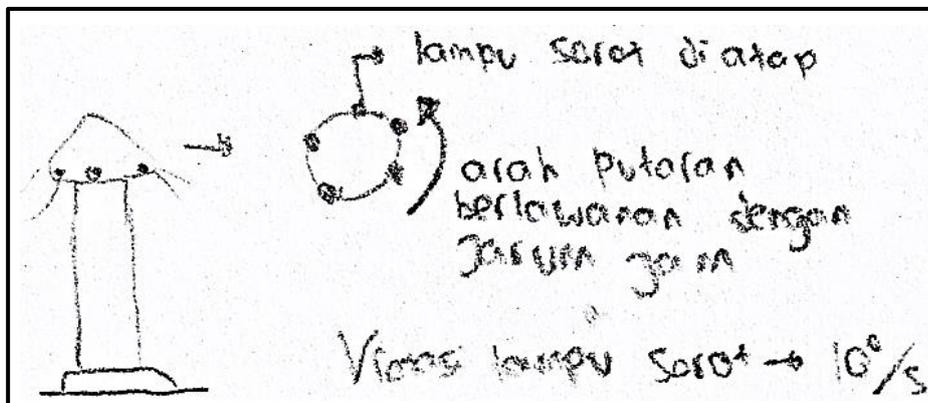
Berikut paparan data terkait subjek 2 (S2) terkait proses berpikir siswa berdasarkan teori tiga dunia matematika.

### a. Tahap Pembentukan Pengertian

Pada tahap ini S2 memiliki stigma awal bahwa soal ini bisa dilogikakan lewat menggambar. Ketika menerima lembar soal, S2 terfokus terhadap gambar yang ada dalam soal sehingga S2 mengimajinasikan berdasarkan bayangannya, seperti hasil *think aloud* berikut.

*“Ini disoal diketahui ada kecepatan lampu sorot  $10^\circ$  per detik berlawanan arah jarum jam, berarti berputarnya mengarah ke kiri (sambil mempratekkan dengan menggunakan tangan arah dari perputaran lampu sorot mercusuar dan menggambar berdasarkan bayangannya). Ini A sebagai titik koordinat ujung sorot lampu yang pertama. Dan koordinat lampu yang kedua itu setelah diberi perlakuan sesuai sudut yang diminta, misal setelah 6 detik berada di titik mana (PA2Em5).” (T1S2)*

Setelah merasa memahami maksud soal, subjek berpikir dengan melihat gambar mercusuar pada soal dan membayangkan objek di kehidupan nyata dalam pikirannya dan mewujudkannya melalui figur geometris. Berikut informasi-informasi yang dapat dipahami oleh S2 dituangkan ke dalam ilustrasinya seperti Gambar 4.7.



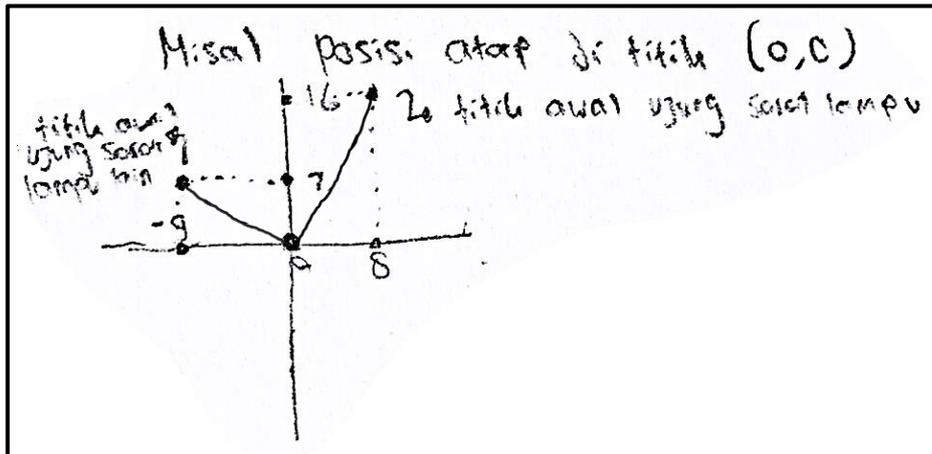
Gambar 4.7 Bagian Diketahui S1 pada Tahap Pembentukan Pengertian

Melalui ilustrasi yang digambarkan oleh subjek, nampak bahwa subjek berusaha merefleksikan objek konkret tersebut untuk menguraikan informasi yang diketahui dan yang ditanyakan. Hal ini diperkuat pula dengan hasil wawancara (**W1S2**) peneliti dengan S2 berikut.

*P : Sewaktu menerima lembar soal ini, apa yang ada di pikiran awal kamu?*

*S2 : takut beda sama apa yang diajarin, pikiran awal kayak susah banget ini, tetapi ketika sudah dibaca yaa tau cara pengerjaan nya. Ketika ada gambar mercusuar, yaa itu saya coba gambar dulu karna saya lebih suka mengilustrasikan bayangan saya dengan menggambar (**PA1Em1**).*

Berdasarkan hasil W1S2, Gambar 4.7 dan T1S2, nampak jika subjek berpikir untuk mengilustrasikan bayangannya dengan menggambar sesuai informasi yang didapat dari soal. Informasi pertama, S2 mengatakan bahwa “*jika lampu sorot di atap mercusuar, arah putarannya bergerak berlawanan arah jarum jam yang artinya berputarnya mengarah ke kiri*”, dari Gambar 4.7 dan T1S2. Informasi kedua, S2 *menuliskan dan menyebutkan data yang diketahui dari soal yaitu kecepatan rotasi lampu sorot sebesar  $10^\circ$  per detik. Selanjutnya yang ditanyakan titik koordinat lampu setelah 6 detik dengan sudut rotasi yang menghasilkan koordinat lampu kedua*, dari Gambar 4.7 dan T1S2. Sehingga pada tahap pembentukan pengertian ini subjek berpikir dengan melihat gambaran dari objek konkret dan subjek melakukan gerakan untuk mendukung pemikirannya dalam memahami dan menganalisis data pada soal. Selanjutnya subjek menguraikan kembali informasi yang diketahui lainnya pada soal (**PA4Em4**) sehingga didapat titik koordinat seperti Gambar 4.8.



**Gambar 4.8 Hasil Kerja S1 pada Tahap Pembentukan Pengertian**

Selain itu, S2 dapat mengalisis dan mendeskripsikan konsep secara verbal yang diperkuat dengan hasil wawancara (**W2S2**) berikut.

P : *Bagaimana penjelasan kamu tentang gambar bidang cartesius ini?*

S2: *saya bayangin nya di titik (0,0) kayak atap mercusuar nya itu di horizontal kan jadi kayak gini dan selanjutnya saya gambarkan titik koordinatnya. Dan saya logikakan ketika dirotasikan sejauh  $60^\circ$  seperti apa tanpa harus menghitung seperti ini.*

Informasi ketiga, S2 menjelaskan titik yang digambarkan pada bidang cartesius (Gambar 4.8) merupakan titik awal sebelum bergerak sejauh yang ditanyakan pada soal. S2 menganggap bahwa “*atap mercusuar berdiri di titik (0,0) serta membuat titik koordinat yang diketahui ke dalam bidang cartesius yaitu titik (8,16) ; (-9,7)*”, dari Gambar 4.8 dan W2S2 (**PA3Em3**).

Jadi dari hasil wawancara (W1S2 ,W2S2), Gambar 4.7, Gambar 4.8 dan hasil *think aloud* (T1S2), S2 pada tahap pembentukan pengertian tidak menuliskan atau menyusun informasi yang diketahui dan yang ditanyakan akan tetapi membayangkan dalam pikirannya. Hal ini menunjukkan jika S2 menguraikan titik koordinat awal dengan mengidentifikasi informasi yang didapat sebelumnya sehingga memahami apa yang akan dilakukan untuk

menyelesaikan tes geometri tersebut (**PA5**). Subjek mengutarakan maksud soal melalui gambaran dan mendeskripsikan konsepnya secara verbal.

Adapun pengkodean S2 pada tahap pembentukan pengertian dipaparkan pada Tabel 4.6.

**Tabel 4.6 Pengkodean S2 pada Pembentukan Pengertian**

No.	Perilaku	Keterangan
1	PA1Em1	Mampu memahami soal dengan melihat gambaran dari objek konkret dan gerakan
2	PA2Em5	Mampu menganalisis data pada soal dan mendeskripsikan konsep secara verbal
3	PA3Em3	Mampu menyusun informasi yang diketahui dan ditanyakan dengan membayangkan gambar dalam pikirannya
4	PA4Em4	Mampu menguraikan dengan kalimatnya sendiri dengan mewujudkan figur geometris
5	PA5	Ada rasa ingin menyelesaikan soal

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.6, proses berpikir berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat dihasilkan pengkodean sebagai berikut.

**Tabel 4.7 Hasil Pengkodean S2 pada Pembentukan Pengertian**

Kode	Kegiatan Siswa
PAEm	Pembentukan pengertian secara <i>Embodied-conceptual</i>

#### **b. Tahap Pembentukan Pendapat**

Setelah S2 membayangkan letak titik koordinat yang diketahui dalam bidang cartesius dan berpikiran bahwa dapat menyelesaikan, namun S2 kurang memahami langkah selanjutnya jika dituangkan dalam gambaran. Sehingga S2 mengaitkan materi dengan memunculkan konsep definisi pada informasi yang diketahui bahwa titik-titik koordinat awal ujung sorot lampu dengan titik menara mercusuar tertentu. Hal ini ditunjukkan oleh hasil *think aloud* S2 saat mengutarakan maksud soal sebagai berikut.

“ini ada  $A(8,16)$  ,  $B(-9, 7)$  ,  $A(15, 13)$  ,  $B(14, -17)$  sebagai titik koordinat awal,  $R$  ini untuk rotasi, berarti saya misalkan  $O$  sebagai titik pusat  $(0,0)$  dan  $P$  sebagai titik pusat  $(3,5)$ . Habis itu  $A'(x',y')$  sebagai titik koordinat bayangan yang dicari. Sehingga dapat diartikan  $A(x,y)$  dipetakan ke  $(x', y')$  (PD3For1).” (T2S2)

Berdasarkan *think aloud* (T2S2), S2 menunjukkan pemetaan dari titik asal ke titik bayangannya (PD1For1). Diperkuat oleh tulisan subjek pada lembar jawaban di Gambar 4.9.

1a  $A(8,16) \xrightarrow{R(O, 60^\circ)} A'(x',y')$

b  $B(-9,7) \xrightarrow{R(O, 90^\circ)} B'(x',y')$

2a  $A(15,13) \xrightarrow{R(P, 150^\circ)} A'(x',y')$

b  $B(14,-17) \xrightarrow{R(P, 90^\circ)} B'(x',y')$

*10 \* 6 derajat = 60*

**Gambar 4.9 Potongan Hasil Kerja S1 pada Tahap Pembentukan Pendapat**

Hal ini didukung juga dengan hasil wawancara bahwa S2 dapat menjelaskan dengan tepat cara penyelesaiannya dengan mengatakan pada saat wawancara (W3S2) berikut.

- P : Darimana kamu mendapatkan  $60^\circ$  ini ?  
 S2: karena alpha nya  $60^\circ$  didapat dari  $6 \times 10$   
 P : apa yang dimaksud  $A(8,16)$  dan yang lainnya ini ? (sambil menunjukkan titik lainnya)  
 S2: ini titik koordinat awal di  $8,16$  dirotasikan dengan titik pusat  $(0,0)$   
 P : selanjutnya bagaimana kamu menjelaskan  $A'(x', y')$  ini ?  
 S2: ini kak, itu merupakan hasil dari rotasi setelah diputar sejauh sudut yang diminta ini (PD2For2)  
 P : terus untuk  $P$  ini apa ?  
 S2:  $P$  nya ini permisalan dari  $(3,5)$  yang merupakan titik pusat dari nomor 2  
 P : Apakah ada informasi yang kurang ?  
 S2: tidak ada kak

Dari hasil data diatas didapat bahwa perbandingan *think aloud* (T2S2), hasil kerja (Gambar 4.9) dan wawancara (W3S2) memiliki persamaan bahwa S2

menyusun rencana dengan menggunakan informasi yang diperoleh untuk menjalankan proses penyelesaian soal yang diberikan (**PD5Sim3**). Informasi pertama subjek menyebutkan bahwa, “titik koordinat awal yang diketahui yaitu  $A(x,y)$  dengan titik  $(8,16)$ ,  $B(-9, 7)$ ,  $A(15, 13)$ ,  $B(14, -17)$  dan titik bayangan yaitu  $A'(x',y')$  sebagai titik koordiant yang dicari”, dari T2S2 dan Gambar 4.9. Informasi kedua S2 mengatakan bahwa, “simbol  $R$  untuk rotasi,  $O$  sebagai titik pusat  $(0,0)$  dan  $P$  sebagai titik pusat  $(3,5)$ ” dari T2S2, Gambar 4.9 dan W3S2. Dan informasi ketiga S2 menghitung jika sudutnya didapat dari  $6 \text{ detik} \times 10^\circ = 60^\circ$ . Selanjutnya dari data-data yang telah diketahui subjek, langkah berikutnya ditunjukkan S2 pada hasil kerja Gambar 4.10.

1  
a

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

2

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15-3 \\ 13-5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6\sqrt{3} - 4 \\ 6 - 4\sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14-3 \\ -17-5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -11 \\ 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

b

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

b

**Gambar 4.10 Hasil Kerja S2 pada Tahap Penarikan Pendapat**

Setelah menjabarkan dari hasil dari penyelesaiannya dengan menggunakan informasi yang telah diperoleh, S2 mensubsitusi data ke dalam rumus transformasi geometri (**PD6**) serta menyelesaikan soal dengan langkah-langkah yang runtut dan benar (**PD7Sim2**). Jadi S2 pada tahap penarikan

pendapat ini dapat mencari solusi dan mendapatkan ide akan tetapi tidak memiliki alasan yang logis di setiap langkah penyelesaiannya.

Adapun pengkodean S2 pada tahap pembentukan pendapat dipaparkan pada Tabel 4.8.

**Tabel 4.8 Pengkodean S2 pada Pembentukan Pendapat**

No.	Perilaku	Keterangan
1	PD1For1	Mampu mencari solusi dengan menggunakan definisi konsep
2	PD2For2	Dapat mengaitkan materi yang sudah diperoleh dengan memunculkan pengalaman dengan objek
3	PD3For1	Mendapatkan ide saat menyelesaikan soal dengan menggunakan definisi konsep
4	PD5Sim3	Dapat menggunakan informasi yang telah diperoleh dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika
5	PD6	Mampu substitusi data ke dalam rumus
6	PD7Sim2	Mampu menghitung untuk menyelesaikan soal sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.8, proses berpikir berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat dihasilkan pengkodean sebagai berikut.

**Tabel 4.9 Hasil Pengkodean S2 pada Pembentukan Pendapat**

Kode	Kegiatan Siswa
PDSim	Pembentukan pendapat secara <i>Symbolic-proceptual</i>
PDFor	Pembentukan pendapat secara <i>Formalism-axiomatic</i>

### c. Tahap Penarikan Kesimpulan

Pada tahap ini S2 melakukan pemeriksaan atas hasil pengerjaan dengan memulai menghitung kembali (**PK1Sim2**) dan memeriksa kesesuaian langkah jawaban yang dinyatakan dalam simbol matematika (**PK3Sim3**). Sehingga mampu memberikan alasan dari hasil kesimpulan pekerjaannya. Berikut hasil *think aloud*.

(sambil menunjukkan hasilnya) :

hasil nomor 1a  $\rightarrow A(8, 16)$  menjadi  $A'(4 - 8\sqrt{3}, 8 + 4\sqrt{3})$

hasil nomor 1b  $\rightarrow B(-9, 7)$  menjadi  $B'(-7, -9)$

hasil nomor 2a  $\rightarrow A(15, 13)$  menjadi  $A'(-1 - 6\sqrt{3}, 11 - 4\sqrt{3})$

hasil nomor 2b  $\rightarrow B(14, -17)$  menjadi  $B'(-8, 27)$  (T3S2)

Sebelum memberikan kesimpulan, S2 kurang yakin dengan jawaban 1a dan 2a karena hasil angkanya yang kurang bagus seperti pada Gambar 4.11.

1a  $\begin{bmatrix} 4 - 8\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} - 8 \end{bmatrix}$  2a  $\begin{bmatrix} -6\sqrt{3} - 1 \\ 11 - 4\sqrt{3} \end{bmatrix}$   
b  $\begin{bmatrix} -7 \\ -9 \end{bmatrix}$  b  $\begin{bmatrix} -8 \\ 27 \end{bmatrix}$

**Gambar 4.11 Hasil Kerja S2 pada Tahap Penarikan Kesimpulan**

Berdasarkan hasil *think aloud* (T3S2) dan Gambar 4.11 dapat diungkapkan bahwa S2 meyakini kebenaran jawabannya (PK4) serta mendeskripsikan hasil pekerjaannya (PK5) secara verbal. Hal ini diperkuat dengan hasil wawancara (W4S2) berikut.

*P* : apakah kamu mengecek kembali?

*S2* : endak. Karna ketika saya mengerjakan selesai yaa sudah dan saya yakin saja hasil jawaban yang saya tulis ini meskipun dengan jawaban yang berbentuk akar ini.

Berdasarkan hasil T3S2, Gambar 4.11 dan W4S2, subjek menghitung ketepatan hasil yang telah diperoleh dan mengecek kesesuaian langkah dalam menyelesaikan soal akan tetapi tidak dapat menjelaskan alasan pengerjaannya. S2 percaya diri atas kebenaran jawabannya sehingga dapat menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya.

Adapun pengkodingan S2 pada tahap penarikan kesimpulan dipaparkan pada Tabel 4.10.

**Tabel 4.10 Pengkodingan S2 pada Penarikan Kesimpulan**

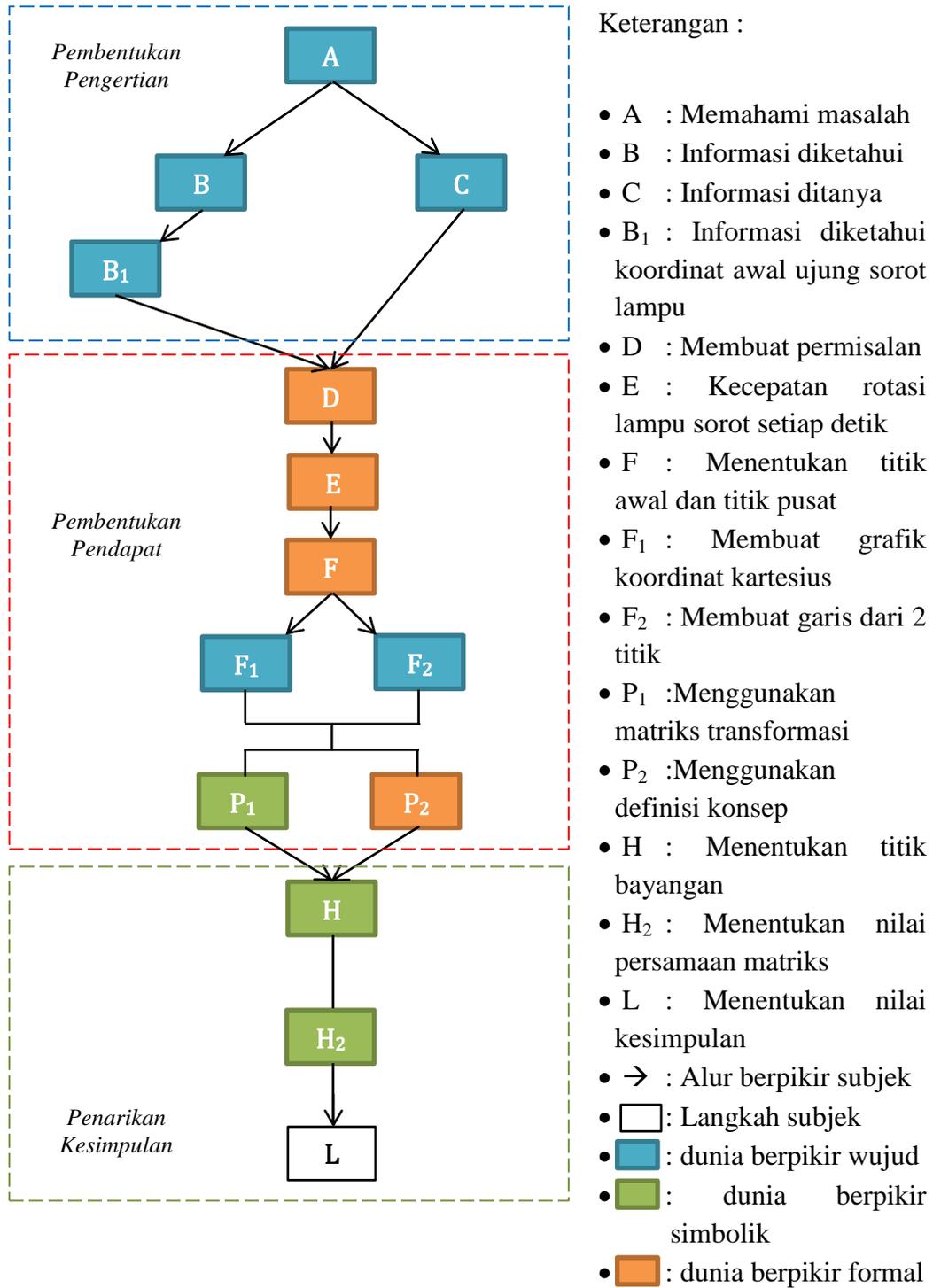
No.	Perilaku	Keterangan
1	PK1Sim2	Telah memeriksa ketepatan perhitungan dengan menghitung kembali
2	PK3Sim3	Telah mengecek kesesuaian langkah penyelesaian dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika
3	PK4	Telah meyakini kebenaran jawabannya
4	PK5	Mampu menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.10, proses berpikir berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat dihasilkan pengkodean sebagai berikut.

**Tabel 4.11 Hasil Pengkodingan S2 pada Penarikan Kesimpulan**

Kode	Kegiatan Siswa
PKSim	Penarikan Kesimpulan secara <i>Symbolic-proceptual</i>

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.7, 4.9 dan 4.11, dapat disimpulkan bahwa proses berpikir S2 dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri terdapat di semua ketiga dunia berpikir matematika. Pada tahap pembedaan pengertian S2 cenderung ke dalam dunia pertama berpikir wujud dengan menuangkan gambaran ke dalam pikirannya, pada tahap pembedaan pendapat cenderung ke dalam dunia kedua berpikir simbolik dengan melalui tindakan (menghitung) serta disimbolkan kembali dan dunia ketiga berpikir formal melalui definisi konsep tentang rotasi dan tahap penarikan kesimpulan cenderung ke dalam dunia kedua berpikir simbolik. Paparan data tentang proses berpikir S2 berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat ditunjukkan pada Gambar 4.12.



**Gambar 4.12** Proses Berpikir S2 berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika

### 3. Paparan data S3

Berikut paparan data terkait subjek 3 (S3) terkait proses berpikir siswa berdasarkan teori tiga dunia matematika.

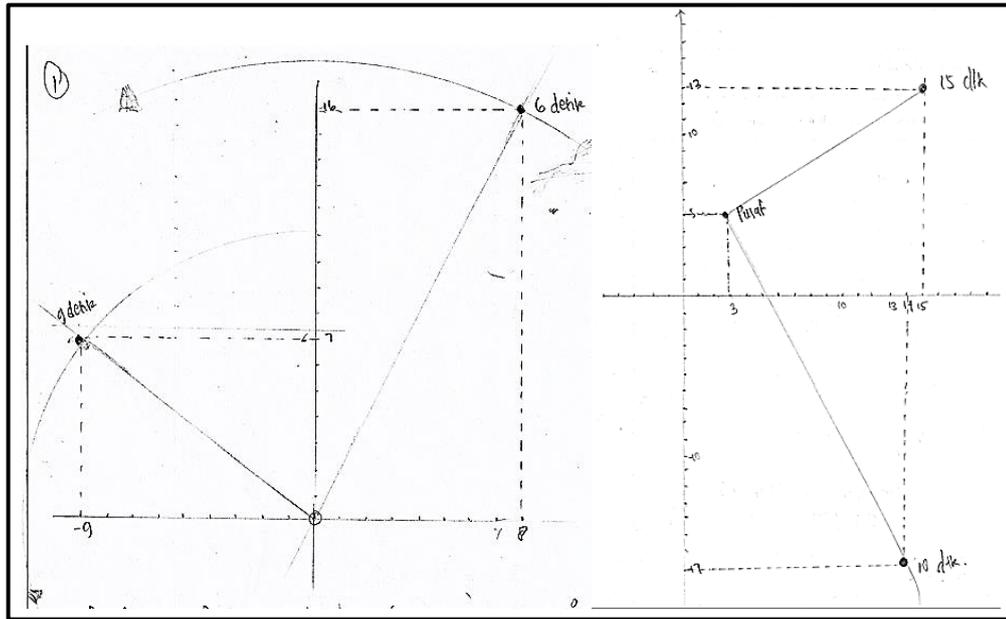
#### a. Tahap Pembentukan Pengertian

Saat S3 menerima lembar soal dan memulai membaca, pada tahap ini subjek menunjukkan memahami soal yang telah diberikan dapat diamati dari hasil *think aloud* berikut.

*“ini ada kecepatan rotasi lampu :  $10^\circ$  perdetik. Jadi di soal saat menara mercusuar di titik  $(0, 0)$ , diminta menentukan koordinat ujung sorot lampu setelah 6 detik dengan titik awal  $(8, 16)$  terus dibuat garis yang menghubungkan kedua titik pusat ini sama titik awal dan terus kalau yang setelah 9 detik dengan titik awal  $(-9, 7)$  ini juga ditarik garis. Yang nomer dua pas menara mercusuar di titik  $(3, 5)$ , diminta menentukan koordinat ujung sorot lampu setelah 15 detik dengan titik awal  $(15, 13)$  terus buat garis juga yang menghubungkan kedua titik ini sama setelah 18 detik dengan titik awal  $(14, -17)$  ini juga ditarik garis (PA4Em5).” (T1S3)*

Berdasarkan hasil *think aloud* (T1S3) menunjukkan S3 tidak menuliskan informasi yang diketahui dan yang ditanyakan melainkan dengan membayangkan dalam pikirannya dan mewujudkan ke figur geometris. S3 mencoba menguraikan data dengan cara melibatkan objek konkret ke dalam matematika.

Subjek membayangkan bahwa lampu sorot mercusuar bergerak berputar berlawanan arah jarum jam (PA1Em3). Kemudian S3 mencoba langkah awal dengan menggambar titik koordinat pada lembar jawaban di Gambar 4.13 (PA2Em1).



**Gambar 4.13 Bagian Diketahui S3 pada Tahap Pembentukan Pengertian**

Berdasarkan lembar jawaban S3 (Gambar 4.13) menggambarkan letak titik koordinat di bidang kartesius sehingga didapat titik-titik koordinat awal tersebut (**PA3Em4**). Namun pada hasil *think aloud* (T1S3) S3 menyebutkan bahwa ada kendala untuk melanjutkan mencari solusinya. Hal ini diperjelas dengan hasil wawancara (**W1S3**) subjek dengan peneliti.

