HUKUM-HUKUM LOGIKA KLASIK YANG BERLAKU PADA LOGIKA FUZZY (ZADEH DAN KLIR-YUAN)

SKRIPSI

OLEH :

JUMIYATI

NIM: 03510038

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG

MALANG

2007

HUKUM-HUKUM LOGIKA KLASIK YANG BERLAKU PADA LOGIKA FUZZY (ZADEH DAN KLIR-YUAN)

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S. Si)

Oleh :
JUMIYATI
NIM : 03510038

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2007

HALAMAN PERSETUJUAN

HUKUM-HUKUM LOGIKA KLASIK YANG BERLAKU PADA LOGIKA FUZZY (ZADEH DAN KLIR-YUAN)

SKRIPSI

Oleh :

JUMIYATI
NIM: 03510038

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji

Tanggal :

Dosen Pembimbing Matematika	Dosen Pembimbing Keagamaan
Evawati Alisah, M. Pd	Achmad Nasichuddin. M. Ag
NIP. 150 291 271	NIP. 150 302 351

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

HALAMAN PENGESAHAN

HUKUM-HUKUM LOGIKA KLASIK YANG BERLAKU PADA LOGIKA FUZZY (ZADEH DAN KLIR-YUAN)

SKRIPSI

Oleh :
JUMIYATI
NIM: 03510038

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, ………..

SUSUNAN DEWAN PENGUJI			TANDA TANGAN
1.	Abdussakir, M. Pd NIP. 150 327 247	(Ketua Penguji)	1
2.	Drs.H. Turmudzi, M. Si NIP. 150 209 630	(Penguji Utama)	2
3.	Evawati Alisah, M. Pd NIP. 150 291 271	(Sekretaris)	3
4.	Ach. Nasichuddin, M. Ag NIP. 150 302 351	(Anggota)	4

Mengetahui dan Mengesahkan
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc
NIP. 130 809 123

HALAMAN MOTTO

إِن اللهَ لايغَير ماِبِقَومٍ حتى يغَيروا ماِبِأَنْفُسِهِم (الرعد١٣: ١١)

Artinya: “Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri.” (Ar-Ra’d 13: 11)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Kupersembahkan karya ini untuk :

Allah SWT yang dengan kasih sayangnya telah

mengantarkanku merasakan nikmatnya bangku kuliah

untuk menimba ilmu.

Nabi muhammad saw yang telah membawa penerangan

sehingga aku sebagai salah satu umatmu merasakan

bagaimana arti hidup dengan memiliki ilmu.

Kedua Orang Tuaku yang telah mengasuh dan mendidikku

dengan segenap kesabaran, pengorbanan, dan kerja keras

demi terwujudnya cita-cita anaknya.

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Puji syukur ke hadirat Allah SWT, atas limpahan rahmat, taufiq, dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul **"Hukum-hukum Logika Klasik yang Berlaku pada Logika Fuzzy (Zadeh dan Klir-Yuan)".**

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu iringan do'a dan ucapan terima kasih yang tak terhingga penulis sampaikan, utamanya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D. Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Sri Harini, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku Dosen Pembimbing, karena atas bimbingan, bantuan, dan kesabarannya sehingga penulisan skripsi ini dapat di selesaikan.
5. Ach. Nasichuddin, M.Ag, selaku Dosen Pembimbing Agama yang telah memberikan bimbingan kepada penulis hingga terselesaikannya skripsi ini.
6. Kedua orang tuaku tercinta dan adikku serta seluruh keluarga yang dengan sepenuh hati memberikan dukungn moril maupun spiritual serta ketulusan do'anya sehingga penulisan skripsi ini dapat diselesaikan.

7. Semua Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang beserta stafnya atas ilmu dan pengalaman yang diberikan.
8. Teman-teman Matematika angkatan 2003 yang telah mewarnai hari-hariku dan selalu memberikan keceriaan selama kuliah di UIN Malang.
9. Semua pihak yang telah berjasa dalam membantu penyusunan skripsi ini.

Akhirnya, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah khazanah ilmu pengetahuan, Amin.

Malang, 5 Oktober 2007

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\forall$: Untuk setiap

$\in$: Unsur suatu himpunan

$\notin$: Bukan unsur suatu himpunan

$\neq$: Tidak sama dengan

ϕ : Himpunan kosong

$\subseteq$: Himpunan bagian (subset)

$\cup$: Gabungan dua himpunan

$\cap$: Irisan dua himpunan

$\wedge$: Dan (konjungsi)

$\vee$: Atau (disjungsi)

$\neg$: Tidak (negasi)

$\rightarrow$: Jika…maka…(implikasi)

$\leftrightarrow$: Jika dan hanya jika (biimplikasi)

$\equiv$: Ekivalen (setara)

i : Irisan fuzzy

u : Gabungan fuzzy

c : Komplemen fuzzy

J : Implikasi fuzzy

$t(p)$: Nilai kebenaran proposisi p

$c(t(p))$: Komplemen dari nilai kebenaran proposisi p

ABSTRAK

Jumiyati. 2007. **Hukum-hukum Logika Klasik yang Berlaku pada Logika Fuzzy (Zadeh dan Klir-Yuan)**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.
Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd.,(II) Ach. Nasichuddin, M.Ag.

Kata kunci: logika klasik, himpunan fuzzy, logika fuzzy

Dibandingkan logika klasik, logika fuzzy memiliki nilai kebenaran lebih bervariasi. Nilai kebenaran logika klasik yaitu 0 **atau** 1 sedangkan nilai kebenaran logika fuzzy 0 **sampai** 1.

Logika fuzzy Zadeh adalah logika fuzzy yang berkorespondensi dengan himpunan fuzzy yang menggunakan operasi komplemen fuzzy standar, irisan fuzzy standar, dan gabungan fuzzy standar. Implikasi yang digunakan pada logika fuzzy Zadeh adalah implikasi Zadeh. Logika fuzzy Klir-Yuan adalah logika fuzzy yang berkorespondensi dengan himpunan fuzzy yang menggunakan operasi komplemen fuzzy standar, perkalian aljabar sebagai fungsi irisan fuzzy, penjumlahan aljabar sebagai fungsi gabungan fuzzy, serta implikasi Klir –Yuan.

Pembahasan ini bertujuan untuk mendeskripsikan dan mengetahui hukum-hukum logika klasik yang berlaku pada logika fuzzy Zadeh dan Klir-Yuan. Hasil yang diperoleh dari pembahasan ini yaitu hukum negasi rangkap, hukum komutatif, hukum asosiatif, hukum De Morgan berlaku pada logika fuzzy Zadeh dan Klir-Yuan; hukum distributif, hukum idempoten, hukum absorpsi, hukum $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$, hukum $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ hanya berlaku pada logika fuzzy Zadeh; hukum $p \to q \equiv \neg p \vee q$, hukum kontraposisi, hukum $p \to q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$, hukum $p \to q \equiv (p \wedge \neg q) \to p$, hukum kontradiksi, hukum penyisihan jalan tengah tidak berlaku pada logika fuzzy Zadeh dan Klir-Yuan.

Berdasarkan pembahasan tersebut, diharapkan dapat membuat pembuktian secara aksiomatik dengan parameter-parameter lainnya, karena logika fuzzy merupakan pengembangan baru dari logika yang banyak ditafsirkan para ahli yang memiliki berbagai macam logika fuzzy.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan peradaban manusia tidak lepas dari ilmu-ilmu dasar sebagai basis logika barfikir. Matematika sebagai salah satu ilmu dasar, dewasa ini sangat berkembang pesat baik materi maupun kegunaanya. Dalam kehidupan sehari-hari banyak masalah yang harus dihadapi oleh setiap orang untuk mempertahankan dan memperbaiki kehidupannya. Tetapi tidak banyak yang menyadari di balik teknologi yang menghemat tenaga, sumber daya dan pikiran terlebih dahulu digunakan pemikiran-pemikiran matematika..

Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Dalam bahasa matematika suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan.

Logika merupakan cabang ilmu matematika yang sangat penting. Para ahli memberikan berbagai macam pengertian tentang logika. Menurut Soekadijo (1988:3) logika sebagai istilah berarti suatu metode atau teknik yang diciptakan untuk meneliti ketepatan penalaran. Penalaran sendiri adalah suatu bentuk pemikiran. Sedangkan menurut Kusumah (1986:1) penalaran merupakan penjelasan dalam upaya memperlihatkan hubungan antara dua hal atau lebih berdasarkan sifat-sifat atau hukum-hukum tertentu yang sudah diakui kebenarannya dengan langkah-langkah tertentu yang berakhir dengan sebuah kesimpulan. Menurut Klir -Yuan (1995:212) logika adalah suatu studi tentang metode-meode dan prinsip-prinsip penalaran. Menurut Frans Susilo (2006:15) logika adalah ilmu yang mempelajari secara sistematis kaidah-kaidah penalaran yang absah (valid). Meskipun terdapat berbagai macam pengertian tentang logika tetapi semuanya memiliki inti yang sama yaitu tentang proses bernalar.

Unsur yang paling mendasar dalam logika adalah proposisi. Sedangkan nilai kebenaran proposisi dalam logika klasik adalah benar (B) atau salah (S). Nilai kebenaran B dalam penerapannya dinyatakan dengan bilangan 1 sedangkan nilai kebenaran S dinyatakan dengan 0.

Logika adalah salah satu ilmu matematika yang sangat penting dan di perluas sebagai logika fuzzy. Logika fuzzy dikatakan sebagai logika baru yang lama, sebab ilmu tentang logika fuzzy modern dan metodis baru ditemukan beberapa tahun yang lalu, padahal sebenarnya konsep tentang logika fuzzy itu sendiri sudah ada sejak lama. Logika fuzzy adalah suatu cara yang tepat untuk memetakan suatu ruang input ke dalam suatu ruang output (Kusumadewi dan Purnomo, 2004: 1). Sedangkan aplikasi logika fuzzy sudah mulai dirasakan dalam beberapa bidang. Salah satu aplikasi terpentingnya adalah untuk membantu manusia dalam melakukan pengambilan keputusan. Aplikasi logika fuzzy untuk pendukung keputusan ini semakin diperlukan tatkala semakin banyak kondisi yang menuntut adanya keputusan yang tidak hanya bisa dijawab dengan “ya” atau “tidak”, “benar” atau “salah” tetapi juga ada separoh “ya” separoh “tidak” atau separoh “benar” separoh “salah”.

Dalam logika fuzzy tidak terlepas dari derajat keanggotaan. Derajat keanggotaan adalah suatu kurva yang menunjukkan pemetaan titik-titik input data ke dalam nilai keanggotaannya yang memiliki interval antara 0 sampai 1. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk mendapatkan nilai keanggotaan adalah pendekatan fungsi (Kusumadewi dan Purnomo, 2004: 8).

Logika fuzzy ada beberapa macam di antaranya Logika fuzzy Zadeh dan logika fuzzy Klir-Yuan. Logika fuzzy Zadeh adalah logika fuzzy yang berkorespondensi dengan himpunan fuzzy yang menggunakan operasi komplemen fuzzy standar sebagai fungsi komplemen fuzzy, irisan fuzzy standar sebagai fungsi irisan fuzzy, dan gabungan fuzzy standar sebagai fungsi gabungan fuzzy. Implikasi yang digunakan pada logika fuzzy Zadeh adalah implikasi Zadeh. Penggunaan istilah logika fuzzy Zadeh pada logika fuzzy ini sesuai dengan nama implikasi yang digunakan yaitu implikasi Zadeh. Implikasi Zadeh diperkenalkan oleh Lotfi A. Zadeh, seorang guru besar pada Fakultas Teknik Universitas California di Berkeley, matematikawan yang pertama kali memperkenalkan himpunan fuzzy dan logika fuzzy pada tahun 1965. Logika fuzzy Klir-Yuan adalah logika fuzzy yang berkorespondensi dengan himpunan fuzzy yang menggunakan operasi komplemen fuzzy standar sebagai fungsi komplemen fuzzy, perkalian aljabar sebagai fungsi irisan fuzzy, penjumlahan aljabar sebagai fungsi gabungan fuzzy, serta implikasi Klir –Yuan (Klir & Yuan,1995:307-309).

Logika klasik memiliki hukum-hukum antara lain hukum negasi rangkap, hukum komutatif, hukum asosiatif, hukum distributif, hukum idempoten, hukum absorpsi, hukum De Morgan, hukum kontraposisi, hukum kontradiksi, hukum penyisihan jalan tengah. Dalam skripsi ini, membahas pembuktian mengenai berlaku dan tidak berlakunya hukum-hukum tersebut pada logika fuzzy Zadeh dan logika fuzzy Klir-Yuan.

Logika fuzzy merupakan pengembangan dari logika klasik. Pengembangan ini dapat dilakukan salah satunya melalui proses berfikir. Dalam al-Qur’an manusia diperintahkan untuk berfikir sebagaimana dalam firman-Nya dalam surat Al-Imron ayat 190-191.

إِنَّ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ لَءَايَٰتٍ لِّأُو۟لِى ٱلْأَلْبَٰبِ
﴿١٩٠﴾ ٱلَّذِينَ يَذْكُرُونَ ٱللَّهَ قِيَٰمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِى خَلْقِ
ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَٰذَا بَٰطِلًا سُبْحَٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ ٱلنَّارِ ﴿١٩١﴾

Artinya : ”*Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan Ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, Maka peliharalah kami dari siksa neraka.*”

Ayat ini menunjukkan bahwa Allah memerintahkan manusia menggunakan akal pikiran untuk berfikir tentang alam semesta. Alam semesta ini tidak diciptakan dengan sia-sia, namun diciptakan karena suatu hikmah yang dapat ditangkap oleh kaum Ulul Albab.

Maka berdasarkan uraian tersebut penulis mengambil judul ”**Hukum-hukum Logika Klasik yang Berlaku pada Logika Fuzzy (Zadeh dan Klir-Yuan)**”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Hukum-hukum logika klasik apa saja yang berlaku pada logika fuzzy Zadeh ?
2. Hukum-hukum logika klasik apa saja yang berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan ?

1.3 Tujuan Penulisan

Adapun penulisan skripsi ini bertujuan untuk :

1. Untuk mendeskripsikan dan mengetahui hukum-hukum logika klasik yang berlaku pada logika fuzzy Zadeh.
2. Untuk mendeskripsikan dan mengetahui hukum-hukum logika klasik yang berlaku pada logika fuzzy Klir –Yuan.

1.4 Batasan Masalah

Adapun penulisan skripsi ini dibatasi pada:

1. Operasi yang digunakan dalam penulisan ini adalah komplemen fuzzy standar, operasi irisan fuzzy standar, operasi gabungan fuzzy standar, operasi perkalian aljabar, operasi penjumlahan aljabar.
2. Logika fuzzy yang digunakan logika fuzzy Zadeh dan logika fuzzy Klir-Yuan.

1.5 Metode Penelitian

1. **Pendekatan dan Jenis Penelitian**

Jenis penelitian ini adalah deskriptif kualitatif, yaitu pencarian fakta dengan interpretasi tepat untuk membuat gambaran atau lukisan secara sistematis, faktual, dan akurat mengenai fakta-fakta, sifat-sifat, serta hubungan antar fenomena yang diselidiki. Dengan demikian, pendekatan yang digunakan adalah pendekatan kualitatif dengan metode kepustakaan.

2. **Bahan Kajian**

Data yang diperlukan dalam penyusunan skripsi ini adalah data mengenai operasi himpunan fuzzy, hukum-hukum logika klasik, logika fuzzy Zadeh dan logika fuzzy Klir-Yuan serta data-data tambahan yang mendukung penelitian ini. Sumber data dalam skripsi ini penulis menggunakan literatur, sebagai literatur utamanya penulis menggunakan buku himpunan dan logika kabur serta aplikasinya yang ditulis oleh Frans Susilo (2006). Sedangkan sebagai literatur pendukung diantaranya aplikasi logika fuzzy untuk pendukung keputusan yang ditulis oleh Sri Kusumadewi dan Hari Purnomo (2004), fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications yang ditulis oleh Klir- Yuan (1995), dan buku-buku atau sumber lain yang berhubungan dengan penulisan ini.

3. **Teknik Kajian**

Dalam penulisan skripsi ini penulis menggunakan kajian literatur yaitu kajian yang menggunakan metode penelitian perpustakaan (*Library research*), yaitu penelitian yang dilakukan di dalam perpustakaan dengan tujuan mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam material yang terdapat di ruang perpustakaan seperti, buku-buku, majalah, catatan, dokumen dan sebagainya .(Mardalis, 1989:28)

4. Analisis Hasil

Dalam menganalisis data, penulis membuktikan secara langsung hukum-hukum logika klasik yang berlaku dan tidak berlaku pada logika fuzzy Zadeh dan logika fuzzy Klir-Yuan. Hasil penbahasan ini kemudian dikomunikasikan dengan dosen matematika khususnya dosen pembimbing.

1.6 Manfaat Penulisan

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat bermanfaat terutama bagi**:**

1. Penulis

   Untuk memperdalam pengetahuan penulis dalam bidang logika fuzzy serta menambah wawasan dan pengetahuan tentang logika fuzzy .

2. Pembaca

   Dapat dijadikan sebagai bahan referensi pendalaman ilmu mata kuliah khususnya dalam logika fuzzy dan menambah pengetahuan dalam bidang matematika .

3. Lembaga

   Hasil penulisan skripsi ini diharapkan dapat menambah bahan kepustakaan di lembaga khususnya di fakultas Saintek UIN Malang sehingga dapat dijadikan sebagai sarana pengembangan wawasan keilmuan terutama bidang matematika.

