PENGEMBANGAN *E-MODULE* MATERI LIMIT BARISAN MENGGUNAKAN *GEOGEBRA* UNTUK MENINGKATKAN PEMAHAMAN KONSEP MAHASISWA

TESIS

OLEH
NANDA MUSTAGFIROTUL ULYA
NIM. 200108210004

PROGRAM STUDI MAGISTER PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2023

PENGEMBANGAN *E-MODULE* MATERI LIMIT BARISAN MENGGUNAKAN *GEOGEBRA* UNTUK MENINGKATKAN PEMAHAMAN KONSEP MAHASISWA

TESIS

Diajukan Kepada
Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Menyelesaikan Program Studi Magister Pendidikan Matematika

OLEH
NANDA MUSTAGFIROTUL ULYA
NIM. 200108210004

PROGRAM STUDI MAGISTER PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2023

LEMBAR PENGESAHAN

Tesis dengan judul "Pengembangan *E-Module* Materi Limit Barisan Menggunakan GeoGebra untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Mahasiswa" oleh Nanda Mustagfirotul Ulya ini telah dipertahankan di depan dewan penguji dan dinyatakan lulus pada tanggal 26 Desember 2022.

Dewan Penguji,

Dr. Sri Harini, M.Si NIP. 197310142001122002	Penguji Utama
Dr. Marhayati, M.PMat NIP. 19771026 200312 2 003	Ketua
Dr. Elly Susanti, M.Sc NIP. 19741129 200012 2 005	Sekretaris
Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd NIP. 19630502 198703 1 005	Anggota

Mengesahkan,
Dekan Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan,

Prof. Dr. H. Nur Ali, M.Pd
NIP. 19650403 199803 1 002

LEMBAR PERSETUJUAN

Nama	:	Nanda Mustagfirotul Ulya
NIM	:	200108210004
Program Studi	:	Magister Pendidikan Matematika
Judul Tesis	:	Pengembangan *E-Module* Materi Limit Barisan Menggunakan GeoGebra untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Mahasiswa

Setelah diperiksa dan dilakukan perbaikan, Tesis dengan judul sebagaimana di atas disetujui untuk diajukan sidang ujian Tesis.

Pembimbing I,

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

Pembimbing II,

Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd
NIP. 19630502 198703 1 005

Mengetahui,
Ketua Program Studi,

Dr. Wahyu H. Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003

PERNYATAAN ORISINALITAS PENELITIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Nanda Mustagfirotul Ulya
NIM	:	200108210004
Program Studi	:	Magister Pendidikan Matematika
Judul Tesis	:	Pengembangan *E-Module* Materi Limit Barisan Menggunakan GeoGebra untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Mahasiswa

menyatakan bahwa tesis ini benar-benar karya saya sendiri, bukan plagiasi dari karya tulisan orang lain sebagian atau keseluruhan. Pendapat atau temuan orang lain yang terdapat dalam tesis ini dikutip atau dirujuk sesuai dengan kode etik penulisan karya ilmiah. Apabila di kemudian hari ternyata dalam tesis ini terbukti ada unsur-unsur plagiasi, maka saya bersedia untuk diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya dan tanpa ada paksaan dari siapapun.

Malang, 12 Desember 2022
Hormat Saya,

Nanda Mustagfirotul Ulya
NIM. 200108210004

MOTO

الصَّبْرُ يُعِيْنُ عَلَى كُلِّ عَمَلٍ

“Kesabaran mampu menolong setiap amalan (pekerjaan)”

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan rahmat Allah Swt. Yang Maha Kuasa, tesis ini penulis persembahkan kepada:

Kedua orang tua tercinta ayah Makin Hamzah dan ibu Hindun

serta kepada adik Hafna Ilma Muhalla.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh,

Syukur Alhamdulillah, penulis panjatkan ke hadirat Allah Swt. yang telah melimpahkan rahmat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan tesis yang berjudul "Pengembangan *E-Module* Materi Limit Barisan Menggunakan GeoGeobra untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Mahasiswa". Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw. yang kita nantikan syafa'atnya di akhirat kelak.

Dalam kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mendukung dan membantu penyelesaian dalam penulisan tesis ini, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, MA, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. H. Nur Ali, M.Pd, selaku dekan Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku ketua Program Studi Magister Pendidikan Matematika, Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Elly Susanti, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan arahan, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
5. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang selalu memberikan arahan, nasihat, dan motivasi kepada penulis.

6. Kedua orang tua dan seluruh keluarga penulis yang selalu mendoakan keberhasilan penulis.
7. Seluruh Dosen Program Studi Magister Pendidikan Matematika yang telah membina dan memberikan arahan kepada penulis dari awal masuk hingga selesainya studi.
8. Teman-teman mahasiswa Program Studi Magister Pendidikan Matematika yang telah banyak menemani, memberikan dukungan, serta motivasi kepada penulis.
9. Bapak/Ibu dosen dan staf Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang yang telah membantu peneliti dalam melengkapi data penyusunan tesis.
10. Semua pihak yang terlibat langsung atau tidak langsung dalam pengambilan data penelitian ini di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.

Semoga Allah Swt. senantiasa melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Adapun tesis ini, semoga memberikan manfaat bagi penulis dan pembaca. *Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*.

Malang, 12 Desember 2022

Penulis

ABSTRAK

Ulya, Nanda Mustagfirotul. 2022. *Pengembangan E-Module Materi Limit Barisan Menggunakan GeoGebra untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Mahasiswa*. Tesis, Program Studi Magister Pendidikan Matematika, Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Kata Kunci: *E-Module*, Limit Barisan, GeoGebra, Pemahaman Konsep

E-module memiliki kelebihan dalam penyajian pembelajaran, seperti mampu memuat gambar, animasi, dan visualisasi yang menarik. Hal itu menjadi peran penting dalam meningkatkan kemampuan pemahaman mahasiswa. Dengan bantuan aplikasi GeoGebra, *e-module* diharapkan mampu memberikan visualisasi sesuai kebutuhan mahasiswa dalam meningkatkan pemahaman konsep. Selain itu, materi limit barisan pada mata kuliah Analisis Real masih memiliki masalah terkait materi yang abstrak sehingga perlu dikonkritkan agar tidak muncul miskonsepsi. Sehingga, pengembangan *e-module* materi limit barisan berbantuan GeoGebra untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa perlu dilakukan.

Penelitian pengembangan ini memiliki tujuan untuk menghasikan e-module materi limit barisan berbantuan GeoGebra untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa yang valid, efektif, dan praktis dan untuk mengetahui peningkatan pemahamn konsep mahasiswa pada materi limit barisan.

Model yang digunakan pada penelitian pengemabangan ini adalah model ADDIE (*Analysis*, *Desain*, *Development*, *Implementation*, *and Evaluation*). Penelitian dimulai dengan analisis kebutuhan dan dilanjutkan pada tahap perencanaan. *E-module* yang sudah didesain sesuai kebutuhan divalidasi oleh ahli materi, ahli desain, ahli pembelajaran, ahli bahasa, dan ahli teknologi hingga memenuhi kategori valid. Pada tahap implementasi *e-module* di uji coba dengan pemberian *pre-test* sebelum menggunakan *e-module* dan *post-test* setelah menggunakan *e-module* kepada 60 mahasiswa. Hasil skor *pre-test* dan *post-test* digunakan untuk mengukur keefektifan *e-module* dan untuk mengetahui peningkatan pemahaman konsep mahasiswa. Uji efektivitas menggunakan *T-Test Sample Paired* dan N-Gain. Selain menggunakan tes, penelitan ini juga menggunakan angket respon mahasiswa untuk mengetahui kepraktisan *e-module*.

Hasil penelitian menunjukkan *e-module* materi limit barisan dan visualisasinya berada pada kategori sangat valid dengan persentase 88%. Hasil uji efektivitas menunjukkan bahwa *e-module* secara efektif mampu meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa. Selain itu, diperoleh juga peningkatan pemahaman konsep mahasiswa setelah menggunakan *e-module* dengan nilai N-gain sebesar 0,76 dan berada pada kategori tinggi. Pada penilaian kepraktisan oleh mahasiswa, *e-module* berada pada kategori sangat paktis dengan presentase 90%.

ABSTRACT

Ulya, Nanda Mustagfirotul. 2022. *Development of Sequence and Their Limits E-Module Using GeoGebra in Increasing Collage Students' Concept Understanding*. Thesis, Master of Mathematics Education Study Program, Faculty of Education and Teacher Training, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisers: (I) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Keywords: E-Module,Sequenceand The Limits,GeoGebra,Concept Understanding

E-module has advantages in presenting learning, such as being able to accommodate interesting pictures, animations and visualizations. It becomes an important role in increasing students' concepts understanding. With the help of the GeoGebra application, the e-module is expected to be able to provide visualization according to students' needs in increasing concepts understanding. Apart from that, the limit sequence material in the Real Analysis course still has problems related to abstract material so it needs to be concretized so that misunderstandings do not arise. Thus, it is necessary to develop the GeoGebra-assisted sequence limit material e-module to increase students' concept understanding.

This development research has the objective of producing an e-module on boundary limit material assisted by GeoGebra to increase students' concepts understanding that are valid, effective, and practical and to find out the increase in student concept understanding of sequence limit material.

The model used in this development research is the ADDIE model (Analysis, Design, Development, Implementation, and Evaluation). The research begins with a needs analysis and continues with the planning stage. E-modules that have been designed according to needs are validated by material experts, design experts, learning experts, linguists, and technology experts so that they meet the valid category. At the e-module implementation stage, it was tested by giving a pre-test before using the e-module and a post-test after using the e-module to 60 students. The results of the pre-test and post-test scores are used to measure the effectiveness of the e-module and to determine the increase in student understanding of concepts. Effectivity test is using T-Test Sample Paired and N-Gain. Apart from using tests, this research also uses student response questionnaires to determine the practicality of the e-module.

The results showed that the e-module limit line material and its visualization were in the very valid category with a percentage of 88%. The results of the effectiveness test show that the e-module can effectively improve students' concepts understanding. In addition, an increase in students' understanding of concepts was also obtained after using the e-module with an N-gain value of 0.76 and it is in the high category. In the practicality assessment by students, the e-module is in the very practical category with a percentage of 90%.

ملخص

العليا، ناندا مستغفرة. 2022. تطوير وحدات مواد الخط المحدد باستخدام لزيادة فهم الطلاب للمفاهيم. رسالة الماجستير، قسم تعليم الرياضيات، كلية الدراسات العلياجامعة مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (1) الدكتور إلي سوسانتي الماجستير، (2) الدكتور إمام سوجاروو الماجستير.

الكلمات المفتاحية : الوحدة النمطية، حدود الخط، فهم المفهوم

تتميز الوحدة الإلكترونية بمزايا في تقديم التعلم ، مثل القدرة على تحميل صور ورسوم متحركة وتصورات مثيرة للاهتمام. يصبح دورًا مهمًا في زيادة فهم الطلاب للمفاهيم. بمساعدة تطبيق GeoGebra، من المتوقع أن تكون الوحدة الإلكترونية قادرة على توفير التصور وفقًا لاحتياجات الطلاب في زيادة فهم المفاهيم. بصرف النظر عن ذلك ، لا تزال مادة التسلسل المحدود في دورة التحليل الحقيقي تعاني من مشاكل تتعلق بالمواد المجردة ، لذا يجب تجسيدها حتى لا ينشأ سوء تفاهم. وبالتالي ، من الضروري تطوير الوحدة الإلكترونية لمواد الحد من الخط بمساعدة GeoGebra لزيادة فهم الطلاب المفاهيمي

.يهدف هذا البحث التنموي إلى إنتاج وحدة إلكترونية حول مادة حدود الحدود بمساعدة GeoGebra لزيادة فهم الطلاب للمفاهيم الصالحة والفعالة والعملية وللتعرف على زيادة فهم الطالب لمواد حدود الخط.

النموذج المستخدم في هذا البحث التنموي هو نموذج ADDIE (التحليل والتصميم والتطوير والتنفيذ والتقييم). يبدأ البحث بتحليل الاحتياجات ويستمر بمرحلة التخطيط. يتم التحقق من صحة الوحدات الإلكترونية التي تم تصميمها وفقًا للاحتياجات من قبل خبراء المواد وخبراء التصميم وخبراء التعلم واللغويين وخبراء التكنولوجيا بحيث تلبي الفئة الصالحة. في مرحلة تنفيذ الوحدة الإلكترونية ، تم اختبارها من خلال إجراء اختبار مسبق قبل استخدام الوحدة الإلكترونية واختبار ما بعد بعد استخدام الوحدة الإلكترونية على 60 طالبًا. تُستخدم نتائج الاختبار القبلي والبعدي لقياس فعالية الوحدة الإلكترونية ولتحديد الزيادة في فهم الطلاب للمفاهيم. بصرف النظر عن استخدام الاختبارات ، يستخدم هذا البحث أيضًا استبيانات إجابات الطلاب لتحديد مدى التطبيق العملي للوحدة الإلكترونية.

أظهرت النتائج أن مادة خط حد الوحدة الإلكترونية وتصورها كانت في فئة صالحة للغاية بنسبة 88٪. تظهر نتائج اختبار الفعالية أن الوحدة الإلكترونية يمكنها تحسين فهم الطلاب للمفاهيم بشكل فعال. بالإضافة إلى ذلك ، تم الحصول على زيادة في فهم الطلاب للمفاهيم أيضًا بعد استخدام الوحدة الإلكترونية بقيمة اكتساب بقيمة 0.76 وهي في الفئة العالية. في تقييم التطبيق العملي من قبل الطلاب ، تكون الوحدة الإلكترونية في الفئة العملية للغاية بنسبة 90 ٪.

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL

HALAMAN PENGAJUAN

LEMBAR PENGESAHAN iii

LEMBAR PERSETUJUAN iv

PERNYATAAN ORISINALITAS PENELITIAN v

MOTO vi

HALAMAN PERSEMBAHAN vii

KATA PENGANTAR viii

ABSTRAK x

ABSTRACT xi

ملخص xii

DAFTAR ISI xiv

DAFTAR GAMBAR xvi

DAFTAR TABEL xvii

DAFTAR LAMPIRAN xix

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah 1
1.2 Rumusan Masalah 6
1.3 Tujuan Penelitian Pengembangan 6
1.4 Spesifikasi Produk yang Dikembangkan 7
1.5 Manfaat Penelitian Pengembangan 7
1.6 Asumsi dan Keterbatasan Penelitian Pengembangan 8
1.7 Penelitian Terdahulu dan Orisinalitas Penelitian 8
1.8 Definisi Operasional 10

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Prespektif Teori 11
2.2 Kajian Teori dalam Prespektif Islam 23

2.3 Kerangka Berpikir 24
2.4 Hipotesis 31

BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Model Penelitian dan Pengembangan 32
3.2 Prosedur Pengembangan 34
3.3 Uji Produk 38

BAB IV HASIL PENGEMBANGAN

4.1 Pengembangan *E-Module* yang Valid dan Praktis 49
4.1.1 Penyajian Data Analisis Kebutuhan 49
4.1.2 Penyajian Data Desain *E-Module* 53
4.1.3 Penyajian Data Pengembangan *E-Module* 67
4.1.4 Penyajian Data Implementasi *E-Module* 82
4.1.5 Penyajian Data Evaluasi *E-Module* 93
4.2 Peningkatan Pemahaman Konsep Mahasiswa 93

BAB V PEMBAHASAN

5.1 Pengembangan *E-Module* yang Valid dan Praktis 100
5.2 Peningkatan Pemahaman Konsep Mahasiswa 103

BAB VI PENUTUP

5.1 Simpulan 106
5.2 Saran 107

DAFTAR RUJUKAN 108

LAMPIRAN 114

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Fitur Aljabar	19
Gambar 2.2	Fitur Geometri	20
Gambar 2.3	Fitur Kalkulus	20
Gambar 2.4	Visualisasi dengan GeoGebra	23
Gambar 2.5	Kerangka Berpikir Tahap Analisis	27
Gambar 2.6	Kerangka Berpikir Tahap Desain *E-module*	28
Gambar 2.7	Kerangka Berpikir Tahap Pengembangan	29
Gambar 2.8	Kerangka Berpikir Tahap Implementasi	30
Gambar 2.9	Kerangka Berpikir Tahap Evaluasi	31
Gambar 4. 1	Jawaban Mahasiswa 1 dan Mahasiswa 2	49
Gambar 4. 2	Jawaban Mahasiswa 3	50
Gambar 4. 3	Flowchart E-Module	54
Gambar 4. 4	Sampul E-Module	55
Gambar 4. 5	Kata Pengantar E-Module	55
Gambar 4. 6	Daftar Isi E-Module	56
Gambar 4. 7	Petunjuk Penggunaan E-Module	56
Gambar 4. 8	Latar Belakang dan Deskripsi Singkat E-Module	57
Gambar 4. 9	Indikator E-Module	57
Gambar 4. 10	Peta Konsep E-Module	58
Gambar 4. 11	Sekilas Materi dan Visualisasi Bab 1 E-Module	58
Gambar 4. 12	Sekilas Materi dan Visualisasi Bab 2 E-Module	59
Gambar 4. 13	Sekilas Materi dan Visualisasi Bab 3 E-Module	60
Gambar 4. 14	Sekilas Materi dan Visualisasi Bab 4 E-Module	60
Gambar 4. 15	Sekilas Materi dan Visualisasi Bab 5 E-Module	61
Gambar 4. 16	Sekilas Materi dan Visualisasi Bab 6 E-Module	61
Gambar 4. 17	Kunci Jawaban	62
Gambar 4. 18	Penutup E-Module	63
Gambar 4. 19	Daftar Pustaka E-Module	63

DAFTAR TABEL

Tabel 1.1	Penelitian Terdahulu dan Orisisnalitas Penelitian	8
Tabel 2.1	Daftar Keanggotaan Barisan	22
Tabel 3.1	CPMK, Indikator, dan Tujuan	35
Tabel 3.2	Kisi-Kisi Instrumen Validasi	40
Tabel 3.3	Skor Penilaian	41
Tabel 3.4	Kriteria Kevalidan Produk	42
Tabel 3.5	Kisi-Kisi Instrumen Tes Pemahaman Konsep	44
Tabel 3.6	Kisi-Kisi Angket Respon Mahasiswa	44
Tabel 3.7	Pedoman Penskoran Tes Soal	45
Tabel 3.8	Interpretasi Skor Rata-Rata N-Gain	48
Tabel 4.1	Indikator Pemahaman Konsep	64
Tabel 4. 2	Data Validator Ahli	68
Tabel 4. 3	Saran Ahli Materi dan Hasil Perbaikan	69
Tabel 4. 4	Hasil Validasi Ahli Materi	71
Tabel 4. 5	Saran Ahli Pembelajaran dan Hasil Perbaikan	72
Tabel 4. 6	Hasil Validasi Ahli Pembelajaran	74
Tabel 4. 7	Saran Ahli Bahasa dan Hasil Perbaikan	75
Tabel 4. 8	Hasil Validasi Ahli Bahasa	75
Tabel 4. 9	Saran Ahli Desain dan Hasil Perbaikan	77
Tabel 4. 10	Hasil Validasi Ahli Desain	78
Tabel 4. 11	Saran Ahli Teknologi dan Hasil Perbaikan	79
Tabel 4. 12	Hasil Validasi Ahli Teknologi	81
Tabel 4. 13	Hasil Validasi Instrumen Tes	82
Tabel 4. 14	Hasil Pre-test Kelas A	84
Tabel 4. 15	Hasil Pre-test Kelas B	85
Tabel 4. 16	Hasil Post-test Kelas A	86
Tabel 4. 17	Hasil Post-test Kelas B	86
Tabel 4. 18	Hasil Penilaian Praktis Mahasiswa Kelas A	88
Tabel 4. 19	Hasil Penilaian Praktis Mahasiswa Kelas B	90
Tabel 4. 20	Hasil Uji Normalitas	94
Tabel 4. 21	Hasil Uji Homogenitas	95
Tabel 4. 22	Tabel Paired Samples Statistic Kelas A	95

Tabel 4. 23 Tabel Paired Samples Statistic Kelas B 95
Tabel 4. 24 Tabel Paired Samples Test Kelas A 96
Tabel 4. 25 Tabel Paired Samples Test Kelas B 96
Tabel 4. 26 Hasil Perhitungan Uji N-Gain Kelas A 97
Tabel 4. 27 Hasil Perhitungan Uji N-Gain Kelas B 98

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Surat Validasi Ahli Materi 115
Lampiran 2 Surat Vaidasi Ahli Pembelajaran 116
Lampiran 3 Surat Validasi Ahli Bahasa 117
Lampiran 4 Surat Validasi Ahli Desain 118
Lampiran 5 Surat Validasi Ahli Teknologi 119
Lampiran 6 Lembar Validasi Ahli Materi 120
Lampiran 7 Lembar Validasi Ahli Desain 123
Lampiran 8 Lembar Validasi Ahli Pembelajaran 126
Lampiran 9 Lembar Validasi Ahli Bahasa 129
Lampiran 10 Lembar Validasi Ahli Teknologi 132
Lampiran 11 Kisi-Kisi Instrumen Tes Pemahaman Konsep 135
Lampiran 12 Instrumen Tes Soal Pemahaman Konsep 136
Lampiran 13 Kunci Jawaban Tes Pemahaman Konsep 137
Lampiran 14 Lembar Validasi Instrumen Tes (Validator 1) 139
Lampiran 15 Lembar Validasi Instrumen Tes (Validator 2) 141
Lampiran 16 Dokumentasi Pelaksanaan Penelitian 143
Lampiran 17 Surat Keterangan Pelaksanaan Penelitian 144
Lampiran 18 Naskah E-Module 145

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Mata kuliah Analisis Real ialah satu dari beberapa mata kuliah yang wajib diambil oleh mahasiswa Matematika maupun Pendidikan Matematika (Weber, 2004; Amintoko, dkk, 2017). Pada mata kuliah Analisis Real dapat ditemukan beberapa definisi, teorema, corollary, dan soal-soal latihan yang harus dimengerti proses pembuktiannya. Hal tersebut menjadikan mata kuliah Analisis Real sangat penting sebagai latihan bernalar bagi mahasiswa (Isnani, dkk, 2021). Namun tidak sedikit mahasiswa yang masih menganggapnya sebagai mata kuliah yang sulit karena kurangnya pemahaman konsep mahasiswa (Amintoko, dkk, 2017).

Pemahaman konsep ialah suatu kemampuan bagaimana cara mengetahui dan memahami ide-ide secara menyeluruh dan fungsional (Lestari, 2015). Rahayu (2012) menambahkan bahwa dalam matematika, pemahaman konsep merupakan suatu kecakapan dalam memahami serta menjelaskan situasi dan tindakan yang memilki sifat-sifat umum. Berbeda dengan Rahayu, Susanto (2013) menyatakan bahwa pemahaman konsep merupakan kemampuan menggunakan bahasa yang berbeda dalam menjelaskan situasi dan dapat menarik kesimpulan dari data, tabel, grafik, dll.

Pemahaman konsep yang kuat pada mata kuliah Analisis Real sangat diperlukan khususnya pada materi Barisan (Isnaini, dkk, 2021). Hal ini dikarenakan penyelesaian proses analisis dilakukan dengan prosedur-prosedur dalam bentuk formal. Sehingga, diperlukan definisi formal, pemahaman konsep, teorema yang

berkaitan, kemampuan pemodelan matematika, pembuktian, serta penulisan formal secara tepat dan menyeluruh (Amintoko, dkk, 2017). Apabila pemahaman konsep tidak tercapai, maka akan memunculkan masalah berupa adanya miskonsepsi (Isnaini, dkk, 2021).

Cakupan materi pada mata kuliah Analisis Real sering dianggap sulit oleh mahasiswa, terutama materi Barisan Bilangan. Sebagian besar mahasiswa menemui kesulitan pada saat mendefinisikan barisan konvergen secara formal (Darmadi, dkk, 2013). Septian (2014) menyatakan bahwa materi barisan merupakan materi yang abstrak. Hal tersebut menyebabkan mahasiswa menemui kesulitan dalam memahami materi barisan. Selain itu Kartini dan Susanto (2015) menyatakan bahwa mahasiswa mengalami kesulitan dalam mengkonstruksi bukti karena lemahnya pemahaman tentang logika, lemahnya pengetahuan mengenai teknik pembuktian, dan kurangnya kemampuan dalam menggunakan definisi yang sudah ada. Hal tersebut dibuktikan oleh Pratiwi (2016) yang menyatakan bahwa hanya terdapat 47,36% mahasiswa memahami tentang pembuktian berdasarkan definisi limit barisan, 25% tidak memahami konsep, dan 27,64% terdapat miskonsepsi.

Isnaini, dkk (2021) menyatakan bahwa banyak mahasiswa mengalami kesulitan saat menerima konsep barisan. Hal tersebut terjadi karena penyerapan konsep tiap mahasiswa berbeda-beda ketika dosen menerangkan. Selain itu, terdapat pandangan bahwa salah satu mata kuliah yang sukar adalah Analisis Real. Bahkan ditemukan beberapa mahasiswa yang mengerjakan soal secara *open book* tidak mengetahui konsep mana yang harus digunakan. Penyebab terjadinya miskonsepsi menurut Sucipto (2016) yaitu mahasiswa mengalami kesulitan dalam memvisualisasikan definisi formal karena materi yang dinilai abstrak. Isnaini, dkk

(2021) menambahkan bahwa miskonsepsi dapat terjadi karena mahasiswa belum memahami konsep secara sempurna sehingga salah menafsirkan dan tidak memahami penggunaan yang benar dari konsep tersebut.

Penelitian terdahulu yang telah dilakukan dalam membantu mahasiswa memahami konsep beberapa materi pada mata kuliah Analisis Real antara lain, pemberian strategi untuk meminimalisir hambatan pembuktian mahasiswa (Wuryanto, 2011), penelitian mengenai penerapan pembelajaran *lesson study* pada kelas Analisis Real (Darmadi, dkk, 2011). Selain itu Syawahid (2015) melakukan perbaikan bahan ajar Analisis Real, Isnani, dkk (2021) melakukan analisis terhadap miskonsepsi yang muncul pada mahasiswa saat megikuti mata kuliah Analisis Real, dan juga pemberian *scaffolding* kepada mahasiswa dalam memcahkan masalah-masalah limit barisan yang diteliti oleh Amintoko, dkk (2017). Berdasarkan beberapa penelitian terdahulu belum ada yang membahas tentang media terkait materi limit barisan, maka perlu adanya media pembelajaran terkait materi tersebut.

Media pembelajaran diartikan sebagai alat peraga, sumber belajar, dan teknologi (Yaumi, 2018). Secara harfiah media pembelajaran diartikan sebagai perantara peyampaian materi kepada mahasiswa (Wahyuni, dkk, 2018). Bebeda degan media pembelajaran konvensional, Martin dan Betrus (2019) menyatakan bahwa media pembelajaran elektronik diartikan sebagai sebuah konten berbasis elektronik yang memuat gambar, tulisan, video, audio, serta animasi-animasi modern. Tujuan dari media pembelajaran adalah untuk memberi kemudahan mahasiswa dalam meningkatkan pemahaman pada materi perkuliahan. Lebih lanjut, media pembelajaran yang sesuai dengan kebutuhan mampu membantu keberhasilan dan kelancaran mahasiswa dalam proses pembelajaran (Akgul, 2014).

Semakin pesatnya perkembangan teknologi, baik teknologi informasi maupun komunikasi sangat mempengaruhi berkembangnya media pembelajaran (Isman, 2016), baik media pembelajaran biasa maupun digital (Asnawi, 2021). Perkembangan ini dapat dimanfaatkan oleh guru atau dosen karena bersifat fleksibel (Arindiono dan Ramadhani, 2013). Selain fleksibel, media pembelajaran dibutuhkan mahasiswa adalah media yang menunjang minat dan memfasilitasi pemahaman (Mentari, dkk, 2018). Berdasarkan perkembangan teknologi dan komunikasi, banyak dikenalkan model dan pola pembelajaran secara *paperless* dan *mobile* (Wirasasmita dan Uska, 2017).

Tujuan pengembangan media pembelajaran di bidang matematika dilakukan untuk meningkatkan prestasi belajar (Akbar, dkk, 2017). Beberapa materi Analisis Real yang abstrak menjadikan beberapa mahasiswa mendapatkan kesulitan saat memahami materi tersebut (Septian, 2014). Media pembelajaran yang digunakan di bidang matematika selain mempermudah pemahaman adalah dapat memvisualisasikan materi yang abstrak (Asnawi, 2020). Dengan memanfaatkan kemajuan teknologi pada saat ini, dapat ditemukan bentuk elektronik dari modul pembelajaran atau sering disebut *e-module* (Sofyan, dkk, 2019).

Modul elektronik dapat diinterpretasikan sebagai buku berbasis eketronik yang dibuat dengan tujuan agar mahasiswa mampu mempelajari suatu materi dengan mandiri dan bebas tanpa bimbingan dosen (Sofyan, dkk, 2019). *E-module* juga merupakan modul pembelajaran ICT berbasis website. Kelebihan *e-module* dibandingkan modul cetak adalah bersifat interaktif yang menjadikan *e-module* lebih mudah untuk mengarahkan mahasiswa untuk memahami materi. Selain itu *e-modul* mampu menyediakan tampilan berupa gambar, musik, video, animasi, dan

dilengkapi dengan tes yang formatif (Pour, dkk, 2018). *E-module* memiliki banyak kelebihan, salah satunya adalah konten yang termuat di dalamnya mampu membuat mahaiswa memahami penjelasan dengan mudah yaitu dengan campuran elemen multimedia pada *e-module* (Priantini & Widiastuti, 2021).

Pada proses pembelajaran matematika, aplikasi yang dapat dipergunakan adalah aplikasi GeoGebra (Khalil, 2016). GeoGebra sangat mendukung pengajaran dan pembelajaran matematika. Aplikasi GeoGebra dapat digunakan oleh siapun yang memuat beberapa fitur meliputi bidang kalkulus, geometri, dan aljabar (Hohenwater dan Preiner, 2007). Aplikasi GeoGebra juga membantu konsep abstrak yang perlu dikongkritkan menjadi suatu gambar atau animasi (Khalil, dkk, 2018). Selain itu, seluruh pengguna GeoGebra diberikan kebebasan untuk menyediakan tampilan yang menarik. Hal tersebut menjadikan pembelajaran yang disampaikan mampu meningkatakan pemahaman, kreativitas, dan motivasi pengguna (Puspitawati, dkk, 2018).