- P : *Bagaimana langkah awal kamu, setelah melihat lembar soal ini?*  
 S3 : *awalnya ndak mengerti maksudnya kak, karena baru pertama kali melihat soal seperti ini*  
 P : *Iyaa dek, memang ini soal transformasi geometri yang mengadopsi dari model soal PISA. Kurang mengertinya di bagian mana dek ?*  
 S3 : *bahasanya kak, disini kita harus mikir dulu apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan*  
 P : *Akhirnya apa rencana awal kamu untuk mencari solusinya ?*  
 S3 : *awalnya menggambar terus ragu akhirnya mencari materi tentang rotasi ini lagi di buku cetak untuk mengerjakan soal ini (**PA5**).*

Berdasarkan perbandingan hasil dari T1S3, Gambar 4.13 dan W1S3, menunjukkan bahwa ada persamaan bahwa subjek berusaha memahami soal dan mengutarakan informasi yang diketahui dan ditanyakan melalui gambaran yang S3 bayangkan. Informasi pertama menyatakan bahwa “pada soal ada yang

diketahui yaitu kecepatan rotasi lampu sebesar  $10^\circ$  perdetik. Setelah membaca soalnya dan membayangkan, langkah awal yang dilakukan yaitu menggambarkan data data yang ada pada soal” dari T1S3, Gambar 4.13 dan W1S3. Informasi kedua subjek menggambarkan titik-titik koordinat di bidang cartesius bahwa “membuat titik pusat saat menara mercusuar di titik  $(0, 0)$  serta yang ditanyakan titik selanjutnya jika setelah 6 detik dengan titik awal  $(8, 16)$  dan setelah 9 detik dengan titik awal  $(-9, 7)$ . Selanjutnya, titik pusat saat menara mercusuar di titik  $(3, 5)$  serta yang ditanyakan titik selanjutnya jika setelah 15 detik dengan titik awal  $(15, 13)$  dan setelah 18 detik dengan titik awal  $(14, -17)$ ” dari T1S3 dan Gambar 4.13.

Jadi dari hasil T1S3, Gambar 4.13 dan W1S3, pada tahap pembentukan pengertian ini S3 mampu memahami, menganalisis, menyusun informasi yang diketahui dan ditanyakan dari data pada soal dengan cara melibatkan objek konkret ke dalam matematika serta mengungkapkan kalimatnya sendiri secara verbal.

Adapun pengkodean S3 pada tahap pembentukan pengertian dipaparkan pada Tabel 4.12.

**Tabel 4.12 Pengkodean S3 pada Pembentukan Pengertian**

No.	Perilaku	Keterangan
1	PA1Em3	Mampu memahami soal dengan membayangkan objek konkret dan gambar dalam pikirannya
2	PA2Em1	Mampu berpikir menganalisis data pada soal dengan melihat gambaran dari objek konkret
3	PA3Em4	Mampu menyusun informasi yang diketahui dan ditanyakan dengan mewujudkan figur geometris
4	PA4Em5	Mampu mengungkapkan konsep dengan kalimatnya sendiri secara verbal
5	PA5	Ada rasa ingin menyelesaikan soal

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.12, proses berpikir berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat dihasilkan pengkodean sebagai berikut.

**Tabel 4.13 Hasil Pengkodean S3 pada Pembentukan Pengertian**

Kode	Kegiatan Siswa
PAEm	Pembentukan pengertian secara <i>Embodied-conceptual</i>

### b. Tahap Pembentukan Pendapat

Pada saat menyelesaikan soal S3 mencoba untuk mencari solusi dan mendapatkan ide dengan menyebutkan rumus yang digunakan melalui hasil *think aloud* berikut.

“Rumus rotasi pada  $O(0,0)$  adalah  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  dan jika dirotasikan pada  $A(3,5)$  rumusnya adalah  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - m \\ y - n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$  (sambil menunjukkan materi yang ada di buku).” (T2S3)

S3 berpikir untuk menjelaskan solusi dengan berpikir melibatkan visualisasi pada simbol. Subjek menganalisis data pada soal dengan memulai menghitung, sehingga S3 mensubstitusi data ke dalam persamaan matriks (PD5). Subjek mengungkapkan bahwa telah mengaitkan materi yang diperoleh dengan memulai untuk mengukur serta menjelaskan proses dalam menghitung data sebagai berikut : (diambil nomor 1b dan 2b)

“(sambil mengingat bagaimana cara mengerjakan) didapatkan hasil sudut dari  $\cos 90^\circ$  adalah 0 dan  $\sin 90^\circ$  adalah 1, selanjutnya 0 dikalikan  $-9$  dan ditambah dari hasil perkalian  $-1$  dengan 7 serta baris kedua ini (sambil menunjuk di lembar jawaban) 1 dikalikan  $-9$  dan ditambah dari hasil perkalian 0 dengan 7. Kemudian untuk titik pusat  $(3,5)$ , didapatkan hasil sudut dari  $\cos 180^\circ$  adalah  $-1$  dan  $\sin 180^\circ$  adalah 0, selanjutnya  $-1$  dikalikan dari hasil pengurangan titik awal  $x = 14$  dengan titik pusat  $m = 3$  dan ditambah dari hasil perkalian 0 yang dikalikan dari hasil pengurangan titik awal  $y = -17$  dengan titik pusat  $n = 5$ . Begitupun dengan baris kedua (PD6Sim2).” (T3S3)



P : setelah kamu mengetahui informasi yang diketahui dan ditanyakan, apa langkah selanjutnya ?

S3: Awalnya saya bingung informasinya ada  $10^\circ$  per detik ini digimanakan, setelah saya baca ternyata  $10^\circ$  per detik dikalikan dengan waktu sehingga menghasilkan alpha atau sudutnya, jadi ada sudut  $60^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 180^\circ$  (PD3).

P : apakah semua data yang diperlukan sudah lengkap ?

S3: sudah kak, karena contoh di nomor 1a ini (8,16) itu sebagai titik awalnya dan (0,0) sebagai titik pusatnya dan bedanya nomer 1 dan 2 adalah di titik pusatnya (PA4For1).

P : Selanjutnya ?

S3 : setelah menggambar tapi ndak bisa melanjutnya untuk mendapatkan jawaban akhirnya masukin aja ke rumus (PD1).

Ide penyelesaian subjek dari hasil wawancara (W2S3), S3 menjelaskan data yang dibutuhkan adalah proses yang diminta yaitu titik-titik koordinat awal tersebut dirotasikan sejauh setelah beberapa detik dengan titik pusat tertentu.

Berdasarkan paparan data hasil *think aloud* (T2S3 dan T3S3), Gambar 4.14 dan hasil wawancara (W2S3), subjek memiliki alasan logis di setiap langkah pengerjaannya dan dapat menggunakan informasi yang telah diperoleh sebelumnya dengan mensubstitusi data ke dalam rumus, sehingga dapat merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika sesuai langkah-langkah yang runtut (PD7). Informasi pertama S3 menyebutkan bahwa, “*matriks transformasi geometri yang digunakan adalah rumus rotasi sehingga jika*

*dirotasikan pada  $O(0,0)$  yaitu  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  dan jika dirotasikan*

*pada  $P(m,n)$  rumusnya yaitu  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - m \\ y - n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ ”, dari*

hasil *think aloud* (T2S3 dan T3S3), Gambar 4.14. Informasi kedua subjek mulai menghitung untuk mencari sudut yang diminta yaitu, “*terdapat data yang diketahui kecepatan lampu sorot sebesar  $10^\circ/s$  dikalikan dengan waktu yang diminta yaitu 6s, 9s, 15s, 18s menjadi  $60^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ ”, dari hasil *think**

*aloud* (T2S3 dan T3S3), Gambar 4.14 dan hasil wawancara (W2S3). Informasi ketiga S3 memaparkan bahwa, “cara penghitungan seperti pada materi matriks”, dari hasil T3S3 dan Gambar 4.14.

Jadi pada tahap pembentukan pendapat ini, S3 dapat menyelesaikan soal dengan mengingat materi yang telah diperoleh dan menghitung data dalam rumus sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar.

Adapun pengkodean S3 pada tahap pembentukan pendapat dipaparkan pada Tabel 4.14.

**Tabel 4.14 Pengkodean S3 pada Pembentukan Pendapat**

No.	Perilaku	Keterangan
1	PD2	Dapat mengaitkan materi yang sudah diperoleh
2	PD3	Mendapatkan ide saat menyelesaikan soal
3	PD4For1	Mampu mengungkapkan alasan yang logis dengan menggunakan definisi konsep
4	PD1	Mampu mencari solusi
5	PD5	Mampu menggunakan informasi yang telah diperoleh
6	PD6Sim2	Dapat memulai menghitung dengan mensubstitusi data ke dalam rumus
7	PD7	Mampu menyelesaikan soal dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.14, proses berpikir berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat dihasilkan pengkodean sebagai berikut.

**Tabel 4.15 Hasil Pengkodean S3 pada Pembentukan Pendapat**

Kode	Kegiatan Siswa
PDSim	Pembentukan pendapat secara <i>Symbolic-proceptual</i>
PDFor	Pembentukan pendapat secara <i>Formalism-axiomatic</i>

### c. Tahap Penarikan Kesimpulan

Pada tahap terakhir S3 memeriksa ketepatan perhitungan dari pengerjaannya. Berikut hasil *think aloud* dari S3.

“hasil dari 1a adalah  $(4 - 8\sqrt{3}, 8 + 4\sqrt{3})$ , hasil dari 1b adalah  $(-7, -9)$ , hasil 2a adalah  $(-1 - 6\sqrt{3}, 11 - 4\sqrt{3})$  dan hasil dari 2b adalah  $(-8, 27)$ ” (T4S3)

Hal ini diperkuat dengan hasil jawaban S3 pada Gambar 4.15.

$$\begin{array}{l}
 \text{1a} \\
 \left( \begin{array}{c} 4 - 8\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} + 8 \end{array} \right) \\
 \text{b} \\
 = \left( \begin{array}{c} -7 \\ -9 \end{array} \right)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{2a} \\
 = \left( \begin{array}{c} -6\sqrt{3} - 1 \\ 11 - 4\sqrt{3} \end{array} \right) \\
 \text{b} \\
 = \left( \begin{array}{c} -8 \\ 27 \end{array} \right)
 \end{array}$$

**Gambar 4.15 Hasil Kerja S2 pada Tahap Penarikan Kesimpulan**

Terlihat pada Gambar 4.15, S3 mampu mengerjakan secara runtut dan memberikan penjelasan yang rinci terhadap proses pengerjaannya. S3 meyakini kebenaran jawabannya serta menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya dengan kesesuaian langkah-langkah penyelesaian soal dengan menggabungkan definisi konsep beserta sifat-sifat dari masing-masing jenis transformasi geometri yang ditanyakan. Di lain sisi S3 dapat menyimpulkan makna dari isi tes geometri bermodel soal PISA ini memiliki maksud tersendiri. Hal ini berdasarkan hasil wawancara (W3S3) berikut.

P : apakah kamu sudah mengecek jawaban kembali ?

S3 : sudah kak (PK3)

P : apakah kamu yakin kebenaran dari jawabanmu?

S3 : yakin kak (PK4)

P : tapi di nomor 2a, mengapa belum ada hasil akhirnya ?

S3 : oh iya kak maaf, belum sampai selesai ya ternyata. awalnya sudah saya tulis tapi sewaktu saya cek ulang salah perhitungannya, dan saya kira sudah saya ganti ternyata belum saya tulis ulang. Sebentar ya kak, saya hitungnya lagi (PK1Sim2).

P : Oke berarti sudah paham. Terus bagaimana kesimpulan yang kamu dapat dari hasil pekerjaan mu ?

S3 : harus jauh lebih teliti lagi. Dan ini sih kak, awalnya mikir ini soal buat apa sih, tujuannya apa, terus ternyata ada gambar ohh jadi biar

*tau apasi makna dan manfaat gambar ini. Ndak asal gitu jadi di dunia nyata itu ada dan kepake (PK5For2).*

Berdasarkan hasil *think aloud* (T3S3), Gambar 4.15 dan hasil wawancara (W3S3) bahwa proses berpikir S3 ini sudah runtut akan tetapi ada yang kurang tepat dari hasil perhitungannya. Di lain sisi S3 dapat memunculkan pengalaman dari objek yang ada pada soal.

Adapun pengkodingan S3 pada tahap penarikan kesimpulan dipaparkan pada Tabel 4.16.

**Tabel 4.16 Pengkodingan S3 pada Penarikan Kesimpulan**

No.	Perilaku	Keterangan
1	PK3	Telah mengecek kesesuaian langkah penyelesaian soal
2	PK4	Telah meyakini kebenaran jawabannya
3	PK1Sim2	Telah memeriksa ketepatan perhitungan dengan menghitung kembali
4	PK5For	Mampu menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya dan memunculkan pengalaman dengan objek beserta sifat-sifatnya

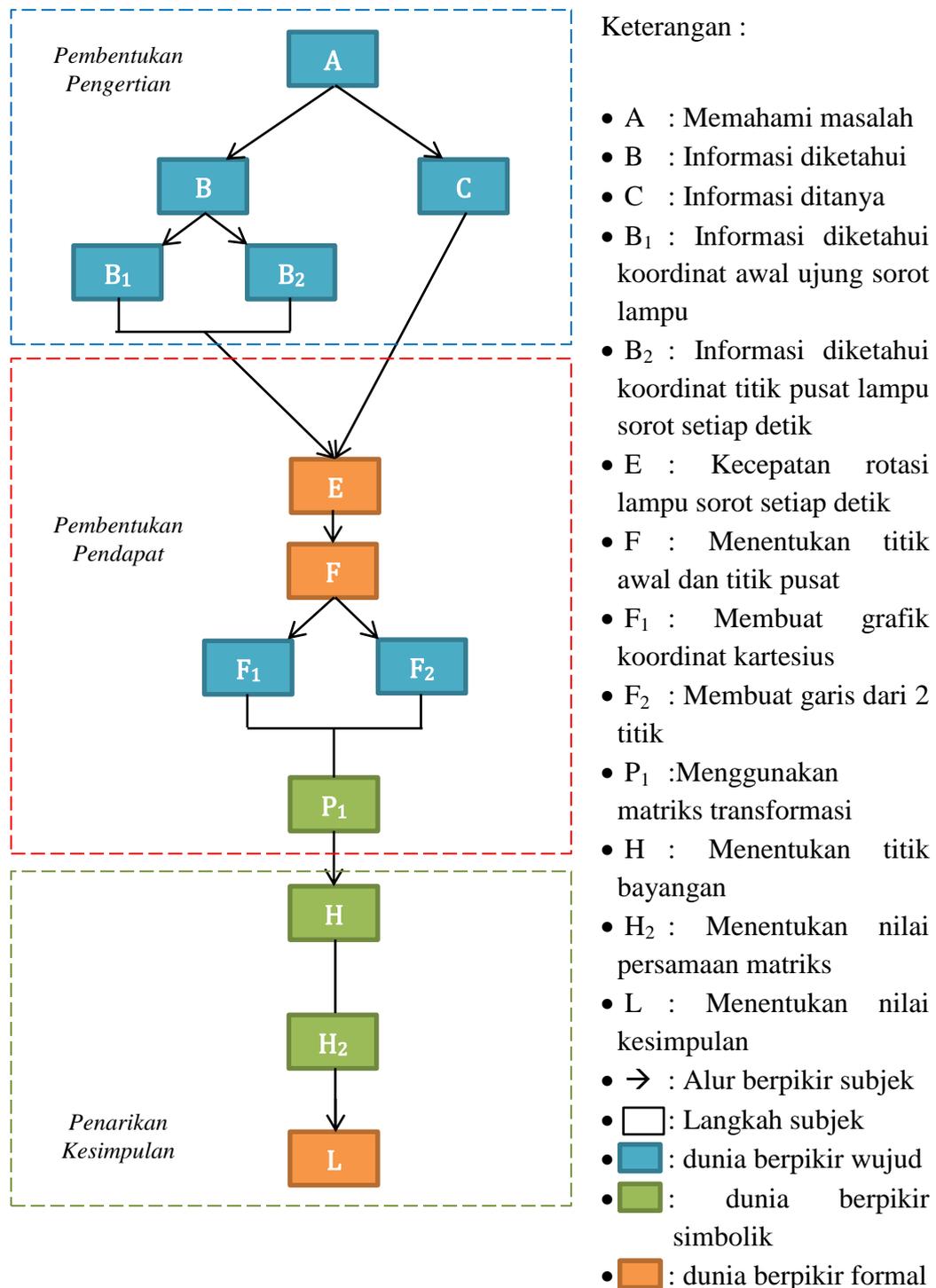
Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.16, proses berpikir berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat dihasilkan pengkodean sebagai berikut.

**Tabel 4.17 Hasil Pengkodingan S3 pada Penarikan Kesimpulan**

Kode	Kegiatan Siswa
PKSim	Penarikan Kesimpulan secara <i>Symbolic-proceptual</i>
PKFor	Penarikan kesimpulan secara <i>Formalism-axiomatic</i>

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.13, 4.15 dan 4.17, dapat disimpulkan bahwa proses berpikir S3 dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri terdapat di semua ketiga dunia berpikir matematika. Pada tahap pembetulan pengertian S3 cenderung ke dalam dunia pertama berpikir wujud, pada tahap pembetulan pendapat dan tahap penarikan kesimpulan cenderung ke dalam dunia kedua berpikir simbolik dan dunia ketiga berpikir formal. Paparan

data tentang proses berpikir S3 berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat ditunjukkan pada Gambar 4.15.



**Gambar 4.16** Proses Berpikir S3 berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika

#### 4. Paparan data S4

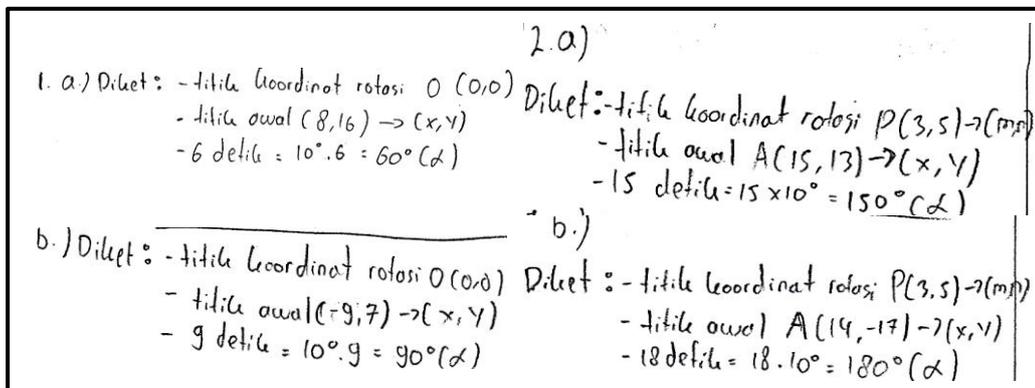
Berikut paparan data terkait subjek 4 (S4) terkait proses berpikir siswa berdasarkan teori tiga dunia matematika.

##### a. Tahap Pembentukan Pengertian

Pada tahap awal ini, S4 menunjukkan bahwa dapat membentuk pengertian dan menganalisis data yang berupa cerita diubah kedalam definisi konsep yang ada dalam materi rotasi untuk mempermudah informasi yang diperlukan. Selanjutnya dapat diamati dari hasil *think aloud* berikut.

*"Posisi atap menara mercusuar sebagai titik pusat dan koordinat ujung sorot lampu sebelum dirotasi disebut titik awal serta alpha merupakan besar sudut yang diminta pada soal. Lampu sorot pada mercusuar arah putaran berlawanan arah jarum jam maka perputaran tersebut merupakan arah positif PA4For1. (terlihat coretan di lembar soal)"*  
(T1S4)

Subjek menjelaskan informasi yang dipahami dari soal dengan menguraikan atau mengungkapkan kalimatnya sendiri. Subjek membaca perlahan agar dapat mengetahui maksud yang diminta dalam permasalahan geometri tersebut. Dari hasil *think aloud* (T1S4), didukung juga dengan S4 menuliskan rincian data yang ada pada soal dengan menuliskan informasi yang diketahui seperti yang ada pada Gambar 4.17.



**Gambar 4.17 Hasil Kerja S4 pada Tahap Pembentukan Pengertian**

Seperti yang ada pada Gambar 4.17, S4 dapat memahami soal dan menguraikan data dengan menghubungkan informasi dan konsep yang diperoleh dari soal dengan materi yang telah mereka pelajari. Hal ini diungkapkan dalam wawancara (**W1S4**) berikut.

P : *apakah kamu mengerti maksud soal ini ?*

S4: *ngerti kak, yaa saya baca keseluruhan dulu PA1.*

P : *apa saja yang kamu pahami ?*

S4: *Untuk yang nomer 1 ini kan di soal, keterangannya posisi atap menara mercusuar berada di titik koordinat  $(0,0)$ , maka ... (sambil membaca soal) jadi ini memakai rumus rotasi PA2.*

P : *bisa kamu jelaskan yang kamu ketahui dari soal ini ?*

S4: *awalnya saya fokus di posisi titik koordinat atas menara mercusuar ini. Dan itu saya anggap sebagai titik pusat  $O(0,0)$  dan  $P(3,5)$ . Selanjutnya titik awal  $(8,16)$  sebagai  $(x,y)$  nya PA3For2.*

P : *terus apakah ada informasi lain ?*

S4: *oh iya, mencari alpha nya ini. Misal yang nomor 1a alpha nya  $60^\circ$  didapat dari  $10^\circ$  per detik dikali 6 detik. Begitupun yang nomor lainnya PA3For2.*

P : *terus ini yang dimaksud dengan simbol  $(m,n)$  ?*

S4: *itu juga sebagai titik pusat kak, tapi yang bukan  $(0,0)$ . Soalnya di rumus yang nomor 2 ini ada kak PA3For2.*

P : *apakah kamu tertarik untuk mengerjakan ini ?*

S4: *iya kak, karena setelah didalami ternyata tinggal dikali dan tinggal masukin aja sesuai rumus PA5.*

Berdasarkan uraian data dari hasil *think aloud* (T1S4), Gambar 4.17 dan hasil wawancara (W1S4) menunjukkan bahwa S4 mampu memahami soal dengan menghubungkan informasi dan konsep yang diperoleh dari soal dengan materi yang telah dipelajari. Informasi pertama S4 menyebutkan bahwa, “*dari soal terdapat sebuah gambar menara mercusuar yang memiliki lampu sorot dibagian atapnya. Subjek menentukan letak atap menara mercusuar sebagai titik pusat koordinat sedangkan sorot lampu mercusuar sebagai titik koordinat sebelum dan sesudah dirotasi*”, dari T1S4 dan Gambar 4.17. Informasi kedua ada data yang diketahui S4 yaitu, “*kecepatan rotasi lampu sorot adalah  $10^\circ$  per detik*

jadi jika setelah 6 detik dirotasikan sejauh  $60^\circ$ . Selanjutnya jika setelah 9 detik dirotasikan sejauh  $\alpha = 90^\circ$ , jika setelah 15 detik dirotasikan sejauh  $150^\circ$  dan jika setelah 18 detik dirotasikan sejauh  $180^\circ$  kearah berlawanan jarum jam”, dari Gambar 4.17 dan W1S4.

Jadi pada tahap pembentukan pengertian ini, S4 lebih awal memahami soal dengan menganalisis data pada soal dan memunculkan konsep dari istilah yang ditanyakan pada soal yaitu rotasi atau perputaran ditentukan oleh pusat putaran, arah putaran dan besar sudut putaran. Sehingga dapat mempermudah untuk langkah penyelesaian yang selanjutnya.

Adapun pengkodean S4 pada tahap pembentukan pengertian dipaparkan pada Tabel 4.18.

**Tabel 4.18 Pengkodean S4 pada Pembentukan Pengertian**

No.	Perilaku	Keterangan
1	PA1	Mampu memahami soal
2	PA2	Mampu menganalisis data pada soal
3	PA3For2	Mampu menyusun informasi yang diketahui dan ditanyakan dengan memunculkan pengalaman dengan objek beserta sifat-sifatnya
4	PA4For1	Mampu mengungkapkan dengan kalimatnya sendiri dengan menggunakan definisi konsep
5	PA5	Ada rasa ingin menyelesaikan soal

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.18, proses berpikir berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat dihasilkan pengkodean sebagai berikut.

**Tabel 4.19 Hasil Pengkodean S4 pada Pembentukan Pengertian**

Kode	Kegiatan Siswa
PAFor	Pembentukan pengertian secara <i>Formalism-axiomatic</i>

#### **b. Tahap Pembentukan Pendapat**

Pada tahap yang kedua ini selain menyebutkan informasi, S4 mengaitkan materi yang sudah diperoleh yaitu tentang rotasi dengan menuliskan

rumus umum nya terlebih dahulu pada lembar jawaban **PD1** agar dapat mesubstitusi data ke dalam rumus. Seperti pada hasil *think aloud* berikut.

“Setelah mendapatkan informasi yang diperlukan, semua data disubstitusikan ke dalam rumus persamaan matriks pada rotasi tersebut **PD6Sim2.**” (T2S4)

Diperkuat lagi dengan Gambar 4.18.

$$1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-m \\ y-n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

**Gambar 4.18 Rumus Rotasi S4**

Setelah mendapatkan ide saat mengerjakan soal, S4 dapat menghitung penyelesaiannya dengan menggunakan matriks yang bersesuaian **PD2Sim2** di lembar jawaban seperti pada Gambar 4.19.

$$1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$a \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + (-8\sqrt{3}) \\ 4\sqrt{3} + 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 - 8\sqrt{3} \\ 8 + 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$b \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15-3 \\ 13-5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$a \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sqrt{3} + (-9) \\ 6 + (-4\sqrt{3}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sqrt{3} - 1 \\ -4\sqrt{3} + 11 \end{pmatrix}$$

$$b \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14-3 \\ -17-5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \end{pmatrix}$$

**Gambar 4.19 Hasil Kerja S4 pada Tahap Pembentukan Pendapat**

Hal ini diperkuat dengan hasil wawancara (**W2S4**) berikut.

P : Apakah ada kaitan data di soal dengan materi yang pernah kamu pelajari ?

S4: ada kak, jadi selain tentang rotasi ini, di sudut nya kita menghitungnya menggunakan bab trigonometri. Apalagi yang sudut nya besar besar ini (soal nomor 2), jadi saya mengingat kembali caranya yang di kuadran itu kak **PD2For1**.

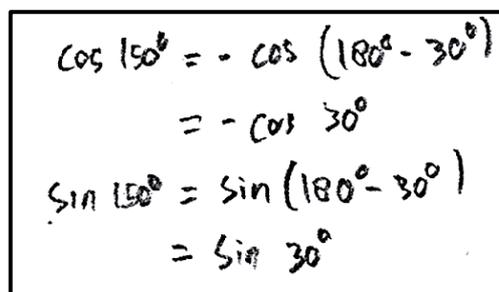
P : bagaimana kamu menjelaskan langkah-langkah tersebut ?

S4: jadi yaa tinggal masukan aja angka-angkanya ke dalam rumus ini (gambar yg diatas) **PD5Sim1**.