1.7 Sistematika Pembahasan

Dalam penulisan skripsi ini digunakan sistematika pembahasan yeng terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, metode penelitian, manfaat penulisan dan sistematika pembahasan.

BAB II KAJIAN TEORI

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang himpunan fuzzy, operasi-operasi himpunan fuzzy, logika fuzzy, operasi-operasi logika fuzzy, macam-macam logika fuzzy, logika klasik, operasi-operasi logika klasik, hukum pada logika klasik, Perintah Allah untuk berfikir.

BAB III PEMBAHASAN

Pada pembahasan ini membahas pembuktian tentang berlaku atau tidak berlakunya hukum-hukum logika klasik pada logika fuzzy Zadeh dan logika fuzzy Klir –Yuan.

BAB IV PENUTUP

Merupakan bab terakhir di skripsi ini yang berisi kesimpulan dan saran

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Himpunan Fuzzy

2.1.1 Definisi Himpunan Fuzzy

Secara matematis suatu himpunan fuzzy A dalam semesta wacana X dapat dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$$

di mana μ_A adalah fungsi keanggotaan dari himpunan fuzzy A, yang merupakan suatu pemetaan dari himpunan semesta X ke selang tertutup $[0,1]$. Apabila semesta X adalah himpunan yang kontinu, maka himpunan fuzzy A dinyatakan dengan

$$A = \int_{x \in X} \mu_A(x) | x$$

di mana lambang $\int$ di sini bukan lambang integral seperti yang dikenal dalam kalkulus, tetapi melambangkan keseluruhan unsur-unsur $x \in X$ bersama dengan derajat keanggotaanya dalam himpunan fuzzy A. Apabila semesta X adalah himpunan yang diskrit, maka himpunan fuzzy A dinyatakan dengan

$$A = \sum_{x \in X} \mu_A(x) | x$$

di mana lambang $\sum$ di sini tidak melambangkan operasi penjumlahan seperti yang dikenal dalam aritmatika, tetapi melambangkan keseluruhan unsur-unsur

$x \in X$ bersama dengan derajat keanggotaannya dalam himpunan fuzzy A (Susilo,2006: 51).

Pada himpunan fuzzy nilai keanggotaan terletak pada rentang 0 sampai 1. Apabila x memiliki nilai keanggotaan fuzzy $\mu_A[x] = 0$ berarti x tidak menjadi anggota himpunan A, demikian pula apabila x memiliki nilai keanggotaan fuzzy $\mu_A[x] = 1$ berarti x menjadi anggota penuh pada himpunan A (Kusumadewi dan Purnomo, 2004: 6).

2.1.2 Notasi-notasi Himpunan Fuzzy

Himpunan fuzzy memiliki 2 atribut, yaitu:

a) *Linguistic*, yaitu penamaan suatu grup yang mewakili suatu keadaan atau kondisi tertentu dengan menggunakan bahasa alami, seperti: MUDA, PAROBAYA, TUA, PANAS, DINGIN.

b) *Numeris*, yaitu suatu nilai (angka) yang menunjukkan ukuran dari suatu variabel seperti: 40,25,50, dan sebagainya..

Ada beberapa hal yang perlu diketahui dalam memahami sistem fuzzy, yaitu:

a) *Variabel fuzzy*, merupakan variabel yang hendak di bahas dalam suatu sistem fuzzy. Contohnya: umur, temperatur, permintaan, dsb.

b) *Himpunan fuzzy*, merupakan suatu grup yang mewakili suatu kondisi atau keadaan tertentu dalam suatu variabel fuzzy.

Contoh:

Variabel umur, terbagi menjadi 3 himpunan fuzzy, yaitu: MUDA, PAROBAYA, dan TUA.

c) *Semesta pembicaraan*, adalah keseluruhan nilai yang diperbolehkan untuk dioperasikan dalam suatu variabel fuzzy. Semesta pembicaraan merupakan himpunan bilangan real yang senantiasa naik (bertambah) secara monoton dari kiri ke kanan. Nilai semesta pembicaraan dapat berupa bilangan positif maupun negatif. Adakalanya nilai semesta pembicaraan ini tidak dibatasi batas atasnya.

Contoh:

1) Semesta pembicaraan untuk variabel umur: $[0 \ +\infty]$

   (berada pada *range* 0 sampai dengan tak terhingga)

2) Semesta pembicaraan untuk variabel temperatur: [0 40]

   (berada pada *range* 0'C sampai dengan 40'C)

d) *Domain himpunan fuzzy*, adalah keseluruhan nilai yang diijinkan dalam semesta pembicaraan dan boleh dioperasikan dalam suatu himpunan fuzzy. Seperti halnya semesta pembicaraan, domain merupakan himpunan bilangan real yang senantiasa naik (bertambah) secara monoton dari kiri ke kanan. Nilai domain dapat berupa bilangan positif maupun negatif.

Contoh domain himpunan fuzzy:

1) MUDA = [0, 45]

2) PAROBAYA = [35, 55]

3) TUA = [45, $+\infty$]

2.2 Fungsi Keanggotaan

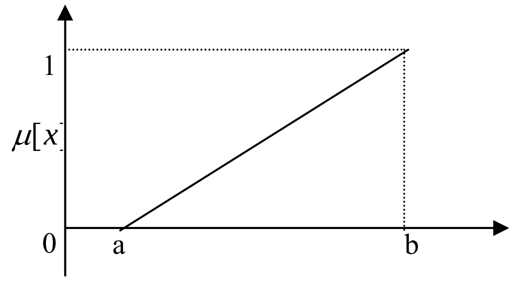
Fungsi keanggotaan *(membership function)* adalah suatu kurva yang menunjukkan pemetaan titik-titik input data ke dalam nilai keanggotaannya (sering juga disebut dengan derajat keanggotaan) yang memiliki interval antara 0 sampai 1.

Salah satu cara yang dapat digunakan untuk mendapatkan nilai keanggotaan adalah dengan melalui pendekatan fungsi. Ada beberapa fungsi yang bisa digunakan yaitu (Kusumadewi dan Purnomo, 2004:8):

1. **Representasi Linier**

   Pada representasi linear, pemetaan input ke derajat keanggotaannya digambarkan sebagai suatu garis lurus. Bentuk ini paling sederhana dan menjadi pilihan yang baik untuk mendekati suatu konsep yang kurang jelas.

   Ada dua keadaan himpunan fuzzy yang linier. *Pertama*, kenaikan himpunan dimulai pada nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan 0 bergerak ke kanan menuju ke nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan lebih tinggi.

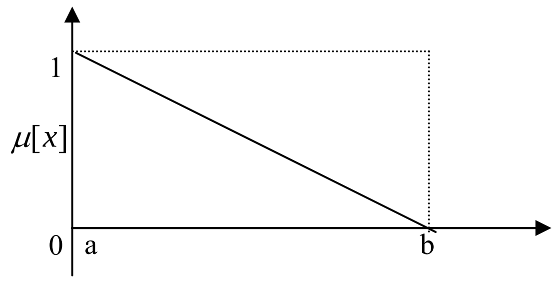


Gambar 1 Representasi Linier Naik

Fungsi Keanggotaannya:

$$\mu[x] = \begin{cases} 0; & x \le a \\ (x-a)/(b-a); & a \le x \le b \\ 1; & x \ge b \end{cases}$$

Kedua, merupakan kebalikan yang pertama. Garis lurus dimulai dari nilai domain dengan derajat keanggotaan tertinggi pada sisi kiri, kemudian bergerak menurun ke nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan lebih rendah.



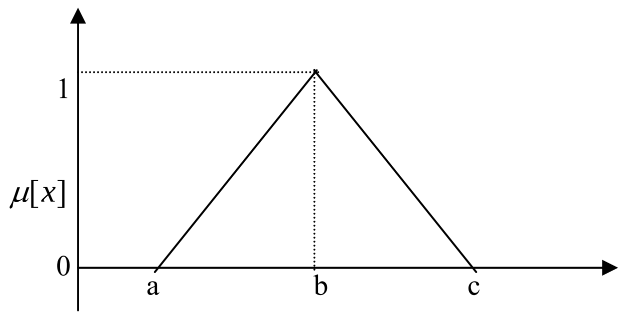
Gambar 2 Representasi Linier Turun

Fungsi Keanggotaannya:

$$\mu[x]=\begin{cases}(b-x)/(b-a); & a \le x \le b \\ 0; & x \ge b\end{cases}$$

2. Representasi Kurva Segitiga

Kurva segitiga pada dasarnya merupakan gabungan antara 2 garis (linear) serta ditandai oleh adanya tiga parameter {a, b, c} yang akan menentukan koordinat x dari tiga sudut.



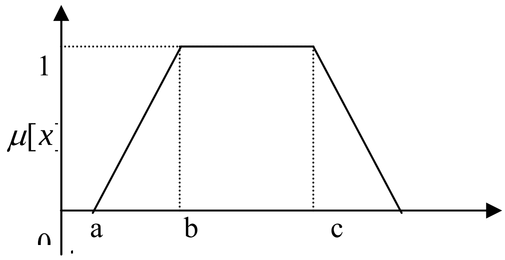
Gambar 3 Kurva Segitiga

Fungsi Keanggotaannya :

$$\mu[x]=\begin{cases}0; & x \le a \text{ atau } x \le c \\ (x-a)/(b-a); & a \le x \le b \\ (c-x)/(c-b); & b \le x \le c\end{cases}$$

3. Representasi Kurva Trapesium

Kurva Trapesium pada dasarnya seperti bentuk segitiga, tetapi ada beberapa titik yang memiliki nilai keanggotaan 1.



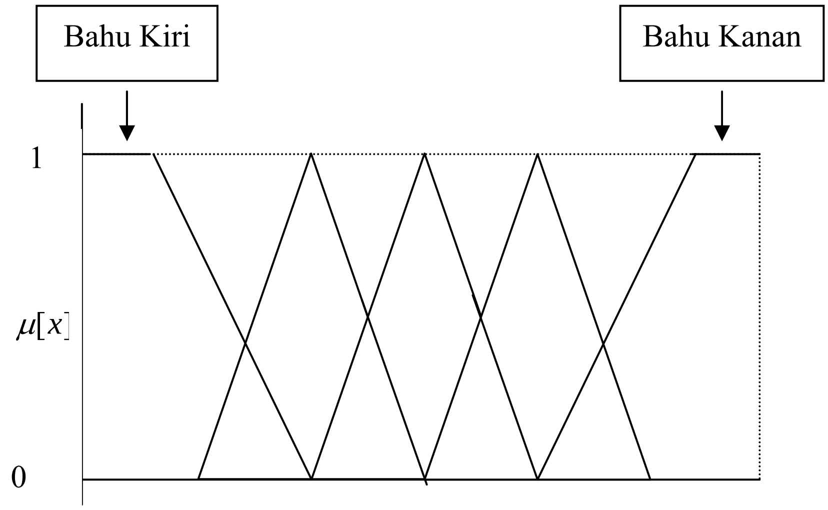
Gambar 4 Kurva Trapesium

Fungsi Keanggotaannya:

$$\mu[x] = \begin{cases} 0; & x \leq a \text{ atau } x \geq d \\ (x-a)/(b-a) & a \leq x \leq b \\ 1; & b \leq x \leq c \\ (d-x)/(d-c) & c \leq x \leq d \end{cases}$$

4. Representasi Kurva Bentuk Bahu

Suatu kurva yang daerahnya terletak di tengah-tengah suatu variabel yang direpresentasikan dalam bentuk segitiga, pada sisi kanan dan kirinya merupakan kurva naik dan turun. Himpunan fuzzy ’bahu’ bukan segitiga, digunakan untuk mengakhiri variabel suatu daerah fuzzy. Bahu kiri bergerak dari benar ke salah dan bahu kanan bergerak dari salah ke benar.



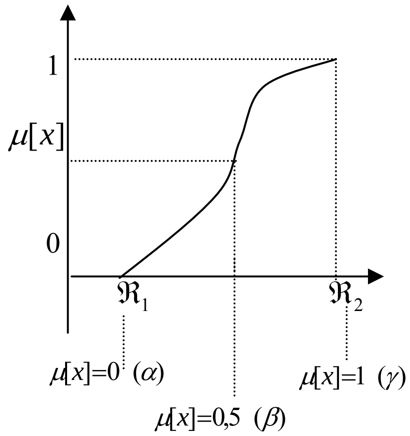
Gambar 5 Kurva Bentuk Bahu

Fungsi keanggotaan:

a) Bahu kiri menggunakan fungsi keanggotaan representasi linear turun
b) Bahu kanan menggunakan fungsi keanggotaan representasi linear naik

5. Representasi Kurva-S

Kurva PERTUMBUHAN dan PENYUSUTAN merupakan kurva-S atau *sigmoid* yang berhubungan dengan kenaikan dan penurunan permukaan secara tak linear. Kurva-S didefinisikan dengan menggunakan tiga parameter, yaitu: nilai keanggotaan nol (α), nilai keanggotaan lengkap (γ), dan titik infleksi atau crossover (β) yaitu titik yang memiliki domain 50% benar.



Gambar 6 Karakteristik fungsi kurva-S

Fungsi keanggotaan pada kurva PERTUMBUHAN adalah:

$$S(x;\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases} 0; & x \le \alpha \\ 2((x-\alpha)/(\gamma-\alpha))^2; & \alpha \le x \le \beta \\ 1-2((\gamma-x)/(\gamma-\alpha))^2; & \beta \le x \le \gamma \\ 1; & x \ge \gamma \end{cases}$$

Fungsi keanggotaan pada kurva PENYUSUTAN adalah:

$$S(x;\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} 1; & x \le \alpha \\ 1-2((x-\alpha)/(\gamma-\alpha))^2; & \alpha \le x \le \beta \\ 2((\gamma-x)/(\gamma-\alpha))^2; & \beta \le x \le \gamma \\ 0; & x \ge \gamma \end{cases}$$

6. Representasi Kurva Bentuk Lonceng (bell curve)

Untuk mempresentasikan bilangan fuzzy, biasanya digunakan kurva berbentuk lonceng. Kurva berbentuk lonceng ini terbagi atas 3 kelas, yaitu: himpunan fuzzy phi, beta, dan gauss. Perbedaan kurva ini terletak pada gradiennya.

a) Kurva Phi (π)

Kurva π berbentuk lonceng dengan derajat keanggotaan 1 terletak pada pusat dengan domain (γ), dan lebar kurva (β).

Fungsi keanggotaan:

$$\Pi(x,\beta,\gamma)=\begin{cases} S\left(x;\gamma-\beta,\gamma-\dfrac{\beta}{2},\gamma\right) & \rightarrow \quad x\le\gamma \\ 1-S\left(x;\gamma,\gamma+\dfrac{\beta}{2},\gamma+\beta\right) & \rightarrow \quad x>\gamma \end{cases}$$

b) Kurva Beta (β)

Kurva beta(β) berbentuk lonceng namun lebih rapat. Kurva ini juga didefinisikan dengan 2 parameter, yaitu nilai pada domain yang menunjukkan pusat kurva (γ), dan setengah lebar kurva (β).

Fungsi keanggotaan:

$$B(x:\gamma,\beta)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x-\gamma}{\beta}\right)^2}$$

c) Kurva Gauss (γ)

Jika kurva phi (π) dan kurva(β) menggunakan 2 parameter yaitu (γ) dan (β), Kurva gauss menggunakan (γ) untuk menunjukkan nilai domain pada pusat kurva, dan (k) yang menunjukkan lebar kurva.

Fungsi keanggotaan:

$$G(x:k,\gamma)=e^{-k(\gamma-x)^2}$$

2.3 Koordinat Keanggotaan

Himpunan fuzzy berisi urutan pasangan berurutan yang berisi nilai domain dan kebenaran nilai keanggotaannya dalam bentuk:

Scalar (i) / Derajat (i)

'Skalar' adalah suatu nilai yang digambar dari domain himpunan fuzzy, sedangkan 'Derajat' scalar merupakan derajat keanggotaan himpunan fuzzynya.