Penelitian berbantuan GeoGebra dan pengembangan media pembelajaran berbantuan GeoGebra telah banyak dilakukan seperti penelitian dengan bantuan GeoGebra dengan basis teori van Hiele (Akgul, 2014), pengembangan pembelajaran dengan bantuan GeoGebra pada materi turunan (Verhoef, dkk, 2015), penelitian mengenai efek dari penggunaan GeoGebra dalam pembelajaran (Khalil, 2016), dilanjutkan dengan penelitian mengenai pengembangan lembar kerja siswa (LKS) berbantuan GeoGebra (Suratno, 2016), penelitian mengenai prestasi siswa pada materi geometri analitik berbantuan GeoGebra (Khalil, 2018), dan penelitian pengembangan yang mengembangkan media digital berbantuan GeoGebra pada topik geometri transformasi (Asnawi, 2021).

Berdasarkan penelitian-penelitian terdahulu yang telah dilakukan, pemanfaatan GeoGebra sebagai media pendukung pembelajaran Analisis Real khususnya pada materi limit barisan belum pernah dilakukan. Sehingga dibutuhkan media pembelajaran digital berupa modul elektronik atau *e-module* yang dapat membantu mahasiswa dalam memahami konsep limit barisan. Dengan demikian, peniliti tertarik untuk mengembangkan modul elektronik atau *e-module* yang memuat materi limit barisan menggunakan GeoGebra untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini berdasarkan latar belakang adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana proses pengembangan *e-module* pada materi limit barisan dengan pendekatan konstruktivisme menggunakan GeoGebra yang valid dan praktis untuk mengetahui peningkatkan pemahaman konsep mahasiswa?
2. Bagaimana peningkatan pemahaman konsep mahasiswa pada materi limit barisan dengan pengembangan *e-module* melalui pendekatan konstruktivisme menggunakan GeoGebra?

1.3 Tujuan Penelitian Pengembangan

Tujuan dalam penelitian ini berdasarkan rumusan masalah adalah sebagai berikut.

1. Untuk mengetahui proses pengembangan *e-module* pada materi limit barisan dengan pendekatan konstruktivisme menggunakan GeoGebra yang valid, efektif, dan praktis untuk mengetahui peningkatkan pemahaman konsep mahasiswa.

2. Untuk mengetahui peningkatan pemahaman konsep mahasiswa pada materi limit barisan dengan pengembangan *e-module* melalui pendekatan konstruktivisme menggunakan GeoGebra.

1.4 Spesifikasi Produk yang Dikembangkan

Produk yang dikembangkan dan dihasilkan pada penelitian ini berupa modul pembelajaran elektronik atau *e-module* yang memuat materi Limit Barisan berupa *file pdf* yang memuat *link e-module* yang dapat diakses melalui *smartphone* dan komputer. *E-module* dalam penelitian ini dikembangkan dengan bantuan aplikasi GeoGebra yang diperuntukan untuk mahasiswa yang sedang menempuh mata kuliah Analisis Real. *E-module* pada penelitian ini dilengkapi dengan uraian materi, diskusi, contoh, visualisasi berbantuan GeoGebra, dan evaluasi untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa.

1.5 Manfaat Penelitian Pengembangan

Manfaat yang diperoleh dari penelitian pengembangan ini adalah sebagai berikut.

1. Bagi dosen

   Dapat membantu dosen dalam pembelajaran materi limit barisan sehingga diperoleh pembelajaran yang berkualitas.

2. Bagi mahasiswa

   Sebagai media belajar pada materi limit barisan yang praktis dan menarik.

3. Bagi peneliti

   Memberi pengalaman dan pengetahuan mengenai penelitian pengembangan yang mengembangkan *e-module* menggunakan GeoGebra.

1.6 Asumsi dan Keterbatasan Penelitian Pengembangan

E-module yang dikembangkan pada penelitian ini diasumsikan bisa dipakai oleh mahasiswa secara mandiri. *E-module* ini juga diasumsikan dapat digunakan oleh dosen pengampu mata kuliah Analisis Real sebagai media pembelajaran. Selain itu, *e-module* juga diasumsikan dapat dipakai dan dimanfaatkan sebagai salah satu pustaka acuan media bagi dosen pengampu mata kuliah Analisis Real dalam mengajar materi Limit Barisan. Diharapkan setiap mahasiswa dan dosen pengampu telah memiliki *smartphone* dan dapat mengakses internet.

Keterbatasan *e-module* yang penelitian ini adalah pada cakupan materi yang hanya membahas pada materi Limit Barisan mata kuliah Analisis Real. Visualisasi yang ditampilkan pada *e-module* hanya visualisasi pada materi pokok pada sub-bab yang dibahas. *E-module* ini dapat digunakan untuk jenjang sarjana oleh mahasiswa yang sedang mengambil mata kuliah Analisis Real. Selain itu, *e-module* ini dikembangkan dengan mengikuti model ADDIE.

1.7 Penelitian Terdahulu dan Orisinalitas Penelitian

Penelitian terdahulu tentang pemahaman konsep materi limit barisan dan pengembangan media *e-module* dengan bantuan GeoGebra dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1.1 Penelitian Terdahulu dan Orisisnalitas Penelitian

No.	Judul	Persamaan	Perbedaan	Orisinalitas
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1.	*Analysis of problem solving difficulties at limits of sequences*. (Isnaini, dkk, 2021)	Penelitian tentang peningkatan pemahaman konsep materi limit barisan	Menganalisis kesulitan-kesulitan pemecahan masalah	Mengembangkan modul elektronik atau *e-module*

Lanjutan Tabel 1.1

1	2	3	4	5
2.	Pembelajaran *lesson study* pada mata kuliah Analisis Riil. (Darmadi, dkk, 2011)	Penelitian tentang peningkatan pemahaman konsep mata kuliah Analisis Real	Pembelajaran *lesson study*	Mengembangkan modul elektronik atau *e-module*
3.	Analisis miskonsepsi mahasiswa pada mata kuliah Analisis Real. (Isnaini, dkk, 2021)	Penelitian tentang peningkatan pemahaman konsep mata kuliah Analisis Real	Menganalisis miskonsepsi yang terjadi pada mahasiswa dalam memahami konsep	Mengembangkan modul elektronik atau *e-module*
4.	*Professional development through lesson study: teaching the derivative using GeoGebra*. (Verhoef, dkk, 2015)	Penelitian pengembangan dengan bantuan GeoGebra	Materi turunan	Materi yang diteliti pada penelitian ini adalah limit barisan
5.	*Development of ideas in a GeoGebra – aided mathematics instruction*. (Ljajko & Ibro, 2013)	Penelitian pengembangan dengan bantuan GeoGebra	Penelitian yang mengembangkan ide pembelajaran matematika	Penelitian yang mengembangkan media *e-module* untuk meningkatkan pemahaman konsep
6.	*The development of student worksheet using GeoGebra assisted problembased learning and its effect on ability of mathematical*. (Suratno, 2016)	Penelitian berbantuan GeoGebra	Penelitian yang mengembangkan LKS (lembar kerja siswa)	Penelitian yang mengembangkan media *e-module*

1.8 Definisi Operasional

Agar terhindar dari adanya kesalahpahaman istilah pada penelitian ini, peneliti menuliskan beberapa definisi operasional sebagai berikut.

1. Pengembangan media yaitu suatu penelitian yang ditempuh peniliti agar dihasilkan suatu media yang baru dan sesuai berdasarkan kaidah penelitian pengembangan.
2. Media pembelajaran digital ialah media pembelajaran dapat diakses melalui perangkat elektronik atau digital seperti *smartphone* dan komputer.
3. *E-module* dapat diinterpretasikan sebagai buku berbasis eletronik yang dibuat dengan tujuan agar mahasiswa mampu mempelajari suatu materi dengan mandiri.
4. GeoGebra ialah perangkat lunak yang ada untuk tujuan pengajaran dan pembelajaran matematika. Aplikasi GeoGebra dapat digunakan oleh siapun yang memuat beberapa fitur meliputi bidang kalkulus, geometri, dan aljabar.
5. Pemahaman konsep ialah suatu kemampuan bagaimana cara mengetahui ide-ide secara menyeluruh dan fungsional.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Prespektif Teori

2.1.1 Pemahaman Konsep

Bagi peeserta didik atau mahasiswa, pemahaman konsep yang kuat sangatlah penting. Hal tersebut menjadikan pemahaman konsep terutama pada bidang matematika harus ditingkatkan karena masih banyaknya mahasiswa yang menganggap matematika bukan pelajaran yang mudah (Widari, 2013). Berdasarkan tujuan dari pembelajaran matematika, kemampuan pemahaman konsep matematika dapat dicapai sesuai Permendiknas Nomor 22 Tahun 2006. Peraturan tersebut berisi mengenai tujuan mata pelajaran matematika. Beberapa kompetensi yang dimuat antara lain: 1) pemahaman konsep, 2) penggunaan nalar, 3) pemecahan masalah, 4) komunikasi gagasan, dan 5) sifat menghargai manfaat dari matematika (Ningsih, 2016).

Prinsip mengenai pembelajaran matematika yang diakui oleh National Counsil of Teaching Mathematics yaitu: “belajar matematika dengan pemahaman harus dilakukan oleh mahasiswa dengan aktif membangun pengetahuan baru dari pengalaman dan pengetahuan sebelumnya.” Landasan yang perlu dimiliki oleh mahasiswa dalam usaha menyelesaikan dan mengatasi permasalahan adalah kecakapan dalam memingkatkan pemahaman konsep matematika. Prinsip NCTM dilandaskan pada pernyataan bahwa penting dalam belajar matemtika dengan pemahaman. Keterampilan menghitung saja tidak cukup namun juga membutuhkan kecakapan berpikir dan beralasan secara matematis (Ningsih, 2016).

Pemahaman konsep ialah suatu kemampuan bagaimana cara mengetahui dan memahami ide-ide secara menyeluruh dan fungsional (Lestari, 2015). Rahayu (2012) menambahkan bahwa dalam matematika, pemahaman konsep merupakan suatu kecakapan dalam mengetahui dan memahami serta menjelaskan situasi dan tindakan yang memilki sifat-sifat umum. Berbeda dengan Rahayu, Susanto (2013) menyatakan bahwa pemahaman konsep merupakan kemampuan menggunakan bahasa yang berbeda dalam menjelaskan situasi dan dapat menarik kesimpulan dari data, tabel, grafik, dll.

Indikator pemahaman konsep menurut Kilpatrick, dkk (2001) antara lain:

1) Kemampuan menyatakan ulang konsep yang telah dipelajari;
2) Kemampuan mengklarifikasi objek-objek berdasarkan dipenuhi atau tidaknya persyaratan yang membentuk konsep tersebut;
3) Kemampuan menerapkan konsep secara algoritma;
4) Kemampuan memberikan contoh dari konsep yang dipelajari;
5) Kemampuan menyajikan konsep dalam berbagai macam bentuk representasi matematis;
6) Kemampuan mengaitkan berbagai konsep; dan
7) Kemampuan mengembangkan syarat perlu dan syarat cukup suatu konsep.

Pemahaman konsep yang kuat pada mata kuliah Analisis Real sangat diperlukan khususnya pada materi Barisan (Isnaini, dkk, 2021). Hal ini dikarenakan penyelesaian proses analisis dilakukan dengan prosedur-prosedur formal. Sehingga, diperlukan definisi formal, pemahaman konsep, teorema yang berkaitan, pembuktian, kemampuan pemodelan matematika, serta penulisan formal secara tepat dan menyeluruh (Amintoko, dkk, 2017). Apabila pemahaman konsep tidak

tercapai, maka akan memunculkan masalah berupa adanya miskonsepsi (Isnaini, dkk, 2021).

2.1.2 Media Pembelajaran Digital

a. Definisi Media Pembelajaran Digital

Menurut Martin dan Bertus (2019) definisi dari media pembelajaran digital ialah konten berbasis eletronik yang memuat gambar, tulisan, video, audio, serta animasi-animasi modern. Sedangkan Neo (2001) menyatakan bahwa media pembelajaran digital adalah pembelajaran multimedia yaitu media menggunakan kombinasi dari jenis-jenis media seperti gambar, suara, dan teks. Berbagai bentuk media pembelajaran digital dapat berupa video atau elektronik seperti video instruksional dan *e-module*.

b. Jenis-Jenis Media Pembelajaran Digial

Jenis-jenis media pembelajaran digital yang dinyatakan oleh Martin dan Betrus (2019) ialah seperti video, simulasi dan permainan, pembelajaran dalam jaringan, dan pembelajaran *mobile learning*. Beberapa model tersebut dipaparkan sebagai berikut.

1. Video Pembelajaran

   Pada beberapa tahun terakhir, penggunaan video pembelajaran dan pembuatan video pembelajaran semakin populer. Model video pembelajaran juga sangat bervariasi tergantung pada sumber media dan alat yang digunakan. Oleh sebab itu, siswa pada pendidikan formal sangat minat dengan video pembelajaran berkualitas tinggi yang dibuat dengan baik.

2. Simulasi dan Permainan

Salah satu alat pembelajaran yang efektif adalah simulasi atau permainan. Sama halnya dengan media pembelajaran pada umumnya, hal utama adalah menentukan apakah simulasi atau permainan seseuai dengan tujuan pembelajaran. Simulasi atau permainan dapat menciptakan narasi pada pemain. Narasi tersebut adalah bagaimana permainan tersebut dapat dipahami mahasiswa, apa yang sedang dipelajari, serta bagaimana mahasiswa dapat meningkatkan pemahaman konsep saat simulasi dan permainan berlangsung.

3. Pembelajaran *Online*

   Pembelajaran *online* telah menjadi norma yang telah ditawarkan. Pembelajaran *online* secara umum difasilitasi oleh seorang guru maupun dioperasikan secara mandiri oleh siswa. Perancangan media pembelajaran *online* sangat penting dilakukan agar menarik dengan menggabungkan elemen-elemen media yang sudah tersedia.

4. *Mobile Learning*

   Penggunaan perangkat seluler menunjukkan adanya peningkatan pada beberapa tahun terakhir. Dengan adanya *smart phone* dan tablet pengiriman konten digital sangat dimungkinkan. Selain itu, terdapat fungsi internal yang diperlukan dalam media digital seperti kamera dan microfon.

Pendapat lain mengenai *M-Learning* atau *Mobile Learning* disampaikan juga oleh Sutopo (2012) bahwa *Mobile Learning* adalah perangkat *mobile* yang digunakan dalam pembelajaran. Keunggulan dari *mobile learning* adalah pembelajaran yang memuat materi yang berkaitan dengan pembelajaran dapat diakses dimanapun dan kapanpun. Selain itu, Sarrab, dkk (2012) menyatakan bahwa *mobile learning* ialah teknik memanfaatkan teknologi berupa *mobile* untuk

pembelajaran. Dibandingkan pembelajaran konvensional, *mobile learning* memberikan kesempatan lebih banyak untuk berinteraksi antar pembelajar. Salah satu media pembelajaran digital berbasis *mobile learning* adalah *e-module* (Martha, dkk, 2018).

2.1.3 *E-Module*

Modul ialah salah satu unit dalam proses belajar mengajar. Modul pembelajaran dibuat secara khusus untuk mempermudah pengajar dalam mempersiapkan media pembelajaran. Salah satu cara untuk memfasilitasi pengajar dalam menyampaikan materi pembelajaran adalah dengan menggunakan modul pembelajaran. Dengan memanfaatkan kemajuan teknologi pada saat ini, dapat ditemukan bentuk elektronik dari modul pembelajaran atau sering disebut *e-module*. Modul elektronik dapat diinterpretasikan sebagai buku berbasis eketronik yang dibuat dengan tujuan agar mahasiswa mampu mempelajari suatu materi dengan mandiri dan bebas tanpa bimbingan dosen (Sofyan, dkk, 2019).

E-module juga merupakan modul pembelajaran ICT berbasis website. Kelebihan *e-module* dibandingkan modul cetak adalah bersifat interaktif yang menjadikan *e-module* lebih mudah untuk mengarahkan mahasiswa untuk memahami materi. Selain itu *e-modul* mampu menyediakan tampilan berupa gambar, musik, video, animasi, dan dilengkapi dengan tes yang formatif (Pour, dkk, 2018). *E-module* memiliki banyak kelebihan, salah satunya adalah konten yang termuat di dalamnya mampu membuat mahaiswa memahami penjelasan dengan mudah yaitu dengan campuran elemen multimedia pada *e-module* (Priantini & Widiastuti, 2021).

Kelebihan-kelebihan lain dari *e-module* adalah (1) kegiatan belajar dapat dilakukan oleh mahasiswa secara mandiri dan *e-module* dapat diakses secara luas dalam berbagai perangkat. (2) Pembelajaran disajikan dengan bertahap dengan elemen-elemen sepeti gambar, video, audio, dan animasi yang mendukung. (3) Visualisasi yang menarik. Namum, masih terdapat beberapa kekurangan dari e-module, yaitu (1) Diperlukan kesadaran belajar mandiri oleh mahasiswa. (2) Diperlukan perangkat yang layak dan koneksi internet untuk mengakses *e-module* (Priantini & Widiastuti, 2021).

Pada proses pembuatan modul terdapat beberapa langkah penyusunan yang dikemas secara sistematis mengacu pada kompetensi yang dijelaskan oleh Departemen Pendidikan Nasional. Tahap-tahap tersebut dijelaskan secara singkat sebagai berikut.

a. Analisis kebutuhan. Langkah pertama dilakukan untuk menganalisis dan mengidentifikasi judul modul yang mengacu pada kompetensi sesuai garis besar susunan yang ditetapkan.
b. Penyusunan modul. Langkah kedua ialah proses penyusunan materi berdasarkan kompetensi yang telah ditetapkan secara sistematis.
c. Validasi. Langkah ketiga diperlukan beberapa ahli untuk proses permintaan persetujuan terhadap kesesuaian modul dengan kebutuhan agar modul layak untuk digunakan.
d. Uji Coba. Langkah keempat ialah penggunaan modul kepada mahasiswa terbatas untuk melihat keterlaksanaan modul sebelum digunakan secara umum seperti mengetahui keefektifan dan kelayakan modul.

e. Revisi. Langkah terakhir ialah proses penyempurnaan modul sesuai dengan masukan dari tahap sebelumnya sehingga dapat dipastikan modul siap diproduksi.

2.1.4 Teori Belajar Konstruktivisme

a. Pengertian Konstruktivisme

Konstruktivisme adalah pendekatan terhadap belajar yang menekankan bahwa orang secara aktif mampu membangun pengetahuannya sendiri (Abimanyu, 2008). Menurut Karli dan Margaretha (2002) pembelajaran konstruktivisme adalah proses pembelajaran yang diawali konflik kognitif. Pada akhirnya pengetahuan akan dibangun sendiri oleh mahasiswa melalui pengalaman dan interaksi. Pembelajaran ini menekankan pada pengembangan kemampuan, keterampilan, dan pemikiran mahasiswa (Isjoni, 2007).

Konstruktivisme adalah sebuah teori yang memberikan kebebasan terhadap manusia yang ingin belajar atau mencari kebutuhannya dengan kemampuan untuk menemukan keinginan atau kebutuhannya tersebut dengan bantuan fasilitas orang lain. Manusia untuk belajar menemukan sendiri kompetensi, pengetahuan atau teknologi dan hal yang diperlukan guna mengembangkan dirinya (Thobroni, 2015). Konstruktivisme merupakan landasan berfikir pendekatan kontekstual, pengetahuan dibangun sedikit demi sedikit, hasilnya diperluas melalui konteks yang terbatas (sempit) dan tidak dengan tiba-tiba (Sagala, 2007).

b. Tahapan Konstruktivisme

Terdapat empat tahapan yang perlu diperhatikan dalam pembelajaran dengan pendekatan konstruktivisme yaitu apersepsi, eksplorasi, diskusi, dan pengembangan. Apersepsi artinya mahasiswa didorong untuk mengemukakan

pengetahuan awal. Apabila diperlukan, pengajar memberikan pertanyaan pancingan tentang fenomena sehari-hari. Selanjutnya, mahasiswa diberi kesempatan untuk komunikasikan pemahamannya tentang konsep tersebut. Eksplorasi artinya mahasiswa diberi kesempatan untuk menyelidiki dan menemukan konsep pengumpulan, pengorganisasian, dan penginterprestasian data dalam suatu kegiatan yang telah dirancang oleh pengajar (Lapono, 2008).

Diskusi artinya mahasiswa menjelaskan dan memberikan solusi berdasarkan hasil observasi yang telah dilakukan. Hal tersebut didukung dengan penguatan dari pengajar. Selanjutnya, mahasiswa membangun pemahaman baru tentang konsep yang dipelajari. Pengembangan artinya pengajar berusaha menciptakan lingkungan pembelajaran yang dapat mengaplikasikan pemahaman konsep mahasiswa, baik melalui kegiatan maupun pemunculan masalah-masalah yang berkaitan dengan kehidupan sehari-hari (Lapono, 2008).

c. Kelebihan dan Kekurangan Konstruktivisme

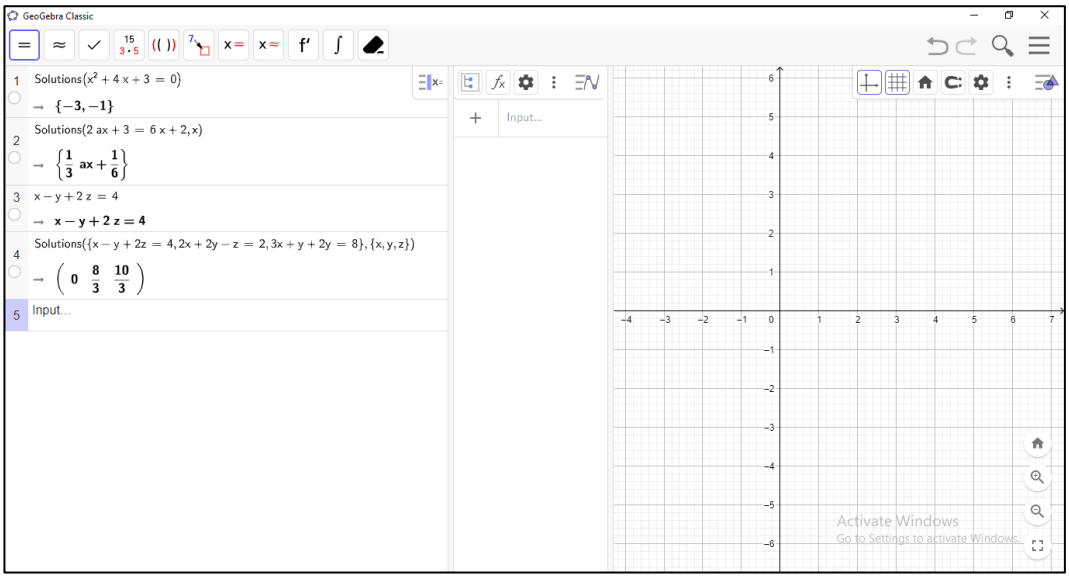
Kelebihan dari konstruktivisme antara lain, (1) Mahasiswa berfikir untuk mencari ide, menyelesaikan masalah, dan membuat keputusan. (2) Mahasiswa terlibat langsung dalam mengelola pengetahuan baru dan mengimplikasikannya pada semua situasi. (3) Mahasiswa terlibat secara langsung dalam mengingat suatu konsep sehingga mahasiswa mampu mengelola pemahaman secara mandiri. (4) Mahasiswa mahir dalam bersosial melalui interaksi dengan teman dan dosen. (5) Mahasiswa merasa termotivasi dengan keterlibatannya secara langsung (Surianto, 2009).

Kekurangan dari konstruktivisme anatar lain, (1) Mahasiswa mengkonstruksi pengetahuan secara mandiri sehingga terdapat kemungkinan

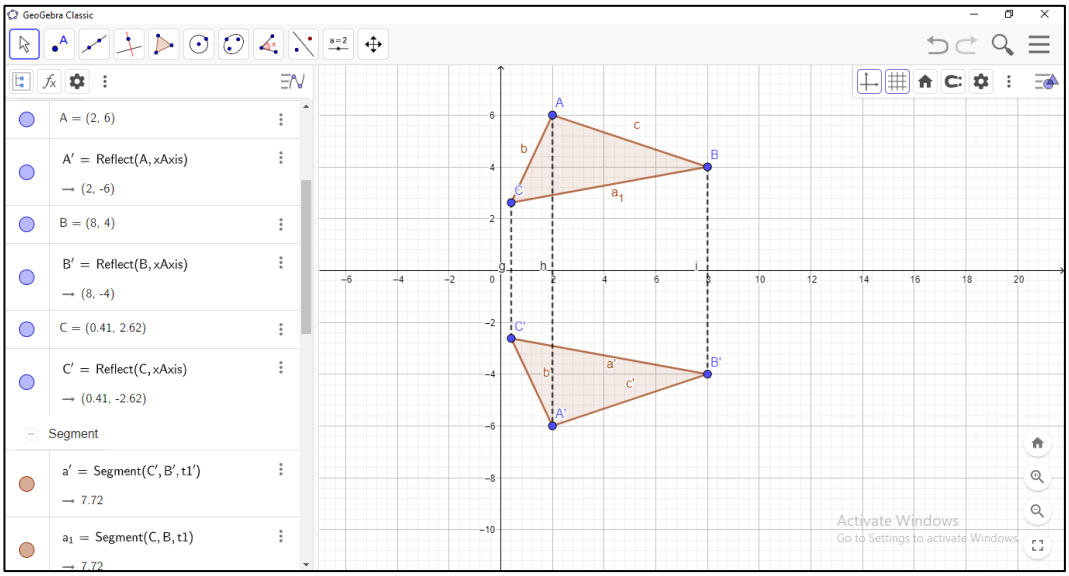
konstruksi tersebut tidak sesuai dengan kaidah ilmu pengetahuan. (2) konstruktivisme membutuhkan waktu yang lama. (3) Kondisi dan situasi setiap universitas berbeda berdasarkan ketersediaan sarana prasarana (Surianto, 2009).

2.1.5 GeoGebra

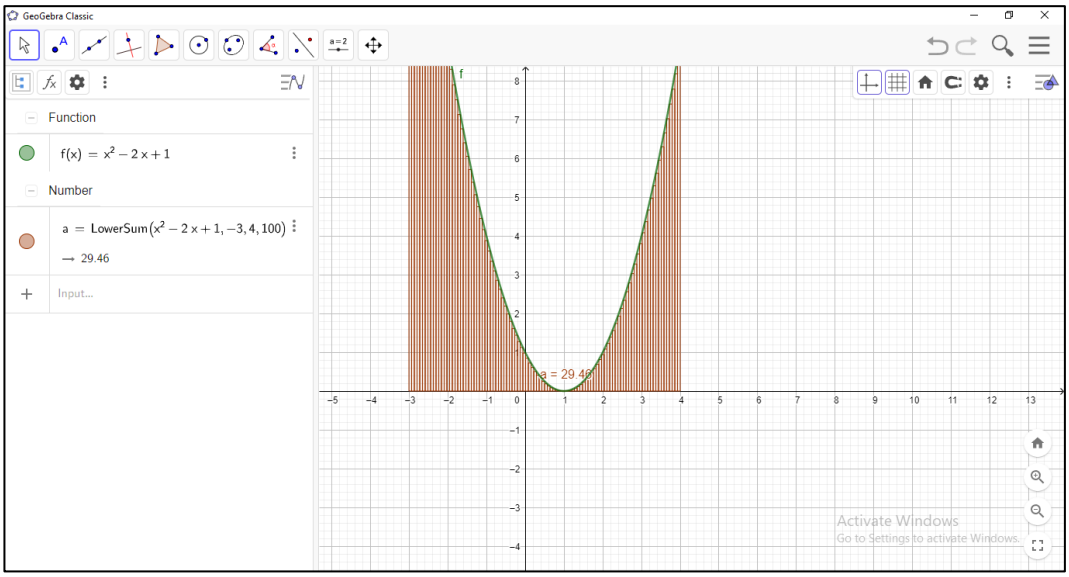
GeoGebra digunakan untuk tujuan pengajaran dan pembelajaran matematika. Aplikasi GeoGebra dapat digunakan oleh siapun yang memuat beberapa fitur meliputi bidang kalkulus, geometri, dan aljabar (Hohenwarter dan Preiner, 2007). Seorang dosen dapat mengeksplor perangkat ini agar tercapainya pembelajaran yang efektif dan interaktif dengan tersedianya fitur-fitur GeoGebra (Khalil, 2016). Selain itu, GeoGebra memiliki keunggulan dalam integrasi ke kelas matematika (Little, 2008). Penelitian mengenai pengunaan GeoGebra terhadap mahasiswa menunjukkan hasil yang positif (Saha, dkk, 2010). Dikarenakan perangkat ini menawarkan beberapa fitur aljabar seperti pada Gambar A, geometri seperti pada Gambar B, dan kalkulus seperti Gambar C.



Gambar 2.1 Fitur Aljabar



Gambar 2.2 Fitur Geometri



Gambar 2.3 Fitur Kalkulus

2.1.6 Konsep Materi Limit Barisan

a. Barisan

Barisan pada himpunan *A* adalah suatu fungsi dengan daerah asal adalah himpunan bilangan asli atau ℕ dan daerah hasilnya di *A* (Bartle dan Sherbert, 2010).

Definisi 2.1: *Suatu barisan bilangan real (atau barisan di* $\mathbb{R}$*) adalah fungsi himpunan bilangan asli* $\mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$ *dengan daerah hasil yang termuat di himpunan bilang rill* $\mathbb{R}$*.*

Hal tersebut dapat diartikan bahwa suatu barisan di $\mathbb{R}$ memasangkan masing-masing bilangan asli $n = 1,2,3,\dots$ secara tunggal dengan bilangan rill. Jika $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ adalah barisan, maka dapat dituliskan bahwa X di n dapat disimbolkan dengan x_n daripada $X(n)$. Barisan ini dinotasikan dengan

$$X, \qquad (x_n), \qquad (x_n : n \in \mathbb{N}).$$

Barisan sering didefinisikan dengan menulis suku-sukunya secara berurutan seperti berikut.

$$X \coloneqq (2,4,6,\dots)$$

$$Y \coloneqq \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$$

$$Z \coloneqq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right)$$

Atau dapat dituliskan barisan tersebut seperti berikut.

$$X \coloneqq (2n : n \in \mathbb{N}), \qquad Y \coloneqq \left(\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right), \qquad Z \coloneqq \left(\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\right).$$

Atau dapat dituliskan dengan lebih sederhana seperti berikut.

$$X \coloneqq (2n), \qquad Y \coloneqq \left(\frac{1}{n}\right), \qquad Z \coloneqq \left(\frac{1}{2n}\right).$$

Cara lain untuk mendefinisikan barisan adalah dengan menentukan nilai x_1 dan memberikan rumus untuk mendapatkan x_{n+1} $(n \geq 1)$ dari $x_1,\ x_2, x_3, \dots, x_n$ (Bartle dan Sherbert, 2010).

b. Limit Barisan

Konsep limit barisan merupakan salah satu konsep yang terdapat dalam analisis real. Beberapa definisi mengenai limit barisan adalah sebagai berikut.

