KETUNGGALAN TITIK TETAP DI RUANG *b*-METRIK

SKRIPSI

OLEH
MUTMAINNAH
NIM. 18610007

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2023

KETUNGGALAN TITIK TETAP DI RUANG *b*-METRIK

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh

Mutmainnah

NIM. 18610007

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2023

KETUNGGALAN TITIK TETAP DI RUANG *b*-METRIK

SKRIPSI

Oleh
Mutmainnah
NIM. 18610007

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 20 Maret 2023

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Elly Susanti, M.Sc	M. Nafie Jauhari, M.Si
NIP. 19741129 200012 2 005	NIDT.19870218 20160801 1 056

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

KETUNGGALAN TITIK TETAP DI RUANG *b*-METRIK

SKRIPSI

Oleh
Mutmainnah
NIM. 18610007

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 30 Maret 2023

Ketua penguji	: Dr. Hairur Rahman, M.Si	.....
Anggota Penguji 1	: Intan Nisfulaila, M.Si	.....
Anggota Penguji 2	: Dr. Elly Susanti, M.Sc	.....
Anggota Penguji 3	: M. Nafie Jauhari, M.Si	.....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Mutmainnah

NIM : 18610007

Program Studi : Matematika

Judul Skripsi : Ketunggalan Titik Tetap di Ruang *b*-Metrik

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benat-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapa dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 Maret 2023
Yang membuat pernyataan,

Mutmainnah
NIM.18610007

Dipindai dengan CamScanner

MOTO

"Tidak ada yang akan datang dan membantumu mencapai tujuan kecuali kamu membantu dirimu sendiri (Mutmainnah)"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayah Sukur dan Ibu Sugiah, yang selalu berdo'akan untuk kesuksesan serta kelancaran dalam penulisan skripsi ii serta yang menjadi alasan kuat penulis untuk terus berjuang menggapai mimpi. Limpah kasih sayang yang tak pernah putus diberikan kepada penulis sebagai sumber semangat. Suami dan anak tercinta, Izat Samerdi Pramana dan Muhammad Gibran Al-Husain yang selalu mengirim dukungan dan semangat kepada penulis. Kakak dan adik tercinta, Mardiatun Rahmah, S.Pd dan M. Abdul Aziz yang telah membantu dalam mengerjakan skripsi ini. Serta Dr. Elly Susanti, M.Sc yang sudah membimbing dalam menyelesaikan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Segala puji dan syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunia -Nya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan proposal skripsi yang berjudul "**Ketunggalan Titik Tetap di Ruang b-Metrik"** disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh sarjana Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menunjukkan jalan yang terang benderang pada umatnya.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam penyusunan penelitian ini tidak lepas dari peran serta dan bantuan berbagai pihak, baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih dan penghargaan yang tidak terhingga kepada:

1. Prof. Dr. M. Zainuddin, MA. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku Ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Elly Susanti, M.Sc selaku Dosen pembimbing I, yang telah banyak meluangkan waktu dengan penuh kesabaran untuk memberikan bimbingan, pemikiran, gagasan, dukungan, dan dorongan kepada penulis.
5. M. Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II, yang telah memberikan bimbingan dan arahann serta masukan dalam penulisan ini.
6. Seluruh dosen dan staf Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

7. Kedua orang tua tercinta yang sangat penulis hormati dan sayangi, yang selalu memberikan dorongan, semangat dan nasehat serta doa restu kepada penulis sejak lahir hingga saat ini.
8. Pihak-pihak lainnya, rekan kerja, sahabat dan teman-teman yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa penulisan proposal skripsi ini masih terdapat banyak kelemahan dan kekurangan dan untuk itu dibutuhkan segala kritik dan saran yang membangun dan bertanggung jawab demi kesempurnaan proposal skripsi ini. Semoga penelitian ini dapat berguna bagi kalangan akademisi, praktisi, organisasi, dan sebagai bahan penelitian selanjutnya.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Malang, 30 Maret 2023

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL ..... **i**
HALAMAN PENGAJUAN ..... **ii**
HALAMAN PERSETUJUAN ..... **iii**
HALAMAN PENGESAHAN ..... **iv**
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN ..... **v**
MOTO ..... **vi**
PERSEMBAHAN ..... **vii**
KATA PENGANTAR ..... **viii**
DAFTAR ISI ..... **x**
DAFTAR SIMBOL ..... **xi**
ABSTRAK ..... **xii**
ABSTRACT ..... **xiii**
مستخلص البحث ..... **xiv**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 5
1.3 Tujuan Penelitian 5
1.4 Manfaat Penelitian 5
1.5 Batasan Masalah 5
1.6 Definisi Istilah 6
BAB II KAJIAN PUSTAKA **7**
2.1 Teori Pendukung 7
2.1.1 Himpunan 7
2.1.2 Ruang Metrik 8
2.1.3 Kekonvergenan dan Kelengkapan 10
2.1.4 Titik Tetap 12
2.1.5 Ruang *b*-Metrik 14
2.1.6 Fungsi Kontraksi 15
2.2 Kajian Keagamaan 16
2.3 Kajian Topik dan Teori Pendukung 17
BAB III METODE PENELITIAN **21**
3.1 Jenis Penelitian 21
3.2 Pra Penelitian 21
3.3 Tahapan Penelitian 21
BAB IV PEMBAHASAN **23**
4.1 Teorema Ketunggalan Titik Tetap di Ruang *b*-Metrik 23
BAB V PENUTUP **38**
DAFTAR PUSTAKA **40**
RIWAYAT HIDUP **42**

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini yaitu:

$<$	: Kurang dari
$>$	: Lebih dari
$\leq$	: Kurang dari atau sama dengan
$\geq$	: Lebih dari atau sama dengan
$=$	: Sama dengan
$\neq$	: Tidak sama dengan
$\subseteq$	: Himpunan bagian
$\forall$	: Untuk semua
$\exists$	: Terdapat
$\rightarrow$	: Dari … ke
$\in$	: Elemen dari
ε	: Epsilon
α	: Alfa
β	: Beta
γ	: Gamma
δ	: Delta
μ	: Mu
$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real
∞	: Ketakhinggaan
(X, d)	: Ruang Metrik
(X, b)	: Ruang b-metrik
$\{x_n\}$	: Suatu barisan

ABSTRAK

Mutmainnah. 2023. **Ketunggalan Titik Tetap di Ruang *b*-Metrik**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (II) M. Nafie Jauhari, M.Si.

Kata kunci: *Ketunggalan, titik tetap, Cauchy, konvergen, dan ruang b-metrik.*

Titik x disebut titik tetap dari pemetaan T jika dan hanya jika $T(x) = x$, sebagaimana contoh jika pemetaan T didefinisikan dengan $T(x) = x^2 - 3x + 4$, maka 2 adalah titik tetap dari T karena $T(2) = 2$. Ruang b-metrik adalah pasangan (X, b)dengan x adalah himpunan tak kosong dan b adalah metrik (jarak) pada x (didefinisikan pada $X \times X$) dengan $b: X \times X \to \mathbb{R}^+$ sedemikian hingga (1) $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$, untuk setiap $x, y \in X$, (2) $b(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$ dan (3) $b(x, y) \leq k[d(x, z) + d(z, y)]$, $\forall x, y, z \in X$. Ruang b-metrik (X, b) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di X selalu konvergen di X. Suatu pemetaan $T: X \to X$ pada ruang b-metrik disebut pemetaan kontraktif jika terdapat kontanta $0 \leq k < 1$ sedemikian hingga $b(Tx, Ty) \leq k\, b(x, y)$. Tidak semua pemetaan memiliki titik tetap. Dari hasil penelitian diproleh sifat-sifat dari ruang b-metrik dan syarat yang cukup agar diperoleh ketunggalan titik tetap di ruang b-metrik.

ABSTRACT

Mutmainnah. 2023. **Uniqueness of Fixed Point in *b*-Metrics Space**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (II) M. Nafie Jauhari, M.Sc.

Keywords: Uniqueness, fixed point, Cauchy, convergent, *b*-metric spaces.

Point x is called a fixed point of the mapping T if and only if $T(x) = x$, for example if the mapping T defined by $T(x) = x^2 - 3x + 4$, then 2 is a fixed point of T because $T(2) = 2$. *b*-metric Space is a pair (X, b) where X is the non-empty set and b is a metric (distance) on X (defined on $X \times X$) with $b: X \times X \to \mathbb{R}^+$ such that (1) $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$, for each $x, y \in X$, (2) $b(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$ and (3) $b(x, y) \leq k[d(x, z) + d(z, y)]$, $\forall x, y, z \in X$. The *b*-metric space is complete if every Cauchy sequence in that spaces is convergent. A mapping $T: X \to X$ on *b*-metric space is called contractive mapping if there is a konstant $0 \leq k < 1$, such that $b(Tx, Ty) \leq k\, b(x, y)$. Not every mapping has a fixed point. From the research result, the properties of the *b*-metric space and the sufficient conditions are obtained to obtain a uniquenes of fixed point in the *b*-metric space.

مستخلص البحث

مطمئنّة، ٢٠٢٣. **تفرّد النقطة الثابتة في مساحة ب – ميترك**. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم و التكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية، مالانج. المشرفة الأولى: (١) الدكتورة, ايلي سوسنتي، الماجستير. المشرف الثاني (٢) محمد نافع جوهري، الماجستير.

الكلمة المفتاحية: تفرّد، النقطة الثابتة، الكوشي ($cauchy$)، المتقاربة ($konvergen$)، مساحة ب –ميترك.

وتسمى نقطة x هي نقطة ثابتة في تخطيط "T" ولذلك $T(x) = x$ ، كما في المثال اذا كان تخطيط "T" هو $T(x) = x^2 - 3x + 4$)، فإن 2 هي نقطة ثابتة من "T" لأن $T(2) = 2$. مساحة الباء –ميترك هي مجموعة (X, b) مع Xهو المجموعة غير الفارغة و الباء هي متريك (مسافة) في x (محددة في$X \times X$) ب $b: X \times X \to R^+$ مثل ذلك (١) $b(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$ لشيئ $\forall x, y \in X$ (٢) $b(x, y) = b(y, x), \forall x, y \in X$ و(٣) $b(x.y) \leq k[b(x.z) + b(z, y)], \forall x, y, z \in X$. مساحة الباء متريك تسمى كاملا إذا كان مساحف الكوشي فيها متقاربة (konvergen), و التحطيط $T: X \to X$ في مساحة الباء –متريك هي التحطيط المتشابكة. و إذا كان المتفارية $0 \leq k < 1$ حتّى$b(T_x, T_y) \leq k, b(x, y)$. وليس لكل التحطيط له نقطة ثابتة. والنتيجة من هذا البحث العلمي ينال حالة الباء –متريك و الشرط الكافي للحصول عليها تفرّد النقطة الثابتة في الباء –متريك.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Secara bahasa, kata "matematika" berasal dari bahasa Yunani yaitu "*mathema*" yang artinya hal-hal yang dipelajari. Orang Belanda menyebut matematika dengan *wiskunde* yang artinya ilmu pasti. Sedangkan orang Arab menyebut matematika dengan ilmu *al-hisab*, artinya ilmu berhitung. Secara istilah, sampai saat ini belum ada definisi yang tepat mengenai matematika. Definisi-definisi yang dibuat para ahli matematika semuanya benar berdasar sudut pandang tertentu. Meskipun belum ada definisi yang tepat. Matematika mempunyai ciri khas yang tidak dimiliki pengetahuan lain, yaitu merupakan abstraksi dari dunia nyata, menggunakan bahasa simbol, dan menganut pola pikir deduktif (pola berpikir yang didasarkan pada kebenaran-kebenaran yang secara umum sudah terbukti benar) (Abdussakir, 2007).