Berdasarkan hasil data (T2S4, Gambar 4.19 dan W2S4) diatas, menunjukkan bahwa S4 dapat menggunakan informasi yang telah diperoleh dan memiliki alasan logis di setiap langkah penyelesaian sehingga mengarah ke jawaban yang benar. Informasi pertama subjek mengatakan bahwa, “terdapat rumus rotasi dengan menggunakan matriks yang bersesuaian di catatannya yaitu

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - m \\ y - n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix},$$

selanjutnya S4 menyubstitusikan semua data ke dalam rumus tersebut”, dari T2S4, Gambar 4.19 dan W2S4. Informasi kedua subjek memfokuskan bahwa, “perbedaan di nomor 1 dan nomor 2, terletak pada titik pusat yaitu (0, 0) dan (3, 5)”, dari Gambar 4.19. Selanjutnya subjek mencari sudut / alpha nya menggunakan materi trigonometri seperti pada Gambar 4.20.


$$\begin{aligned} \cos 150^\circ &= -\cos (180^\circ - 30^\circ) \\ &= -\cos 30^\circ \\ \sin 150^\circ &= \sin (180^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 30^\circ \end{aligned}$$

Gambar 4.20 Proses Penghitungan S4

Berdasarkan Gambar 4.20, peneliti menanyakan maksud dari coretan subjek tersebut melalui wawancara (**W3S4**) berikut.

*P : terus bagaimana dengan penghitungan sudut-sudutnya ini ?*

*S4 : kalau yang untuk nomor 1 saya hafal kak, karena sudut nya masih dibawah 90 derajat. Tapi kalau yang nomor 2 itu saya menghitung nya yang pakai letak kuadran itu kak **PD3Sim2**. (Gambar 4.20) Jadi setelah mendapatkan  $\cos 150 = -\cos 30$  dan  $\sin 180 = \sin 30$ , disubstitusi lagi ke rumus matriks trigonometrinya **PD4**.*

*P : Baik. Apakah ada soal sudah cukup untuk menyelesaikan persoalan ini ? apakah harus mencari informasi lain ?*

*S4 : sudah cukup kak*

Pada akhirnya S4 dapat menuliskan cara transformasi geometri dalam persoalan matematika serta menjelaskan setiap langkah penyelesaiannya **PD7**. Informasi ketiga, “*penghitungan sudut lebih dari 90° S4 ini menggunakan cara nilai trigonometri yaitu pada sudut 150°. Letak dari sudut 150° berada di kuadran II yang nilai sinus-nya positif dan nilai tangent, cosinus, cotangent adalah negatif*”, dari Gambar 4.20 dan hasil wawancara (W2S4 dan W3S4).

Jadi S4 pada tahap pembentukan pendapat ini subjek sangat memahami maksud soal dengan menggunakan definisi konsep yang ditunjukkan dengan mengaitkan materi-materi yang telah dipelajari sebelumnya. Selanjutnya dengan informasi yang telah diperoleh, subjek memiliki alasan logis saat menyelesaikan soal sehingga mampu merepresentasikan data ke dalam bentuk matematika.

Adapun pengkodean S4 pada tahap pembentukan pendapat dipaparkan pada Tabel 4.20.

**Tabel 4.20 Pengkodean S4 pada Pembentukan Pendapat**

No.	Perilaku	Keterangan
1	PD1	Mampu mencari solusi
2	PD2Sim2	Mampu mengaitkan materi yang telah diperoleh dengan memulai untuk menghitung

**Lanjutan Tabel 4.20.**

No.	Perilaku	Keterangan
3	PD2For1	Mampu mengaitkan materi yang telah diperoleh dengan menggunakan definisi konsep
4	PD5Sim1	Dapat menggunakan informasi yang diperoleh sebelumnya dengan memvisualisasikan ke simbol dalam persoalan matematika
5	PD3Sim2	Mendapatkan ide saat menyelesaikan soal dengan memulai untuk menghitung
6	PD4	Memiliki alasan logis setiap langkah penyelesaiannya
	PD6Sim2	Mampu menghitung dengan menyubstitusi data ke dalam rumus
8	PD7	Mampu menyelesaikan soal sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.20, proses berpikir berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat dihasilkan pengkodean sebagai berikut.

**Tabel 4.21 Hasil Pengkodean S4 pada Pembentukan Pendapat**

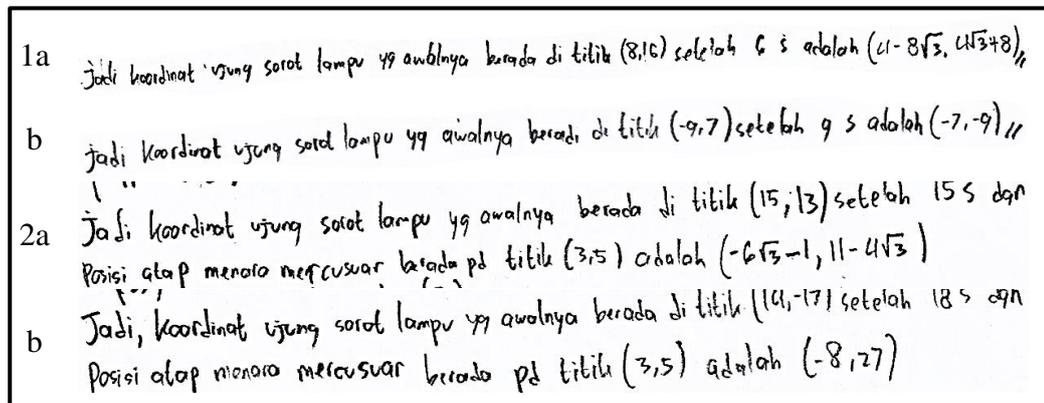
Kode	Kegiatan Siswa
PDSim	Pembentukan pendapat secara <i>Symbolic-proceptual</i>
PDFor	Pembentukan pendapat secara <i>Formalism-axiomatic</i>

**c. Tahap Penarikan Kesimpulan**

Pada tahap terakhir ini telah menarik kesimpulan bahwa adanya perubahan titik koordinat ujung sorot lampu setelah beberapa detik berputar. Hasil kesimpulan dan memeriksa kembali setiap proses penghitungan yang dilakukan oleh S4 dapat diamati dari hasil *think aloud* berikut.

“Soal 1a, ini dirotasikan dengan koordinatnya di titik (8, 16) dan titik pusatnya (0, 0) sebesar 60 derajat hasilnya  $(4 - 8\sqrt{3}, 8 + 4\sqrt{3})$  dan soal yang b cara pengerjaannya sama, di titik koordinat awalnya (-9, 7) dirotasikan di titik pusat yang sama (0, 0) sebesar 90 derajat hasilnya (-7, 9). Untuk yang nomer 2, sebenarnya soalnya sama, hanya beda di titik pusatnya aja di titik (3, 5). Selanjutnya titik awal ujung sorot lampunya di titik (15, 13) setelah 15 detik berarti 150 derajat hasilnya  $(-6\sqrt{3} - 1, 11 - 4\sqrt{3})$ , terus buat yang b juga sama di titik pusat (3, 5) dengan titik awalnya 14, -17 dirotasikan sebesar 180 derajat hasilnya (-8, 27)” (T3S4)

Subjek menjelaskan proses akhir ini secara detail dan rinci sesuai langkah pengerjaan. S4 memberikan hasil akhir dari proses pengerjaannya berdasarkan Gambar 4.21.



**Gambar 4.21 Hasil Kerja S4 pada Tahap Penarikan Kesimpulan**

Berdasarkan *think aloud* (T3S4) dan Gambar 4.21 subjek merasa telah menjawab dengan penyelesaian yang benar. Hal ini diperkuat oleh hasil wawancara S4 (W4S4) dengan peneliti sebagai berikut.

P : sudah kamu cek lagi hasil jawabanmu itu ?

S4: sudah kak **PK1**

P : apakah jawaban kamu sesuai dengan apa yang diketahui dan ditanyakan pada soal ?

S4: sesuai kak **PK3**

P : apakah kamu sudah yakin dengan jawaban kamu ?

S4: yakin kak **PK4**

P : jadi bagaimana kesimpulan yang kamu dapat ?

S4: seperti ini kak (menunjukkan hasil di lembar jawabannya) **PK5**

Berdasarkan paparan data (T3S4, Gambar 4.21 dan W4S4) diatas, S4 meyakini kebenaran jawabannya dan mampu mendapatkan jawaban yang benar terhadap hasil yang diperoleh. Informasi yang didapat yaitu, “jawaban S4 nomor 1a berupa bayangan titik koordinat ujung sorot lampu yang dihasilkan terletak di  $(4 - 8\sqrt{3}, 8 + 4\sqrt{3})$ , nomor 1b bayangan titik koordinat ujung sorot lampu yang dihasilkan terletak di  $(-7, -9)$ , nomor 2a bayangan titik koordinat ujung

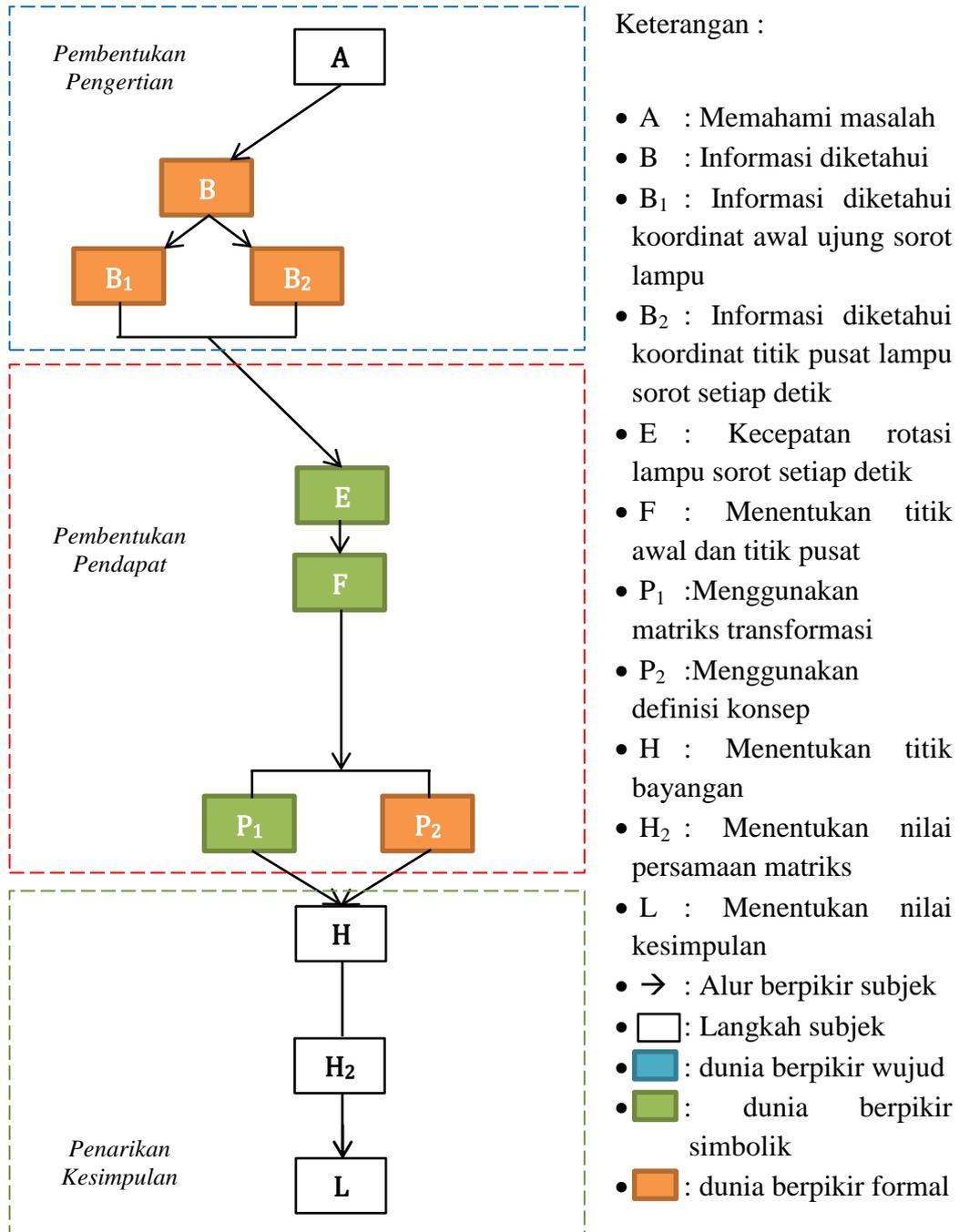
sorot lampu yang dihasilkan terletak di  $(-1 - 6\sqrt{3}, 11 - 4\sqrt{3})$  dan nomor 2b bayangan titik koordinat ujung sorot lampu yang dihasilkan terletak di  $(-8, 27)$ ”, dari T3S4 dan Gambar 4.21. Sehingga dapat disimpulkan proses berpikir S4 di tahap terakhir ini subjek telah mengecek kembali ketepatan perhitungan sesuai dengan langkah menyelesaikan tes geometri serta meyakini apa yang telah subjek kerjakan.

Adapun pengkodingan S4 pada tahap penarikan kesimpulan dipaparkan pada Tabel 4.22.

**Tabel 4.22 Pengkodingan S4 pada Penarikan Kesimpulan**

No.	Perilaku	Keterangan
1	PK1	Telah memeriksa ketepatan perhitungan
2	PK3	Telah mengecek kesesuaian langkah menyelesaikan soal
3	PK4	Telah meyakini kebenaran jawabannya
4	PK5	Mampu menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.19, 4.21 dan 4.22, dapat disimpulkan bahwa proses berpikir S4 dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri terdapat di 2 dunia berpikir matematika. Pada tahap pembedaan pengertian S4 cenderung ke dalam dunia ketiga berpikir formal, dan pada tahap pembedaan pendapat cenderung ke dalam dunia kedua berpikir simbolik dan dunia ketiga berpikir formal. Paparan data tentang proses berpikir S4 berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat ditunjukkan pada Gambar 4.22.



**Gambar 4.22** Proses Berpikir S4 berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika

## 5. Paparan data S5

Berikut paparan data terkait subjek 5 (S5) terkait proses berpikir siswa berdasarkan teori tiga dunia matematika.

### a. Tahap Pembentukan Pengertian

Selama memahami data yang ada pada soal, S5 berusaha untuk memahami soal dengan cara membaca berulang kali dan mencoba mengingat dan menanyakan ke peneliti terkait materi yang digunakan dalam tes geometri tersebut. Proses berpikir S5 pada tahap awal dituangkan ke dalam hasil *think aloud* berikut.

*“Awalnya pas liat soal masih bingung gimana, baru pertama kali liat soal begini, soalnya ada gambar gambar nya. Ini pertama kali dapat soal ini dan merasa tertantang karna soal dalam bentuk cerita sehingga kita harus bernalar dulu tidak langsung menjawab” (T1S5)*

Berdasarkan *think aloud* (T1S5), S5 menunjukkan usaha awal agar dapat memahami maksud tes geometri tersebut serta mencoba menuliskan informasi apa saja yang didapatnya melalui permisalan (**PA3Sim1**) yang dibuat seperti pada Gambar 4.23.

① a.) misal ujung sorot lampu = A, maka, $A(8, 16)$ $P(10^\circ \times 6 = 60^\circ)$ $A'$ $P(0, 0)$	② a.) misal ujung sorot lampu = C, maka $C(15, 13)$ $P(10^\circ \times 15 = 150^\circ)$ $C'$ $P(3, 5)$
b.) misal ujung sorot lampu = B, maka $B(-9, 7)$ $P(10^\circ \times 9 = 90^\circ)$ $B'$ $P(0, 0)$	b.) misal ujung sorot lampu = D, maka $D(14, -17)$ $P(10^\circ \times 18 = 180^\circ)$ $D'$ $P(3, 5)$

**Gambar 4.23 Hasil Kerja S5 pada Tahap Pembentukan Pengertian**

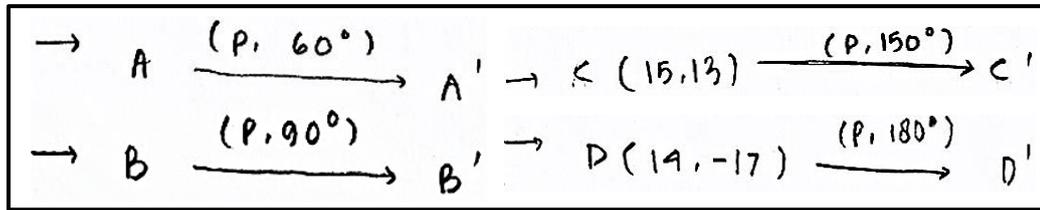
Pada Gambar 4.23 tersebut, subjek membuat permisalan setiap ujung lampu sorot dengan permintaan yang berbeda-beda. Penjelasan tentang gambar 4.23 dituangkan dalam hasil wawancara (**W1S5**) berikut.

- P : Apa yang kamu lakukan setelah menerima lembar soal ini ?
- S5: saya baca dahulu, dan sempat bingung makanya saya nanya ke kakak dulu
- P : Jadi bagaimana kamu mengerti maksud soal ini ?
- S5: Awalnya memang kok panjang soalnya ternyata setelah dibaca, saya langsung kepikiran rotasi (**PA1**)
- P : bagaimana langkah awal kamu untuk menyelesaikan ini ?
- S5: awalnya setelah saya baca, saya coba buat permisalan di setiap nomor di soal (**PA2Sim1**).
- P : maksudnya gimana ?
- S5: jadi gini kak, setelah saya tau ini tentang rotasi dan ini masuk di bab transformasi geometri yang pasti ada titik awal dan titik bayangan. Jadi saya misalkan yang nomor 1a ini, ujung sorot lampu awal berupa  $A$  dan bayangan yang dihasilkan setelah dirotasi berupa  $A'$  dan begitupun yang nomor lainnya (**PA1For1**).
- P : ohh iya. Terus ini yang dimaksud  $P(0, 0)$  dan  $P(3, 5)$  apa?
- S5: ini aku misalkan titik pusat kak, jadi saya tulis  $P$ . dan sudut yang dirotasi didapat dari perkalian antara  $10^\circ$  sama waktu yang diminta di soal ini (sambil menunjukkan di lembar soal) (**PA4Sim3**).

Berdasarkan perbandingan data yang telah diuraikan, dapat disimpulkan bahwa hasil *think aloud* (T1S5), Gambar 4.23 dan hasil wawancara (W1S5) terdapat persamaan. Subjek menulis dan menyebutkan beberapa informasi yang diketahui dan ditanyakan dari soal sebagai langkah awal untuk menyelesaikan tes geometri tersebut. Informasi pertama subjek mengatakan bahwa, “*bentuk tes ini berupa soal cerita, sehingga S5 membuat permisalan agar memperingkas apa yang diperlukan untuk melanjutkan langkah berikutnya*”, dari T1S5 dan Gambar 4.23. Informasi kedua subjek menyebutkan, “*diketahui ujung lampu sorot awal yang dimisalkan dengan huruf abjad  $A, B, C$  dan  $D$  serta bayangan yang dihasilkan berupa  $A', B', C'$  dan  $D'$ . Selanjutnya ada titik pusat yang dinotasikan berupa huruf  $P$  yaitu  $P(0, 0)$  dan  $P(3, 5)$* ”, dari Gambar 4.23 dan W1S5.

Informasi ketiga subjek menjelaskan bahwa, “*bentuk umum  $P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$  artinya titik awal sebelum dirotasikan dan titik bayangan*

setelah dirotasikan dengan kecepatan rotasi lampu sorot sebesar  $10^\circ/s$ ”, dari Gambar 4.23 dan W1S5. Penjelasan lanjutan dari S5 seperti pada Gambar 4.24.



**Gambar 4.24 Penjelasan S5 pada Bagian Diketahui**

Subjek berusaha menjelaskan kembali maksud dari proses penyelesaiannya dengan menuliskan di lembar jawaban. Sehingga peneliti melakukan wawancara dengan subjek (**W2S5**) sebagai berikut.

- P : bagaimana kamu menjelaskan arah tanda panah itu ?  
 S5 : sebenarnya sewaktu saya liat buku ada bentuk umumnya  $P(x,y) \rightarrow P'(x',y')$  terus yang diatas panah ini maksudnya adalah titik pusat dan sudut yang dirotasi. Jadi kalo ditulis singkat seperti ini kak (menuliskan kembali di kertas)( Gambar 4.24). Seperti pada fungsi ya kak kalo saya ingat ingat lagi (**PA2Sim2**).  
 P : iyaa betul dek, jadi bagaimana maksud dari tulisan kamu ini ? (Gambar 4.24).  
 S5 : maksud gimana kak?  
 P : emm, bisa kamu jelaskan alur dari permasalahan kamu ini?  
 S5 : kalo ini yang 1a ya kak (menunjukkan yang S5 tuliskan). Jadi A nya ini sebagai titik awal yang diketahui yaitu  $(8,16)$  selanjutnya di rotasikan di P yaitu  $(0,0)$  sejauh sudut  $60^\circ$  dan menghasilkan A' yang ditanyakan / diminta pada soal

Sesuai dengan penulisan S5 (Gambar 4.24) dan hasil wawancara (**W2S5**), informasi ketiga, “subjek menghitung perkalian antara kecepatan lampu sorot dengan waktu yang ditanyakan / diminta oleh soal”. Setelah S5 membaca soal yang diberikan dengan seksama, selanjutnya menuliskan informasi yang diketahui dan yang ditanyakan pada soal melalui permisalan dengan menentukan bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah beberapa detik dengan titik awal dan titik menara mercusuar sebagai titik pusatnya. Berdasarkan kegiatan S5 pada tahap pembentukan pengertian ini dapat diamati bahwa

memahami maksud soal dengan melibatkan visualisasi pada simbol serta menganalisis data pada soal dengan memulai menghitung. Sehingga S5 dapat melanjutkan menyelesaikan permasalahan dengan informasi yang ada (PA5Sim2).

Adapun pengkodean S5 pada tahap pembentukan pengertian dipaparkan pada Tabel 4.23.

**Tabel 4.23 Pengkodean S5 pada Pembentukan Pengertian**

No.	Perilaku	Keterangan
1	PA1	Mampu memahami soal
2	PA3Sim1	Mampu menyusun informasi yang diketahui dan ditanyakan dengan berpikir melibatkan visualisasi pada simbol
3	PA2Sim1	Mampu menganalisis data pada soal dengan berpikir melibatkan visualisasi pada simbol
4	PA1For1	Mampu memahami soal dengan berpikir menggunakan definisi konsep matematika
5	PA4Sim3	Dapat merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika serta mengungkapkan dengan kalimatnya sendiri
6	PA2Sim2	Mampu menganalisis data pada soal dengan memulai untuk menghitung
7	PA5Sim2	Ada rasa ingin menyelesaikan soal dengan memulai untuk menghitung

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.23, proses berpikir berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat dihasilkan pengkodean sebagai berikut.

**Tabel 4.24 Hasil Pengkodean S5 pada Pembentukan Pengertian**

Kode	Kegiatan Siswa
PASim	Pembentukan pengertian secara <i>Symbolic-proceptual</i>
PAFor	Pembentukan pengertian secara <i>Formalism-axiomatic</i>

#### **b. Tahap Pembentukan Pendapat**

Ketika akan menyelesaikan soal S5 berpikir mendapatkan ide dan mengaitkan materi transformasi geometri dengan menggunakan informasi yang

diperoleh. S5 melibatkan visualisasi pada simbol dan langsung mensubstitusikan data ke dalam rumus sesuai dengan hasil *think aloud* berikut.

“Rumus matriks transformasi geometri yang dirotasikan pada  $P(0,0)$

adalah  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  dan jika dirotasikan pada  $P(m,n)$

rumusnya adalah  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - m \\ y - n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$  “ (T2S5)

Selanjutnya proses penghitungan subjek dipaparkan berdasarkan informasi-informasi yang telah di dapat dari tahap pembentukan pengertian melalui jawaban S5 pada Gambar 4.25.

**Gambar 4.25 Hasil Kerja S5 pada Tahap Pembentukan Pendapat**

Berdasarkan hasil kerja pada Gambar 4.25, S5 berpikir untuk menjelaskan solusi dengan berpikir melibatkan visualisasi pada simbol dan mengalisis data pada soal dengan memulai menghitung (PD1Sim2). Tahap ini diperkuat lagi dari hasil wawancara (W3S5) berikut.

P : langkah apa yang kamu gunakan untuk mencari solusinya ?

S5 : saya menggunakan matriks transformasi (PD2)

P : bagaimana kamu menjelaskannya ?

S5 : yaa ini kak tinggal masukan data ke dalam rumus matriks nya (PD5Sim3)

P : ini yang nomor 2 mengapa berbeda rumus dengan nomor 1 ?

S5: iyaa kak, soalnya kalau yang nomor 1 titik pusat nya di  $(0,0)$  jadi dirumusnya ndak dikurangi sama titik awalnya. Tapi kalau yang nomor 2 karena titik pusat nya  $(3,5)$  jadi rumusnya ada pengurangan dan penambahan titik pusatnya (**PD6Sim2**).

S5 menyebutkan bahwa rumus matriks transformasi yang digunakan ada perbedaan dikarenakan posisi atap menara mercusuar. Berdasarkan gambar 4.23 serta wawancara terhadap hasil pekerjaan S5, proses berpikir yang dilalui S5 yaitu berpikir secara *symbolic*. Informasi yang didapat subjek mengatakan bahwa, “terdapat perbedaan rumus antara nomor 1 dengan titik pusat  $(0,0)$  dan 2 dengan titik pusat  $(3,5)$  serta titik koordinat awal dan sudut yang dirotasikan berbeda-beda”, dari T2S5 dan Gambar 4.25.

Setelah S5 mengetahui kesesuaian materi terhadap soal, S5 dapat menghitung penyelesaiannya dengan menggunakan matriks transformasi geometri (**PD3Sim3**). Berdasarkan informasi yang diketahui, S5 menjelaskan titik-titik koordinat ujung sorot lampu tersebut dirotasikan pada titik pusat tertentu sehingga memperoleh titik titik-titik koordinat ujung sorot lampu lainnya (**PD4**).

Dari hasil data *think aloud* (T2S5), Gambar 4.25 dan hasil wawancara (W3S5), menunjukkan bahwa S5 dapat berpikir untuk mencari solusi dengan memvisualisasikan ke simbol dalam persoalan matematika. Hal ini dikarenakan S5 dapat merepresentasikan data ke dalam simbol matematika yaitu titik koordinat awal ujung sorot lampu  $A(x,y)$  dirotasikan pada  $O(0,0)$  atau  $P(m,n)$  sejauh  $\alpha$ , maka memperoleh titik  $A'(x',y')$ . Sehingga S5 mampu menyelesaikan soal sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar (**PD7Sim3**).

Adapun pengkodean S5 pada tahap pembentukan pendapat dipaparkan pada Tabel 4.25.

**Tabel 4.25 Pengkodean S5 pada Pembentukan Pendapat**

No.	Perilaku	Keterangan
1	PD1Sim2	Mampu mencari solusi dengan memulai menghitung
2	PD2	Dapat mengaitkan materi yang sudah diperoleh
3	PD5Sim3	Dapat menggunakan informasi yang telah diperoleh dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika
4	PD6Sim2	Dapat mensubstitusi data ke dalam rumus dan memulai untuk menghitung
5	PD3Sim3	Mendapatkan ide saat menyelesaikan soal dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika
6	PD4	Memiliki alasan logis di setiap langkah penyelesaian
7	PD7Sim3	Mampu menyelesaikan soal dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.25, proses berpikir berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat dihasilkan pengkodean sebagai berikut.