Definisi 2.2: *Misal* $X = (x_n)$ *adalah barisan bilangan real. Suatu bilangan real* x *dikatakan limit dari* (x_n)*, apabila untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* $K(\varepsilon)$*, sedemikian hingga untuk semua* $n \geq K(\varepsilon)$*, suku-suku* x_n *terletak dalam lingkungan-*ε*,* $V_\varepsilon(x)$.

Berikut merupakan contoh visualisasi barisan bilangan real menggunakan geogebra. Diberikan contoh barisan

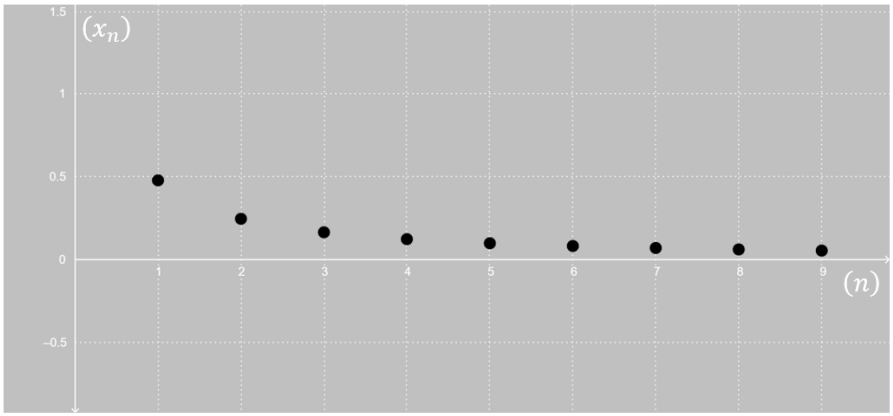
$$(x_n) \coloneqq \left(\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\right).$$

Sebagai ilustrasi, Langkah awal yaitu mendaftar keanggotaan dari barisan tersebut sebagai berikut.

Tabel 2. 1 Daftar Keanggotaan Barisan

$\boldsymbol{n}$	$(\boldsymbol{x_n})$
1	0,500
2	0,250
3	0,166
4	0,125
5	0,100
⋮	⋮

Berdasarkan Tabel 2.1, dapat dilihat bahwa semakin banyak suku barisan yang diketahui, semakin menggambarkan secara intuisi bahwa barisan tersebut konvergen ke-0. Barisan bilangan real ialah suatu fungsi dengan daerah asal himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan range yang termuat di dalam $\mathbb{R}$. Maka barisan bilangan real dapat divisualisasikan dalam bentuk grafik. Sehingga diperoleh grafik yang disajikan sebagai berikut.



Gambar 2. 4 Visualisasi dengan GeoGebra

2.2 Kajian Teori dalam Prespektif Islam

Media pembelajaran didefinisikan oleh Reiser dan Gagne (1983) sebagai media atau sarana yang disajikan untuk pembelajaran. Dalam prespektif Islam, media pembelajaran ialah cara atau alat untuk menyampaikan suatu bahan atau materi (Muliati, 2018). Sebagai wahyu Allah Swt. yang mengandung kebenaran mutlak, Al-Quran telah menyinggung tentang adanya media. Firman Allah Swt. surat Luqman ayat 10 dan 11 mempunyai arti berikut.

"Dia menciptakan langit tanpa tiang yang kamu melihatnya dan Dia meletakkan gunung-gunung (di permukaan) bumi supaya bumi itu tidak menggoyangkan kamu; dan memperkembangbiakkan padanya segala macam jenis binatang. Dan Kami turunkan air hujan dari langit, lalu Kami tumbuhkan padanya segala macam tumbuh-tumbuhan yang baik. Inilah ciptaan Allah, maka perlihatkanlah olehmu kepadaku apa yang telah diciptakan oleh sembahan-sembahan(mu) selain Allah. Sebenarnya orang-orang yang zalim itu berada di dalam kesesatan yang nyata"(QS Luqman: 10-11).

Tafsir Jalalain menjelaskan bahwa pada kalimat "*Dia menciptakan langit tanpa tiang yang kamu melihatnya*" terdapat kata tiang atau *'amadin* yang artinya pilar penyangga dan hal tersebut sesuai bahwa langit itu tidak mempunyai pilar untuk menyangganya sejak langit itu diciptakan (Al-Mahalli, dkk, 2008). Sedangkan dalam tafsir Ibnu Katsir tertulis bahwa dengan adanya ayat 10 dan 11 surat Luqman ini Allah Swt. menjelaskan kekuasaan-Nya yang besar dan agung

berupa langit dan bumi serta segala isinya. Hal ini sesuai dengan kalimat "*Inilah ciptaan Allah*" bahwa penciptaan dan takdir Allah Swt. tidak akan ada sekutu bagi-Nya (Abdullah, 2007).

Berdasarkan penjelasan dari tafsir Jalalain dan Ibnu Katsir diketahui bahwa langit diciptakan oleh Allah Swt. tanpa adanya tiang namun tidak roboh, selain itu, gunung-gunung agar bumi stabil dan makhluk dapat hidup tenang di atas bumi, berbagai makhluk dengan berbagai jenis, warna, dan manfaatnya masing-masing, dan juga Allah menciptakan hujan dari langit agar kelestarian bumi terjaga dengan adanya tumbuhan yang sehat dan beraneka ragam. Dengan adnaya langit, gunung, berbagai makhluk, dan hujan ini Allah menunjukkan bahwa semua itu adalah ciptaan-nya (Muliati, 2018).

Apabila dilihat berdasarkan aspek pendidikan, hal penting yang ingin diajarkan dalam Al-Quran surat Luqman ayat 10 dan 11 ini kepada manusia adalah keimanan kepada Allah Swt. Diharapkan semua makhluk dapat mengingat ciptaan-ciptaan Allah Swt. dan mensyukuri nikmat yang telah diberi serta tidak menjadi makhluk yang *dzalim*. Dalam menyajikan dan menyampaikan ayat tersebut, Al-Quran menggunakan langit, gunung, berbagai makhluk, dan hujan sebagai media. Dengan adanya media tersebut manusia diharapkan dapat meyakini dan mengimani kebesaran Allah Swt. (Muliati, 2018). Artinya, manusia sebagai makhluk berakal diharapkan dapat memahami dan menjadikan pedoman bahwa terdapat alat atau media yang dapat digunakan seperti pada Al-Quran surat Luqman ayat 10 dan 11.

2.3 Kerangka Berpikir

Salah satu materi pada mata kuliah Analisis Real yang dianggap sulit oleh mahasiswa adalah materi limit barisan. Sebagian besar mahasiswa mengalami

kesulitan dalam mendefinisikan konsep materi tersebut (Darmadi, dkk, 2013). Pada materi ini mahasiswa harus memahami konsep limit barisan yang abstrak. Pemanfaatan media pembelajaran yang disesuaikan dengan kebutuhan mahasiswa diharapkan dapat memberikan kemudahan dalam peningkatkan pemahaman konsep materi limit barisan.

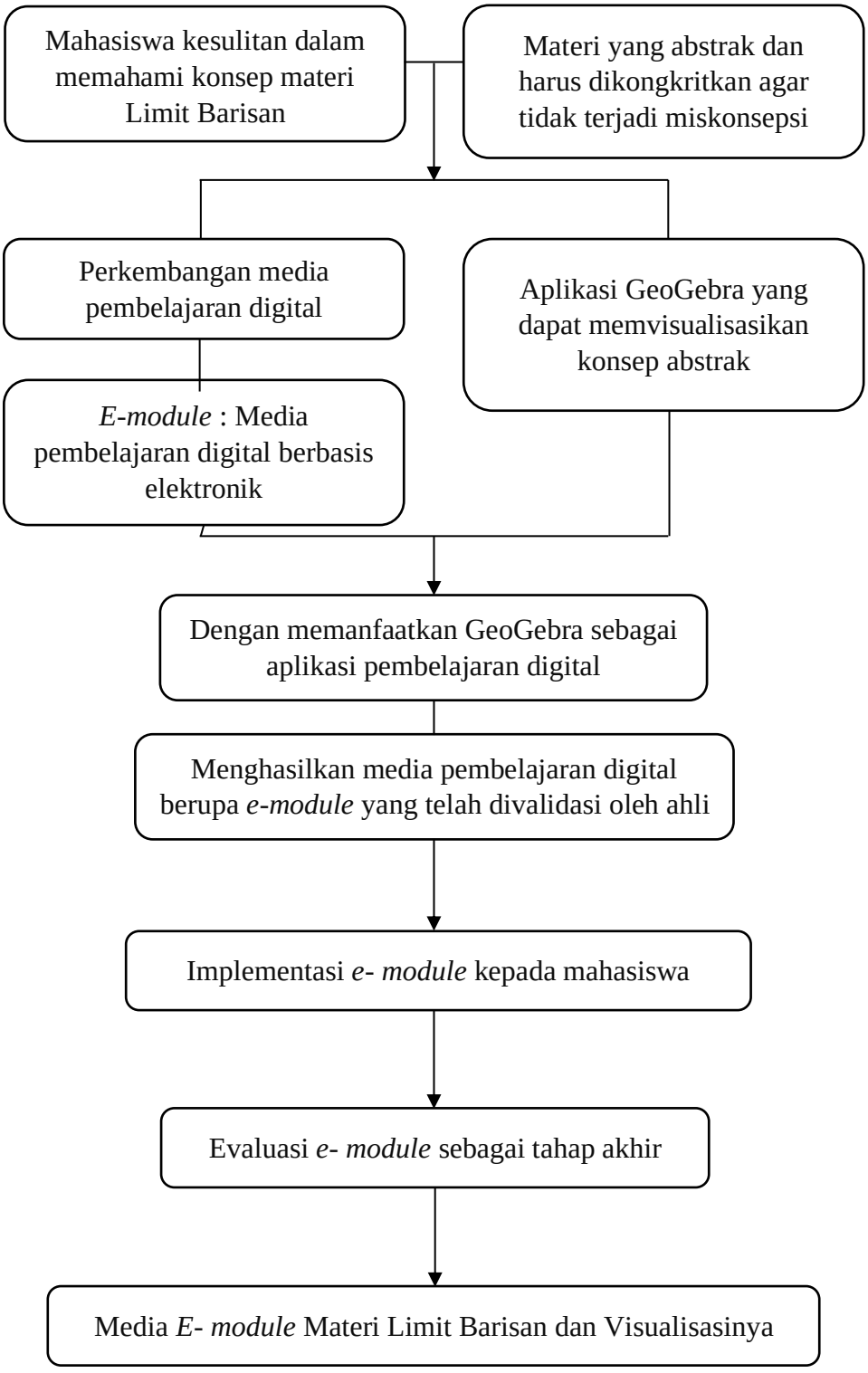
Semakin pesatnya perkembangan teknologi, baik teknologi informasi maupun komunikasi sangat mempengaruhi berkembangnya media pembelajaran (Isman, 2016), baik media pembelajaran biasa maupun digital (Asnawi, 2021). Berdasarkan perkembangan teknologi dan komunikasi, banyak dikenalkan model dan pola pembelajaran secara *paperless* dan *mobile* (Wirasasmita dan Uska, 2017). Media yang mengimplementasikan dengan adanya interaksi dan kemandirian pengguna secara *paperless* adalah modul elektronik atau *e-module* (Hartanti, 2013).

Modul ialah salah satu unit dalam proses belajar mengajar. Modul pembelajaran dibuat secara khusus untuk mempermudah pengajar dalam mempersiapkan media pembelajaran. Salah satu cara untuk memfasilitasi pengajar dalam menyampaikan materi pembelajaran adalah dengan menggunakan modul pembelajaran. Dengan memanfaatkan kemajuan teknologi pada saat ini, dapat ditemukan bentuk elektronik dari modul pembelajaran atau sering disebut *e-module*. Modul elektronik dapat diinterpretasikan sebagai buku berbasis eketronik yang dibuat dengan tujuan agar mahasiswa mampu mempelajari suatu materi dengan mandiri dan bebas tanpa bimbingan dosen (Sofyan, dkk, 2019).

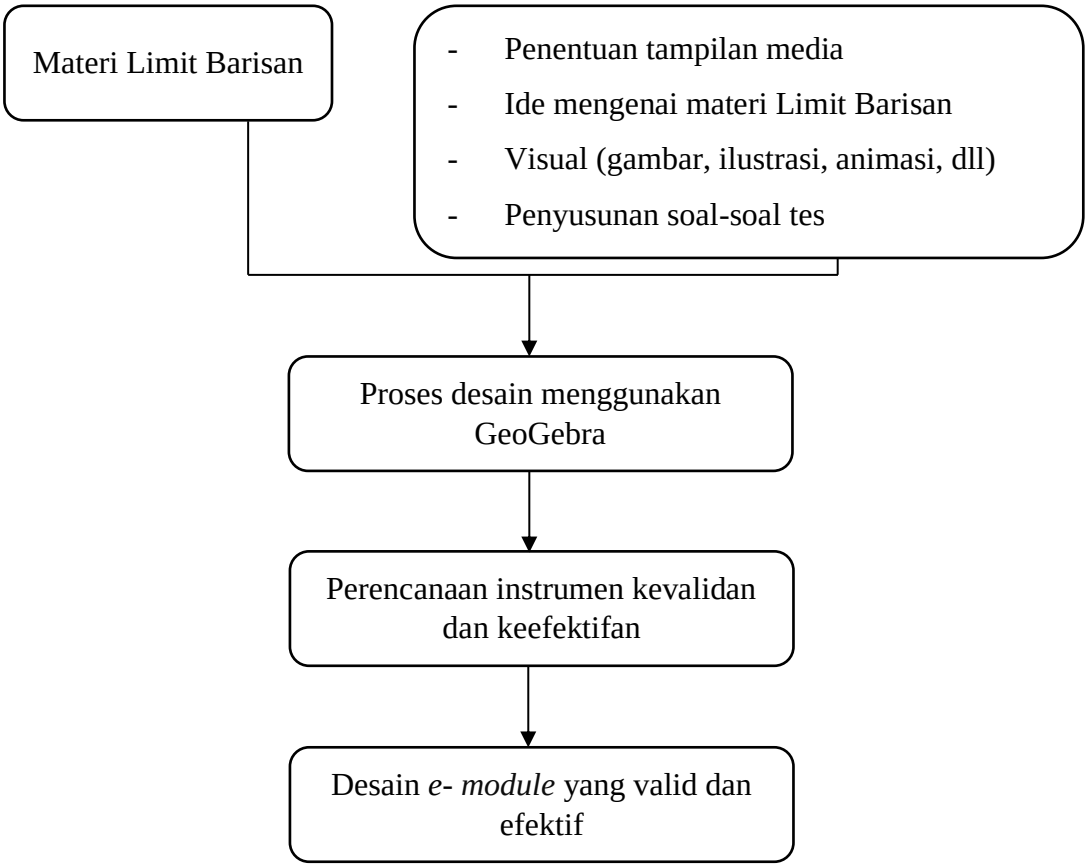
E-module juga merupakan modul pembelajaran ICT berbasis website. Kelebihan *e-module* dibandingkan modul cetak adalah bersifat interaktif dan praktis yang menjadikan *e-module* lebih mudah untuk mengarahkan mahasiswa untuk

memahami materi. Selain itu *e-modul* mampu menyediakan tampilan berupa gambar, musik, video, animasi, dan dilengkapi dengan tes yang formatif (Pour, dkk, 2018). *E-module* memiliki banyak kelebihan, salah satunya adalah konten yang termuat di dalamnya mampu membuat mahasiswa memahami penjelasan dengan mudah yaitu dengan campuran elemen multimedia pada *e-module* (Priantini & Widiastuti, 2021).

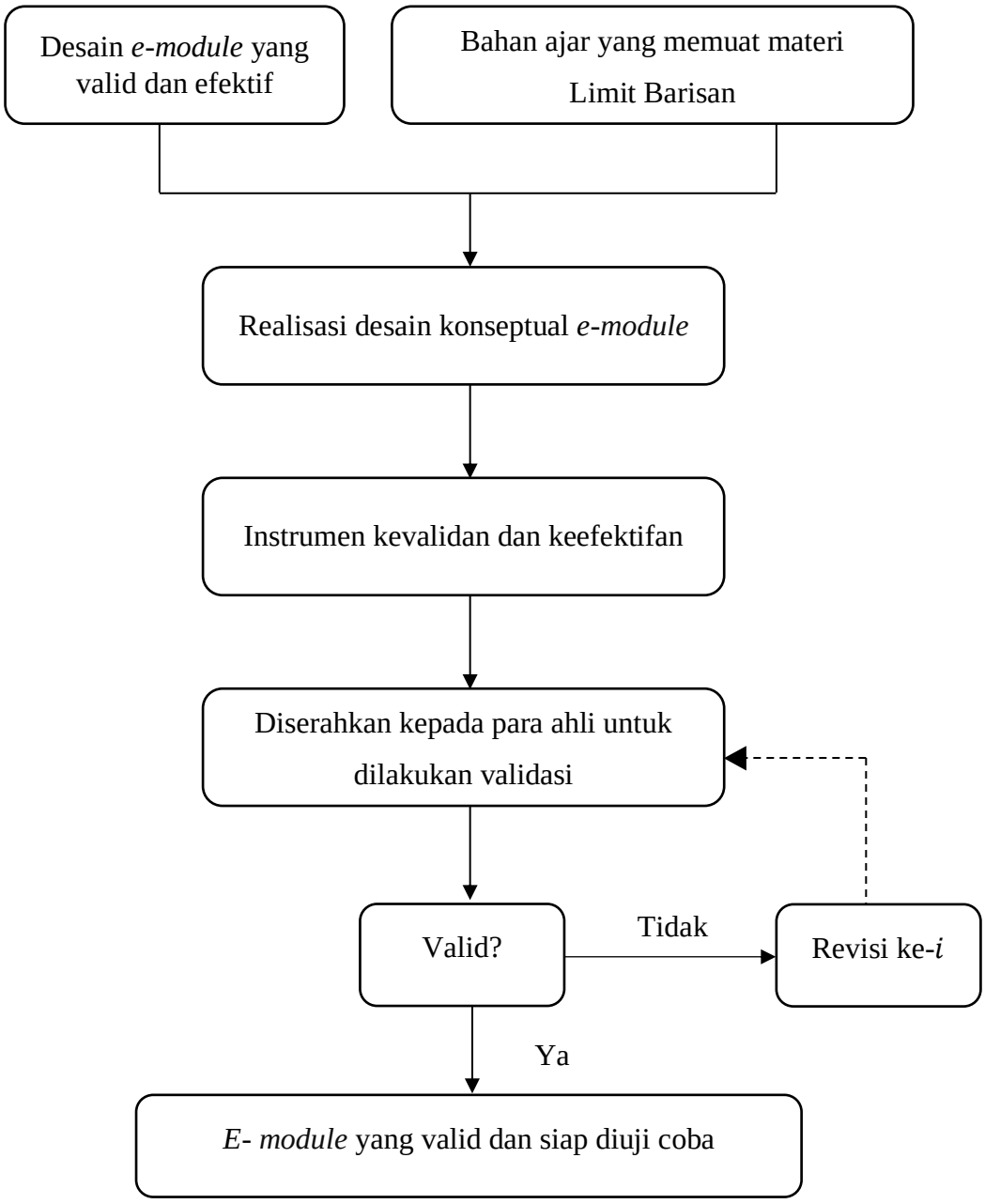
Penelitian ini dilakukan untuk mengembangkan *e-module* yang dapat digunakan dan dimanfaatkan mahasiswa dalam meningkatkan pemahaman konsep limit barisan. Hasil dari penelitian pengembangan ini berupa modul elektronik atau *e-module*. Pemanfaatan *e-module* dalam pembelajaran diharapkan dapat mempermudah dan meningkatakan pemahahaman mahasiswa. Model pengembangan dalam penelitian ini menggunakan model ADDIE sehingga kerangka berpikir dapat dilihat pada diagram alur berikut.



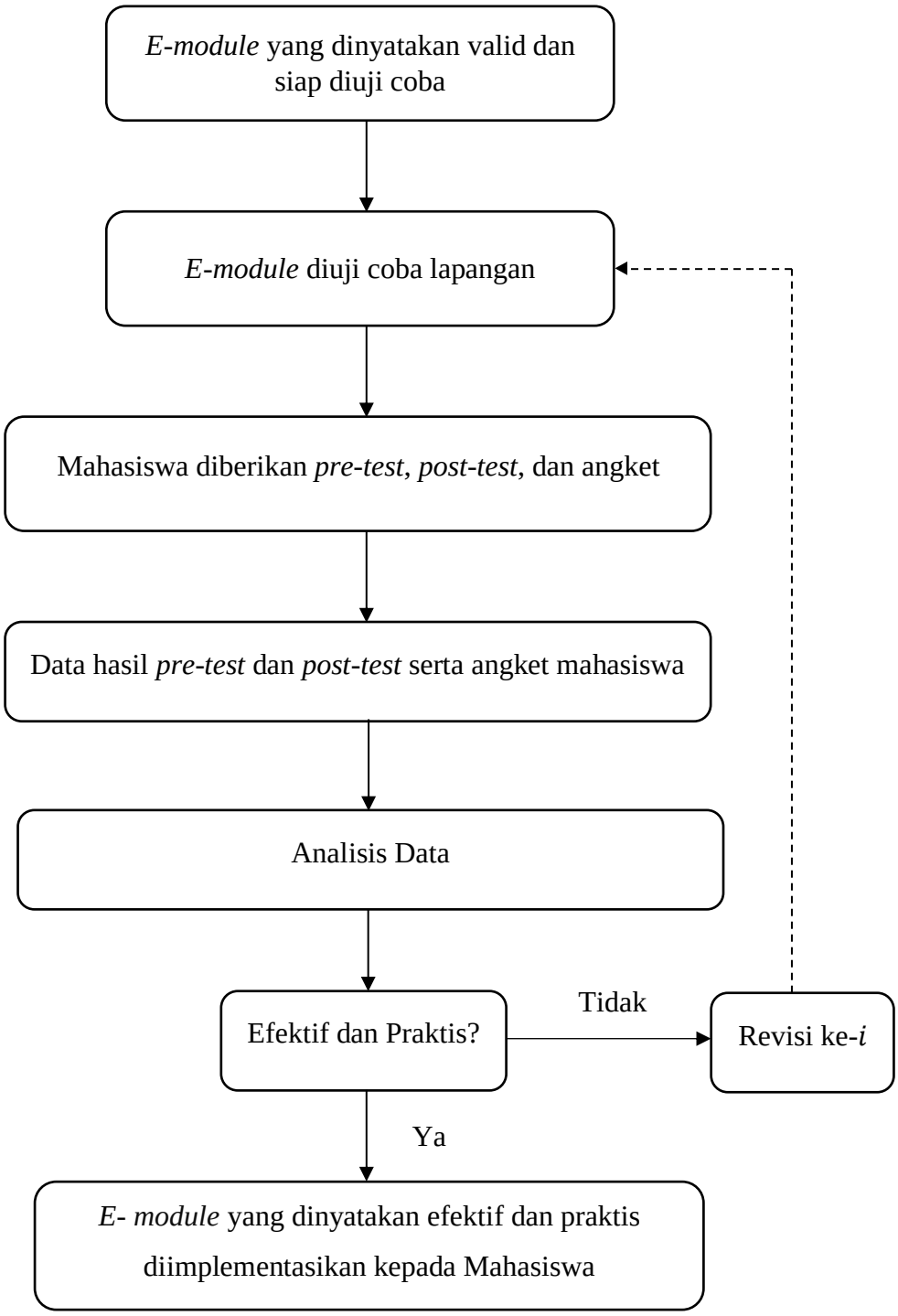
Gambar 2.5 Kerangka Berpikir Tahap Analisis



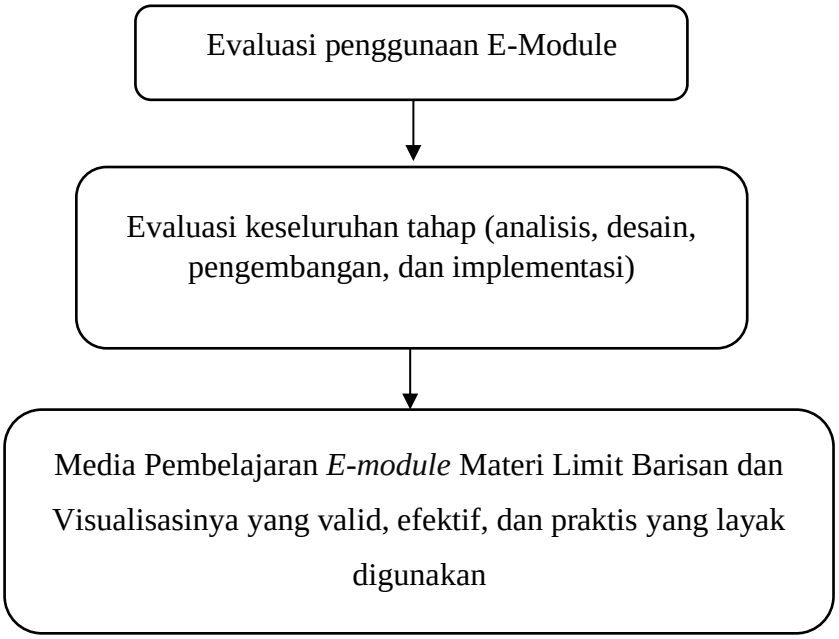
Gambar 2.6 Kerangka Berpikir Tahap Desain *E-module*



Gambar 2.7 Kerangka Berpikir Tahap Pengembangan



Gambar 2.8 Kerangka Berpikir Tahap Implementasi



Gambar 2.9 Kerangka Berpikir Tahap Evaluasi

2.4 Hipotesis

Hipotesis dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

H_0 : E-module yang dikembangkan dengan judul "E-Module Materi Limit Barisan dan Visualisasinya" tidak efektif dalam meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa.

H_1 : E-module yang dikembangkan dengan judul "E-Module Materi Limit Barisan dan Visualisasinya" efektif dalam meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Model Penelitian dan Pengembangan

Pada pengembangan *e-module* materi limit barisan untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa, peneliti melakukan penelitian pengembangan dengan menerapkan model ADDIE. Pendekatan sistem yang digunakan pada model ADDIE dalam mendesain instruksional adalah dengan cara membagi dalam beberapa langkah proses perencanaan pembelajaran. Langkah tersebut diatur dan diurutkan secara logis sehingga *output* yang diperoleh dari setiap langkah akan menjadi *input* langkah selanjutnya. Dalam penelitian pengembangan ini data yang diperlukan yaitu data kualitatif dan data kuantitatif. Terdapat lima tahapan pengembangan yang harus dilakukan oleh peneliti. Tahapan tersebut dijelaskan secara umum sebagai berikut.

1. Tahap Analisis

Peneliti melakukan identifikasi permasalahan dan analisis kebutuhan pada tahap ini. Identifikasi permasalahan yang dilakukan seperti identifikasi pemahaman mahasiswa pada suatu materi dan penggunaan media dalam pembelajaran. Selain itu peneliti melakukan analisis kebutuhan berdasarkan permasalahan yang ada yang dikaitkan dengan perkembangan media pembelajaran khususnya media dengan bantuan GeoGebra.

2. Tahap Desain

Tahap ini memuat proses penentuan desain yang disesuaikan dengan kebutuhan. Penentu desain yang dilakukan seperti penentu komponen-komponen

yang digunakan, visualisasi secara keseluruhn, ide tata letak yang sesuai dengan materi, dll. Pada tahap ini juga dilakukan penetapan media yang disesuaikan dengan tujuan pembelajaran secara sistematis.

3. Tahap Pengembangan

Tahap ini merupakan tahap perwujudan dalam benuk produk, maka segala yang menyangkut rancangan dan konseptual pada tahap desain diwujudkan dalam bentuk desain nyata. Sehingga rancangan pada tahap desain disusun dalam bentuk produk. Penelitian ini merupakan penelitian pengembangan *e-module*, maka produk yang dimaksud adalah *e-module* materi Limit Barisan. Setelah diwujudkan dalam bentuk desain nyata, *e-module* divalidasi oleh para validator ahli hingga mencapai kualifikasi valid.

4. Tahap Implementasi

Pada tahap ini, produk yang telah diwujudkan pada tahap pengembangan akan dipergunakan pada situasi nyata. Langkah-langkah implementasi produk pada penelitian ini dimulai dari uji lapangan dengan subjek yang diperlukan. Uji lapangan yang diberikan berupa *pre-test*, *post-test*, dan angket respon. Sehingga dari uji tersebut diperoleh data kuantitatif dan kualitatif yang diolah untuk menghasilkan tingkat keefektifan produk tersebut. Selanjutnya, produk yang telah dikembangkan diberikan kepada tenaga pendidik untuk menjadikan produk tersebut sebagai salah satu media pada proses belajar mengajar.

5. Tahap Evaluasi

Tahap ini merupakan tahap evaluasi secara keseluruhan, dari tahap analisis sampai dengan tahap implementasi. Evaluasi tersebut dijadikan sebagai acuan

untuk proses revisi agar dihasilkan produk yang valid, efektif, dan praktis sesuai dengan kebutuhan.

3.2 Prosedur Pengembangan

Berdasarkan tahapan model ADDIE, maka beberapa tahap pengembangan pada penelitian ini dijelaskan pada tahapan berikut.

1. Tahap Analisis (*Analysis*)

Analisis perlu dilakukan oleh peneliti pada tahap awal ini, khususnya pada analisis kebutuhan. Berdasarkan pemaparan pada bagian latar belakang, mahasiswa mengalami kesulitan dalam memvisualisasikan definisi secara formal karena materi yang dinilai abstrak. Kesulitan tersebut dapat diatasi dengan mengkongkritkan, materi agar tidak terjadi miskonsepsi. Sehingga pada analisis kebutuhan, peneliti melakukan analisis yang meliputi tujuan pembelajaran yang sesuai dengan peningkatan pemahaman konsep mahasiswa, kompetensi, dan indikator. Selanjutnya analisis kebutuhan yang diperlukan oleh peneliti ialah analisis media pembelajaran *e-module* yang mendukung peningkatan pemahaman konsep mahasiswa khususnya pada materi limit barisan dan analisis proses belajar mengajar. Analisis kebutuhan tersebut dilakukan untuk menghindari adanya miskonsepsi mahasiswa dalam mempelajari materi limit barisan. Analisis kebutuhan yang terakhir adalah analisis karakteristik mahasiswa meliputi analisis kemampuan dan pemahaman konsep mahasiswa pada materi limit barisan.

2. Tahap Desain (*Design*)

Pada tahap ini peneliti menentukan capaian pembelajaran mata kuliah, indikator, dan tujuan belajar yang sesuai dengan materi limit barisan yang disajikan pada tabel berikut.