2.4 Operasi-operasi Himpunan Fuzzy

a. Komplemen himpunan fuzzy

Misal A himpunan fuzzy pada himpunan semesta X dengan fungsi keanggotaan μ_A. Komplemen dari A adalah himpunan fuzzy $\overline{A}$ di X dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\overline{A}}$ dengan

$$\mu_{\overline{A}}(x) = c(\mu_A(x)), \forall x \in X$$

c adalah fungsi komplemen fuzzy, $c:[0,1] \to [0,1]$. Fungsi komplemen ada beberapa jenis antara lain:

Komplemen fuzzy standar: $c(\mu_A(x)) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X$

Komplemen fuzzy sugeno: $c_\lambda(\mu_A(x)) = \dfrac{1-\mu_A(x)}{1+\lambda\mu_A(x)}, \lambda \in (-1,\infty), \forall x \in X$

Komplemen fuzzy yager: $c_w(\mu_A(x)) = \left(1-(\mu_A(x))^w\right)^{1/w}, w \in (0,\infty), \forall x \in X$

b. Irisan himpunan fuzzy

Misal A dan B adalah himpunan fuzzy pada himpunan semesta X dengan fungsi keanggotaan masing-masing μ_A dan μ_B. Irisan dari A dan B didefinisikan sebagai himpunan fuzzy $A \cap B$ yang memiliki fungsi keanggotaan $\mu_{A \cap B}$ dengan

$$\mu_{A \cap B}(x) = i(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in X$$

i adalah fungsi irisan, $i : [0,1]x[0,1] \rightarrow [0,1]$. Fungsi ini memasangkan derajat keanggotaan himpunan fuzzy A dan B ke derajat keanggotaan himpunan $A \cap B$ (Klir & Yuan, 1995:62). Fungsi irisan yang sering digunakan antara lain (Klir & Yuan, 1995:63):

Irisan standar : $i(x, y) = \min(x, y)$

Perkalian aljabar : $i(x, y) = xy$

Selisih terbatas : $i(x, y) = \max(0, x + y - 1)$

c. Gabungan himpunan fuzzy

Misal A dan B adalah himpunan fuzzy pada himpunan semesta X dengan fungsi keanggotaan masing-masing μ_A dan μ_B. Gabungan dari A dan B didefinisikan sebagai himpunan fuzzy $A \cup B$ yang memiliki fungsi keanggotaan $\mu_{A \cup B}$ dengan

$$\mu_{A \cup B}(x) = u(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in X$$

u adalah fungsi gabungan, $u : [0,1]x[0,1] \rightarrow [0,1]$. Fungsi ini memasangkan derajat keanggotaan himpunan fuzzy A dan B ke derajat keanggotaan himpunan $A \cup B$ (Klir & Yuan, 1995:76). Fungsi gabungan yang sering digunakan antara lain (Klir & Yuan, 1995:77):

Gabungan standar : $u(x, y) = \max(x, y)$

Penjumlahan aljabar : $u(x, y) = x + y - xy$

Penjumlahan terbatas : $u(x,y) = \min(1, x+y)$

2.5 Relasi Fuzzy

Relasi fuzzy (biner) R antara elemen -elemen dalam himpunan X dengan elemen –elemen dalam himpunan Y didefinisikan sebagai himpunan bagian fuzzy dari perkalian cartesius $X \times Y$, yaitu himpunan fuzzy

$$R = \{((x,y), \mu_R(x,y)) | (x,y) \in X \times Y\}$$

Relasi fuzzy R disebut juga relasi fuzzy pada himpunan (semesta) $X \times Y$. Jika X = Y, maka R disebut relasi fuzzy pada himpunan X.

Relasi klasik hanya menyatakan adanya $(x,y) \in R$ atau tidak adanya $(x,y) \notin R$ hubungan antara elemen-elemen dari suatu himpunan dengan elemen-elemen dari himpunan lainnya, sedangkan relasi fuzzy lebih luas dari itu juga menyatakan derajat eratnya hubungan tersebut (Susilo,2006: 91).

Contoh:

Misalnya X = {31, 78, 205}, Y = {1, 27, 119}, dan R adalah relasi fuzzy ”jauh lebih besar” antara elemen-elemen dalam X dengan elemen-elemen dalam Y. Maka relasi R tersebut dapat disajikan sebagai R = 0.3/(31,1) + 0.1/ (31,27) + 0.5/(78,1) + 0.3/ (78,27) + 0.9/ (205,1) + 0.7/ (205,27) + 0.4/ (205,119).

2.6 Logika Fuzzy

2.6.1 Pengertian Logika Fuzzy

Istilah logika fuzzy saat ini digunakan dalam dua pengertian yang berbeda. Dalam pengertian sempit, logika fuzzy adalah suatu sistem logis pada suatu informasi logis yang bertujuan pada suatu formalisaasi dari taksiran pemikiran. dalam pengertian luas, logika fuzzy adalah hampir sinonim dengan teori himpunan fuzzy. Teori himpunan fuzzy pada dasarnya suatu teori dari pengelompokan dengan batas-batas yang tajam. Teori himpunan fuzzy lebih luas di banding logika fuzzy dalam arti sempit dan memiliki cabang lebih dari satu. Diantara cabang-cabang tersebut adalah aritmetika fuzzy, topologi fuzzy,teori grafik fuzzy, dan analisis data fuzzy (Yudha dalam Abdul Halim F, 2006: 11). Tidak seperti logika klasik, logika fuzzy memiliki nilai yang kontinu . Fuzzy dinyatakan dalam derajat keanggotaan dari suatu keanggotaan dan derajat dari kebenaran. Oleh karena itu, suatu dapat dikatakan sebagian benar dan sebagian salah pada waktu yang sama.

2.6.2 Alasan Digunakannya Logika Fuzzy

Ada beberapa alasan mengapa orang menggunakan logika fuzzy, antara lain:

a) Konsep logika fuzzy mudah dimengerti. Konsep matematis yang mendasari penalaran fuzzy sangat sederhana dan mudah mengerti.
b) Logika fuzzy sangat fleksibel.
c) Logika fuzzy memiliki toleransi terhadap data-data yang tidak tepat.
d) Logika fuzzy mampu memodelkan fungsi-fungsi nonlinear yang sangat kompleks.
e) Logika fuzzy dapat membangun dan mengaplikasikan pengalaman-pengalaman para pakar secara langsung tanpa harus melalui proses pelatihan.

f) Logika fuzzy dapat bekerjasama dengan teknik-teknik kendali secara konvesional.

g) Logika fuzzy didasarkan pada bahasa alami. (Kusumadewi dan Purnomo, 2004:3)

2.6.3 Pengubah Linguistik

Pengubah linguistik (linguistic hedge/modifier) adalah suatu kata yang dipergunakan untuk mengubah suatu kata atau istilah menjadi kata atau istilah yang baru dengan makna yang baru pula. Dua pengubah linguistik yang biasa di pakai ”sangat” dan ”agak”.

Misal himpunan fuzzy A dalam semesta X dengan fungsi keanggotaan μ_A, maka istilah ”sangat A” didefinisikan sebagai himpunan fuzzy di X yang memiliki fungsi keanggotaan $\mu_{sangatA}$ dengan

$$\mu_{sangatA}(x) = (\mu_A(x))^2, \quad \forall x \in X$$

Sedangkan istilah ”agak A” didefinisikan sebagai himpunan fuzzy di X yang memiliki fungsi keanggotaan μ_{agakA} dengan

$$\mu_{agakA}(x) = (\mu_A(x))^{1/2}, \quad \forall x \in X \quad \text{(Susilo,2006: 137).}$$

2.6.4 Proposisi Fuzzy

Proposisi fuzzy adalah kalimat yang memuat predikat fuzzy, yaitu predikat yang dapat direpresentasikan dengan suatu himpunan fuzzy. Proposisi fuzzy yang mempunyai nilai kebenaran tertentu disebut pernyataan fuzzy. Nilai kebenaran dari suatu pernyataan fuzzy disajikan dengan suatu bilangan real dalam selang

[0,1]. Nilai kebenaran itu disebut juga derajat kebenaran dari pernyataan fuzzy itu (Susilo,2006: 138).

Sehingga perbedaan mendasar antara proposisi logika klasik dengan proposisi logika fuzzy adalah pada nilai kebenarannya. Nilai kebenaran proposisi logika klasik adalah 0 atau 1 sedangkan nilai kebenaran proposisi logika fuzzy berada pada interval [0,1] (Klir & Yuan, 1995: 220).

Proposisi fuzzy dapat digolongkan menjadi 2 yaitu proposisi fuzzy tunggal dan proposisi fuzzy majemuk. Bentuk umum dari suatu proposisi fuzzy tunggal adalah

$$x \text{ adalah } A$$

di mana x adalah suatu variabel linguistik dan predikat A adalah suatu nilai linguistik dari x.

Contoh 1

Proposisi p yaitu *usia 23 tahun adalah muda*.

Variabel linguistik dari proposisi adalah "*Usia 23 tahun*" sedangkan nilai linguistiknya adalah "*muda*". Jika didefinisikan himpunan fuzzy *muda* dengan fungsi keanggotaan μ_{muda} dengan

$$\mu_{muda}(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 20 \\ \dfrac{35 - x}{15}, & 20 < x < 35 \\ 0, & x \geq 35 \end{cases}$$

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p sama dengan nilai fungsi keanggotaan μ_{muda} untuk x = 23 yaitu $\mu_{muda}(23) = \frac{4}{5}$. Jadi proposisi " *Usia 23 tahun adalah muda*" yang memiliki nilai kebenaran $\frac{4}{5}$.

Contoh 2

Jika himpunan fuzzy *muda* memiliki fungsi keanggotaan μ_{muda} seperti pada *contoh 1* maka himpunan fuzzy *sangat muda* memiliki fungsi keanggotaan $\mu_{sangat\ muda}$ dengan

$$\mu_{sangat\ muda}(x) = (\mu_{muda}(x))^2, \qquad \forall x \in X$$

Proposisi fuzzy " *Usia 23 tahun adalah sangat muda*" memiliki nilai kebenaran sama dengan nilai fungsi keanggotaan $\mu_{sangat\ muda}$ untuk $x = 23$ yaitu

$$\mu_{sangat\ muda}(23) = (\mu_{muda}(23))^2$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= \frac{16}{25}$$

Proposisi fuzzy majemuk adalah komposisi dari proposisi-proposisi fuzzy tunggal, dengan menggunakan operator-operator logika dengan penghubung *dan*, *atau*, *tidak* dan *" jika....maka....."*.

2.6.5 Operasi-operasi Logika Fuzzy

a. Negasi fuzzy

Istilah *tidak* dalam logika fuzzy disebut negasi fuzzy. Penghubung *tidak* berkorespondensi dengan komplemen fuzzy pada himpuan fuzzy. Proposisi fuzzy

$$x \textit{ adalah tidak } A$$

diinterpretasikan sebagai relasi fuzzy $\overline{A}$ di X dengan fungsi keanggotaan μ_A dengan

$$\mu_{\overline{A}}(x) = c(\mu_A(x)) \ , \qquad \forall x \in X$$

dengan $c:[0,1] \rightarrow [0,1]$ adalah fungsi komplemen fuzzy

Jika proposisi fuzzy p memiliki nilai kebenaran $t(p)$ maka nilai kebenaran dari negasi proposisi fuzzy p adalah

$$t(\neg p) = c(t(p))$$

Contoh 3

Pada *contoh 1* proposisi p yaitu *usia 23 tahun adalah muda*. Nilai kebenaran dari proposisi p adalah $\frac{4}{5}$. Negasi dari proposisi p adalah $\neg p$: *Usia 23 tahun adalah tidak muda*. Jika fungsi komplemen fuzzy yang digunakan adalah komplemen fuzzy standar maka nilai kebenaran dari proposisi $\neg p$ adalah

$$\begin{aligned} t(\neg p) &= c(t(p)) \\ &= 1 - t(p) \\ &= 1 - \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{5}$$

b. Konjungsi fuzzy

Proposisi fuzzy majemuk dengan kata hubung *dan* dalam logika fuzzy disebut konjungsi fuzzy. Penghubung *dan* berkorespondensi dengan irisan fuzzy pada himpunan fuzzy. Misal x dan y adalah variabel linguistik masing-masing pada X dan Y, himpunan fuzzy A dan himpunan fuzzy B masing-masing pada semesta X dan Y, maka proposisi fuzzy majemuk

$$x \text{ adalah } A \text{ dan } y \text{ adalah } B$$

diinterpretasikan sebagai relasi fuzzy $A \cap B$ di $X \times Y$ dengan derajat keanggotaan $\mu_{A \cap B}$ dengan

$$\mu_{A \cap B}(x, y) = i(\mu_A(x), \mu_B(y)), \forall x \in X$$

dengan $i : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ adalah fungsi irisan.

Misal p dan q masing-masing adalah proposisi dengan nilai kebenaran masing-masing $t(p)$ dan $t(q)$ dengan penginterpretasian konjungsi ini sebagai irisan fuzzy maka nilai kebenaran dari proposisi fuzzy majemuk $p \wedge q$ adalah

$$t(p \wedge q) = i(t(p), t(q))$$

Contoh 4

Misal proposisi fuzzy p adalah sama dengan *contoh 1* dengan nilai kebenaran $\frac{4}{5}$, dan proposisi fuzzy q yaitu *usia 50 tahun adalah tua*. Himpunan fuzzy *tua* didefinisikan dengan fungsi keanggotaan μ_{tua} dengan

$$\mu_{tua}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 45 \\ \dfrac{x-45}{15}, & 45 < x < 60 \\ 1, & x \ge 60 \end{cases}$$

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy q sama dengan nilai fungsi keanggotaan μ_{tua} untuk $x = 50$ yaitu $\mu_{tua}(50) = \frac{1}{3}$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy majemuk "*Usia 23 tahun adalah muda dan usia 50 tahun adalah tua* " adalah

$$t(p \wedge q) = i(t(p), t(q))$$

Jika i adalah irisan fuzzy standar maka

$$t(p \wedge q) = \min(t(p), t(q))$$

$$= \min\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

Jika i adalah perkalian aljabar maka

$$t(p \wedge q) = [t(p)][t(q)]$$

$$= \left[\frac{4}{5}\right]\left[\frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{4}{15}$$

c. Disjungsi fuzzy

Proposisi fuzzy majemuk dengan kata hubung *atau* dalam logika fuzzy disebut disjungsi fuzzy, penghubung *atau* berkorespondensi dengan gabungan fuzzy. Proposisi fuzzy majemuk

$$x \text{ adalah } A \text{ atau } y \text{ adalah } B$$

diinterpretasikan sebagai relasi fuzzy $A \cup B$ di $X \times Y$ dengan derajat keanggotaan $\mu_{A \cup B}$ dengan

$$\mu_{A \cup B}(x, y) = u(\mu_A(x), \mu_B(y)), \forall x \in X$$

dengan $u : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ adalah fungsi gabungan.

Misal p dan q masing-masing adalah proposisi dengan nilai kebenaran masing-masing $t(p)$ dan $t(q)$ dengan penginterpretasian disjungsi ini sebagai relasi fuzzy maka nilai kebenaran dari proposisi fuzzy majemuk adalah $p \vee q$ adalah

$$t(p \vee q) = u(t(p), t(q))$$

Contoh 5

Misal proposisi fuzzy *p* dan *q* sama dengan *contoh 4*. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy majemuk " *Usia 23 tahun adalah muda atau usia 50 tahun adalah tua"* adalah

$$t(p \vee q) = u(t(p), t(q))$$

Jika u adalah gabungan fuzzy standar maka

$$t(p \vee q) = \max(t(p), t(q))$$

$$= \max\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{5}$$

Jika *u* adalah penjumlahan aljabar maka

$$t(p \vee q) = t(p) + t(q) - [t(p)][t(q)]$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{1}{3} - \left[\frac{4}{5}\right]\left[\frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{13}{15}$$

d. Implikasi fuzzy

Proposisi fuzzy majemuk berbentuk

$$jika\ x\ adalah\ A\ maka\ \ y\ adalah\ \ B$$

diinterpretasikan sebagai relasi fuzzy R di $X \times Y$ dengan derajat keanggotaan μ_R dengan

$$\mu_R(x, y) = J(\mu_A(x), \mu_B(y)), \forall x \in X\ \ ,\ \ y \in Y$$

J adalah fungsi implikasi, $J : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ dengan

$$J(\mu_A(x), \mu_B(y)) = u(c(\mu_A(x)), i(\mu_A(x), \mu_B(y))), \forall x \in X, y \in Y$$

fungsi J ini bermacam-macam tergantung pada macam-macam irisan i dan fungsi gabungan u yang digunakan.

1) Jika i adalah irisan fuzzy standar dan u adalah gabungan fuzzy standar maka diperoleh

$$J(\mu_A(x), \mu_B(y)) = \max(1 - \mu_A(x), \min(\mu_A(x), \mu_B(y)))$$

Implikasi ini disebut ***Implikasi Zadeh***

2) Jika i adalah perkalian aljabar dan u adalah penjumlahan aljabar maka diperoleh

$$J(\mu_A(x), \mu_B(y)) = 1 - \mu_A(x) + [\mu_A(x)]^2 [\mu_B(y)]$$

Implikasi ini disebut ***Implikasi Klir–Yuan*** (Klir & Yuan,1995:307)

Misal p dan q masing-masing adalah proposisi fuzzy dengan nilai kebenaran berturut –turut $t(p)$ dan $t(q)$ dengan penginterpretasian implikasi fuzzy ini sebagai relasi fuzzy maka nilai kebenaran dari implikasi $p \rightarrow q$ adalah

$$t(p \rightarrow q) = J(t(p), t(q))$$

Jika J adalah implikasi Zadeh maka $t(p \rightarrow q) = \max(1 - t(p), \min(t(p), t(q)))$

Jika J adalah implikasi Klir-Yuan maka $t(p \rightarrow q) = 1 - t(p) + [t(p)]^2 [t(q)]$

Biimplikasi fuzzy adalah proposisi fuzzy dalam bentuk ” jika p maka q dan jika q maka p ”. Dengan menggunakan implikasi fuzzy dan irisan fuzzy maka nilai kebenaran dari biimplikasi fuzzy $p \leftrightarrow q$ adalah

$$t(p \leftrightarrow q) = i[J(t(p), t(q)), J(t(q), t(p))]$$

dengan i adalah fungsi irisan.

2.6.6 Macam -macam Logika Fuzzy

Ada beberapa macam logika fuzzy sebagai akibat dari terdapatnya beberapa macam irisan fuzzy, gabungan fuzzy, serta implikasi fuzzy di antaranya:

1. Logika fuzzy Zadeh

   Logika fuzzy Zadeh adalah logika fuzzy yang berkorespondensi dengan himpunan fuzzy yang menggunakan operasi komplemen fuzzy standar sebagai fungsi komplemen fuzzy, irisan fuzzy standar sebagai fungsi irisan fuzzy, dan gabungan fuzzy standar sebagai fungsi gabungan fuzzy. Implikasi yang digunakan pada logika fuzzy Zadeh adalah implikasi

Zadeh. Penggunaan istilah logika fuzzy Zadeh pada logika fuzzy ini sesuai dengan nama implikasi yang digunakan yaitu implikasi Zadeh. Implikasi Zadeh diperkenalkan oleh Lotfi A. Zadeh, seorang guru besar pada Fakultas Teknik Universitas California di Berkeley, matematikawan yang pertama kali memperkenalkan himpunan fuzzy dan logika fuzzy pada tahun 1965.

