ESTIMASI PARAMETER REGRESI VARIABEL *DUMMY* MENGGUNAKAN METODE MATRIKS TERBOBOTI

SKRIPSI

OLEH

AGUNG PRIYO RIZKI

NIM. 09610055

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

ESTIMASI PARAMETER REGRESI VARIABEL *DUMMY* MENGGUNAKAN METODE MATRIKS TERBOBOTI

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Agung Priyo Rizki
NIM. 09610055

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016

ESTIMASI PARAMETER REGRESI VARIABEL *DUMMY* MENGGUNAKAN METODE MATRIKS TERBOBOTI

SKRIPSI

Oleh
Agung Priyo Rizki
NIM. 09610055

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 18 Juli 2016

Pembimbing I,

Dr. Sri Harini, M.Si
NIP. 19731014 200112 2 002

Pembimbing II,

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER REGRESI VARIABEL *DUMMY* MENGGUNAKAN METODE MATRIKS TERBOBOTI

SKRIPSI

Oleh
Agung Priyo Rizki
NIM. 09610055

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 19 Juli 2016

Penguji Utama	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Sri Harini, M.Si	....
Anggota Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Agung Priyo Rizki
NIM	: 09610055
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Estimasi Parameter Regresi Variabel *Dummy* Menggunakan Metode Matriks Terboboti.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 19 Juli 2016
Yang membuat pernyataan,

Agung Priyo Rizki
NIM. 09610055

MOTO

يَـٰٓأَيَّتُهَا ٱلنَّفۡسُ ٱلۡمُطۡمَئِنَّةُ ٢٧ ٱرۡجِعِيٓ إِلَىٰ رَبِّكِ رَاضِيَةً مَّرۡضِيَّةً ٢٨ فَٱدۡخُلِي فِي
عِبَـٰدِي ٢٩ وَٱدۡخُلِي جَنَّتِي ٣٠

“ ***Hai jiwa yang tenang. Kembalilah kepada Tuhanmu dengan hati yang puas lagi diridhai-Nya. Maka masuklah ke dalam jama'ah hamba-hamba-Ku, masuklah ke dalam syurga-Ku.”***

PERSEMBAHAN

UNTUK

Alm. Ayahanda Ali achmadi dan Ibunda Dewi Erna, Kakak Erlina Mustika Putri, Adik Sri Utami Wahyu Ningsih, Adik Mohammad Jupri serta segenap keluarga besar yang selalu memberi dukungan, semangat, do’a serta pengorbanan.

UNTUK

Dita puspita sari, Ilvan Maulana, Didit Eko Purwanto, Endra Mustofa, Ainun Abror, Washilul Mukhlisin, Ahmad Budi Cahyono, Nuraga, dan Erandi Hutomo terima kasih sudah menjadi bagian hidup dan keluarga baru.

UNTUK

Sahabat Gading Pesantren Rizal Nur Hadi, Badrul Haq, Rifqi Nur, Syafi’i, Robi, Fauzi, Iyung, Rasya, Asep, Hepi, dan Pak Irkham terima kasih.

Terima kasih banyak untuk semuanya.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. berkat rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai slah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
4. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.

5. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
6. Ayah dan Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
7. Kakak-kakak yang selalu memberikan doa, semangat serta dukungan kepada penulis sampai saat ini.
8. Kepada teman-teman yang memberikan semangat berjuang bersama kepada penulis sampai saat ini.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, Juli 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$Y_{(n\times 1)}$	:	vektor variabel terikat
$X_{(n\times (k+1))}$	:	matriks variabel bebas
$\beta_{((k+1)\times 1)}$	:	vektor koefisien parameter regresi
q_i	:	probabilitas sukses pada observasi ke *i*
u_j	:	banyaknya rataan pada observasi ke *j*
$\varepsilon_{(n\times 1)}$	:	vektor galat ukuran $n \times 1$
$I_{(n\times n)}$	:	matriks identitas
w_i	:	matriks terboboti pada observasi ke *i*

ABSTRAK

Rizki AP. 2016. **Estimasi Parameter Regresi Variabel *Dummy* Menggunakan Metode Matriks Terboboti**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Sri Harini, M.Si (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Kata kunci: Estimasi Parameter, Regresi Variabel *Dummy*, *Ordinary Least Square*, Matriks, Matriks Terboboti.

Estimasi adalah suatu metode untuk menaksir nilai-nilai suatu populasi dengan menggunakan nilai-nilai sampel. Estimasi Parameter merupakan proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Estimasi parameter ini dapat digunakan untuk mengetahui karakteristik parameter suatu populasi. Metode yang paling sering dipakai peneliti untuk mengestimasi parameter adalah metode *least square*. Dengan metode ini akan didapatkan estimator yang tidak bias konsisten dan efisien. Untuk menggunakan metode ini harus memenuhi asumsi-asumsi yang disebut asumsi klasik. Least square yang memenuhi asumsi ini disebut *Ordinary Least Square* (OLS). Namun, pada pelaksanaanya sering kali terjadi penyimpangan asumsi-asumsi ini, salah satunya terjadinya heteroskedastisitas (nilai variansi tidak konstan), sehingga akan dihasilkan estimator yang tidak bias, konsisten namun tidak efisien. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan estimasi parameter pada variabel *dummy* yang dengan metode *Ordinary Least Square* yang ditransformasikan dalam bentuk matriks. Diperoleh bentuk estimator dari parameter regresi variabel *dummy* dengan menggunakan metode matriks terboboti lebih baik daripada menggunakan metode OLS.

$$\hat{\beta}^* = (X^T P^T P X)^{-1} X^T P^T P Y$$

dengan P berukuran $n \times n$ dengan elemen-elemen diagonal yang berisi $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$. Terbukti estimator parameter regresi pada *dummy* menggunakan pendekatan matriks terboboti adalah estimator yang bersifat *unbias*.

ABSTRACT

Rizki, AP. 2016. ***The Parameter Estimation of Dummy Variable Regression***. Thesis. Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University, Malang. Advisor: (I) Dr. Sri Harini, M.Si (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Keywords: Parameter Estimation, Dummy Variable Regression, Ordinary Least Square, Matrix, Weighted Matrix.

Estimation is a method to estimate values of a population using sample values. Parameter estimation is process using statistic samples to estimate unknown population parameter relation. It can be used to find out parameter characteristics of a population. Researchers often employ least square method to estimate parameter since they will get unbiased and efficient estimator. Using this method, the researcher should meet classical assumption. The least square meeting this assumption is called Ordinary Least Square (OLS). However, the assumption deviation often occurs. One of them is heteroscedacticity (inconstant variance). It leads to unbiased and consistent, but inefficient estimator. The study aims to get parameter estimation on dummy variables using Ordinary Least Square method transformed into matrix. The result shows that the estimator from dummy variable regression parameter using weighed matrix method is better than using OLS.

$$\hat{\beta}^* = (X^T P^T P X)^{-1} X^T P^T P Y$$

With P area $n \times n$ and diagonal elements consisting $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$, it is proven that regression parameter estimator on dummy variables using weighed matrix will be unbiased ones.

ملخص

أجونج فريو رزقي. ٢٠١٦. تقدير مقدار انحدار المتغيرات "دومي" باستخدام طريقة القوالب المثقولة. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا في جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانق. المشرف الأول: د. سري هاريني الماجستير. المشرف الثاني: د. عبد الشاكر الماجستير.

الكلمات الرئيسية: تقدير المقدار، انحدار المتغيرات "دومي"، المربعات الصغرى العادية، القوالب، القوالب المثقولة.