**Tabel 4.26 Hasil Pengkodean S5 pada Pembentukan Pendapat**

Kode	Kegiatan Siswa
PDSim	Pembentukan pendapat secara <i>Symbolic-proceptual</i>

### c. Tahap Penarikan Kesimpulan

Setelah melalui proses pengerjaan dan menemukan solusi penyelesaian, S5 ini tidak melakukan pengecekan kembali akan tetapi sudah meyakini kebenaran jawabannya. Hal ini dapat dilihat dari hasil wawancara (**W4S5**) berikut.

P : Setelah mendapatkan hasilnya, apakah kamu memeriksa kembali jawaban atas ketepatan perhitungannya?

S5: endak kak

P : apakah jawaban kamu sudah sesuai dengan apa yan diketahui dan ditanyakan pada soal ?

S5: iya kak sesuai

P : Apakah kamu yakin langkah-langkah kamu sesuai dengan hasil jawabannya ?

S5: yakin kak, tapi saya sempat ragu karna ada jawabannya yang berbentuk akar (PK4Sim2)

P : terus bagaimana ?

S5: akhirnya saya hitung pakai kalkulator jadi bentuk decimal

Berdasarkan hasil wawancara (W4S5), sesuai dengan hasil pekerjaan subjek pada tahap penarikan kesimpulan ini seperti pada Gambar 4.26.

$$\begin{array}{l} 1a \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 8\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} + 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9,85 \\ 14,92 \end{pmatrix} \\ 2a \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sqrt{3} - 1 \\ -4\sqrt{3} + 11 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11,39 \\ 4,07 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Gambar 4.26** Penghitungan S5 pada Tahap Penarikan Kesimpulan

Hal ini diperkuat lagi dengan hasil *think aloud* berikut.

“Sebenarnya udah ada jawabannya ini semua, tapi untuk yang nomor 1a dan 2a saya hitung desimalnya juga biar bentuknya ndak ada akar-akarnya, jadi hasilnya  $(-9,85, 14,92); (-7, -9); (-11,39, 4,07); (-8, -27)$ ” (T3S5)

Pada tahap proses berpikir terakhir ini yaitu tahap penarikan kesimpulan, S5 dapat menyelesaikan sampai menemukan hasil akhir terlihat pada Gambar 4.27.

1a Jadi, koordinat A' pada 6 detik  $(-9,85; 14,92)$   
b Jadi, koordinat B' pada 9 detik  $(-7, -9)$   
2a Jadi, koordinat C' pada 15 detik  $(-11,39; 4,07)$   
b Jadi, koordinat D' pada 18 detik  $(-8,27)$

**Gambar 4.27** Hasil Kerja S5 pada Tahap Penarikan Kesimpulan

Berdasarkan Gambar 4.27, S5 meyakini kebenaran jawabannya dan mampu mendapatkan jawaban yang benar terhadap hasil yang diperoleh yang diperkuat oleh hasil wawancara (**W5S5**) berikut.

P : *Bagaimana kesimpulan yang kamu dapat dari hasil pekerjaanmu ?*

S5: *yaa jadi nomor 1 dan 2 memiliki rumus yang berbeda, karena perbedaan pada titik pusatnya (PK5Sim3)*

Adapun pengkodingan S5 pada tahap penarikan kesimpulan dipaparkan pada Tabel 4.27.

**Tabel 4.27 Pengkodingan S2 pada Penarikan Kesimpulan**

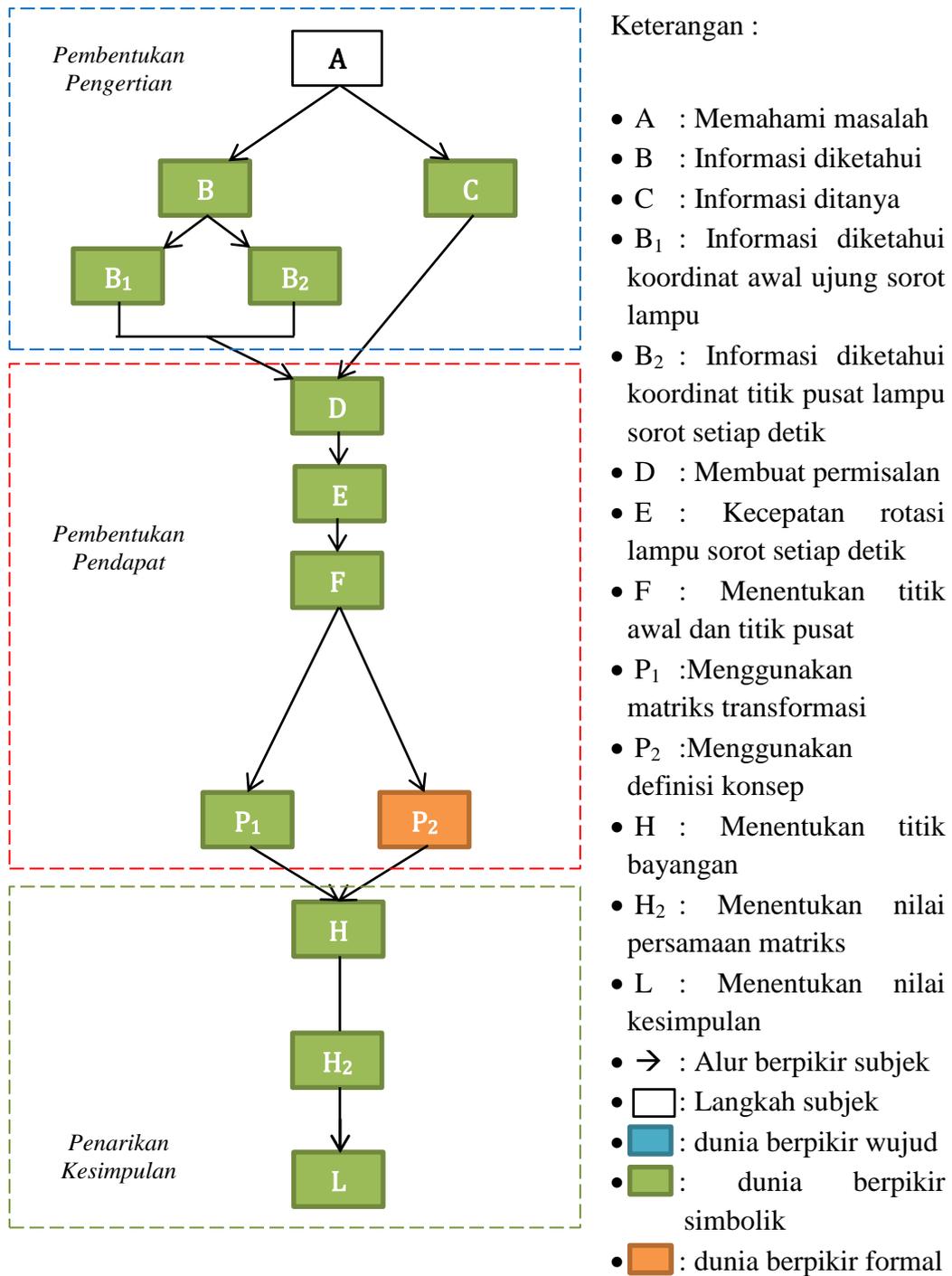
No.	Perilaku	Keterangan
1	PK4Sim2	Telah meyakini kebenaran jawabannya dengan menghitung kembali
2	PK5Sim3	Mampu menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.27, proses berpikir berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat dihasilkan pengkodean sebagai berikut.

**Tabel 4.28 Hasil Pengkodingan S5 pada Penarikan Kesimpulan**

Kode	Kegiatan Siswa
PKSim	Penarikan Kesimpulan secara <i>Symbolic-proceptual</i>

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.24, 4.26 dan 4.28, dapat disimpulkan bahwa proses berpikir S5 dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri cenderung ke dalam dunia kedua berpikir simbolik. Paparan data tentang proses berpikir S5 berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat ditunjukkan pada Gambar 4.28.



**Gambar 4.28** Proses Berpikir S5 berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika

## 6. Paparan data S6

Berikut paparan data terkait subjek 6 (S6) terkait proses berpikir siswa berdasarkan teori tiga dunia matematika.

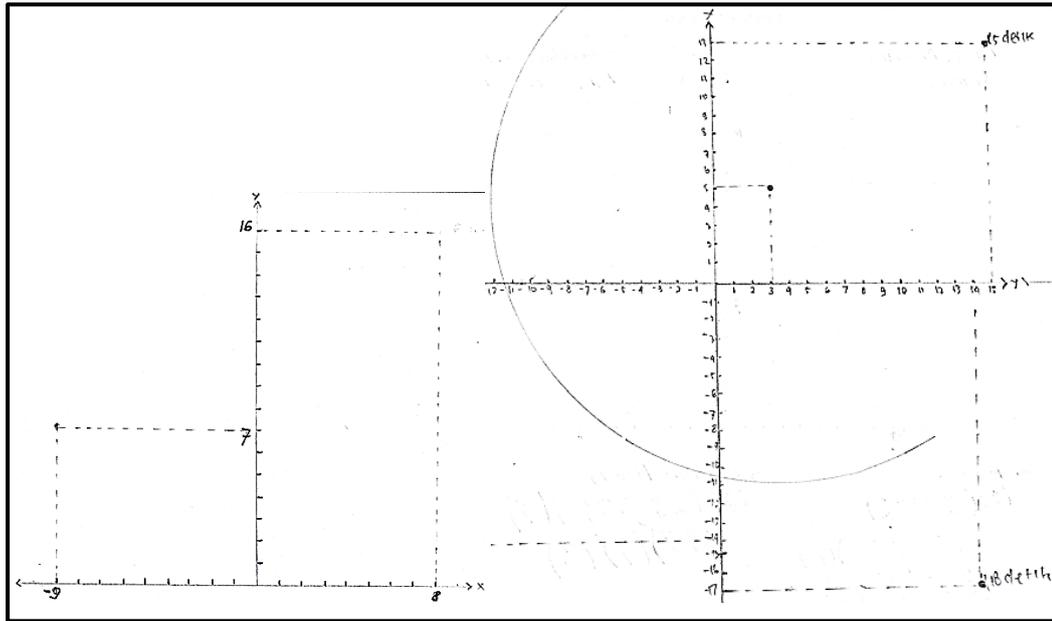
### a. Tahap Pembentukan Pengertian

Pada tahap pembentukan pengertian S6 mencoba untuk menggambar titik koordinat yang ada pada soal di bidang cartesius. Ketika menerima lembar soal, S6 terfokus terhadap gambar mercusuar sehingga S6 dapat memahami soal dengan melihat gambaran dari objek konkret.

S6 berpikir untuk memahami soal dengan melihat gambaran dari objek konkret (**PA1Em1**). S6 sudah menganggap informasi yang diketahui dan ditanyakan sudah jelas, sehingga dapat menganalisis dan mendeskripsikan konsep secara verbal (**PA2Em5**). Hal ini diperkuat dengan hasil *think aloud* berikut.

*“Menggambarkan masing-masing titik koordinat sebagai titik awal yang diketahui di soal pada sistem koordinat kartesius.” (T1S6)*

Berdasarkan hasil *think aloud*, S6 mengutarakan maksud soal dengan membuat titik koordinat yang diketahui ke dalam bidang cartesius. S6 tidak menuliskan atau menyusun informasi yang ditanyakan akan tetapi membayangkan dalam pikirannya (**PA3Em3**). Selanjutnya diwujudkan ke figur geometris berdasarkan informasi yang diketahui pada soal sehingga didapat titik koordinat seperti Gambar 4.29.



**Gambar 4.29 Hasil Kerja S6 pada Tahap Pembentukan Pengertian**

S6 menjelaskan titik yang digambarkan pada bidang cartesius tersebut merupakan titik awal sebelum bergerak sejauh yang ditanyakan pada soal. Selain itu, S6 dapat mengalisis dan mendeskripsikan konsep secara verbal (**PA4Em4**) serta diperkuat dengan hasil wawancara (**W1S6**) berikut.

P : Saat awal mendapat lembar soal ini, apa yang kamu pikirkan?

S2: kayak di logika dulu, digambar dulu

P : Bagaimana penjelasan kamu tentang gambar bidang cartesius ini?

S6: saya bayangin nya ada titik pusat  $(0, 0)$  dan  $(3, 5)$  selanjutnya saya gambarkan titik koordinatnya. Kemudian saya buat garis dari titik pusat ke titik awal (**PA4Em5**).

P : apakah kamu memahami maksud soal ini ?

S6: paham, jadi setelah menggambar ohh baru paham kalo memakai materi rotasi, matriks dan trigonometri yang juga lagi dipelajari

Dari data hasil *think aloud* (T1S6), Gambar 4.29 dan hasil wawancara (W1S6) menunjukkan S6 mampu memahami tes geometri yang diketahui dan ditanyakan dengan membayangkan dalam pikirannya kemudian mengungkapkan gambaran nyata ke dalam model matematika. Informasi pertama subjek mengatakan jika, “tahap awal yang dilakukan mengilustrasikan titik-titik koordinat yang diketahui di soal digambarkan ke dalam sistem koordinat

*kartesianus*”, dari T1S6 dan Gambar 4.29. Sehingga S6 dapat mewujudkan ke figur geometris di bidang kartesianus berdasarkan informasi yang diketahui pada soal dan didapat titik koordinat tersebut. Informasi kedua subjek menjelaskan bahwa, “menentukan titik-titik koordinat dengan mengetahui titik pusat yaitu  $(0, 0)$  dan  $(3, 5)$  dan dihubungkan dengan titik-titik ujung sorot lampu yang merupakan titik awal yaitu  $(8, 16)$ ,  $(-9, 7)$ ,  $(15, 13)$  dan  $(14, -17)$  sebelum dirotasi”, dari Gambar 4.29 dan W1S6.

Jadi S6 pada tahap pembentukan pengertian ini berpikir secara *embodied* dikarenakan proses berpikir subjek untuk memahami soal melalui bayangan objek konkret pada soal dan menggambarkan ke dalam figur geometris.

Adapun pengkodean S6 pada tahap pembentukan pengertian dipaparkan pada Tabel 4.29.

**Tabel 4.29 Pengkodean S6 pada Pembentukan Pengertian**

No.	Perilaku	Keterangan
1	PA1Em1	Mampu berpikir untuk memahami soal dengan melihat gambaran dari objek konkret
2	PA2Em5	Mampu menganalisis data pada soal dan mendeskripsikan konsep secara verbal
3	PA3Em3	Mampu menyusun informasi yang diketahui dan ditanyakan dengan membayangkan objek konkret dan gambaran dalam pikirannya
4	PA4Em4	Mampu menguraikan dengan kalimatnya sendiri dan mewujudkannya ke figur geometris
5	PA4Em5	Mampu mengungkapkan menggunakan kalimatnya sendiri dengan menganalisis dan mendeskripsikan konsep secara verbal

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.29, proses berpikir berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat dihasilkan pengkodean sebagai berikut.

**Tabel 4.30 Hasil Pengkodean S6 pada Pembentukan Pengertian**

Kode	Kegiatan Siswa
PAEm	Pembentukan pengertian secara <i>Embodied-conceptual</i>

## b. Tahap Pembentukan Pendapat

Setelah S6 membayangkan letak titik koordinat yang diketahui dalam bidang cartesius dan berpikiran bahwa dapat menyelesaikannya, akan tetapi S6 kurang memahami langkah selanjutnya. Akhirnya dari informasi yang diketahui, S6 mendapatkan ide saat membayangkan dalam pikirannya (**PD3Sim2**) yang dapat diamati dari hasil *think aloud* berikut.

*“jika kecepatan rotasi lampu sorot setiap detik sebesar  $10^\circ$  maka lampu sorot pada saat setelah,*

*- 6 detik bayangan berputar sebesar  $6 \times 10^\circ = 60^\circ$*

*- 9 detik bayangan berputar sebesar  $9 \times 10^\circ = 90^\circ$*

*- 15 detik bayangan berputar sebesar  $15 \times 10^\circ = 150^\circ$*

*- 18 detik bayangan berputar sebesar  $18 \times 10^\circ = 180^\circ$ .” (**T2S6**)*

Hal ini didukung juga dengan hasil wawancara bahwa S6 dapat menjelaskan dengan tepat cara penyelesaiannya dengan mengatakan pada saat wawancara (**W2S6**) berikut.

P : *Darimana kamu mendapatkan  $60^\circ$  ini ?*

S6: *karena didapat dari  $6 \times 10$*

Kemudian S6 dapat mencari solusinya dengan menghitung menggunakan matriks yang bersesuaian (**PD1**). S6 mengaitkan materi yang sudah diperoleh yaitu transformasi geometri dengan memulai untuk menghitung (**PD2Sim2**). Setelah data yang dibutuhkan sudah terkumpul (**PD5**) yakni sudut yang dirotasi dan titik koordinat sebelum dirotasi, S6 mensubstitusikan data ke dalam rumus persamaan matriks yakni dirotasikan sejauh  $O(0, 0)$  menggunakan rumus

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
 dan dirotasikan  $P(m, n)$  menggunakan rumus

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - m \\ y - n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$
 seperti di lembar jawaban pada Gambar

4.30.

$$\begin{aligned}
 & \text{1a } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{dan } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 8\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(1 - 2\sqrt{3}) \\ 4(\sqrt{3} + 2) \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \end{bmatrix} \\
 & \text{b } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ -\sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15-3 \\ 13-5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\
 & \text{2a } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\sqrt{3}-4 \\ 6-4\sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\sqrt{3}-1 \\ -4\sqrt{3}+11 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14-3 \\ -17-5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\
 & \text{b } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 27 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

**Gambar 4.30 Hasil Kerja S6 pada Tahap Pembentukan Pendapat**

Berdasarkan hasil *think aloud* (T2S6), Gambar 4.30 dan hasil wawancara (W2S6), S6 akhirnya dapat menyelesaikan soal dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk matriks (**PD6Sim3**) sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar dengan penghitungan rinci mengaitkan materi-materi sebelumnya (**PD7**).

Adapun pengkodean S6 pada tahap pembentukan pendapat dipaparkan pada Tabel 4.31.

**Tabel 4.31 Pengkodean S6 pada Pembentukan Pendapat**

No.	Perilaku	Keterangan
1	PD1Sim1	Mampu mencari solusi dengan melibatkan visualisasi pada simbol
2	PD3	Mendapatkan ide saat menyelesaikan soal
3	PD2	Dapat mengaitkan materi yang sudah diperoleh
4	PD2Sim2	Mampu mengaitkan materi yang telah diperoleh dengan memulai untuk menghitung
5	PD4	Mampu mengungkapkan alasan logis di setiap langkah penyelesaian
6	PD6	Mampu substitusi data ke dalam rumus
7	PD5Sim2	Dapat menghitung informasi yang telah diperoleh sebelumnya
8	PD7Sim3	Mampu menyelesaikan soal dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.31, proses berpikir berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat dihasilkan pengkodean sebagai berikut.

**Tabel 4.32 Hasil Pengkodean S6 pada Pembentukan Pendapat**

Kode	Kegiatan Siswa
PDSim	Pembentukan pendapat secara <i>Symbolic-proceptual</i>

### c. Tahap Penarikan Kesimpulan

Pada tahap terakhir ini, S6 memberikan jawaban yang benar dan tepat sesuai dengan hasil *think aloud* berikut.

“Setelah semua yang diketahui dimasukkan hasilnya

1 a) setelah dirotasikan sejauh  $60^\circ$  menjadi  $(4 - 8\sqrt{3}, 4\sqrt{3} + 8)$

b) setelah dirotasikan sejauh  $90^\circ$  menjadi  $(-7, -9)$

2 a) setelah dirotasikan sejauh  $150^\circ$  menjadi  $(-6\sqrt{3} - 1, -4\sqrt{3} + 11)$

b) setelah dirotasikan sejauh  $180^\circ$  menjadi  $(-8, 27)$ ” (T3S6)

Sebelum memberikan kesimpulan, S6 yakin dengan hasil jawaban berdasarkan Gambar 4.31.

1a	maka, koordinat ujung sorot lampu setelah 6 detik adalah $(4 - 8\sqrt{3}, 4\sqrt{3} + 8)$
b	maka, koordinat ujung sorot lampu setelah 9 detik adalah $(-7, -9)$ ✓
2a	maka, koordinat ujung sorot lampu setelah 15 detik adalah $(-6\sqrt{3} - 1, -4\sqrt{3} + 11)$ ✓
b	maka, koordinat ujung sorot lampu setelah 18 detik adalah $(-8, 27)$ ✓✓

**Gambar 4.31 Hasil Kerja S6 pada Tahap Penarikan Kesimpulan**

Hasil *think aloud* dan kesimpulan S6 yang telah dipaparkan dapat diperkuat kembali dengan hasil wawancara (**W3S6**) berikut.

- P : *setelah mendapatkan hasilnya, apakah kamu memeriksa kembali ketepatan perhitungannya ?*
- S6: *iya kak saya koreksi lagi (PK1)*
- P : *apakah jawaban kamu sudah sesuai dengan apa yang diketahui dan ditanyakan pada soal ?*
- S6: *sesuai kak (PK2)*
- P : *apakah kamu yakin langkah-langkah kamu membawa kebenaran pada hasil jawabanmu ?*
- S6: *yakin dong kak (PK3)*
- P : *terakhir nih, gimana kesimpulan yang kamu dapat dari hasil pengerjaanmu ini ? (PK5)*
- S6: *yaa jadi tau soal kayak gini dan mungkin saya bisa mengerjakan nantinya, jadi ilmu baru untuk saya*

Informasi yang didapat dari hasil *think aloud* (T3S6), Gambar 4.31 dan hasil wawancara (W3S6), subjek memiliki jawaban yaitu titik bayangan setelah dirotasi selama 6 detik menjadi  $(4 - 8\sqrt{3}, 4\sqrt{3} + 8)$ , titik bayangan setelah dirotasi selama 9 detik menjadi  $(-7, -9)$ , titik bayangan setelah dirotasi selama 15 detik menjadi  $(-6\sqrt{3} - 1, -4\sqrt{3} + 11)$ , dan titik bayangan setelah dirotasi selama 18 detik menjadi  $(-8, 27)$ .

Selanjutnya S6 tetap melakukan pengecekan atas hasil pengerjaan dengan memulai menghitung kembali dan memeriksa kesesuaian langkah

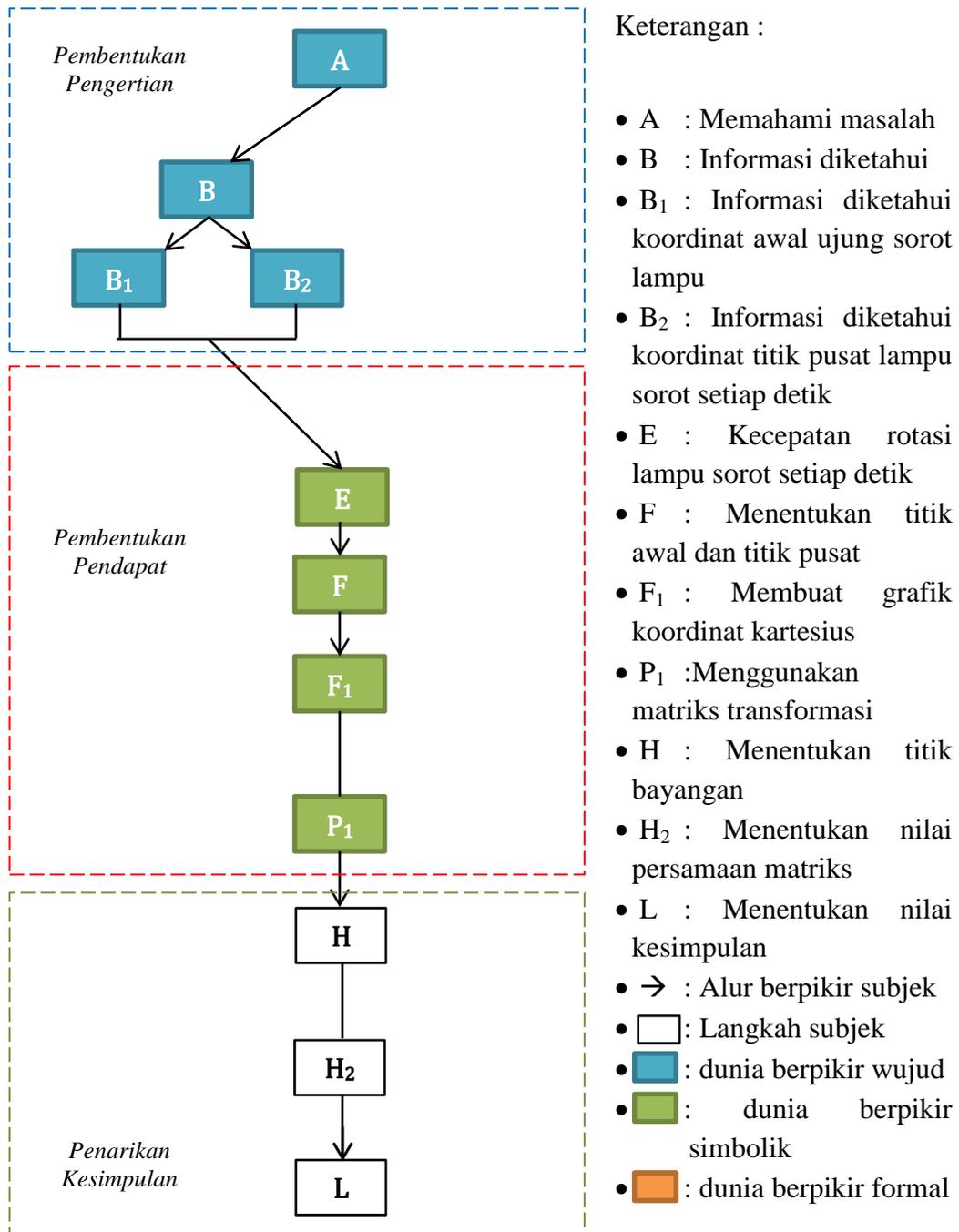
jawaban. Selain itu diungkapkan bahwa S6 meyakini juga atas kebenaran jawabannya (**PK4**), sehingga mampu memberikan alasan dari hasil kesimpulan pekerjaannya.

Adapun pengkodean S6 pada tahap penarikan kesimpulan dipaparkan pada Tabel 4.33.

**Tabel 4.33 Pengkodean S6 pada Penarikan Kesimpulan**

<b>No.</b>	<b>Perilaku</b>	<b>Keterangan</b>
1	PK1	Telah memeriksa ketepatan perhitungan
2	PK2	Telah mengecek kesesuaian alasan setiap langkah pengerjaan
3	PK3	Telah mengecek kesesuaian langkah penyelesaian soal
4	PK4	Telah meyakini kebenaran jawabannya
5	PK5	Mampu menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya

Selanjutnya berdasarkan Tabel 4.30, 4.32 dan 4.33, dapat disimpulkan bahwa proses berpikir S6 dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri terdapat di 2 dunia berpikir matematika. Pada tahap pembetulan pengertian S6 cenderung ke dalam dunia pertama berpikir wujud dengan berpikir tentang suatu informasi yang dapat dirasakan dan dipahami secara fisik ataupun dibayangkan dalam pikiran, serta pada tahap pembetulan pendapat cenderung ke dalam dunia kedua berpikir simbolik dengan berpikir menggunakan simbol untuk penghitungan sesuai konsep. Paparan data tentang proses berpikir S6 berdasarkan teori tiga dunia matematika dapat ditunjukkan pada Gambar 4.32.