Matematika lahir dari tuntutan kebutuhan hidup. Tak heran, bila kemudianilmu hitung memegang peranan yang amat penting dalam kehidupan manusia. Berkat matematikalah, manusia dapat melakukan aktivitas perdagangan, mengukur tanah serta memprediksi peristiwa dalam astronomi. Hal ini sejalan dengan firman allah Swt. dalam surat al-Qamar ayat 49 yang berbunyi:

اِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنٰهُ بِقَدَرٍ

"*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (QS. al-Qamar/54:49).*

Penelitian matematika khususnya pada bidang matematika analisis saat ini berkembang sangat cepat, baik untuk matematika maupun penerapannya untuk bidang ilmu lainnya. Teori titik tetap merupakan salah satu topik yang diminati

sebagai bahan kajian untuk penelitian matematika analisis. Teori titik tetap dapat menyelesaikan berbagai permasalahan dalam segala bidang baik dalam bidang sains, pengobatan dan teknik secara matematis. Nikmah (2017) mengatakan bahwa pada tahun 1913 Birkhoff membuktikan "Poincare Conjecture" yang dikemukakan oleh seorang matematikawan terkenal asal Prancis yang bernama Henri Poincare, sebagai pendekatan teorema titik tetap.

Literatur yang membahas teori titik tetap sangatlah luas, umumnya berupa studi kasus mengenai ruang metrik. Karena teori titik tetap merupakan hal penting dalam kajian yang membahas ruang metrik. Menurut Obeng-Denteh dkk. (2016) ruang metrik adalah salah satu jenis ruang topologi yang berguna dalam pengukuran panjang dan jarak antar titik, luas, dan volume dalam himpunan yang mendasarinya. Dalam pengembangannya dihasilkan ruang gagasan-gagasan baru antara lain ruang 2-metrik, ruang d-metrik, ruang g-metrik, ruang f-metrik, ruang s-metrik, ruang b-metrik dan masih banyak lagi.

Menurut Listiawati (2017) teori titik tetap merupakan hal yang penting dalam pembahasan ruang metrik. Metrik adalah fungsi yang memetakan setiap elemen dari pasangan himpunan tak-kosong non negatif yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Selanjutnya himpunan tak kosong yang dilengkapi fungsi metrik tersebut dinamakan ruang metrik. Ruang metrik kemudian dikembangkan dan menghasilkan konsep-konsep baru.

Seiring berjalannya waktu, Banach pada tahun 1922 mengembangkan teori titik tetap yang dikenal dengan prinsip kontraksi Banach di ruang metrik lengkap sehingga penelitian yang dikemukakan oleh Banach dijadikan acuan dalam pengambilan teori titik tetap oleh para peneliti. Penelitian selanjutnya dilakukan oleh Andy B dkk (2020) membahas tentang eksistensi dan ketunggalan titik tetap pada pemetaan kontraksi tergeneralisasi dalam ruang *b*-metrik, teori titik tetap dapat

digunakan untuk menjamin eksistensi solusi masalah nilai awal dan syarat batas persamaan diferensial berbentuk linier maupun non linier. Fulga dan Erdal (2020) dalam buku yang berjudul "*Recent Advances on Quasi-Metric Spaces*" mempublikasikan ruang *b*-metrik sebagai perumuman dari ruang metrik. Penelitian Czerwik dalam Ruzhansky, dkk (2018) menunjukkan suatu generalisasi dari teorema titik tetap Banach di ruang *b*–metrik dengan perbedaan yang terletak pada koefisien dari pertidaksamaan segitiga yang berlaku di definisi ruang *b*–metrik.

Hasil penelitian Singh dan Prasad yang dikutip dalam buku Ampadu (2016) yang berjudul "*Some Iterative Schemes for Higher-Order Mappings*" mempelajari masalah stabilitas iterasi untuk menyelesaikan bentuk umum persamaan *coincidence* berikut; $S_x = T_x$ di ruang *b*–metrik, sehingga memenuhi teorema *coincidence*. Kir dan Kiziltunc (2017) pada jurnalnya yang berjudul "*On Some Well Known Fixed Point Theorems in b-Metric Spaces*" menunjukkan bahwa pemetaan kontraktif Kannan dan Chatterjea memenuhi ketunggalan titik tetap di ruang b-metrik serta menyelidiki setiap pemetaan yang memenuhi kondisi kontraktif tidak harus menjadi kontraktif lemah di ruang b-metrik: Misal pemetaan $T: X \to X$, dengan syarat $s\mu \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ diperoleh $d(T_x, T_y) \leq \mu[sd(x,y) + sd(y,T_x) + sd(x,T_y)]$ untuk setiap $x, y \in X$, memenuhi kondisi kontraktif di ruang b-metrik tanpa harus menjadi kontraktif lemah.

Shatanawi dkk (2018) dalam jurnal yang berjudul "*Some Fixed Points Theorems in b-Metric Space*" membuktikan bahwa dengan pemetaan dan aksioma yang sama pada penelitian teori titik tetap di ruang metrik pemetaannya juga mempunyai titik tetap yang tunggal di ruang *b*–metrik. Jain dkk (2016) mengembangkan masalah teorema titik tetap, titik *coincidence*, dan titik tetap

berserikat dalam kondisi ekspansif di ruang *b*-metrik dalam jurnal yang berjudul "*Fixed Point, Coincidence Point and Common Fixed Point Theorems under Various Expansive Conditions in b-Metric Spaces*" yang bertujuan membuktikan beberapa teorema titik tetap, *titik coincidence*, dan titik tetap berserikat memenuhi kondisi ekspansif dengan memperhatikan pemetaan yang kurang kompatibel di ruang *b*–metrik. Sarwar & Rahman (2015) dalam jurnal "*Fixed Point Theorems for Ciric's and Generalized Contractions in b-Metric Space*" membuktikan variant *b*-metrik dari hasil titik tetap untuk kontraksi umum dan Ciric serta mempelajari beberapa hasil yang melibatkan kontraksi rasional di R^+.

Kemudian Tiwari dkk (2020) dalam jurnalnya yang berjudul "*Coincidence and Fixed Point in b–Metric Spaces*" membuktikan ketunggalan dan teorema titik tetap pada ruang *b*-metrik untuk 2 pemetaan diri (*self mappings*) dengan menggunakan kondisi kontraktif. Penelitian ini juga membuktikan beberapa teorema titik *coincidence* dan teorema titik tetap yang umum dalam ruang b–metrik. Selain itu, penelitian ini juga menggeneralisasi dan memperluas beberapa hasil yang diketahui dari ruang metrik menjadi ruang *b*–metrik.

Mengkaji dan membahas penelitian yang telah dilakukan oleh Tiwari dkk (2020) sebagaimana dianggap perlu dan penting, karena hal itu merupakan penelitian yang baru. Pembahasan tentang ketunggalan, titik *coincidence* dan titik tetap untuk 2 pemetaan diri di ruang b-metrik dengan kondisi kontraktif dalam jurnal yang berjudul "*Coincidence and Fixed Point in b-Metric Space*" masih sangat singkat. Berdasarkan berbagai alasan yang telah diuraikan, peneliti tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul **"Ketunggalan Titik Tetap di Ruang *b*-Metrik".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka dirumuskan permasalahan yang akan dikaji dalam skripsi ini adalah bagaimana pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang *b*-metrik?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan yang ingin dicapai peneliti adalah untuk mengkaji langkah-langkah dan pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang *b*-metrik.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat antara lain sebagai berikut:

1. Memberi pengetahuan tentang titik ketunggalan dan titik tetap di ruang *b*-metrik disertai dengan langkah-langkah pembuktian dan contoh pendukung.
2. Tambahan referensi tentang ruang metrik serta pemetaan kontraktif di ruang *b*-metrik.

1.5 Batasan Masalah

Pembatasan masalah dalam suatu penelitian sangat penting guna menghindari pembahasan objek yang terlalu meluas dan kesimpangsiuran terhadap objek dari suatu penelitian, agar lebih fokus dan terarah sesuai dengan tema penelitian. Sesuai dengan latar belakang masalah maka skripsi ini dibatasi pada teorema ketunggalan titik tetap di ruang *b*-metrik, bukan di ruang metrik yang lain.

1.6 Definisi Istilah

Untuk menghindari kesalahpahaman dalam menafsirkan istilah dalam penelitian ini perlu adanya batasan-batasan pengertian sebagai berikut:

1. Titik tetap pada pemetaan $T: X \rightarrow X$ adalah $x \in X$ yang dipetakan atas dirinya sendiri, didefinisikan $Tx = x$
2. Teorema titik tetap Banach dikembangkan ke dalam ruang b-metrik seiring munculnya perluasan dari ruang metrik.
3. Pada penelitian ini, ditunjukkan syarat cukup untuk menjamin bahwa ketunggalan titik tetap untuk beberapa pemetaan tergeneralisasi dalam ruang b-metrik.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Himpunan

Jika suatu elemen x dalam himpunan A, ditulis $x \in A$ dan dikatakan bahwa x anggota A, atau x milik A. Jika x tidak dalam himpunan A, ditulis $x \notin A$ (Bartle & Sherbert, 2010).

Jika setiap elemen pada himpunan A juga termasuk dalam himpunan B, dikatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B dan ditulis $A \subseteq B$ atau $B \supseteq A$ (Bartle & Sherbert, 2010).

Dikatakan bahwa himpunan A adalah himpunan bagian sejati dari himpunan B jika $A \subseteq B$, tetapi setidaknya ada satu elemen B yang tidak ada pada A. Dalam kasus ini dituliskan $A \subset B$ (Bartle & Sherbert, 2010).

Definisi 2.1

Dua himpunan A dan B disebut sama dan dituliskan $A = B$, jika keduanya mengandung unsur/elemen yang sama (Bartle & Sherbert, 2010).

Dengan demikian,untuk membuktikan bahwa himpunan A dan B adalah sama, sehingga ditunjukkan bahwa $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$ (Bartle & Sherbert, 2010).

Himpunan biasanya didefinisikan dengan mencantumkan elemennya secara eksplisit, atau dengan menentukan properti yang menentukan elemen himpunan. Jika P `menunjukkan properti yang bermakna dan tidak ambigu untuk elemen himpunan S, maka dituliskan

$$\{x \in S : P(x)\} \qquad `$$

untuk himpunan semua elemen x di S dimana properti P benar. Jika himpunan ini

dipahami dari konteksnya, maka hal itu sering dilambangkan dalam notasi ini:

1. Himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$,
2. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,\cdots\}$,
3. Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m,n \in \mathbb{Z}\ dan\ n \neq 0\right\}$,
4. Himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ (Bartle & Sherbert, 2010).