2. Logika fuzzy Klir –Yuan.

   Logika fuzzy Klir-Yuan adalah logika fuzzy yang berkorespondensi dengan himpunan fuzzy yang menggunakan operasi komplemen fuzzy standar sebagai fungsi komplemen fuzzy, perkalian aljabar sebagai fungsi irisan fuzzy, penjumlahan aljabar sebagai fungsi gabungan fuzzy, serta implikasi Klir –Yuan (Klir & Yuan,1995:307-309).

Misal p dan q masing-masing adalah proposisi fuzzy dengan nilai kebenaran masing-masing $t(p)$ dan $t(q)$. Nilai kebenaran negasi fuzzy, konjungsi fuzzy, disjungsi fuzzy, dan implikasi fuzzy pada dua macam logika fuzzy yaitu logika fuzzy Zadeh dan Klir-Yuan yang terangkum pada tabel 1 berikut ini.

Tabel 1 Nilai Kebenaran Logika Fuzzy

PROPOSISI	**ZADEH**	**KLIR-YUAN**
$\neg p$	$1-t(p)$	$1-t(p)$
$p \wedge q$	$\min(t(p),t(q))$	$[t(p)][t(q)]$
$p \vee q$	$\max(t(p),t(q))$	$t(p)+t(q)-[t(p)][t(q)]$
$p \to q$	$\max(1-t(p),\min(t(p),t(q)))$	$1-t(p)+[t(p)]^2[t(q)]$

(Sumber: Data Sekunder diolah, 2007)

2.7 Logika Klasik

2.7.1 Proposisi

Proposisi adalah kalimat deklaratif atau pernyataan yang memiliki hanya satu nilai kebenaran yaitu benar atau salah, akan tetapi tidak kedua-duanya pada saat yang sama.

1) Contoh proposisi
   a. Ir. Soekarno adalah Presiden Republik Indonesia yang pertama
   b. Matahari terbit pada pagi hari
2) Contoh bukan proposisi
   a. Siapa dia?
   b. Tolong ambilkan buku itu.

2.7.2 Nilai Kebenaran

Kebenaran atau kesalahan sebuah proposisi dinamakan ”nilai kebenaran” dari proposisi tersebut. Nilai kebenaran proposisi p diberi lambang $t(p)$. Jika proposisi p benar maka nilai kebenaraannya adalah 1, jika salah nilai kebenarannya adalah 0 (Kusumah, 1986: 3).

2.7.3 Operasi-operasi Logika Klasik

Operasi pada logika klasik secara umum ada dua macam yaitu :

1) Operasi uner (monar)

   Operasi uner adalah operasi yang hanya melibatkan satu unsur atau proposisi. Operasi uner dalam logika yaitu operasi negasi. Nilai kebenaran dari negasi suatu proposisi adalah kebalikan dari nilai kebenaran proposisi tersebut. Jika suatu proposisi memiliki nilai kebenaran 1 maka negasi dari proposisi tersebut memiliki nilai kebenaran 0, demikian juga sebaliknya (Kusumah,1986:4). Negasi dari suatu proposisi adalah proposisi yang diperoleh dengan menambahkan kata ”tidak” (atau ”bukan”) pada proposisi semula. Negasi dari suatu proposisi p diberi lambang $\neg p$. Jika p bernilai benar, maka $\neg p$ bernilai salah, dan sebaliknya jika p bernilai salah, maka $\neg p$ bernilai benar. Hal ini dapat di lihat pada tabel nilai kebenaran (Tabel 2).

Tabel 2 Nilai Kebenaran Negasi

$t(p)$	$t(\neg p)$
1	0
0	1

(Sumber: Susilo, 2006:18)

Dari tabel nilai kebenaran negasi di atas, dapat disimpulkan bahwa

$t(\neg p) = 1 - t(p)$ (Susilo, 2006: 18).

2) Operasi biner

Operasi biner adalah operasi yang berkenaan dengan dua unsur atau dua proposisi. Operasi-operasi biner antara lain:

a. Operasi konjungsi

Dua proposisi tunggal dapat digabungkan menjadi proposisi majemuk. Salah satu cara penggabungan tersebut diantaranya dengan menggunakan kata perangkai *”dan”*, yang disebut dengan operasi *”konjungsi”*. Konjungsi dari dua proposisi p dan q diberi lambang $p \wedge q$, dan bernilai benar hanya apabila p dan q kedua-duanya bernilai benar. proposisi p dan q masing-masing dinamakan *konjung* (Kusumah,1986:5). Hal ini dapat di lihat pada tabel nilai kebenaran (Tabel 3).

Tabel 3 Nilai Kebenaran Konjungsi

$t(p)$	$t(q)$	$t(p \wedge q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

(Sumber: Susilo, 2006:19)

Dari tabel nilai kebenaran konjungsi di atas, dapat disimpulkan bahwa

$$t(p \wedge q) = \min(t(p), t(q))$$

atau

$$t(p \wedge q) = t(p)t(q)$$ (Susilo, 2006: 19).

b. Operasi disjungsi

Disjungsi dua buah proposisi tunggal adalah proposisi yang diperoleh dengan menghubungkan kedua proposisi itu dengan menggunakan kata perangkai ” *atau* ”. Disjungsi dari dua buah proposisi p dan q diberi lambang $p \vee q$, dan bernilai benar bila sekurang-kurangnya salah satu dari kedua proposisi itu bernilai benar. Proposisi p dan q dinamakan *disjung*. Hal ini dapat di lihat pada tabel nilai kebenaran (Tabel 4).

Tabel 4 Nilai Kebenaran Disjungsi

$t(p)$	$t(q)$	$t(p \vee q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(Sumber: Susilo, 2006:20)

Dari tabel nilai kebenaran disjungsi di atas, dapat disimpulkan bahwa

$$t(p \vee q) = \max(t(p), t(q)) \text{ (Susilo, 2006: 20).}$$

c. Operasi implikasi

Proposisi majemuk implikasi disusun dari dua buah proposisi tunggal dengan menggunakan kata perangkai *"jika (bila)..., maka ..."*. Implikasi dua buah proposisi p dan q, yaitu *"jika p maka q"*, diberi lambang $p \to q$, dimana p disebut anteseden (atau pemis) dan q disebut konsekuen (atau kesimpulan). Suatu implikasi bernilai salah bila antesedennya bernilai benar dan konsekuennya bernilai salah, sedangkan untuk kejadian lainnya implikasi bernilai benar. Dengan perkataan lain, suatu implikasi bernilai benar bila antesedennya bernilai salah atau konsekuennya bernilai benar. Hal ini dapat di lihat pada tabel nilai kebenaran (Tabel 5).

Tabel 5 Nilai Kebenaran Implikasi

$t(p)$	$t(q)$	$t(p \to q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(Sumber: Susilo, 2006:21)

Dari tabel nilai kebenaran implikasi di atas, dapat disimpulkan bahwa

$t(p \to q) = \min(1, 1 + t(q) - t(p))$ (Susilo, 2006: 21).

d. Operasi ekivalensi

Proposisi majemuk ekivalensi disusun dari dua buah proposisi tunggal dengan menggunakan kata perangkai *"jika (bila) dan hanya jika (bila)"*, yang disingkat menjadi "jhj" atau "bhb". Ekivalensi dua buah proposisi p dan q, yaitu "p jika dan hanya jika q", diberi lambang $p \leftrightarrow q$, dan bernilai benar hanya bila p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama, dan jika nilainya tidak sama maka $p \leftrightarrow q$ adalah salah. Hal ini dapat di lihat pada tabel nilai kebenaran (Tabel 6).

Tabel 6 Nilai Kebenaran Ekivalensi

$t(p)$	$t(q)$	$t(p \leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

(Sumber: Susilo, 2006:22)

Dari tabel nilai kebenaran ekivalensi di atas, dapat disimpulkan bahwa

$$t(p \leftrightarrow q) = 1 - |t(p) - t(q)|$$

Dua buah proposisi (tunggal atau majemuk) p dan q dikatakan ekivalen atau setara, dengan notasi "$p \equiv q$", bila proposisi majemuk "$p \leftrightarrow q$" bernilai benar. Misalnya, proposisi $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ adalah ekivalen dengan proposisi $p \leftrightarrow q$ untuk setiap proposisi p dan q, sebab proposisi majemuk $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \equiv (p \leftrightarrow q)$ bernilai benar untuk setiap kemungkinan nilai kebenaran p dan q. Jadi ekivalensi $p \leftrightarrow q$ setara dengan konjungsi dua buah implikasi, yaitu $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$. Karena itu proposisi majemuk ekivalensi disebut biimplikasi. Karena implikasi $q \rightarrow p$ dapat dibaca " p jika q ", dan implikasi $p \rightarrow q$ dapa dibaca "p hanya jika q", maka biimplikasi $p \leftrightarrow q$ dibaca "p jika q dan p hanya jika q", atau secara singkat "p jika dan hanya jika q" (Susilo, 2006: 23).

2.7.4 Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi

Suatu bentuk proposisi yang menghasilkan nilai benar untuk setiap substitusi yang mungkin ke dalam variabel-variabelnya disebut *tautologi*, sedangkan suatu bentuk proposisi yang menghasilkan nilai salah untuk setiap substitusi yang mungkin ke dalam variabel-variabelnya disebut *kontradiksi*. Bila substitusi proposisi ke dalam semua variabelnya dapat menghasilkan nilai yang benar atau nilai yang salah, maka bentuk proposisi itu disebut *kontingensi*.

Contoh 1

Bentuk proposisi $p \vee \neg p$ adalah suatu tautologi. Seperti terlihat dalam tabel nilai kebenaran berikut ini:

Tabel 7 Nilai Kebenaran Tautologi

$t(p)$	$t(\neg p)$	$t(p \vee \neg p)$
1	0	1
0	1	1

(Sumber: Susilo, 2006:25)

Tautologi ini disebut *kaidah penyisihan jalan tengah.*

Bentuk proposisi $p \wedge \neg p$ adalah suatu kontradiksi. Seperti terlihat dalam tabel nilai kebenaran berikut ini:

Tabel 8 Nilai Kebenaran Kontradiksi

$t(p)$	$t(\neg p)$	$t(p \wedge \neg p)$
1	0	0
0	1	0

(Sumber: Susilo, 2006:25)

Kontradiksi ini disebut *kaidah Kontradiksi.*

Bentuk proposisi $(p \vee q) \rightarrow r$ adalah suatu kontingensi. Seperti terlihat dalam tabel nilai kebenaran berikut ini:

Tabel 9 Nilai Kebenaran Kontingensi

$t(p)$	$t(q)$	$t(r)$	$t(p \vee q)$	$t((p \vee q) \rightarrow r)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

(Sumber: Susilo, 2006:24)

2.7.5 Hubungan Proposisi dan Himpunan

Proposisi dan himpunan keduanya mempunyai sifat yang serupa yaitu memenuhi hukum-hukum yang identik. Aljabar proposisi dan aljabar himpunan mempunyai hubungan yang dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema: Misal diberikan dua rumus yang variabelnya adalah $p, q, r...$ yang ekuivalen dan hanya melibakan operasi $\wedge, \vee,$ dan $\neg$ maka akan diperoleh hubungan yang benar diantara sebarang himpunan bagian P, Q, R,...dari himpunan semesta X dengan mengganti p dengan P, q dengan Q, r dengan R,..., $\wedge$ dengan $\cap$, $\vee$ dengan $\cup$, $\leftrightarrow$ dengan $\equiv$.

Tabel 10 Lambang Teori Himpunan

No	Simbol	Perangkai
1	$\cup$	Irisan dua himpunan
2	$\cap$	Gabungan dua himpunan
3	X	Himpunan Semesta
4	ϕ	Himpunan kosong
5	$\subseteq$	Himpunan bagian/subset

(Sumber: Klir & Yuan, 1995: 215)

Tabel 11 Lambang Logika Proposisi

No	Simbol	Perangkai
1	$\vee$	Atau (disjungsi)
2	$\wedge$	Dan (konjungsi)
3	1	Nilai kebenaran benar
4	0	Nilai kebenaran salah
5	$\neg$	Tidak (negasi)
6	$\rightarrow$	Jika....maka....
7	$\leftrightarrow$	Jika dan hanya jika

(Sumber: Klir & Yuan, 1995: 215)

2.7.6 Beberapa Hukum pada Logika Klasik

Misal p, q dan r masing-masing adalah proposisi maka hukum –hukum berikut berlaku pada logika klasik.

1. Hukum Negasi Rangkap
   a. $p \equiv \neg\neg p$
2. Hukum Komutatif
   a. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
   b. $p \vee q \equiv q \vee p$
3. Hukum Asosiatif
   a. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
   b. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
4. Hukum Distributif
   a. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   b. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
5. Hukum Idempoten
   a. $p \wedge p \equiv p$
   b. $p \vee p \equiv p$
6. Hukum Absorpsi
   a. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
   b. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
7. Hukum De Morgan
   a. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

b. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

8. Hukum $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

9. Hukum $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$

10. Hukum $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

11. Hukum Kontraposisi

    $p \rightarrow q \equiv \neg p \rightarrow \neg q$

12. Hukum $p \rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$

13. Hukum $p \rightarrow q \equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow p$

14. Hukum Kontradiksi

    Nilai kebenaran dari konjungsi $p \wedge \neg p$ adalah 0

15. Hukum Penyisihan Jalan Tengah

    Nilai kebenaran dari disjungsi $p \vee \neg p$ adalah 1

Hukum-hukum tersebut dapat dibuktikan dengan tabel nilai kebenaran dari negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi.

Tabel 10 Nilai Kebenaran Proposisi Pada Logika Klasik

$t(p)$	$t(q)$	$t(\neg p)$	$t(\neg q)$	$t(p \wedge q)$	$t(p \vee q)$	$t(p \rightarrow q)$	$t(p \leftrightarrow q)$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

(Sumber: Susilo diolah, 2007)

2.8 Perintah Allah untuk Berfikir

Dalam al-Qur'an Allah memerintahkan manusia untuk menggunakan akal pikiran untuk berfikir. Raghib al-Ashfahani dalam kitabnya *Mufradatul-fazhil-Qur'an* sebagaimana dikutip oleh Yusuf Qardhawi (1998:41) menulis, Pemikiran adalah sesuatu kekuatan yang berusaha mencapai suatu ilmu pengetahuan. Tafakur (berfikir) adalah bekerjanya kekuatan itu dengan bimbingan akal. Dengan kelebihan itulah manusia berbeda dengan hewan. Objek pemikiran adalah sesuatu yang dapat digambarkan dalam hati, bukan lainnya. Oleh karena itu, Rosulullah SAW. bersabda,

تَفَكَّرُوْا فِيْ آلاَءِ اللهِ وَلاَ تَفَكَّرُوْا فِيْ اللهِ

Artinya *:" Berfikirlah kamu akan ciptaan-ciptaan Allah, dan jangan fikirkan tentang Zat Allah."*

Hadits ini diriwayatkan oleh Abu Syaikh dan ath- Thabrani dalam kitab *al-Ausath* serta Ibnu Adi, Baihaqi, dan Ibnu Umar dengan redaksi ini. Sedangkan Abu Nu'aim meriwayatkan dalam kitab *Hilyah al-Auliya* dari Ibnu Abbas dengan redaksi, "*Fikirkanlah tentang makhluk Allah, dan jangan fikirkan tentang Zat Allah"* Al-Albani menilainya sebagai hadits hasan dalam kitabnya *Silsilah Ahadits Shahihah* dengan seluruh jalan periwayatan, dengan nomor 1788, dan dalam kitab *Shahih Jami'ash-Shagir* (2975,2976). Sedangkan makna hadits tersebut adalah sahih menurut ijmak.

Al-Qur'an mengajak untuk berfikir dengan beragam bentuk redaksi tentang segala hal, kecuali tentang Zat Allah SWT karena mencurahkan akal untuk memikirkan zat-Nya adalah pemborosan energi akal, mengingat pengetahuan tentang Zat Allah tidak mungkin dicapai oleh akal manusia. Maka, manusia cukup memikirkan tentang ciptaan-ciptaan Allah di langit, di bumi, dan diri manusia sendiri, sebagaimana dalam firman Allah dalam surat ar-Ruum ayat 8.

أَوَلَمْ يَتَفَكَّرُوا۟ فِىٓ أَنفُسِهِم ۗ مَّا خَلَقَ ٱللَّهُ ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضَ وَمَا بَيْنَهُمَآ إِلَّا بِٱلْحَقِّ
وَأَجَلٍ مُّسَمًّى ۗ وَإِنَّ كَثِيرًا مِّنَ ٱلنَّاسِ بِلِقَآئِ رَبِّهِمْ لَكَـٰفِرُونَ ﴿٨﴾

Artinya: *" Dan Mengapa mereka tidak memikirkan tentang (kejadian) diri mereka? Allah tidak menjadikan langit dan bumi dan apa yang ada diantara keduanya melainkan dengan (tujuan) yang benar dan waktu yang ditentukan. dan Sesungguhnya kebanyakan di antara manusia benar-benar ingkar akan pertemuan dengan Tuhannya".*

Orang –orang yang ahli dalam berfikir termasuk memikirkan langit dan bumi beserta isinya, dalam al-Qur'an disebut sebagai Ulul Albab. Maka, hendaknya kaum Ulul Albab mencurahkan segenap potensi mereka untuk memikirakan penciptaan langit dan bumi beserta isinya dengan seluruh keteraturan dan ketelitian penciptaannya, sehingga Allah SWT akan menunjukkan kepada mereka suatu hikmah, bukan untuk kesia-siaan. Berkenaan dengan visi pemikiran dan ilmu pengetahuan, al-Qur'an memberi penghargaan terhadap Ulul Albab.