**Gambar 4.32** Proses Berpikir S6 berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika

## B. Hasil Penelitian

Pada bagian hasil temuan penelitian dan penjabaran terkait proses berpikir siswa berkemampuan tinggi berdasarkan teori tiga dunia matematika memiliki alur berpikir yang berbeda-beda. Proses berpikir setiap subjek yang dilalui ketika menyelesaikan soal model PISA topik geometri yaitu melalui tahap pembentukan pengertian, pembentukan pendapat serta penarikan kesimpulan. Selain itu berdasarkan teori tiga dunia matematika S1 cenderung berpikir pada dunia kedua yakni *symbolic-proceptual world*. S2 dan S3 proses berpikir mereka melalui di semua tiga dunia berpikir matematika yaitu *embodied-conceptual*, *symbolic-proceptual* dan *formalism-axiomatic*. S4 dan S5 cenderung berpikir di 2 dunia matematika yaitu *symbolic-proceptual world* dan *formalism-axiomatic world*. Serta pada subjek keenam juga cenderung berpikir di dua dunia matematika yaitu *embodied-conceptual world* dan *symbolic-proceptual world*. Selanjutnya akan dijelaskan keterkaitan perilaku setiap subjek antara proses berpikir dengan teori tiga dunia matematika pada Tabel 4.34.

**Tabel 4.34 Proses Berpikir S1 Berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika**

Proses Berpikir Tiga Dunia Berpikir Matematika	Pembentukan Pengertian	Pembentukan Pendapat	Penarikan Kesimpulan
Dunia kedua berpikir simbolik ( <i>Proceptual-symbolic world</i> )	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa mampu berpikir untuk memahami soal dengan membaca berulang kali</li> <li>- Siswa dapat menganalisis data pada tes geometri dengan memulai untuk menghitung dan mengukur</li> <li>- Siswa mampu berpikir untuk memahami soal dengan membaca berulang kali</li> <li>- Siswa dapat menganalisis data pada tes geometri dengan memulai untuk menghitung dan mengukur</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa mampu berpikir untuk mencari solusi dengan melibatkan visualisasi pada simbol</li> <li>- Siswa dapat mengaitkan materi yang sudah diperoleh yaitu tentang rotasi dan dapat menghitung penyelesaiannya menggunakan matriks transformasi</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa telah meyakini kebenaran jawabannya meskipun jawabannya ada yang berbentuk akar</li> </ul>

Lanjutan Tabel 4.34.

Proses Berpikir Tiga Dunia Berpikir Matematika	Pembentukan Pengertian	Pembentukan Pendapat	Penarikan Kesimpulan
Dunia kedua berpikir simbolik ( <i>Proceptual-symbolic world</i> )	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa dapat menyusun informasi yang diketahui dan yang ditanyakan dengan menuliskan <math>v = 10^\circ/s</math></li> <li>- Siswa mampu berpikir untuk menguraikan data dengan mengetahui letak menara mercusuar serta mengungkapkan dengan kalimatnya sendiri</li> <li>- Sehingga ada rasa ingin menyelesaikan permasalahan dengan informasi yang ada.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa mampu berpikir untuk mencari solusi dengan melibatkan visualisasi pada simbol</li> <li>- Siswa dapat mengaitkan materi yang sudah diperoleh yaitu tentang rotasi dan dapat menghitung penyelesaiannya menggunakan matriks transformasi</li> <li>- Siswa mendapatkan ide pada saat menyelesaikan tes geometri setelah melihat buku catatannya</li> <li>- Siswa memiliki alasan logis yaitu menjelaskan titik-titik koordinat ujung sorot lampu tersebut dirotasikan pada titik-titik pusat tertentu sehingga memperoleh titik koordinat bayangan</li> <li>- Siswa dapat menggunakan informasi yang telah mereka peroleh sebelumnya dengan mengkalikan kecepatan lampu sorot dengan waktu tertentu</li> <li>- Siswa mensubstitusi data ke dalam rumus persamaan matriks transformasi</li> <li>- Siswa dapat menyelesaikan soal dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa telah meyakini kebenaran jawabannya meskipun jawabannya ada yang berbentuk akar</li> <li>- Siswa mampu menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya yang terdapat perbedaan perlakuan antara nomor 1 dan 2</li> </ul>

Tabel 4.35 Proses Berpikir S2 Berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika

Proses Berpikir Tiga Dunia Berpikir Matematika	Pembentukan Pengertian	Pembentukan Pendapat	Penarikan Kesimpulan
Dunia pertama berpikir wujud ( <i>Embodied world</i> )	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa mampu berpikir untuk memahami soal dengan membayangkan dan menggambar ilustrasi mercusuar</li> <li>- Siswa dapat menganalisis data pada tes geometri sambil mempraktekkan menggunakan gerakan tangan menunjukkan arah putaran</li> <li>- Siswa dapat menyusun informasi yang diketahui dan yang ditanyakan dengan membayangkan dalam pikirannya dan mewujudkan ke bidang kartesius</li> </ul>	-	-

Lanjutan Tabel 4.35.

Proses Berpikir Tiga Dunia Berpikir Matematika	Pembentukan Pengertian	Pembentukan Pendapat	Penarikan Kesimpulan
<p><b>Dunia pertama berpikir wujud (Embodied world)</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa dapat berpikir untuk menguraikan data dengan menentukan titik awal koordinat ujung sorot lampu dan menghubungkan ke titik pusatnya</li> <li>- Siswa ingin menyelesaikan soal dengan mendeskripsikan konsep secara verbal</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-</li> </ul>
<p><b>Dunia kedua berpikir simbolik (Proceptual-symbolic world)</b></p>		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa memperoleh informasi sebelumnya dengan memvisualisasikan ke simbol dalam persoalan matematika menggunakan rumus matriks transformasi geometri</li> <li>- Siswa mensubstitusi data ke dalam rumus</li> <li>- Siswa mampu menghitung untuk menyelesaikan tes geometri dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar</li> <li>- Siswa mampu berpikir untuk mencari solusi dengan menunjukkan pemetaan dari titik asal ke titik bayangannya</li> <li>- Siswa mampu mengaitkan materi dengan menjelaskan <math>A'(x', y')</math> merupakan hasil dari rotasi setelah diputar sejauh sudut yang diminta</li> <li>- Siswa mendapatkan ide pada saat menyelesaikan tes geometri dengan menyebutkan <math>A'(x', y')</math> sebagai titik koordinat bayangan yang dicari. Sehingga dapat diartikan <math>A(x, y)</math> dipetakan ke <math>A'(x', y')</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa telah memeriksa kembali ketepatan perhitungan</li> <li>- Siswa telah mengecek kesesuaian langkah jawaban yang dinyatakan dalam simbol matematika</li> <li>- Siswa telah meyakini kebenaran jawabannya</li> <li>- Siswa mampu menarik kesimpulan</li> </ul>

**Tabel 4.36 Proses Berpikir S3 Berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika**

Proses Berpikir Tiga Dunia Berpikir Matematika	Pembentukan Pengertian	Pembentukan Pendapat	Penarikan Kesimpulan
<b>Dunia pertama berpikir wujud (Embodied world)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa mampu berpikir dengan membayangkan bahwa lampu sorot mercusuar berputar lawanan arah jarum jam</li> <li>- Siswa mampu menganalisis data pada soal dengan mencoba langkah awal menggambar titik koordinat</li> <li>- Siswa menyusun info diketahui dan ditanyakan dengan membayangkan dalam pikirannya &amp; mewujudkan di bidang kartesius</li> <li>- Siswa mampu menguraikan data dengan menarik garis dari 2 titik yang diketahui</li> <li>- Siswa ingin menyelesaikan soal</li> </ul>	-	-
<b>Dunia kedua berpikir simbolik (Proceptual-symbolic world)</b>	-	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa mampu berpikir mencari solusi</li> <li>- Siswa mampu mengaitkan materi yang ditemukan dalam catatannya dan buku cetak matematika</li> <li>- Siswa mendapatkan ide bahwa <math>10^\circ</math> dikalikan dengan waktu sehingga menghasilkan alpha atau sudutnya</li> <li>- Siswa memulai menghitung dengan mensubstitusi data ke dalam rumus matriks transformasi geometri</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa telah memeriksa kembali ketepatan perhitungan</li> <li>- Siswa telah mengecek kesesuaian langkah penyelesaian soal</li> <li>- Siswa telah meyakini kebenaran jawabannya</li> </ul>
<b>Dunia ketiga berpikir formal (Formal)</b>	-	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa memiliki alasan logis dari definisi konsep bahwa terdapat titik awal &amp; titik pusat</li> <li>- Siswa mampu menggunakan informasi yang telah diperoleh</li> <li>- Siswa mampu menyelesaikan soal dengan langkah-langkah yang runtut dan benar</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa mampu menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya dengan memunculkan makna &amp; manfaat dari maksud soal</li> </ul>

**Tabel 4.37 Proses Berpikir S4 Berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika**

Proses Berpikir	Pembentukan Pengertian	Pembentukan Pendapat	Penarikan Kesimpulan
<b>Tiga Dunia Berpikir Matematika</b>	-	- Siswa mampu berpikir untuk mencari solusi dengan menuliskan rumus umum matriks transformasi	
<b>Dunia kedua berpikir simbolik (Proceptual-symbolic world)</b>	-	- Siswa menghitung penyelesaiannya menggunakan matriks yang bersesuaian - Siswa mendapatkan ide cara menghitung trigonometri - Siswa memiliki alasan logis setiap langkah penyelesaian - Siswa mampu menghitung dengan mensubstitusi data ke dalam rumus - Siswa dapat menyelesaikan soal	
<b>Dunia ketiga berpikir formal (Formal)</b>	- Siswa mampu berpikir untuk memahami soal dengan membaca soal secara keseluruhan dahulu - Siswa mampu menganalisis data pada soal - Siswa mampu menyusun informasi yang diketahui dan yang ditanyakan yaitu posisi titik koordinat atas menara mercusuar - Siswa mengungkapkan dengan kalimatnya sendiri bahwa lampu sorot pada mercusuar arah putaran berlawanan arah jarum jam maka perputaran tersebut merupakan arah positif - Siswa ingin menyelesaikan soal	- Siswa mengaitkan materi yang sudah diperoleh dengan memunculkan pengalaman pada objek beserta sifat-sifatnya	

**Tabel 4.38 Proses Berpikir S5 Berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika**

Proses Berpikir	Pembentukan Pengertian	Pembentukan Pendapat	Penarikan Kesimpulan
<b>Tiga Dunia Berpikir Matematika</b>			
<b>Dunia kedua berpikir simbolik (Proceptual-symbolic world)</b>	- Siswa menganalisis data di soal dengan membuat permisalan dan memulai untuk menghitung - Siswa menuliskan informasi yang didapat melalui permisalan	- Siswa mulai menghitung untuk mencari solusi - Siswa mengaitkan materi yang sudah diperoleh yaitu rotasi - Siswa menghitung setelah mendapatkan ide pada saat menyelesaikan soal	- Siswa menghitung kembali agar yakin kebenarannya jawabannya

Lanjutan Tabel 4.38.

Proses Berpikir	Pembentukan Pengertian	Pembentukan Pendapat	Penarikan Kesimpulan
<b>Tiga Dunia Berpikir Matematika</b>			
<b>Dunia kedua berpikir simbolik (Proceptual-symbolic world)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa dapat merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika</li> <li>- Siswa melanjutkan menghitung untuk menyelesaikan soal</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa memiliki alasan logis setiap langkah penyelesaian</li> <li>- Siswa dapat menggunakan informasi yang telah mereka peroleh sebelumnya dengan mensubstitusi data ke dalam rumus</li> <li>- Siswa dapat menyelesaikan soal dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya dengan merepresen tasikan data ke dalam bentuk simbol matematika</li> </ul>
<b>Dunia ketiga berpikir formal (Formal)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa mampu berpikir untuk memahami soal bahwa mengetahui ujung sorot lampu awal dan setelah dirotasi</li> </ul>	-	-

Tabel 4.39 Proses Berpikir S6 Berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika

Proses Berpikir	Pembentukan Pengertian	Pembentukan Pendapat	Penarikan Kesimpulan
<b>Tiga Dunia Berpikir Matematika</b>			
<b>Dunia pertama berpikir wujud (Embodied world)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa mampu berpikir untuk memahami soal dengan melihat gambaran dari objek konkret</li> <li>- Siswa mampu menganalisis dan mendeskripsikan konsep secara verbal</li> <li>- Siswa mampu menyusun informasi diketahui dan ditanyakan dengan membayangkan dalam pikirannya</li> <li>- Siswa berpikir untuk mencoba membuat garis dari titik pusat ke titik awal serta mendeskripsikan konsep secara verbal</li> </ul>		
<b>Dunia kedua berpikir simbolik (Proceptual-symbolic world)</b>	-	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Siswa mencoba berpikir mencari solusi dengan menghitung menggunakan matriks yang bersesuaian</li> <li>- Siswa telah mengaitkan materi yang sudah diperoleh yaitu transformasi geometri dengan memulai untuk menghitung</li> </ul>	

**Lanjutan Tabel 4.39.**

Proses Berpikir	Pembentukan Pengertian	Pembentukan Pendapat	Penarikan Kesimpulan
Tiga Dunia Berpikir Matematika	-	- Siswa mendapatkan ide saat membayangkan dalam pikirannya	
Dunia kedua berpikir simbolik ( <i>Proceptual-symbolic world</i> )		- Siswa memiliki alasan logis setiap langkah penyelesaian - Siswa menghitung menggunakan informasi yang telah diperoleh sebelumnya - Siswa mensubstitusi data ke dalam rumus - Siswa dapat menyelesaikan soal dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk simbol matematika sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar	

Berdasarkan temuan diatas didapat dalam penelitian ini proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dari setiap subjek terdapat persamaan dan perbedaan. Semua subjek telah melalui semua tahapan proses berpikir, namun terdapat beberapa subjek tidak melakukan aktivitas dalam menyelesaikan tes geometri berdasarkan teori tiga dunia matematika. Adapun subjek lainnya melewati setiap tahapan dengan perbedaan proses yang dilakukan. Hal ini dapat diamati pada Tabel 4.40.

**Tabel 4.40 Kesimpulan Subjek**

Proses Berpikir	PA	PD	PK
Tiga Dunia Berpikir Matematika			
Em	S2, S3, S6		
Sim	S1, S5	S1, S2, S3, S4, S5, S6	S1, S2, S3, S5
For	S4, S5	S2, S3, S4	S3

Pada penelitian ini, berdasarkan tabel 4.40 dapat disimpulkan bahwa S1, S2, S3, S4 dan S5 cenderung berpikir *symbolic* jika ditinjau dari teori tiga dunia berpikir matematika. Khususnya pada S1 dan S5 semua tahapan proses berpikir

dilalui dengan berpikir secara *symbolic*. Hal ini diperkuat dengan hasil wawancara mereka dalam memahami soal, mendapat ide saat menyelesaikan soal hingga memeriksa ketepatan perhitungan dengan melibatkan visualisasi simbol serta merepresentasikan data ke dalam permisalan matematika. Sedangkan S2 dan S3 terdapat perbedaan aktivitas siswa pada tahapan proses berpikir di pembentukan pengertian. Saat wawancara dan hasil *think aloud* menjelaskan bahwa mereka memahami soal dengan membayangkan dalam pikirannya dan mengilustrasikan ke dalam figur geometris berdasarkan gambaran imajinasi mereka, sehingga mereka berpikir secara *embodied*. Selanjutnya S4 dapat diamati dari hasil *think aloud* bahwa subjek dapat memahami permasalahan kedalam definisi konsep dengan jelas, sehingga subjek berpikir secara *formal*.

## **BAB V**

### **PEMBAHASAN**

Berdasarkan paparan data dan hasil penelitian dapat ditarik kesimpulan bahwa setiap subjek memiliki proses berpikir di dunia matematika yang berbeda-beda. Berikut penjelasan proses berpikir siswa berkemampuan tinggi berdasarkan teori tiga dunia matematika.

#### **A. Proses Berpikir Siswa Berkemampuan Tinggi Berdasarkan Berpikir *Embodied***

Tahapan awal proses berpikir siswa yaitu pembentukan pengertian yang cenderung berpikir *embodied* ini terjadi pada subjek kedua, ketiga dan keenam. Sehingga disimpulkan bahwa siswa dapat berpikir hanya dengan membayangkan objek konkret tersebut untuk memahami soal. Selanjutnya siswa mampu menganalisis soal dengan menyusun informasi yang diketahui dan ditanyakan melalui gambaran yang siswa pikirkan. Hal ini sejalan dengan penelitian oleh Musriroh dkk. (2021) bahwa siswa berkemampuan tinggi membayangkan permasalahan terlebih dahulu selanjutnya menguraikan informasi yang diketahui dan ditanyakan dengan menggambar dari permasalahan tersebut.

Proses berpikir siswa pada tahap pembentukan pengertian ini dengan menguraikan data pada soal yang menentukan titik awal koordinat yaitu ujung lampu sorot mercusuar yang telah ditentukan pada soal. Selanjutnya siswa menghubungkan titik awal koordinat tersebut dengan titik pusat melalui bidang kartesius. Siswa yang berpikir *embodied* membayangkan terlebih dahulu dan mengilustrasikan lewat gambar mercusuar berdasarkan imajinasinya. Sama hal

nya dengan hasil wawancara di penelitian Ambarwati dkk. (2018) terdapat hasil yang dominan bahwa siswa mampu membayangkan suatu objek yang menjadi permasalahan yang artinya proses berpikir siswa cenderung dapat mentransformasikan gambar melalui objek yang dibayangkan.

Selain itu siswa juga menganalisis data sambil mempratekkan menggunakan gerakan tangan yang menunjukkan arah putaran rotasi. Pemahaman siswa tentang soal dapat diidentifikasi melalui gerakan yang tanpa disadari dilakukan pada saat berbicara mengenai matematika (Sagita & Hendriana, 2021). Setelah siswa memahami maksud soal, siswa membuat garis dari titik pusat ke titik awal yang dideskripsikan secara verbal. Seperti yang dikatakan Sanjaya bahwa salah satu indikator dalam pemahaman konsep yaitu mampu menerangkan secara verbal apa yang telah didupatkannya (Kartika, 2018). Pada tahap pembentukan pendapat dan penarikan kesimpulan tidak ada siswa yang cenderung berpikir *embodied*.

## **B. Proses Berpikir Siswa Berkemampuan Tinggi Berdasarkan Berpikir *Symbolic***

Pada tahap pembentukan pengertian, siswa yang cenderung berpikir *symbolic* terjadi pada subjek pertama dan kelima. Ketika soal dibagikan, siswa membaca berulang kali agar dapat memahami maksud pada soal dikarenakan soal model PISA ini berbentuk soal nonrutin atau seperti soal cerita. Salah satu pemahaman untuk memahami soal berbentuk cerita yaitu menangkap makna yang disampaikan oleh tulisan yang dibaca (Laily, 2014). Jadi cara berpikir siswa untuk memulai memecahkan permasalahan membutuhkan proses yang

cukup membutuhkan waktu karena menerjemahkan soal berbentuk cerita menjadi ringkasan yang diperlukan di langkah berikutnya.

Selanjutnya siswa berpikir melibatkan visualisasi pada simbol untuk dapat menyusun informasi yang diketahui dan ditanyakan. Soal model PISA pada penelitian ini berupa soal uraian yang memaknai konsep dalam soal tersebut dapat diungkapkan melalui bentuk simbol (Rasitullah & Wahyu, 2021). Maksud dari hal tersebut siswa menerjemahkan soal uraian dengan mengubah ke dalam simbol matematika yang sudah disepakati. Siswa mengungkapkan dengan bahasanya sendiri jika letak menara mercusuar merupakan data yang diketahui sehingga ada rasa ingin menyelesaikan permasalahan dengan informasi yang diketahui. Hal ini sesuai pernyataan dari Sundari dkk. (2019) yakni agar dapat menyelesaikan soal uraian dapat dilakukan dengan membaca dan memahami tiap kalimat pada soal dengan cermat dan memilah data yang diketahui dan apa yang ditanyakan. Sedangkan pada tahap pembentukan pendapat semua siswa berpikir secara *symbolic*.

Kegiatan awal siswa pada tahap pembentukan pendapat yaitu mencoba mencari solusi untuk mendapatkan ide dengan mengaitkan materi yang sudah diperoleh yaitu tentang rotasi dengan menggunakan matriks transformasi dan melanjutkan dengan menghitung penyelesaiannya. Sesuai dengan penelitian (Hikmawati dkk., 2019) bahwa subjek berkemampuan tinggi mampu menjelaskan ide strategi yang ada dalam pikirannya melalui tulisan dan penyampaiannya yang singkat. Kadangkala siswa mengingat kembali materi yang diperlukan dengan membuka buku catatan agar percaya diri untuk dapat mengerjakan soal yang diberikan.

Proses berpikir siswa pada tahap pembentukan pendapat ini memiliki alasan logis dalam menjelaskan titik-titik koordinat ujung sorot lampu yang dirotasikan dengan titik-titik pusat menghasilkan titik-titik koordinat bayangan yang menjadikan solusi dari permasalahan. Sesuai dengan penelitian yang dilakukan oleh Zumratun (2020) salah satu pengembangan dari kemampuan penalaran yaitu setiap pengambilan kesimpulan disertai dengan memberikan alasan yang logis.

Langkah selanjutnya setelah data yang diketahui dan ditanyakan sudah lengkap, siswa menyubstitusikan data tersebut ke dalam rumus persamaan matriks transformasi. Siswa pada tahap pembentukan pendapat saat menyelesaikan soal, dapat merepresentasikan data dengan permisalan ke dalam bentuk simbol matematika. Hal tersebut sesuai dengan temuan penelitian dari Santoso & Setyaningsih (2020) yang menunjukkan siswa dengan kemampuan matematika tinggi mampu melakukan permisalan untuk membuat model matematika. Sama halnya dengan hasil penelitian dari Lette & Manoy (2019) bahwa representasi siswa berkemampuan tinggi sebelum membuat persamaan matematika untuk dapat memahami suatu permasalahan siswa membuat permisalan dengan representasi simbol dalam menyajikan informasi yang diketahui.

Dan pada tahap terakhir penarikan kesimpulan dilalui oleh subjek pertama, kedua, ketiga dan kelima. Proses berpikir siswa pada tahap ini melakukan penghitungan ulang untuk memeriksa ketepatan kebenaran jawaban yang diperoleh. Siswa juga dapat menarik kesimpulan dengan menuliskan simbol dari titik bayangan pada transformasi geometri beserta hasil akhir yang

telah dilakukan. Seperti yang dilakukan Monikasari dkk. (2021) dalam penelitiannya yakni menuliskan kesimpulan berdasarkan langkah-langkah penyelesaian, membuktikan kebenaran dengan mengecek kembali hasil akhir dan memastikan jawaban yang diperoleh sudah benar sesuai langkah strategi yang disusun.

### **C. Proses berpikir siswa berkemampuan tinggi berdasarkan berpikir**

#### ***Formal***

Sama halnya dengan berpikir secara *symbolic*, pada dunia berpikir secara formal ini, dapat disimpulkan bahwa dari 6 subjek melalui semua tahapan dari proses berpikir. Pada tahap pembentukan pengertian siswa lebih awal memahami soal dengan menganalisis data pada soal dan memunculkan konsep dari istilah yang ditanyakan pada soal yaitu rotasi atau perputaran ditentukan oleh pusat putaran, arah putaran dan besar sudut putaran. Sependapat dengan Laily (2014) mengungkapkan bahwa dalam kegiatan memahami soal otomatis dapat menangkap arti / makna dari uraian yang telah dibaca. Jadi siswa dapat mengerti maksud soal dengan membaca secara keseluruhan dahulu sehingga mampu menganalisis data pada soal.

Siswa dapat menghubungkan informasi dan konsep yang diperoleh dari soal dengan materi yang telah mereka pelajari. Jika pada soal diketahui bahwa lampu sorot pada mercusuar arah putaran berlawanan arah jarum jam maka perputaran tersebut merupakan arah positif. Dan yang ditanyakan tentang hasil bayangan yang dihasilkan setelah titik koordinat tersebut dirotasikan sejauh sudut yang diminta. Pentingnya keterkaitan topik geometri dengan materi pelajaran matematika direlasikan ke kehidupan sehari-hari, memudahkan siswa

untuk memunculkan konsep yang terdapat pada topik matematika tersebut (Rahmawati, 2013). Hal ini menunjukkan bahwa siswa lebih memahami konsep materi yang ada pada soal selain fokus untuk menyelesaikan tes tersebut.

Selanjutnya pada tahap pembentukan pendapat siswa berpikir untuk menjelaskan konsep transformasi geometri yang terdapat pada soal. Siswa mengaitkan materi dengan memunculkan konsep definisi pada informasi yang diketahui bahwa titik-titik koordinat awal ujung sorot lampu dengan titik menara mercusuar tertentu. Suatu konsep merupakan serangkaian pengalaman yang didefinisikan sebagai suatu objek yang terkandung dalam informasi yang dipahami sebelumnya (Gusniwati, 2015). Jadi siswa memiliki alasan logis dari definisi konsep yang siswa pahami berdasarkan materi yang telah diperoleh.

Siswa menjelaskan data yang dibutuhkan adalah proses yang diminta pertama yaitu titik-titik koordinat awal tersebut dirotasikan sejauh setelah beberapa detik yang ditanyakan pada soal. Siswa menuliskan cara pembentukan definisi konsep transformasi geometri dalam persoalan matematika serta menjelaskan setiap langkah penyelesaian secara runtut dan benar.

Dan pada tahap terakhir penarikan kesimpulan siswa menyimpulkan dari hasil pekerjaannya berdasarkan kesesuaian langkah-langkah penyelesaian soal dengan menggabungkan definisi konsep beserta sifat-sifat dari masing-masing jenis transformasi geometri yang ditanyakan. Selain itu siswa berpikir secara *formal* mampu memunculkan makna dan manfaat dari tes geometri dengan model soal PISA berdasarkan alasan di setiap pengerjaannya. Sehingga hasil akhir dari maksud tes geometri ini, siswa dapat mengetahui titik koordinat sebelum dan sesudah dirotasi.

## **BAB VI**

### **PENUTUP**

#### **A. Simpulan**

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan yang telah diuraikan sebelumnya maka dapat disimpulkan bahwa proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA topik geometri pada tahap pembentukan pengertian di penelitian ini terdapat di semua dunia berpikir matematika. Di dunia perwujudan-konseptual siswa cenderung tidak menuliskan atau menyusun informasi yang diketahui dan yang ditanyakan melainkan hanya membayangkan dalam pikirannya dan diwujudkan ke figur geometris. Siswa dapat berpikir untuk memahami dan menganalisis data pada soal setelah membayangkan objek konkret, melakukan gerakan sehingga menuangkan hasil ilustrasi gambaran sebagai tahap awal menyelesaikan soal tersebut.

Pada dunia simbolis-proseptual di penelitian, subjek memahami dan menganalisis data pada soal dengan merepresentasikan data ke dalam simbol matematika. Dan pada proses berpikir siswa di dunia formal-aksiomatik di tahap pembentukan pengertian, subjek mengungkapkan informasi yang ada di soal dengan memunculkan definisi konsep yang menjadikan uraian data yang diketahui dan ditanyakan.