Contoh 2.1

1. Himpunan $\{x \in \mathbb{N} :\ x^2 - 3x + 2 = 0\}$

   Jawaban dari persamaan di atas terdiri dari bilangan asli. Karena satu-satunya solusi dari persamaan kuadrat ini adalah $x = 1$ dan $x = 2$ sehingga dapat disederhanakan dengan $\{1,2\}$.

2. Bilangan asli n adalah genap jika memiliki bentuk $n = 2k$ untuk $k \in \mathbb{N}$. Himpunan bilangan asli genap dapat dituliskan

   $$\{2k : k \in \mathbb{N}\},$$

   yang lebih sederhana dibandingkan $\{n \in \mathbb{N} : n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$. Demikian juga himpunan bilangan asli ganjil dapat dituliskan $\{2k - 1 : k \in \mathbb{N}\}$ (Bartle & Sherbert, 2010).

2.1.2 Ruang Metrik

Ruang metrik memperjelas konsep jarak, definisi dari metrik bermanfaat untuk mengetahui aplikasi yang lebih umum dari konsep jarak. Di dalam kalkulus dipelajari tentang fungsi-fungsi yang terdefinisi dalam garis bilangan real R. Di dalam bilangan real R terdefinisi fungsi jarak, yaitu memasangkan $d(\mathrm{x},\mathrm{y}) = |\mathrm{x} - \mathrm{y}|$ dengan setiap pasangan $\mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathbb{R}$. Dalam kalkulus kita belajar fungsi yang

didefinisikan pada bilangan real R yang menunjukkan bahwa dalam proses limit dan pertimbangan lainnya dapat menggunakan fakta bahwa pada R kita mempunyai fungsi jarak atau disebut dengan d, dimana jarak $d(\mathrm{x},\mathrm{y}) = |\mathrm{x} - \mathrm{y}|$ dengan setiap pasangan titik $\mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathbb{R}$ (Kreyszig, 1978).

Definisi 2.2

Ruang metrik didefinisikan sebagai pasangan (X, d), dimana X adalah suatu himpunan tak kosong serta d merupakan metrik di X dengan domain $X \times X$ dimana untuk semua $x, y, z \in X$ memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

1. $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$ untuk semua $x, y \in X$
2. $d(x, y) = d(y, x)$, untuk semua $x, y \in X$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, untuk semua $x, y, z \in X$

Jika d adalah metrik di X maka (X, d) disebut ruang metrik (Tiwari dkk, 2020).

Contoh 2.2 Misal $d: X \times X \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi yang terdefinisi oleh

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 2, x \neq y \end{cases}, \qquad \forall x, y \in X$$

Tunjukkan bahwa ruang metrik diskrit $d(x, y)$ adalah metrik di X. Karena

1. $d(x, y) = 0$ jika $x = y$ dan $d(x, y) = 2$ jika $x \neq y$ sehingga $d(x, y)$ *non negatif*

   $d(x, y) = 0, x = y$ memenuhi kondisi $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y, \ \forall x, y \in X$

   Ketika $d(x, y) = 0, \ x = y$

   $d(y, x) = 0, \ x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x), x = y$

   Ketika $d(x, y) = 2, \ x \neq y$

   $d(y, x) = 2, \ x \neq y$

$d(x,y) = d(y,x),\ x \neq y$

Sehingga $d(x,y) = d(y,x),\ \forall x,y \in X$.

3. Jika $x = y = z$, maka $d(x,y) = 0, d(x,z) = 0, d(y,z) = 0$ sehingga $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$. Jika $x \neq y = z$ maka $d(x,y) = 2, d(x,z) = 2, d(y,z) = 0$ sehingga $2 \leq 2 + 0$ yang mana memenuhi kondisi $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$.

   Dikarenakan semua syarat terpenuhi, terbukti $d(x,y)$ merupakan ruang metrik.

2.1.3 Kekonvergenan dan Kelengkapan

Suatu barisan akan konvergen serta lengkap apabila beberapa definisi berikut terpenuhi.

Definisi 2.3

Barisan $\{x_n\}$ pada suatu ruang metrik (X,d) akan konvergen jika terdapat suatu $x \in X$, sehingga $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$ dimana x merupakan nilai limit dari $\{x_n\}$, secara matematis ditulis

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ atau } x_n \to x$$

Sedangkan suatu barisan $\{x_n\}$ dikatakan divergen apabila barisan tersebut tidak konvergen (Tiwari dkk, 2020).

Contoh 2.3

1. Misal (X,d) ruang metrik diskrit, dan barisan $\{x_n\}$ di X yang konvergen ke $x \in X$ dengan $\varepsilon = 1/2$. Tunjukkan bahwa barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan konvergen di ruang metrik diskrit (X,d). Karena barisan $\{x_n\}$ konvergen ke

x, $\exists N \in \mathbb{N}$ sehingga $d(x_n, x) < \frac{1}{2}$, $\forall n \geq N$. Dapat disimpulkan bahwa barisan konvergen di ruang metrik diskrit adalah barisan konstan (Tyagi B, 2010).

2. Misalkan $\{(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})\}$ adalah barisan konvergen yang konvergen pada $(0,0)$, di $\mathbb{R}^2$ dengan $\varepsilon > 0$ dan ada $N \in \mathbb{N}$. $d\left(\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right), (0,0)\right)$ adalah

   $d\left(\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right), (0,0)\right) = \left[\left(\frac{1}{2n} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2n} - 0\right)^2\right]^{1/2} < \varepsilon$, $\forall n \geq N$ (Tyagi B, 2010).

Definisi 2.4

Suatu barisan $\{x_n\}$ di ruang metrik (X, d) dikatakan barisan Cauchy apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall m, n \geq n_0$ berlaku

$|x_m - x_n| < \varepsilon$ (Yunus dkk., 2019).

Contoh 2.4

Barisan $\{x_n\}$ di ruang metrik (X, d) dengan $d(x_m, x_n) = |x_m - x_n|$ dan $x_n = \frac{1}{n}$ untuk setiap $n = 1,2,3, \ldots$ adalah barisan Cauchy.

Keterangan:

Diberikan $\mathcal{E} > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga $\frac{1}{N} < \mathcal{E}$ untuk $m, n > N$ dan untuk $n > N$ berlaku:

$$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \mathcal{E}$$

Lemma 2.1

Setiap barisan konvergen di ruang metrik (X, d) adalah barisan Cauchy (Kreyszig, 1978).

Bukti:

Misalkan $x_n \to x$. Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \epsilon \mathbb{N}$ sehingga untuk sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon/2,$$

Ambil $m > n \geq N$, maka juga berlaku $d(x_m, x) < \varepsilon/2$. Dengan ketaksamaan segitiga, maka untuk $m, n \geq N$ berlaku

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dengan demikian, $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy. Teorema di atas tidak berlaku sebaliknya.

Definisi 2.5

Misal ruang metrik (X, d) dan himpunan $E \subseteq X$. Himpunan E disebut lengkap jika setiap barisan Cauchy di E memiliki limit di E. Jika X lengkap, maka ruang metrik (X, d) lengkap (Yunus dkk, 2019).

Contoh 2.5

Tunjukkan bahwa himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$ adalah ruang metrik lengkap. Hal tersebut dapat dibuktikan seperti berikut. Misal $\{x_n\}$ dengan $x_n = 1 - \frac{1}{2+\sqrt{n}}$ dan $n = 1,2,3, \ldots$ adalah barisan Cauchy di $(\mathbb{R}, d)$ dengan $\{x_n\}$ konvergen ke $1 \in \mathbb{R}$.

2.1.4 Titik Tetap

Titik tetap adalah suatu pemetaan yang mengaitkan setiap titik pada domain tepat satu titik di kodomain sehingga menghasilkan daerah hasil atau range. Berikut definisi dari titik tetap

Definisi 2.6 (Titik Tetap)

Misalkan T merupakan pemetaan dari ruang metrik (X, d) ke dalam dirinya sendiri

1. Sebuah titik $x \in X$ sedemikian sehingga $T(x) = x$ maka x disebut titik tetap pada pemetaan T
2. Jika ada α , dengan $0 < \alpha < 1$, maka untuk setiap pasangan dari titik $x, y \in X$ diperoleh

$$d(T_x, T_y) \leq \alpha\, d(x, y)$$

Kemudian T disebut pemetaan kontraksi atau kontraksi sederhana, sedangkan α disebut kontraksi konstan di T.

T kontraksi di (2) adalah jelas, jika $\alpha < 1$ pengaruh dalam menggunakan pemetaan T adalah untuk meningkatkan jarak antara pasangan manapun dari titik di X. Dalam melihat suatu masalah yang menunjukkan bahwa penyelesaian persamaan $T(x) = x$, jumlah untuk menanyakan titik tetap di T. Teorema titik tetap di bawah mengatakan bahwa selalu ada titik tetap di T, ketika T adalah kontraksi dan ruang X adalah lengkap, sehingga merupakan titik tetap tunggal (Cohen, 2003).

Titik *Coincidence*: Misalkan f dan g dipetakkan ke dirinya sendiri pada himpunan kosong X. Jika $y = fx = gx$ untuk $x \in X$, maka x disebut titik *Coincidence* dari f dan g dan y disebut satu-satunya titik *Coincidence* dari f dan g (Tiwari dkk, 2020).

Contoh 2.6

Karena $y = fx = gx$ dan f dan g dipetakkan ke dirinya sendiri, sedemikian hingga $fy = fgx = gfx = gy$ atau $fy = gy$ adalah titik *Coincidence* dari f dan g. Tetapi y satu-satunya titik *Coincidence* dari f dan g, jadi $y = fy = gy$. Apabila jika $z =$

$fz = gz$, maka z adalah titik *Coincidence* dari f dan g, sedemikian hingga $z = y$ adalah tunggal. Maka y adalah ketunggalan titik tetap dari f dan g.

2.1.5 Ruang *b*-Metrik

Setelah diperoleh konsep mengenai ruang metrik dan barisan di ruang metrik, akan dijelaskan konsep ruang *b*-metrik, barisan di ruang *b*-metrik dan pemetaan di ruang *b*-metrik yang merupakan perluasan dari ruang metrik dan barisan di ruang metrik.

Definisi 2.7

Misalkan X adalah himpunan tidak kosong serta b merupakan metrik di X dengan domain $X \times X$ dimana untuk semua $x, y, z \in X$ dan $k \geq 1$ ialah bilangan *real* tertentu. memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

1. $b(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$
2. $b(x, y) = b(y, x)$
3. $b(x, y) \leq k[b(x, z) + b(z, y)]$

Maka (X, b) disebut ruang *b*-metrik (Tiwari dkk, 2020).

Jelas dari definisi ruang *b*-metrik bahwa setiap ruang metrik adalah ruang *b*-metrik untuk $k = 1$, tetapi kebalikannya tidak berlaku.