Tabel 3.1 CPMK, Indikator, dan Tujuan

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CPMK)	**Indikator**	**Tujuan**
Menjelaskan konsep-konsep mengenai barisan dan limit barisan serta mampu membuktikan teorema yang terkait.	- Menjelaskan definisi barisan bilangan real dan Limit Barisan - Menjelaskan kekonvergenan dari suatu barisan - Memahami teorema barisan Terbatas dan konvergensinya - Memahami definisi barisan Monoton - Memahami definisi barisan Cauchy	- Mahasiswa mampu menjelaskan pengertian bilangan real, beberapa definisi dan teorema yang terkait serta dapat menerapkannya dalam menyelesaikan soal - mahasiswa mengetahui pengetahuan dasar analisis matematika tentang limit barisan - Mahasiswa dapat bernalar dan mengekspresikan hasil penalarannya.

Rancangan media pembelajaran *e-module* materi limit barisan dijabarkan sebagai berikut.

1. Pembuatan *e-module* menggunakan aplikasi Canva.
2. *Template* yang digunakan adalah *template e-book* pada aplikasi Canva.
3. Jenis tulisan (*font*) yang digunakan adalah *Glacial Indifference*.
4. Kerangka isi *e-module* materi Limit Barisan ini terdiri atas empat bagian, yaitu:
    a. Bagian Awal *e-module* terdiri atas sampul, deskrpsi *e-module*, pengantar, daftar isi, dan petunjuk penggunaan.
    b. Pendahuluan terdiri atas latar belakang *e-module*, deskripsi singkat, peta konsep, dan indikator.

c. Kegiatan Belajar terdiri atas pengantar materi, uraian materi, pengalaman belajar, animasi, latihan, dan rangkuman.

d. Penutup memuat penutup, kunci jawaban, glosarium, catatan dan daftar Pustaka.

Selanjutnya, untuk mengukur kemenarikan *e-module* dan peningkatan pemahaman konsep peneliti membuat rancangan instrumen penelitian. Pada tahap ini dihasilkan satu draf media pembelajaran *e-module* materi limit barisan.

3. Tahap Pengembangan (*Develompment*)

Hasil dari tahap desain adalah satu draf yang telah disesuaikan dengan kebutuhan. Namun, pengecekan ulang perlu dilakukan seperti pada bagian *cover*, konten, dan sampai bagian akhir. Apabila telah memenuhi kriteria maka dapat dilanjutkan dengan pencetakan sebanyak validator ahli. Kemudian dilanjutkan dengan validasi ahli materi, ahli media, ahli bahasa, ahli pembelajaran, dan ahli teknologi. Untuk validasi para ahli, instrumen yang diperlukan oleh peneliti adalah angket validasi. Terdapat beberapa indikator penilaian yang akan divalidasi sesuai dengan ahli. Indikator kesesuaian materi, keakuratan materi, penyajian materi, dll akan dinilai oleh ahli materi. Selanjutnya, indikator kejelasan tampilan, kemenarikan tampilan, konsep tampilan, kesesuaian animasi, dan kemudahan penggunaan akan dinilai oleh ahli media. Selanjutnya, indikator penggunaan bahasa, kesesuaian penggunaan bahasa, konsistensi istilah, dll akan dinilai oleh ahli bahasa. Indikator penyajian pembelajaran, penyususnan materi, kesesuaian contoh dengan materi akan dinilai dengan ahli pembelajaran. Indikator penggunaan ketepatan teknologi pada setiap bab oleh ahli teknologi. Setelah *e-module* dinilai valid oleh validator ahli maka akan dilanjutkan ketahap berikutnya. Revisi perlu

dilakukan hingga diperoleh *e-module* materi limit barisan yang valid. Selanjutnya, setelah *e-module* dinyatakan valid oleh validator maka dilakukan tahap selanjutnya.

4. Tahap Implementasi (*Implementation*)

E-module yang dinilai valid oleh para ahli dilakukan uji lapangan. Pada uji lapangan terdapat dua kelas. Kelas tersebut melibatkan 30 mahasiswa pada setiap kelas. Subjek merupakan mahasiswa strata satu dari jurusan Matematika atau Pendidikan Matematika. Tahap awal adalah pemberian *pre-test* pada kedua kelas. *Pre-test* dilakukan untuk mengetahui kemampuan mahasiswa dan diharapkan hasil *pre-test* antara kedua kelas tersebut tidak ada perbedaan. Selanjutnya, kedua kelas diberikan perlakuan berupa penyampaian materi dengan *e-module*. Setelah diberikan perlakuan, selanjutnya pemberian *post-test* pada kedua kelas. Selanjutnya, berdasarkan perolehan skor dari *post-test* akan dilakukan analisis data menggunakan uji N-Gain untuk mengetahui peningkatan pemahaman konsep mahasiswa. Hasil uji N-Gain digunakan untuk melihat keefektifan *e-module*. Selain *pre-test* dan *post-test*, mahasiswa yang telah mempelajari *e-module* diberikan angket respon. Hasil angket tersebut digunakan untuk melihat kepraktisan *e-module*.

5. Tahap Evaluasi (*Evaluation*)

Pada tahap akhir ini terdapat adanya proses analisis data dari tahap implementasi berupa skor hasil *pre-test*, *post-test* dan hasil angket respon mahasiswa. Hasil proses analisis tersebut digunakan sebagai bahan evaluasi. Peneliti melakukan evaluasi dengan dosen pengampu mata kuliah Analisi Real sehingga *e-module* dinyatakan valid sebagai media pembelajaran. Kualifikasi dosen pengampu adalah pendidikan minimal S2 (Strata 2) yang sedang mengampu mata

kuliah Analisis Real. Hasil evaluasi dengan dosen pengampu dijadikan sebagai bahan revisi sampai didapatkan *e-module* yang dibutuhkan.

3.3 Uji Produk

Uji produk pada peneitian ini sebagai cara untuk menilai kevalidan, keefektifan , kepraktisan produk, serta untuk mengetahui peningkatan pemahaman konsep mahasiswa. Terdapat dua uji pada uji produk yaitu uji ahli dan uji coba.

1. Uji Ahli

Tujuan dari uji ahli ialah sebagai pengukur tingkat kevalidan *e-module*. Pengukuran tersebut dilakukan dengan memberikan draf *e-module* materi limit barisan kepada para ahli. Kemudian ahli menilai dan menanggapi produk berdasarkan angket yang telah disediakan.

a. Desain Uji Ahli

E-module yang telah dikembangkan dilakukan validasi dengan diberikan kepada validator ahli. Validator terdiri atas ahli materi, ahli media, ahli bahasa, ahli pembelajaran, dan ahli teknologi. Validasi ini bertujuan untuk mengetahui kevalidan *e-module*. Sehingga, dapat diketahui kelayakan penggunaan *e-module* materi Limit Barisan dan Viualisasinya sebagai media pembelajaran mata kuliah Analisis Real.

b. Validator Ahli

Berikut kualifikasi validator pada penelitian ini.

1. Ahli materi

   Validator bukan dosen pembimbing tesis, pendidikan minimal adalah S3 (Strata-3) matematika atau pendidikan matematika, dan memiliki pengalaman mengajar minimal 5 tahun.

2. Ahli desain

   Validator bukan dosen pembimbing tesis, minimal pendidikan validator adalah S3 (Strata-3) yang ahli dalam pembuatan media pembelajaran.

3. Ahli bahasa

   Validator bukan dosen pembimbing tesis, minimal pendidikan validator adalah pendidikan bahasa Indonesia S3 (Strata-3), dan memiliki minimal pengalaman mengajar selama 5 tahun.

4. Ahli Pembelajaran

   Validator bukan dosen pembimbing tesis, minimal pendidikan validator adalah pendidikan Matematika S3 (Strata-3), dan memiliki minimal pengalaman mengajar selama 5 tahun.

5. Ahli Teknologi

   Validator bukan dosen pembimbing tesis, minimal pendidikan validator adalah S2 (Strata-2) matematika atau pendidikan matematika, dan menggunakan media pembelajaran berbasis teknologi khususnya pada aplikasi GeoGebra dalam mengajar.

c. Jenis Data

Terdapat dua jenis data pada uji ahli yaitu data kuantitatif dari angket validasi *e-module* berupa data skor dan data kualitatif dari angket berupa hasil komentar dan saran dari validator.

d. Instrumen Pengumpulan Data

Dalam pengumpulan data, instrumen yang digunakan adalah berupa angket yang telah disusun sesuai kebutuhan. Selain itu, disediakan juga kolom komentar dan saran di dalam instrumen angket kevalidan. Kriteria penskoran

instrumen kevalidan ini berbentuk skala *linkert* yang diadaptasi dari Zunaidah dan Amin (2016). Kisi-kisi instrumen validasi dan kriteria penskoran skala *linkert* ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 3.2 Kisi-Kisi Instrumen Validasi

No.	Penilaian		Butir	Validator Ahli
	Aspek	**Indikator**		
1	Materi	a. Kesesuaian materi	1-3	Ahli Materi
		b. Keakuratan materi	4-7	
		c. Kemutakhiran materi	8	
2	Desain	a. Ukuran format *e-module*	1	Ahli Desain
		b. Tampilan	2	
		c. Desain bagian isi	3-6	
		d. Tata letak	7	
		e. Kesesuaian komponen *e-module*	8	
3	Bahasa	a. Kelugasan bahasa yang digunakan	1-3	Ahli Bahasa
		b. Bahasa yang digunakan komunikatif	4-5	
		c. Kesesuaian bahasa dengan perkembangan mahasiswa	6-7	
		d. Kesesuaian bahasa dengan kaidah bahasa Indonesia	8	
		e. Konsistensi penggunaan istilah, simbol, dan *icon*	9	
4	Pembelajaran	a. Kesesuaian dengan indikator	1	Ahli Pembelajaran
		b. Penyajian pembelajaran	2-3	
		c. Penyusunan materi	4	
		d. Kesesuaian contoh dengan pembahasan	5-6	
		e. Kesesuaian contoh masalah dengan pembahasan untuk meningkatkan pemahaman konsep	7	
5	Teknologi	a. Aplikasi yang digunakan	1	Ahli Teknologi
		b. Kesesuaian visualisasi dengan materi	2-7	

Tabel 3.3 Skor Penilaian

Skor	Indikator Penilaian
1	Tidak valid
2	Kurang valid
3	Valid
4	Sangat valid

e. Teknik Analisis Data

Proses analisis data kuantitatif dilakukan dengan analisis statistik untuk menghitung dan menentukan presentase skor pada angket untuk mengtahui kevalidan *e-module*. Rumus yang digunakan untuk menghitung skor pada angket adalah sebagai berikut.

$$P = \frac{\sum X}{N} \times 100\% \text{ dan } NA = \frac{\sum P}{n}$$

Keterangan:

P : Presentase

$\sum X$: Banyak jawaban tiap responden dari tiap butir pertanyaan/pernyataan

N : Total skor jawaban maksimal

NA : Nilai akhir

n : Banyak butir pertanyaan/pernyataan

$\sum P$: Jumlah persentase skor

Selanjutnya, hasil presentase nilai yang telah didapatkan dikonversikan menjadi data verbal deskriptif. Pedoman kriteria kevalidan yang digunakan dengan mengadaptasi pedoman Maharani, dkk (2018).

Tabel 3.4 Kriteria Kevalidan Produk

Presentase	Kualifikasi Produk	Keputusan
$85\% < \text{NA} \leq 100\%$	Sangat sesuai/sangat valid	Produk sudah siap digunakan.
$70\% < \text{NA} \leq 85\%$	Sesuai/Valid	Produk sudah siap digunakan.
$55\% < \text{NA} \leq 70\%$	Cukup sesuai/Cukup valid	Produk dapat digunakan dengan adanya revisi
$40\% < \text{NA} \leq 55\%$	Kurang sesuai/kurang valid	Produk masih perlu direvisi.
$0\% < \text{NA} \leq 40\%$	Tidak sesuai/tidak valid	Produk tidak sesuai/gagal

Data kualitatif berupa saran dan komentar pada angket penilaian ahli digunakan sebagai dasar untuk revisi *e-module* hingga valid.

2. Uji Coba

Uji coba dilakukan dengan memberikan *e-module* dan instrumen tes yang valid kepada mahasiswa. Instrumen tersebut digunakan untuk mengukur keefektifan *e- module* dan untuk mengetahui peningkatan pemahaman konsep mahasiswa setelah menggunakan *e- module*.

a. Desain Uji Coba

Pada penelitian ini akan dilakukan uji coba lapangan. Uji lapangan melibatkan 60 mahasiswa dari dua kelas yang berbeda. Tiap kelas terdiri dari 30 mahasiswa. Mahasiswa diberikan instrumen tes berupa *pre-test* dan *post-test*. Data hasil uji coba dari *pre-test* dan *post-test* akan dianalisis dan digunakan untuk melihat keefektifan *e-module* dan untuk mengetahui peningkatan pemahaman konsep mahasiswa setelah menggunakan media pembelajaran *e- module* materi limit barisan dan visualisasinya. Revisi juga perlu dilakukan apabila *e- module* materi limit barisan belum mencapai tujuan penelitian hingga tujuan penelitian tercapai.

b. Subjek Uji Coba

Penelitian ini melibatkan mahasiswa untuk menilai keefektifan *e- module* dan untuk melihat peningkatan pemahaman konsep mahasiswa. Uji lapangan melibatkan 60 mahasiswa dari dua kelas yang berbeda yang diambil dari jurusan Matematika yang sedang menempuh mata kuliah Analisis Real. 60 mahasiswa dari dua kelas yang berbeda. Tiap kelas terdiri dari 30 mahasiswa.

c. Jenis Data

Data kuantitatif berupa data skor hasil *pre-test* dan *post-test* diperlukan untuk menilai keefektifan *e-module* dan untuk mengetahui peningkatan pemahaman konsep mahasiswa. Selain data skor hasil *pre-test* dan *post-test*, terdapat angket respon mahasiswa yang digunakan untuk melihat kepraktisan *e-module*.

d. Instrumen Pengumpulan Data

Pada penelitian ini terdapat empat instrumen pengumpulan data yaitu instrumen tes (*pre-test* dan *post-test*), angket respon mahasiswa, dan *smartphone*. Penjelasan dari masing-masing instrumen dijelaskan sebagai berikut.

1) *Pre-Test* dan *Post-Test*

Pre-test dan *post-test* digunakan untuk melihat pemahaman konsep mahasiswa pada sebelum tindakan dan sesudah tindakan. Indikator pemahaman konsep dalam penelitian ini diadaptasi dari Kilpatrick, dkk (2001). *Pre-test* dan *Post-Test* berbentuk uraian yang disusun berdasarkan kebutuhan penelitian. Soal tes berisikan lima butir soal tentang limit barisan. Soal tes pada penelitian ini akan melalui tahap validasi dari dua validator instrumen tes.

Tabel 3.5 Kisi-Kisi Instrumen Tes Pemahaman Konsep

Indikator Pemahaman Konsep	Indikator Soal	Nomor Butir
Menyatakan ulang suatu konsep yang telah dipelajari	Menyatakan ulang konsep limit barisan	1
Mengklarifikasi suatu objek berdasarkan sifat yang dipenuhi	Menentukan barisan yang konvergen dan tidak konvergen (divergen)	2
Memberikan contoh atau non contoh dari konsep yang dipelajari	Membuktikan barisan yang konvergen dan tidak konvergen (divergen)	
Menyajikan suatu konsep dalam berbagai bentuk matematis	Menjelaskan kembali konsep limit barisan dalam proses pembuktian	3
Mengembangkan syarat cukup dan syarat perlu suatu konsep	Mengetahui syarat cukup dan syarat perlu dalam proses pembuktian limit barisan	
Menggunakan dan mengaitkan berbagai konsep penyelesaian	Menggunakan langkah tepat dalam memisalkan, memasukkan syarat dalam proses pembuktian	
Menerapkan konsep secara algoritma	Menerapkan konsep limit barisan dalam proses pembuktian	

2) Angket Respon

Tujuan adanya angket respon ialah untuk mengukur tingkat kepraktisan *e-module*. Angket respon ini disusun berdasarkan beberapa penilaian seperti penilaian tampilan *e- module,* penilaian isi *e- module,* dan penilaian penggunaan *e- module*. Kisi-kisi dari angket respon mahasiswa disajikan dalam tabel 3.5 berikut.

Tabel 3.6 Kisi-Kisi Angket Respon Mahasiswa

No.	Aspek Penilaian	Indikator Penilaian	Nomor Butir
1	Tampilah *e-module*	a. Kemenarikan animasi	1-3
		b. Kejelasan teks	4
		c. Kejelasan GeoGebra	5-7
2	Isi *e-module*	d. Kejelasan materi	8-10
		e. Ksesuaian materi dengan contoh soal	11-13
3	Pengunaan *e-module*	f. Kemudahan sebagai media pembelajaran	14
		g. Kemenarikan penggunaan *e-module*	15-17

3) *Smartphone*

Pada penelitian ini, *smartphone* digunakan untuk merekam suara, video, dan foto sebagai dokumentasi dalam penelitian. Hasil data yang diperoleh dijadikan sebagai data pendukung. Data-data tersebut juga digunakan untuk mendeskripsikan gejala sesuatu yang terjadi saat penelitian berlangsung.

e. Teknik Analisis Data

Proses analisis data kuantitatif dilakukan dengan analisis statistik untuk menghitung dan menentukan presentase skor pada angket untuk mengtahui kevalidan *e-module*. Proses pengolahan angket pada tahap ini adalah sama dengan pengolahan angket validasi ahli.

Sedangkan untuk mengetahui peningkatan pemahaman konsep mahasiswa pada materi limit barisan diperoleh dari hasil *pre-test* dan *post-test* dengan penskoran berdasarkan pencapaian indikator pemahaman konsep. Penskoran pada penelitian ini diadaptasi dari Cresswell. Tabel penskoran disajikan sebagai berikut.

Tabel 3.7 Pedoman Penskoran Tes Soal

Indikator Pemahaman Konsep	**Butir Soal**	**Detail Butir Soal**	**Skor**
Menyatakan ulang suatu konsep yang telah dipelajari	1	1 (a)	20
Mengklarifikasi suatu objek berdasarkan sifat yang dipenuhi		1 (b)	20
Memberikan contoh atau non contoh dari konsep yang dipelajari	2	2 (a)	20
		2 (b)	20
Menyajikan suatu konsep dalam berbagai bentuk matematis			

Mengembangkan syarat cukup dan syarat perlu suatu konsep			
Menggunakan dan mengaitkan berbagai konsep penyelesaian	3	3	20
Menerapkan konsep secara algoritma			
Total Skor			**100**

Untuk mengetahui efektivitas *e-module* untuk meningkatan pemahaman konsep mahasiswa, data *pre-test* dan *post-test* dianalisis menggunakan uji-t (*paired sample t-test*) dan uji N-gain (*normalized gain*). Namun sebelum analisis menggunakan uji-t, dilakukan uji prasyarat yaitu uji normalitas dan uji homogenitas.

1. Uji Normalitas

Uji normalitas dilakukan untuk mengetahui bahwa sebaran data *pre-test* dan *post-test* berdistribusi normal. Uji normalitas yang digunakan adalah uji Liliefors dengan bantuan aplikasi MS Excel. Kriteria keputusan yang diambil pada uji Liliefors adalah jika L-hitung lebih besar dari L-tabel maka data tidak berdistribusi normal. Namun jika L-hitung lebih kecil dari L-tabel maka data berdistribusi normal.

2. Uji Homogenitas

Uji homogenitas dilakukan untuk mengetahui bahwa data yang diperoleh dari dua kelompok memiliki varian homogen atau tidak. Uji homogenitas dilakukan menggunakan uji-F dengan bantuan aplikasi MS Excel. Proses perhitungan uji homogenitas menggunakan taraf signifikan sebesar 5%. Kriteria keputusan yang diambil pada uji-F adalah jika F-hitung lebih besar dari F-tabel maka kedua

kelompok memiliki varian yang tidak homogen. Namun jika F-hitung lebih kecil dari F-tabel maka kedua kelompok memiliki varian yang homogen.

3. Uji-t (*Paired Sample t-Test*)

Uji-t dilakukan untuk mengetahui beda rata-rata dua sampel berpasangan (*Paired Sample t-Test*) karena dalam penelitian ini terdapat dua variabel berbeda yaitu sebelum dan setelah. Pada proses perhitungan dan analisis data pada uji-t, peneliti menggunkan *software* SPSS. Hipotesis pada uji-t (*Paired Sample t-Test*) adalah sebagai berikut:

H_0 : Tidak terdapat perbedaan yang signifikan rata-rata skor *pre-test* dan *post-test* artinya tidak terdapat perbedaan yang signifikan dalam peningkatan pemahaman konsep mahasiswa sebelum dan sesudah menggunakan *e-module* yang dikembangkan.

H_1 : Terdapat perbedaan yang signifikan rata-rata skor *pre-test* dan *post-test* artinya terdapat perbedaan yang signifikan dalam peningkatan pemahaman konsep mahasiswa sebelum dan sesudah menggunakan *e-module* yang dikembangkan.

Proses perhitungan uji-t menggunakan taraf signifikan sebesar 5%. Pedoman pengambilan keputusan pada uji-t (*Paired Sample t-Test*) diperoleh berdasarkan perbandingan nilai signifikasi (Sig.) yang digunakan peneliti yaitu 5% dengan nilai signifikasi (Sig.) yang terdapat pada hasil output SPSS. Kriteria pengujian hasil hipotesis adalah sebagai berikut:

Jika nilai signifikasi (Sig.) lebih besar dari 0,05 maka H_0 diterima.

Jika nilai signifikasi (Sig.) lebih kecil dari 0,05 maka H_0 ditolak.

4. Uji N-Gain

Uji-t digunakan secara spesifik hanya untuk mengetahui signifakan atau tidaknya peningkatan pemahaman konsep mahasiswa. Untuk mengetahui besar dan kriteria peningkatan pemahaman konsep mahasiswa digunakan perhitungan uji N-gain sebagai berikut.

$$\text{Gain Ternormalisasi}\langle g\rangle = \frac{S_{post} - S_{pre}}{S_{m_ideal} - S_{pre}}$$

Keterangan:

$\langle g\rangle$ = skor rata-rata gain yang dinormalisasi

S_{post} = skor rata-rata tes akhir mahasiswa

S_{pre} = skor rata-rata tes awal mahasiswa

S_{m_ideal} = skor maksimum ideal

Hasil perolehan nilai rata-rata N-gain dikualifikasikan sesuai kriteria gain yang diadaptasi dari Hake (1999) dapat dilihat pada Tabel 3.8. Berdasarkan kualifikasi kriteria gain dapat diketahui bahwa peningkatan pemahaman konsep mahasiswa dengan menggunakan *e-module* materi limit barisan dan visualisasinya memenuhi kriteria rendah, sedang, atau tinggi.

Tabel 3.8 Interpretasi Skor Rata-Rata N-Gain

$\langle g\rangle$	**Kriteria**
$\langle g\rangle \geq 0{,}7$	Tinggi
$0{,}3 \leq \langle g\rangle < 0{,}7$	Sedang
$\langle g\rangle < 0{,}3$	Rendah

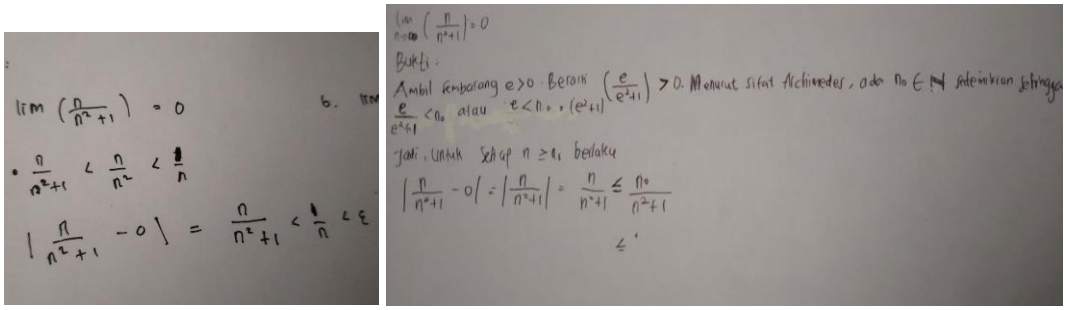
BAB IV

HASIL PENGEMBANGAN

4.1 Pengembangan *E-Module* yang Valid, Efektif, dan Praktis

4.1.1 Penyajian Data Analisis Kebutuhan

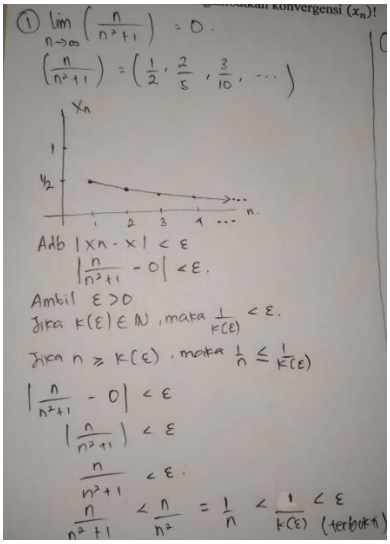
Analisis pertama yang dilakukan oleh peneliti ialah analisis kebutuhan mahasiswa. Hasil analisis kebutuhan mahasiswa diperoleh peneliti dari pengamatan dan obsevasi keadaan mahasiswa ketika sedang mempelajari suatu materi di dalam kelas. Pengamatan dan observasi dilakukan dengan memberikan soal terkait materi limit barisan, yaitu soal pembuktian barisan konvergen. Setelah diberikan soal tersebut, hasil jawaban dari dua mahasiswa yaitu Mahasiswa 1 (MS1) dan Mahasisa 2 (MS2) dapat dilihat pada Gambar 4.1 berikut.



Gambar 4. 1 Jawaban Mahasiswa 1 dan Mahasiswa 2

Berdasarkan jawaban tersebut dapat diamati bahwa MS1 belum mendefinisikan limit barisan secara lengkap. MS1 hanya menjawab salah satu tahap pembuktian barisan konvergen. Sehingga, hal tersebut tidak cukup menjawab untuk soal pembuktian barisan konvergen. Sedangkan jawaban dari MS2 sangat berbeda dengan MS1. MS2 mampu menuliskan definisi limit barisan namun tidak sempurna. Jawaban MS2 kurang tepat dalam penulisan simbol dan penyelesaian pembuktiannya. MS2 hanya mampu menuliskan definisi namun belum menjawab

pada tahap pembuktian. Hasil pengamatan dan observasi pada MS1 dan MS2 menunjukkan bahwa adanya kesulitan mahasiswa dalam menggunakan, memahami, dan mengaplikasikan definisi pada soal. Selain jawaban dari MS1 dan MS2, peneliti mendapatkan jawaban yang berbeda dari mahasiswa lain yaitu Mahasiswa 3 (MS3). Hasil jawaban dari MS3 dapat dilihat pada Gambar 4.2 berikut.



Gambar 4. 2 Jawaban Mahasiswa 3

Berdasarkan jawaban tersebut dapat diamati bahwa MS3 memiliki jawaban yang berbeda dengan jawaban MS1 dan MS2. MS3 menjawab dengan cara mendaftar unsur-unsur dari barisan tersebut dan membuat grafik bantuan terlebih dahulu, kemudian menuliskan langkah selanjutnya untuk menyelesaikan pembuktian. Namun, cara mendaftar unsur-unsur satu persatu sangat tidak efektif apabila dilakukan secara manual, begitupun dengan pembuatan grafik. Hasil pengamatan dan observasi pada MS3 tersebut menunjukkan bahwa adanya materi yang abstrak dan menyebabkan miskonsepsi apabila tidak dikonkritkan. Selain materi yang abstrak, hasil tersebut menunjukkan bahwa adanya kesulitan mahasiswa dalam memvisualisasikan definisi.

Analisis kebutuhan selanjutnya adalah kepada dosen pengampu mata kuliah Analisis Real. Hasil analisis kebutuhan dosen pengampu diperoleh dari hasil wawancara kepada dosen pengampu mata kuliah Analisis Real berikut.

Peneliti : Bu, apakah ibu menemukan kendala dalam pembelajaran di kelas? Jika ada, kendala seperti apa yang ibu temukan?

Dosen : Pasti ada, seperti yang kamu tau bahwa materi pada mata kuliah ini terdapat banyak teorema-teorema yang harus dipahami. Tidak hanya dipahami saja, namun mampu menggunakan dan mengaplikasikan pada permasalahan. Sedangkan mahasiswa yang mampu memahami secara keseluruhan hanya beberapa.

Peneliti : Baik ibu. Kemudian untuk kendala saat penyampaian materi kepada mahasiswa itu seperti apa ibu?

Dosen : Nah ini, materi pada mata kuliah ini sangat abstrak sehingga sangat perlu dikonkritkan juga sangat perlu di tunjukkan bentuk real-nya. Sehingga materi mampu tersampaikan dengan baik. Sementara ini saya masih menggunakan papan tulis untuk penjelasan materi saat kelas berlangsung.

Peneliti : Kemudian metode apa yang ibu gunakan dalam pembelajaran?

Dosen : Saya masih menggunakan metode ceramah. Penyampaian materi di awal kemudian dilanjutkan dengan latihan.

Peneliti : Apakah ada pemanfaatan gadget seperti smart phone atau laptop saat pembelajaran?

Dosen : O iya, saya bebaskan mereka untuk mengeksplor pengetahuan mereka saat mengikuti kelas saya.

Kesimpulan yang diperoleh dari wawancara kepada dosen pengampu yaitu, pemahaman konsep pada mata kuliah ini sangat penting namun pemahaman tersebut tidak merata karena kemampuan setiap mahasiswa berbeda, materi abstrak dan perlu dikonkritkan, terbatasnya media pembelajaran walaupun, metode yang digunakan masih berupa metode ceramah, dan tersedianya kebebasan mengakses dan menggunakan *smart phone*.

Hasil pengamatan dan observasi peneliti menunjukkan dua hal yang perlu diperhatikan. Pertama adalah adanya kesulitan mahasiswa dalam menggunakan, memahami, dan mengaplikasikan definisi pada soal. Kedua adalah kesulitan mahasiswa dalam memvisualisasikan definisi yang abstrak dan dapat menyebabkan miskonsepsi. Hasil pengamatan tersebut menjelaskan bahwa diperlukannya teknologi yang mampu memvisualisasikan definisi sesuai kebutuhan. Hal tersebut juga didukung dengan hasil wawancara dengan dosen pengampu yang menyatakan bahwa media pembelajaran masih terbatas. Salah satu teknologi yang dipilih oleh peneliti ialah aplikasi GeoGebra. Keunggulan aplikasi Geogebra ialah kemampuan dalam visualisasi materi dibidang matematika seperti aljabar, kalkulus, dan geometri.