Selanjutnya proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA topik geometri pada tahap pembentukan pendapat di penelitian ini, cenderung di dunia simbolis-proseptual dan dunia formal-aksiomatik. Pada dunia matematika yang kedua, subjek mendapatkan

solusi dengan mensubstitusi data ke dalam rumus berdasarkan informasi yang telah diperoleh dan dilanjutkan menghitung prosesnya hingga menemukan hasil akhir. Sedangkan dengan tahap berpikir yang sama akan tetapi berbeda dunia berpikir matematika yaitu dunia formal, subjek menghubungkan informasi dan konsep yang diperoleh dari soal dengan materi yang diperoleh dengan menunjukkan pemetaan dari kedua titik koordinat untuk mempermudah subjek dalam menyelesaikan soal.

Proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA topik geometri pada tahap yang terakhir yaitu penarikan kesimpulan, siswa juga cenderung pada dunia simbolis-proseptual dan dunia formal-aksiomatik. Di dunia simbolis-proseptual subjek meyakini kebenaran jawabannya dengan melakukan penghitungan kembali untuk mengecek kesesuaian pengerjaannya. Sedangkan dunia formal-aksiomatik, subjek menggabungkan definisi konsep beserta sifat-sifat dari transformasi geometri yang ditanyakan.

## **B. Saran**

Berdasarkan hasil penelitian dan kesimpulan yang telah diuraikan sebelumnya peneliti memberikan saran bahwa :

1. Bagi pendidik sebaiknya ada varian dalam pemberian masalah non rutin seperti soal model PISA ini yang berkarakter soal cerita sehingga siswa mampu menertejemahkan bahasa dalam soal tersebut ke dalam bentuk matematika. Selain itu, pendidik perlu memberikan solusi dari penyelesaian masalah yang beragam tidak hanya berpatokan pada penghafalan rumus akan

tetapi mendapatkan pengalaman dari kehidupan nyata yang dituangkan dalam soal.

2. Bagi peneliti selanjutnya sebaiknya melakukan penelitian proses berpikir dalam karakteristik siswa yang lebih beragam, sehingga dapat mengoptimalkan kinerja siswa serta memahami siswa setiap langkah penyelesaian masalah dengan karakter soal yang lainnya.

## Daftar Rujukan

- Abadi, A. P., Subanji, & Chandra, T. D. (2017). Diagnosis Kesulitan Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Geometri-PISA Melalui Pemetaan Kognitif dan Upaya Mengatasinya dengan Scaffolding. *Jurnal Kajian Pendidikan dan Pengajaran*, 3(1), 1–18.
- Adolphus, T. (2011). Problems of Teaching and Learning of Geometry in Secondary School in Rivers State, Nigeria. *International Journal of Emerging*, 1(2), 143–152.
- Ahmadi, A., & Supriyono, W. (2008). *Psikologi Belajar*. PT Rineka Cipta.
- Aini, I. N., & Hidayati, N. (2017). Tahap Perkembangan Kognitif Matematika Siswa SMP Kelas VII Berdasarkan Teori Piaget Ditinjau dari Perbedaan Jenis Kelamin. *JPPM (Jurnal Penelitian dan Pembelajaran Matematika)*, 10(2), 25–30.
- Alamsyah, S. (2020). *Membumikan Pelajaran Akuntansi Sebagai Rumpun Ilmu Pengetahuan Sosial*. Deepublish.
- Amalia, H. F., & Manoy, J. T. (2021). Proses Berpikir Siswa Dalam Menyelesaikan Masalah Matematika Berdasar Langkah Polya Ditinjau Dari Adversity Quotient. *MATHEdunesa : Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 10(3), 507–513.
- Ambarwati, Setiawan, T. B., & Yudianto, E. (2018). Analisis Kemampuan Visual Spasial Siswa dalam Menyelesaikan Soal Matematika Berstandar PISA Konten Shape and Space ditinjau dari Level Berpikir Geometri Van Hiele. *Kadikma*, 9(3), 51–60.
- Annizar, A. M., Mauliyda, M. A., Khairunnisa, G. F., & Hijriani, L. (2020). Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Siswa dalam Menyelesaikan Soal PISA pada Topik Geometri. *Jurnal Elemen*, 6(1), 39–55.
- Astuti, P., Qohar, A., & Hidayanto, E. (2019). Proses Berpikir Siswa dalam Menyelesaikan Soal Higher Order Thinking Skills Berdasarkan Pemahaman Konseptual dan Prosedural. *Jurnal Pendidikan: Teori, Penelitian, dan Pengembangan*, 4(1), 117–123.
- Bakry, & Bakar, M. N. Bin. (2015). The Process of Thinking among Junior High School Students in Solving HOTS Question. *International Journal of Evaluation and Research in Education (IJERE)*, 4(3), 138–145.
- Bozak, A., & Aybek, E. C. (2020). Comparison of Artificial Neural Networks and Logistic Regression Analysis in PISA Science Literacy Success Prediction. *International Journal of Contemporary Educational Research*, 7(2), 99–111.
- Bulbul, B. O., & Guler, M. (2020). Can Geometry Achievement and Geometric Habits of Mind Be Improved Online? Reflections From a Computer Aided Intervention. *Journal of Educational Technology Systems*, 0(0), 1–23.
- Daulay, N. (2014). *Pengantar Psikologi dan Pandangan Al-Qur'an tentang Psikologi*. Kencana Prenada Media Group.
- Demir, S. B. (2018). The Effect of Teaching quality and teaching practices on PISA 2012 Mathematics Achievement of Turkish Students. *International Journal of Assessment Tools in Education*, 5(4), 645–648.
- Erdogan, A. (2017). Examining Pre-service Mathematics Teachers' Conceptual Structures About "Geometry." *Journal of Education and Practice*, 8(27), 65–

- Eridani, A. K. P., & Wijayanti, P. (2019). Profil Penalaran Matematika Siswa SMP dalam Menyelesaikan Soal TIMSS Ditinjau dari Jenis Kelamin. *MATHEdunesa : Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 8(3), 543–549.
- Faizah, S., Nusantara, T., Sudirman, & Rahardi, R. (2020). Exploring students' thinking process in mathematical proof of abstract algebra based on Mason's framework. *Journal for the Education of Gifted Young Scientists*, 8(2), 871–884.
- Faizah, S., Rahmawati, N. D., & Sa'adah, N. (2022). *Teori Belajar Matematika* (C. Mashuri & I. Rodliyah (ed.)). PT Indonesia Emas Group.
- Fathurrohman, M. (2017). *Belajar dan Pembelajaran Modern (Konsep Dasar, Inovasi dan Teori Pembelajaran)*. Garudhawaca.
- Fauzi, I., & Arisetyawan, A. (2020). Analisis Kesulitan Belajar Siswa pada Materi Geometri di Sekolah Dasar. *Kreano, Jurnal Matematika Kreatif-Inovatif*, 11(1), 27–35.
- Gungor, M., & Kabasakal, K. A. (2020). Investigation of Measurement Invariance of Science Motivation and SelfEfficacy Model: PISA 2015 Turkey Sample. *International Journal of Assessment Tools in Education*, 7(2), 207–222.
- Gusniwati, M. (2015). Pengaruh Kecerdasan Emosional dan Minat Belajar Terhadap Penguasaan Konsep Matematika Siswa SMAN di Kecamatan Kebon Jeruk. *Jurnal Formatif*, 5(1), 26–41.
- Haji, S., Yumiati, & Zamzaili. (2018). Analisis Kesulitan Siswa dalam Menyelesaikan Soal-Soal PISA (Programme for International Student Assessment) di SMP Kota Bengkulu. *Jurnal Pendidikan Matematika Raflesia*, 3(2), 177–183.
- Hikmawati, N. N., Nurcahyono, N. A., & Balkist, P. S. (2019). Kemampuan Komunikasi Matematis Siswa dalam Menyelesaikan Soal Geometri Kubus dan Balok. *PRISMA*, 8(1).
- Hwang, W.-Y., Lin, L.-K., Ochirbat, A., Shih, T. K., & Kumara, W. G. C. W. (2015). Ubiquitous Geometry: Measuring Authentic Surroundings to Support Geometry Learning of the Sixth-Grade Students. *Journal of Educational Computing Research*, 52(1), 26–49.
- Ilhan, A. (2021). Analysis of the Correlations Between Visual Mathematics Literacy Perceptions, Reasoning Skills on Geometric Shapes and Geometry Performances of Pre-Service Mathematics Teachers. *Participatory Educational Research (PER)*, 8(1), 90–108.
- Irving, J. A., Oppong, E., & Shore, B. M. (2016). Alignment of a high-ranked PISA mathematics curriculum and the Parallel Curriculum for gifted students: Is a high PISA Mathematics ranking indicative of curricular suitability for gifted learners? *Gifted and Talented International*, 31(2), 114–131.
- Jalan, S., Nusantara, T., Subanji, & Chandra, T. D. (2016). Students' thinking process in solving combination problems considered from assimilation and accommodation framework. *Educational Research Review journal*, 11(16).
- Kartika, Y. (2018). Analisis Kemampuan Pemahaman Konsep Matematis Peserta Didik Kelas VII SMP pada Materi Bentuk Aljabar. *Jurnal Pendidikan Tambusai*, 2(4), 777–785.
- Khasanah, V. I., Usodo, B., & Subanti, S. (2018). Student's Thinking Process in

- Solving Word Problems in Geometry. *Journal of Physics: Conference Series*, 1013(1), 1–6.
- Kuzle, A. (2018). Drawings as External Representations of Children's Fundamental Ideas and the Emotional Atmosphere in Geometry Lessons. *cep s Journal*, 8(2), 31–53.
- Laily, I. F. (2014). Hubungan Kemampuan Membaca Pemahaman dengan Kemampuan Memahami Soal Cerita Matematika Sekolah Dasar. *EduMa*, 3(1), 52–62.
- Lette, I., & Manoy, J. T. (2019). Representasi Siswa SMP dalam Memecahkan Masalah Matematika Ditinjau dari Kemampuan Matematika. *MATHEdunesa : Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 8(3), 574–580.
- Mairing, J. P. (2017). Thinking Process of Naive Problem Solvers to Solve Mathematical Problems. *International Education Studies*, 10(1), 1–11.
- Maryono. (2020). Proses Berpikir Mahasiswa dalam Menyelesaikan Masalah Berstandar PISA (Programme for International Student Assessment). *Journal of Education and Learning Mathematics Research(JELMaR)*, 1(1), 1–14.
- Maulana. (2018). *Dasar-Dasar Konsep Peluang : Sebuah Gagasan Pembelajaran dengan Pendekatan Metakognitif*. UPI Press.
- Monikasari, F., Sugiyanti, & Kartinah. (2021). Profil Pemahaman Konsep Siswa dalam Pemecahan Masalah Matematika Menurut Tahapan Polya Ditinjau dari Perbedaan Jenis Kelamin. *Imajiner: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 3(5), 411–417.
- Moru, E. K., Malebanye, M., Morobe, N., & George, M. J. (2021). A Van Hiele Theory analysis for teaching volume of threedimensional geometric shapes. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education*, 6(1), 17–31.
- Muhassanah, N., Sujadi, I., & Riyadi. (2014). Analisis Keterampilan Geometri Siswa dalam Memecahkan Masalah Geometri Berdasarkan Tingkat Berpikir Van Hiele. *Jurnal Elektronik Pembelajaran Matematika*, 2(1), 54–66.
- Mulyadi, I., & Muhtadi, D. (2019). Proses berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah geometri berdasarkan Teori Van Hiele ditinjau dari gender. *Jurnal Penelitian Pendidikan dan Pengajaran Matematika*, 4(1), 1–8.
- Musriroh, R. Z., Hidayanto, E., & Rahardi, R. (2021). Penalaran Spasial Matematis Dimensi Persepsi dan Visualisasi Kelas VIII dalam Pemecahan Masalah Geometri. *Jurnal Pendidikan : Teori, Penelitian, dan Pengembangan*, 6(1), 1771–1781.
- Nurfadzilah, A., & Rahaju, E. B. (2018). Proses Berpikir Siswa dalam Menyelesaikan Soal Persamaan Nilai Mutlak ditinjau dari Tingkat Kecemasan Matematika Siswa. *MATHEdunesa: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 7(2).
- Palharini, B., & Almeida, L. M. W. de. (2015). Mathematical Modelling Tasks and the Mathematical Thinking of Students. In *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (hal. 219–228). Springer International Publishing.
- Putri, R. I. I., & Zulkardi. (2018). Noticing Student's Thinking and Quality of Interactivity During Mathematics Learning. *Proceedings of the First Indonesian Communication Forum of Teacher Training and Education Faculty Leaders International Conference on Education 2017 (ICE 2017)*, 549–553.

- Rahmawati, F. (2013). Pengaruh Pendekatan Pendidikan Realistik Matematika dalam Meningkatkan Kemampuan Komunikasi Matematis Siswa Sekolah Dasar. *Semirata*, 1(1), 225–238.
- Rasitullah, S. A., & Wahyu, K. (2021). Analisis Kesalahan Siswa dalam Menyelesaikan Soal Sistem Persamaan Linier Dua Variabel Ditinjau dari Gaya Belajar. *Jurnal Syntax Transformation*, 2(2), 222–233.
- Rinaldi, E. N. Z., Supratman, & Hermanto, R. (2019). Proses Berpikir Peserta Didik ditinjau dari Kemampuan Spasial berdasarkan Level Berpikir Van Hiele. *Journal of Authentic Research on Mathematics Education (JARME)*, 1(1), 38–45.
- Rizqika, P., Sunardi, Susanto, Nuryami, & Shofyan, A. (2021). Student's Thinking Process at the Level of Analysis in Understanding Square Concept. *Journal of Physics: Conference Series*, 1839(1), 1–8.
- Rosen, Y., & Tager, M. (2014). Making Student Thinking Visible through a Concept Map in Computer-Based Assessment of Critical Thinking. *Journal of Educational Computing Research*, 50(2), 249–270.
- Sagita, M., & Hendriana, B. (2021). Mengidentifikasi Gesture Matematis Siswa dalam Memecahkan Soal Geometri. *Jurnal Cendekia: Jurnal Pendidikan Matematika*, 6(2), 963–973.
- Santoso, R. M., & Setyaningsih, N. (2020). Literasi Matematika Siswa dalam Menyelesaikan Soal HOTS Bentuk Aljabar Berdasarkan Kemampuan Matematika. *Prosiding Konferensi Nasional Penelitian Matematika dan Pembelajarannya*, 62–71.
- Sari, I., Marwan, & Malikussaleh, H. (2019). Student's Thinking Process in Solving Mathematical Problems in Build Flat Side Spaces of Material Reviewed from Adversity Quotient. *Journal of Mathematics Learning (MJML)*, 2(2), 61–67.
- Satsangi, R., Hammer, R., & Bouck, E. C. (2019). Using Video Modeling to Teach Geometry Word Problems: A Strategy for Students With Learning Disabilities. *Remedial and Special Education*, 00(0), 1–12.
- Silalahi, T. M., Girsang, M. L., & Ginting, M. B. (2020). *Peran Emosi dalam Membangun Keterampilan Berpikir Kreatif Anak Usia Dini*. Lakeisha.
- Soenarjadi, G. (2020). Profil Pemecahan Masalah Siswa pada Masalah Geometri ditinjau dari Perbedaan Jenis Kelamin dan Gaya Belajar. *Jurnal Riset Pendidikan dan Inovasi Pembelajaran (JRPIPM)*, 3(2), 78–91.
- Stacey, K. (2011). The PISA View of Mathematical Literacy in Indonesian. *Journal on Mathematics Education*, 2(2), 95–126.
- Suciono, W. (2021). *Berpikir Kritis (Tinjauan melalui Kemandirian Belajar, Kemampuan Akademik dan Efikasi Diri)*. Adab.
- Sugiyono, & Wijayanti. (2018). Representasi Matematis Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Model PISA Ditinjau Dari Perbedaan Jenis Kelamin. *MATHEdunesa: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 7(3), 619–623.
- Sulistiawati, Suryadi, D., & Fatimah, S. (2015). Desain Didaktis Penalaran Matematis untuk Mengatasi Kesulitan Belajar Siswa SMP pada Luas dan Volume Limas. *Kreano, Jurnal Matematika Kreatif-Inovatif*, 6(2), 135–146.
- Sunaryo. (2011). *Taksnomi Berpikir*. PT Remaja Rosdakarya.
- Sundari, R., Anghany, E., & Dur, S. (2019). Analisis Kesulitan Siswa dalam Menyelesaikan Soal Cerita Materi Himpunan Ditinjau dari Tahapan Newman

- pada Kelas VII MTs Negeri Hampan Perak T.A 2017/2018. *AXIOM (Jurnal Pendidikan & Matematika)*, 8(2), 187–194.
- Sunzuma, G., Chando, C., Gwizangwe, I., Zezekwa, N., & Zinyeka, G. (2020). In-service Zimbabwean teachers' views on the utility value of diagrams in the teaching and learning of geometry. *International Journal on Math, Science and Technology Education*, 8(1), 1–18.
- Suryaningsih, A., & Susanah. (2021). Profil Komunikasi Matematika Siswa dalam Menyelesaikan Soal PISA Ditinjau dari Kemampuan Matematika. *MATHEdunesa : Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 10(2), 301–319.
- Tall, D. (2004). *Introducing Three Worlds of Mathematics. For the Learning of Mathematics*. 23(3), 29–33.
- Tall, D. (2020). *Making Sense of Mathematical Thinking over the Long Term : The Framework of Three Worlds of Mathematics and New Developments*. Springer.
- Ulinikmah, S., & Rahayu, E. B. (2021). Kemampuan Berpikir Lateral Siswa SMP dalam Menyelesaikan Masalah Matematika ditinjau dari Perbedaan Jenis Kelamin. *MATHEdunesa : Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 10(2), 206–219.
- Wardhani, I. S. (2019). *Geometri dan Permasalahannya dalam Pembelajaran Matematika di Sekolah (Suatu Penelitian Meta Analisis)*. Universitas Trunojoyo Madura.
- Wijayanti, E. W. (2020). Proses Berpikir Siswa SMP dalam Menyelesaikan Masalah Matematika Materi Fungsi Ditinjau dari Perbedaan Jenis Kelamin. *MATHEdunesa : Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 9(3), 504–508.
- Wu, M. (2004). The Impact of PISA on Mathematics Education: Linking Mathematics and the Real World. *Education Journal*, 32(1), 121–140.
- Yang, W., & Fan, G. (2019). Post-PISA Education Reforms in China: Policy Response Beyond the Digital Governance of PISA. *ECNU Review of Education*, 2(3), 297–310.
- Yavuz, E., & Atar, H. Y. (2020). An Examination of Turkish Students' PISA 2015 Collaborative Problem Solving Competencies. *International Journal of Assessment Tools in Education*, 7(4), 588–606.
- Zhou, Y., & Wong, Y.-L. (2017). Efficacy of Grade Retention in Macao: Evidence from PISA 2009. *International Journal of Chinese Education*, 6, 57–80.
- Zumratun. (2020). Analisis Kemampuan Masalah Ditinjau dari Kemampuan Penalaran Siswa Kelas V SD/MI pada Pembelajaran Matematika. *FASHLUNA*, 1(1), 31–49.

## LAMPIRAN-LAMPIRAN

### Lampiran 1 Kisi-Kisi Instrumen Tes

#### Kisi-kisi Instrumen Tes

Satuan Pendidikan : Sekolah Menengah Atas

Materi Pokok : Transformasi Geometri

Jumlah Soal : 1

#### Kompetensi Dasar

4.5. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan matriks transformasi geometri  
(translasi, refleksi, dilatasi dan rotasi)

#### Indikator

- 4.5.1. Menentukan koordinat bayangan hasil translasi sejauh titik tertentu
- 4.5.2. Menentukan suatu bayangan yang dihasilkan oleh dilatasi dengan skala tertentu
- 4.5.3. Menentukan koordinat bayangan hasil refleksi terhadap sumbu kordinat kartesius
- 4.5.4. Menentukan hasil rotasi suatu titik yang dirotasi sebesar  $\alpha$  dengan titik pusat tertentu

## Lampiran 2 Lembar Soal

### Tes Geometri model PISA

#### Petunjuk Pengerjaan

1. Bacalah soal dengan teliti
2. Tuliskan jawaban dengan jelas dan rinci pada lembar jawaban yang tersedia
3. Silahkan mengungkapkan dengan kata-kata apa yang dipikirkan selama pengerjaan soal.

#### Soal

Perhatikan Gambar 1 di bawah ini. Mercusuar merupakan menara yang memancarkan sinar isyarat pada malam hari, memberikan informasi kepada para pelaut dan membantu navigasi lalu lintas kapal di perairan. Mercusuar juga dijadikan penanda daerah berbahaya, seperti daerah laut berkarang atau laut dangkal.



Gambar 1. Mercusuar

Suatu menara mercusuar memiliki beberapa lampu sorot di bagian atasnya. Masing-masing lampu sorot memancarkan cahaya ke permukaan laut dan

bergerak berputar berlawanan arah jarum jam. Kecepatan rotasi lampu sorot adalah  $10^\circ$  per detik.

1. Misalkan posisi atap menara mercusuar berada pada titik koordinat  $(0, 0)$  maka,
  - a) Tentukan koordinat ujung sorot lampu yang awalnya berada di titik  $(8, 16)$  setelah 6 detik!
  - b) Tentukan koordinat ujung sorot lampu lainnya yang awalnya berada di titik  $(-9, 7)$  setelah 9 detik!
2. Misalkan posisi atap menara mercusuar berada pada titik koordinat  $(3, 5)$  maka,
  - a) Tentukan koordinat ujung sorot lampu yang awalnya berada di titik  $(15, 13)$  setelah 15 detik!
  - b) Tentukan koordinat ujung sorot lampu lainnya yang awalnya berada di titik  $(14, -17)$  setelah 18 detik!

### Lampiran 3 Lembar Jawaban

#### Alternatif Penyelesaian

Diketahui :

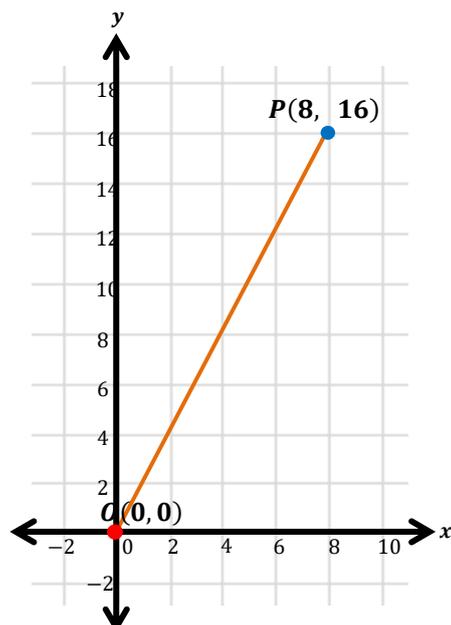
- Lampu sorot bergerak berputar berlawanan arah jarum jam
- Kecepatan rotasi lampu :  $10^\circ$  perdetik

Ditanya :

- Menentukan bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah 6 detik dengan titik awal  $(8, 16)$  dan menara mercusuar di titik  $(0, 0)$
- Menentukan bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah 9 detik dengan titik awal  $(-9, 7)$  dan menara mercusuar di titik  $(0, 0)$
- Menentukan bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah 15 detik dengan titik awal  $(15, 13)$  dan menara mercusuar di titik  $(3, 5)$
- Menentukan bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah 18 detik dengan titik awal  $(14, -17)$  dan menara mercusuar di titik  $(3, 5)$

Dijawab

- Menara mercusuar berada di titik  $(0, 0)$
- a) Koordinat awal ujung sorot lampu berada di titik  $(8, 16)$ , sehingga dapat digambarkan dalam bidang kartesius sebagai berikut.



Jika kecepatan rotasi lampu sorot setiap

1 detik sebesar  $10^\circ$ ,

maka saat 6 detik sebesar  $6 \times 10^\circ = 60^\circ$

Berdasarkan rotasi dengan pusat  $O(0, 0)$  sejauh  $60^\circ$  dengan titik  $P(8, 16)$  menggunakan matriks yang bersesuaian maka,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 8\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} + 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

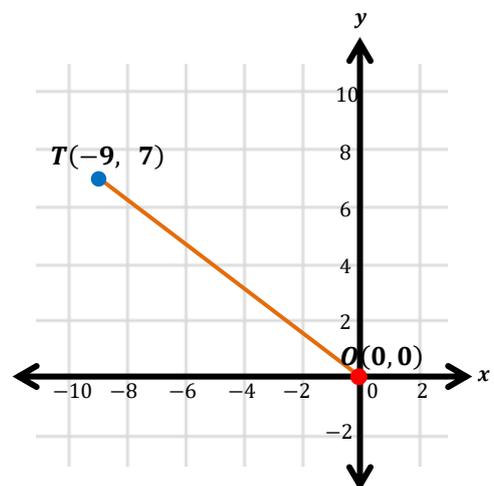
Jadi, bayangan titik koordinat ujung sorot lampu yang dihasilkan yaitu

$$(4 - 8\sqrt{3}, 8 + 4\sqrt{3})$$

b) Koordinat awal ujung sorot lampu

lainnya berada di titik  $(-9, 7)$ ,

sehingga dapat digambarkan dalam bidang kartesius sebagai berikut.



Jika kecepatan rotasi lampu sorot setiap

1 detik sebesar  $10^\circ$ ,

maka saat 9 detik sebesar  $9 \times 10^\circ = 90^\circ$

Berdasarkan rotasi dengan pusat  $O(0, 0)$  sejauh  $90^\circ$  dengan titik  $T(-9, 7)$

7) menggunakan matriks yang bersesuaian maka,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

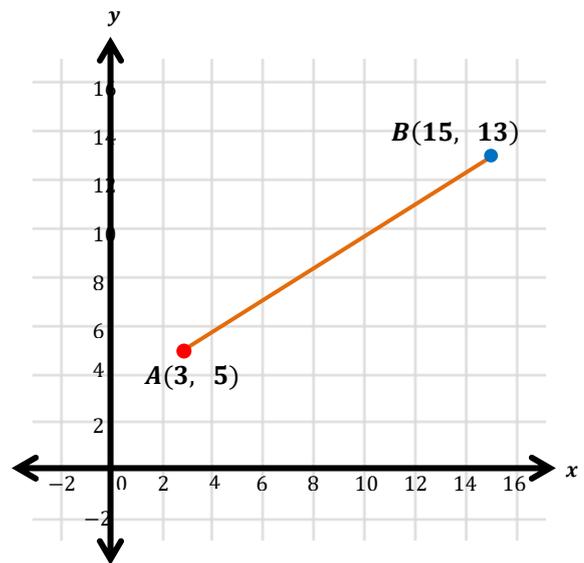
$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Jadi, bayangan titik koordinat ujung sorot lampu yang dihasilkan yaitu  $(-7, -9)$

2. Menara mercusuar berada di titik  $(3, 5)$

a) Koordinat awal ujung sorot lampu

berada di titik  $(15, 13)$ , sehingga dapat digambarkan dalam bidang kartesius sebagai berikut.