Menurut Muhaimin (2003:6) ditinjau dari pengertian *lughawi*, kata *Albab* adalah bentuk jamak dari kata *lubb*, yang berarti saripati sesuatu. Dengan demikian *Ulul Albab* adalah orang-orang yang memiliki akal yang murni, yang tidak diselubungi oleh kulit, yakni kabut ide yang dapat melahirkan kerancuan dalam berfikir.

Kata Ulul Albab terulang sebanyak 16 kali dalam al-Qur'an, sebagaimana tertuang dalam Q.S. Al-Baqoroh: 179, 197, 269; Q.S. Al-Imron: 7, 190; Q.S. Al-Maidah: 100; Q.S. Yusuf: 111; Q.S. Al-Ra'd: 19; Q.S. Ibrahim: 52; Q.S. Shad: 29,43; Q.S.Al-Zumar: 9,18,21; Q.S.Al-Mukmin: 54; Q.S. Al-thalaq:10. Dari ayat-ayat yang berbicara tentang Ulul Albab tersebut diperoleh bahwa Ulul Albab memiliki 16 karakteristik sebagai berikut:

1. Orang yang memiliki akal pikiran yang murni dan jernih yang tidak diselubungi oleh kabut-kabut ide yang dapat melahirkan kerancuan dalam berfikir. Termasuk didalamnya adalah orang yang mampu menyelesaikan masalah dengan adil, yang benar dikatakan benar dan yang salah dikatakan salah.
2. Orang yang siap dan mampu hidup dalam suasana pluralisme dan berusaha menghindari interaksi yang dapat menimbulkan disharmoni, kesalahfahaman dan keretakan hubungan.
3. Orang yang mampu menangkap pelajaran, memilah dan memilih mana jalan yang benar dan baik serta mana jalan yang salah dan buruk, dan mampu menerapkan jalan yang benar dan baik (jalan Allah) serta menghindar dari jalan yang salah dan buruk (jalan syetan).
4. Orang yang giat melakukan kajian dan penelitian sesuai dengan bidangnya dan berusaha menghindari fitnah dan malapetaka dari proses dan hasil kajian atau penelitiannya.

5. Orang yang mementingkan kualitas hidup di samping kuantitasnya, baik dalam keyakinan, ucapan maupun perbuatan.
6. Orang yang selalu sadar akan kehadiran Tuhan dalam segala situasi dan kondisi, baik saat bekerja maupun beristirahat, dan berusaha mengenali Allah dengan kalbu (zikir) serta mengenali alam semesta dengan akal (pikir), sehingga sampai kepada bukti yang sangat nyata tentang keesaan dan kekuasaan Allah SWT.
7. Orang yang concern terhadap kesinambungan pemikiran dan sejarah, sehingga tidak mau melakukan loncatan sejarah. Dengan kata lain, ia mau menghargai khazanah intelektual dari para pemikir, cendekiawan atau ilmuwan sebelumnya.
8. Orang yang memiliki ketajaman hati dalam menangkap fenomena yang dihadapinya.
9. Orang yang mampu dan bersedia mengingatkan orang lain berdasar ajaran dan nilai-nilai Ilahi dengan cara yang lebih komunikatif.
10. Orang yang suka merenungkan dan mengkaji ayat-ayat Tuhan baik yang tanzilah (wahyu) maupun kauniyah (alam semesta), dan berusaha menangkap pelajaran darinya.
11. Orang yang sabar dan tahan uji walaupun ditimpa musibah dan diganggu oleh syetan (jin dan manusia).
12. Orang yang mampu membedakan mana yang lebih bermanfaat dan menguntungkan dan mana pula yang kurang bermanfaat dan menguntungkan bagi kehidupannya di dunia dan akhirat kelak.

13. Orang yang bersikap terbuka terhadap pendapat, ide atau teori dari manapun datangnya, dan ia selalu menyiapkan grand-concept atau teori, atau criteria yang jelas yang dibangun dari petunjuk wahyu, kemudian menjadikannya sebagai piranti dalam mengkritisi pendapat. Ide atau teori tersebut, untuk selanjutnya berusaha dengan sungguh-sungguh dalam mengikuti pendapat, ide atau teori yang terbaik.
14. Orang yang sadar dan peduli terhadap pelestarian lingkungan hidup.
15. Orang yang berusaha mencari petunjuk dan pelajaran dari fenomena historic atau kisah-kisah terdahulu.
16. Orang yang tidak mau membuat onar, keresahan dan kerusuhan, serta berbuat makar di masyarakat.

Dari keenam belas karakteristik Ulul Albab tersebut dapat diformulasikan sebagai berikut:

1. Ulul Albab adalah orang yang memiliki akal pikiran yang murni dan jernih serta matahari yang tajam dalam menangkap fenomena yang dihadapi. Memanfaatkan kalbu untuk zikir kepada Allah dan memanfaatkan akal (pikiran) untuk mengungkapakan rahasia Alam semesta, giat melakukan kajian dan penelitian untuk kemaslahatan hidup, suka merenungkan dan mengkaji ayat-ayat (tanda-tanda kekuasaan dan kebesaran-Nya) dan berusaha menangkap pelajaran darinya, serta berusaha mencari petunjuk dan pelajaran dari fenomena historic atau kisah-kisah terdahulu.
2. Ulul Albab adalah orang yang selalu sadar diri akan kehadiran Tuhan dalam segala situasi dan kondisi.

3. Ulul Albab adalah orang yang lebih mementingkan kualitas hidup (jasmani dan rohani).
4. Ulul Albab adalah orang yang mampu menyelesaikan masalah dengan adil.
5. Ulul Albab adalah orang yang siap dan mampu menciptakan kehidupan yang harmonis dalam kehidupan keluarga maupun masyarakat.
6. Ulul Albab adalah orang yang mampu memilih dan menerangkana jalan yang benar dan baik yang diridhoi olehNya serta mampu membedakan mana yang lebih bermanfaat dan menguntugkan dan mana pula yang kurang bermanfaat dan menguntungkan bagi kehidupnnya di dunia dan akhirat.
7. Ulul Albab adalah orang yang menghargai khazanah intelektual dari para pemikir cendekiawan atau ilmuan sebelumnya.
8. Ulul Albab adalah orang yang bersikap terbuka dan kritis terhadap pendapat, ide atau teori dari manapun datangnya, untuk selanjutnya berusaha dengan sungguh-sungguh dalam mengikuti pendapat, ide atau teori yang baik.
9. Ulul Albab adalah orang yang mampu dan bersedia mengajar, mendidik orang lain berdasar ajaran dan nilai-nilai ilahi dengan cara yang benar dan baik.
10. Ulul Albab adalah orang yang sabar dan tahan uji walaupun ditimpa musibah dan diganggu oleh syetan (jin dan manusia).

11. Ulul Albab adalah orang yang sadar dan peduli terhadap pelestarian lingkungan hidup.
12. Ulul Albab adalah orang yang tidak mau membuat onar, keresahan dan kerusuhan, serta berbuat makar di masyarakat.

Dalam menghadapi kehidupan sehari-hari manusia dituntut untuk menggunakan akal fikiran dalam melakukan setiap kegiatan dengan penuh pemikiran dan pertimbangan. Oleh karena itu kita harus mempunyai pola berfikir yang tepat, akurat, rasional dan obyektif, disamping dapat berfikir kritis. Pola berfikir seperti ini adalah cara berfikir atau penalaran yang terdapat dalam logika oleh karena itu logika sangat penting dalam setiap bidang kehidupan manusia (Kusumah, 1989: 2).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada BAB III ini membahas pembuktian tentang berlaku atau tidak berlakunya hukum-hukum logika klasik pada logika fuzzy Zadeh dan logika fuzzy Klir –Yuan.

Logika fuzzy Zadeh adalah logika fuzzy yang berkorespondensi dengan himpunan fuzzy yang menggunakan operasi komplemen fuzzy standar sebagai fungsi komplemen fuzzy, irisan fuzzy standar sebagai fungsi irisan fuzzy, dan gabungan fuzzy standar sebagai fungsi gabungan fuzzy. Implikasi yang digunakan pada logika fuzzy Zadeh adalah implikasi Zadeh. Logika fuzzy Klir-Yuan adalah logika fuzzy yang berkorespondensi dengan himpunan fuzzy yang menggunakan operasi komplemen fuzzy standar sebagai fungsi komplemen fuzzy, perkalian aljabar sebagai fungsi irisan fuzzy, penjumlahan aljabar sebagai fungsi gabungan fuzzy, serta implikasi Klir –Yuan.

Misal p dan q masing-masing adalah proposisi fuzzy dengan nilai kebenaran masing-masing $t(p)$ dan $t(q)$. Nilai kebenaran proposisi fuzzy $\neg p, p \wedge q,\ p \vee q,$ dan $p \to q$ masing-masingadalah $c(t(p)), i(t(p),t(q)), u(t(p),t(q))$ dan $J(t(p),t(q))$ dengan c,i,u dan J masing-masing adalah fungsi komplemen fuzzy, fungsi irisan fuzzy, fungsi gabungan fuzzy dan fungsi implikasi fuzzy.

3.1 Hukum-hukum Logika Klasik yang Berlaku pada Logika Fuzzy Zadeh

Pembuktian hukum-hukum logika klasik yang berlaku pada logika fuzzy Zadeh adalah sebagai berikut:

1) Hukum Negasi Rangkap

$p \equiv \neg\neg p$

Bukti:

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p adalah $t(p)$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg\neg p$ adalah $c(c(t(p)))$. Karena nilai kebenaran dari negasi proposisi fuzzy p adalah $c(t(p))$ dan karena $c(t(p)) = 1 - t(p)$, maka

$$
\begin{aligned}
t(p) &= 1 - (1 - t(p)) \\
&= 1 - c(t(p)) \\
&= c(c(t(p)))
\end{aligned}
$$

Dengan demikian $t(p) = c(c(t(p)))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg\neg p$. Jadi hukum negasi rangkap berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

2) Hukum Komutatif

a) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

b) $p \vee q \equiv q \vee p$

Bukti:

a) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge q$ adalah $i(t(p), t(q))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $q \wedge p$ adalah $i(t(q), t(p))$. Karena $i(t(p), t(q)) = \min(t(p), t(q))$, maka

$$
\begin{aligned}
i(t(p), t(q)) &= \min(t(p), t(q)) \\
&= \min(t(q), t(p))
\end{aligned}
$$

$$= i(t(q), t(p))$$

Dengan demikian $i(t(p), t(q)) = i(t(q), t(p))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge q$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $q \wedge p$. Jadi hukum komutatif $p \wedge q \equiv q \wedge p$ berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

b) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee q$ adalah $u(t(p), t(q))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $q \vee p$ adalah $u(t(q), t(p))$. Karena $u(t(p), t(q)) = \max(t(p), t(q))$, maka

$$\begin{aligned} u(t(p), t(q)) &= \max(t(p), t(q)) \\ &= \max(t(q), t(p)) \\ &= u(t(q), t(p)) \end{aligned}$$

Dengan demikian $u(t(p), t(q)) = u(t(q), t(p))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee q$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $q \vee p$. Jadi hukum komutatif $p \vee q \equiv q \vee p$ berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

3) Hukum Asosiatif

a) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

b) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

Bukti:

a) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge (q \wedge r)$ adalah $i(t(p), i(t(q), t(r)))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \wedge q) \wedge r$ adalah

$$i(i(t(p), t(q)), t(r)).$$

Karena $i(t(p), i(t(q), t(r))) = \min(t(p), i(t(q), t(r)))$, maka

$$\begin{aligned} i(t(p), i(t(q), t(r))) &= \min(t(p), i(t(q), t(r))) \\ &= \min(t(p), \min(t(q), t(r))) \\ &= \min(\min(t(p), t(q)), t(r))) \\ &= \min(i(t(p), t(q)), t(r)) \\ &= i(i(t(p), t(q)), t(r)) \end{aligned}$$

Dengan demikian $i(t(p), i(t(q), t(r))) = i(i(t(p), t(q)), t(r))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge (q \wedge r)$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \wedge q) \wedge r$. Jadi hukum asosiatif $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

b) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee (q \vee r)$ adalah $u(t(p), u(t(q), t(r)))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \vee q) \vee r$ adalah

$$u(u(t(p), t(q)), t(r)).$$

Karena $u(t(p), u(t(q), t(r))) = \max(t(p), u(t(q), t(r)))$, maka

$$\begin{aligned} u(t(p), u(t(q), t(r))) &= \max(t(p), u(t(q), t(r))) \\ &= \max(t(p), \max(t(q), t(r))) \end{aligned}$$

$$= \max(\max(t(p),t(q)),t(r)))$$

$$= \max(u(t(p),t(q)),t(r))$$

$$= u(u(t(p),t(q)),t(r))$$

Dengan demikian $u(t(p),u(t(q),t(r))) = u(u(t(p),t(q)),t(r))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee (q \vee r)$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \vee q) \vee r$. Jadi hukum asosiatif $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

4) Hukum Distributif

a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

b) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Bukti:

a) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge (q \vee r)$ adalah $i(t(p),u(t(q),t(r)))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ adalah

$$u(i(t(p),t(q)),i(t(p),t(r))).$$

Karena $i(t(p),u(t(q),t(r))) = \min(t(p),u(t(q),t(r)))$, maka

$$i(t(p),u(t(q),t(r))) = \min(t(p),u(t(q),t(r)))$$

$$= \min(t(p),\max(t(q),t(r)))$$

$$= \max(\min(t(p),t(q)),\min(t(p),t(r)))$$

$$= \max(i(t(p),t(q)),i(t(p),t(r))$$

$$= u(i(t(p),t(q)),i(t(p),t(r)))$$

Dengan demikian $i(t(p),u(t(q),t(r))) = u(i(t(p),t(q)),i(t(p),t(r)))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge (q \vee r)$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. Jadi hukum distributif $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

b) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee (q \wedge r)$ adalah $u(t(p),i(t(q),t(r)))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ adalah

$$i(u(t(p),t(q)),u(t(p),t(r))).$$

Karena $u(t(p),i(t(q),t(r))) = \max(t(p),i(t(q),t(r)))$, maka

$$\begin{aligned} u(t(p),i(t(q),t(r))) &= \max(t(p),i(t(q),t(r))) \\ &= \max(t(p),\min(t(q),t(r))) \\ &= \min(\max(t(p),t(q)),\max(t(p),t(r))) \\ &= \min(u(t(p),t(q)),u(t(p),t(r))) \\ &= i(u(t(p),t(q)),u(t(p),t(r))) \end{aligned}$$

Dengan demikian $u(t(p),i(t(q),t(r))) = i(u(t(p),t(q)),u(t(p),t(r)))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee (q \wedge r)$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$. Jadi hukum distributif $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

5) Hukum Idempoten

a) $p \wedge p \equiv p$

b) $p \vee p \equiv p$

Bukti:

a) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge p$ adalah $i(t(p),t(p))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p adalah $t(p)$. Karena $i(t(p),t(p)) = \min(t(p),t(p))$, maka

$$i(t(p),t(p)) = \min(t(p),t(p))$$
$$= t(p)$$

Dengan demikian $i(t(p),t(p)) = t(p)$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge p$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p. Jadi hukum idempoten $p \wedge p \equiv p$ berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

b) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee p$ adalah $u(t(p),t(p))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p adalah $t(p)$. Karena $u(t(p),t(p)) = \max(t(p),t(p))$, maka

$$u(t(p),t(p)) = \max(t(p),t(p))$$
$$= t(p)$$

Dengan demikian $u(t(p),t(p)) = t(p)$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee p$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p. Jadi hukum idempoten $p \vee p \equiv p$ berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

6) Hukum Absorpsi

   a) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

   b) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Bukti:

a) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee (p \wedge q)$ adalah $u(t(p), i(t(p), t(q)))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p adalah $t(p)$. Karena $u(t(p), i(t(p), t(q))) = \max(t(p), i(t(p), t(q)))$, maka

$$u(t(p), i(t(p), t(q))) = \max(t(p), i(t(p), t(q)))$$
$$= \max(t(p), \min(t(p), t(q)))$$

Ada dua kemungkinan yang terjadi antara $t(p)$ dan $t(q)$ yaitu $t(p) \leq t(q)$ atau $t(p) > t(q)$

1) Jika $t(p) \leq t(q)$ maka

$$u(t(p), i(t(p), t(q))) = \max(t(p), \min(t(p), t(q)))$$
$$= \max(t(p), t(p))$$
$$= t(p)$$

2) Jika $t(p) > t(q)$ maka

$$u(t(p), i(t(p), t(q))) = \max(t(p), \min(t(p), t(q)))$$
$$= \max(t(p), t(q))$$
$$= t(p)$$

Dengan demikian $u(t(p),i(t(p),t(q)))=t(p)$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p\vee(p\wedge q)$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p. Jadi hukum absorpsi $p\vee(p\wedge q)\equiv p$ berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

b) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p\wedge(p\vee q)$ adalah $i(t(p),u(t(p),t(q)))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p adalah $t(p)$. Karena $i(t(p),u(t(p),t(q)))=\min(t(p),u(t(p),t(q)))$, maka

$$\begin{aligned} i(t(p),u(t(p),t(q))) &= \min(t(p),u(t(p),t(q))) \\ &= \min(t(p),\max(t(p),t(q))) \end{aligned}$$

Ada dua kemungkinan yang terjadi antara $t(p)$ dan $t(q)$ yaitu $t(p)\le t(q)$ atau $t(p)>t(q)$

1) Jika $t(p)\le t(q)$ maka

$$\begin{aligned} i(t(p),u(t(p),t(q))) &= \min(t(p),\max(t(p),t(q))) \\ &= \min(t(p),t(q)) \\ &= t(p) \end{aligned}$$

2) Jika $t(p)>t(q)$ maka

$$\begin{aligned} i(t(p),u(t(p),t(q))) &= \min(t(p),\max(t(p),t(q))) \\ &= \min(t(p),t(p)) \\ &= t(p) \end{aligned}$$

Dengan demikian $i(t(p),u(t(p),t(q)))=t(p)$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p\wedge(p\vee q)$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p. Jadi hukum absorpsi $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

7) Hukum De Morgan

a) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

b) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Bukti:

a) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg(p \vee q)$ adalah $c(u(t(p),t(q)))$.