التقدير هو طريقة لقياس قيمة مجتمع البحث باستخدام قيمة العينة. تقدير المقدار هو العملية التي تستخدم العينات الإحصائية لتقدير أو تقييم علاقة المقدار بين مجتمع البحث المجهول. يمكن أن يستخدمه لتحديد أداة خصائص مقدار مجتمع البحث. أكثر طريقة استخداما عند الباحثين لتقدير المقدار هو طريقة المربعات الصغرى. بتلك الطريقة سيتم الحصول على مقدر غير متحيز، ثابت وفعال. ولاستخدامها، يجب أن تفي الفرضيات بما يسمى الفرضيات التقليدية. المربعات الصغرى التي تفيها يسمى بالمربعات الصغرى العادية (OLS). ولكن في عملية التنفيذ يجد الانحرافات الكثيرة من تلك الفرضيات؛ منها قيمة الأشكال غير ثابتة (*heteroskedastisitas*)، لذلك سوف يجد المقدر غير متحيز، ثابت ولكن غير فعال. ويهدف هذا البحث إلى الحصول على تقدير المقدار في متغير "دومي" باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية التي ستحول إلى شكل القوالب. أشكل التقدير من مقدار انحدار المتغيرات "دومي" باستخدام طريقة القوالب المثقولة أفضل من استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية.

$$\widehat{\beta}^* = \left(X^T P^T P X\right)^{-1} X^T P^T P Y$$

مع P بالمقياس $n \times n$ مع العناصر القطرية التي تحتوي من $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$. ثبت أن مقدار انحدار المتغيرات "دومي" باستخدام طريقة القوالب المثقولة غير متحيز.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu peran statistik dalam ilmu pengetahuan adalah sebagai alat analisis dan interpretasi data kuantitatif, sehingga didapatkan suatu kesimpulan dari data tersebut. Dalam statistik, estimasi adalah suatu metode untuk mengetahui sekitar beberapa nilai-nilai suatu populasi dengan menggunakan nilai-nilai sampel. Nilai populasi sering disebut dengan parameter populasi, sedangkan nilai-nilai sampel sering disebut dengan statistik sampel. Dalam metode estimasi, parameter populasi yang ingin ditaksir itu adalah berupa nilai rata-rata yang diberi notasi μ dan nilai simpangan baku dengan notasi σ (Yitnosumarto, 1990).

Teori estimasi sendiri digolongkan menjadi estimasi titik *(Point Estimate)* dan pendugaan selang *(Interval Estimation)*. Istilah statistik yang sering didengar adalah estimasi yang merupakan terjemahan dari kata *estimation.* Pada dasarnya, estimasi adalah suatu metode untuk mengetahui sekitar beberapa nilai-nilai suatu populasi dengan menggunakan nilai-nilai sampel. Estimasi yang digunakan pada penelitian ini menggunakan estimasi *Ordinary Least Square* dengan pendekatan matriks terboboti.

Istilah linear dapat ditafsirkan dengan dua cara yang berbeda, yaitu liniearitas dalam variabel atau linearitas dalam parameter. Dalam penelitian ini penulis lebih tertarik untuk meneliti linieritas dalam parameter. Parameter yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah parameter regresi variabel *dummy*.

Dalam model regresi ada kalanya variabel tak bebas atau variabel-variabel penjelas bersifat kualitatif, seperti warna kulit, agama, status perkawinan, jenis kelamin. Variabel kualitatif ini, yang sering dikenal sebagai variabel buatan atau variable *dummy* atau variabel boneka. Dengan kata lain variabel *dummy* digunakan untuk mengkuantifikasi data kualitatif.

Analisis regresi yang digunakan untuk menganalisis variabel terikat dengan data kualitatif (variabel *dummy*) ada tiga model, antara lain: Model Logit, Probit, dan Tobit. Model Logit dan Probit memberikan informasi yang sama untuk kedua kelompok data, baik yang nilai variabel dependenya 1 maupun yang 0. Misalnya, baik responden yang memiliki rumah atau kendaraan, informasinya sama, yaitu terdiri atas pendapatan. Apabila kita menggunakan contoh lulusan, baik yang lulus (lulus=1) maupun yang tidak lulus (lulus=0), kita memiliki informasi yang sama yaitu IPK, jam belajar, dan tinggal di rumah atau tidak (Wahyu, 2007:23).

Sebelumnya, pada tahun 2011 telah ada penulisan tentang regresi variabel *dummy* oleh mahasiswa Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yaitu penulisan regresi variabel *dummy* dengan menggunakan metode *Weighted Least Square*. Sebagai pengembangan dari penulisan sebelumnya, maka penulisan skripsi ini digunakan metode yang lain yaitu pendekatan matriks untuk menganalisis regresi variabel *dummy*.

Pengembangan penulisan ini terinspirasi dari penggalan ayat al-Quran surat al-Mulk/67:2, yaitu:

ٱلَّذِى خَلَقَ ٱلْمَوْتَ وَٱلْحَيَوٰةَ لِيَبْلُوَكُمْ أَيُّكُمْ أَحْسَنُ عَمَلًا ... ﴿٢﴾

"...supaya Dia menguji kamu, siapa diantara kamu yang lebih baik amalnya...*"(QS.Al-Mulk/67:12).*

Dalam penggalan ayat diatas, Allah memberikan kesadaran kepada hamba-Nya bahwa di balik hidup dan mati itu terdapat tujuan dan ujian, karena dibalik ujian ternyata terkandung hikmah atau rahasia yang tersembunyi di dalam ilmu Allah. Selain itu Allah tidak mengatakan: "Yang paling banyak amalnya." Menandakan amal yang paling utama di sisi Allah adalah amal yang paling baik bukan amal yang paling banyak. Sedangkan amal yang paling baik Allah memberikan ciri-ciri pada Ayat al-Kahf/18:110, yaitu:

فَمَن كَانَ يَرۡجُواْ لِقَآءَ رَبِّهِۦ فَلۡيَعۡمَلۡ عَمَلٗا صَٰلِحٗا وَلَا يُشۡرِكۡ بِعِبَادَةِ رَبِّهِۦٓ أَحَدَۢا ١١٠

"Barangsiapa mengharap perjumpaan dengan Tuhannya, maka hendaklah ia mengerjakan amal yang saleh dan janganlah ia mempersekutukan seorangpun dalam beribadat kepada Tuhannya"(QS.Al-Kahf/18:10)..

Sehingga kemudian Allah menguji hambaNya melalui ujian untuk membersihkan dosa syirik dalam hatinya, seperti perilaku cinta dunia atau sesuatu yang bersifat syrik yang membebani hati untuk ikhlas cinta, dan ridho dalam beribadah kepadaNya.

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka penulis mengembangkanya melalui penelitian ini dengan judul "Estimasi Parameter Regresi Variabel *Dummy* Menggunakan Metode Matriks Terboboti*".*

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dibahas pada penelitian ini adalah bagaimana bentuk estimasi parameter regresi variabel *dummy* menggunakan metode Matriks Terboboti*?*

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang akan dicapai pada penelitian ini adalah untuk mengetahui bentuk estimasi parameter regresi variabel *dummy* menggunakan metode pendekatan Matriks Terboboti.

1.4 Manfaat Penelitian

Bagi Penulis

1. Mampu mengaplikasikan mata kuliah statistik yang pernah dipelajari di bangku kuliah.
2. Menambah pengetahuan dan wawasan, khususnya keterkaitan dalam estimasi parameter variabel *dummy* dan matriks.

Bagi Pembaca

1. Memperkaya dan memperkuat wawasan ilmu Statistika.
2. Membantu pembaca yang ingin memperdalam dan memperluas ilmu pengetahuan estimasi parameter regresi variabel *dummy*.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan pada penelitian ini adalah menggunakan regresi variabel *dummy*.

1.6 Metode Penelitian

1.6.1 Pendekatan Penelitian

Pada penelitian ini menggunakan pendekatan kuanlitatif untuk mengestimasi permasalahan dengan menggunakan teori yang mendukung dalam masalah yang diangkat. Pendekatan ini menggambarkan objek penelitian yang dihubungkan dan ditelaah dengan teori-teori yang ada.

1.6.2 Sumber Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian teoritis yaitu penelitian yang dilakukan dengan cara mengumpulkan data dan informasi yang bersumber dari artikel, buku-buku, jurnal dan lain lain.

1.6.3 Tahap-tahap Penelitian

Pada Penelitian ini langkah-langkah untuk estimasi parameter regresi variabel *dummy,* adalah sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi model regresi variabel *dummy.*
2. Mengestimasi parameter regresi variabel *dummy* menggunakan metode pendekatan matriks terboboti. Menstransformasikan persamaan regresi variabel dummy dalam bentuk persamaan regresi terboboti, dan mengestimasi parameter regresi variabel *dummy*.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah dan memahami skripsi ini secara keseluruhan maka penulis menggambarkan sistematika pembahasannya yang terdiri dari empat Bab dan masing-masing akan dijelaskan sebagai berikut:

Bab I : Merupakan Bab Pendahuluan yang menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II : Berisi hal-hal yang mendasar dalam teori yang dikaji, meliputi: regresi variabel *dummy*, estimasi parameter (metode *Least Square Estimation*) dan ayat-ayat al-Quran yang berkaitan dengan regresi dan variabel *dummy*.

Bab III : Pembahasan merupakan Bab inti dari penulisan yang menjabarkan tentang konstruksi model regresi variabel *dummy*.