Contoh 2.7

Misalkan $X = \{0,1,2\}$ dan $b(0,0) = b(1,1) = b(2,2) = 0$ dan $b(1,2) = b(2,1) = b(0,1) = b(1,0) = 1, b(2,0) = b(0,2) = m \geq 2$ untuk $k = \frac{m}{2}$ dimana $m \geq 2$ sedemikian hingga

$$b(x, y) \leq \frac{m}{2}[b(x, z) + b(z, y)]$$

Untuk semua $x, y \in X$. Jika $m \geq 2$, maka pertidaksamaan segitiga tidak berlaku.

Pemetaan yang didefinisikan di atas adalah ruang b-metrik tetapi bukan ruang metrik untuk $m \geq 2$.

Definisi 2.8

Barisan $\{x_n\}$ di ruang b-metrik (X, b) disebut barisan Cauchy jika $\forall \varepsilon > 0$, ada bilangan bulat positif N sehingga $\forall m, n \geq N$ berlaku

$$b(x_m, x_n) < \varepsilon$$ (Tiwari dkk, 2020).

Definisi 2.9

Barisan $\{x_n\}$ di ruang b-metrik (X, b) disebut konvergen jika $\forall \varepsilon > 0$, ada $n \in \mathbb{N}$ sehingga $b(x_n, x) < \varepsilon$ dimana x disebut titik limit barisan $\{x_n\}$ secara matematis ditulis

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ atau } x_n \to x$$

Sedangkan suatu barisan $\{x_n\}$ dikatakan divergen apabila barisan tersebut tidak konvergen (Tiwari dkk, 2020).

Definisi 2.10 (Ruang *b*-Metrik Lengkap)

Ruang b-metrik (X, b) dikatakan lengkap apabila setiap barisan Cauchy di X selalu konvergen di X (Sherbet & Bartle, 2000).

2.1.6 Fungsi Kontraksi

Definisi 2.11

Misalkan (X, b) ruang b-metrik. $T: X \to X$ disebut kontraksi tipe Ciric jika dan hanya jika $\forall x, y \in X$ ada $h < 1$ sehingga

$d(T_x, T_y) \leq h \max\left\{d(x,y), d(x,T_y), \frac{d(x,T_y)+d(y,T_x)}{2}\right\}$ (Tiwari dkk, 2020).

Definisi 2.12

Misalkan (X, b) adalah ruang b-metrik lengkap dengan fungsi $T: X \to X$ disebut kontraksi pada X jika terdapat bilangan riil positif $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dengan sup $\alpha + \beta + \gamma + 2\delta < 1$ sehingga untuk setiap $\forall x, y\ \varepsilon\ X$ berlaku

$$b(T_x, T_y) \leq \alpha . b(x,y) + \beta . b(x, T_x) + \gamma . b(y, T_y) + \delta[b(x, T_y) + b(y, Tx)]$$

(Tiwari dkk, 2020).

2.2 Kajian Keagamaan

Pada bab ini akan dibahas mengenai bagaimana Al-Qur'an yang merupakan kajian utama ajaran islam, sekaligus pedoman penting bagi hidup seorang muslim menerangkan hubungan antara 2 subjek sebagaimana konsep ruang b-metrik yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya. Secara Bahasa ruang b-metrik adalah perluasan dari ruang metrik. Sedangkan secara istilah ruang b-metrik adalah suatu pasangan (X, b), dimana X suatu himpunan tak kosong dan b adalah suatu metrik pada X (fungsi jarak pada X) yaitu fungsi yang didefinisikan pada $X \times X \to \mathbb{R}^+$ sedemikian hingga $x, y, z\ \epsilon\ X$ salah satu aksioma dalam b-metrik adalah $b(x,y) \leq k[b(x,z) + b(z,y)]$ (Sherbet & Bartle, 2000).

Pada salah satu ayat bisa diambil suatu pelajaran sekaligus suatu konsep b-metrik yakni adanya suatu hubungan yang terikat antara manusia dengan sang pencipta yakni Allah Swt atau biasa disebut habluminallah serta manusia sesama manusia atau biasa disebut habluminannas. Untuk lebih jelas memahami konsep ini, dalam Al-Qur'an surat 'Al-Isra' ayat 7 yang berbunyi :

اِنْ اَحْسَنْتُمْ اَحْسَنْتُمْ لِاَنْفُسِكُمْ ۗوَاِنْ اَسَأْتُمْ فَلَهَا ۗ فَاِذَا جَاۤءَ وَعْدُ الْاٰخِرَةِ لِيَسُوْۤءٗا
وُجُوْهَكُمْ وَلِيَدْخُلُوا الْمَسْجِدَ كَمَا دَخَلُوْهُ اَوَّلَ مَرَّةٍ وَّلِيُتَبِّرُوْا مَا عَلَوْا تَتْبِيْرًا

Artinya: *"Jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik untuk dirimu sendiri. Dan jika kamu berbuat jahat, maka (kerugian kejahatan) itu untuk dirimu sendiri. Apabila datang saat hukuman (kejahatan) yang kedua, (Kami bangkitkan musuhmu) untuk menyuramkan wajahmu lalu mereka masuk ke dalam masjid (Masjidil Aqsa), sebagaimana ketika mereka memasukinya pertama kali dan mereka membinasakan apa saja yang mereka kuasai"*.

Pada ayat di atas, menunjukkan kedudukan semua manusia di hadapan Allah Swt ialah sama, sehingga dalam menjalani kehidupan di dunia perlu menjalin hubungan atau simbiosis kepada sesama manusia. Manusia yang melakukan kebaikan akan dibukakan pintu-pintu keberkahan oleh Allah. Sebaliknya, bila seseorang berbuat jahat maka Allah akan membuka pintu-pintu keburukan lainnya. Allah telah menjanjikan kebaikan yang lebih besar di dunia maupun akhirat jika manusia bia berguna dan bermanfaat untuk orang lain. Sebaliknya, jika manusia berbuat jahat, Allah juga menyiapkan hukuman yang menanti di hari kiamat.

2.3 Kajian Topik dan Teori Pendukung

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai teori-teori yang berhubungan dengan skripsi ini, sehingga dapat dijelaskan sebagai landasan berfikir dan akan mempermudah dalam pembahasan hasil utama pada bab berikutnya.

Definisi 4.1

Misalkan X adalah himpunan tidak kosong dan $k \geq 1$ ialah bilangan *real* tertentu. Fungsi $b: X \times X \to \mathbb{R}^+$ adalah ruang b-metrik jika $\forall x, y, z \in X$ memenuhi kondisi berikut ini

1. $b(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$

2. $b(x,y) = b(y,x)$
3. $b(x,y) \leq k[b(x,z) + b(z,y)]$

Sehingga (X,b), disebut ruang b-metrik dengan koefisien k (Tiwari dkk, 2020).

Definisi 4.2

Barisan $\{x_n\}$ di ruang b-metrik (X,b) disebut barisan Cauchy jika $\forall \varepsilon > 0$, ada bilangan bulat positif N sehingga $\forall m,n \geq N$ berlaku

$$b(x_m,x_n) < \varepsilon$$ (Tiwari dkk, 2020).

Definisi 4.3

Barisan $\{x_n\}$ di ruang b-metrik (X,b) disebut konvergen jika $\forall \varepsilon > 0$, ada $n \in \mathbb{N}$ sehingga $b(x_n,x) < \varepsilon$ dimana x disebut titik limit barisan $\{x_n\}$ secara matematis ditulis

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ atau } x_n \to x$$

Sedangkan suatu barisan $\{x_n\}$ dikatakan divergen apabila barisan tersebut tidak konvergen (Tiwari dkk, 2020).

Teorema 4.1

Setiap barisan yang konvergen dalam suatu metrik (X,d)merupakan barisan Cauchy (Kreyszig, 1978).

Bukti:

Misalkan $x_n \to x$. Maka untuk setiap $\mathcal{E} > 0\ terdapat\ N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk sedemikian hingga untuk setiap n ≥N berlaku

$$d(x_n,x) < \varepsilon/2,$$

Ambil m> $n \geq N$, maka juga berlaku $d(x_m,x) < \varepsilon/2$. Dengan ketaksamaan segitiga, maka untuk m, n ≥N berlaku

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x) + d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dengan demikian, $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy, teorema diatas tidak berlaku sebaliknya.

Definisi 4.4

Ruang b-metrik (X, b) disebut lengkap jika setiap barisan Cauchya konvergen (Tiwari dkk, 2020).

Definisi 4.5

Misalkan (X, b) ruang b-metrik. $T: X \to X$ disebut kontraksi tipe Ciric's jika dan hanya jika $\forall x, y \in X$ ada $h < 1$ sehingga

$$d(T_x, T_y) \leq h \max\left\{d(x, y), d(x, T_y), \frac{d(x, T_y) + d(y, T_x)}{2}\right\}$$

(Tiwari dkk, 2020).

Definisi 4.6

Misalkan $(X,\ b)$ adalah ruang b-metrik lengkap dengan fungsi $T: X \to X$ disebut kontraksi pada X jika terdapat bilangan riil positif $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dengan sup $\alpha + \beta + \gamma + 2\delta < 1$ sehingga untuk setiap $\forall x, y\ \varepsilon\ X$ berlaku

$$b(T_x, T_y) \leq \alpha . b(x, y) + \beta . b(x, T_x) + \gamma . b(y, T_y) + \delta[b(x, T_y) + b(y, Tx)]$$

(Tiwari dkk, 2020).

Lemma 4.1

Misal (X, b) ruang b-metrik lengkap dan $\{x_n\}$ barisan di ruang b-metrik sehingga berlaku

$$b(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha . b(x_{n-1}, x_n)$$

untuk $n = 1,2,3, \ldots$ dan $0 \leq \alpha k < 1$, $\alpha \in [0,1)$ dan k terdefinisi di ruang b-metrik maka $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di X (Tiwari dkk, 2020).

Teorema 4.1:

Misalkan (X,b) adalah ruang b-metrik dengan koefisien $k \geq 1$ dan $f, g: Y \rightarrow X, f(Y) \subseteq g(Y)$ dengan pemetaan seperti:

1. $b(fx, fx) \leq$

   $h.\max\left\{b(gx, gy), b(fy, gy), b(gy, fy), f, \frac{1}{2k}\ [b(gx, fy) + b(gy, fx]\right\}$

   dimana x,y ϵ X dan $kh < 1$

2. $jika\ f(y)\ atau\ g(y)$ lengkap maka f dan g memiliki titik *coincidence* (Tiwari dkk, 2020).

Teorema 4.2:

Misalkan (X, b) adalah ruang b-metrik lengkap dengan koefisien $k \geq 1$ dan $T: X \rightarrow X$ suatu fungsi yang memenuhi persamaan berikut

$$b(T_x, T_y) \leq h.\max\left\{b(x, y), b(x, T_x), b(y, T_y), \frac{1}{2k}\left[b(x, T_y) + b(y, T_{y)}\right]\right\}$$

$\forall x, y\ \varepsilon\ X$, dimana $h\ \varepsilon\ [0,1)$, dan $kh > 1$. Maka T memiliki titik tetap yang tunggal (Tiwari dkk, 2020).