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg p \wedge \neg q$ adalah

$$i(c(t(p)),c(t(q))).$$

Karena $u(t(p),t(q)) = \max(t(p),t(q))$ dan $c(t(p)) = 1 - t(p)$, maka

$$\begin{aligned} c(u(t(p),t(q))) &= 1 - u(t(p),t(q)) \\ &= 1 - \max(t(p),t(q)) \end{aligned}$$

Pada bentuk $1 - \max(t(p),t(q))$ ada 2 kemungkinan antara $t(p)$ dan $t(q)$ yaitu $t(p) \le t(q)$ atau $t(p) > t(q)$.

1) Jika $t(p) \le t(q)$ maka $-t(p) \ge -t(q)$ sehingga $1 - t(p) \ge 1 - t(q)$ dengan demikian diperoleh

$1 - \max(t(p),t(q)) = 1 - t(q)$ dan $\min(1 - t(p), 1 - t(q)) = 1 - t(q)$.

Jadi $1 - \max(t(p),t(q)) = \min(1 - t(p), 1 - t(q))$.

2) Jika $t(p) > t(q)$ maka $-t(p) < -t(q)$ sehingga $1 - t(p) < 1 - t(q)$ dengan demikian diperoleh

$1 - \max(t(p),t(q)) = 1 - t(p)$ dan $\min(1 - t(p), 1 - t(q)) = 1 - t(p)$.

Jadi $1 - \max(t(p), t(q)) = \min(1 - t(p), 1 - t(q))$.

sehingga $c(u(t(p), t(q))) = \min(1 - t(p), 1 - t(q))$

$$= i(1 - t(p), 1 - t(q))$$

$$= i(c(t(p)), c(t(q)))$$

Dengan demikian $c(u(t(p), t(q))) = i(c(t(p)), c(t(q)))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg(p \vee q)$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg p \wedge \neg q$. Jadi hukum De Morgan $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

b) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg(p \wedge q)$ adalah $c(i(t(p), t(q)))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg p \vee \neg q$ adalah

$$u(c(t(p)), c(t(q))).$$

Karena $i(t(p), t(q)) = \min(t(p), t(q))$ dan $c(t(p)) = 1 - t(p)$, maka $c(i(t(p), t(q))) = 1 - i(t(p), t(q))$

sehingga $c(i(t(p), t(q))) = 1 - i(t(p), t(q))$

$$= 1 - \min(t(p), t(q))$$

$$= \max(1 - t(p), 1 - t(q))$$

$$= u(1 - t(p), 1 - t(q))$$

$$= u(c(t(p)), c(t(q)))$$

Dengan demikian $c(i(t(p), t(q))) = u(c(t(p)), c(t(q)))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg(p \wedge q)$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg p \vee \neg q$. Jadi hukum De Morgan $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

8) Hukum $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

Bukti:

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ adalah $i(u(c(t(p)), t(q)), u(t(p), c(t(q))))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ adalah $u(i(c(t(p)), c(t(q))), i(t(p), t(q)))$. Karena

$i(u(c(t(p)), t(q)), u(t(p), c(t(q)))) = \min(\max(1 - t(p), t(q)), \max(t(p), 1 - t(q)))$

Terdapat dua kemungkinan untuk $\max(1 - t(p), t(q))$ yaitu $\max(1 - t(p), t(q)) = 1 - t(p)$ dan $\max(1 - t(p), t(q)) = t(q)$

1) Jika $\max(1 - t(p), t(q)) = 1 - t(p)$ berarti $1 - t(p) \geq t(q)$ sehingga $t(p) \leq 1 - t(q)$. Dengan demikian

$$
\begin{aligned}
& i(u(c(t(p)), t(q)), u(t(p), c(t(q)))) \\
& \qquad = \min(\max(1 - t(p), t(q)), \max(t(p), 1 - t(q))) \\
& \qquad = \min(1 - t(p), 1 - t(q))
\end{aligned}
$$

2) Jika $\max(1 - t(p), t(q)) = t(q)$ berarti $1 - t(p) \leq t(q)$ sehingga $t(p) \geq 1 - t(q)$. Dengan demikian

$$
\begin{aligned}
& i(u(c(t(p)), t(q)), u(t(p), c(t(q)))) \\
& \qquad = \min(\max(1 - t(p), t(q)), \max(t(p), 1 - t(q))) \\
& \qquad = \min(t(q), t(p))
\end{aligned}
$$

Pada kasus ini terdapat permasalahan mana yang maksimum antara $1-t(p)$ dan $t(q)$ yang selanjutnya berakibat pada permasalahan mana yang maksimum antara $\min(1-t(p),1-t(q))$ dan $\min(t(q),t(p))$ sehingga

$$\begin{aligned} i(u(c(t(p)),t(q)),u(t(p),c(t(q)))) &= \min(\max(1-t(p),t(q)),\max(t(p),1-t(q))) \\ &= \max(\min(1-t(p),1-t(q)),\min(t(p),t(q))) \\ &= \max(\min(c(t(p)),c(t(q))),\min(t(p),t(q))) \\ &= \max(i(c(t(p)),c(t(q))),i(t(p),t(q))) \\ &= u(i(c(t(p)),c(t(q))),i(t(p),t(q))) \end{aligned}$$

Dengan demikian

$i(u(c(t(p)),t(q)),u(t(p),c(t(q)))) = u(i(c(t(p)),c(t(q))),i(t(p),t(q)))$.

Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$. Jadi hukum $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

9) Hukum $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$

Bukti:

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ adalah $u(i(c(t(p)),t(q)),i(t(p),c(t(q))))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ adalah $i(u(c(t(p)),c(t(q))),u(t(p),t(q)))$. Karena $u(i(c(t(p)),t(q)),i(t(p),c(t(q)))) = \max(\min(1-t(p),t(q)),\min(t(p),1-t(q)))$.

Terdapat dua kemungkinan untuk $\min(1-t(p),t(q))$ yaitu $\min(1-t(p),t(q)) = 1-t(p)$ dan $\min(1-t(p),t(q)) = t(q)$

1) Jika $\min(1-t(p),t(q)) = 1-t(p)$ berarti $1-t(p) \le t(q)$ sehingga

   $t(p) \ge 1-t(q)$. Dengan demikian

   $$u(i(c(t(p)),t(q)),i(t(p),c(t(q))))$$
   $$= \max(\min(1-t(p),t(q)),\min(t(p),1-t(q)))$$
   $$= \max(1-t(p),1-t(q))$$

2) Jika $\min(1-t(p),t(q)) = t(q)$ berarti $1-t(p) \ge t(q)$ sehingga

   $t(p) \le 1-t(q)$. Dengan demikian

   $$u(i(c(t(p)),t(q)),i(t(p),c(t(q))))$$
   $$= \max(\min(1-t(p),t(q)),\min(t(p),1-t(q)))$$
   $$= \max(t(q),t(p))$$

Pada kasus ini terdapat permasalahan mana yang minimum antara $1-t(p)$ dan $t(q)$ yang selanjutnya berakibat pada permasalahan mana yang minimum antara $\max(1-t(p),1-t(q))$ dan $\max(t(q),t(p))$ sehingga

$$\begin{aligned} u(i(c(t(p)),t(q)),i(t(p),c(t(q)))) &= \max(\min(1-t(p),t(q)),\min(t(p),1-t(q))) \\ &= \min(\max(1-t(p),1-t(q)) \text{ }, \max(t(p),t(q))) \\ &= \min(\max(c(t(p)),c(t(q))) \text{ }, \max(t(p),t(q))) \\ &= \min(u(c(t(p)),c(t(q))),u(t(p),t(q))) \\ &= i(u(c(t(p)),c(t(q))),u(t(p),t(q))) \end{aligned}$$

Dengan demikian

$u(i(c(t(p)),t(q)),i(t(p),c(t(q)))) = i(u(c(t(p)),c(t(q))),u(t(p),t(q)))$.

Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$. Jadi hukum $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

3.2 Hukum-hukum Logika Klasik yang Tidak Berlaku pada Logika Fuzzy Zadeh

Pembuktian hukum-hukum logika klasik yang tidak berlaku pada logika fuzzy Zadeh adalah sebagai berikut:

1) Hukum $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Bukti:

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \rightarrow q$ adalah $J(t(p), t(q))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg p \vee q$ adalah $u(c(t(p), t(q))$. Karena $J(t(p), t(q)) = \max(1 - t(p), \min(t(p), t(q)))$ dan $u(c(t(p), t(q)) = \max(1 - t(p), t(q))$.

Ada dua kemungkinan yang terjadi antara $t(p)$ dan $t(q)$ yaitu:

1) Jika $t(p) \geq t(q)$ maka

$$\begin{aligned} J(t(p), t(q)) &= \max(1 - t(p), \min(t(p), t(q))) \\ &= \max(1 - t(p), t(q)) \\ &= u(c(t(p), t(q)) \end{aligned}$$

2) Jika $t(p) < t(q)$ maka

$$\begin{aligned} J(t(p), t(q)) &= \max(1 - t(p), \min(t(p), t(q))) \\ &= \max(1 - t(p), t(p)) \end{aligned}$$

$$= u(c(t(p), t(p))$$

$$\neq u(c(t(p), t(q))$$

Dengan demikian jika $t(p) < t(q)$ maka nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \rightarrow q$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg p \vee q$. Jadi hukum $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ tidak berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

Hal ini dapat ditunjukkan melalui contoh sebagai berikut.

Misal proposisi fuzzy p memiliki nilai kebenaran 0.6 dan proposisi fuzzy q memiliki nilai kebenaran 0.8. karena nilai kebenaran proposisi fuzzy $p \rightarrow q$ adalah $J(t(p), t(q))$ dan nilai kebenaran proposisi fuzzy $\neg p \vee q$ adalah $u(c(t(p), t(q))$, maka

$$J(t(p), t(q)) = \max(1 - t(p), \min(t(p), t(q)))$$

$$= \max(1 - 0.6, \min(0.6, 0.8))$$

$$= \max(0.4, 0.6)$$

$$= 0.6$$

dan

$$u(c(t(p), t(q)) = \max(1 - t(p), t(q))$$

$$= \max(1 - 0.6, 0.8)$$

$$= \max(0.4, 0.8)$$

$$= 0.8$$

Dengan demikian $J(t(p),t(q)) \neq u(c(t(p),t(q)))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \to q$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg p \vee q$. Jadi hukum $p \to q \equiv \neg p \vee q$ tidak berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

2) Hukum Kontraposisi

$$p \to q \equiv \neg p \to \neg q$$

Bukti:

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \to q$ adalah $J(t(p),t(q))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg p \to \neg q$ adalah $J(c(t(q)),c(t(p)))$..

Karena $J(t(p),t(q)) = \max(1-t(p),\min(t(p),t(q)))$ dan

$$\begin{aligned} J(c(t(q)),c(t(p))). &= \max(1-c(t(q)),\min(c(t(q)),c(t(p))) \\ &= \max(1-(1-t(q))),\min(1-t(q),1-t(p))) \\ &= \max(t(q),\min(1-t(q),1-t(p))) \end{aligned}$$

Karena $t(p),t(q) \in [0,1]$ maka $t(p),t(q)$ merupakan bilangan yang sama atau bilangan terurut. Ada delapan kemungkinan urutan, yaitu sebagai berikut:

1. $1-t(q) \leq 1-t(p) \leq t(p) \leq t(q)$
2. $1-t(q) \leq t(p) \leq 1-t(p) \leq t(q)$
3. $t(q) \leq 1-t(p) \leq t(p) \leq 1-t(q)$
4. $t(q) \leq t(p) \leq 1-t(p) \leq 1-t(q)$
5. $1-t(p) \leq 1-t(q) \leq t(q) \leq t(p)$

6. $1-t(p)\le t(q)\le 1-t(q)\le t(p)$

7. $t(p)\le 1-t(q)\le t(q)\le 1-t(p)$

8. $t(p)\le t(q)\le 1-t(q)\le 1-t(p)$

Misal $t(q)<t(p)$ dan $1-t(p)<1-t(q)$

$$J(t(p),t(q)) = \max(1-t(p),\min(t(p),t(q)))$$

$$= \max(1-t(p),t(q))$$

dan $J(c(t(q)),c(t(p))). = \max(1-c(t(q)),\min(c(t(q)),c(t(p)))$

$$= \max(1-(1-t(q))),\min(1-t(q),1-t(p)))$$

$$= \max(t(q),\min(1-t(q),1-t(p)))$$

$$= \max(t(q),1-t(p))$$

Jadi $J(t(p),t(q)) = J(c(t(q)),c(t(p)))$. (pada saat $t(q)<t(p)$)

Jika $t(p)<t(q)$ dan $1-t(q)<1-t(p)$

$$J(t(p),t(q)) = \max(1-t(p),\min(t(p),t(q)))$$

$$= \max(1-t(p),t(p))$$

dan $J(c(t(q)),c(t(p))). = \max(1-c(t(q)),\min(c(t(q)),c(t(p)))$

$$= \max(1-(1-t(q))),\min(1-t(q),1-t(p)))$$

$$= \max(t(q),\min(1-t(q),1-t(p)))$$

$$= \max(t(q),1-t(q))$$

Jadi $J(t(p),t(q)) \ne J(c(t(q)),c(t(p)))$.(pada saat $t(p)<t(q)$ dengan syarat $t(p)$ dan $t(q)$ bukan 0 dan 1).

Hal ini dapat ditunjukkan melalui contoh sebagai berikut.

Misal proposisi fuzzy p memiliki nilai kebenaran $\frac{1}{6}$ dan proposisi fuzzy q memiliki nilai kebenaran $\frac{1}{4}$. karena nilai kebenaran proposisi fuzzy $p \to q$ adalah $J(t(p), t(q))$ dan nilai kebenaran proposisi fuzzy $\neg p \to \neg q$ adalah $J(c(t(q)), c(t(p)))$, maka

$$
\begin{aligned}
J(t(p), t(q)) &= \max(1 - t(p), \min(t(p), t(q))) \\
&= \max(1 - t(p), \min(t(p), t(q))) \\
&= \max\left(1 - \tfrac{1}{6}, \min\left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{4}\right)\right) \\
&= \max\left(\tfrac{5}{6}, \tfrac{1}{6}\right) \\
&= \tfrac{5}{6}
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
J(c(t(q)), c(t(p))). &= \max(1 - c(t(q)), \min(c(t(q)), c(t(p))) \\
&= \max(1 - (1 - t(q))), \min(1 - t(q), 1 - t(p))) \\
&= \max(t(q), \min(1 - t(q), 1 - t(p))) \\
&= \max\left(\tfrac{1}{4}, \min\left(1 - \tfrac{1}{4}, 1 - \tfrac{1}{6}\right)\right) \\
&= \tfrac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Dengan demikian $J(t(p), t(q)) \neq J(c(t(q)), c(t(p)))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \to q$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg p \to \neg q$. Jadi hukum kontraposisi $p \to q \equiv \neg p \to \neg q$ tidak berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

3) Hukum $p \to q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$

Bukti:

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \to q$ adalah $J(t(p),t(q))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg(p \wedge \neg q)$ adalah $c(i(t(p),c(t(q))))$. Karena $J(t(p),t(q)) = \max(1-t(p),\min(t(p),t(q)))$ dan

$c(i(t(p),c(t(q)))) = 1 - i(t(p),c(t(q)))$

$c(i(t(p),c(t(q)))) = 1 - \min(t(p),c(t(q)))$

$c(i(t(p),c(t(q)))) = 1 - \min(t(p),1-t(q))$

Hal ini dapat ditunjukkan melalui contoh sebagai berikut.

Misal proposisi fuzzy p memiliki nilai kebenaran 0.7 dan proposisi fuzzy q memiliki nilai kebenaran 0.9. karena nilai kebenaran proposisi fuzzy $p \to q$ adalah $J(t(p),t(q))$ dan nilai kebenaran proposisi fuzzy $\neg(p \wedge \neg q)$ adalah $c(i(t(p),c(t(q))))$, maka

$$
\begin{aligned}
J(t(p),t(q)) &= \max(1-t(p),\min(t(p),t(q))) \\
&= \max(1-0.7,\min(0.7,0.9)) \\
&= \max(0.3,0.7) \\
&= 0.7
\end{aligned}
$$

dan

$c(i(t(p),c(t(q)))) = 1 - i(t(p),c(t(q)))$

$$= 1 - \min(t(p), 1 - t(q))$$

$$= 1 - \min(0.7, 1 - 0.9)$$

$$= 1 - \min(0.7, 0.1)$$

$$= 0.9$$

Dengan demikian nilai kebenaran $J(t(p), t(q)) \neq c(i(t(p), c(t(q))))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \to q$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg(p \wedge \neg q)$. Jadi hukum $p \to q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$ tidak berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

4) Hukum $p \to q \equiv (p \wedge \neg q) \to p$

Bukti:

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \to q$ adalah $J(t(p), t(q))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \wedge \neg q) \to p$ adalah $J(i(t(p), c(t(q))), t(p))$.