Bab IV : Penutup yang merupakan kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian yang telah diterangkan dan dilengkapi dengan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Analisis Regresi

Istilah regresi pertama kali diperkenalkan oleh Francis Galton dalam artikelnya *"family likenes in stature"* pada tahun 1886. Studinya ini menghasilkan apa yang dikenal dengan hukum regresi universal tentang tingginya anggota suatu masyarakat. Hukum tersebut menyatakan bahwa distribusi tinggi suatu masyarakat tidak mengalami perubahan yang besar antar generasi. Hal ini dijelaskan Galton pada fakta yang memperlihatkan adanya kecenderungan mundurnya tinggi rata-rata anak dari orang tua dengan tinggi tertentu menuju tinggi rata-rata seluruh anggota masyarakat. Ini berarti terjadi penyusutan ke arah keadaan sedang. Tetapi sekarang istilah regresi telah diberikan makna yang jauh berbeda dari yang dimaksud oleh Galton. Secara luas sekarang analisis regresi diartikan sebagai suatu analisis tentang ketergantungan suatu variabel kepada variabel lain dalam rangka membuat suatu estimasi atau prediksi dan rata-rata nilai variabel tergantung dengan diketahuinya nilai variabel bebas (Alghifari, 1997).

Secara umum ada dua macam hubungan antara dua variabel atau lebih, yaitu bentuk hubungan dan keeratan hubungan. Untuk mengetahui bentuk hubungan digunakan analisis regresi, sedangkan untuk keeratan hubungan dapat diketahui dengan analisis korelasi. Analisis regresi dipergunakan untuk menelaah hubungan antara dua variabel atau lebih, terutama untuk menelusuri pola hubungan yang modelnya belum diketahui dengan sempurna atau untuk mengetahui bagaimana variasi dari beberapa variabel bebas mempengaruhi variabel terikat dalam suatu fenomena yang kompleks. Jika X_1, X_2 ... X_i adalah variabel bebas dan Y adalah variabel terikat, maka terdapat hubungan fungsional antara X dan Y, dimana variabel dari X akan diiringi pula oleh variabel dari Y. Analisis regresi adalah teknik analisis yang mencoba menjelaskan bentuk hubungan antara peubah-peubah yang mendukung sebab akibat. Proses analisisnya didasarkan atas distribusi probabilitas bersama peubah-peubahnya. Bila hubungan ini dapat dinyatakan dalam persamaan matematika, maka dapat bermanfaatkan untuk keperluan-keperluan lain misalnya peramalan. Tujuan utama dari analisis regresi adalah mendapatkan dugaan (ramalan) dari suatu variabel dengan menggunakan variabel lain yang diketahui.

Wibisono (2005) menyatakan bahwa untuk menguji model analisis regresi terdapat empat langkah antara lain :

a. Menentukan estimasi parameter dari model regresi.
b. Menguji normalitas data.
c. Menguji asumsi homoskedatisitas.
d. Menguji asumsi multikolinieritas.

2.1.1 Model Persamaan Regresi

Regresi merupakan suatu alat ukur untuk mengukur ada atau tidak adanya hubungan antara variabel bebas *(X)* dan variabel terikat *(Y)*. Istilah regresi yang berarti ramalan atau taksiran pertama kali diperkenalkan oleh Sir Francis Galton (1877). Dengan mengetahui adanya hubungan antara variabel tersebut dapat dilakukan pendugaan suatu variabel berdasarkan variabel lain melalui persamaan yang dihubungkan tersebut (Alghifari, 1997).

Model regresi linier secara umum dapat dinyatakan dengan

$$\mathrm{Y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon \qquad (2.1)$$

dimana :

Y : Variabel terikat

x : Variabeel bebas

β_0 : *Intercept* pada sumbu Y, titik potong dengan sumbu Y

β_1 : Kemiringan dari garis regresi

ε : Error

2.1.2 Analisis Regresi Variabel *Dummy*

Persamaan regresi, biasanya menggunakan simbol Y untuk variabel tak bebas (*dependent variable*) dan X variabel bebas (*independent variable*). Variabel X bisa lebih dari satu (*multivariate*). Baik X maupun Y bisa berupa variabel kualitatif (Nachrowi, 2004:167).

Variabel dalam persamaan regresi yang sifatnya kualitatif ini biasanya menunjukan ada tidaknya (*presence or absence*) suatu "*quality*" atau suatu "*attribute*", misalnya laki-laki atau perempuan, Jawa atau luar Jawa, sarjana atau bukan sarjana, sudah menikah atau masih membujang dan sebagainya. Salah satu metode untuk membuat kuantifikasi (berbentuk angka) dari data kualitatif (tidak berbentuk angka) adalah dengan membentuk *variable-variable artificial* yang memperhitungkan nilai-nilai 0 atau 1, 0 menunjukan ketiadaan sebuah atribut dan

1 menunjukan keberadaan (kepemilikan) atribut itu. Misalnya, 1 mungkin menunjukan bahwa seseorang adalah wanita dan 0 mungkin menunjukkan laki-laki, atau mungkin 1 menunjukkan bahwa seseorang adalah sarjana dan 0 menunjukkan bahwa seseorang bukan sarjana. Variabel-variabel yang mengasumsikan nilai-nilai seperti 0 dan 1 ini disebut dengan variabel buatan (*dummy variable*) (Gujarati, 2007:171).

Dummy variabel adalah variabel yang digunakan untuk membuat kategori data yang bersifat kualitatif (Nachrowi dan Usman, 2002:171).

Menurut Supranto (2004) variabel *dummy* disebut juga variabel indikator, biner, kategorik, kualitatif, boneka atau variabel dikotomi. Suatu persamaan regresi tidak hanya menggunakan variabel kategorik sebagai variabel bebas, tetapi dapat pula disertai oleh variabel bebas lain yang numerik. Persamaan regresi dengan variabel bebas berupa *dummy* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 D + \varepsilon \tag{2.2}$$

dimana:

Y : Variabel bebas

D : Variabel *dummy* sebagai variabel bebas yang bernilai 1 atau 0

ε : Kesalahan random

Variabel *dummy* bisa saja digunakan pada variabel tak bebas Y, sehingga Y bernilai 0 atau 1, yang memiliki arti ya atau tidak (bersifat dikotomi). Misalkan pada penelitian partisipasi angkatan kerja pria dewasa sebagai fungsi tingkat pengangguran, pendapatan keluarga, tingkat pendidikan dan lain-lain. Seseorang bisa berada di dalam atau di luar angkatan kerja. Jadi keberadaan orang ini di dalam atau di luar angkatan kerja cuma memiliki dua nilai saja : 1 jika orang ini ada dalam angkatan kerja dan 0 jika tidak.

Variabel kategorik dapat digunakan pada variabel dependen maupun variabel independen. Apabila yang menggunakan data kategorik adalah variabel dependen, maka analisis regresinya tidak dapat menggunakan regresi dengan OLS (Wahyu, 2007:6).

Persamaan model (2.2) dapat ditulis:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + \varepsilon \tag{2.3}$$

Model persamaan (2.3) terlihat seperti regresi linear pada umumnya, tapi ternyata bukan, karena koefesien kemiringan $\beta_2$yang menunjukkan tingkat perubahan Yuntuk setiap perubahan unit X tidak dapat ditafsirkan, karena Y hanya menggunakan dua nilai, 1 dan 0. Maka persamaan (2.3) disebut dengan model probabilitas liner (LPM, *Linear probability Model*) karena ekspektasi bersyarat Y bila X diketahui, $E(Y|X)$, bisa ditafsirkan sebagai probabilitas bersyarat, mengingat kejadian tersebut akan terjadi bila X diketahui, yakni $P(Y = 1|X)$. (Gujarati, 2007:21).

2.2 Estimasi Parameter

2.2.1 Pengertian Estimasi Parameter

Pendugaan (*estimation*) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Pendugaan merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan populasi dari sampel, dalam hal ini sampel random, yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan pendugaan ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002:111).

Dalam statistik, estimasi adalah suatu metode untuk mengetahui sekitar beberapa nilai-nilai suatu populasi dengan menggunakan nilai-nilai sampel. Nilai populasi sering disebut dengan parameter populasi, sedangkan nilai-nilai sampel sering disebut dengan statistik sampel. Dalam metode estimasi, parameter populasi yang ingin ditaksir itu adalah berupa nilai rata-rata yang diberi notasi μ dan nilai simpangan baku dengan notasi σ (Yitnosumarto, 1990:211-212).