Keunggulan aplikasi GeoGebra harus dimanfaatkan, salah satunya adalah kemampuan dalam visualisasi. Hasil pengamatan yang menyatakan bahwa mahasiswa kesulitan dalam memahami dan memvisualisaikan definisi diharapkan dapat teratasi dengan aplikasi GeoGebra ini. Hal tersebut dapat dilakukan dengan cara memberikan visualisasi pada defiinisi yang diperlukan. Visualisasi dengan bantuan GeoGebra ini diharapkan dapat diletakkan setelah penjelasan tentang definisi agar mahasiswa mampu secara langsung mempraktekkan. Seperti visualisasi berbantuan GeoGebra diletakkan pada definisi barisan dan limit barisan pada sub-bab 3.1 materi limit barisan. Visualisasi tersebut diletakkan pada sub-bab 3.1 karena memuat definisi dasar yang harus dipahami pada materi limit barisan. Penjelasan lainnya akan dijelaskan pada tahap perencanaan.

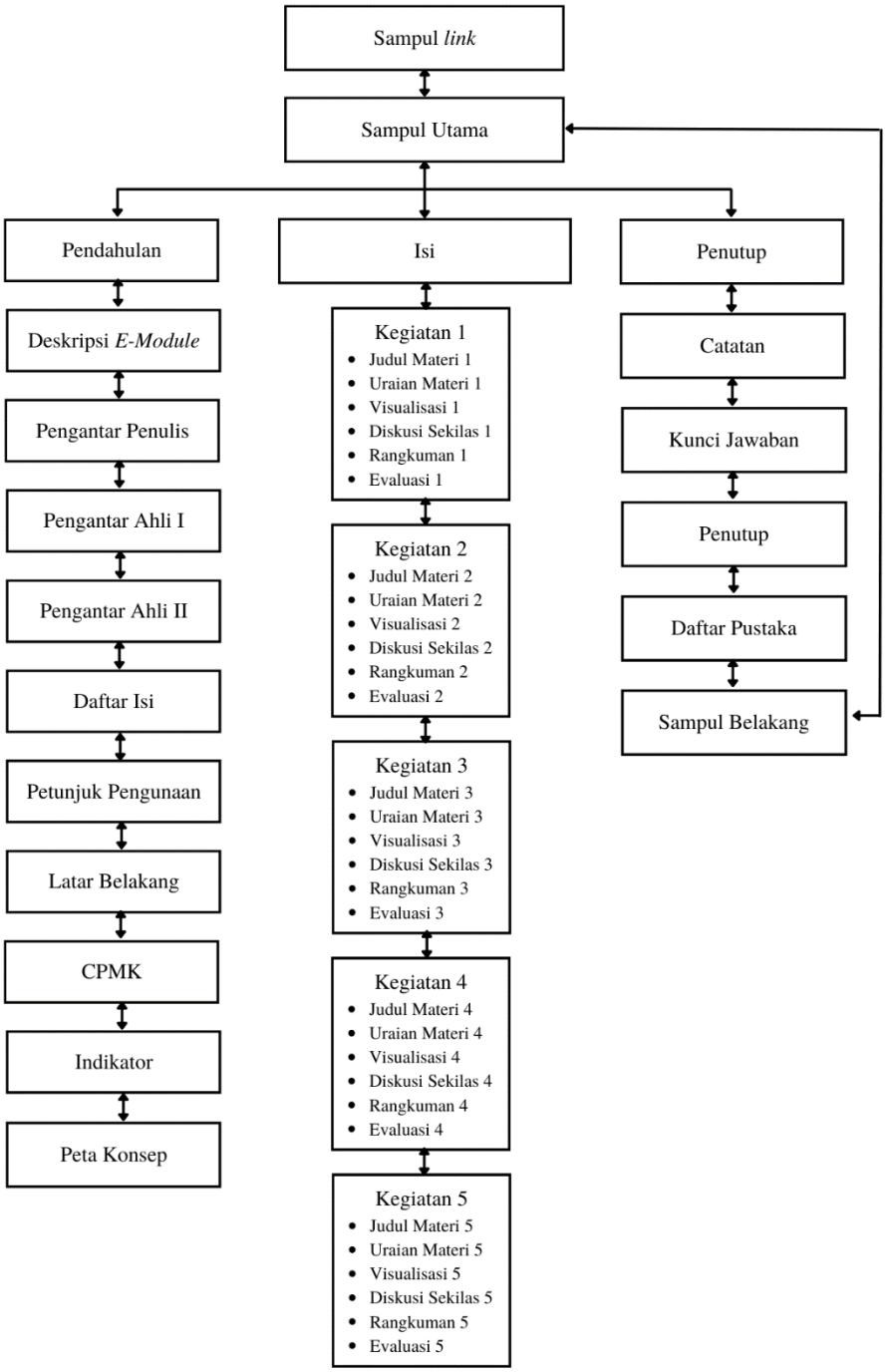
Analisis kebutuhan lainnya yang juga harus diperhatikan adalah terbatasnya bahan ajar atau media pembelajaran yang mampu memuat dan

memberikan visualisasi kepada mahasisiwa. Selain untuk visualisasi, media yang dibutuhkan adalah media yang memfasilitasi pemahaman konsep dan menunjang minat belajar secara mandiri oleh mahasiswa. Kurangnya ketersedian fasilitas tersebut sangat perlu diperhatikan pada analisis kebutuhan.

Bahan ajar atau media yang dipilih oleh peneliti adalah *e-module* karena kelebihan-kelebihan yang dimiliki sehingga diharapkan mampu mendukung dan memenuhi kebutuhan. *E-module* yang dimaksud adalah *e-module* yang mampu meningkatkan pemahaman mahasiswa, mampu memvisualisasikan materi, dan mendukung kegiatan belajar mandiri mahasiswa. Mahasiswa diberikan materi limit barisan melalui *e-module* yang memuat visualisasi berbantuan GeoGebra secara langsung.

4.1.2 Penyajian Data Desain *E-Module*

Pada tahap ini, peneliti melakukan perancangan konseptual untuk *e-module* materi Limit Barisan dengan bentuan aplikasi GeoGebra untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa sesuai indikator-indikator pemahaman konsep. Penyajian *flowchart e-module* disajikan pada Gambar sebagai berikut:

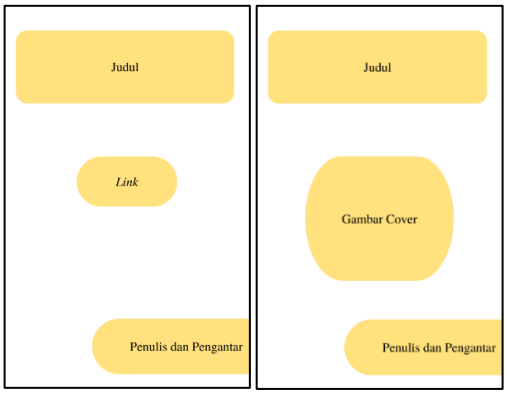


Gambar 4. 3 *Flowchart E-Module*

Hasil desain berdasarkan *flowchart* adalah sebagai berikut.

1. Bagian Pembuka

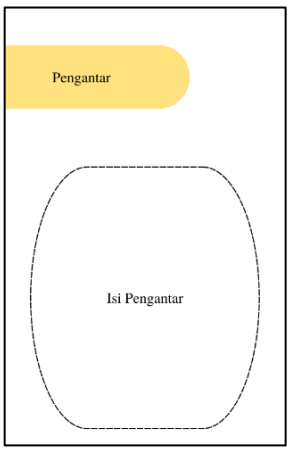
a. Sampul



Gambar 4. 4 Sampul *E-Module*

Gambar 4.3 adalah sampul *e-module* secara keseluruhan. Keterangan sampul secara berturut-turut adalah sampul *link e-module*, sampul awal *e-module*, dan sampul akhir *e-module*. Sampul *link e-module* memuat judul "*E-Module* Limit Barisan dan Visualisasinya", link yang dapat diklik untuk membuka *e-module*, sasaran pengguna yaitu mahasiswa, dan nama penulis beserta nama pengantar. Sampul awal *e-module* memuat judul, ilustrasi gambar visualisasi barisan, sasaran pengguna, dan nama penulis beserta nama pengantar. Sampul akhir *e-module* memuat sampul awal *e-module* yang diperkecil dan ilustrasi transparan.

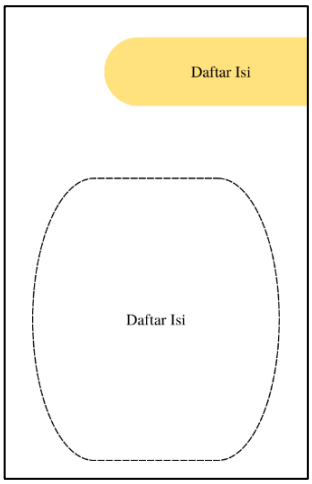
b. Kata Pengantar



Gambar 4. 5 Kata Pengantar *E-Module*

Gambar 4.4 adalah kata pengantar *e-module* secara keseluruhan. Keterangan kata pengantar secara berturut-turut adalah kata pengantar penulis, kata pengantar ahli pertama, dan kata pengantar ahli kedua.

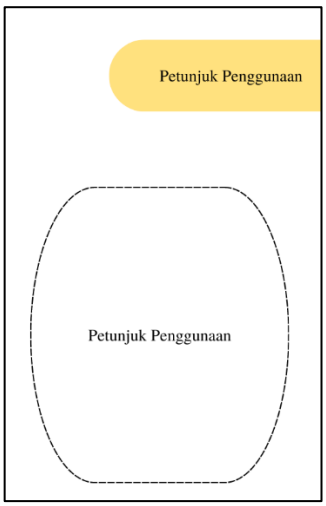
c. Daftar Isi



Gambar 4. 6 Daftar Isi *E-Module*

Gambar 4.5 adalah daftar isi *e-module*. Daftar isi tersebut memuat isi yang termuat pada *e-module* beserta halamannya.

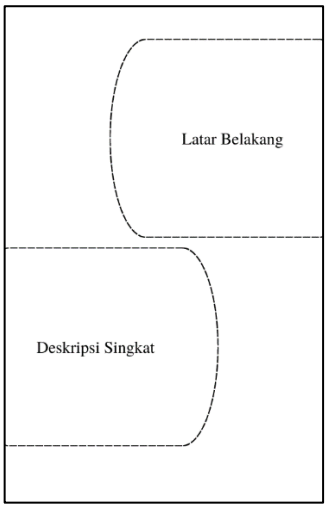
d. Petunjuk Penggunaan *E-Module*



Gambar 4. 7 Petunjuk Penggunaan *E-Module*

Gambar 4.6 adalah petunjuk penggunaan *e-module*. Petunjuk penggunaan memuat beberapa poin yang harus diperhatikan oleh pengguna sebelum menggunakan *e-module*.

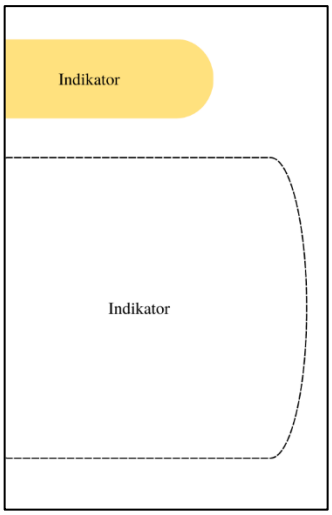
e. Latar Belakang & Deskripi Singkat



Gambar 4. 8 Latar Belakang dan Deskripsi Singkat *E-Module*

Gambar 4.7 adalah latar belakang dan deskripsi singkat *e-module*. Deskripsi singkat tersebut memuat keterangan beberapa materi yang ada pada *e-module*.

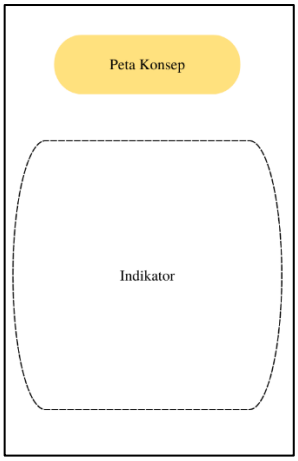
f. Indikator



Gambar 4. 9 Indikator *E-Module*

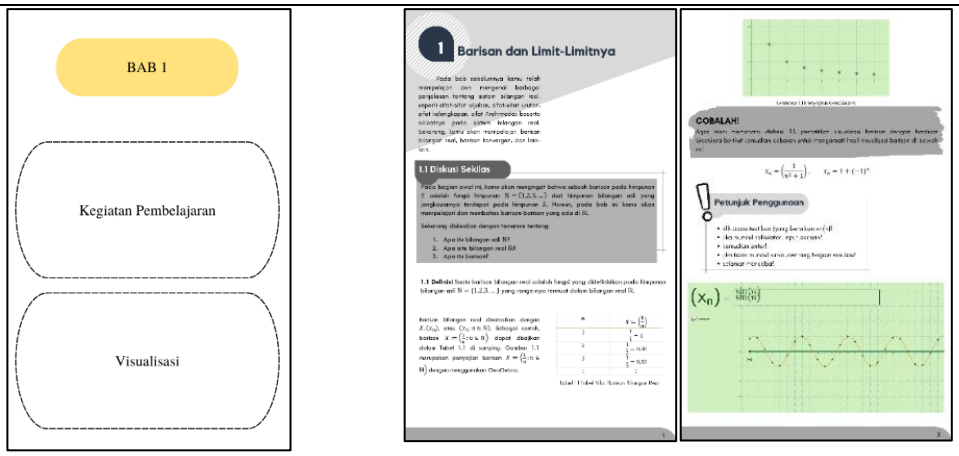
2. Bagian Inti

a. Peta Konsep



Gambar 4. 10 Peta Konsep *E-Module*

b. Bab 1 : Barisan dan Limit-Limtnya

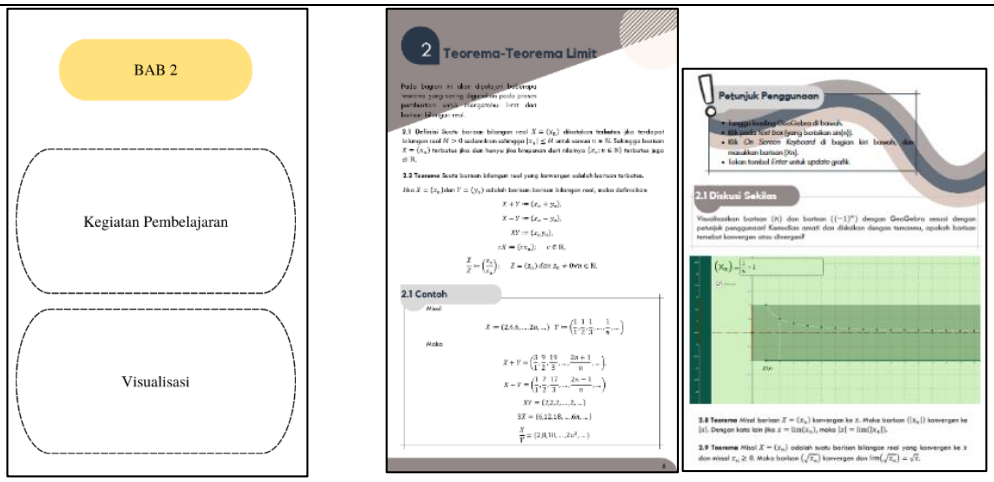


Gambar 4. 11 Sekilas Materi dan Visualisasi Bab 1 *E-Module*

Gambar 4.10 merupakan gambar sekilas materi dan visualisasi Bab 1 pada *e-module*. Pada setiap materi memuat uraian materi, diskusi sekilas, visualisasi GeoGebra beserta petunjuk penggunaannya, contoh soal, dan evaluasi. Pada Bab 1 terdapat dua visualisasi berbantuan GeoGebra yang disesuaikan dengan analisis kebutuhan. Berdasarkan analisis kebutuhan, posisi visualisasi GeoGebra yang pertama diletakkan setelah uraian materi mengenai definisi barisan. Hal tersebut

dilakukan karena pemahaman definisi barisan adalah pemahaman dasar untuk melanjutkan pada materi berikutanya. Posisi visualisasi GeoGebra yang kedua diletakkan setelah uraian materi mengenai definisi limit barisan agar mahasiswa mampu memahami definisi tersebut dengan baik sehingga tidak menimbulkan miskonsepsi.

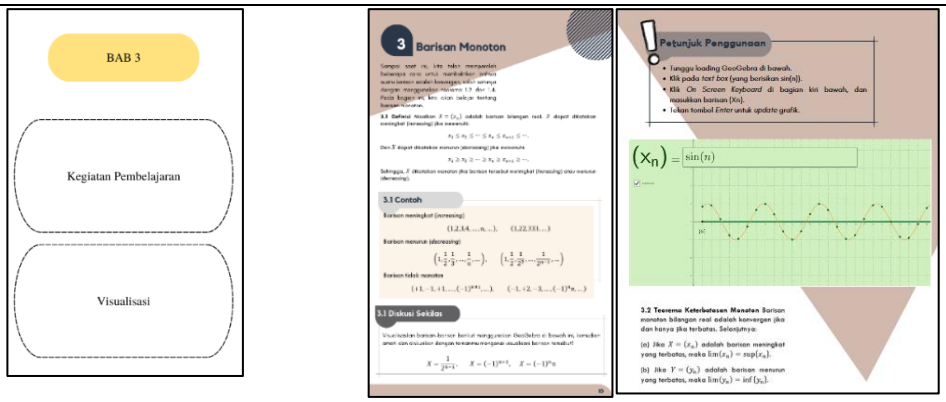
c. Bab 2 : Teorema-Teorema Limit



Gambar 4. 12 Sekilas Materi dan Visualisasi Bab 2 *E-Module*

Gambar 4.11 merupakan gambar sekilas materi dan visualisasi Bab 2 pada *e-module*. Pada setiap materi memuat uraian materi, diskusi sekilas, visualisasi GeoGebra beserta petunjuk penggunaannya, contoh soal, dan evaluasi. Pada Bab 2 terdapat satu visualisasi dengan bantuan GeoGeba yang disesuaikan dengan analisis kebutuhan yaitu diletakkan setelah uraian materi tentang definisi terbatas.

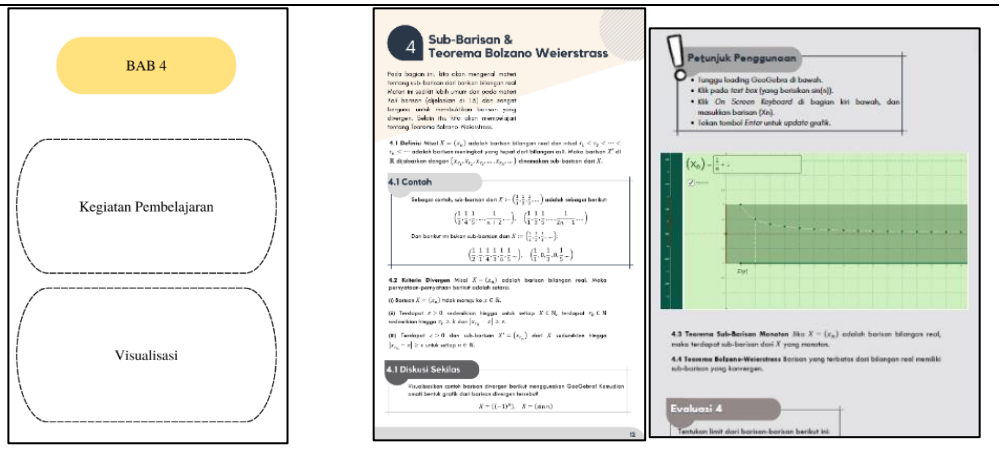
d. Bab 3 : Barisan Monoton



Gambar 4. 13 Sekilas Materi dan Visualisasi Bab 3 *E-Module*

Gambar 4.12 merupakan gambar sekilas materi dan visualisasi Bab 3 pada *e-module*. Pada setiap materi memuat uraian materi, diskusi sekilas, visualisasi GeoGebra beserta petunjuk penggunaannya, contoh soal, dan evaluasi. Pada Bab 3 terdapat satu visualisasi dengan bantuan GeoGeba yang disesuaikan dengan analisis kebutuhan yaitu diletakkan setelah uraian materi tentang definisi meningkat (*decrising*) dan menurun (*increasing*).

e. Bab 4 : Sub-Barisan dan Teorema Balzano-Weierstrass



Gambar 4. 14 Sekilas Materi dan Visualisasi Bab 4 *E-Module*

Gambar 4.13 merupakan gambar sekilas materi dan visualisasi Bab 4 pada *e-module*. Pada setiap materi memuat uraian materi, diskusi sekilas, visualisasi GeoGebra beserta petunjuk penggunaannya, contoh soal, dan evaluasi. Pada Bab 4

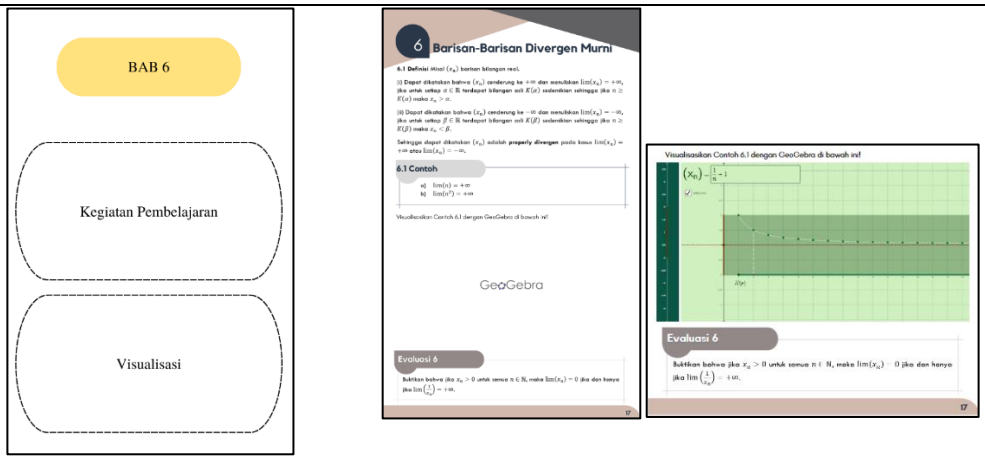
terdapat satu visualisasi dengan bantuan GeoGeba yang disesuaikan dengan analisis kebutuhan yaitu diletakkan setelah uraian materi tentang definisi sub-barisan.

f. Bab 5 : Kriteria Cauchy

Gambar 4. 15 Sekilas Materi dan Visualisasi Bab 5 *E-Module*

Gambar 4.14 merupakan gambar sekilas materi dan visualisasi Bab 5 pada *e-module*. Pada setiap materi memuat uraian materi, diskusi sekilas, visualisasi GeoGebra beserta petunjuk penggunaannya, contoh soal, dan evaluasi. Pada Bab 5 terdapat satu visualisasi dengan bantuan GeoGeba yang disesuaikan dengan analisis kebutuhan yaitu diletakkan setelah uraian materi tentang definisi barisan Cauchy.

g. Bab 6 : Barisan-Barisan Divergen Murni

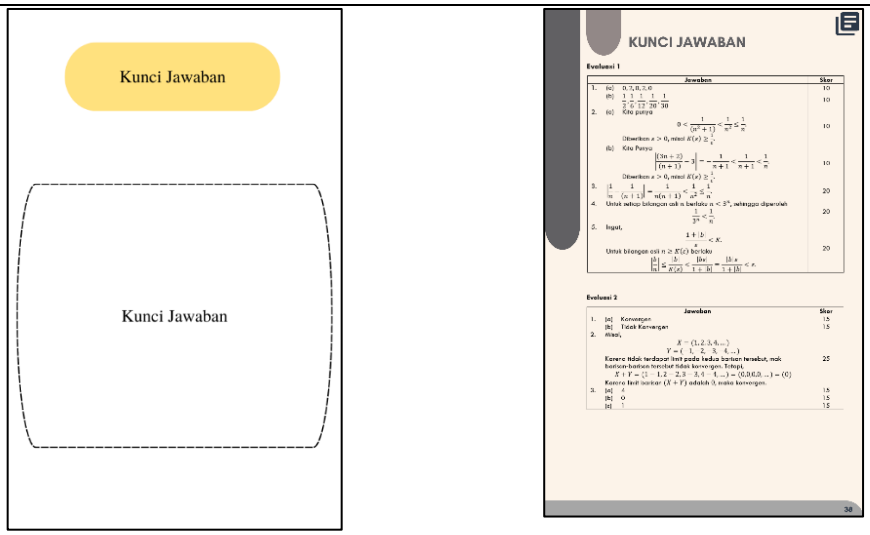


Gambar 4. 16 Sekilas Materi dan Visualisasi Bab 6 *E-Module*

Gambar 4.15 merupakan gambar sekilas materi dan visualisasi Bab 6 pada *e-module*. Pada setiap materi memuat uraian materi, diskusi sekilas, visualisasi GeoGebra beserta petunjuk penggunaannya, contoh soal, dan evaluasi. Pada Bab 6 terdapat satu visualisasi dengan bantuan GeoGeba yang disesuaikan dengan analisis kebutuhan yaitu diletakkan setelah uraian materi tentang definisi barisan Divergen murni.

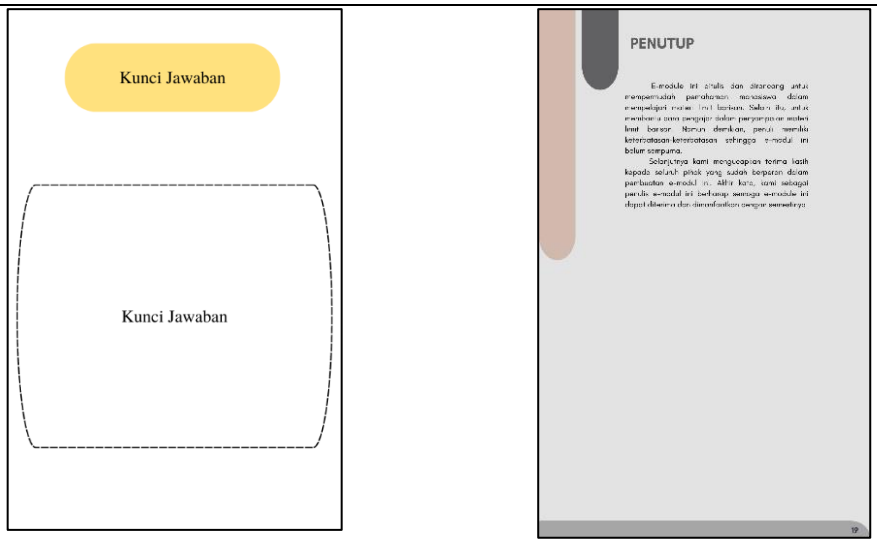
3. Bagian Penutup

a. Kunci Jawaban



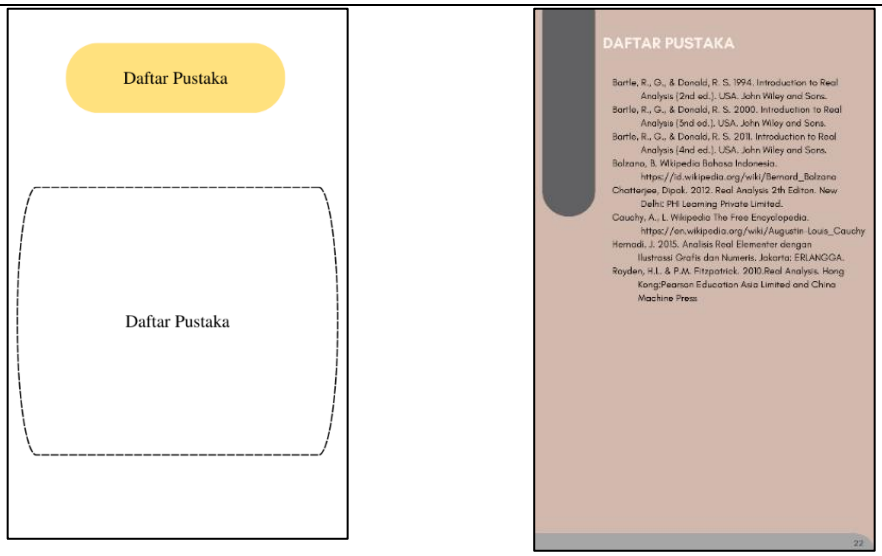
Gambar 4. 17 Kunci Jawaban

b. Penutup



Gambar 4. 18 Penutup *E-Module*

c. Daftar Pustaka



Gambar 4. 19 Daftar Pustaka *E-Module*

Berdasarkan bagian-bagian *e-module* di atas, maka akan dibuat modul berbasis elektronik dengan menggunakan template *e-book* dan jenis abjad (*font*) *Glacial Indifference* di aplikasi desain Canva. Judul *e-module* adalah "*E-module* Limit Barisan dan Visualisasinya" dengan gambar ilustrasi yang menarik dan sesuai dengan pembahasan untuk mahasiswa yang sedang menempuh mata kuliah Analisis Real.

Adapun untuk lembar instrumen penilaian yang disusun oleh peneliti antara lain: lembar validasi ahli materi yang memuat penilaian mengenai kelayakan aspek materi, lembar validasi ahli desain yang memuat penilaian mengenai kelayakan aspek desain, lembar validasi ahli bahasa yang memuat penilaian mengenai kelayakan aspek bahasa, lembar validasi ahli pembelajaran yang memuat penilaian mengenai kelayakan aspek pembelajaran, dan lembar validasi ahli tekonologi yang memuat penilaian mengenai kelayakan aspek teknologi.

Indikator pemahaman konsep yang digunakan dalam penelitian ini ialah indikator pemahaman konsep menurut Kilpatrick. Berikut tabel indikator pemahaman konsep tersebut.

Tabel 4.1 Indikator Pemahaman Konsep

No.	Indikator Pemahaman Konsep	Indikator
1	Menyatakan ulang suatu konsep yang telah dipelajari	Menyatakan ulang konsep limit barisan
2	Mengklarifikasi suatu objek berdasarkan sifat yang dipenuhi	Menentukan barisan yang konvergen dan tidak konvergen (divergen)
3	Memberikan contoh atau non contoh dari konsep yang dipelajari	Membuktikan barisan yang konvergen dan tidak konvergen (divergen)
4	Menyajikan suatu konsep dalam berbagai bentuk matematis	Menjelaskan kembali konsep limit barisan dalam proses pembuktian
5	Mengembangkan syarat cukup dan syarat perlu suatu konsep	Mengetahui syarat cukup dan syarat perlu dalam proses pembuktian limit barisan
6	Menggunakan dan mengaitkan berbagai konsep penyelesaian	Menggunakan langkah tepat dalam memisalkan, memasukkan syarat dalam proses pembuktian
7	Menerapkan konsep secara algoritma	Menerapkan konsep limit barisan dalam proses pembuktian

Deskripsi pada setiap indikator pada *e-module* dijelaskan sebagai berikut:

1. Indikator 1

1.1 Diskusi Sekilas

Pada bagian awal ini, kamu akan mengingat bahwa sebuah barisan pada himpunan S adalah fungsi himpunan $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$ dari himpunan bilangan asli yang jangkauannya terdapat pada himpunan S. Namun, pada bab ini kamu akan mempelajari dan membahas barisan-barisan yang ada di $\mathbb{R}$.