Teorema 4.3

Misalkan (X, b) adalah ruang b-metrik lengkap dengan koefisien $k \geq 1$ dan $T: X \rightarrow X$ suatu fungsi yang memenuhi persamaan berikut

$$b(T_x, T_y) \leq \alpha.b(x, y) + \beta.b(x, T_x) + \gamma.b(y, T_y) + \mu\left[b(x, T_y) + b(y, Tx)\right]$$

$\forall x, y\ \varepsilon\ X$, dan $\alpha + \beta + \gamma + \mu \geq 0$, dengan syarat

$$k\alpha + k\beta + \gamma + (k^2 + k)\mu < 1,$$

maka T mempunyai titik tetap yang tunggal (Tiwari dkk, 2020).

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian yang dilakukan penulis adalah penelitian kajian pustaka, yaitu penulis mempelajari beberapa artikel dan jurnal tertulis mengenai teorema ketunggalan titik tetap di ruang *b*-metrik. Penulis memilih jurnal utama yang berjudul "*Coincidence and Fixed Point in b-Metric Space*" yang ditulis oleh Tiwari, N. dkk pada tahun 2020.

3.2 Pra Penelitian

Di dalam kegiatan pra-penelitian, peneliti melakukan beberapa persiapan. Tahap persiapan antara lain adalah menganalisis masalah yang terjadi, mengajukan judul kepada pembimbing skripsi, merumuskan masalah penelitian, menentukan sumber data, menyusun proposal penelitian, dan melakukan proses bimbingan kepada dosen pembimbing.

3.3 Tahapan Penelitian

Di dalam kegiatan penelitian ini, peneliti menggunakan beberapa tahapan-tahapan penelitian. Adapun tahapan-tahapan tersebut digambarkan sebagaimana berikut ini:

1. Mengkaji dan memahami jurnal penelitian yang ditulis oleh Tiwari dkk (2020) yang berjudul "*Coincidence and Fixed Point in b-Metric Space*".
2. Mengumpulkan referensi terkait pembuktian konsep titik *coincidence* dan konsep ketunggalan titik tetap di ruang *b*-metrik.
3. Memaparkan definisi mengenai ruang metrik, barisan Cauchy, barisan

konvergen, *b*-metrik, titik tetap dan fungsi kontraksi.

4. Menentukan ayat Al-Qur’an yang berkaitan dengan penelitian.
5. Mengkaji teori integrase *b*-metrik dalam Al-Qur’an.
6. Membuktikan konsep titik *coincidence.*
7. Membuktikan konsep ketunggalan titik tetap di ruang *b*-metrik.
8. Menentukan kesimpulan berdasarkan teorema digunakan dalam pembuktian pada bab pembahasan.

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Teorema Ketunggalan Titik Tetap di Ruang *b*-Metrik

Dalam ketunggalan titik tetap di ruang *b*-metrik juga dikenal sebagai teorema pemetaan kontraktif yang merupakan alat penting dalam teori ruang *b*-metrik, untuk menjamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap pemetaan diri pada ruang *b*-metrik, dan menyediakan metode kontraksi untuk menemukan titik tetap (Sherbet & Bartle, 2000).

Lemma 4.1

Misalkan (X, b) ruang *b*-metrik lengkap dan $\{x_n\}$ barisan di ruang *b*-metrik sehingga berlaku

$$b(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha . b(x_{n-1}, x_n) \qquad (4.1)$$

untuk $n = 1,2,3,...$ dan $0 \leq \alpha k < 1$, $\alpha \in [0,1)$ dan k terdefinisi di ruang *b*-metrik maka $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di X (Tiwari dkk, 2020).

Bukti

Berdasarkan persamaan (4.1) untuk sebarang $n \epsilon$ N dapat disederhanakan sehingga berlaku

$$b(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha . b(x_{n-1}, x_n)$$

Untuk $n = 1, b(x_1, x_2) \leq \alpha . b(x_0, x_1)$

$$n = 2, b(x_2, x_3) \leq \alpha . b(x_1, x_2)$$
$$\leq \alpha \{\alpha . b(x_0, x_1)\}$$
$$= \alpha^2 . b(x_0, x_1)$$

$$n = 3, b(x_3, x_4) \leq \alpha . b(x_2, x_3)$$
$$\leq \alpha \{\alpha^2 . b(x_0, x_1)\}$$

$$= \alpha^3 . b(x_0, x_1)$$

$$\vdots$$

$$b(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n . b(x_0, x_1) \qquad (4.2)$$

Selanjutnya, untuk setiap $\mathcal{E} > 0$ ada $k(\mathcal{E}) \epsilon \mathbb{N}$. Sebarang $m, n > \mathbb{N}$ dan $m > n$ dipilih $m = n + 1$, dengan menggunakan pertaksamaan segitiga pada ruang *b*-matrik diproleh:

$b(x_n, x_m) \leq k[b(x_n, x_{n+1}) + b(x_{n+1}, x_m)]$ (Berdasarkan def 2.2.1 no.3) $k \geq 1$ dan $k \in \mathbb{R}$

$= kb(x_n, x_{n+1}) + kb(x_{n+1}, x_m)$

$\leq kb(x_n, x_{n+1}) + k^2 [b(x_{n+1}, x_{n+2}) + b(x_{n+2}, x_m)$ (Berdasarkan def 2.2 no.3)

$= kb(x_n, x_{n+1}) + k^2 b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^2 b(x_{n+2}, x_m)$

$\leq kb(x_n, x_{n+1}) + k^2 b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^2 [b(x_{n+2}, x_{n+3}) +$

$b(x_{n+3}, x_m)]$ (Berdasarkan def 2.2 no.3)

$= kb(x_n, x_{n+1}) + k^2 b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^3 b(x_{n+2}, x_{n+3})$

$+ k^3 b(x_{n+3}, x_m)]$

$\vdots$

$\leq kb(x_n, x_{n+1}) + k^2 b(x_{n+1}, x_{n+2})$

$+ k^3 b(x_{n+2}, x_{n+3}) + \ldots + k^{m-n-1} [b(x_{m-2}, x_{m-1})$

$+ b(x_{m-1}, x_m)$

$= kb(x_n, x_{n+1}) + k^2 b(x_{n+1}, x_{n+2})$

$+ k^3 b(x_{n+2}, x_{n+3}) + \ldots + k^{m-n-1} b(x_{m-2}, x_{m-1})$

$+ k^{m-n-1} b(x_{m-1}, x_m)$

$$\leq kb(x_n, x_{n+1}) + k^2\, b(x_{n+1}, x_{n+2})$$
$$+ k^3 b(x_{n+2}, x_{n+3}) + \ldots + k^{m-n-1} b(x_{m-2}, x_{m-1})$$
$$+ k^{m-n} b(x_{m-1}, x_m)$$

Berdasarkan persamaan (4.2) sehingga $b(x_n, x_m)$ dengan $k \geq 1$ menjadi

$$b(x_n, x_m) \leq k\alpha^n b(x_0, x_1) + k^2\alpha^{n+1} b(x_0, x_1) + k^3\alpha^{n+2} b(x_0, x_1) + \cdots$$
$$+ k^{m-n-1}\alpha^{m-2} b(x_{m-2}, x_{m-1}) + k^{m-n}\alpha^{n-1} b(x_{m-1}, x_m)$$
$$= (1 + k\alpha + (k\alpha)^2 + \cdots + k^{m-n-1}\alpha^{m-n-1}) k\alpha^n b(x_0, x_1)$$

Perhatikan $1 + k\alpha + (k\alpha)^2 + \cdots + k^{m-n-1}\alpha^{m-n-1}$ adalah deret geometri sehingga

$S_{m-n} = 1 + k\alpha + (k\alpha)^2 + \cdots + k^{m-n-1}\alpha^{m-n-1}$

$r = k\alpha$, $U_{m-n} = ar^{m-n-1}$

$S_{m-n} = \frac{a(1-r^{m-n})}{1-r}$

$b(x_n, x_m) = \left(\frac{1-k^{m-n}\alpha^{m-n}}{1-k\alpha}\right) k\alpha^n . b(x_0, x_1)$

Karena $0 \leq \alpha k < 1$ dan $m > n$

$$b(x_n, x_m) \leq \left(\frac{1}{1-k\alpha}\right) k\alpha^n . b(x_0, x_1)$$

Karena $0 \leq \alpha k < 1$ dan $0 \leq \alpha < 1$ sehingga jika diambil limit $m, n \to \infty$, maka

$$\lim_{m,n\to\infty} b(x_n, x_m) = 0$$

Jadi $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada ruang *b*-metrik (X, b).

Teorema 4.1

Misalkan (X, b) adalah ruang *b*-metrik dengan koefisien $k \geq 1$ dan $f, g: Y \to X$, $f(Y) \subseteq g(Y)$ dengan fungsi yang memenuhi persamaan berikut

1. $b(fx, fx) \leq$

   $h.\max\left\{b(gx, gy), b(fy, gy), b(gy, fy), f, \frac{1}{2k}\,[b(gx, fy) + b(gy, fx]\right\}$

dimana x,y ϵ X dan $kh < 1$ untuk semua x,y

2. $jika\ f(y)\ atau\ g(y)$ lengkap maka f dan g memiliki titik *coincidence* (Tiwari dkk, 2020).

Bukti

Ambil sebarang $x_0, x_1 \epsilon Y$ dengan $fx_0 = gx_1$. Karena $f(Y) \subseteq g(Y)$ dengan mengontrak barisan $\{x_n\}$ sedemikian hingga untuk $x_1, x_2 \epsilon Y$ diperoleh $fx_1 = gx_2$, $x_2, x_3 \epsilon Y$ diperoleh $fx_2 = gx_3$ demikian seterusnya sampai x_n, maka untuk setiap x_n berlaku $fx_n = gx_{n+1}$. Karena $fx_n, gx_{n+1} \in X$ dan (X, b) ruang *b*-metrik maka berlaku

$$b(fx_n, fx_{n+1}) \leq h.max\{b(gx, gy), b(gx, fx), b(gy, fy)\}, \frac{1}{2k}[b(gx, fy) + b(gx, fx)]$$

$$\leq h.max\{b(gx_n, gx_{n+1}), b(gx_n, fx_n), b(gx_{n+1}, fx_{n+1}\},$$

$$\frac{1}{2k}[b(gx_n, fx_{n+1}) + b(gx_{n+1}, fx_n)]$$

Misalkan $z_n = fx_n = gx_{n+1} = gx_n = fx_{n-1} = z_{n-1}$

$$b(z_n, z_{n+1})$$

$$\leq h.max\{b(z_{n-1}, z_n),, b(z_{n-1}, z_n), b(z_n, z_{n+1})\}, \frac{1}{2k}[b(z_{n-1}, z_{n+1}), b(z_n, z_n)]$$

$$\leq h.max\left\{b(z_{n-1}, z_n), b(z_{n-1}, z_n), b(z_n, z_{n+1}), \frac{1}{2k}(k)[b(z_{n-1}, z_{n+1}), b(z_n, z_n)]b\right\},$$

$$\leq h.max\left\{b(z_{n-1}, z_n), b(z_{n-1}, z_n), b(z_n, z_{n+1}), \frac{1}{2}[b(z_{n-1}, z_n), b(z_n, z_{n+1})]\right\}$$

Jika $b(z_{n-1}, z_n) < b(z_n, z_{n+1})$

$$b(z_{n-1}, z_n) < \frac{1}{2}[b(z_{n-1}, z_n), b(z_n, z_{n+1})] < b(z_n, z_{n+1})$$

Diperoleh

$$b(z_n, z_{n+1}) < h.b(z_{n-1}, z_n)$$

Ketaksamaan di atas terpenuhi jika $h \geq 1$, hal ini kontradiksi dengan nilai $h < 1$ yang diberikan. Dengan menggunakan lemma (4.1) didapatkan $z_n = fx_n$ adalah barisan Cauchy.