Pendugaan (*estimasi*) adalah proses yang menggunakan sample statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Pendugaan merupakan suatu suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan populasi dari sampel, dalam hal ini sampel random, yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan pendugaan ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002). Menurut Yitnosumarto (1990), pendugaan adalah anggota peubah acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan penduga terhadap data dari semua contoh disebut nilai duga (*estimate*). Adapun sifat-sifat dari penduga parameter tersebut adalah:

a. Tak Bias (*Unbias*)

Menurut Yitnosumarto (1990), satu hal yang menjadi tujuan dalam pendugaan adalah pendugaan harus mendekati nilai sebenarnya dari parameter yang diduga tersebut. Misalkan terdapat parameter θ. Jika $\hat{\theta}$ merupakan penduga tak bias (*unbiased estimator*) dari parameter θ, maka:

$$E(\hat{\theta}) = \theta \tag{2.4}$$

b. Efisien

Suatu penduga (dimisalkan: $\hat{\theta}$) dikatakan efisien bagi parameter (θ) apabila penduga tersebut mempunyai *varians* yang kecil. Apabila terdapat lebih dari satu penduga, penduga yang efisien adalah penduga yang mempunyai varian terkecil. Dua buah penduga dibandingkan efisiennya dengan menggunakan efisien relatif (*relative efficiency*). Efisien relatif $\hat{\theta}_2$ terhadap $\hat{\theta}_1$ dirumuskan:

$$R(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1) = \frac{E(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta})^2}{E(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta})^2}$$

$$= \frac{E(\hat{\theta}_1 - E(\hat{\theta}_1))^2}{E(\hat{\theta}_2 - E(\hat{\theta}_2))^2}$$

$$= \frac{var\ \hat{\theta}_1}{var\ \hat{\theta}_2} \tag{2.5}$$

$R = \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2}$, jika $R > 1$ maka $\hat{\theta}_1 > \hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_2$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_1$, dan jika $R < 1$ maka $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_1$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_2$.

c. Konsisten

Suatu penduga dikatakan konsisten apabila memenuhi syarat sebagai berikut:

1. Jika ukuran sampel semakin bertambah maka penduga akan mendekati parameternya. Jika besar sampel tak terhingga maka penduga konsisten harus dapat memberi suatu penduga titik yang sempurna terhadap

parameternya. Jadi, $(\hat{\theta})$ merupakan penduga konsisten, jika dan hanya jika:

$$E\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2 \to 0 \text{ jika } n \to \infty \tag{2.6}$$

2. Jika ukuran sample bertambah besar maka distribusi sampling penduga akan mengecil menjadi satu garis tegak lurus diatas parameter yang sama dengan probabilitas sama dengan 1 (Hasan, 2002).

2.2.2 Metode Estimasi *Least Square*

Metode estimasi *least square* merupakan salah satu teknik pendugaan parameter dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat sisaan. Metode yang dikembangkan oleh Gauss ini dapat digunakan untuk mengestimasi nilai rata-rata dari peubah acak. Gauss adalah yang pertama mengaplikasikan perataan kuadrat terkecil dalam hitungan masalah astronomi sehingga metode *least squares* ini menjadi populer (Firdaus, 2004:30).

Misalkan ada persamaan model regresi linier:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_p X_p + \varepsilon \tag{2.7}$$

Dengan sejumlah n data observasi maka model ini dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{p1} \\ 1 & X_{12} & \cdots & X_{p2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{1n} & \cdots & X_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

yang dapat disederhanakan sebagai

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{2.9}$$

Variabel ε sangat memegang peran dalam model ekonometrika, tetapi variabel ini tidak dapat diteliti dan tidak pula tersedia informasi tentang bentuk distribusi kemungkinanya. Di samping asumsi mengenai distribusi probabilitasnya, beberapa asumsi lainya khususnya tentang sifat statistiknya perlu dibuat dalam menerapkan metode OLS.

Berkaitan dengan model regresi yang telah dikemukakan sebelumnya, Gauss telah membuat asumsi mengenai variable ε sebagai berikut:

a. Nilai rata-rata atau harapan variabel ε adalah sama dengan nol atau

$$E(\varepsilon) = 0 \tag{2.10}$$

Berarti nilai bersyarat ε yang diharapkan adalah sama dengan nol dimana syaratnya yang dimaksud tergantung pada nilai X. Dengan demikian, untuk nilai X tertentu mungkin saja nilai ε sama dengan nol, mungkin positif atau negatif, tetapi untuk banyak nilai X secara keseluruhan nilai rata-rata ε diharapkan sama dengan nol.

b. Tidak terdapat korelasi serial atau autokorelasi antar variabel untuk setiap observasi. Dengan demikian dianggap bahwa tidak terdapat hubungan yang positif atau negative antara ε_i dan ε_j. Dan tidak terdapat heteroskedastisitas antar variabel ε untuk setiap observasi, atau dikatakan bahwa setiap variabel ε memenuhi syarat homoskedastisitas. Artinya variabel ε mempunyai varian yang positif dan konstan yang nilainya σ^2, yaitu

$$Var\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = \begin{cases} \sigma^2, i = j \\ 0\,, i = j \end{cases} \tag{2.11}$$

Atau dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} var\ (\varepsilon_1) & cov(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & cov(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \\ cov(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & var(\varepsilon_2) & \cdots & cov(\varepsilon_2,\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cov(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & cov(\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & var(\varepsilon\_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Sehingga asumsi kedua ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} Cov\ (\varepsilon_i,\varepsilon_j) &= E\left[\left(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)\right)\left(\varepsilon_j - E(\varepsilon_j)\right)\right] \\ &= E\left[\varepsilon_i\varepsilon_j - 2\varepsilon_i E(\varepsilon_j) + E(\varepsilon_i)E(\varepsilon_j)\right] \\ &= E(\varepsilon_i\varepsilon_j) - 2E(\varepsilon_i)E(\varepsilon_j) + E(\varepsilon_i)E(\varepsilon_j) \\ &= E(\varepsilon_i\varepsilon_j) - E(\varepsilon_i)E(\varepsilon_j) \\ &= E(\varepsilon_i\varepsilon_j) \\ &= \sigma_{ij} \end{aligned} \tag{2.13}$$

c. Variabel Xdan variabel ε adalah saling tidak tergantung untuk setiap observasi sehingga

$$\begin{aligned} Cov(X_i,\varepsilon_j) &= E\left[\left(X_i - E(X_i)\right)\left(\varepsilon_i - E(\varepsilon_j)\right)\right] \\ &= E[(X_i - \bar{X})(\varepsilon_i - 0)] \\ &= E[(X_i - \bar{X})\varepsilon_i] \\ &= (X_i - \bar{X})E(\varepsilon_i) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Dari ketiga asumsi ini diperoleh:

$$E(Y) = X\beta \tag{2.15}$$

dan kovariansi:

$$Cov(Y_i,Y_j) = \sigma_{ij} \tag{2.16}$$

Misalkan sampel untuk Y diberikan. Maka aturan main yang memungkinkan pemakaian sampel tadi untuk mendapatkan taksiran dari β adalah dengan membuat $\varepsilon = Y - X\beta$ sekecil mungkin. Dengan aturan main ini, diharapkan akan menghasilkan komponen sistematika yang lebih berperan dari pada pada komponen stokastiknya. Karena bila komponen stokastik yang lebih berperan artinya hanya diperoleh sedikit informasi tentang Y. Dengan kata lain, X tidak mampu menjelaskan Y.

Untuk tujuan ini maka perlu memilih parameter β sehingga

$$S = \varepsilon^T \varepsilon = (Y - X\beta)^T \tag{2.17}$$

Persamaan (2.11) adalah skalar, sehingga komponen-komponenya juga skalar. Dan akibatnya, transpose skalar tidak merubah nilai skalar tersebut. Sehingga S dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} S &= (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) \\ &= (Y^T - \beta^T X^T)(Y - X\beta) \\ &= Y^T Y - Y^T X\beta - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta \qquad (2.18) \\ &= Y^T Y - Y^T X\beta - Y^T X\beta + \beta^T X^T X\beta \\ &= Y^T Y - 2Y^T X\beta + \beta^T X^T X\beta \end{aligned}$$

Untuk meminimumkanya dapat diperoleh dengan melakukan turunan pertama S terhadap β,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\beta} &= 0 - 2Y^T X + 2\beta^T X^T X \\ &= -2Y^T X + 2\beta^T X^T X \qquad (2.19) \end{aligned}$$

Dan menyamakanya dengan nol diperoleh

$$2\beta^T X^T X = 2Y^T X \tag{2.20}$$

$$X^T X\beta = Y^T X$$

Yang dinamakan sebagai persamaan normal, dan

$$\hat{\beta}_{ols} = (X^T X)^{-1} X^T Y \qquad (2.21)$$

Yang dinamakan sebagai penaksir (*estimator*) parameter β secara kuadrat terkecil (O*rdinary Least Square*, OLS) (Aziz, 2010:16-19).