Karena $J(t(p), t(q)) = \max(1 - t(p), \min(t(p), t(q)))$ dan

$J(i(t(p), c(t(q))), t(p)) = J(\min(t(p), c(t(q))), t(p))$, maka

$$J(i(t(p), c(t(q))), t(p))$$
$$= \max(1 - \min(t(p), c(t(q))), \min(\min(t(p), c(t(q))), t(p)))$$

$$= \max(1 - \min(t(p), c(t(q))), \min(t(p), c(t(q)), t(p)))$$

$$= \max(1 - \min(t(p), 1 - t(q)), \min(t(p), 1 - t(q)), t(p)))$$

Hal ini dapat ditunjukkan melalui contoh sebagai berikut.

Misal proposisi fuzzy p memiliki nilai kebenaran 0.4 dan proposisi fuzzy q memiliki nilai kebenaran 0.8 karena nilai kebenaran proposisi fuzzy

$p \to q$ adalah $J(t(p),t(q))$ dan nilai kebenaran proposisi fuzzy $(p \wedge \neg q) \to p$ adalah $J(i(t(p),c(t(q))),t(p))$, maka

$$J(t(p),t(q)) = \max(1-t(p),\min(t(p),t(q)))$$
$$= \max(1-0.4,\min(0.4,0.8))$$
$$= \max(0.6,0.4)$$
$$= 0.6$$

dan

$$J(i(t(p),c(t(q))),t(p)) = J(\min(t(p),c(t(q))),t(p))$$
$$= \max(1-\min(t(p),1-t(q)),\min(t(p),1-t(q)),t(p)))$$
$$= \max(1-\min(0.4,1-0.8),\min(0.4,1-0.8),0.4))$$
$$= \max(1-\min(0.4,0.2),\min(0.4,0.2),0.4))$$
$$= \max(1-0.2,0.2)$$
$$= 0.8$$

Dengan demikian $J(t(p),t(q)) \neq J(i(t(p),c(t(q))),t(p))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \to q$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \wedge \neg q) \to p$. Jadi hukum $p \to q \equiv (p \wedge \neg q) \to p$ tidak berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

5) Hukum Kontradiksi

Nilai kebenaran dari konjungsi $p \wedge \neg p$ adalah 0

. Bukti:

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge \neg p$ adalah $i(t(p), c(t(p)))$.

Karena $i(t(p), c(t(p))) = \min(t(p), 1 - t(p))$

maka ada dua kemungkinan yaitu

$\min(t(p), 1 - t(p)) = t(p)$ jika $t(p) \leq 1 - t(p)$

dan

$\min(t(p), 1 - t(p)) = 1 - t(p)$ jika $t(p) \geq 1 - t(p)$

Jika $t(p) = 0$ maka $i(t(p), c(t(p))) = 0$ tetapi jika $0 < t(p) < 1$ maka $i(t(p), c(t(p))) \neq 0$

Jadi hukum kontradiksi tidak berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

6) Hukum Penyisihan Jalan Tengah

Nilai kebenaran dari disjungsi $p \vee \neg p$ adalah 1

Bukti:

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee \neg p$ adalah $u(t(p), c(t(p)))$.

Karena $u(t(p), c(t(p))) = \max(t(p), 1 - t(p))$

maka ada dua kemungkinan yaitu

$\max(t(p), 1 - t(p)) = t(p)$ jika $t(p) \geq 1 - t(p)$

dan

$\max(t(p), 1 - t(p)) = 1 - t(p)$ jika $t(p) \leq 1 - t(p)$

Jika $t(p) = 1$ maka $u(t(p), c(t(p))) = 1$ tetapi jika $0 < t(p) < 1$ maka $u(t(p), c(t(p))) \neq 1$

Jadi hukum penyisihan jalan tengah tidak berlaku pada logika fuzzy Zadeh.

3.3 Hukum-hukum Logika Klasik yang Berlaku pada Logika Fuzzy Klir-Yuan

Pembuktian hukum-hukum logika klasik yang berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan adalah sebagai berikut:

1) Hukum Negasi Rangkap

   $p \equiv \neg\neg p$

   Bukti:

   Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p adalah $t(p)$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg\neg p$ adalah $c(c(t(p)))$. Karena nilai kebenaran dari negasi proposisi fuzzy p adalah $c(t(p))$ dan karena $c(t(p)) = 1 - t(p)$, maka

   $$\begin{aligned} t(p) &= 1 - (1 - t(p)) \\ &= 1 - c(t(p)) \\ &= c(c(t(p))) \end{aligned}$$

   Dengan demikian $t(p) = c(c(t(p)))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg\neg p$.

   Jadi hukum negasi rangkap berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

2) Hukum Komutatif

a) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

b) $p \vee q \equiv q \vee p$

Bukti :

a) Hukum komutatif $p \wedge q \equiv q \wedge p$ berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan jika dapat dibuktikan bahwa nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge q$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $q \wedge p$ yaitu harus dibuktikan $i(t(p),t(q)) = i(t(q),t(p))$.

   Karena $i(t(p),t(q)) = [t(p)][t(q)]$, maka

$$
\begin{aligned}
i(t(p),t(q)) &= [t(p)][t(q)] \\
&= [t(q)][t(p)] \\
&= i(t(q),t(p))
\end{aligned}
$$

   Jadi terbukti $i(t(p),t(q)) = i(t(q),t(p))$. Dengan demikian hukum komutatif $p \wedge q \equiv q \wedge p$ berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

b) Hukum komutatif $p \vee q \equiv q \vee p$ berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan jika dapat dibuktikan bahwa nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee q$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $q \vee p$ yaitu harus dibuktikan $u(t(p),t(q)) = u(t(q),t(p))$.

   Karena $u(t(p),t(q)) = t(p) + t(q) - [t(p)][t(q)]$, maka

$$
u(t(p),t(q)) = t(p) + t(q) - [t(p)][t(q)]
$$

$$= t(q) + t(p) - [t(q)][t(p)]$$

$$= u(t(q), t(p))$$

Jadi terbukti $u(t(p), t(q)) = u(t(q), t(p))$. Dengan demikian hukum komutatif $p \vee q \equiv q \vee p$ berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

3) Hukum Asosiatif

a) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

b) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

Bukti :

a) Hukum asosiatif $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan jika dapat dibuktikan bahwa nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge (q \wedge r)$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \wedge q) \wedge r$ yaitu harus dibuktikan

$$i(t(p), i(t(q), t(r))) = i(i(t(p), t(q)), t(r)).$$

Karena $i(t(p), t(q)) = [t(p)][t(q)]$, maka

$$i(t(p), i(t(q), t(r))) = i(t(p), [t(q)][t(r)])$$

$$i(t(p), i(t(q), t(r))) = [t(p)]([t(q)][t(r)])$$

$$= ([t(p)][t(q)])[t(r)]$$

$$= i([t(p)][t(q)], t(r))$$

$$= i(i(t(p), t(q)), t(r))$$

Jadi terbukti $i(t(p),i(t(q),t(r))) = i(i(t(p),t(q)),t(r))$. Dengan demikian hukum asosiatif $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

b) Hukum asosiatif $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan jika dapat dibuktikan bahwa nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee (q \vee r)$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \vee q) \vee r$ yaitu harus dibuktikan

$$u(t(p),u(t(q),t(r))) = u(u(t(p),t(q)),t(r)).$$

Karena $u(t(p),t(q)) = t(p) + t(q) - [t(p)][t(q)]$, maka

$$\begin{aligned} u(t(p),u(t(q),t(r))) &= t(p) + u(t(q),t(r)) - [t(p)][u(t(q),t(r))] \\ &= t(p) + \{t(q) + t(r) - [t(q)][t(r)]\} - [t(p)]\{t(q) + t(r) - [t(q)][t(r)]\} \\ &= u(u(t(p),t(q)),t(r)) \end{aligned}$$

Jadi terbukti $u(t(p),u(t(q),t(r))) = u(u(t(p),t(q)),t(r))$.

Dengan demikian hukum asosiatif $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

4) Hukum De Morgan

a) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

b) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Bukti :

a) Hukum De Morgan $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan jika dapat dibuktikan bahwa nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg(p \vee q)$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg p \wedge \neg q$ yaitu harus dibuktikan

$$c(u(t(p),t(q))) = i(c(t(p)),c(t(q))).$$

Karena $c(u(t(p),t(q))) = 1 - u(t(p),t(q)) = 1 - (t(p) + t(q) - [t(p)][t(q)])$ dan $u(t(p),t(q)) = t(p) + t(q) - [t(p)][t(q)]$, maka

$$c(u(t(p),t(q))) = 1 - u(t(p),t(q))$$

$$\begin{aligned} c(u(t(p),t(q))) &= 1 - (t(p) + t(q) - [t(p)][t(q)]) \\ &= 1 - t(p) - t(q) + [t(p)][t(q)] \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} i(c(t(p)),c(t(q))) &= [c(t(p))][c(t(q))] \\ &= (1 - t(p))(1 - t(q)) \\ &= 1 - t(p) - t(q) + [t(p)][t(q)] \end{aligned}$$

Jadi terbukti $c(u(t(p),t(q))) = i(c(t(p)),c(t(q)))$. Dengan demikian hukum De Morgan $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

b) Hukum De Morgan $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan jika dapat dibuktikan bahwa nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg(p \wedge q)$ sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg p \vee \neg q$ yaitu harus dibuktikan

$$c(i(t(p),t(q))) = u(c(t(p)),c(t(q))).$$

Karena $c(i(t(p),t(q))) = 1 - i(t(p),t(q)) = 1 - [t(p)][t(q)]$ dan $i(t(p),t(q)) = [t(p)][t(q)]$, maka

$$c(i(t(p),t(q))) = 1 - i(t(p),t(q))$$

$$c(i(t(p),t(q))) = 1 - [t(p)][t(q)]$$

dan

$$\begin{aligned} u(c(t(p)),c(t(q))) &= (1 - t(p)) + (1 - t(q)) - (1 - t(p))(1 - t(q)) \\ &= (1 - t(p)) + (1 - t(q)) - (1 - t(p) - t(q) + [t(p)][t(q)]) \\ &= 1 - [t(p)][t(q)] \end{aligned}$$

Jadi terbukti $c(i(t(p),t(q))) = u(c(t(p)),c(t(q)))$. Dengan demikian hukum De Morgan $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

3.4 Hukum-hukum Logika klasik yang Tidak Berlaku pada Logika Fuzzy Klir-Yuan

Pembuktian hukum-hukum logika klasik yang tidak berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan adalah sebagai berikut:

1) Hukum Distributif

a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

b) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Bukti :

a) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge (q \vee r)$ adalah $i(t(p),u(t(q),t(r)))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ adalah $u(i(t(p),t(q)),i(t(p),t(r)))$. Karena

$$i(t(p),u(t(q),t(r))) = i(t(p),\{t(q)+t(r)-[t(q)][t(r)]\}$$

$$= [t(p)][t(q)+t(r)-[t(q)][t(r)]]$$

$$= [t(p)][t(q)]+[t(p)][t(r)] - [t(p)][t(q)][t(r)]$$

dan

$$u(i(t(p),t(q)),i(t(p),t(r))) = u([t(p)][t(q)],[t(p)][t(r)])$$

$$u(i(t(p),t(q)),i(t(p),t(r))) = [t(p)][t(q)]+[t(p)][t(r)] -$$

$$[t(p)][t(q)][t(p)][t(r)]$$

Dengan demikian $i(t(p),u(t(q),t(r))) \neq u(i(t(p),t(q)),i(t(p),t(r)))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge (q \vee r)$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. Jadi hukum distributif $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ tidak berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

b) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee (q \wedge r)$ adalah $u(t(p),i(t(q),t(r)))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ adalah $i(u(t(p),t(q)),u(t(p),t(r)))$. Karena

$$u(t(p),i(t(q),t(r))) = u(t(p),[t(q)][t(r)])$$

$$u(t(p),i(t(q),t(r))) = t(p)+[t(q)][t(r)]-[t(p)][t(q)][t(r)]$$

dan

$$i(u(t(p),t(q)),u(t(p),t(r)))$$
$$= i(t(p)+t(q)-[t(p)][t(q)],t(p)+t(r)-[t(p)][t(r)])$$
$$= [t(p)+t(q)-[t(p)][t(q)]][t(p)+t(r)-[t(p)][t(r)]]$$

Dengan demikian $u(t(p),i(t(q),t(r))) \neq i(u(t(p),t(q)),u(t(p),t(r)))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee (q \wedge r)$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$. Jadi hukum distributif $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ tidak berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

2) Hukum Idempoten

a) $p \wedge p \equiv p$

b) $p \vee p \equiv p$

Bukti :

a) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge p$ adalah $i(t(p),t(p))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p adalah $t(p)$. Karena $i(t(p),t(p)) = [t(p)][t(p)]$, maka

$$i(t(p),t(p)) = [t(p)][t(p)]$$
$$\neq t(p)$$

Dengan demikian $i(t(p),t(p)) \neq t(p)$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge p$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p. Jadi hukum idempoten $p \wedge p \equiv p$ tidak berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

b) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee p$ adalah $u(t(p),t(p))$. Nilai kebenaran proposisi fuzzy p adalah $t(p)$. Karena $u(t(p),t(p)) = t(p) + t(p) - [t(p)][t(p)]$, maka

$$u(t(p),t(p)) = t(p) + t(p) - [t(p)][t(p)]$$
$$= 2(t(p)) - [t(p)]^2$$

Dengan demikian $u(t(p),t(p)) \neq t(p)$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee p$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p. Jadi hukum idempoten $p \vee p \equiv p$ tidak berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

3) Hukum Absorpsi

a) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

b) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Bukti :

a) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee (p \wedge q)$ adalah $u(t(p),i(t(p),t(q)))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p adalah $t(p)$. Karena $u(t(p),t(q)) = t(p) + t(q) - [t(p)][t(q)]$ dan $i(t(p),t(q)) = [t(p)][t(q)]$, maka

$$u(t(p),i(t(p),t(q))) = u(t(p),[t(p)][t(q)])$$
$$= t(p) + ([t(p)][t(q)]) - [t(p)][[t(p)][t(q)]]$$
$$\neq t(p)$$

Dengan demikian $u(t(p),i(t(p),t(q))) \neq t(p)$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee (p \wedge q)$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p. Jadi hukum absorpsi $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ tidak berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

b) Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge (p \vee q)$ adalah $i(t(p),u(t(p),t(q)))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p adalah $t(p)$. Karena $u(t(p),t(q)) = t(p)+t(q)-[t(p)][t(q)]$

dan $i(t(p),t(q)) = [t(p)][t(q)]$, maka

$$\begin{aligned} i(t(p),u(t(p),t(q))) &= i(t(p),t(p)+t(q)-[t(p)][t(q)]) \\ &= [t(p)][t(p)+t(q)-[t(p)][t(q)]] \\ &\neq t(p) \end{aligned}$$

Dengan demikian $i(t(p),u(t(p),t(q))) \neq t(p)$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge (p \vee q)$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy p. Jadi hukum absorpsi $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ tidak berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

4) Hukum $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

Bukti:

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ adalah $i(u(c(t(p)),t(q)),u(t(p),c(t(q))))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ adalah $u(i(c(t(p)),c(t(q))),i(t(p),t(q)))$. Karena

$u(c(t(p)),t(q)) = c(t(p)) + t(q) - [c(t(p))][t(q)]$ dan $i(t(p),t(q)) = [t(p)][t(q)]$,

maka

$$
\begin{aligned}
&i(u(c(t(p)),t(q)),u(t(p),c(t(q)))\\
&\qquad = i(c(t(p)) + t(q) - [c(t(p))][t(q)], t(p) + c(t(q)) - [t(p)][c(t(q))])\\
&\qquad = [(c(t(p)) + t(q) - [c(t(p))][t(q)])][t(p) + c(t(q)) - [t(p)][c(t(q))]]\\
&\qquad = [(1 - t(p) + t(q) - [1 - t(p)][t(q)])][t(p) + (1 - t(q)) - [t(p)][1 - t(q)]]
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
&u(i(c(t(p)),c(t(q))),i(t(p),t(q)))\\
&\qquad = u([c(t(p))][c(t(q))],[t(p)][t(q)])\\
&\qquad = ([c(t(p))][c(t(q))]) + ([t(p)][t(q)]) - [([c(t(p))][c(t(q))])][([t(p)][t(q)])]\\
&\qquad = ([1 - t(p)][1 - t(q)]) + ([t(p)][t(q)]) - [([1 - t(p)][1 - t(q)])][([t(p)][t(q)])]
\end{aligned}
$$

Dengan demikian

$i(u(c(t(p)),t(q)),u(t(p),c(t(q))) \neq u(i(c(t(p)),c(t(q))),i(t(p),t(q)))$.

Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$. Jadi hukum $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ tidak berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

5) Hukum $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$

Bukti :

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ adalah $u(i(c(t(p)),t(q)),i(t(p),c(t(q))))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ adalah $i(u(c(t(p)),c(t(q))),u(t(p),t(q)))$. Karena

$u(t(p),t(q)) = t(p) + t(q) - [t(p)][t(q)]$ dan $i(t(p),t(q)) = [t(p)][t(q)]$, maka

$u(i(c(t(p)),t(q)),i(t(p),c(t(q))$

$$= u([c(t(p))][t(q)],[t(p)][c(t(q))])$$

$$= ([c(t(p))][t(q)]) + ([t(p)][c(t(q))]) - [[c(t(p))][t(q)]][[t(p)][c(t(q))]]$$
$$= ([1 - t(p)][t(q)]) + ([t(p)][1 - t(q)]) - [[1 - t(p)][t(q)]][[t(p)][1 - t(q)]]$$

dan

$i(u(c(t(p)),c(t(q))),u(t(p),t(q)))$
$$= i(c(t(p)) + c(t(q)) - [c(t(p))][c(t(q))],t(p) + t(q) - [t(p)][t(q)])$$

$$= [c(t(p)) + c(t(q)) - [c(t(p))][c(t(q))]][t(p) + t(q) - [t(p)][t(q)]]$$
$$= [(1 - t(p)) + (1 - t(q)) - [1 - t(p)][1 - t(q)]][t(p) + t(q) - [t(p)][t(q)]]$$

Dengan demikian

$u(i(c(t(p)),t(q)),i(t(p),c(t(q)))) \neq i(u(c(t(p)),c(t(q))),u(t(p),t(q)))$.

Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$. Jadi hukum $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ tidak berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

6) Hukum $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Bukti:

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \rightarrow q$ adalah $J(t(p),t(q))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg p \vee q$ adalah $u(c(t(p),t(q))$. Karena $J(t(p),t(q)) = 1 - t(p) + [t(p)]^2[t(q)]$ dan

$u(c(t(p),t(q)) = c(t(p)) + t(q) - [c(t(p))][t(q)]$.

$$= (1 - t(p)) + t(q) - [1 - t(p)][t(q)]$$

$$= 1 - t(p) + [t(p)][t(q)]$$

Hal ini dapat ditunjukkan melalui contoh sebagai berikut.

Misal proposisi fuzzy p memiliki nilai kebenaran $\frac{1}{4}$ dan proposisi fuzzy q memiliki nilai kebenaran $\frac{1}{2}$. Karena nilai kebenaran proposisi fuzzy $p \to q$ adalah $J(t(p), t(q))$ dan nilai kebenaran proposisi fuzzy $\neg p \vee q$ adalah $u(c(t(p), t(q))$, maka

$$J(t(p), t(q)) = 1 - t(p) + [t(p)]^2 [t(q)]$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \left[\frac{1}{4}\right]^2 \left[\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{25}{32}$$

dan

$$u(c(t(p), t(q)) = c(t(p)) + t(q) - [c(t(p))][t(q)]$$

$$= 1 - t(p) + [t(p)][t(q)]$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \left[\frac{1}{4}\right]\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{7}{8}$$

Dengan demikian $J(t(p), t(q)) \neq u(c(t(p), t(q))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \to q$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg p \vee q$. Jadi hukum $p \to q \equiv \neg p \vee q$ tidak berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

7) Hukum Kontraposisi

$p \rightarrow q \equiv \neg p \rightarrow \neg q$

Bukti:

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \rightarrow q$ adalah $J(t(p), t(q))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg p \rightarrow \neg q$ adalah $J(c(t(q)), c(t(p)))$.

Karena $J(t(p), t(q)) = 1 - t(p) + [t(p)]^2 [t(q)]$ dan

$$\begin{aligned} J(c(t(q)), c(t(p))) &= 1 - c(t(q)) + [c(t(q))]^2 [c(t(p))] \\ &= 1 - (1 - t(q)) + [1 - t(q)]^2 [1 - t(p)] \\ &= t(q) + [1 - t(q)]^2 [1 - t(p)] \end{aligned}$$

Hal ini dapat ditunjukkan melalui contoh sebagai berikut.

Misal proposisi fuzzy p memiliki nilai kebenaran $\frac{1}{3}$ dan proposisi fuzzy q memiliki nilai kebenaran $\frac{1}{2}$. Karena nilai kebenaran proposisi fuzzy $p \rightarrow q$ adalah $J(t(p), t(q))$ dan nilai kebenaran proposisi fuzzy $\neg p \rightarrow \neg q$ adalah $J(c(t(q)), c(t(p)))$, maka

$$\begin{aligned} J(t(p), t(q)) &= 1 - t(p) + [t(p)]^2 [t(q)] \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{3}\right]^2 \left[\frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{11}{18} \end{aligned}$$

dan

$$J(c(t(q)), c(t(p))) = 1 - c(t(q)) + [c(t(q))]^2 [c(t(p))]$$

$$= t(q) + [1 - t(q)]^2 [1 - t(p)]$$

$$= \frac{1}{2} + \left[1 - \frac{1}{2}\right]^2 \left[1 - \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{2}{3}$$

Dengan demikian nilai kebenaran $J(t(p), t(q)) \neq J(c(t(q)), c(t(p)))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \to q$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg p \to \neg q$. Jadi hukum kontraposisi $p \to q \equiv \neg p \to \neg q$ tidak berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

8) Hukum $p \to q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$

Bukti:

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \to q$ adalah $J(t(p), t(q))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg(p \wedge \neg q)$ adalah $c(i(t(p), c(t(q))))$.

Karena $J(t(p), t(q)) = 1 - t(p) + [t(p)]^2 [t(q)]$ dan

$$c(i(t(p), c(t(q)))) = 1 - i(t(p), c(t(q)))$$

$$= 1 - [t(p)][c(t(q))]$$

$$= 1 - [t(p)][1 - t(q)]$$

$$= 1 - [t(p)] + [t(p)][t(q)]$$

Hal ini dapat ditunjukkan melalui contoh sebagai berikut.

Misal proposisi fuzzy p memiliki nilai kebenaran $\frac{1}{3}$ dan proposisi fuzzy q memiliki nilai kebenaran $\frac{1}{4}$. Karena nilai kebenaran proposisi fuzzy $p \to q$ adalah $J(t(p), t(q))$ dan nilai kebenaran proposisi fuzzy $\neg(p \wedge \neg q)$ adalah $c(i(t(p), c(t(q))))$, maka

$$J(t(p), t(q)) = 1 - t(p) + [t(p)]^2 [t(q)]$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{3}\right]^2 \left[\frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{25}{36}$$

dan

$$c(i(t(p), c(t(q)))) = 1 - i(t(p), c(t(q)))$$

$$c(i(t(p), c(t(q)))) = 1 - [t(p)] + [t(p)][t(q)]$$

$$c(i(t(p), c(t(q)))) = 1 - \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{3}\right]\left[\frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{9}{12}$$

Dengan demikian nilai kebenaran $J(t(p), t(q)) \neq c(i(t(p), c(t(q))))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \to q$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $\neg(p \wedge \neg q)$. Jadi hukum $p \to q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$ tidak berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

9) Hukum $p \to q \equiv (p \wedge \neg q) \to p$

Bukti:

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \to q$ adalah $J(t(p),t(q))$. Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \wedge \neg q) \to p$ adalah $J(i(t(p),c(t(q))),t(p))$. Karena $J(t(p),t(q)) = 1 - t(p) + [t(p)]^2 [t(q)]$ dan

$$
\begin{aligned}
J(i(t(p),c(t(q))),t(p)) &= J([t(p)][c(t(q))],t(p)) \\
&= 1 - ([t(p)][c(t(q))]) + [[t(p)][c(t(q))]]^2 [t(p)] \\
&= 1 - ([t(p)][1 - t(q)]) + [[t(p)][1 - t(q)]]^2 [t(p)]
\end{aligned}
$$

Hal ini dapat ditunjukkan melalui contoh sebagai berikut.

Misal proposisi fuzzy p memiliki nilai kebenaran $\frac{1}{2}$ dan proposisi fuzzy q memiliki nilai kebenaran $\frac{1}{3}$. Karena nilai kebenaran proposisi fuzzy $p \to q$ adalah $J(t(p),t(q))$ dan nilai kebenaran proposisi fuzzy $(p \wedge \neg q) \to p$ adalah $J(i(t(p),c(t(q))),t(p))$, maka

$$
\begin{aligned}
J(t(p),t(q)) &= 1 - t(p) + [t(p)]^2 [t(q)] \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}\right]^2 \left[\frac{1}{3}\right] \\
&= \frac{7}{12}
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
J(i(t(p),c(t(q))),t(p)) &= J([t(p)][c(t(q))],t(p)) \\
&= 1 - ([t(p)][1 - t(q)]) + [[t(p)][1 - t(q)]]^2 [t(p)] \\
&= 1 - \left(\left[\frac{1}{2}\right]\left[1 - \frac{1}{3}\right]\right) + \left[\left[\frac{1}{2}\right]\left[1 - \frac{1}{3}\right]\right]^2 \left[\frac{1}{2}\right]
\end{aligned}
$$

$$= 1 - \left(\left[\frac{1}{2}\right]\left[\frac{2}{3}\right]\right) + \left[\left[\frac{1}{2}\right]\left[\frac{2}{3}\right]\right]^2 \left[\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{13}{18}$$

Dengan demikian nilai kebenaran $J(t(p), t(q)) \neq J(i(t(p), c(t(q))), t(p))$. Ini berarti nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \to q$ tidak sama dengan nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $(p \wedge \neg q) \to p$. Jadi hukum $p \to q \equiv (p \wedge \neg q) \to p$ tidak berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

10) Hukum Kontradiksi

Nilai kebenaran dari konjungsi $p \wedge \neg p$ adalah 0

Bukti:

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \wedge \neg p$ adalah $i(t(p), c(t(p)))$. Hukum kontradiksi tidak berlaku pada logika fuzzy Klir- Yuan karena tidak semua $t(p)$ memenuhi $i(t(p), c(t(p))) = 0$.

Hal ini dapat ditunjukkan melalui contoh sebagai berikut.

Misal proposisi fuzzy p memiliki nilai kebenaran $\frac{1}{6}$ maka

$$i(t(p), c(t(p))) = [t(p)][c(t(p))]$$

$$i(t(p), c(t(p))) = [t(p)][1 - t(p)]$$

$$= \left[\frac{1}{6}\right]\left[1 - \frac{1}{6}\right]$$

$$= \frac{5}{36}$$

Jadi tidak semua $t(p)$ memenuhi $i(t(p),c(t(p)))=0$. Dengan demikian hukum kontradiksi tidak berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

11) Hukum Penyisihan Jalan Tengah

Nilai kebenaran dari disjungsi $p \vee \neg p$ adalah 1

Bukti:

Nilai kebenaran dari proposisi fuzzy $p \vee \neg p$ adalah $u(t(p),c(t(p)))$. Hukum penyisihan jalan tengah tidak berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan karena tidak semua $t(p)$ memenuhi $u(t(p),c(t(p)))=1$.

Hal ini dapat ditunjukkan melalui contoh sebagai berikut.

Misal proposisi fuzzy p memiliki nilai kebenaran $\frac{1}{3}$ maka

$$u(t(p),c(t(p)))=t(p)+c(t(p))-[t(p)][c(t(p))]$$

$$u(t(p),c(t(p)))=t(p)+(1-t(p))-[t(p)][1-t(p)]$$

$$=\frac{1}{3}+\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left[\frac{1}{3}\right]\left[1-\frac{1}{3}\right]$$

$$=\frac{7}{9}$$

Jadi tidak semua $t(p)$ memenuhi $u(t(p),c(t(p)))=1$. Dengan demikian hukum penyisihan jalan tengah tidak berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan.

3.5 Persamaan dan Perbedaan Logika Fuzzy Zadeh dan Logika Fuzzy Klir-Yuan

1) Persamaan logika fuzzy Zadeh dan logika fuzzy Klir-Yuan

a. Logika fuzzy Zadeh dan logika fuzzy Klir-Yuan berkisar antara 0 sampai 1.

b. logika fuzzy Zadeh dan logika fuzzy Klir-Yuan menggunakan operasi komplemen fuzzy standar sebagai fungsi komplemen fuzzy.

2) Perbedaan logika fuzzy Zadeh dan logika fuzzy Klir-Yuan

a. Logika fuzzy Zadeh menggunakan operasi irisan fuzzy standar sebagai fungsi irisan fuzzy dan operasi gabungan fuzzy standar sebagai fungsi gabungan fuzzy sedangkan logika fuzzy Klir-Yuan menggunakan operasi perkalian aljabar sebagai fungsi irisan fuzzy dan operasi penjumlahan aljabar sebagai fungsi gabungan fuzzy.

b. Pembuktian dari hukum-hukum logika klasik yang berlaku dan tidak berlaku pada logika fuzzy Zadeh dan logika fuzzy Klir-Yuan tidak sama.

3.6 Hubungan Logika Fuzzy dengan Perintah Allah untuk Berfikir

Dalam menghadapi kehidupan sehari-hari manusia dituntut untuk menggunakan akal fikiran dalam melakukan setiap kegiatan dengan penuh pemikiran dan pertimbangan. Oleh karena itu manusia harus mempunyai pola berfikir yang tepat, akurat, rasional dan obyektif, disamping dapat berfikir kritis. Pola berfikir seperti ini adalah cara berfikir atau penalaran yang terdapat dalam logika. Logika sangat penting dalam setiap bidang kehidupan manusia. Salah satunya adalah dalam bidang ilmu matematika yang diperluas sebagai logika fuzzy. Ada beberapa macam logika fuzzy diantaranya logika fuzzy Zadeh dan logika fuzzy Klir-Yuan. Aplikasi logika fuzzy sudah mulai dirasakan dalam beberapa bidang. Salah satu aplikasi terpentingnya adalah untuk membantu manusia melakukan pengambilan keputusan. Dalam pengambilan keputusan ini perlu adanya suatu proses berfikir.

Dalam al-Qur’an Allah memerintahkan manusia untuk menggunakan akal pikiran untuk berfikir tentang segala hal kecuali Zat Allah. Di dalam Al-Qur’an banyak sekali surat yang menerangkan masalah “berfikir” atau “berakal” salah satunya yaitu dalam Al-Qur’an surat Az-Zumar ayat 22. Ayat ini menjelaskan berfikir merupakan pondasi yang kuat dan cahaya langit yang dianugerahkan oleh Allah kepada para hamba yang dikehendaki-Nya.

Logika fuzzy merupakan pengambilan keputusan dimana pengambilan keputusan ini melalui proses berfikir. Berfikir merupakan perintah Allah yang akan mengantarkan orang yang melakukannya kepada suatu derajat keimanan yang tidak bisa dihasilkan oleh sekadar amal biasa dan akan mengantarkan manusia pada penyingkapan pokok-pokok masalah dan mengetahui mana yang baik dan mana yang buruk dan yang lebih buruk. Sehingga logika fuzzy berhubungan dengan perintah Allah untuk berfikir.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan tersebut maka diperoleh sebagai berikut:

1. Hukum-hukum logika klasik yang berlaku pada logika fuzzy Zadeh adalah hukum negasi rangkap, hukum komutatif, hukum asosiatif, hukum distributif, Hukum idempoten, hukum absorpsi, hukum De Morgan, hukum $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$, hukum $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$. Sedangkan hukum-hukum yang tidak berlaku pada logika fuzzy Zadeh adalah hukum $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, hukum kontraposisi, hukum $p \rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$, hukum $p \rightarrow q \equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow p$, hukum kontradiksi dan hukum penyisihan jalan tengah.
2. Hukum-hukum logika klasik yang berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan adalah hukum negasi rangkap, hukum komutatif, hukum asosiatif, hukum De Morgan. Sedangkan hukum-hukum yang tidak berlaku pada logika fuzzy Klir-Yuan adalah hukum distributif, hukum idempoten, hukum absorpsi, hukum $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$, hukum $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$, hukum $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, hukum kontraposisi, hukum $p \rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$, hukum

$p \to q \equiv (p \wedge \neg q) \to p$, hukum kontradiksi dan hukum penyisihan jalan tengah.

4.2 Saran

Pada penulisan selanjutnya diharapkan bisa membuat pembuktian secara aksiomatik dengan parameter-parameter yang lainnya, karena logika fuzzy merupakan pengembangan baru dari logika yang telah banyak ditafsirkan para ahli. Di antara ahli tersebut adalah Umamo, Tsukamoto, Mamdani, Sugeno, dan lain-lain. Masing-masing ahli mempunyai parameter dan definisi lanjutan yang berbeda tentang implikasi, konjungsi, disjungsi, kontingensi serta hukum-hukum lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Fathoni, Abdul Halim. 2006. *Metode Fuzzy C-Means (FCM) dan Fuzzy Substractive Clustering untuk Menentukan Fuzzy Clustering Data Jumlah Ayat dan Lafadz yang Bermakna Allah dalam Al-qur'an.* Skripsi tidak dipublikasikan. Malang:Universitas Islam Negeri

Klir, G & Yuan, B. 1995. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. New York: Prentice Hall.

Kusumadewi, Sri & Purnomo, Hari. 2004. *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*. Yogyakarta: Penerbit Graha Ilmu.

Kusumah, Yahya. 1986. *Logika Matematika Elementer*. Bandung: Penerbit Tarsito.

Mardalis. 1989. *Metodologi Penelitian Pendekatan Proporsal*. Jakarta: Bumi Aksara

Muhaimin. 2003. Penyiapan Ulul Albab Alternatif Pendidikan Islam Masa Depan. *Jurnal El-Hikmah Vol 1*. Malang: Universitas Islam Negeri

Qardhawi, Yusuf. 1998. *Al-Quran Berbicara tentang Akal dan Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Gema Insani.

Rachmat, Setiadi. 2004. *Pengantar Logika Matematika*. Bandung: Penerbit Informatika

Soekadijo. 1994. *Logika Dasar: Tradisional, Simbolik, dan Induktif*. Jakarta: Gramedia.

Susilo, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Penerbit Graha Ilmu.