Sekarang diskusikan dengan temanmu tentang:

1. Apa itu bilangan asli $\mathbb{N}$?
2. Apa aitu bilangan real $\mathbb{R}$?
3. Apa itu barisan?

Indikator pemahaman konsep yang pertama adalah menyatakan ulang suatu konsep yang telah dipelajari. Pada indikator ini, pembelajaran yang mungkin dilakukan ialah menyatakan ulang konsep-konsep yang telah dipelajari terutama yang berkaitan dengan materi yang akan dipelajari. Pada *e-module* dimunculkan pertanyaan mengenai konsep terdahulu yang dibutuhkan untuk didiskusikan dengan teman melalui "Diskusi Sekilas."

2. Indikator 2 dan 3

1.2 Definisi Suatu barisan $X = (x_n)$ di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, atau x disebut limit dari (x_n), jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.

Jika x adalah limit dari suatu barisan, maka dapat dikatakan $X = (x_n)$ mendekati x atau $X = (x_n)$ mempunyai limit x. Suatu barisan yang mempunyai limit dinamakan barisan **konvergen**, sedangkan barisan yang tidak mempunyai limit dinamakan barisan **divergen**.

1.3 Contoh

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$
b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\right) = 0$
c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{n+1}\right) = 3$
d) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$
e) Jika $0 < b < 1$, maka $\lim_{n\to\infty}(b^n) = 0$

1.4 Contoh

Barisan $(0,2,0,2, \ldots, 0,2, \ldots)$ tidak konvergen ke 0.

Indikator pemahaman konsep yang kedua adalah mengklarifikasi objek berdasarkan sifat yang dipenuhi. Pada indikator ini, pembelajaran yang mungkin dilakukan ialah dengan menentukan barisan yang konvergen dan barisan yang tidak konvegen. Pada *e-module* dimunculkan materi mengenai barisan konvergen dan tidak konvergen disertai dengan contoh. Indikator ketiga adalah memberikan contoh atau non contoh dari konsep yang dipelajari. Pada indikator ini, pembelajaran yang mungkin dilakukan ialah dengan membuktikan dengan definisi barisan yang konvergen dan barisan yang tidak konvergen. Pada *e-module* dimunculkan soal contoh dan soal evaluasi yang diharapkan dapat diselesaikan oleh mahasiswa untuk mencapai indikator yang dimaksud.

3. Indikator 4, 5, 6, dan 7

Evaluasi 1

1. Barisan (x_n) didefinisikan dengan rumus di bawah untuk suku ke-n. Tulislah lima suku pertama pada setiap rumus:
   a) $x_n := 1 + (-1)^n$
   b) $x_n := \frac{1}{n(n+1)}$
2. Buktikan dengan menggunakan definisi limit barisan:
   a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1}\right) = 0$
   b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{n+1}\right) = 3$

Indikator pemahaman konsep yang keempat adalah menyajikan suatu konsep dalam berbagai bentuk matematis. Pada indikator ini, pembelajaran yang mungkin dilakukan ialah mahasiswa menjelaskan kembali konsep limit barisan dalam proses pembuktian. Indikator kelima adalah mengembangkan syarat cukup dan syarat perlu suatu konsep. Pada indikator ini, pembelajaran yang mungkin dilakukan ialah dengan mengetahui syarat cukup dan syarat perlu dalam proses pembuktian limit barisan. Indikator keenam adalah menggunakan dan mengaitkan bebagai konsep penyelesaian. Pada indikator ini, pembelajaran yang mungkin dilakukan ialah dengan menggunakan langkah tepat dalam memisalkan dan menggunakan syarat dalam proses pembuktian. Indikator ketujuh adalah menerapkan konsep secara algoritma. Pada indikator ini, pembelajaran yang mungkin dilakukan ialah dengan menerapkan konsep limit barisan dalam proses pembuktian. Pada *e-module* dimunculkan soal-soal pembuktian berdasarkan definisi limit barisan.

4.1.3 Penyajian Data Pengembangan *E-Module*

Penelitian pengembangan ini memiliki tujuan untuk menghasilkan *e-module* materi Limit Barisan dengan menggunakan bantuan aplikasi GeoGebra dengan metode ADDIE untuk mahasiswa yang sedang mengambil mata kuliah

Analisis Real di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang tahun ajaran 2022/2023 dengan menguji kevalidan, keefektifan, dan kepraktisan *e-module* yang dikembangkan. Berdasarkan tujuan dari penelitian pengembangan ini, berikut dijelaskan hasil penelitian tahap pengembangan beserta analisis tekait.

Kegiatan yang dilakukan oleh peneliti pada tahap pengembangan *e-module* yaitu proses validasi kepada para ahli. Validator yang ditunjuk adalah validator yang telah disesuaikan dengan kiteria yang disebutkan pada BAB III. Validator-validator tersebut antara lain: ahli materi, ahli desain, ahli bahasa, ahli pembelajaran, dan ahli teknlogi.

Validasi yang dilakukan oleh peneliti digunakan untuk mengukur kevalidan dari *e-module* yang dikembangkan. Setelah memenuhi tingkat valid, *e-module* dapat digunakan pada tahap uji coba. Hasil validasi pada tahap ini berupa skor angket dan saran dari para validator. Pada tahap validasi, peneliti melibatkan lima validator ahli yang dapat dilihat pada tabel 4.1 berikut.

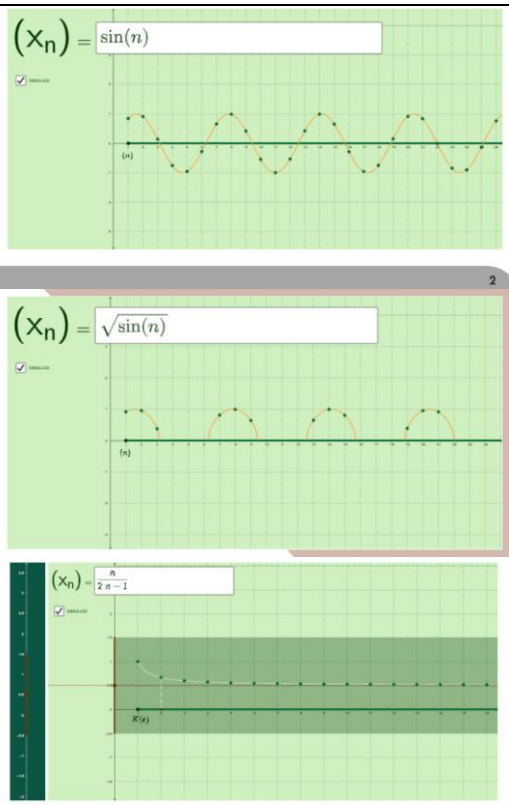
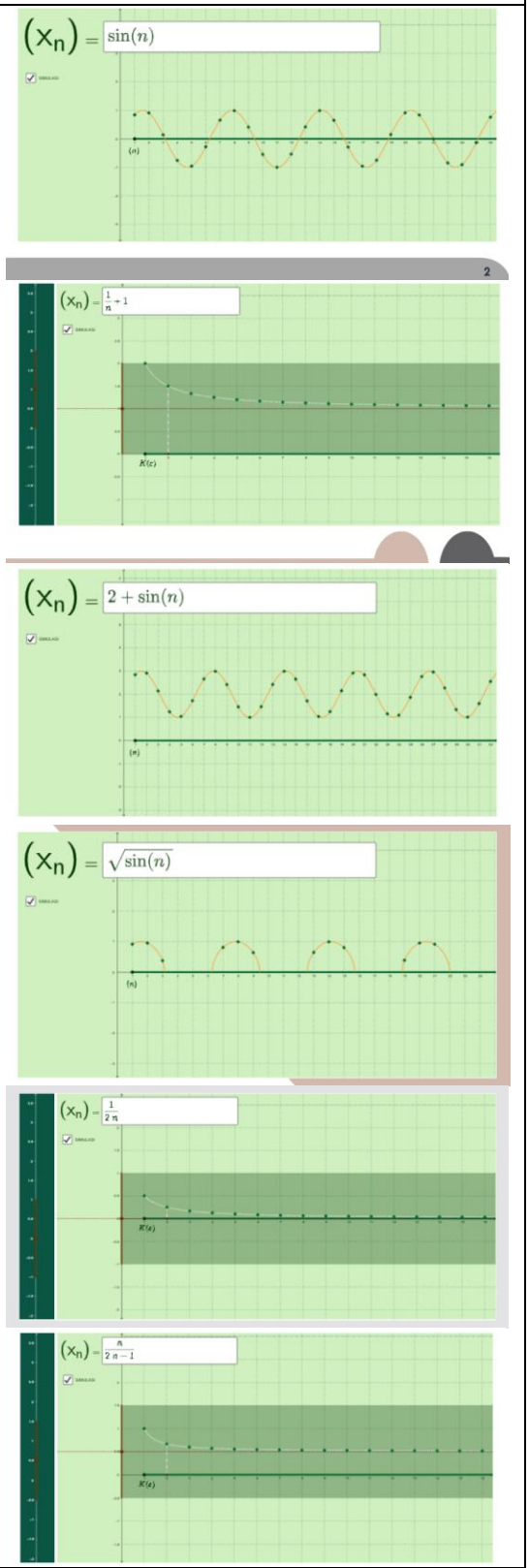
Tabel 4. 2 Data Validator Ahli

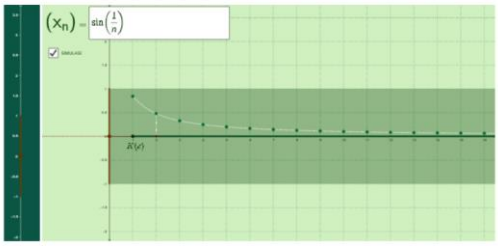
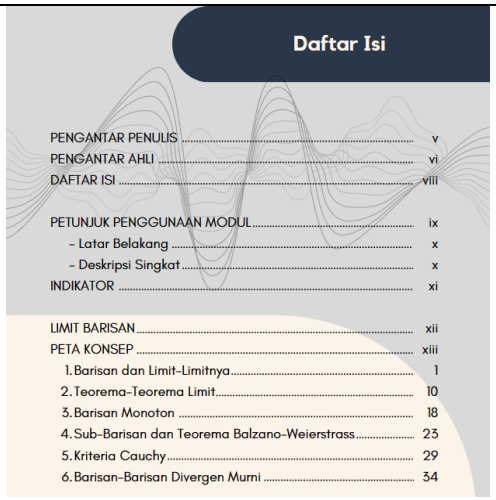
No	Nama	Ahli	Profesi	Instansi
1	Dr. Hairur Rahman, M.Si	Materi	Dosen	UIN Malang
2	Dr. Marhayati, M.PMat	Pembelajaran	Dosen	UIN Malang
3	Dr. M. Zubad Nurul Yaqin, M.Pd	Bahasa	Dosen	UIN Malang
4	Dr. Nunik Junara, MT	Desain	Dosen	UIN Malang
5	Nafie Jauhari, M.Si	Teknologi	Dosen	UIN Malang

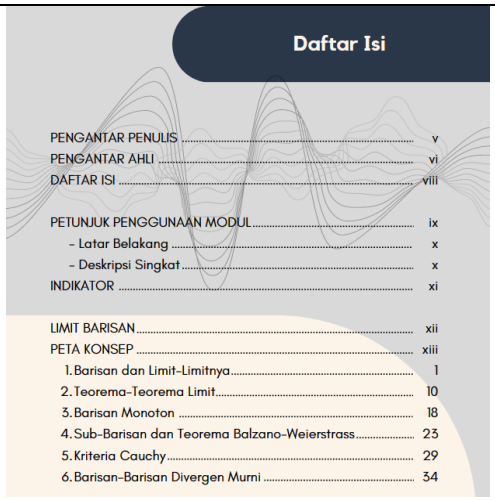
Berikut saran validator ahli dan hasil perbaikan penulis beserta hasil penilaian ahli pada setiap aspek:

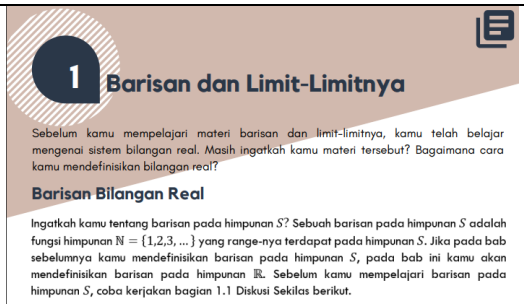
a. Ahli Materi

Tabel 4. 3 Saran Ahli Materi dan Hasil Perbaikan

No	Sebelum	Sesudah
1.	 Saran: Untuk visualisasi lebih jelas, dapat ditambahkan pada teorema-teorema yang lain.	

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>  </td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td> 

Saran:
Agar lebih mudah dan praktis, daftar isi bisa di-klik menuju halaman yang dituju.</td>
<td> 
</td>
</tr>
<tr>
<td>3.</td>
<td>

Saran:
Setelah menuju ke halaman yang dituju, tambahkan *icon* yang dapat di-klik untuk kembali ke daftar isi.</td>
<td> 
</td>
</tr>
</table>

Setelah dilakukan perbaikan sesuai dengan saran dan komentar ahli materi, maka diperoleh hasil penilaian akhir *e-module* oleh validator ahli materi seperti pada Tabel 4.4 berikut.

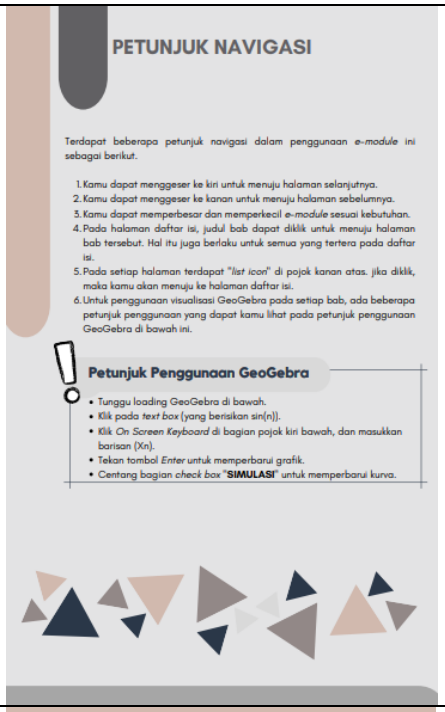
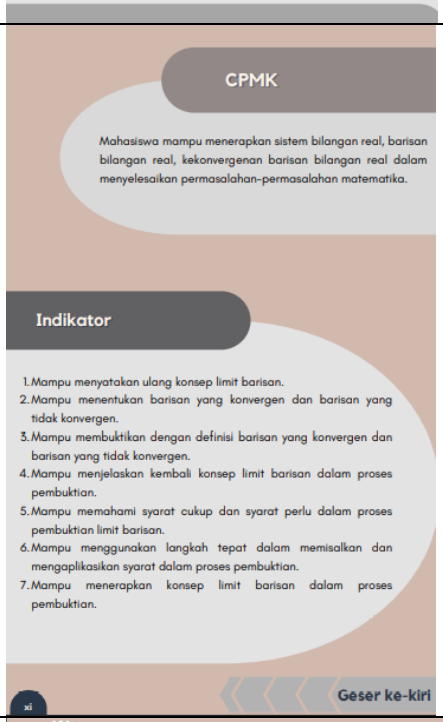
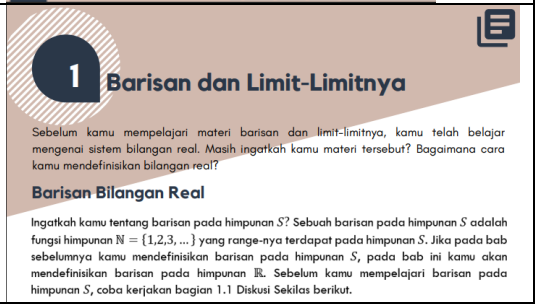
Tabel 4. 4 Hasil Validasi Ahli Materi

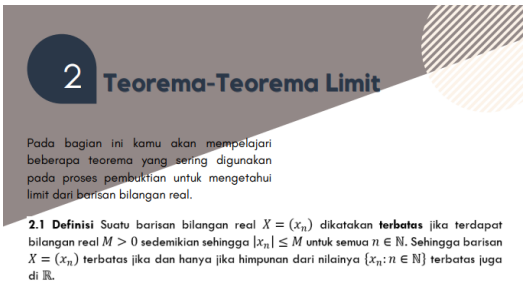
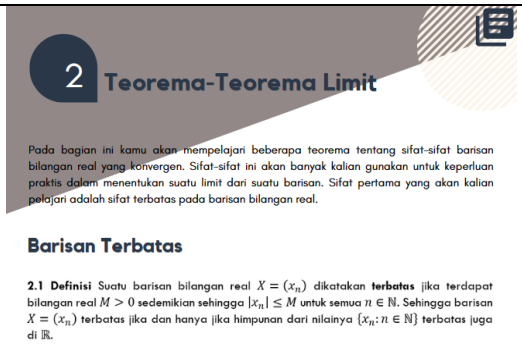
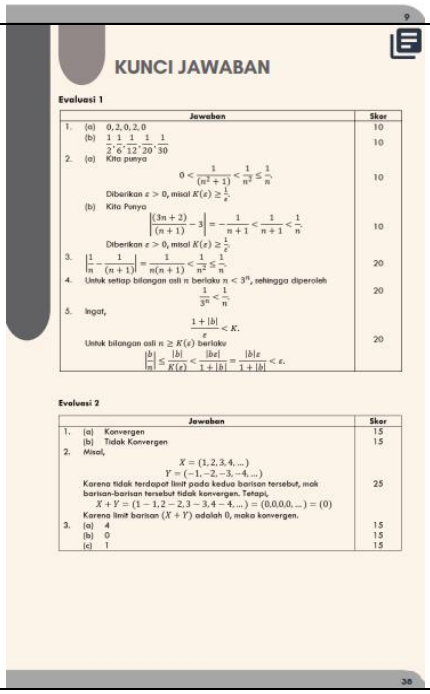
No.	Butir Penilaian	Skor	Persentase	Keterangan
Indikator Kesesuaian Materi				
1.	Kelengkapan materi pada *e-module*	4	100%	Sangat Valid
2.	Kesesuaian materi dengan indikator	4	100%	Sangat Valid
3.	Sistematika penyajian materi runtut	4	100%	Sangat Valid
Indikator Keakuratan Materi				
4.	Keakuratan definisi dan teorema dari materi	3	75%	Valid
5.	Penggunaan notasi dan simbol akurat	4	100%	Sangat Valid
6.	Kesesuaian gambar dan ilustrasi pada *e-module*	4	100%	Sangat Valid
7.	Konsep soal yang dibuat tidak menyimpang dari pembahasan	3	75%	Valid
Indikator Kemutakhiran Materi				
8.	Materi yang disajikan sesuai dengan kurikulum yang berlaku	4	100%	Sangat Valid
Jumlah Skor		**30**		
Total Skor Maksimal		**32**		
Rata-Rata Persentase			**94%**	**Sangat Valid**

Berdasarkan hasil validasi ahli materi pada Tabel 4.3 diperoleh hasil bahwa menurut ahli materi produk pengembangan atau *e-module* mendapat rata-rata persentase 94% dengan kriteria sangat valid. Kriteria yang dinilai pada aspek materi adalah kesesuaian materi, keakuratan materi, dan kemutakhiran materi.

b. Ahli Pembelajaran

Tabel 4. 5 Saran Ahli Pembelajaran dan Hasil Perbaikan

No	Sebelum	Sesudah
1.	Saran: Masih belum ada petunjuk navigasi sehingga perlu ditambahkan.	
2.	Saran: Perlu ditambahkan capaian pembelajaran mata kuliah (CPMK).	
		

	 Saran: Perbaiki kalimat sesuai arahan.	
3.	Saran: Perlu ditambahkan penskoran mandiri oleh mahasiswa setelah evaluasi.	
4.	Saran: Perlu ada kunci jawaban beserta skor setiap soal.	

Setelah dilakukan perbaikan sesuai dengan saran dan komentar ahli pembelajaran, maka diperoleh hasil penilaian akhir *e-module* oleh validator ahli pembelajaran seperti pada Tabel 4.6 berikut.

Tabel 4. 6 Hasil Validasi Ahli Pembelajaran

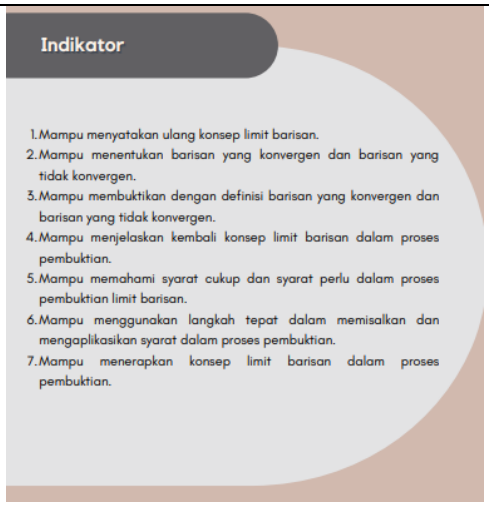
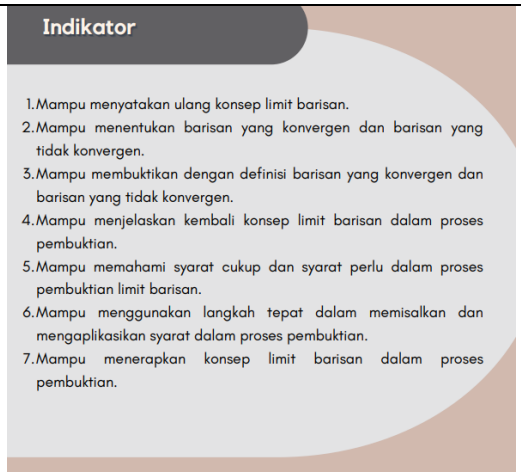
No.	Butir Penilaian	Skor	Persentase	Keterangan
Indikator Kesesuaian dengan Indikator				
1.	Relevansi materi yang disajikan dengan indiktor pencapaian	4	100%	Sangat Valid
Indikator Penyajian Pembelajaran				
2.	Materi yang disampaikan sesuai dengan perkembangan siswa	3	75%	Valid
3.	Konsep materi disajikan secara runtut	3	75%	Valid
Indikator Penyusunan Materi				
4.	Komponen-komponen pada tiap kegiatan belajar tersusun secara konsisten, runtut, dan sistematis	3	75%	Valid
Indikator Kesesuaian Contoh dengan Pembahasan				
5.	Butir soal dapat digunakan untuk mengukur pecapaian	3	75%	Valid
6.	Contoh soal sesuai dengan materi	3	75%	Valid
Indikator Kesesuaian Contoh Masalah untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep				
7.	Ketepatan pembahasan contoh soal dan latihan	3	75%	Valid
Jumlah Skor		**22**		
Total Skor Maksimal		**28**		
Rata-Rata Persentase			**79%**	**Valid**

Berdasarkan hasil validasi ahli pembelajaran pada Tabel 4.4 diperoleh hasil bahwa menurut ahli pembelajaran produk pengembangan atau *e-module*

mendapat rata-rata persentase 79% dengan kriteria valid. Kriteria yang dinilai pada aspek pembelajaran adalah kesesuaian dengan indikator, penyajian pembelajaran, penyusunan materi, kesesuaian contoh dengan pembahasan, dan kesesuaian contoh masalah untuk meningkatkan pemahaman konsep.

c. Ahli Bahasa

Tabel 4. 7 Saran Ahli Bahasa dan Hasil Perbaikan

No	Sebelum	Sesudah
1.	 Saran: Ukuran huruf terlalu kecil, sehingga perlu ditambah satu tingkat di atasnya.	

Setelah dilakukan perbaikan sesuai dengan saran dan komentar ahli bahasa, maka diperoleh hasil penilaian akhir *e-module* oleh validator ahli bahasa seperti pada Tabel 4.8 berikut.

Tabel 4. 8 Hasil Validasi Ahli Bahasa

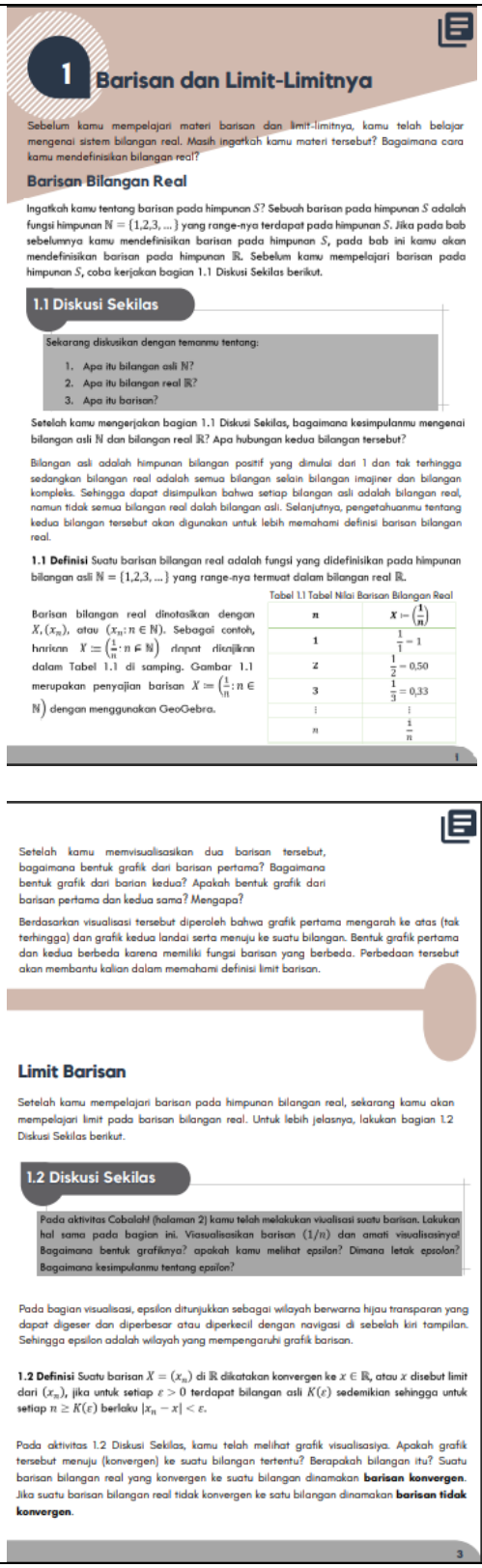
No.	Butir Penilaian	Skor	Persentase	Keterangan
Indikator Kelugasan Bahasa yang Digunakan				
1.	Menggunakan struktur kalimat yang tepat	3	75%	Valid
2.	Menggunakan kalimat yang efektif	3	75%	Valid

3.	Menggunakan bahasa dan istilah yang baku	3	75%	Valid
Indikator Bahasa yang Komunikatif				
4.	Menggunakan bahasa yang komunikatif	4	100%	Sangat Valid
5.	Menggunakan bahasa yang interaktif	4	100%	Sangat Valid
Indikator Kesesuaian Bahasa dengan Perkembangan Mahasiswa				
6.	Menggunakan bahasa yang sesuai dengan tingkat perkembangan intelektual mahasiswa	4	100%	Sangat Valid
7.	Menggunakan bahasa yang sesuai dengan tingkat perkembangan sosial mahasiswa	3	75%	Valid
Indikator Kesesuaian Bahasa dengan KBBI				
8.	Menggunakan bahasa yang sesuai dengan kaidah bahasa Indonesia	3	75%	Valid
Indikator Kesesuaian Penggunaan Istilah, Simbol, dan *Icon*				
9.	Menggunakan istilah, simbol, dan *icon* yang tepat, mudah, dan konsisten	4	100%	Sangat Valid
Jumlah Skor		**31**		
Total Skor Maksimal		**36**		
Rata-Rata Persentase			**86%**	**Sangat Valid**

Berdasarkan hasil validasi ahli bahasa pada Tabel 4.5 diperoleh hasil bahwa menurut ahli bahasa produk pengembangan atau *e-module* mendapat rata-rata persentase 86% dengan kriteria sangat valid. Kriteria yang dinilai pada aspek bahasa adalah bahasa yang digunakan, bahasa yang komunikatif, kesesuaian bahasa dengan perkembangan mahasiswa, kesesuaian bahasa dengan KBBI, dan kesesuaian penggunaan istilah, simbol, dan *icon*.

d. Ahli Desain

Tabel 4. 9 Saran Ahli Desain dan Hasil Perbaikan

No	Sebelum	Sesudah
1.	Saran: Penyeragaman warna pada poin-poin seperti contoh, diskusi sekilas, dan evaluasi. Setiap bab sebaiknya memiliki warna tema sendiri-sendiri.	

1 Barisan dan Limit-Limitnya

Sebelum kamu mempelajari materi barisan dan limit-limitnya, kamu telah belajar mengenai sistem bilangan real. Masih ingatkah kamu materi tersebut? Bagaimana cara kamu mendefinisikan bilangan real?

Barisan Bilangan Real

Ingatkah kamu tentang barisan pada himpunan S? Sebuah barisan pada himpunan S adalah fungsi himpunan $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$ yang range-nya terdapat pada himpunan S. Jika pada bab sebelumnya kamu mendefinisikan barisan pada himpunan S, pada bab ini kamu akan mendefinisikan barisan pada himpunan $\mathbb{R}$. Sebelum kamu mempelajari barisan pada himpunan S, coba kerjakan bagian 1.1 Diskusi Sekilas berikut.

1.1 Diskusi Sekilas

Sekarang diskusikan dengan temanmu tentang:

1. Apa itu bilangan asli $\mathbb{N}$?
2. Apa itu bilangan real $\mathbb{R}$?
3. Apa itu barisan?

Setelah kamu mengerjakan bagian 1.1 Diskusi Sekilas, bagaimana kesimpulanmu mengenai bilangan asli $\mathbb{N}$ dan bilangan real $\mathbb{R}$? Apa hubungan kedua bilangan tersebut?

Bilangan asli adalah himpunan bilangan positif yang dimulai dari 1 dan tak terhingga sedangkan bilangan real adalah semua bilangan selain bilangan imajiner dan bilangan kompleks. Sehingga dapat disimpulkan bahwa setiap bilangan asli adalah bilangan real, namun tidak semua bilangan real dalah bilangan asli. Selanjutnya, pengetahuanmu tentang kedua bilangan tersebut akan digunakan untuk lebih memahami definisi barisan bilangan real.