2.3 Matriks

2.3.1 Definisi

Matriks adalah suatu kumpulan angka-angka yang juga sering disebut elemen-elemen yang disusun secara teratur menurut baris dan kolom sehingga berbentuk persegi panjang, dimana panjang dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom dan baris serta dibatasi tanda"[ ]" atau "( )" (Anton, 2004;92).

Sebuah matriks dinotasikan dengan simbol huruf besar seperti $A, X,$ atau Z dan sebagainya. Sebuah matriks A yang berukuran m baris dan n kolom dapat ditulis sebagai berikut :

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Atau juga dapat ditulis

$$A = [a_{ij}] \quad i = 1,2, \dots, m\,; j = 1,2, \dots, n$$

Contoh:

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Disebut matriks A dengan 2 baris dan 3 kolom. Jika A sebuah matriks, maka digunakan untuk menyatakan elemen yang terdapat di dalam baris i dan kolom j dari A. Dalam contoh ini i = 1, 2 dan j = 1, 2, 3 atau dapat ditulis

$$A = \left[a_{ij}\right]; \quad i = 1,2, \;\; j = 1,2,3$$

2.3.2 Jenis-jenis Matriks

2.3.2.1 Matriks Kuadrat

Matriks kuadrat adalah matriks yang memiliki baris dan kolom yang sama banyak. Dalam suatu matriks kuadrat, elemen–elemen $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ disebut elemen diagonal utama (Anton, 2004;95).

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2.3.2.2 Matriks Diagonal

Matriks kuadrat $A = \left[a_{ij}\right]$ dinamakan matriks diagonal jika semua elemen diluar diagonal utama adalah nol, $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan paling tidak satu elemen pada diagonal pokok $a_{ij} \neq 0$ untuk $i = j$. Jumlah elemen-elemen diagonal utama suatu matriks kuadrat A disebut *trace* A ditulis tr (A) (Anton, 2004;98).

$$\text{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \quad ,(i = j)$$

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}\,(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

2.3.2.3 Matriks Simetris

Suatu matriks kuadrat $A = \left[a_{ij}\right]; i, j = 1,2, \dots, n$ disebut matriks simetris jika elemen dibawah diagonal utama merupakan cermin dari elemen diatas diagonal utama. Matriks simetris jika $A^T = A$ artinya $a_{ij} = a_{ji}$ (Anton, 2004;99).

2.3.2.4 Matriks Singular

Matriks kuadrat $A\left[a_{ij}\right]$ dikatakan singular jika semua elemen pada salah satu baris atau kolom adalah nol atau jika semua kofaktor dari elemen suatu baris atau kolom sama dengan nol. Untuk melihat kesingularan suatu matriks adalah dengan menghitung determinan matriks tersebut. Apabila determinannya sama dengan nol maka matriks tersebut singular (Anton, 2004;106).

2.3.2.5 Matriks Ortogonal

Matriks kuadrat $A = [a_{ij}]$ diakatakan dapat didiagonalisasi secara orthogonal jika terdapat matriks orthogonal P sehingga berlaku $P^{-1}AP = P^T AP$. Matriks orthogonal didefinisikan sebagai matriks kuadrat yang inversnya sama dengan transposenya, sehingga:

$$P^{-1} = P^T$$

Maka P adalah matriks orthogonal (Anton, 2004:106).

2.3.3 Teorema Matriks

Jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks $n \times n$, maka $\det(A)$ adalah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama, yaitu $\det(A) = a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ (Anton, 2004:98).

Jika A dan B adalah matriks kuadrat yang ordonya sama, maka $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (Anton, 2004:108).

Misalkan A matriks $n \times n$ disebut non singular (*invertible*) jika terdapat matriks B maka $AB = BA = I$. Matriks B disebut invers dari A. Jika terdapat matriks B maka matriks A disebut singular (*non-inverteble*). Secara umum *invers* matriks A adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj\ (A)$$

Adjoin matriks A adalah matriks yang elemen-elemenya terdiri dari semua elemen-elemen kofaktor matriks A, dengan K_{ij} adalah kofaktor elemen-elemen $a_{ij}, i, j = 1,2, \dots, n$. Sehingga dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$adj\ A = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & \cdots & K_{n1} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \dots & K_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan:

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

Sifat-sifat invers:

a. Jika A adalah matriks non singular, maka A^{-1} adalah non singular dan

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

b. Jika A dan B adalah matriks non singular, maka AB adalah non singular dan

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

c. Jika A adalah matriks non singular maka

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})$$

2.3.4 Matriks Terboboti

Salah satu hal yang sangat penting dalam analisis adalah penentuan bobot atau penimbang. Cara untuk memperoleh matriks terboboti atau penimbang *spatial* (w) yaitu dengan menggunakan informasi jarak dari ketetanggan (*neighborhood*), atau kedekatan antara satu *region* dengan *region* yang lain. Lokasi yang dekat dengan lokasi yang diamati diberi pembobot besar, sedangkan yang jauh diberi pembobot kecil. Pemberian koding pembobot menurut Bivad dalam Kissling dan Carl (2007), diantaranya pada persamaan berikut ini:

a. Kode biner

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, & untuk\ i\ dan\ j\ yang\ berdekatan \\ 0, & untuk\ lainnya \end{cases}$$

b. *Row Standardization*

Didasarkan pada jumlah tetangga pada suatu baris yang sama pada matriks pembobot.

$$\widehat{w}_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} w_{ij}} \quad (2.22)$$

c. *Varians Stabilization*

Menstabilkan *varians* dengan menjumlahkan semua baris dan kolom

$$\widehat{w}_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_{i,j=1}^{i,j=n} w_{ij}} \quad (2.23)$$

Tobler dalam Anselin (1988), merumuskan hukum *first law of geography* yang berbunyi “*everything is related to everything else, but near things are more related than distant things*” artinya segala sesuatu saling berkaitan satu sama lainnya, wilayah yang lebih dekat cenderung akan memberikan efek yang lebih besar dari pada wilayah yang lebih jauh jaraknya. Ada beberapa metode untuk mendefinisikan hubungan persinggungan (*contiguity*) antar wilayah tersebut.

Menurut LeSage (1999), metode *contiguity* terdiri dari:

a. *Linier Contiguity* (persinggungan tepi) adalah lokasi yang berada ditepi kiri maupun kanan dari lokasi yang menjadi perhatian dari terbobot $w_{ij} = 1$, sedangkan untuk lokasi lainnya adalah $w_{ij} = 0$.
b. *Rook contiguity* (persinggungan sudut) adalah lokasi yang bersisian dengan lokasi yang menjadi perhatian diberi terbobot $w_{ij} = 1$, sedangkan untuk lokasi lainnya adalah $w_{ij} = 0$.
c. *Bishop contiguity* (persinggugan sudut) adalah lokasi yang titik sudutnya bertemu dengan sudut lokasi yang menjadi perhatian diberi pembobotan $w_{ij} = 1$, sedangkan untuk lokasi lainnya adalah $w_{ij} = 0$.
d. *Double linier contiguity* (persinggungan dua tepi) adalah lokasi yang berada di sisi kiri kanan lokasi yang menjadi perhatian diberi terbobot $w_{ij} = 1$, sedangkan untuk lokasi lainnya adalah $w_{ij} = 0$.
e. *Double rook contiguity* (persinggungan dua sisi) adalah lokasi yang berada di kiri, kanan, utara, dan selatan lokasi yang menjadi perhatian diberi pembobotan $w_{ij} = 1$, sedangkan untuk lokasi lainnya adalah $w_{ij} = 0$.
f. *Queen contiguity* (persinggungan sisi-sudut) adalah lokasi yang bersisian atau titik sudutnya bertemu dengan lokasi yang menjadi perhatian diberi pembobotan $w_{ij} = 1$, sedangkan untuk lokasi lainnya adalah $w_{ij} = 1$.