Jika kecepatan rotasi lampu sorot setiap 1 detik sebesar  $10^\circ$ , maka saat 15 detik sebesar  $15 \times 10^\circ = 150^\circ$

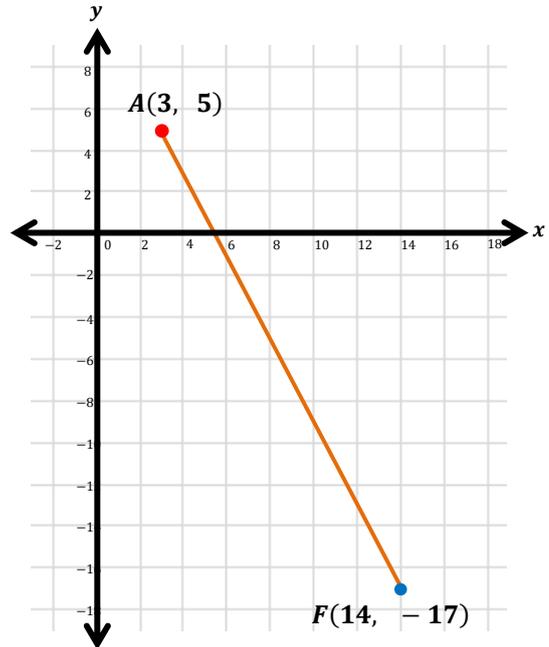
Berdasarkan rotasi dengan pusat  $A(3, 5)$  sejauh  $150^\circ$  dengan titik  $B(15, 13)$  menggunakan matriks yang bersesuaian maka,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - m \\ y - n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 - 3 \\ 13 - 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -6\sqrt{3} - 4 \\ 6 - 4\sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 6\sqrt{3} \\ 11 - 4\sqrt{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Jadi, bayangan titik koordinat ujung sorot lampu yang dihasilkan yaitu

$$(-1 - 6\sqrt{3}, 11 - 4\sqrt{3})$$

- b) Koordinat awal ujung sorot lampu lainnya berada di titik  $(14, -17)$ , sehingga dapat digambarkan dalam bidang kartesius sebagai berikut.



Jika kecepatan rotasi lampu sorot setiap 1 detik sebesar  $10^\circ$ , maka saat 18 detik sebesar  $18 \times 10^\circ = 180^\circ$

Berdasarkan rotasi dengan pusat  $A(3, 5)$  sejauh  $180^\circ$  dengan titik  $F(14, -17)$  menggunakan matriks yang bersesuaian maka,

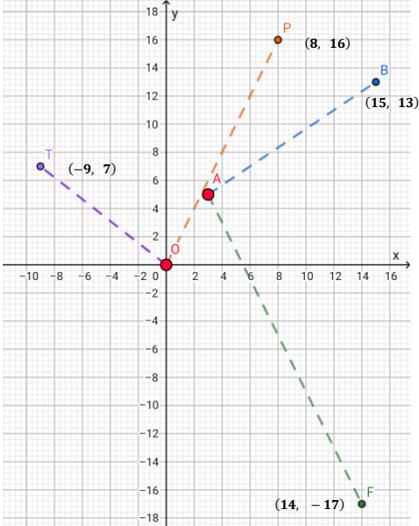
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - m \\ y - n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 - 3 \\ -17 - 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 \\ 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 26 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, bayangan titik koordinat ujung sorot lampu yang dihasilkan yaitu

$$(-8, 27)$$

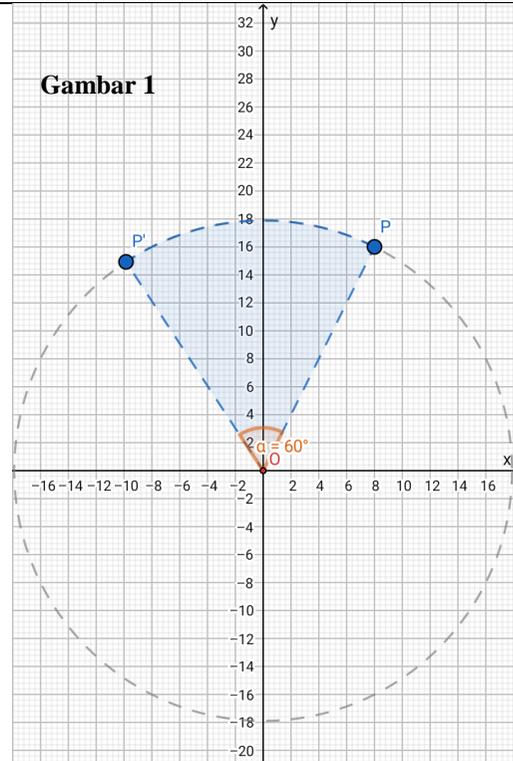
Lampiran 4 Kisi-Kisi Instrumen

Pedoman Analisis Proses Berpikir berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika

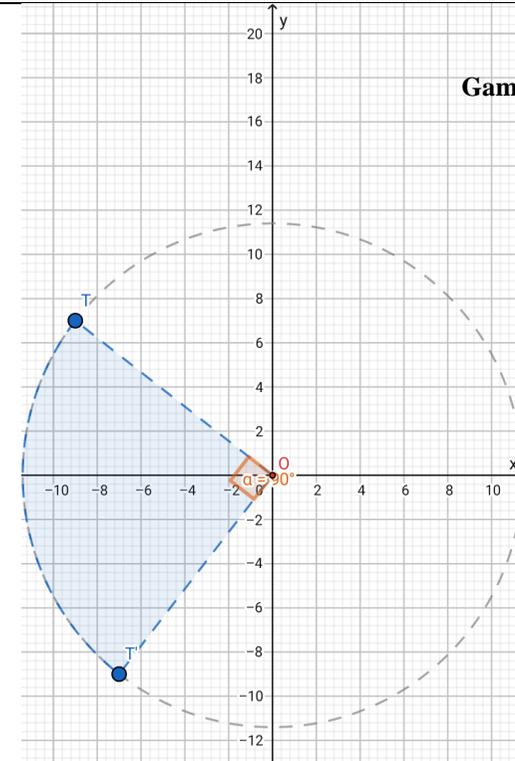
Tahapan Proses Berpikir	Teori Tiga Dunia Matematika	Deskripsi Perilaku Subjek
Pembentukan Pengertian	Dunia Berpikir Wujud ( <i>Embodied World</i> )	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Subjek membaca soal yang diberikan dengan seksama dan memahami soal dengan membayangkan gambaran dari objek konkret</li> <li>• Subjek tidak menuliskan atau menyusun informasi yang diketahui dan yang ditanyakan akan tetapi membayangkan dalam pikirannya</li> <li>• Subjek mewujudkan ke figur geometris di bidang kartesius berdasarkan informasi yang diketahui pada soal sehingga didapat titik koordinat seperti gambar disamping</li> </ul> 
	Dunia Berpikir Simbolik ( <i>Proceptual-Symbolic World</i> )	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Subjek membaca soal yang diberikan dengan seksama dan menuliskan informasi yang diketahui dan yang ditanyakan pada soal</li> </ul> <p>Diketahui :</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Lampu sorot bergerak berputar berlawanan arah jarum jam</li> <li>b) Kecepatan rotasi lampu : <math>10^\circ</math> perdetik</li> </ol> <p>Ditanya :</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Menentukan bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah 6 detik dengan titik awal (8, 16) dan menara mercusuar di</li> </ol>

		<p>titik (0, 0)</p> <p>b) Menentukan bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah 9 detik dengan titik awal (-9, 7) dan menara mercusuar di titik (0, 0)</p> <p>c) Menentukan bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah 15 detik dengan titik awal (15, 13) dan menara mercusuar di titik (3, 5)</p> <p>d) Menentukan bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah 18 detik dengan titik awal (14, -17) dan menara mercusuar di titik (3, 5)</p>
	Dunia Berpikir Formal ( <i>Formal World</i> )	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Subjek dapat menghubungkan informasi dan konsep yang diperoleh dari soal dengan materi yang telah mereka pelajari</li> <li>• Subjek lebih awal memahami soal dengan menganalisis data pada soal dan memunculkan konsep dari istilah yang ditanyakan pada soal yaitu rotasi atau perputaran ditentukan oleh pusat putaran, arah putaran dan besar sudut putaran.</li> <li>• Jika pada soal diketahui bahwa lampu sorot pada mercusuar arah putaran berlawanan arah jarum jam maka perputaran tersebut merupakan arah positif.</li> </ul>
Pembentukan Pendapat	Dunia Berpikir Wujud ( <i>Embodied World</i> )	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dari informasi yang diketahui subjek mendapatkan ide saat membayangkan dalam pikirannya dan diwujudkan ke figur geometris. Subjek dapat mengaitkan materi yang sudah diperoleh dengan menggambar ataupun sekedar dibayangkan dalam persoalan matematika.</li> <li>• Siswa membayangkan informasi yang diketahui bahwa jika kecepatan rotasi lampu sorot setiap detik sebesar <math>10^\circ</math> maka lampu sorot pada saat setelah, <ul style="list-style-type: none"> <li>- 6 detik bayangan berputar sebesar <math>6 \times 10^\circ = 60^\circ</math></li> <li>- 9 detik bayangan berputar sebesar <math>9 \times 10^\circ = 90^\circ</math></li> <li>- 15 detik bayangan berputar sebesar <math>15 \times 10^\circ = 150^\circ</math></li> <li>- 18 detik bayangan berputar sebesar <math>18 \times 10^\circ = 180^\circ</math></li> </ul> </li> <li>• Subjek dapat mencari solusi dengan cara menggambar di dalam bidang koordinat pada gambar-gambar berikut.</li> </ul>

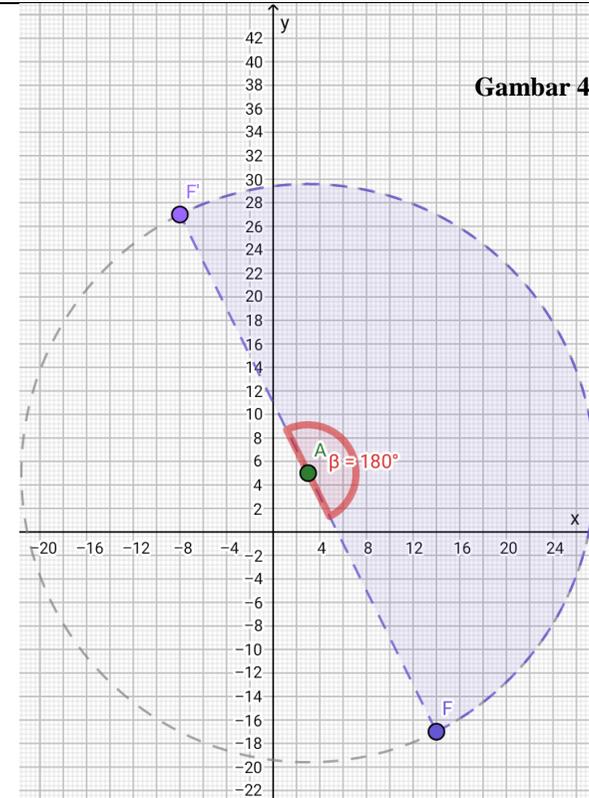
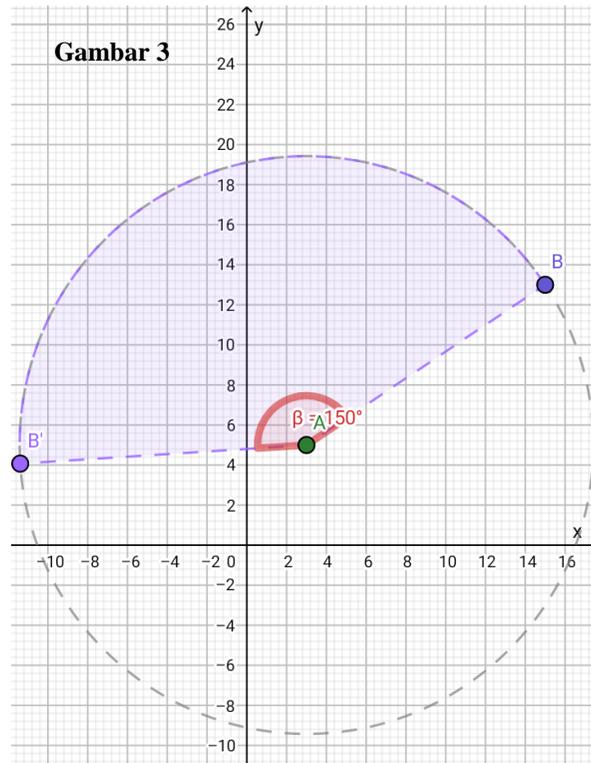
**Gambar 1**



**Gambar 2**

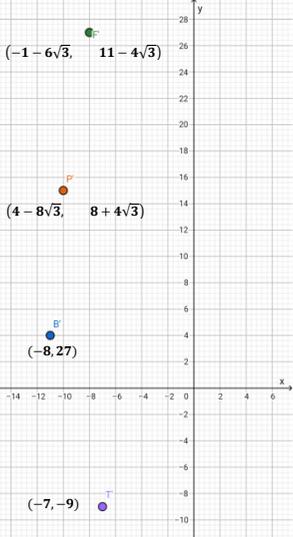


- Berdasarkan bidang koordinat pada Gambar 1, subjek menjelaskan bahwa titik koordinat  $P$  tersebut dirotasikan sebesar  $60^\circ$  dan menghasilkan titik bayangan  $P'$ . Gambar tersebut diputar (dirotasikan) pada  $O(0,0)$  sejauh  $60^\circ$  berlawanan arah jarum jam dengan arah putaran positif.
- Sedangkan pada Gambar 2, subjek menjelaskan bahwa titik koordinat  $T$  dirotasikan sebesar  $90^\circ$ , menghasilkan titik bayangan koordinat  $T'$ . Gambar tersebut juga diputar (dirotasikan) pada  $O(0,0)$  sejauh  $90^\circ$  berlawanan arah jarum jam dengan arah putaran positif.

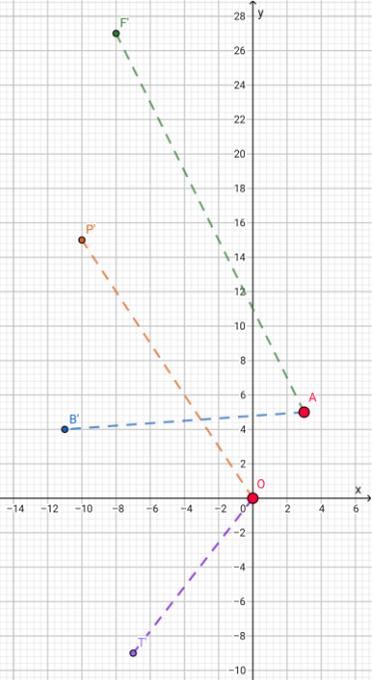


- Berdasarkan bidang koordinat pada Gambar 3, subjek menjelaskan bahwa titik koordinat  $B$  tersebut dirotasikan sebesar  $150^\circ$  dan menghasilkan titik bayangan  $B'$ . Gambar tersebut diputar (dirotasikan) pada  $A(3,5)$  sejauh  $150^\circ$  berlawanan arah jarum jam dengan arah putaran positif.
- Sedangkan pada Gambar 4, subjek menjelaskan bahwa titik koordinat  $F$  dirotasikan sebesar  $180^\circ$ , menghasilkan titik bayangan koordinat  $F'$ . Gambar tersebut juga diputar (dirotasikan) pada  $A(3,5)$  sejauh  $180^\circ$  berlawanan arah jarum jam dengan arah putaran positif.
- Subjek akhirnya dapat menyelesaikan soal secara verbal sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar.

	<p>Dunia Berpikir Simbolik (Proceptual-Symbolic World)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Subjek berpikir untuk menjelaskan solusi dengan berpikir melibatkan visualisasi pada simbol dan menganalisis data pada soal dengan memulai menghitung.</li> <li>• Subjek dapat menghitung penyelesaiannya dengan menggunakan matriks yang bersesuaian.</li> <li>• Berdasarkan informasi yang diketahui, subjek menjelaskan titik-titik koordinat ujung sorot lampu tersebut dirotasikan pada titik-titik pusat tertentu sehingga memperoleh titik koordinat bayangan.</li> </ul> <p>1.a. Jika kecepatan rotasi lampu sorot setiap 1 detik sebesar <math>10^\circ</math>, maka saat 6 detik sebesar <math>6 \times 10^\circ = 60^\circ</math>, sehingga subjek dapat menyatakan dengan persamaan matriks sejauh <math>60^\circ</math> Kemudian titik koordinat awal ujung sorot lampu <math>P(x, y)</math> dirotasikan pada <math>O(0,0)</math> sejauh <math>\alpha</math>, maka memperoleh titik <math>P'(x', y')</math> dan subjek dapat menyatakan dengan persamaan matriks sejauh <math>60^\circ</math>.</p> $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ subjek mensubstitusi data ke dalam persamaan matriks menjadi,}$ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 8\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} + 8 \end{bmatrix}$ <p>1.b. Selanjutnya dengan titik pusat yang sama yaitu <math>O(0,0)</math>, maka saat 9 detik sebesar <math>9 \times 10^\circ = 90^\circ</math>, sehingga subjek dapat menyatakan dengan persamaan matriks sejauh <math>90^\circ</math></p> $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ subjek mensubstitusi data ke dalam persamaan matriks menjadi,}$ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \end{bmatrix}$ <p>2.a. Jika kecepatan rotasi lampu sorot setiap 1 detik sebesar <math>10^\circ</math>, maka saat 15 detik sebesar <math>15 \times 10^\circ = 150^\circ</math>, sehingga subjek dapat menyatakan dengan persamaan matriks sejauh <math>150^\circ</math> Kemudian titik koordinat awal ujung sorot lampu <math>B(x, y)</math> dirotasikan pada <math>A(3,5)</math> sejauh <math>\beta</math>, maka memperoleh titik <math>B'(x', y')</math> dan subjek dapat menyatakan dengan persamaan matriks sejauh <math>150^\circ</math>.</p> $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - m \\ y - n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}, \text{ subjek mensubstitusi data ke dalam persamaan matriks menjadi,}$
--	--	---

		$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 - 3 \\ 13 - 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6\sqrt{3} - 4 \\ 6 - 4\sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 6\sqrt{3} \\ 11 - 4\sqrt{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$ <p>2.b. Selanjutnya dengan titik pusat yang sama yaitu <math>A(3,5)</math>, maka saat 18 detik sebesar <math>18 \times 10^\circ = 180^\circ</math>, sehingga subjek dapat menyatakan dengan persamaan matriks sejauh <math>180^\circ</math></p> $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ subjek mensubstitusi data ke dalam persamaan matriks menjadi,}$ $\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 - 3 \\ -17 - 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 \\ 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 27 \end{bmatrix} \end{aligned}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• Serta subjek dapat menggambarkan bayangan titik-titik koordinat ujung sorot lampu tersebut ke dalam bidang cartesius pada gambar disamping.</li> <li>• Subjek akhirnya dapat menyelesaikan soal dengan merepresentasikan data ke dalam bentuk matriks sesuai langkah-langkah yang runtut dan benar.</li> </ul>	
	<p>Dunia Berpikir Formal (<i>Formal World</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Subjek berpikir untuk menjelaskan konsep transformasi geometri yang terdapat pada soal.</li> <li>• Subjek mengaitkan materi dengan memunculkan konsep definisi pada informasi yang diketahui bahwa titik-titik koordinat awal ujung sorot lampu dengan titik menara mercusuar tertentu.</li> <li>• Subjek menjelaskan data yang dibutuhkan adalah proses yang diminta pertama yaitu titik-titik koordinat awal tersebut dirotasikan sejauh setelah beberapa detik yang ditanyakan pada soal.</li> <li>• Subjek menuliskan cara pembentukan definisi konsep transformasi geometri dalam persoalan matematika serta menjelaskan setiap langkah penyelesaiannya.</li> </ul>	

		<ul style="list-style-type: none"> <li>Berdasarkan data yang diketahui, subjek menghitung kecepatan setiap detik lampu berotasi sebesar <math>10^\circ</math>, sehingga subjek dapat menuliskan konsep dari rotasi yaitu</li> </ul> <p>1. Rotasi dengan pusat <math>O(0,0)</math> sejauh <math>\alpha</math>, maka</p> $P(x, y) \rightarrow P'(x', y') \text{ dimana,}$ $x'' = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$ $y'' = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$ <p>a) Bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah 6 detik menjadi sejauh <math>60^\circ</math> dengan koordinat awal ujung sorot lampu berada di titik <math>(8, 16)</math>, maka subjek mensubstitusikan data ke dalam rumus</p> $P(x, y) \rightarrow P'((x \cos \alpha - y \sin \alpha), (x \sin \alpha + y \cos \alpha))$ $P(8,16) \rightarrow P'((8 \cos 60^\circ - 16 \sin 60^\circ), (8 \sin 60^\circ + 16 \cos 60^\circ)) \text{ menjadi,}$ $P(8,16) \rightarrow P'\left(\left(8 \cdot \frac{1}{2} - 16 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 16 \cdot \frac{1}{2}\right)\right)$ $P(8,16) \rightarrow P'(4 - 8\sqrt{3}, 4\sqrt{3} + 8)$ $P(8,16) \rightarrow P'(4 - 8\sqrt{3}, 8 + 4\sqrt{3})$ <p>b) Bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah 9 detik menjadi sejauh <math>90^\circ</math> dengan koordinat awal ujung sorot lampu berada di titik <math>(-9,7)</math>, maka subjek mensubstitusikan data ke dalam rumus</p> $T(x, y) \rightarrow T'(x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha)$ $T(-9,7) \rightarrow T'((-9 \cos 90^\circ - 7 \sin 90^\circ), (-9 \sin 90^\circ + 7 \cos 90^\circ)) \text{ menjadi,}$ $T(-9,7) \rightarrow T'((-9 \cdot 0 - 7 \cdot 1), (-9 \cdot 1 + 7 \cdot 1))$ $T(-9,7) \rightarrow T'(-7, -9)$ <p>2. Rotasi dengan pusat <math>A(3,5)</math> sejauh <math>\beta</math>, maka</p> $B(x, y) \rightarrow B'(x', y') \text{ dimana,}$ $x' = a + (x - a) \cos \beta - (y - b) \sin \beta$ $y' = b + (x - a) \sin \beta + (y - b) \cos \beta$ <p>a) Bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah 15 detik menjadi sejauh <math>150^\circ</math> dengan koordinat awal ujung sorot lampu berada di titik <math>(15,13)</math>, maka subjek mensubstitusikan data ke dalam rumus</p> $B(x, y) \rightarrow B'((a + (x - a) \cos \beta - (y - b) \sin \beta), (b + (x - a) \sin \beta + (y - b) \cos \beta))$ $B(15,13) \rightarrow B'((3 + (15 - 3) \cos 150^\circ - (13 - 5) \sin 150^\circ), (5 + (15 - 3) \sin 150^\circ + (13 - 5) \cos 150^\circ)) \text{ menjadi,}$ $B(15,13) \rightarrow B'\left(\left(3 + 12 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} - 8 \cdot \frac{1}{2}\right), \left(5 + 12 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right)$
--	--	---

		$B(15,13) \rightarrow B'((3 - 6\sqrt{3} - 4), (5 + 6 - 4\sqrt{3}))$ $B(15,13) \rightarrow B'(-1 - 6\sqrt{3}, 11 - 4\sqrt{3})$ <p>b) Bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah 18 detik menjadi sejauh <math>180^\circ</math> dengan koordinat awal ujung sorot lampu berada di titik <math>(14, -17)</math>, maka subjek mensubstitusi data ke dalam rumus</p> $F(x, y) \rightarrow F'((a + (x - a) \cos \beta - (y - b) \sin \beta), (b + (x - a) \sin \beta + (y - b) \cos \beta))$ $F(15,13) \rightarrow F'((3 + (14 - 3) \cos 180^\circ - (-17 - 5) \sin 180^\circ), (5 + (14 - 3) \sin 180^\circ + (-17 - 5) \cos 180^\circ))$ <p>menjadi,</p> $F(15,13) \rightarrow F'(3 + 11 \cdot -1 - -22.0), (5 + 11 \cdot 0 + -22 \cdot -1))$ $F(15,13) \rightarrow F'(3 - 11), (5 + 22))$ $F(15,13) \rightarrow F'(-8, 27)$
<p>Penarikan Kesimpulan</p>	<p>Dunia Berpikir Wujud (<i>Embodied World</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Subjek memeriksa dan mengecek ketepatan menghitung dengan mewujudkan dalam gambaran seluruhnya, jika titik-titik koordinat beserta bayangannya sesuai di dalam bidang koordinat. Subjek menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya dengan mendeskripsikan transformasi geometri secara verbal melalui gambaran sebagai berikut.</li> </ul> <p>CATATAN</p> <p><math>O</math> : titik pusat <math>(0, 0)</math>  <math>A</math> : titik pusat <math>(3, 5)</math>  <math>P'</math> : bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah 6 detik dengan titik awal <math>(8, 16)</math>  <math>T'</math> : bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah 9 detik dengan titik awal <math>(-9, 7)</math>  <math>B'</math> : bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah 15 detik dengan titik awal <math>(15, 13)</math>  <math>F'</math> : bayangan koordinat ujung sorot lampu setelah 18 detik dengan titik awal <math>(14, -17)</math></p> 

	<p>Dunia Berpikir Simbolik (<i>Proceptual-Symbolic World</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Subjek memeriksa dan mengecek ketepatan menghitung dengan menyatakan kedalam bentuk matriks transformasi geometri sesuai hasil bentuk dari bayangan titik-titik koordinat yang ditanyakan. Subjek menarik kesimpulan dari hasil bayangan akhir dari titik-titik koordinat yang ditanyakan dengan merepresentasikan data yang diketahui ke dalam bentuk matriks sebagai berikut. Bayangan titik-titik koordinat yang dihasilkan :             <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>P(8, 16)</math> menjadi <math>P'(4 - 8\sqrt{3}, 8 + 4\sqrt{3})</math></li> <li>2. <math>T(-9, 7)</math> menjadi <math>T'(-7, -9)</math></li> <li>3. <math>B(15, 13)</math> menjadi <math>B'(-1 - 6\sqrt{3}, 11 - 4\sqrt{3})</math></li> <li>4. <math>F(14, -17)</math> menjadi <math>F'(-8, 27)</math></li> </ol> </li> </ul>
	<p>Dunia Berpikir Formal (<i>Formal World</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Subjek memeriksa dan mengecek ketepatan menghitung dengan meyakini kebenaran jawabannya. Subjek menarik kesimpulan dari hasil pekerjaannya dengan kesesuaian langkah-langkah penyelesaian soal dengan menggabungkan definisi konsep beserta sifat-sifat dari masing-masing jenis transformasi geometri yang ditanyakan.</li> </ul>

## Lampiran 5 Lembar Validasi Instrumen Tes

### LEMBAR VALIDASI

Fakultas : Ilmu Tarbiyah dan Keguruan  
Program Studi : Magister Pendidikan Matematika  
Penyusun : Arum Permata Rahmadhani  
Judul Penelitian : Proses Berpikir Siswa dalam Menyelesaikan soal model  
PISA pada Topik Geometri Berdasarkan Teori Tiga Dunia  
Matematika

#### A. Pengantar

Sehubungan tersusunya instrumen ini, peneliti memohon kesediaan Bapak/Ibu untuk berkenan mengisi angket pada lembar validasi yang telah dipersiapkan. Lembar ini digunakan untuk memperoleh penilaian kelayakan soal yang digunakan pada kegiatan penelitian. Hasil pengukuran ini akan digunakan untuk menyempurnakan instrumen penelitian agar menjadi instrumen yang lebih baik dan lebih valid. Penulis mengucapkan terimakasih atas kesediaan Bapak/Ibu yang telah meluangkan waktu untuk memvalidasi instrumen ini, semoga berkat bimbingan Bapak/Ibu, instrumen ini mampu menjadi lebih sempurna.