1.1 Definisi Suatu barisan bilangan real adalah fungsi yang didefinisikan pada himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$ yang range-nya termuat dalam bilangan real $\mathbb{R}$.

Barisan bilangan real dinotasikan dengan $X, (x_n)$, atau $(x_n : n \in \mathbb{N})$. Sebagai contoh, barisan $X := \left(\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right)$ dapat dinyatakan dalam Tabel 1.1 di samping. Gambar 1.1 merupakan penyajian barisan $X := \left(\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right)$ dengan menggunakan GeoGebra.

Tabel 1.1 Tabel Nilai Barisan Bilangan Real

n	$X := \left(\frac{1}{n}\right)$
1	$\frac{1}{1} = 1$
2	$\frac{1}{2} = 0{,}50$
3	$\frac{1}{3} = 0{,}33$
⋮	⋮
n	$\frac{1}{n}$

1

Setelah kamu memvisualisasikan dua barisan tersebut, bagaimana bentuk grafik dari barisan pertama? Bagaimana bentuk grafik dari barian kedua? Apakah bentuk grafik dari barisan pertama dan kedua sama? Mengapa?

Berdasarkan visualisasi tersebut diperoleh bahwa grafik pertama mengarah ke atas (tak terhingga) dan grafik kedua landai serta menuju ke suatu bilangan. Bentuk grafik pertama dan kedua berbeda karena memiliki fungsi barisan yang berbeda. Perbedaan tersebut akan membantu kalian dalam memahami definisi limit barisan.

Limit Barisan

Setelah kamu mempelajari barisan pada himpunan bilangan real, sekarang kamu akan mempelajari limit pada barisan bilangan real. Untuk lebih jelasnya, lakukan bagian 1.2 Diskusi Sekilas berikut.

1.2 Diskusi Sekilas

Pada aktivitas Cobalah! (halaman 2) kamu telah melakukan visualisasi suatu barisan. Lakukan hal sama pada bagian ini. Viasualisasikan barisan $(1/n)$ dan amati visualisasinya! Bagaimana bentuk grafiknya? apakah kamu melihat epsilon? Dimana letak epsolon? Bagaimana kesimpulanmu tentang epsilon?

Pada bagian visualisasi, epsilon ditunjukkan sebagai wilayah berwarna hijau transparan yang dapat digeser dan diperbesar atau diperkecil dengan navigasi di sebelah kiri tampilan. Sehingga epsilon adalah wilayah yang mempengaruhi grafik barisan.

1.2 Definisi Suatu barisan $X = (x_n)$ di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, atau x disebut limit dari (x_n), jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.

Pada aktivitas 1.2 Diskusi Sekilas, kamu telah melihat grafik visualisasiya. Apakah grafik tersebut menuju (konvergen) ke suatu bilangan tertentu? Berapakah bilangan itu? Suatu barisan bilangan real yang konvergen ke suatu bilangan dinamakan **barisan konvergen**. Jika suatu barisan bilangan real tidak konvergen ke satu bilangan dinamakan **barisan tidak konvergen**.

3

Setelah dilakukan perbaikan sesuai dengan saran dan komentar ahli desain, maka diperoleh hasil penilaian akhir *e-module* oleh validator ahli desain seperti pada Tabel 4.10 berikut.

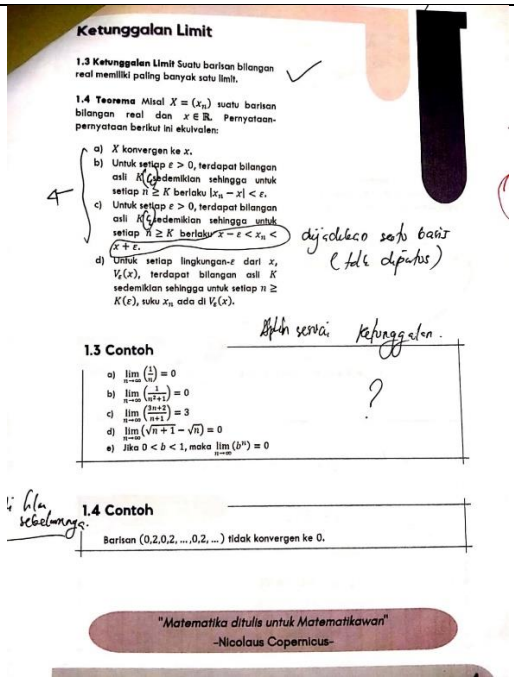
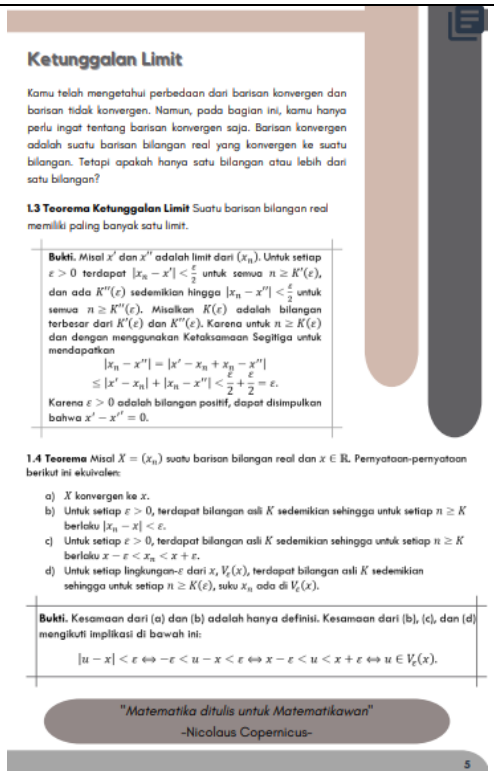
Tabel 4. 10 Hasil Validasi Ahli Desain

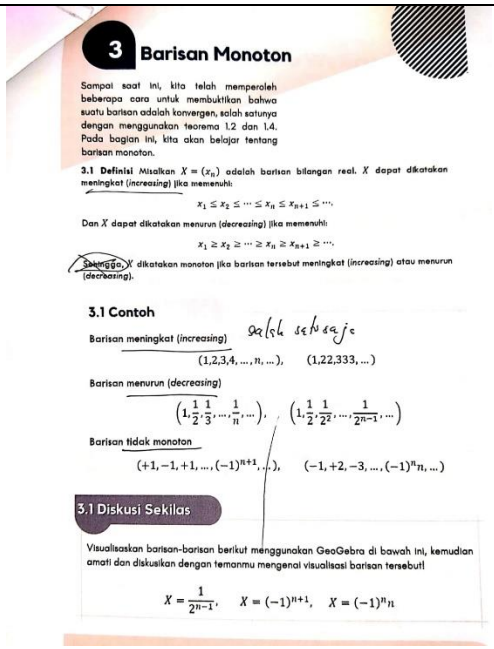
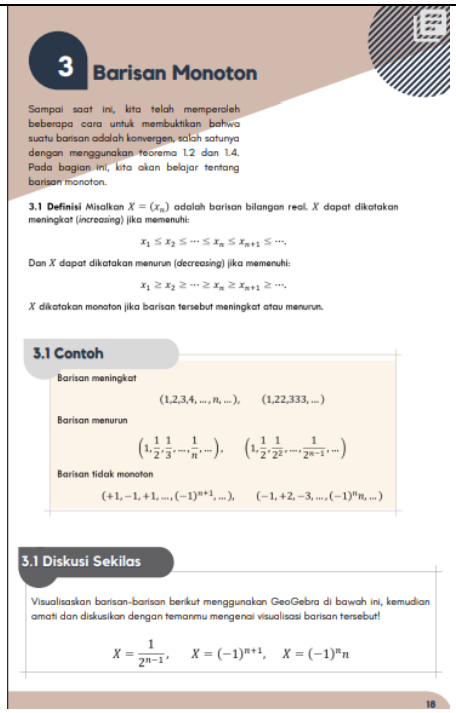
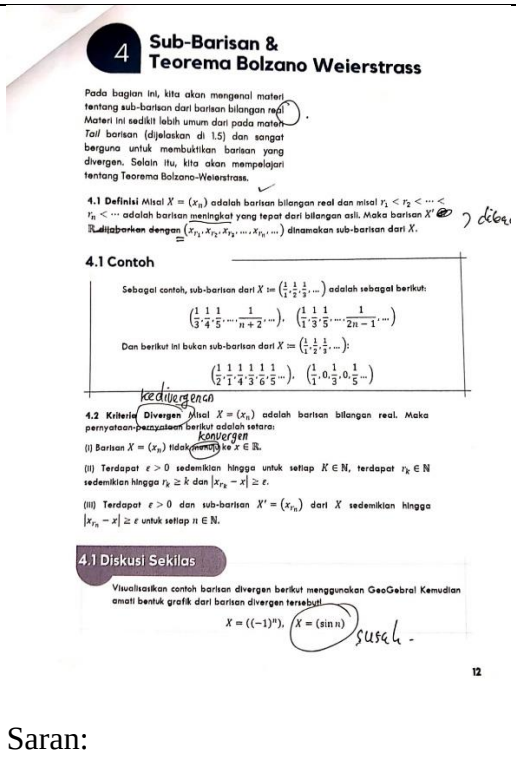
No.	Butir Penilaian	Skor	Persentase	Keterangan
Indikator Format *E-Module*				
1.	Menggunakan format sesuai standar	4	100%	Sangat Valid
Indikator Tampilan				
2.	Sampul depan menarik	4	100%	Sangat Valid
Indikator Desain Bagian Isi				
3.	Menggunakan jenis dan ukuran *font* yang menarik	4	100%	Sangat Valid
4.	Kejelasan petunjuk yang digunakan	4	100%	Sangat Valid
5.	Ketepatan gambar dan ilustrasi dengan materi dan soal	4	100%	Sangat Valid
6.	Pemilihan gambar dan warna sesuai perkembangan mahasiswa	3	75%	Valid
Indikator Tata Letak				
7.	Tata letak menarik bagi mahasiswa	3	75%	Valid
Indikator Kesesuaian Komponen				
8.	Komponen *e-module* tersaji secara sistemais	4	100%	Sangat Valid
Jumlah		**30**		
Total Skor Maksimal		**32**		
Rata-Rata Persentase			**94%**	**Sangat Valid**

Berdasarkan hasil validasi ahli desain pada Tabel 4.6 diperoleh hasil bahwa menurut ahli desain produk pengembangan atau *e-module* mendapat rata-rata persentase 94% dengan kriteria sangat valid. Kriteria yang dinilai pada aspek desain adalah format e-module, tampilan, desain bagian isi, tata letak dan keseuaian komponen.

e. Ahli Teknologi

Tabel 4. 11 Saran Ahli Teknologi dan Hasil Perbaikan

No	Sebelum	Sesudah
1.	 Saran: Perbaiki sesuai catatan pada draft *e-module*.	

2.	 **3 Barisan Monoton** Sampai saat ini, kita telah memperoleh beberapa cara untuk membuktikan bahwa suatu barisan adalah konvergen, salah satunya dengan menggunakan teorema 1.2 dan 1.4. Pada bagian ini, kita akan belajar tentang barisan monoton. **3.1 Definisi** Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real. X dapat dikatakan meningkat (*increasing*) jika memenuhi: $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots$. Dan X dapat dikatakan menurun (*decreasing*) jika memenuhi: $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots$. Sehingga, X dikatakan monoton jika barisan tersebut meningkat (*increasing*) atau menurun (*decreasing*). **3.1 Contoh** Barisan meningkat (*increasing*) $(1,2,3,4,\dots,n,\dots)$, $(1,22,333,\dots)$ Barisan menurun (*decreasing*) $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots\right)$, $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\dots,\frac{1}{2^{n-1}},\dots\right)$ Barisan tidak monoton $(+1,-1,+1,\dots,(-1)^{n+1},\dots)$, $(-1,+2,-3,\dots,(-1)^n n,\dots)$ **3.1 Diskusi Sekilas** Visualisaskan barisan-barisan berikut menggunakan GeoGebra di bawah ini, kemudian amati dan diskusikan dengan temanmu mengenai visualisasi barisan tersebut! $X = \frac{1}{2^{n-1}}$, $X = (-1)^{n+1}$, $X = (-1)^n n$	 **3 Barisan Monoton** Sampai saat ini, kita telah memperoleh beberapa cara untuk membuktikan bahwa suatu barisan adalah konvergen, salah satunya dengan menggunakan teorema 1.2 dan 1.4. Pada bagian ini, kita akan belajar tentang barisan monoton. **3.1 Definisi** Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real. X dapat dikatakan meningkat (*increasing*) jika memenuhi: $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots$. Dan X dapat dikatakan menurun (*decreasing*) jika memenuhi: $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots$. X dikatakan monoton jika barisan tersebut meningkat atau menurun. **3.1 Contoh** Barisan meningkat $(1,2,3,4,\dots,n,\dots)$, $(1,22,333,\dots)$ Barisan menurun $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots\right)$, $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\dots,\frac{1}{2^{n-1}},\dots\right)$ Barisan tidak monoton $(+1,-1,+1,\dots,(-1)^{n+1},\dots)$, $(-1,+2,-3,\dots,(-1)^n n,\dots)$ **3.1 Diskusi Sekilas** Visualisaskan barisan-barisan berikut menggunakan GeoGebra di bawah ini, kemudian amati dan diskusikan dengan temanmu mengenai visualisasi barisan tersebut! $X = \frac{1}{2^{n-1}}$, $X = (-1)^{n+1}$, $X = (-1)^n n$ 18
3.	 **4 Sub-Barisan & Teorema Bolzano Weierstrass** Pada bagian ini, kita akan mengenal materi tentang sub-barisan dari barisan bilangan real. Materi ini sedikit lebih umum dari pada materi *Tail* barisan (dijelaskan di 1.5) dan sangat berguna untuk membuktikan barisan yang divergen. Selain itu, kita akan mempelajari tentang Teorema Bolzano-Weierstrass. **4.1 Definisi** Misal $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real dan misal $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$ adalah barisan meningkat yang tepat dari bilangan asli. Maka barisan $X' = \mathbb{R}$ dilaborkan dengan $(x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}, \dots, x_{r_n}, \dots)$ dinamakan sub-barisan dari X. **4.1 Contoh** Sebagai contoh, sub-barisan dari $X = \left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right)$ adalah sebagai berikut: $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\dots,\frac{1}{n+2},\dots\right)$, $\left(\frac{1}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\dots,\frac{1}{2n-1},\dots\right)$ Dan berikut ini bukan sub-barisan dari $X = \left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right)$: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{1},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\dots\right)$, $\left(\frac{1}{1},0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},\dots\right)$ **4.2 Kriteria Divergen** Misal $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real. Maka pernyataan-pernyataan berikut adalah setara: (i) Barisan $X = (x_n)$ tidak konvergen ke $x \in \mathbb{R}$. (ii) Terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $K \in \mathbb{N}$, terdapat $r_k \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $r_k \ge k$ dan $\lvert x_{r_k} - x\rvert \ge \varepsilon$. (iii) Terdapat $\varepsilon > 0$ dan sub-barisan $X' = (x_{r_n})$ dari X sedemikian hingga $\lvert x_{r_n} - x\rvert \ge \varepsilon$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. **4.1 Diskusi Sekilas** Visualisasikan contoh barisan divergen berikut menggunakan GeoGebra! Kemudian amati bentuk grafik dari barisan divergen tersebut! $X = ((-1)^n)$, $X = (\sin n)$ 12	 **Bukti.** (i)⇒(ii) Jik (x_n) tidak konvergen ke x, maka untuk beberapa $\varepsilon_0 > 0$ tidak memungkinkan untuk menemukan bilangan asli k sedemikian sehingga untuk semua $n \ge k$ unsur-unsur pada x_n memenuhi $\lvert x_n - x\rvert < \varepsilon_0$. Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ adalah tidak benar bahwa untuk semua $n \ge k$ ketaksamaan $\lvert x_n - x\rvert < \varepsilon_0$ berlaku. Dengan kata lain, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ terdapat bilangan asli $n_k \ge k$ sedemikian sehingga $\lvert x_{n_k} - x\rvert \ge \varepsilon_0$. (ii)⇒(iii) Misal ε_0 seperti pada (ii) dan misal $n_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_1 \ge 1$ dan $\lvert x_{n_1} - x\rvert \ge \varepsilon_0$. Sekarang, misal $n_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_2 > n_1$ dan $\lvert x_{n_2} - x\rvert \ge \varepsilon_0$, misal $n_3 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_3 > n_2$ dan $\lvert x_{n_3} - x\rvert \ge \varepsilon_0$. Lanjutkan cara ini untuk menunjukkan sub-barisan $X' = (x_{n_k})$ dari X sedemikian sehingga $\lvert x_{n_k} - x\rvert \ge \varepsilon_0$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$. (iii)⇒(i) Andaikan $X = (x_n)$ mempunyai sub-barisan $X' = (x_{n_k})$ yang memenuhi kondisi pada (iii). Karena X tidak bisa konvergen ke x, karena jika iya, maka berdasarkan teorema 4.2, sub-barisan X' juga bisa konvergen ke x. Tetapi itu tidak mungkin, karena tak ada satupun suku X' dimiliki lingkungan-ε_0 dari x. Setelah kamu mempelajari tentang sub-barisan, selanjutnya, kamu akan mempelajari tentang kriteria kedivergenan. Perhatikan Kriteria Kedivergenan berikut. **4.3 Kriteria Kedivergenen** Jika barisan bilangan real $X = (x_n)$ memiliki salah satu pernyataan-pernyataan berikut, maka X adalah divergen. (i) X memiliki dua sub-barisan yang konvergen $X' = (x_{n_k})$ dan $X' = (x_{r_k})$ yang limitnya tidak sama. (ii) X tidak terbatas. **4.1 Diskusi Sekilas** Visualisasikan contoh barisan divergen berikut menggunakan GeoGebra! Kemudian amati bentuk grafik dari barisan divergen tersebut! $X = ((-1)^n)$ 24

Saran:
Perbaiki sesuai catatan pada draft *e-module*.

Saran:
Perbaiki sesuai catatan pada draft *e-module*.

Setelah dilakukan perbaikan sesuai dengan saran dan komentar ahli teknologi, maka diperoleh hasil penilaian akhir *e-module* oleh validator ahli teknologi seperti pada Tabel 4.12 berikut.

Tabel 4. 12 Hasil Validasi Ahli Teknologi

No.	Butir Penilaian	Skor	Persentase	Keterangan
Indikator Aplikasi yang Digunakan				
1.	Kesesuaian dalam penentuan aplikasi yang digunakan	4	100%	Sangat Valid
Indikator Kesesuaian Visualisasi dengan Materi				
2.	Kesesuaian visualisasi GeoGebra pada sub-bab 1	3	75%	Valid
3.	Kesesuaian visualisasi GeoGebra pada sub-bab 2	4	100%	Sangat Valid
4.	Kesesuaian visualisasi GeoGebra pada sub-bab 3	4	100%	Sangat Valid
5.	Kesesuaian visualisasi GeoGebra pada sub-bab 4	3	75%	Valid
6.	Kesesuaian visualisasi GeoGebra pada sub-bab 5	3	75%	Valid
7.	Kesesuaian visualisasi GeoGebra pada sub-bab 6	4	100%	Sangat Valid
Jumlah Skor		**25**		
Total Skor Maksimal		**28**		
Rata-Rata Persentase			**89%**	**Sangat Valid**

Berdasarkan hasil validasi ahli teknologi pada Tabel 4.7 diperoleh hasil bahwa menurut ahli teknologi produk pengembangan atau *e-module* mendapat rata-rata persentase 89% dengan kriteria sangat valid. Kriteria yang dinilai pada aspek teknologi adalah aplikasi yang digunakan dan kesesuaian visualisasi dengan materi.

Berdasarkan hasil validasi dari ahli materi, ahli pembelajaran, ahli bahasa, ahli desain, dan ahli tekologi diperoleh rata-rata akhir dari keseluruhan ahli sebesar 88% dan berada pada kategori sangat valid. Dengan demikian, *e-module* materi limit barisan dan visualisasinya dinyatakan sangat valid.

4.1.4 Penyajian Data Implementasi *E-Module*

Pada tahap implementasi, *e-module* yang telah divalidasi oleh ahli dan dinyatakan valid akan dilakukan uji lapangan. Tahap ini akan menghasilkan *e-module* yang efektif. Keefektifan *e-module* diperoleh berdasarkan uji efektivitas. Instrumen yang digunakan adalah instrumen tes berupa *pre-test* dan *post-test*. Sebelum digunakan, instrumen tes divalidasi terlebih dahulu oleh validator. Analisis hasil validasi instrumen tes dapat dilihat pada Tabel 4.8 berikut.

Tabel 4. 13 Hasil Validasi Instrumen Tes

No.	**Butir Penilaian**	**Skor**	
		Validator 1	**Validator 2**
1.	Relevansi soal dengan indikator	4	4
2.	Soal dapat mewakili konten materi dalam *e-module*	4	4
3.	Level soal yang digunakan sudah memenuhi indikator	4	4
4.	Petunjuk pengerjaan soal jelas	4	3
5.	Pertanyaan pada soal menggunakan bahasa yang mudah dipahami	4	4
6.	Jawaban dari pertanyaan yang disajikan sudah sesuai dengan konsep dan teori	3	3
7.	Rumusan kalimat tidak menimbulkan penafsiran ganda	3	4
Jumlah		26	26
Total Skor Maksimal		28	28

Persentase	93%	93%
NA	**93%**	

Pada saat setelah dilakukan validasi kepada validator, berdasarkan Table 4.8, dapat dilihat bahwa instrumen tes mendapatkan persentase akhir sebesar 93% dan berada pada kualifikasi sangat valid. Meskipun memiliki persentase sama antara validator 1 dan validator 2, namun skor pada butir penilaian memiliki perbedaan. Dengan demikian, instrumen tes berupa *pre-test* dan *post-test* dapat digunakan pada uji lapangan. *Pre-test* diberikan dan dikerjakan oleh mahasiswa sebelum menggunakan *e-module*. Sedangkan *post-test* diberikan dan dikerjakan oleh mahasiswa setelah menggunakan *e-module* untuk belajar secara mandiri.

Uji lapangan dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada bulan September - November 2022. Uji lapangan melibatkan mahasiswa dari dua kelas berbeda yaitu kelas A dan kelas B masing-masing terdapat 30 mahasiswa. Sehingga jemlah keseluruhan mahasiswa dari kelas A dan kelas B adalah 60 mahasiswa.

Pada pertemuan pertama dengan responden di kelas A, peneliti memberikan *pre-test* kepada responden. Responden diminta untuk mengerjakan *pre-test* secara mandiri. Responden dipersilahakan bertanya apabila terdapat hal-hal yang belum dimengerti pada lembar *pre-test*. Setelah responden selesai mengerjakan *pre-test*, lembar *pre-test* beserta jawaban responden dikumpulkan kepada peneliti. Kemudian peneliti memberikan *e-module* dan pengarahan terkait penggunaannya. Responden diminta untuk mengakses *e-module* dan mempelajarinya di kelas. Responden dipersilahakan bertanya apabila terdapat hal-hal yang belum dimengerti pada *e-module*. Penggunaan *e-module* di kelas dilakukan selama dua pertemuan yang diasumsikan setara dengan 6 sks.

Pada tahap selanjutnya, responden diminta untuk mempelajari *e-module* secara mandiri di rumah masing-masing. Peneliti mengarahkan reponden untuk mencatat atau memberi tanda hal-hal yang belum dimengerti saat mempelajari *e-module* di rumah masing-masing. Pada pertemuan kedua dengan responden kelas A, responden melanjutkan belajar secara mandiri di kelas. Pada akhir pertemuan, peneliti memberikan *post-test* kepada responden. *Post-test* dikerjakan dengan sistem *open book* sehingga responden dapat mengakses *e-module* yang telah dipelajari. Setalah responden mengerjakan *post-test*, lembar post-test beserta jawaban responden dikumpulkan kepada peneliti. Perlakuan yang sama juga diberikan kepada responden di kelas B, baik pertemuan pertama maupun pertemuan kedua.

Hasil skor *pre-test* kelas A yang diperoleh peneliti setelah dilakukan uji lapangan dapat dilihat pada Tabel 4.8 dan hasil skor *pre-test* kelas B pada Tabel 4.9.

Tabel 4. 14 Hasil Pre-test Kelas A

No.	Subjek	Skor Pre-Test	No.	Subjek	Skor Pre-Test
1	RA	22	16	WA	19
2	HM	31	17	MFA	19
3	ARD	25	18	NN	37
4	MF	42	19	MIU	31
5	HA	20	20	RM	23
6	AS	30	21	MCU	27
7	KS	32	22	AA	27
8	FS	40	23	DR	30
9	YE	29	24	AN	27
10	LR	34	25	FFA	21
11	AL	34	26	IF	24

12	BD	44	27	HS	26
13	SW	33	28	AAK	22
14	DM	23	29	VP	25
15	JS	20	30	ITI	42
Skor Rata-rata					**30**

Tabel 4. 15 Hasil Pre-test Kelas B

No.	**Subjek**	**Skor Pre-Test**	**No.**	**Subjek**	**Skor Pre-Test**
1	FA	24	16	AAS	39
2	SNK	35	17	FNZ	25
3	AS	38	18	FM	40
4	IAZ	21	19	AF	28
5	QA	21	20	ZB	22
6	YN	34	21	RW	38
7	MMR	42	22	AB	39
8	IS	18	23	DA	36
9	MS	43	24	ARO	30
10	SFL	27	25	PA	37
11	LK	42	26	HIW	23
12	GR	38	27	AS	21
13	FA	33	28	PDZ	17
14	DTA	36	29	VD	32
15	SS	36	30	BI	40
Skor Rata-rata					**33**

Berdasarkan Tabel 4.8 mahasiswa yang mengikuti *pre-test* pemahaman konsep dari kelas A sebanyak 30 mahasiswa. Hasil skor rata-rata *pre-test* yang dicapai adalah 30 dari skor maksimum ideal 100. Sedangkan berdasarkan Tabel 4.9 mahasiswa yang mengikuti *pre-test* pemahaman konsep dari kelas B sebanyak 30 mahasiswa juga. Hasil skor rata-rata *pre-test* yang dicapai adalah 33 dari skor

maksimum ideal 100. Hal tersebut menunjukkan bahwa pemahaman awal mahasisiwa dari kelas A maupun kelas B tidak jauh berbeda.

Selanjutnya, hasil skor *post-test* kelas A yang diperoleh peneliti setelah dilakukan uji lapangan dapat dilihat pada Tabel 4.10 dan hasil skor *post-test* kelas B pada tabel 4.11.

Tabel 4. 16 Hasil Post-test Kelas A

No.	Subjek	Skor Post-Test	No.	Subjek	Skor Post-Test
1	RA	83	16	WA	80
2	HM	91	17	MFA	78
3	ARD	78	18	NN	83
4	MF	87	19	MIU	83
5	HA	79	20	RM	79
6	AS	89	21	MCU	79
7	KS	82	22	AA	76
8	FS	86	23	DR	82
9	YE	82	24	AN	76
10	LR	83	25	FFA	82
11	AL	82	26	IF	79
12	BD	89	27	HS	84
13	SW	82	28	AAK	79
14	DM	83	29	VP	80
15	JS	85	30	ITI	85
Skor Rata-rata					**82**

Tabel 4. 17 Hasil Post-test Kelas B

No.	Subjek	Skor Post-Test	No.	Subjek	Skor Post-Test
1	FA	91	16	AAS	82
2	SNK	83	17	FNZ	80
3	AS	87	18	FM	83
4	IAZ	92	19	AF	79

5	QA	89	20	ZB	81
6	YN	98	21	RW	81
7	MMR	87	22	AB	86
8	IS	90	23	DA	87
9	MS	87	24	ARO	79
10	SFL	88	25	PA	80
11	LK	85	26	HIW	87
12	GR	83	27	AS	90
13	FA	83	28	PDZ	84
14	DTA	84	29	VD	82
15	SS	84	30	BI	82
Skor Rata-rata					**85**
Skor Maksimum Ideal					**100**

Berdasarkan Tabel 4.10 mahasiswa yang mengikuti *post-test* pemahaman konsep dari kelas A sebanyak 30 mahasiswa. Hasil skor rata-rata *post-test* yang dicapai adalah 82 dari skor maksimum ideal 100. Sedangkan berdasarkan Tabel 4.11 mahasiswa yang mengikuti *post-test* pemahaman konsep dari kelas B sebanyak 30 mahasiswa juga. Hasil skor rata-rata *pre-test* yang dicapai adalah 82 dari skor maksimum ideal 100. Hal tersebut menunjukkan bahwa pemahaman awal mahasisiwa dari kelas A maupun kelas B meningkat dari sebelum menggunakan *e-module* dan sesudah menggunakan *e-module*.

Selanjutnya, tingkat kepraktisan *e-module* diperoleh peneliti dari angket. Pada tahap ini peneliti melibatkan 20 mahasiswa Jurusan Matematika, diantaranya 10 mahasiswa dari kelas A dan 10 mahasiswa dari kelas B. Angket diberikan kepada mahasiswa yang telah menggunakan *e-module* materi limit barisan dan visualisasinya. Hasil penilaian praktis mahasiswa baik kelas A maupun kelas B dapat dilihat pada Tabel 4.13 dan Tabel 4.14 berikut.