2.4 Model Regresi dalam Pendekatan Matriks

Model regresi yang paling sederhana adalah model regresi liner. Model regresi linier sederhana terdiri dari satu variabel bebas. Model tersebut dapat digeneralisasikan menjadi lebih dari satu atau dalam k variabel bebas. Persamaan model regresi linier dengan k variabel bebas diberikan sebagai

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_p X_p + \varepsilon \tag{2.24}$$

Bila pengamatan mengenai $Y, X_1, \ldots, X_p$ dinyatakan masing-masing dengan $Y_i, X_{i1}, \ldots, X_{ip}$ dan galatnya ε_i, maka persamaan (2.24) dapat dituliskan sebagai

$$Y = \beta_0 + \beta_{i1} X_1 + \ldots + \beta_p X_p + \varepsilon_i, i = 1,2, \ldots n \tag{2.25}$$

Dinotasikan dalam bentuk matriks, sehingga menjadi:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

Menurut Sembiring (1995: 113-114) persamaan (2.26) dapat dinyatakan sebagai

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{2.27}$$

dimana:

Y : Vektor respon $n \times 1$

X : Matrik peubah bebas ukuran $n \times k$

β : Vektor parameter ukuran $k \times 1$

ε : Vektor galat ukuran $n \times 1$

Persamaan matriks (2.27) dikenal sebagai penyajian matrik model regresi linier (k-*variables*).

2.5 Kajian Estimasi dalam Al-Quran

Dalam al-Quran pada surat Az-Zukhruf/43:32 terdapat ayat yang mengandung arti tentang estimasi/taksiran, yaitu :

أَهُمْ يَقْسِمُونَ رَحْمَتَ رَبِّكَ ۚ نَحْنُ قَسَمْنَا بَيْنَهُم مَّعِيشَتَهُمْ فِي ٱلْحَيَوٰةِ ٱلدُّنْيَا ۚ وَرَفَعْنَا
بَعْضَهُمْ فَوْقَ بَعْضٍ دَرَجَٰتٍ لِّيَتَّخِذَ بَعْضُهُم بَعْضًا سُخْرِيًّا ۗ وَرَحْمَتُ رَبِّكَ خَيْرٌ مِّمَّا
يَجْمَعُونَ ﴿٣٢﴾

"Apakah mereka yang membagi-bagi rahmat Tuhanmu? Kami telah menentukan antara mereka penghidupan mereka dalam kehidupan dunia, dan Kami telah meninggikan sebagian mereka atas sebagian yang lain beberapa derajat, agar sebagian mereka dapat mempergunakan sebagian yang lain. dan rahmat Tuhanmu lebih baik dari apa yang mereka kumpulkan" (Az-Zukhruf: 43/32).

Pada surat Az-Zukhruf/43:32 tersebut dijelaskan bahwa Allah telah meninggikan beberapa derajat kepada sebagian golongan manusia. Pada ayat tersebut terdapat ketidakpastian dalam menentukan jumlah umat manusia yang ditinggikan derajatnya atas sebagian umat manusia yang lain. Begitu pula tingkatan derajat kedudukan sebagian umat manusia disisi Allah yang tidak dapat ditaksir oleh akal manusia. Sehingga hal ini dalam matematika disebut estimasi.

Menurut Quraish Shihab orang-orang musyrik itu tidak memiliki kunci risalah sehingga dengan seenaknya memberikan risalah kepada tokoh mereka. Bahkan Allah yang menanggung penghidupan mereka karena mereka tidak mampu melakukan sendiri hal itu. Sebagian mereka telah Allah berikan rizki dan kedudukan lebih banyak dan lebih baik dari yang lain, agar mereka dapat saling menolong dalam memenuhi kebutuhan hidupnya. Masing-masing menopang yang lain dalam mencari penghidupan dan mengatur kehidupan. Dan karunia kenabian, dengan kebahagiaan di dunia dan akhirat sebagai konsekuensinya, jauh lebih baik dari kedudukan yang paling tinggi di dunia sekalipun .

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Regresi Variabel *Dummy*

Dengan menggunakan persamaan regresi linier dengan model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i \tag{3.1}$$

Dimana $i = 1,2,3 \ldots, n$ dan Y_i bernilai 1 atau 0 (biner), dengan nilai 1 menunjukkan terjadinya suatu kejadian/keberadaan suatu atribut dan nilai 0 menunjukkan tidak terjadinya suatu kejadian. Dalam regresi variabel *dummy* diasumsikan bahwa nilai Y_i yang diharapkan tergantung pada$X_i, E(Y_i|X_i)$,dapat diartikan sebagai probabilitas bersyarat kemungkinan terjadinya Y_i dipengaruhi oleh X_i, atau $P(Y_i = 1|X_i)$. Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} E(Y_i|X_i) &= (Y_i = 1).P(Y_i = 1|X_i) + (Y_i = 0).P(Y_i = 0|X_i) \\ &= P(Y_i = 1|X_i) + 0 \\ &= P(Y_i = 1|X_i) \\ &= q_i \end{aligned} \tag{3.2}$$

Variabel ε sangat memegang peran dalam model ini, sehingga nilai rata-rata atau harapan variabel ε yang diharapkan adalah sama dengan nol. Dimana syaratnya tergantung pada nilai X. Disamping asumsi mengenai distribusi probabilitasnya beberapa asumsi lainya khususnya tentang sifat statistik perlu dibuat dalam menerapkan metode *ordinary least square* (OLS).

Diasumsikan $E(\varepsilon_i) = 0$, untuk mendapatkan estimator tak bias dapat digunakan

$$E(Y_i|X_i) = E(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i|X_i)$$

$$= E(\beta_0|X_i) + E(\beta_1 X_i|X_i) + E(\varepsilon_i|X_i)$$

$$= \beta_0 + E(\beta_1|X_i)E(X_i|X_i) + E(\varepsilon_i|X_i) \qquad (3.3)$$

$$= \beta_0 + \beta_1 X_i + 0$$

$$= \beta_0 + \beta_1 X_i.$$

$$E(Y_i|X_i) = (Y_i = 1).P(Y_i = 1|X_i) + (Y_i = 0).P(Y_i = 0|X_i)$$

$$= q_i + (1 - q_i)$$

$$= q_i + 1 - q_i$$

$$= 1$$

Bila q_i adalah probabilitas bahwa $Y_i = 1$, $r_i = 1 - q_i$adalah probabilitas bahwa $Y_i = 0$, maka variabel Y_i memiliki probabilitas $q_i + 1 - q_i = 1$. Jika probabilitas q_i harus berada antara angka 0dan 1, maka $Y_i$mengikuti distribusi probabilitas Bernoulli, dengan syarat

$$0 \leq E(Y_i|X_i) \leq 1 \qquad (3.4)$$

Sehingga model *OLS* ini mengikuti fungsi distribusi logistik, sehingga probabilitasnya didefinisikan sebagai berikut:

$$q_i = E(Y_i = 1|X_i) = \frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta_1 X_{1i}+\beta_2 X_{2i}+\ldots+\beta_k X_{ki}+\varepsilon_i)}} \qquad (3.5)$$

Jika $Y = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i$, maka diperoleh bentuk fungsi

$$q_i = \frac{1}{1 + e^{-Y}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^Y}}$$

$$= \frac{1}{\frac{e^Y}{e^Y} + \frac{1}{e^Y}} = \frac{1}{\frac{e^Y+1}{e^Y}} \qquad (3.6)$$

$$= \frac{e^Y}{1+e^Y}.$$

dimana q_i akan berkisar antara 0 dan 1 jika nilai Y berkisar antara $-\infty$ sampai ∞.

Diketahui : $\lim_{Y\to-\infty} e^Y = 0$

$$\lim_{Y\to\infty} e^Y = 1$$

$$\lim_{Y\to-\infty} \frac{e^Y}{e^Y+1} = \frac{\lim\limits_{Y\to-\infty} e^Y}{\lim\limits_{Y\to-\infty} e^Y + \lim\limits_{Y\to-\infty} 1}$$

$$= \frac{0}{0+1}$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0$$

$$\lim_{Y\to\infty} \frac{e^Y}{e^Y+1} = \frac{\lim\limits_{Y\to\infty} e^Y}{\lim\limits_{Y\to\infty} e^Y + \lim\limits_{Y\to\infty} 1}$$

$$= \frac{1}{1+0}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

terbukti, jika nilai Y berkisar antara $-\infty$ sampai ∞, maka q_i akan berkisar antara 0 dan 1. Diasumsikan bahwa $Y_i = 1$ adalah $q_i = \frac{e^Y}{e^Y+1}$, maka probabilitas bahwa $Y_i = 0$ adalah

$$r_i = 1 - q_i$$

$$= 1 - \frac{e^Y}{e^z+1}$$

$$= \frac{e^Y+1}{e^Y+1} - \frac{e^Y}{e^Y+1}$$

$$= \frac{e^Y+1-e^Y}{e^Y+1} \tag{3.7}$$

$$= \frac{1}{e^Y + 1}$$

Dengan demikian maka rasio probabilitas $Y_i = 1$ dan probabilitas $Y_i = 0$ adalah