Andaikan $g(Y)$ lengkap maka $\exists p \in g(Y)$, sedemikian hingga $z_n \to p$ dan $\exists\, z \in Y$, sedemikian hingga $gz = p$. Dipilih $x = x_n$ dan $y = z$, maka berlaku

$$b(fx_n, f_z) \leq h\, max\left\{b(gx_n, g_z), b(gx_n, fx_n), b(gz, fz)\frac{1}{2k}[b(gx_n, fz) + b(gz, fx_n)]\right\}$$

Ambil limit $n \to \infty$, diperoleh

$$b(p, fz) \leq h\, max\left\{b(p, fz), b(p, p), b(gz, fz), \tfrac{1}{2k}[b(p, fz) + b(gz, p)]\right\}$$

$$b(p, fz) \leq h\, max\left\{b(p, p), b(p, p), b(gz, p), \tfrac{1}{2k}[b(p, p) + b(gz, p)]\right\}$$

$$b(p, fz) \leq h\, max\left\{b(fz, p), \tfrac{1}{2k} b(p, fz)\right\}$$

$$b(p, fz) \leq h.\max b(p, fz) = 0$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga ini hanya mungkin jika $b(p, fz) = 0$, jadi $p = f(z) = p(z)$. Maka p adalah titik *coincidence* dari f dan g. Diingkatkan ini hanya berlaku jika $f(Y)$ lengkap dengan $z_n \to p \in f(Y) \subseteq g(Y)$, maka z adalah titik *coincidence* dari f dan g.

Teorema 4.2

Misalkan (X, b) adalah ruang b-metrik lengkap dengan koefisien $k \geq 1$ dan T dengan fungsi $T: X \to X$ dengan memenuhi kondisi.

$$b(T_x, T_y) \leq h.\max\left\{b(x, y), b(x, T_x), b(y, T_y), \tfrac{1}{2k}\left[b(x, T_y) + b(y, Ty\right]\right\} \quad (4.3)$$

$\forall x, y\, \varepsilon\, X$, dimana $h\, \varepsilon\, [0,1)$, dan $kh > 1$. Maka T mempunyai titik tetap yang

tunggal (Tiwari dkk, 2020).

Bukti

Ambil sebarang $x_0 \in X$, kemudian didefinisikan fungsi $T: X \to X$ memenuhi Persamaan (4.3) dengan dibentuk barisan $\{x_n\}$ didapatkan $x_n = Tx_{n-1}$, sedemikian hingga diperoleh

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_{1,}\ x_3 = Tx_2, \dots, x_n = Tx_{n-1}$$

Berdasarkan barisan $\{x_n\}$ dan fungsi T dapat diketahui bahwa

$$b(x_n, x_{n+1}) = b(Tx_{n-1}, Tx_n) \qquad (4.4)$$

Langkah I. Akan dibentuk barisan Cauchy

Karena T memenuhi Persamaan (4.3) maka berdasarkan Persamaan (4.4) diperoleh

$$b(x_n, x_{n+1})$$

$$\leq h.\max\left\{b(x_{n-1}, x_n), b(x_{n-1}, Tx_{n-1}), b(x_n, Tx_n), \frac{1}{2k}\left[b(x_{n-1}, Tx_n) + b(x_n, Tx_{n-1})\right]\right\}$$

$$\leq h.\max\left\{b(x_{n-1}, x_n), b(x_{n-1}, x_n), b(x_n, x_{n+1}), \frac{1}{2k}\left[b(x_{n-1}, x_{n+1}) + b(x_n, x_{n})\right]\right\}$$

$$\leq h.\max\left\{b(x_{n-1}, x_n), b(x_{n-1}, x_n), b(x_n, x_{n+1}), \frac{1}{2}\left[b(x_{n-1}, x_n) + b(x_n, x_{n+1})\right]\right\}$$

Jika $b(x_{n-1}, x_n) < b(x_n, x_{n+1})$

$$b(x_{n-1}, x_n) < \frac{1}{2}[b(x_{n-1}, x_n), b(x_n, x_{n+1})] < b(x_n, x_{n+1})$$

Diperoleh

$$b(x_n, x_{n+1}) \leq h \,.\, b(x_{n-1}, x_n)$$

Ketaksamaan diatas terpenuhi jika $h \geq 1$, hal ini kontradiksi dengan $h < 1$.

Berdasarkan persamaan tersebut, untuk sebarang $n \epsilon N$ hasil di atas disederhanakan sehingga diperoleh

$$b(x_n, x_{n+1}) \leq h \,.\, b(x_{n-1}, x_n) \quad (4.5)$$

Berdasarkan pertaksamaan diatas, akan dibuktikan bahwa untuk setiap $n \epsilon N$, berlaku

$$b(x_n, x_{n+1}) \leq h^n \,.\, b(x_0, x_1)$$

Selanjutnya, untuk setiap $\mathcal{E} > 0$ ada $k(\mathcal{E}) \epsilon \mathbb{N}$. Sebarang $m, n > \mathbb{N}$ dan $m > n$ dipilih $m = n + 1$, dengan menggunakan pertaksamaan segitiga pada ruang b-matrik diproleh:

$b(x_n, x_m) \leq k[b(x_n, x_{n+1}) + b(x_{n+1}, x_m)]$ (Berdasarkan def 2.2.1 no.3) $k \geq 1$ dan $k \in \mathbb{R}$

$= kb(x_n, x_{n+1}) + kb(x_{n+1}, x_m)$

$\leq kb(x_n, x_{n+1}) + k^2\,[b(x_{n+1}, x_{n+2}) + b(x_{n+2}, x_m)$ (Berdasarkan def 2.2 no.3)

$= kb(x_n, x_{n+1}) + k^2\, b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^2 b(x_{n+2}, x_m)$

$\leq kb(x_n, x_{n+1}) + k^2\, b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^2[b(x_{n+2}, x_{n+3}) +$

$b(x_{n+3}, x_m)]$ (Berdasarkan def 2.2 no.3)

$= kb(x_n, x_{n+1}) + k^2\, b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^3 b(x_{n+2}, x_{n+3})$

$+ k^3 b(x_{n+3}, x_m)]$

$\vdots$

$$\leq kb(x_n, x_{n+1}) + k^2\, b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^3 b(x_{n+2}, x_{n+3}) + \ldots + k^{m-n-1}[b(x_{m-2}, x_{m-1}) + b(x_{m-1}, x_m)$$

$$= kb(x_n, x_{n+1}) + k^2\, b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^3 b(x_{n+2}, x_{n+3}) + \ldots + k^{m-n-1} b(x_{m-2}, x_{m-1}) + k^{m-n-1} b(x_{m-1}, x_m)$$

$$\leq kb(x_n, x_{n+1}) + k^2\, b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^3 b(x_{n+2}, x_{n+3}) + \ldots + k^{m-n-1} b(x_{m-2}, x_{m-1}) + k^{m-n} b(x_{m-1}, x_m)$$

Berdasarkan persamaan (4.5) sehingga $b(x_n, x_m)$ dengan $k \geq 1$ menjadi

$$b(x_n, x_m) \leq kh^n b(x_0, x_1) + k^2 h^{n+1} b(x_0, x_1) + k^3 h^{n+2} b(x_0, x_1) + \cdots + k^{m-n-1} h^{m-2} b(x_{m-2}, x_{m-1}) + k^{m-n} h^{n-1} b(x_{m-1}, x_m)$$

$$= (1 + kh + (kh)^2 + \cdots + k^{m-n-1} h^{m-n-1}) kh^n b(x_0, x_1)$$

$$b(x_n, x_m) = \left(\frac{1 - k^{m-n} h^{m-n}}{1 - kh}\right) kh^n . b(x_0, x_1)$$

Karena $k < 1$ dan $m > n$

$$b(x_n, x_m) \leq \left(\frac{1}{1 - kh}\right) kh^n . b(x_0, x_1)$$

Karena $k < 1$ dan $h < 1$ jika diambil limit $m, n \to \infty$, maka $h^n \to 0$. Sehingga

$$\lim_{m,n \to \infty} b(x_n, x_m) = 0$$

Jadi, untuk setiap $\mathcal{E} \in \mathbb{R}, \mathcal{E} > 0$, ada $n(\mathcal{E}) \epsilon\, \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq n(\mathcal{E})$, berlaku $b(x_n, x_m) < \mathcal{E}$. Maka $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy. Karena X adalah ruang b-metrik lengkap, maka setiap barisan Cauchy didalamnya adalah barisan konvergen. Maka, barisan $\{x_n\}$ konvergen. Misalkan, barisan $\{x_n\}$ konvergen ke suatu $u \in X$.

Langkah II. Akan dibuktikan bahwa u adalah titik tetap T

Karena berdasarkan Persamaan (4.3) yang merupakan fungis kontradiksi dengan $kh > 1$, sehingga memenuhi syarat untuk menggunakan lemma (4.1) maka diperoleh bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada ruang b-metrik lengkap. Karena ruang b-metrik (X, b) lengkap maka barisan $\{x_n\}$ konvergen, misalkan terdapat $u \in X$ sedemikian hingga $b(x_n, u) \to 0$ untuk $n \to \infty$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa u merupakan titik tetap fungsi T. Diambil sebarang $u, x_n, x_{n+1} \in X$, dengan menggunakan sifat ketaksamaan segitiga b-metrik dapat diketahui bahwa

$$\begin{aligned} b(Tu, Tx_n) &\leq k[b(u, x_{n+1}) + b(x_{n+1}, Tu)] \\ &= k[b(u, x_{n+1}) + b(x_{n+1}, Tu)] \end{aligned}$$

Karena T memenuhi persamaan (4.3), maka diperoleh

$$\begin{aligned} b(Tu, Tx_n) &\leq h.\max\left\{b(u, x_n), b(u, Tu), b(x_n, Tx_n), \frac{1}{2k}[b(u, Tx_n)\right. \\ &\quad \left. + b(x_n, Tu]\right\} \\ &\leq h.\max\left\{\begin{matrix} b(u, x_n), b(u, Tu), b(x_n, x_{n+1}), \\ \frac{1}{2k}[b(u, x_{n+1}) + b(x_n, Tu)] \end{matrix}\right\} \end{aligned}$$

Digunakan limit $n \to \infty$, diperoleh

$$\begin{aligned} b(Tu, u) &\leq h.\max\left\{b(u, Tu), \frac{1}{2}b(u, Tu)\right\} \\ &\leq h.\, b(Tu, u) \end{aligned}$$

Ketaksamaan diatas berlaku jika $b(Tu, u) = 0$ akibatnya $Tu = u$. Jadi u titik tetap fungsi T.