#### B. Identitas Ahli

Nama : Dr. Ummu shaihan, M.Pd.  
NIP : 19800822 200801 2 018  
Instansi : UIN SATU Tulungagung  
Pendidikan : S3 pend. Matematika

### C. Tujuan Penelitian

1. Mendeskripsikan proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri berdasarkan dunia perwujudan-konseptual
2. Mendeskripsikan proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri berdasarkan dunia simbolis-proseptual
3. Mendeskripsikan proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri berdasarkan dunia formal-aksiomatik

### D. Petunjuk Penilaian

1. Berilah tanda cek (✓) pada tabel skala penilaian soal sesuai dengan panduan penilaian berikut.

Skor	Keterangan
1	Tidak sesuai
2	Sesuai
3	Sangat sesuai

2. Apabila ada komentar/saran yang diberikan, mohon ditulis secara langsung pada lembar/tempat yang disediakan.

### Penilaian Materi Soal

No.	Kriteria yang dinilai	Skala Penilaian		
		1	2	3
1.	Soal sesuai dengan indikator		✓	
2.	Batasan pertanyaan dan jawaban yang diharapkan sesuai.		✓	
3.	Materi soal sesuai dengan materi <i>transformasi geometri</i>			✓
4.	Materi soal sesuai untuk siswa sekolah menengah atas.		✓	

### Penilaian Konstruksi Soal

No.	Kriteria yang dinilai	Skala Penilaian		
		1	2	3
1.	Soal yang dimuat dalam bentuk kalimat tanya atau perintah yang menuntut jawaban.		✓	
2.	Ada petunjuk yang jelas cara mengerjakan atau menyelesaikan soal.			✓
3.	Menggunakan kata tanya atau perintah yang menuntut jawaban uraian.		✓	
4.	Butir soal mampu mengungkapkan tahapan proses berpikir siswa dalam menyelesaikan tes geometri.		✓	
5.	Rumusan soal memungkinkan siswa berpikir melibatkan gambar.		✓	
6.	Rumusan soal memungkinkan siswa berpikir melibatkan simbol-simbol dan gambar serta melibatkan siswa untuk melakukan aksi perhitungan.			✓
7.	Rumusan soal memungkinkan siswa berpikir melibatkan definisi konsep dalam matematika.		✓	

### Penilaian Bahasa

No.	Kriteria yang dinilai	Skala Penilaian		
		1	2	3
1.	Menggunakan bahasa yang sesuai dengan kaidah bahasa Indonesia.			✓
2.	Menggunakan bahasa yang komunikatif.			✓
3.	Rumusan kalimat tidak menimbulkan penafsiran ganda.			✓
4.	Rumusan soal tidak memuat kata atau ungkapan yang dapat menyinggung perasaan peserta didik.			✓
5.	Tidak menggunakan bahasa yang berlaku setempat atau tabu.			✓

Berikan simpulan secara umum terhadap kelayakan lembar soal sebagai instrumen penelitian dengan cara melingkari salah satu pilihan berikut.

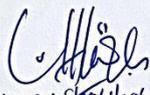
1. Layak digunakan
2. Layak digunakan dengan revisi
3. Tidak layak digunakan

**E. Komentar / Saran**

Revisi yang ada di nomor .

Tulungagung, 7-10-2022

Validator

  
Dr. Ummu Sholikhah, M.Pi  
NIP. 19800822 200601 2018

## LEMBAR VALIDASI

Fakultas : Ilmu Tarbiyah dan Keguruan  
Program Studi : Magister Pendidikan Matematika  
Penyusun : Arum Permata Rahmadhani  
Judul Penelitian : Proses Berpikir Siswa dalam Menyelesaikan soal model  
PISA pada Topik Geometri Berdasarkan Teori Tiga Dunia  
Matematika

### A. Pengantar

Sehubungan tersusunnya instrumen ini, peneliti memohon kesediaan Bapak/Ibu untuk berkenan mengisi angket pada lembar validasi yang telah dipersiapkan. Lembar ini digunakan untuk memperoleh penilaian kelayakan soal yang digunakan pada kegiatan penelitian. Hasil pengukuran ini akan digunakan untuk menyempurnakan instrumen penelitian agar menjadi instrumen yang lebih baik dan lebih valid. Penulis mengucapkan terimakasih atas kesediaan Bapak/Ibu yang telah meluangkan waktu untuk memvalidasi instrumen ini, semoga berkat bimbingan Bapak/Ibu, instrumen ini mampu menjadi lebih sempurna.

### B. Identitas Ahli

Nama : Ora Umy Zahroh, Ph.D.  
NIP : 19690719 200003 200 2  
Instansi : UIN SATU Tulungagung  
Pendidikan : .....

### C. Tujuan Penelitian

1. Mendeskripsikan proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri berdasarkan dunia perwujudan-konseptual
2. Mendeskripsikan proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri berdasarkan dunia simbolis-proseptual
3. Mendeskripsikan proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri berdasarkan dunia formal-aksiomatik

### D. Petunjuk Penilaian

1. Berilah tanda cek (√) pada tabel skala penilaian soal sesuai dengan panduan penilaian berikut.

Skor	Keterangan
1	Tidak sesuai
2	Sesuai
3	Sangat sesuai

2. Apabila ada komentar/saran yang diberikan, mohon ditulis secara langsung pada lembar/tempat yang disediakan.

### Penilaian Materi Soal

No.	Kriteria yang dinilai	Skala Penilaian		
		1	2	3
1.	Soal sesuai dengan indikator			√
2.	Batasan pertanyaan dan jawaban yang diharapkan sesuai.		√	
3.	Materi soal sesuai dengan materi <i>transformasi geometri</i>			√
4.	Materi soal sesuai untuk siswa sekolah menengah atas.			√

### Penilaian Konstruksi Soal

No.	Kriteria yang dinilai	Skala Penilaian		
		1	2	3
1.	Soal yang dimuat dalam bentuk kalimat tanya atau perintah yang menuntut jawaban.			✓
2.	Ada petunjuk yang jelas cara mengerjakan atau menyelesaikan soal.			✓
3.	Menggunakan kata tanya atau perintah yang menuntut jawaban uraian.			✓
4.	Butir soal mampu mengungkapkan tahapan proses berpikir siswa dalam menyelesaikan tes geometri.			✓
5.	Rumusan soal memungkinkan siswa berpikir melibatkan gambar.			✓
6.	Rumusan soal memungkinkan siswa berpikir melibatkan simbol-simbol dan gambar serta melibatkan siswa untuk melakukan aksi perhitungan.		✓	
7.	Rumusan soal memungkinkan siswa berpikir melibatkan definisi konsep dalam matematika.			✓

### Penilaian Bahasa

No.	Kriteria yang dinilai	Skala Penilaian		
		1	2	3
1.	Menggunakan bahasa yang sesuai dengan kaidah bahasa Indonesia.			✓
2.	Menggunakan bahasa yang komunikatif.			✓
3.	Rumusan kalimat tidak menimbulkan penafsiran ganda.			✓
4.	Rumusan soal tidak memuat kata atau ungkapan yang dapat menyinggung perasaan peserta didik.		✓	
5.	Tidak menggunakan bahasa yang berlaku setempat atau tabu.		✓	

Berikan simpulan secara umum terhadap kelayakan lembar soal sebagai instrumen penelitian dengan cara melingkari salah satu pilihan berikut.

1. Layak digunakan
2. Layak digunakan dengan revisi
3. Tidak layak digunakan

**E. Komentar / Saran**

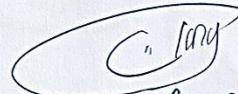
*Instrumen layak digunakan mengambil data.*

.....

.....

Tulungagung, 6-10-2022

Validator



*Dr. Umy Zuhroh, Ph.D.*

NIP. 19690719 200032002

## LEMBAR VALIDASI

Fakultas : Ilmu Tarbiyah dan Keguruan  
Program Studi : Magister Pendidikan Matematika  
Penyusun : Arum Permata Rahmadhani  
Judul Penelitian : Proses Berpikir Siswa dalam Menyelesaikan soal model  
PISA pada Topik Geometri Berdasarkan Teori Tiga Dunia  
Matematika

### A. Pengantar

Sehubungan tersusunnya instrumen ini, peneliti memohon kesediaan Bapak/Ibu untuk berkenan mengisi angket pada lembar validasi yang telah dipersiapkan. Lembar ini digunakan untuk memperoleh penilaian kelayakan soal yang digunakan pada kegiatan penelitian. Hasil pengukuran ini akan digunakan untuk menyempurnakan instrumen penelitian agar menjadi instrumen yang lebih baik dan lebih valid. Penulis mengucapkan terimakasih atas kesediaan Bapak/Ibu yang telah meluangkan waktu untuk memvalidasi instrumen ini, semoga berkat bimbingan Bapak/Ibu, instrumen ini mampu menjadi lebih sempurna.

### B. Identitas Ahli

Nama : Dr. Manyono, M.Pd.  
NIP : 198103302005011007  
Instansi : UIN SATU Tulungagung  
Pendidikan : S-3 Pend. Mat

### C. Tujuan Penelitian

1. Mendeskripsikan proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri berdasarkan dunia perwujudan-konseptual
2. Mendeskripsikan proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri berdasarkan dunia simbolis-proseptual
3. Mendeskripsikan proses berpikir siswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan soal model PISA pada topik geometri berdasarkan dunia formal-aksiomatik

### D. Petunjuk Penilaian

1. Berilah tanda cek (✓) pada tabel skala penilaian soal sesuai dengan panduan penilaian berikut.

Skor	Keterangan
1	Tidak sesuai
2	Sesuai
3	Sangat sesuai

2. Apabila ada komentar/saran yang diberikan, mohon ditulis secara langsung pada lembar/tempat yang disediakan.

### Penilaian Materi Soal

No.	Kriteria yang dinilai	Skala Penilaian		
		1	2	3
1.	Soal sesuai dengan indikator			✓
2.	Batasan pertanyaan dan jawaban yang diharapkan sesuai.			✓
3.	Materi soal sesuai dengan materi <i>transformasi geometri</i>			✓
4.	Materi soal sesuai untuk siswa sekolah menengah atas.		✓	

### Penilaian Konstruksi Soal

No.	Kriteria yang dinilai	Skala Penilaian		
		1	2	3
1.	Soal yang dimuat dalam bentuk kalimat tanya atau perintah yang menuntut jawaban.			✓
2.	Ada petunjuk yang jelas cara mengerjakan atau menyelesaikan soal.		✓	
3.	Menggunakan kata tanya atau perintah yang menuntut jawaban uraian.			✓
4.	Butir soal mampu mengungkapkan tahapan proses berpikir siswa dalam menyelesaikan tes geometri.			✓
5.	Rumusan soal memungkinkan siswa berpikir melibatkan gambar.			✓
6.	Rumusan soal memungkinkan siswa berpikir melibatkan simbol-simbol dan gambar serta melibatkan siswa untuk melakukan aksi perhitungan.			✓
7.	Rumusan soal memungkinkan siswa berpikir melibatkan definisi konsep dalam matematika.			✓

### Penilaian Bahasa

No.	Kriteria yang dinilai	Skala Penilaian		
		1	2	3
1.	Menggunakan bahasa yang sesuai dengan kaidah bahasa Indonesia.			✓
2.	Menggunakan bahasa yang komunikatif.			✓
3.	Rumusan kalimat tidak menimbulkan penafsiran ganda.		✓	
4.	Rumusan soal tidak memuat kata atau ungkapan yang dapat menyinggung perasaan peserta didik.			✓
5.	Tidak menggunakan bahasa yang berlaku setempat atau tabu.			✓

Berikan simpulan secara umum terhadap kelayakan lembar soal sebagai instrumen penelitian dengan cara melingkari salah satu pilihan berikut.

1. Layak digunakan
2. Layak digunakan dengan revisi
3. Tidak layak digunakan

**E. Komentar / Saran**

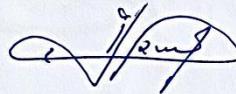
.....

.....

.....

....., ..... 2022

Validator



Dr. Maryono, M.Pd.  
NIP. 19810330 20091 1 012

## Lampiran 6 Surat Izin Penelitian



PEMERINTAH KABUPATEN PASURUAN  
**BADAN KESATUAN BANGSA DAN POLITIK**  
Komplek Perkantoran Pemerintah Daerah Kabupaten Pasuruan  
Gedung Lettu Imam Adi Lt.3 Jl. Raya Raci Km.09 Bangil - Pasuruan Telp. (0343) 747004  
Website : bakesbangpol.pasuruankab.go.id Email : bakesbangpol@pasuruankab.go.id

### REKOMENDASI MAGANG/SURVEY/PENELITIAN

NO. 072/285/424.104/SUR/RES/2022

- Dasar :
1. Peraturan Menteri Dalam Negeri Nomor 41 Tahun 2010 tentang Organisasi dan Tata Kerja Kementerian Dalam Negeri (Berita Negara Republik Indonesia Tahun 2010 Nomor 316), sebagaimana telah diubah dengan Peraturan Menteri Dalam Negeri Nomor 14 Tahun 2011 tentang Perubahan Atas Peraturan Menteri Dalam Negeri Nomor 41 Tahun 2010 tentang Organisasi dan Tata Kerja Kementerian Dalam Negeri (Berita Negara Republik Indonesia Tahun 2011 Nomor 168).
  2. Peraturan Menteri Dalam Negeri Republik Indonesia Nomor 64 Tahun 2011 tentang Pedoman Penerbitan Rekomendasi Penelitian, sebagaimana telah diubah dengan Peraturan Menteri Dalam Negeri No. 7 Tahun 2014 tentang Perubahan atas peraturan Menteri Dalam Negeri No. 64 Tahun 2011.
  3. Surat dari UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, Tanggal 20 Oktober 2022, Nomor: 1961/Un.03.1/TL.00.1/10/2022, Perihal Permohonan Izin Tesis, Atas nama : Arum Permata Rahmadhani

Badan Kesatuan Bangsa dan Politik Pemerintah Kabupaten Pasuruan memberikan rekomendasi kepada :

Nama : **Arum Permata Rahmadhani**  
NIM : **19810002**  
Alamat : Perum Wisma Indah C. 09, Kepanjen Lor, Kota Blitar

Pekerjaan/Jabatan : Mahasiswa  
Instansi/Organisasi : UIN Maulana Malik Ibrahim Malang  
Kebangsaan : Indonesia  
Judul Penelitian : **"Proses Berpikir Siswa Dalam Menyelesaikan Soal Model PISA pada Topik Geometri Berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika"**

Tujuan : Tesis  
Bidang Penelitian : Pendidikan  
Penanggung Jawab : Arum Permata Rahmadhani  
Anggota/Peserta :  
1. -  
2. -  
3. -  
4. -  
5. -  
6. -  
7. -  
8. -  
9. -

Waktu Penelitian : 2 (Dua) Bulan  
Lokasi Penelitian : SMA Negeri 1 Pandaan  
Kewajiban Peserta :  
1. Berkeajiban menghormati dan mentaati Peraturan dan tata tertib di daerah setempat/lokasi penelitian/survey/kegiatan;  
2. Pelaksanaan penelitian agar tidak disalahgunakan untuk tujuan tertentu yang dapat mengganggu kestabilan keamanan dan ketertiban di daerah/lokasi setempat;  
3. Berkeajiban melaporkan hasil penelitian dan sejenisnya kepada Badan Kesatuan Bangsa dan Politik Pemerintah Kabupaten Pasuruan dalam kesempatan pertama.

Pasuruan, 21 Oktober 2022

Kepala Badan Kesatuan Bangsa dan Politik  
Kabupaten Pasuruan  
Kepala Bidang Iwasbang Eksosbud dan Agama



### TEMBUSAN:

- Yth.
1. Kepala Cabang Dinas Pendidikan Provinsi Jawa Timur Wilayah Kabupaten/Kota Pasuruan;
  2. Kepala SMA Negeri 1 Pandaan;
  3. Arsip.
  - 4.
  - 5.
  - 6.
  - 7.



KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN  
JalanGajayana 50, Telepon (0341) 552398 Faximile (0341) 552398 Malang  
[http:// fitk.uin-malang.ac.id](http://fitk.uin-malang.ac.id) . email : [fitk@uin\\_malang.ac.id](mailto:fitk@uin_malang.ac.id)

Nomor : 1852/Un.03.1/TL.00.1/09/2022  
Sifat : Penting  
Lampiran : -  
Hal : IZIN SURVEY

30 September 2022

Kepada  
Yth. Kepala MA Ma'arif NU Pandaan  
di  
Pasuruan

**Assalamu'alaikum Wr. Wb.**

Dengan hormat, dalam rangka penyusunan proposal tesis pada program studi Magister Pendidikan Matematika (MPMAT) Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan (FITK) Program Pascasarjana Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, kami mohon dengan hormat agar mahasiswa berikut:

Nama : Arum Permata Rahmadhani  
NIM : 19810002  
Program Studi : Magister Pendidikan Matematika (MPMAT)  
Semester - Tahun Akademik : Ganjil - 2022/2023  
Judul Proposal : **Proses Berpikir Siswa dalam Menyelesaikan Soal Model PISA pada Topik Geometri berdasarkan Teori Tiga Dunia Matematika**

diberi izin untuk melakukan survey/studi pendahuluan di lembaga/instansi yang menjadi wewenang Bapak/Ibu.

Demikian, atas perkenan dan kerjasama Bapak/Ibu yang baik disampaikan terima kasih.

**Wassalamu'alaikum Wr. Wb.**



An Dekan,  
Wakil Dekan Bidang Akademi

Dr. Muhammad Walid, MA  
NIP. 19730823 200003 1 002

Tembusan :

1. Yth. Ketua Program Studi Magister MPMAT
2. Arsip

## Lampiran 7 Lembar Jawaban Subjek

1. Diketahui:  $v = 10^\circ/s$  berlawanan arah jarum jam (-)  
koordinat mercusuar:  $(0,0)$

Ditanya:

- a) koordinat ujung sorot lampu yang awalnya berada di titik  $(8,16)$  jika  $t = 6s$   
jika  $v = 10^\circ/s$  maka jika  $t = 6s$ , maka kecepatannya  $60^\circ/s$ .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 8\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} + 8 \end{pmatrix}$$

Jadi, koordinatnya adalah  $(4 - 8\sqrt{3}, 4\sqrt{3} + 8)$

- b) koordinat ujung lampu sorot lainnya yang awalnya berada di titik  $(-9,7)$  jika  $t = 9s$   
jika  $v = 10^\circ/s$  maka jika  $t = 9s$  maka kecepatannya  $90^\circ/s$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Jadi, koordinatnya adalah  $(-7, -9)$

2. Diketahui: posisi atap mercusuar:  $(3,5)$

Ditanya:

- a) koordinat ujung lampu sorot yang awalnya berada di titik  $(15,13)$  jika  $t = 15s$   
jika  $v = 10^\circ/s$  maka jika  $t = 15s$  maka kecepatannya  $150^\circ/s$

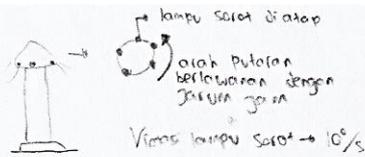
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15-3 \\ 13-5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -6\sqrt{3}-4 \\ 6-4\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sqrt{3}-1 \\ 11-4\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Jadi, koordinatnya adalah  $(-6\sqrt{3}-1, 11-4\sqrt{3})$

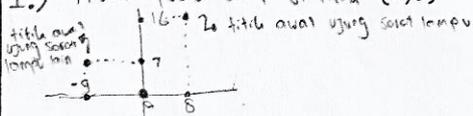
- b) koordinat ujung lampu sorot lainnya yang awalnya berada di titik  $(19,-17)$  jika  $t = 18s$   
jika  $v = 10^\circ/s$  maka jika  $t = 18s$  maka kecepatannya  $180^\circ/s$ .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19-3 \\ -17-5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -11 \\ 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Jadi, koordinatnya adalah  $(-8, 27)$ .



1.) Misal posisi atap di titik  $(0,0)$   
titik awal ujung silet lampu



a.)  $A(8, 16) \xrightarrow{R(0, 60^\circ)} A'(x', y')$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 - 8\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} - 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b.)  $B(-9, 7) \xrightarrow{R(0, 90^\circ)} B'(x', y')$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.) Misal posisi atap  $(3, 5)$

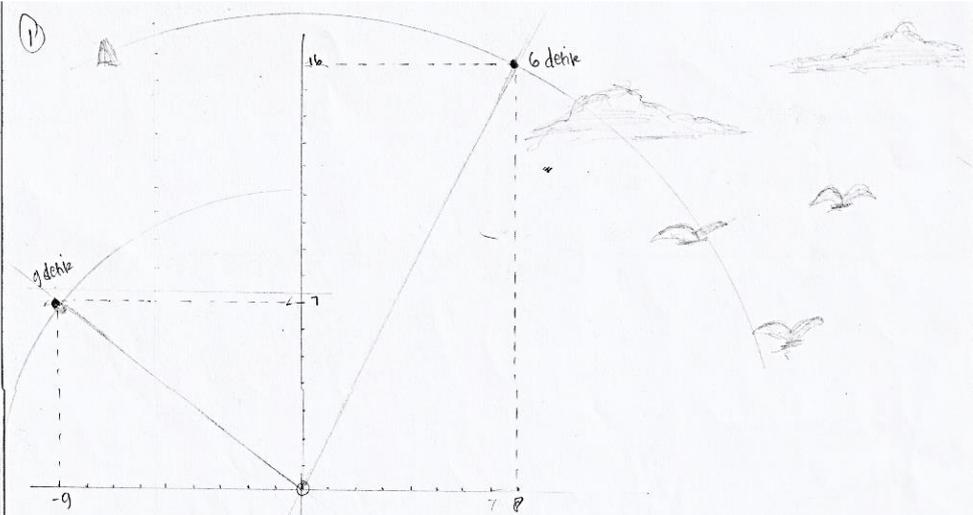
a.)  $A(15, 13) \xrightarrow{R(P, 150^\circ)} A'(x', y')$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15-3 \\ 13-5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6\sqrt{3} - 4 \\ 6 - 4\sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6\sqrt{3} - 1 \\ 11 - 4\sqrt{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b.)  $B(14, -17) \xrightarrow{R(P, 180^\circ)} B'(x', y')$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14-3 \\ -17-5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ -22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -11 \\ 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8 \\ 27 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

kata-kata : Soalnya menarik, tidak menantang, selama mengerjakan soal saya tidak terlalu menemukan kesulitan. Selain itu, lampu mencusaknya seolah memberi penalaran di dalam pikiran saya untuk menjawab. Saya sebenarnya bukan ahli matematika tapi jika dilihat dari soalnya saya tidak bisa berkomentar apa-apa karena lambat ke pernyataan awal



$\rightarrow 10^\circ \times 6 = 60^\circ \mid (8, 16) \text{ dan } ($   

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 - 8\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} + 8 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow 10^\circ \times 9 = 90^\circ \mid (-9, 7)$   

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow 10^\circ \times 15 = 150^\circ \mid \begin{pmatrix} m & n \\ 3 & 5 \end{pmatrix} (15, 13)$   

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 - 3 \\ 13 - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2\sqrt{3} & -1/2 \\ 1/2 & -1/2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6\sqrt{3} + 4 \\ 6 - 4\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow 10^\circ \times 18 = 180^\circ \mid \begin{pmatrix} m & n \\ 3 & 5 \end{pmatrix} (14, 17)$   

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -17 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -17 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -11 \\ +12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Merusidar

1 a.) misal ujung sorot lampu = A maka,  
 $A(8, 16)$   $P(10^\circ \times 6 = 60^\circ) \rightarrow A'$   
 $P(0, 0)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 - 8\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} + 8 \end{pmatrix}$$

b.) misal ujung sorot lampu = B, maka  
 $B(-9, 7)$   $P(10^\circ \times 9 = 90^\circ) \rightarrow B'$   
 $P(0, 0)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \end{pmatrix}$$

2 a.) misal ujung sorot lampu = C, maka  
 $C(15, 13)$   $P(10^\circ \times 15 = 150^\circ) \rightarrow C'$

$P(3, 5)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - m \\ y - n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 - 3 \\ 13 - 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

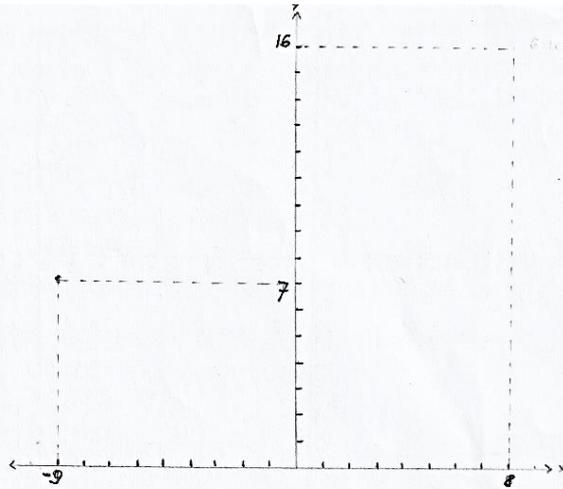
$$= \begin{pmatrix} -6\sqrt{3} - 4 \\ 6 - 4\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6\sqrt{3} - 1 \\ -4\sqrt{3} + 11 \end{pmatrix}$$



lengkapnya  
 dibalikannya →

1. a)



$$\begin{aligned} &\rightarrow 10^\circ \times 6 \cdot 60^\circ \\ &\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 - 8\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} + 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow 10^\circ \times 9 \cdot 90^\circ \mid (-9, 7) \\ &\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow 10^\circ \times 15 \cdot 150^\circ \mid (3, 5) \mid (15, 13) \\ &\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 - 3 \\ 13 - 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -1/2 \\ -1/2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6\sqrt{3} - 4 \\ 6 - 4\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow 10^\circ \times 18 \cdot 180^\circ \mid (3, 5) \mid (19, -17) \\ &\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19 \\ -17 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19 \\ -17 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -11 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \\ -29 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alvinia Caantik

1) a) 10° per detik, maka setelah 6 detik menjadi 60° berada di titik (8,16) terhadap titik (0,0)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix} \text{ dari } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 8\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(1 - 2\sqrt{3}) \\ 4(\sqrt{3} + 2) \end{bmatrix}$$

maka, koordinat ujung sorot lampu setelah 6 detik adalah  $(4 - 8\sqrt{3}, 4\sqrt{3} + 8)$

b) 9 detik : maka 90°, berada di titik (-9,7) terhadap titik (0,0)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \end{bmatrix} \text{ , maka, koordinat ujung sorot lampu setelah 9 detik adalah } (-7, -9)$$

2) a) 15 detik maka 150°, berada di titik (15,13) terhadap titik (3,5)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15-3 \\ 13-5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\sqrt{3}-4 \\ 6-4\sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\sqrt{3}-1 \\ -4\sqrt{3}+11 \end{bmatrix} \text{ maka, koordinat ujung sorot lampu setelah 15 detik adalah } (-6\sqrt{3}-1, -4\sqrt{3}+11)$$

b) 18 detik : maka 180°, berada di titik (19,-7) terhadap titik (3,5)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19-3 \\ -17-5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ -22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 27 \end{bmatrix} \text{ maka, koordinat ujung sorot lampu setelah 18 detik adalah } (-8, 27)$$

soalnya mudah untuk dipahami, padahal biasanya saya agak bingung kalo soal cerita :)

## Lampiran 8 Dokumentasi Penelitian