$$\frac{q_i}{1 - q_i} = \frac{\frac{e^Y}{e^Y + 1}}{\frac{1}{e^Y + 1}}$$

$$= \frac{e^Y}{e^Y+1} \times \frac{e^Y+1}{1} \tag{3.8}$$

$$= e^Y$$

Persamaan (3.8) disebut *odds*, yaitu perbandingan antara probabilitas terjadinya suatu peristiwa dengan probabilitas tidak terjadinya suatu peristiwa. Makin besar odds ini, makin besar kecenderungan terjadinya suatu peristiwa. Bila odds mendekati nol berarti kecenderungan terjadinya suatu peristiwa sangat kecil. Untuk melinearkan persamaan (3.8) maka persamaan ini dilogaritmakan, sehingga diperoleh

$$\ln\left(\frac{q_i}{1 - q_i}\right) = \ln e^Y$$

$$\ln e^Y = Y$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i \tag{3.9}$$

3.2 Estimasi Parameter Regresi Variabel *Dummy* dengan Pendekatan Matriks Terboboti

Persamaan (3.9) dapat ditransformasikan ke dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_o \\ \beta_o \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 X_{11} \\ \beta_1 X_{12} \\ \vdots \\ \beta_1 X_{1n} \end{bmatrix} + \ldots + \beta_k \begin{bmatrix} X_{k1} \\ X_{k2} \\ \vdots \\ X_{kn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$= \beta_o \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \\ \vdots \\ X_{1n} \end{bmatrix} + \ldots + \beta_k \begin{bmatrix} X_{k1} \\ X_{k2} \\ \vdots \\ X_{kn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{1n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \qquad (3.10)$$

Kemudian dimisalkan

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{1n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix}; \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}; \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Sehingga persamaan (3.9) dapat disederhanakan menjadi

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad (3.11)$$

Dari persamaan (3.10) diperoleh

$$\varepsilon_i = Y_i - (\beta_o + \beta_1 X_{1i} + \ldots + \beta_k X_{ki}) \qquad (3.12)$$

Untuk $Y_i = 1$ maka $\varepsilon_i = 1 - \beta_0 - \beta X_{1i} - \beta_2 X_{2i} - \ldots - \beta_k X_{ki}$ dengan probabilitas q_i dan untuk $Y_i = 0$ maka $\varepsilon_i = -\beta_0 - \beta X_{1i} - \beta_2 X_{2i} - \ldots - \beta_k X_{ki}$ dengan probabilitas $1 - q_i$ sehingga ε_i mengikuti distribusi Binomial dengan n independen observasi, masing-masing dengan probablitas q_i untuk sukses dan probabilitas $1 - q_i$ untuk gagal. Misalkan hasil pada usaha ke-j dinyatakan oleh peubah acak Bernoulli u_j dengan peluang sukses dan gagal masing-masing q_i dan $1 - q_i$. Sehingga banyaknya sukses dalam suatu observasi Binomial dapat ditulis :

$$\varepsilon_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

Dengan rataan u_j :

$$E(u_j) = 0.(1 - q_i) + 1.q_i = q_i,$$

Sehingga diperoleh rataan galat :

$$E(\varepsilon_i) = E(u_1) + E(u_2) + \ldots + E(u_n)$$

$$= q_i + q_i + \ldots + q_i$$

$$= nq_i$$

dan variasi u_j,

$$var\,(u_j) = E(u_j^2) - \left(E(u_j)\right)^2$$

$$= (Y_i = 0)^2 P(Y_i = 0|X_i)(Y_i = 1)^2 P(Y_i = 1|X_i) - (0.(1 - q_i) + 1.q_i)^2$$

$$= 0^2.(1 - q_i) + 1^2.q_i - (0(1 - q) + 1.q)^2$$

$$= 0 + q_i - q_i^2$$

$$= q_i(1 - q_i)$$

Sehingga diperoleh variansi galat,

$$var(\varepsilon_i) = var(u_1) + var(u_2) + \cdots + var(u_n)$$

$$= q_i(1 - q_i) + q_i(1 - q_i) + \cdots + q_i(1 - q_i)$$

$$= nq_i(1 - q_i).$$

Karena $var(\varepsilon_i)$tergantung pada probabilitas q_i yang berbeda-beda pada setiap individu *i*, dengan demikian $var(\varepsilon_i)$ heteroskedastisitas. Oleh karena itu estimasi parameter regresi variabel *dummy* dilakukan menggunakan metode estimasi *Ordinary Least Square* (OLS) dengan pembobot w_i pendekatan matriks menjadi,

$$\frac{Y_i}{\frac{1}{\sqrt{w_i}}} = \frac{\beta_0}{\frac{1}{\sqrt{w_i}}} + \beta_1 \frac{X_{1i}}{\frac{1}{\sqrt{w_i}}} + \ldots + \beta_k \frac{X_{ki}}{\frac{1}{\sqrt{w_i}}} + \frac{\varepsilon_i}{\frac{1}{\sqrt{w_i}}}$$

$$\sqrt{w_i}Y_i = \sqrt{w_i}\beta_0 + \beta_1 X_{1i}\sqrt{w_i} + \ldots + \beta_k X_{ki}\sqrt{w_i} + \varepsilon_i\sqrt{w_i} \tag{3.13}$$

dengan $w_i^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix}$

sehingga

$$w_i^{\frac{1}{2}} Y_i = w_i^{\frac{1}{2}} X_i \beta_i + w_i^{\frac{1}{2}} \varepsilon_i$$

Dimana

w_i : Matriks terboboti pada observasi ke *i*

Y Matriks variabel terikat dengan dengan ordo $n \times k$ pada observasi ke *i*

X : Matriks variabel bebas dengan ordo $n \times k$ pada observasi ke *i*

ε : *Error*

Untuk memperoleh nilai matriks terbobot w_i, maka terlebih dahulu harus dicari nilai probabilitas q_i, dengan mengestimasi parameter persamaan (3.9) secara metode OLS. Estimasi dilakukan dengan meminimumkan fungsi total kuadrat galat (S^*).

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} {\varepsilon_i}^2 \\ &= {\varepsilon_1}^2 + {\varepsilon_2}^2 + \cdots + {\varepsilon_n}^2 \\ &= [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \cdots \quad \varepsilon_n] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \qquad (3.14) \\ &= \varepsilon^T \varepsilon \\ &= (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) \end{aligned}$$

Untuk meminimumkan fungsi total kuadrat galat, dilakukan dengan cara menyamakan turunan pertamanya terhadap β dengan nol,

$$\frac{dS}{d\beta} = \frac{d\big((Y - X\beta)^T (Y - X\beta)\big)}{d\beta}$$

$$0 = \frac{d\Big((Y^T - X^T\beta^T)\ \ (Y - X\beta)\Big)}{d\beta}$$

$$= \frac{d(Y^TY - Y^TX\beta - X^T\beta^TX\beta)}{d\beta}$$

$$= \frac{d(Y^TY - (Y^TX\beta)^T - X^T\beta^TY + X^T\beta^TX\beta)}{d\beta}$$

$$= \frac{d(Y^TY - X^T\beta^TY - X^T\beta^TY - X^T\beta^TX\beta)}{d\beta}$$

$$= \frac{d(Y^TY - 2X^T\beta^TY - X^T\beta^TX\beta)}{d\beta}$$

$$= 0 - 2X^TY + X^TX\beta + (\beta^TX^TX)^T$$

$$= -2X^TY + X^TX\beta + X^TX\beta$$

$$= -2X^TY + 2X^TX$$

$$2X^TX\beta = 2X^TY$$

$$X^TX\beta = X^TY \qquad (3.15)$$

dari persamaan (3.15) diperoleh estimator $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta} = (X^TX)^{-1}X^TY \qquad (3.16)$$

Kemudian untuk $\hat{\beta}$,

$$(Y - X\beta)^T(Y - X\beta) = \left[Y - X\beta + X\big(\hat{\beta} - \hat{\beta}\big)\right]^T \left[Y - X\beta + X\big(\hat{\beta} - \hat{\beta}\big)\right]$$

$$= \big(Y - X\hat{\beta}\big)^T\big(Y - X\hat{\beta}\big) + \big(\hat{\beta} - \beta\big)^T X^TX\big(\hat{\beta} - \beta\big)$$

$$\geq \left(Y - X\hat{\beta}\right)^T \left(Y - X\hat{\beta}\right)$$

Minimum dari $\left(Y - X\hat{\beta}\right)^T \left(Y - X\hat{\beta}\right)$ adalah $\left(Y - X\hat{\beta}\right)^T \left(Y - X\hat{\beta}\right)$ dicapai pada $\beta = \hat{\beta}$.