Langkah III. Akan ditunjukkan ketunggalan titik tetap fungsi T

Andaikan $u, v \in X, u \neq v$ adalah titik tetap fungsi T yang berbeda

$Tu = u, Tv = v$ dan $b(u,v) > 0$. Karena T memenuhi Persamaan (4.3) maka berlaku

$$b(Tu,Tv) \leq h.\max\left\{b(u,v), b(u,Tu), b(v,Tv), \frac{1}{2k}[b(u,Tv) + b(v,Tu]\right\}$$

Didapatkan

$$b(u,v) \leq h.b(u,v)$$

Ketaksamaan diatas mungkin terjadi jika $b(u,v) = 0 \Rightarrow u = v$, sehingga terjadi kontradiksi. Jadi titik tetap fungsi T tunggal.

Langkah IV Akan ditunjukkan $b(u,v) = 0$

Andaikan $u, v \epsilon X, u \neq v$ adalah titik tetap dari fungsi T yang berbeda, $Tu = u, Tv = v$ dan $b(u,v) = 0$. Karena T memenuhi Persamaan (4.3) maka berlaku

$$b(u,v) = b(Tu,Tv)$$

$$\leq h.\max\left\{b(u,v), b(u,Tu), b(v,Tv), \frac{1}{2k}[b(u,Tv) + b(v,Tu]\right\}$$

$$\leq h.\max\left\{b(u,v), b(u,u), b(v,v), \frac{1}{2k}[b(u,v) + b(v,u]\right\} = 0$$

Sedemikian hingga $b(u,v) = 0$ hal ini kontradiksi dengan $u = v$. Maka u adalah ketunggalan titik tetap fungsi T.

Teorema 4.3

Misalkan (X, b) adalah ruang b-metrik lengkap dengan koefisien $k \geq 1$ dan $T: X \to X$ suatu fungsi yang memenuhi persamaan berikut

$$b(T_x, T_y) \leq \alpha.b(x,y) + \beta.b(x,T_x) + \gamma.b(y,T_y) + \mu[b(x,T_y) + b(y,Tx)] \quad (4.5)$$

$\forall x, y\ \varepsilon\ X$, dan $\alpha + \beta + \gamma + \mu \geq 0$, dengan syarat

$$k\alpha + k\beta + \gamma + (k^2 + k)\mu < 1,$$

maka T mempunyai titik tetap yang tunggal (Tiwari dkk, 2020).

Bukti

Ambil sebarang $x_0 \in X$, kemudian didefinisikan fungsi $T: X \to X$ memenuhi Persamaan (4.5) dengan dibentuk barisan $\{x_n\}$ didapatkan $x_n = Tx_{n-1}$, sedemikian hingga diperoleh

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_{1,}\, x_3 = Tx_2, \dots, x_n = Tx_{n-1}$$

Berdasarkan barisan $\{x_n\}$ dan fungsi T dapat diketahui bahwa

$$b(x_n, x_{n+1}) = b(Tx_{n-1}, Tx_n) \qquad (4.6)$$

Langkah I. Akan dibentuk barisan Cauchy

Karena T memenuhi Persamaan (4.5) maka berdasarkan Persamaan (4.6) diperoleh

$$\begin{aligned} b(x_n, x_{n+1}) &\leq \alpha . b(x_{n-1}, x_n) + \beta . b(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + \gamma . b(x_n, Tx_n) \\ &\quad + \mu\left[b(x_{n-1}, Tx_n) + b((x_n, Tx_{n-1)}\right] \\ &\leq \alpha . b(x_{n-1}, x_n) + \beta . b(x_{n-1}, x_n) + \gamma . b(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + \mu[b(x_{n-1}, x_{n+1}) + b((x_n, x_n)] \\ &\leq \alpha . b(x_{n-1}, x_n) + \beta . b(x_{n-1}, x_n) + \gamma . b(x_n, x_{n+1}) \\ &\quad + \mu . k[b(x_{n-1}, x_n) + b((x_n, x_{n+1})] \\ &\leq \frac{(\alpha + \beta + \mu . k)}{(1 - \gamma - \mu . k)}\ b(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Misalkan $\lambda = \frac{(\alpha+\beta+\mu.k)}{(1-\gamma-\mu.k)}$ maka diperoleh

$$b(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda . b(x_{n-1}, x_n)$$

Berdasarkan ketaksamaan diatas, akan dibuktikan bahwa untuk setiap $n \epsilon N$, berlaku

$$b(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n . b(x_0, x_1)$$

Selanjutnya, untuk setiap $\mathcal{E} > 0$ ada $k(\mathcal{E}) \epsilon \mathbb{N}$. Sebarang $m, n > \mathbb{N}$ dan $m > n$ dipilih $m = n + 1$, dengan menggunakan pertaksamaan segitiga pada ruang b-

matrik diproleh:

$b(x_n, x_m) \leq k[b(x_n, x_{n+1}) + b(x_{n+1}, x_m)]$ (Berdasarkan def 2.2.1 no.3) $k \geq 1$ dan $k \in \mathbb{R}$

$= kb(x_n, x_{n+1}) + kb(x_{n+1}, x_m)$

$\leq kb(x_n, x_{n+1}) + k^2\,[b(x_{n+1}, x_{n+2}) + b(x_{n+2}, x_m)$ (Berdasarkan def 2.2 no.3)

$= kb(x_n, x_{n+1}) + k^2\, b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^2 b(x_{n+2}, x_m)$

$\leq kb(x_n, x_{n+1}) + k^2\, b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^2[b(x_{n+2}, x_{n+3}) + b(x_{n+3}, x_m)]$ (Berdasarkan def 2.2 no.3)

$= kb(x_n, x_{n+1}) + k^2\, b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^3 b(x_{n+2}, x_{n+3}) + k^3 b(x_{n+3}, x_m)]$

$\vdots$

$\leq kb(x_n, x_{n+1}) + k^2\, b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^3 b(x_{n+2}, x_{n+3}) + \ldots + k^{m-n-1}[b(x_{m-2}, x_{m-1}) + b(x_{m-1}, x_m)$

$= kb(x_n, x_{n+1}) + k^2\, b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^3 b(x_{n+2}, x_{n+3}) + \ldots + k^{m-n-1} b(x_{m-2}, x_{m-1}) + k^{m-n-1} b(x_{m-1}, x_m)$

$\leq kb(x_n, x_{n+1}) + k^2\, b(x_{n+1}, x_{n+2}) + k^3 b(x_{n+2}, x_{n+3}) + \ldots + k^{m-n-1} b(x_{m-2}, x_{m-1}) + k^{m-n} b(x_{m-1}, x_m)$

Berdasarkan persamaan (4.5) sehingga $b(x_n, x_m)$ dengan $k \geq 1$ menjadi

$$b(x_n, x_m) \leq k\lambda^n b(x_0, x_1) + k^2\lambda^{n+1} b(x_0, x_1) + k^3\lambda^{n+2} b(x_0, x_1) + \cdots + k^{m-n-1}\lambda^{m-2} b(x_{m-2}, x_{m-1}) + k^{m-n}\lambda^{n-1} b(x_{m-1}, x_m)$$

$$= (1 + k\lambda + (k\lambda)^2 + \cdots + k^{m-n-1}\lambda^{m-n-1})k\lambda^n b(x_0, x_1)$$

$$b(x_n, x_m) = \left(\frac{1 - k^{m-n}\lambda^{m-n}}{1 - k\lambda}\right) k\lambda^n . b(x_0, x_1)$$

Karena $k < 1$ dan $m > n$

$$b(x_n, x_m) \leq \left(\frac{1}{1 - kh}\right) kh^n . b(x_0, x_1)$$

Karena $k < 1$ dan $h < 1$ jika diambil limit $m, n \to \infty$, maka $h^n \to 0$. Sehingga

$$\lim_{m,n\to\infty} b(x_n, x_m) = 0$$

Karena fungsi T memenuhi Persamaan (4.5), berlaku syarat

$$k\alpha + k\beta + k\gamma + (k^2 + k)\mu < 1$$

$$k\alpha + k\beta + k^2\mu < 1 - \gamma - k\mu$$

$$k(\alpha + \beta + k\mu) < 1 - \gamma - k\mu$$

$$\frac{\alpha + \beta + k\mu}{1 - \gamma - k\mu} < \frac{1}{k}$$

Sehingga diperoleh $0 < \lambda < 1$. Jadi, untuk setiap $\mathcal{E} \in \mathbb{R}, \mathcal{E} > 0$, ada $n(\mathcal{E}) \epsilon\, \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq n(\mathcal{E})$, berlaku $b(x_n, x_m) < \mathcal{E}$. Maka $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy. Karena X adalah ruang *b*-metrik lengkap, maka setiap barisan Cauchy didalamnya adalah barisan konvergen. Maka, barisan $\{x_n\}$ konvergen. Misalkan, barisan $\{x_n\}$ konvergen ke suatu $u \in X$.

Langkah II. Akan ditunjukkan T mempunyai titik tetap

Karena berdasarkan Persamaan (4.5) yang merupakan pemetaan kontraktif dengan $0 < \lambda < 1$, sehingga memenuhi syarat untuk menggunakan lemma (4.1) maka diperoleh bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada ruang *b*-metrik lengkap. Karena ruang *b*-metrik (X, b) lengkap maka barisan $\{x_n\}$ konvergen, misalakan terdapat $u \epsilon\, X$ sedemikian hingga $b(x_n, u) \to 0$ untuk $n \to \infty$. Selanjutnya akan

ditunjukkan bahwa u merupakan titik tetap fungsi T. Diambil sebarang $u, x_n, x_{n+1} \in X$, dengan menggunakan sifat pertaksamaan segitiga *b*-metrik dapat diketahui bahwa

$$b(u,Tu) \leq k[b(u,x_{n+1}) + b(x_{n+1},Tu)]$$
$$= k[b(u,x_{n+1}) + b(x_{n+1},Tu)]$$

Karena T memenuhi persamaan (4.5), maka diperoleh

$$b(u,Tu) \leq k.b(u,x_{n+1}) + k\begin{pmatrix}\alpha.b(x_n,u) + \beta.b(x_n,Tx_n) + \gamma.b(u,Tu)\\ +\mu[b(x_n,Tu) + b((u,Tx_n)]\end{pmatrix}$$

$$\leq k.b(u,x_{n+1}) + k\begin{pmatrix}\alpha.b(x_n,u) + \beta.b(x_n,x_{n+1}) + \gamma.b(u,Tu)\\ +\mu[b(x_n,Tu) + b((u,x_{n+1})]\end{pmatrix}$$

$$\leq k.b(u,x_{n+1}) + k\begin{pmatrix}\alpha.b(x_n,u) + \beta.b(x_n,x_{n+1}) + \gamma.b(u,Tu)\\ +\mu[kb(x_n,u) + kb(u,Tu) + b(u,x_{n+1})]\end{pmatrix}$$

$$\leq k.b(u,x_{n+1}) + k\begin{pmatrix}\alpha.b(x_n,u) + \beta\lambda^n.b(x_0,x_1) + \gamma.b(u,Tu)\\ +\mu[kb(x_n,u) + kb(x_n,Tu) + b(u,x_{n+1})]\end{pmatrix}$$

$$\leq k.b(u,x_{n+1}) + k\alpha.b(x_n,u) + k\beta\lambda^n.b(x_0,x_1) + k\gamma.b(u,Tu)$$
$$+ k^2\mu.b(x_n,u) + k^2\mu.b(x_n,Tu) + k\mu.b(u,x_{n+1})$$

$$\leq \frac{k+k\mu}{(1-k\gamma-k^2\mu)}\ b(u,x_{n+1}) + \frac{k\alpha+k^2\mu}{(1-k\gamma-k^2\mu)}\ b(x_n,u)$$
$$+ \frac{k\beta\lambda^n}{(1-k\gamma-k^2\mu)}\ b(x_0,x_1)$$

Sehingga dengan menggunakan Persamaan (4.5) dan (4.6), akibatnya $n \to \infty$, diperoleh $b(u,Tu) = 0$ akibatnya $Tu = u$. Jadi u titik tetap fungsi T.

Langkah III. Akan ditunjukkan ketunggalan titik tetap fungsi *T*

Andaikan $u, v \in X, u \neq v$ adalah titik tetap fungsi T yang berbeda

$Tu = u, Tv = v$ dan $b(u,v) > 0$. Karena T memenuhi Persamaan (4.5) maka berlaku

$$b(Tu,Tv) \leq \alpha.b(u,v) + \beta.b(u,Tu) + \gamma.b(v,Tv) + \mu[b(u,Tv) + b((v,Tu)]$$

$$\leq \alpha.b(u,v) + \beta.b(u,u) + \gamma.b(v,v) + \mu[b(u,v) + b((v,u)]$$

$$b(u,v) \leq (\alpha + 2\mu)b(u,v)$$

Sehingga diperoleh

$$(1 - (\alpha + 2\mu))\, b(u,v) \leq 0$$

Karena $k\alpha + k\beta + k\gamma + (k^2 + k)\mu < 1$, maka

$$\alpha + 2\mu < k\alpha + k\beta + k\gamma + (k^2 + k)\mu < 1$$

$$b(u,v) = 0$$

Jadi $u = v$, sehingga terjadi kontradiksi. Jadi titik tetap fungsi T adalah tunggal.

Langkah IV Akan ditunjukkan $b(u,v) = 0$

Andaikan $u, v \in X, u \neq v$ adalah titik tetap fungsi T yang berbeda $Tu = u, Tv = v$ dan $b(u,v) = 0$. Karena T memenuhi Persamaan (4.5) maka berlaku

$$b(u,v) = b(Tu,Tv)$$

$$\leq \alpha.b(u,v) + \beta.b(u,Tu) + \gamma.b(v,Tv)$$

$$+ \mu[b(u,Tv) + b((v,Tu)]$$

$$\leq \alpha.b(u,v) + \beta.b(u,u) + \gamma.b(v,v) + \mu[b(u,v) + b((v,u)] = 0$$

Karena $(1 - (\alpha + 2\mu))\, b(u,v) \neq 0$ sedemikian hingga $b(u,v) = 0$ hal ini kontradiksi dengan $u = v$. Maka u adalah ketunggalan titik tetap fungsi T.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan bahwa teorema titik tetap di ruang b-metrik juga dikenal sebagai teorema pemetaan kontraksi. Dalam mencari ketunggalan titik tetap dapat dicari terlebih dahulu kelengkapan ruang b-metrik. Ruang b-metrik dikatakan lengkap apabila barisan Cauchy didalamnya konvergen. Sehingga dapat dibuktikan bahwa teorema titik tetap di ruang b-metrik mempunyai titik tetap tunggal.

Fungsi yang terdefinisi di ruang b-metrik lengkap dan dipetakkan ke dirinya sendiri serta memenuhi pertidaksamaan (4.3), dibentuk barisan Cauchy apabila fungsi tersebut memenuhi pertidaksamaan (4.4), memiliki titik tetap pada fungsi tersebut memenuhi kondisi $b(Tu, u) = 0$ akibatnya $Tu = u$, selanjutnya titik tetap pada fungsi tersebut dijamin ketunggalannya oleh kondisi $b(u, v) = 0$ sehingga terjadi kontradiksi.

Selain itu, ketunggalan titik tetap di ruang b-metrik masih berlaku dengan mengubah fungsi variabel pada pertidaksamaan (4.5), dengan cara yang sama dibentuk barisan Cauchy apabila fungsi tersebut memenuhi pertidaksamaan (4.6), memiliki titik tetap pada fungsi tersebut memenuhi kondisi $b(u, Tu) = 0$ akibatnya $Tu = u$, selanjutnya titik tetap pada fungsi tersebut dijamin ketunggalannya oleh kondisi $b(u, v) = 0$ sehingga terjadi kontradiksi.

5.2 Saran

Skripsi ini diharapkan dapat menjadi sarana pembelajaran serta referensi

bagi para pembaca mengenai ketunggalan titik tetap di ruang b-metrik. Skripsi ini terbatas pada seputar ketunggalan titik tetap di ruang b-metrik. Pada penelitian berikutnya diharapkan dapat dikembangkan dengan menggunakan Ketunggalan Titik Tetap di Ruang G-Metrik.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Qur'an dan Terjemahannya. (2019). Kementrian Agama RI.

Jurnal/Artikel:

Andy B. Afif Budi., Naimah Aris, dan Budi Nurwahyu. 2020. Eksistensi Dan Ketunggalan Titik Tetap pada Pemetaan Kontraksi Tergeneralisasi dalam Ruang b-Metrik. *Jurnal Matematika Statistika dan Komputasi 16(2):208*

Jain, Rashmi.,.D. Daheriya, and Manoj Ughade. 2016. Fixed Point, Coincidence Point and Common Fixed Point Theorems under Various Expansive Conditions in b-Metric Spaces. *International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR) Volume 3, Issue 9, September 2016, PP 26-34.*

Kir, Mehmet and Hükmi Kiziltunc. 2017. On Some Well Known Fixed Point Theorems in b-Metric Spaces. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2017, Vol. 1, No. 1, 13-16*

Obeng-Denteh, William, Ayekple, Yao Elikem ,Quansah, Amissah Mavis, Zigili, and David Delali. 2016. On the Construction of Special Metrics Involving Levenshtein And Hamming Distances. *European Journal of Academic Essays 1(7): 59-62, 2016.*

Sarwarand, Muhammad., and Mujeeb Ur Rahman. 2015. Fixed Point Theorems For Ciric's And Generalized Contractions In B-Metric Spaces. *International Journal of Analysis and Applications, ISSN 2291-8639, Volume 7, Number 1 (2015), 70-78.*

Shatanawi, Wasfi., Kamaleldin Abodayeh, and Aiman Mukheimer. 2018. Some Fixed Point Theorems In Extended B-Metric Spaces. *U.P.B. Sci. Bull., Series A, Vol. 80, Iss. 4, 2018*

Tiwari, Neha., Piyush Kumar Tripahti., and Mukesh Kumar Singh. 2020. Coincidence and Fixed Point in b-Metric Space. *International Journal of Advanced Science and Technology Vol. 29, No.02, (2020), pp. 1121-1124.*

Buku:

Ampadu, Clement. 2016. *Some Iterative Schemes for Higher-Order Mappings*. Alle Rechte vorbehalten - Standard-Urheberrechtslizenz.

Fulga, Andreea and Erdal Karapinar. 2020. *Recent Advances on Quasi-Metric Spaces*. Taiwan: Mdpi AG.

Ruzhansky, Michael., Hemen Dutta, Ravi P. Agarwal. 2018. *Mathematical Analysis and Applications*. USA: John Wiley & Sons.

Skipsi:

Listiawati, Sinta. 2017. Teorema Ketunggalan Titik Tetap Di Ruang Metrik-B Lengkap. *Jurusan Matematika, Fakultas Sains Dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.*

Nikmah, Nurul Hidayatun. 2017. Ketunggalan Titik Tetap Di Ruang Metrik $-S$ Lengkap Dan Sifat Kekontinuan Di Titik Tetapnya. *Jurusan Matematika, Fakultas Sains Dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.*

RIWAYAT HIDUP

Mutmainnah, lahir di Dasan Busur, 22 Juli 1999. Putri kedua dari Bapak Sukur dan Ibu Sugiah. Perempuan dengan sapaan Inna ini telah menempuh pendidikan dasar di SDN 3 Rumbuk sehingga lulus pada tahun 2012, dilanjutkan dengan pendidikan formalnya ke jenjang menengah pertama di MTs NW Rumbuk dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya menempuh pendidikan di MAN 1 Lombok Timur dan lulus pada tahun 2018. Setelah menempuh jenjang sekolah menengah akhir, ia melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam masa pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang perempuan ini menerima beasiswa Bank Indonesia (BI) Malang. Selama menjadi penerima beasiswa Bank Indonesia (BI) Malang, perempuan ini menjadi anggota Devisi Kesehatan Bank Indonesia (BI) Malang, serta berperan aktif dalam berbagai acara yang diadakan oleh Bank Indonesia (BI) Malang.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Mutmainnah
NIM : 18610007
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Ketunggalan Titik Tetap di Ruang *b*-Metrik
Pembimbing I : Dr. Elly Susanti, M.Sc
Pembimbing II : M. Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	16 SEPTEMBER 2022	KONSULTASI BAB 1	1.
2.	19 SEPTEMBER 2022	KONSULTASI BAB 1	2.
3.	19 SEPTEMBER 2022	KONSULTASI BAB 1	3.
4.	23 SEPTEMBER 2022	KONSULTASI BAB 1	4.
5.	13 OKTOBER 2022	KONSULTASI BAB 2	5.
6.	15 OKTOBER 2022	KONSULTASI BAB 2	6.
7.	20 OKTOBER 2022	REVISI BAB 2	7.
8.	21 OKTOBER 2022	KONSULTASI BAB 2	8.
9.	29 OKTOBER 2022	KONSULTASI BAB 3	9.
10.	3 NOVEMBER 2022	REVISI BAB 3	10.
11.	5 JANUARI 2023	KONSULTASI KAJIAN AGAMA	11.
12.	21 JANUARI 2023	KONSULTASI BAB 4	12.
13.	28 JANUARI 2023	KONSULTASI BAB 4	13.
14.	23 FEBRUARI 2023	KONSULTASI BAB 4,5	14.
15.	21 MARET 2023	KONSULTASI KAJIAN AGAMA	15.
16.	24 MARET 2023	KONSULTASI BAB 4,5	16.
17.	25 MARET 2023	KONSULTASI KAJIAN AGAMA	17.

Malang, 30 Maret 2023
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP.197411292000122005