Setelah ditemukan nilai bobot w_i, maka persamaan (3.13) dapat diperoleh, dan bentuk matriksnya sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix} \beta_0 + \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix} \beta_1 \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{22} \\ \vdots \\ X_{1n} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix} \beta_2 \begin{bmatrix} X_{21} \\ X_{22} \\ \vdots \\ X_{2n} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix} \beta_k \begin{bmatrix} X_{k1} \\ X_{k2} \\ \vdots \\ X_{kn} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & \vdots & X_{k2} \\ 1 & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{1n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Dimisalkan :

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & \vdots & X_{k2} \\ 1 & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{1n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix}; \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}; \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Dan $P = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix}$

maka persamaan (3.13) menjadi

$$PY = PX\beta + P\varepsilon \qquad (3.16)$$

atau

$$Y_i^* = \beta_0^* + \beta_1 X_{1i}^* + \ldots + \beta_k X_{ki}^* + \varepsilon_i^* \qquad (3.17)$$

kemudian mengestimasi persamaan (3.17) dengan meminimumkan fungsi kuadrat galat (S^*),

$$\begin{aligned} S^* &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{*2} \\ &= \varepsilon_1^{*2} + \varepsilon_2^{*2} + \cdots + \varepsilon_n^{*2} \\ &= [\varepsilon_1^* \quad \varepsilon_2^* \quad \ldots \quad \varepsilon_n^*] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \qquad (3.18) \\ &= \varepsilon^{*T} \varepsilon^* \\ &= (Y^* - X^*\beta^*)^T (Y^* - X^*\beta^*) \end{aligned}$$

Kemudian meminimumkan fungsi total kuadrat galat dengan cara menyamakan turunan pertamanya terhadap β^*dengan nol,

$$\frac{dS^*}{d\beta^*} = \frac{d(Y^{*T}Y^* - X^{*T}\beta^{*T}Y^* - X^{*T}\beta^{*T}Y^* + X^{*T}\beta^{*T}X^*\beta^*)}{d\beta^*}$$

$$0 = \frac{d(Y^{*T}Y^* - 2X^{*T}\beta^{*T}Y^* + X^{*T}\beta^{*T}X^*\beta^*)}{d\beta}$$

$$= 0 - 2X^{*T}Y^* + X^{*T}X^*\beta^* + (\beta^{*T}X^{*T}X^*)^T$$

$$= -2X^{*T}Y^* + X^{*T}X^*\beta^* + X^{*T}X^*\beta^*$$

$$= -2X^{*T}Y^* + 2X^{*T}X^*\beta^*$$

$$2X^{*T}X^*\beta^* = 2X^{*T}Y^*$$

$$X^{*T}X^*\beta^* = X^{*T}Y^* \qquad (3.19)$$

Dari persamaan (3.19) diperoleh estimator

$$\hat{\beta}^* = (X^{*T})^{-1}X^{*T}Y^*$$

atau dapat ditulis sebagai,

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^* &= (X^{*T}X^*)^{-1}X^{*T}Y^* \\ &= ((PX)^T PX)^{-1}(PX)^T PY \qquad (3.20) \\ &= (X^T P^T PX)^{-1}X^T P^T PY\end{aligned}$$

3.3 Kajian Regresi Variabel *Dummy* dan Metode Matriks Terboboti dalam Al-Quran

Secara umum variabel *dummy* dapat diartikan variabel yang digunakan untuk membuat kategori data yang bersifat kualitatif. Penerapan dalam kehidupan sehari-hari, variabel *dummy* dapat dikatakan sebagai cara seseorang untuk mengutamakan kualitas perbuatan ke sesama ataupun kepada Allah dengan mengharap ridha Allah.

Untuk menjadi manusia yang berkualitas dalam hal perbuatan maka diperlukan dahulu mempunyai pendidikan akhlak yang mulia, oleh karena itu Allah mencontohkan Rasulullah kepada seluruh umat manusia dalam berakhlak mulia yang tercantum pada surat Al-Ahzab/33:21, yaitu:

لَّقَدۡ كَانَ لَكُمۡ فِي رَسُولِ ٱللَّهِ أُسۡوَةٌ حَسَنَةٞ لِّمَن كَانَ يَرۡجُواْ ٱللَّهَ وَٱلۡيَوۡمَ ٱلۡأٓخِرَ وَذَكَرَ ٱللَّهَ كَثِيرٗا ٢١

"Sesungguhnya telah ada pada (diri) Rasulullah itu suri teladan yang baik bagimu (yaitu) bagi orang yang mengharap (rahmat) Allah dan (kedatangan) hari kiamat dan Dia banyak menyebut Allah. (QS. Al-Ahzab/33:21).

Ayat ini merupakan landasan pokok mejadikan Rasulullah sebagai suri teladan dalam ucapan-ucapan beliau, perbuatan-perbuatan, dan dalam semua keadaan beliau. Dan ayat ini juga menjelaskan kondisi saat perang ahzab, yaitu dalam hal kesabaran, keteguhan hati, kesiagaan, dan perjuanganya, serta tetap menanti jalan keluar dari Allah Swt. Selanjutnya Allah Swt menyebutkan perihal hamba-hambaNya yang beriman membenarkan janji Allah kepada mereka, yang pada akhirnya Allah akan menjadikan kesusahan yang baik di dunia dan akhirat bagi mereka." (Ibnu Katsir, 3:483).

Selaras dengan garis besar ayat diatas, seseorang hanya akan mendapat atau mencontoh akhlak perilaku Rasulullah jika dirinya mengharapkan ridha Allah Swt, mengharapkan (kedatangan) hari akhir dan banyak berdzikir kepada Allah. Jika seorang hamba masih mengharap selain Allah Swt, tidak pernah berdizkir maka dia akan terboboti dengan hal selain Allah Swt. Sehingga dia tidak dapat mencontoh akhlak pribadi Rasulullah dalam kehidupan sehari-hari, begitu pula kehidupan duniawi dan akhiratnya akan terasa berat dijalani.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan dari pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa bentuk estimator dari parameter regresi variable dummy dengan menggunakan metode Matriks Terboboti adalah sebagai berikut:

a. Regresi Variabel *Dummy*

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i$$

b. Estimasi Variabel *Dummy* dengan Metode Matriks Terboboti

$$\hat{\beta}^* = (X^T P^T P X)^{-1} X^T P^T P Y$$

dengan :

$\hat{\beta}^*$	:	Vektor estimator dengan ordo $k \times 1$
X	:	Matriks variabel bebas dengan ordo $n \times k$
P	:	Matriks terboboti
Y	:	Vektor dengan ordo n x 1

4.2 Saran

Dari hasil penelitian ini ada beberapa saran yang dapat digunakan untuk penelitian selanjutnya antara lain adalah gunakan metode estimasi lain atau mengestimasi parameter dengan model yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Algifari. 1997. *Analisis Regresi, Teori, Kasus dan Solusi, Edisi Pertama.*Yogyakarta: BPFE UGM.

Al-Qarni, A. 2007. *Tafsir Muyassar.* Jakarta: Qisthi Press

Anton, H. 1991. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga

Aziz, A. 2010. *Ekonometrika Teori dan Praktek Eksperimen dengan Matlab*. Malang: UIN Malang Press.

Dudewicz. J Edward, Mishra N. Satya. 1995. *Statistika Matematika Modern*. Bandung: ITB

Draper, N dan Smith, H. 1992.*AnalisisRegresiTerapan, Edisi Kedua.* Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Riang F. 2011. *Estimasi Parameter Regresi Variabel Dummy Menggunakan Metode Weighted Least Square*. *Skripsi*. Tidak diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Firdaus, M. 2004. *Ekonometrika Suatu Pendekatan Aplikatif.* Jakarta: Bumi Aksara.

Gujarati, D. N. 2003. *Basic Econometric Analysis*, New York: Prentice Hall International, Inc.

Hasan, M. Iqbal. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik 1(Statistik Deskriptif).* Jakarta: PT Bumi Aksara.

Nachrowi D, Usman H. *Pendekatan Populer dan Praktis Ekonometrika untuk Analisis Ekonomi dan Keuangan*. Jakarta: Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia. 2006

Sembiring. 1995. *Analisis Regresi.* Bandung: ITB.

Shihab, M, Q. 2003. *Tafsir Al-Misbah volume 14*. Jakarta: Lentera Hati.

Wahyu. 2007. *Pedoman Praktis Penggunaan Eviews dalam Ekonometrik*. Medan: USU Press.

Yitnosumarto, S. 1990. *Dasar-dasar Statistika*. Jakarta: C.V Rajawali.