Tabel 4. 18 Hasil Penilaian Praktis Mahasiswa Kelas A

No.	Pernyataan	Mahasiswa									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Aspek Tampilan *E-Module*											
1.	Gambar ilustrasi yang digunakan pada *e-module* menarik	4	3	4	4	4	4	4	4	4	4
2.	Warna yang digunakan pada *e-module* sesuai dan menarik	3	3	4	3	4	4	3	4	4	4
3.	Jenis dan ukuran huruf yang digunakan pada *e-module* jelas dan mudah dibaca	3	2	4	3	4	4	3	3	4	4
4.	Pilihan warna pada keseluruhan *e-module* sesuai dan menarik	3	2	4	3	4	4	3	3	3	4
5.	Tata letak tulisan dan gambar (*layout*) pada *e-module* sesuai	4	3	4	4	3	4	3	3	4	4
6.	Istilah, simbol, dan gambar sudah sesuai dengan materi	4	3	4	4	3	4	3	4	4	4
7.	Visualisasi yang ditampilkan pada *e-module* sesuai dan menarik	4	3	4	4	3	4	3	4	4	4
Aspek Isi *E-Module*											
8.	Uraian materi yang disajikan pada *e-module* sangat jelas	3	4	4	4	4	4	3	4	4	3
9.	Contoh soal yang diberikan sesuai	4	3	4	3	4	4	4	4	4	4

	dengan materi pada pembahasan										
10.	Penggunaan kalimat pada *e-module* komunikatif dan mudah dipahami	4	3	4	4	4	4	3	4	4	4
11.	Visualisasi yang ditampilkan pada *e-module* sesuai dengan materi	4	3	4	4	4	4	3	3	4	3
12.	Visualisasi yang ditampilkan pada *e-module* memuat grafik yang dibutuhkan	4	3	4	4	4	4	4	3	4	3
Aspek Penggunaan *E-Module*											
13.	Pengguna dapat memahami materi Limit Barisan menggunakan *e-module* ini dengan lebih mudah	4	3	4	4	4	4	4	4	4	4
14.	Pengguna merasa lebih mudah belajar menggunakan menggunakan *e-module* ini	3	3	3	4	3	4	3	4	3	4
15.	*E-module* menjadikan pengguna tertarik dalam belajar materi Limit Barisan	4	3	4	4	4	4	3	4	4	4
16.	*E-module* mendorong pengguna untuk belajar secara mandiri	4	3	4	3	4	4	3	4	3	4
17.	*E-module* menjadikan	4	3	4	4	4	4	4	4	4	4

	pengguna memahami materi dengan mudah										
Jumlah		**63**	**50**	**67**	**63**	**64**	**68**	**56**	**63**	**65**	**65**
Persentase (%)		**93**	**74**	**99**	**93**	**94**	**100**	**82**	**93**	**96**	**96**
Rata-rata Persentase (%)		**92**									
Keterangan		**Sangat Praktis**									

Berdasarkan Tabel 4.13 diperoleh bahwa 10 mahasiswa dari kelas A yang telah mengisi angket memberikan penilaian dengan rata-rata 92% dengan persentase tertinggi adalah 100% dan persentase terendah adalah 74%. Hasil penilaian tersebut menunjukkan bahwa *e-module* materi limit barisan dan visualisasinya berada pada kualifikasi sangat praktis.

Tabel 4. 19 Hasil Penilaian Praktis Mahasiswa Kelas B

No.	**Pernyataan**	**Mahasiswa**									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Aspek Tampilan *E-Module*											
1.	Gambar ilustrasi yang digunakan pada *e-module* menarik	4	4	4	4	3	3	4	4	4	4
2.	Warna yang digunakan pada *e-module* sesuai dan menarik	4	4	4	4	3	3	3	3	4	4
3.	Jenis dan ukuran huruf yang digunakan pada *e-module* jelas dan mudah dibaca	4	4	4	4	2	4	4	3	4	4
4.	Pilihan warna pada keseluruhan *e-module* sesuai dan menarik	3	4	4	4	2	3	4	3	4	4

5.	Tata letak tulisan dan gambar (*layout*) pada *e-module* sesuai	4	4	4	4	2	3	4	4	4	4
6.	Istilah, simbol, dan gambar sudah sesuai dengan materi	4	4	4	4	3	4	4	3	4	4
7.	Visualisasi yang ditampilkan pada *e-module* sesuai dan menarik	4	4	4	4	3	3	3	4	4	4
Aspek Isi *E-Module*											
8.	Uraian materi yang disajikan pada *e-module* sangat jelas	4	3	4	4	2	2	4	3	3	4
9.	Contoh soal yang diberikan sesuai dengan materi pada pembahasan	4	4	4	4	2	2	3	4	3	4
10.	Penggunaan kalimat pada *e-module* komunikatif dan mudah dipahami	4	3	4	4	3	3	4	3	3	4
11.	Visualisasi yang ditampilkan pada *e-module* sesuai dengan materi	4	4	4	4	3	3	4	3	3	4
12.	Visualisasi yang ditampilkan pada *e-module* memuat grafik yang dibutuhkan	4	4	4	4	3	3	4	4	3	4
Aspek Penggunaan *E-Module*											
13.	Pengguna dapat memahami materi Limit Barisan menggunakan *e-module* ini	4	4	4	4	3	3	4	3	3	4

	dengan lebih mudah										
14.	Pengguna merasa lebih mudah belajar menggunakan menggunakan *e-module* ini	4	4	4	4	2	3	3	4	3	4
15.	*E-module* menjadikan pengguna tertarik dalam belajar materi Limit Barisan	4	3	4	4	3	2	3	3	3	4
16.	*E-module* mendorong pengguna untuk belajar secara mandiri	4	3	4	4	2	2	1	3	3	4
17.	*E-module* menjadikan pengguna memahami materi dengan mudah	4	4	4	4	3	2	3	4	3	4
Jumlah		**67**	**64**	**68**	**68**	**44**	**48**	**59**	**58**	**58**	**68**
Persentase (%)		**99**	**94**	**100**	**100**	**65**	**71**	**87**	**85**	**85**	**100**
Rata-rata Persentase (%)		**89**									
Keterangan		**Sangat Praktis**									

Berdasarkan Tabel 4.14 diperoleh bahwa 10 mahasiswa dari kelas B yang telah mengisi angket memberikan penilaian dengan rata-rata 89% dengan persentase tertinggi adalah 100% dan persentase terendah adalah 65%. Hasil penilaian tersebut menunjukkan bahwa *e-module* materi limit barisan dan visualisasinya berada pada kualifikasi sangat praktis. Dengan demikian, berdasarkan hasil penilaian praktis mahasiswa kelas A dan kelas B, dapat

disimpulkan bahwa *e-module* materi limit barisan dan visualisasinya berada pada kualifikasi sangat praktis.

4.1.5 Penyajian Data Evaluasi *E-Module*

Pada tahap evaluasi ini peneliti melakukan evaluasi dari keseluruhan tahap pengembangan. Tahap analisis kebutuhan diperoleh berdasarkan data observasi kepada mahasisiwa dan wawancara kepada dosen pengampu. Berdasarkan analisis kebutuhan, *e-module* didesain menggunakan Canva dan direalisasikan. Selanjutnya, *e-module* divalidasi oleh validator ahli untuk memenuhi kategori valid dan layak diuji coba. Hasil validasi oleh ahli berupa angket penilaian dan saran. Selain itu diperoleh hasil tes mahasiswa pada saat tahap implementasi. Tahap evaluasi dilakukan untuk meninjau apakah *e-module* yang dihasilkan telah sesuai berdasarkan analisis kebutuhan, desain, dan hasil implementasi. Apabila belum sesuai, maka perlu tindakan lanjutan berupa revisi hingga diperoleh *e-module* yang diharapkan. Validasi kepada ahli menentukan kevalidan *e-module*. Hasil implementasi kepada mahasiswa menunjukkan keefektivan dan kepraktisan *e-module* serta untuk mengetahui peningkatan pemahaman konsep mahasiswa. Penjelasan tentang peningkatan pemahaman konsep mahasiswa dipaparkan pada sub-bab 4.2. Dengan demikian, diperoleh kesimpulan secara keseluruhan bahwa *e-module* dengan judul "*E-Module* Materi Limit Barisan dan Visualisasinya" dinyatakan valid, efektif, dan praktis serta layak untuk digunakan sebagai salah satu media pembelajaran.

4.2 Peningkatan Pemahaman Konsep Mahasiswa

Untuk mengetahui keefektifan *e-module* dalam meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa, dilakukan beberapa analisis pada skor *pre-test* dan *post-test*.

Pengujian analisis yang dilakuakn antara lain, uji prasyarat yaitu uji normalitas dan uji homogenitas. Selanjutnya, dilakukan uji-t (*T-Test Paired Sample*) dan uji N-Gain. Proses analisis pada setiap uji dijelaskan sebagai berikut:

1. Uji Normalitas

Uji normalitas dilakukan untuk mengetahui bahwa sebaran data *pre-test* dan *post-test* berdistribusi normal. Uji normalitas yang digunakan adalah uji Liliefors dengan bantuan aplikasi MS Excel. Kriteria keputusan yang diambil pada uji Liliefors adalah jika L-hitung lebih besar dari L-tabel maka data tidak berdistribusi normal. Namun jika L-hitung lebih kecil dari L-tabel maka data berdistribusi normal. Hasil uji normalitas dapat dilihat pada Tabel 4.15 berikut.

Tabel 4. 20 Hasil Uji Normalitas

No.	Variabel	L-Hitung	L-Tabel	Keterangan
1.	*Pre-Test* A	0,134	0,161	Berdistribusi Normal
2.	*Post-Test* A	0,124	0,161	Berdistribusi Normal
3.	*Pre-Test* B	0,001	0,161	Berdistribusi Normal
4.	*Post-Test* B	0,107	0,161	Berdistribusi Normal

Berdasarkan tabel hasil uji normalitas dengan menggunakan uji Liliefors, dapat dilihat bahwa nilai L-hitung lebih kecil dari L-tabel pada seluruh variabel. Sehingga diperoleh kesimpulan bahwa semua data pada variabel tersebut berdistribusi normal.

2. Uji Homogenitas

Uji homogenitas dilakukan untuk mengetahui bahwa data yang diperoleh dari dua kelompok memiliki varian homogen atau tidak. Uji homogenitas dilakukan menggunakan uji-F dengan bantuan aplikasi MS Excel. Proses perhitungan uji homogenitas menggunakan taraf signifikan sebesar 5%. Kriteria keputusan yang

diambil pada uji-F adalah jika F-hitung lebih besar dari F-tabel maka kedua kelompok memiliki varian yang tidak homogen. Namun jika F-hitung lebih kecil dari F-tabel maka kedua kelompok memiliki varian yang homogen.

Tabel 4. 21 Hasil Uji Homogenitas

No.	Variabel	F-Hitung	F-Tabel	Keterangan
1.	*Pre-Test* & *Post-Test* Kelas A	1,7312	1,8608	Homogen
2.	*Pre-Test* & *Post-Test* Kelas A	1,3926	1,8608	Homogen

Berdasarkan tabel hasil uji homogenitas dengan menggunakan uji-F, dapat dilihat bahwa nilai F-hitung lebih kecil dari F-tabel pada seluruh kelompok variabel. Sehingga diperoleh kesimpulan bahwa semua data pada kelompok variabel tersebut homogen.

3. Uji-T (*T-Test Paired Sample*)

Uji ketiga adalah *T-Test Paired Sample* dengan bantuan aplikasi SPSS pada setiap kelas. Uji ini dilakukan untuk mengetahui perbedaan rata-rata skor *pre-test* dan *post-test* secara signifikan. Hasil *T-Test Paired Sample* dengan bantuan aplikasi SPSS pada kelas A dan kelas B dapat dilihat pada Tabel berikut.

Tabel 4. 22 *Tabel Paired Samples Statistic* Kelas A

Paired Samples Statistics A

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Post Test	82,20	30	3,727	0,680
	Pre Test	29,93	30	7,199	1,314

Tabel 4. 23 Tabel *Paired Samples Statistic* Kelas B

Paired Samples Statistics B

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Post Test	85,13	30	4,353	0,795
	Pre Test	31,83	30	8,018	1,464

Berdasarkan tabel *Paired Samples Statistics A* diperoleh bahwa nilai rata-rata *pre-test* kelas A adalah 29,93 dibulatkan ke atas menjadi 30 dan nilai rata-rata *post-test* kelas A adalah 82,20 dibulatkan ke bawah menjadi 82. Selain itu, Berdasarkan tabel *Paired Samples Statistics B* diperoleh bahwa nilai rata-rata *pre-test* kelas B adalah 31,83 dibulatkan ke atas menjadi 32 dan nilai rata-rata *post-test* kelas B adalah 85,13 dibulatkan ke bawah menjadi 85. Hasil perbandingan nilai rata-rata *pre-test* dan *post-test* baik kelas A maupun kelas B menunjukkan adanya peningkatan.

Tabel 4. 24 Tabel *Paired Samples Test* Kelas A

Paired Samples Test A

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper			
Pair 1	Post Test - Pre Test	53,567	5,923	1,081	51,355	55,778	49,535	29	0,000

Tabel 4. 25 Tabel *Paired Samples Test* Kelas B

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference Lower	Upper			
Pair 1	Post Test - Pre Test	53,300	10,001	1,826	49,566	57,034	29,192	29	0,000

Sealnjutnya, pengujian hipotesis kedua dilakukan untuk melihat adanya perbedaan rata-rata skor *pre-test* dan skor *post-test*. Rumusan hipotesisnya adalah adalah H_0 artinya tidak ada perbedaan rata-rata skor *pre-test* dan skor *post-test*, sedangkan H_1 artinya ada perbedaan rata-rata skor *pre-test* dan skor *post-test*.

Pengambilan keputusan diperoleh jika Sig. (2-tailed) > 0,05 maka H_0 diterima dan jika Sig. (2-tailed) < 0,05 maka H_0 ditolak. Berdasarkan tabel *Paired Samples Test A* diperoleh bahwa nilai Sig. (2-tailed) adalah 0,000 (0.000< 0,05) sehingga keputusan yang didapat adalah H_0 ditolak artinya ada perbedaan rata-rata skor *pre-test* dan skor *post-test* di kelas A. Selain itu, berdasarkan tabel *Paired Samples Test B* diperoleh bahwa nilai Sig. (2-tailed) adalah 0,000 (0.000< 0,05) sehingga keputusan yang didapat adalah H_0 ditolak artinya ada perbedaan rata-rata skor *pre-test* dan skor *post-test* di kelas B. Kesimpulan yang diperoleh dari uji-t adalah bahwa terdapat perbedaan yang signifikan rata-rata skor *pre-test* dan *post-test* artinya terdapat perbedaan yang signifikan dalam peningkatan pemahaman konsep mahasiswa sebelum dan sesudah menggunakan *e-module* yang dikembangkan.

4. Uji N-Gain

Selanjutnya adalah uji N-Gain pada skor *pre-test* dan skor *post-test* untuk mengetahui besar dan kriteria peningkatan pemahaman konsep mahasiswa. Hasil perhitungan uji N-Gain kelas A dan kelas B dapat dilihat secara berurut pada Tabel 4.19 dan Tabel 4.20 berikut.

Tabel 4. 26 Hasil Perhitungan Uji N-Gain Kelas A

No.	Subjek	Skor N-Gain	No.	Subjek	Skor N-Gain
1	RA	0,78	16	WA	0,75
2	HM	0,87	17	MFA	0,73
3	ARD	0,71	18	NN	0,73
4	MF	0,78	19	MIU	0,75
5	HA	0,74	20	RM	0,73
6	AS	0,84	21	MCU	0,71
7	KS	0,74	22	AA	0,67
8	FS	0,77	23	DR	0,74

9	YE	0,75	24	AN	0,67
10	LR	0,74	25	FFA	0,77
11	AL	0,73	26	IF	0,72
12	BD	0,80	27	HS	0,78
13	SW	0,73	28	AAK	0,73
14	DM	0,78	29	VP	0,73
15	JS	0,81	30	ITI	0,74
Skor Rata-rata					**0,75**
Skor Minimum					**0,67**
Skor Maksimum					**0,87**

Tabel 4. 27 Hasil Perhitungan Uji N-Gain Kelas B

No.	**Subjek**	**Skor N-Gain**	**No.**	**Subjek**	**Skor N-Gain**
1	FA	0,88	16	AAS	0,70
2	SNK	0,74	17	FNZ	0,73
3	AS	0,79	18	FM	0,72
4	IAZ	0,90	19	AF	0,71
5	QA	0,86	20	ZB	0,76
6	YN	0,97	21	RW	0,69
7	MMR	0,78	22	AB	0,77
8	IS	0,88	23	DA	0,80
9	MS	0,77	24	ARO	0,70
10	SFL	0,84	25	PA	0,68
11	LK	0,74	26	HIW	0,83
12	GR	0,73	27	AS	0,87
13	FA	0,75	28	PDZ	0,81
14	DTA	0,75	29	VD	0,74
15	SS	0,75	30	BI	0,70
Skor Rata-rata					**0,78**
Skor Minimum					**0,68**
Skor Maksimum					**0,97**

Berdasarkan Tabel 4.19 diperoleh bahwa nilai rata-rata skor N-Gain untuk kelas A adalah sebesar 0,75 dengan nilai minimum adalah 0,67 dan nilai maksimum 0,87. Skor rata-rata N-Gain tersebut terdapat pada kualifikasi tinggi. Sementara berdasarkan Tabel 4.20 diperoleh bahwa nilai rata-rata skor N-Gain untuk kelas B adalah sebesar 0,78 dengan nilai minimum adalah 0,68 dan nilai maksimum 0,97. Skor rata-rata N-Gain tersebut terdapat pada kualifikasi tinggi. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa skor rata-rata N-Gain dari kedua kelas berada pada kualifikasi tinggi dan responden dari kedua kelas yang menggunakan *e-module* materi limit barisan dan visualisasinya mengalami peningkatan pemahaman konsep.

Beberapa tahap pengujian yang telah dilakukan antara lain, uji normalitas, uji homogenitas, uji-t (*T-Test Paired Sample*), dan uji N-Gain. Hasil uji normalitas menunjukkan bahwa semua data pada variabel tersebut berdistribusi normal. Hasil uji homogenitas menunjukkan bahwa semua data pada kelompok variabel homogen. Hasil uji-t (*T-Test Paired Sample*) menunjukkan bahwa terdapat perbedaan yang signifikan rata-rata skor *pre-test* dan *post-test* artinya terdapat perbedaan yang signifikan dalam peningkatan pemahaman konsep mahasiswa sebelum dan sesudah menggunakan *e-module* yang dikembangkan. Hasil uji N-Gain diperoleh rata-rata besaran peningkatan pemahaman konsep mahasiswa pada kategori tinggi dengan nilai gain 7,65. Dengan demikian, secara keseluruhan uji yang telah dilakukan, diperoleh bahwa *e-module* materi limit barisan dan visualisasinya secara efektif mampu meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa.

BAB V

PEMBAHASAN

5.1 Pengembangan *E-Module* yang Valid dan Praktis

Penelitian pengembangan ini menggunakan model pengembangan ADDIE. Terdapat lima tahap pengembangan yaitu, analisis, desain, pengembangan, implementasi, dan evaluasi. Pada tahap analisis, dilakukan analisis kebutuhan yang didapatkan dari observasi awal. Berdasarkan hasil observasi tersebut menunjukkan bahwa adanya kesulitan mahasiswa dalam menggunakan, memahami, dan mengaplikasikan definisi pada soal. Kemudian, terdapat materi yang abstrak dan menyebabkan miskonsepsi apabila tidak dikonkritkan. Selain itu, kesulitan mahasiswa dalam memvisualisasikan definisi karena terbatasnya media pembelajaran yang mampu memenuhi kebutuhan mahasiswa. Peneliti menggunakan aplikasi GeoGebra karena memiliki kemampuan untuk memvisualisasikan sesuai kebutuhan. Selain untuk visualisasi, diperlukan media pembelajaran yang mampu mendukung kegiatan belajar mandiri dan meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa, sehingga peneliti memilih elektronik modul karena kelebihan-kelebihan yang dimiliki dan sesuai dengan analisis kebutuhan.

Pada penelitian ini telah dihasilkan *e-module* dengan judul *E-Module* Materi Limit Barisan dan Visualisasinya. Untuk memenuhi standar kriteria pengembangan *e-module*, peneliti berpedoman pada standar kriteria pengembangan modul pada umumnya yaitu kevalidan, keefektifan, dan kepraktisan. Kevalidan *e-module* diperoleh berdasarkan penilaian ahli terhadap *e-module*. Keefektifan diperoleh berdasarkan peningkatan pemahaman konsep mahasiswa. Kepraktisan

diperoleh berdasarkan respon mahasiswa setelah menggunakan *e-module*. Standar kriteria yang pertama dilakukan adalah kevalidan. Komponen penilaian kevalidan meliputi ahli materi, ahli desain, ahli pembelajaran, ahli bahasa, dan ahli teknologi. Berdasarkan komponen penilaian buku teks oleh Muljono (2007) dijelaskan bahwa tidak terdapat ahli teknologi pada komponen penilaian. Namun pada penelitian pengembangan ini komponen kelayakan teknologi sangat dibutuhkan, karena *e-module* yang dikembangkan menggunakan bantuan GeoGebra. Dengan demikian, terdapat lima ahli dari seluruh komponen penilaian kevalidan pada penelitian pengembangan ini.

Hasil validasi yang telah dilakukan menunjukkan bahwa *e-module* memperoleh nilai 86% dari ahli bahasa, 94% dari ahli desain, dan 89% dari ahli teknologi. Sehingga rata-rata penilaian dari seluruh ahli adalah 90% dan berada pada kategori sangat valid. Selain mengisi angket validasi, validator ahli juga memberikan komentar dan saran sebagai bahan revisi *e-module*. Selanjutnya, peneliti melakukan revisi berdasarkan komentar dan saran terseut. Hal tersebut didukung dengan pernyataan Plomp & Nieveen (2007) bahwa komentar dan saran dari validator ahli sangat berguna untuk menghasilkan *e-module* yang maksimal.

Hasil validasi tersebut lebih tinggi apabila dibandingkan dengan penelitian yang dilakukan oleh Hidayani (2021). Penelitian tersebut mendapat skor 74% dan berada pada kategori sedang. Penelitian tersebut hanya dinilai pada dua aspek, yaitu materi dan desain. Meskipun terdapat perbedaan pada jenjang dan aspek penilaian, namun penelitian tersebut sama-sama mengembangkan modul berbasis elektronik. Pengembangan ini digunakan untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa,

sedangkan pengembangan yang dilakukan oleh Handayani (2021) digunakan untuk meningkatkan kemampuan literasi matematika siswa.

Standar kriteria selanjutnya yang dilakukan adalah kepraktisan. Keparaktisan *e-module* diperoleh berdasarkan respon mahasiswa yang telah menggunakan *e-module*. Penilaian kepraktisan dilakukan dengan memberikan angket respon kepada mahasiswa. Hasil respon mahasiswa terhadap *e-module* diperoleh persentase rata-rata 92% dengan persentase tertinggi 100% dan terendah 74% untuk responden kelas A. Selain itu, diperoleh persentase rata-rata 89% dengan persentase tertinggi 100% dan terendah 65% untuk responden kelas B. Berdasarkan hasil penilaian tersebut dapat diketahui bahwa *e-module* materi limit barisan dan visualisasinya berada pada kualifikasi sangat praktis untuk meningkatkan pemahaman mahasiswa.

Hasil penilaian respon mahasiswa tersebut berbeda dengan penelitian yang dilakukan oleh Patri dan Sonya (2021) yang memperoleh persentase rata-rata 80%. Rata-rata persentase pada penelitian tersebut lebih rendah. Meskipun penelitian tersebut terdapat perbedaan pada jenjang, namun sama-sama mengembangkan modul berbasis elektronik. Selain menghasilkan penilaian respon siswa, penelitian tersebut juga menghasilkan penilaian motivasi belajar siswa sebesar 84% dan peningkatan kemampuan berpikir siswa sebesar 83%.

Dengan demikian, *e-module* materi limit barisan dan visualisasinya telah memenuhi semua standar kriteria penilaian yaitu kevalidan dan kepraktisan. Hal tersebut sesuai pernyataan yang dikemukakan oleh Nieveen (1999) bahwa terdapat standar kriteria penilaian pengembangan module yaitu kevalidan dan kepraktisan.

5.2 Peningkatan Pemahaman Konsep Mahasiswa

Keefektifan *e-module* dalam meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa diperoleh berdasarkan uji efektivitas pada data *pre-test* dan *post-test*. Analisis data yang dilakukan untuk melihat peningkatan pemahaman konsep mahasiswa adalah dengan perhitungan *T-Test Paired Sample* dan N-Gain. Perhitungan *T-Test Paired Sample* dan N-Gain melibatkan dua kelas mata kuliah Analisis Real yang terdiri dari 30 mahasiswa pada setiap kelas.

T-Test Paired Sample dilakukan untuk mengetahui perbedaan yang signifikan pada skor *pre-test* dan *post-test*. Pada tahap ini, terdapat dua cara yang dilakukan oleh peneliti yaitu, pertama membandingkan secara langsung antara skor *pre-test* dan *post-test* dan kedua menggunakan *T-Test Paired Sample* dengan bantuan *software* SPSS. Hasil perbandingan secara langsung antara rata-rata skor *pre-test* dan *post-test* menunjukkan peningkatan pemahaman konsep setelah menggunakan *e-module* yang dikembangkan, baik kelas A maupun kelas B. Selanjutnya, cara kedua adalah menggunakan *T-Test Paired Sample* dengan bantuan *software* SPSS.

Hasil *T-Test Paired Sample* dengan bantuan *software* SPSS menunjukkan bahwa hubungan antara skor *pre-test* dan *post-test* adalah kuat dengan diterimanya H_0. Selain itu, terdapat perbedaan yang signifikan antara skor *pre-test* dan *post-test* dengan ditolaknya H_0. Keputusan akhir yang didapat adalah adanya perbedaan yang signifikan antara skor *pre-test* dan *post-test*, baik kelas A maupun kelas B. Artinya terdapat perbedaan yang signifikan dalam peningkatan pemahaman konsep mahasiswa sebelum dan sesudah menggunakan *e-module* yang dikembangkan.

Selanjutnya, uji N-Gain pada skor *pre-test* dan skor *post-test* untuk mengetahui besar dan kriteria peningkatan pemahaman konsep mahasiswa. Berdasarkan uji N-Gain yang telah dipaparkan pada Bab IV, diperoleh bahwa nilai rata-rata N-Gain kelas A adalah 0,75 dengan nilai N-Gain tertinggi 0,87 dan terendah 0,67. Rata-rata N-Gain pada kelas A termasuk pada kriteria tinggi. Selain itu, diperoleh nilai rata-rata N-Gain kelas B adalah 0,78 dengan nilai N-Gain tertinggi 0,97 dan terendah 0,68. Rata-rata tersebut termasuk pada kriteria tinggi. Dengan demikian, *e-module* yang dihasilkan memenuhi kriteria tinggi untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa.

Nilai tersebut lebih tinggi jika dibandingakan penelitian Farida, dkk (2020), yang memenuhi kategori sedang dengan nilai 0,38. Begitu juga dengan penelitian yang dilakukan oleh Cahyani (2020) menunjukkan kategori sedang dengan nilai N-gain sebesar 0,41. Meskipun kedua penelitian tersebut berbeda pada jenjang dan materi, namun sama-sama mengembangkan modul berbasis elektronik. Perbedaan lain terletak pada validator, penelitian tersebut divalidasi oleh dua ahli yaitu ahli media dan ahli materi. Aspek yang dinilai oleh ahli media adalah konten, penyajian, dan bahasa, sedangkan aspek yang dinilai oleh ahli materi adalah tampilan dan penggunaan.

Berdasarkan perhitungan *T-Test Paired Sample* dan N-Gain untuk melihat efektifitas *e-module* untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa, diperoleh hasil bahwa terdapat perbedaan yang signifikan dalam peningkatan pemahaman konsep mahasiswa sebelum dan sesudah menggunakan *e-module* yang dikembangkan. Besaran dan kriteria peningkatan pemahaman konsep mahasiswa ditunjukkan dengan adanya perhitungan N-Gain dengan nilai 76,5. Nilai tersebut

berada pada kategori tinggi. Dengan demikian, berdasarkan perhitungan *T-Test Paired Sample* dan N-Gain untuk melihat efektifitas *e-module* untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa, maka *e-module* dinyatakan efektif untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa. Penelitian sebelumnya yang memperoleh hasil efektif seperti Sofia (2020) yang menyatakan bahwa modul yang dikembangkan efektif dalam meningkatkan pembelajaran ilmu biologi dengan nilai N-Gain sebesar 0,72. Artinya penggunaan modul tersebut direkomendasikan untuk digunakan dalam proses pembelajaran biologi.

BAB VI

PENUTUP

5.1 Simpulan

Berdasarkan hasil pengembangan dan pembahasan, diperoleh simpulan sebagai berikut.

1. Modul elektronik atau *e-module* materi limit barisan dan visualisasinya mendapat rata-rata persentase akhir 88% dan berada pada kategori sangat valid. Nilai tersebut diperoleh berdasarkan validasi oleh beberapa ahli yaitu, ahli materi, ahli desain, ahli pembelajaran, ahli bahasa, dan ahli teknologi. Berdasarkan penilaian praktis mahasiswa, diperoleh rata-rata persentase 90% dan berada pada kategori sangat praktis. Dengan demikian, *e-module* materi limit barisan dan visualisasinya telah memenuhi kategori valid dan praktis.
2. Untuk mengetahui efektivitas *e-module* untuk meningkatan pemahaman konsep mahasiswa dilakukan uji menggunakan uji *T-Test Paired Sample* dan N-Gain. Hasil uji *T-Test Paired Sample* menunjukkan terdapat perbedaan yang signifikan dalam peningkatan pemahaman konsep mahasiswa sebelum dan sesudah menggunakan *e-module* yang dikembangkan. Besaran dan kriteria peningkatan pemahaman konsep mahasiswa ditunjukkan dengan adanya perhitungan N-Gain dengan hasil kelas A mencapai 0,75 dengan nilai tertinggi 0,87 dan nilai terendah 0,67. Sedangkan uji N-Gain kelas B mencapai 0,78 dengan nilai tertinggi 0,97 dan nilai terendah 0,68. Hasil akhir nilai rata-rata mencapai 76,5 dan berada pada kategori tinggi. Nilai N-gain tertinggi yang dicapai adalah 0,97 dan nilai N-Gain terendah adalah 0,67. Dengan demikian, *e-module* materi limit barisan dan visualisasinya berada pada kategori tinggi.

Dengan demikian, berdasarkan perhitungan *T-Test Paired Sample* dan N-Gain untuk melihat efektifitas *e-module* untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa, maka *e-module* dinyatakan efektif untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil pengembangan dan pembahasan, peneliti memberi saran sebagai berikut.

1. Pengembangan *e-module* menggunakan GeoGebra dapat dilakukan pada materi selain limit barisan.
2. Penelitian terkait peningkatan pemahaman konsep menggunakan GeoGebra masih dapat dilakukan.
3. Pengembangan media pembelajaran berbasis elektronik selain modul masih sangat perlu dilakukan.

DAFTAR RUJUKAN

Abdullah. (2007). *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 5*. Jakarta: Pustaka Imam Asy-Ary.

Abidin, Zainul. (2016). *Pengembangan Sumber Belajar*. Malang: Universitas Negeri Malang

Abimanyu, S. dkk. (2008). Strategi Pembelajaran. Jakarta: Ditjen Dikti Depdiknas.

Akbar, P., Hamid, A., Bernard, M., & Sugandi, A. I. (2017). Analisis Kemampuan Pemecahan Masalah dan Disposisi Matematik Siswa Kelas XI SMA Putra Juang dalam Materi Peluang. Jurnal Cendekia : *Jurnal Pendidikan Matematika*. https://doi.org/10.31004/cendekia.v2i1.6

Akgul, M. B. (2014). *The Effect of Using Dynamic Geometry Software on Eight Grade Students' Achievement in Transformation Geometry, Geometric Thinking and Attitudes Toward Mathematics and Technology*. Thesis. Social Science Of Middle East Technical University.

Al-Mahalli, Jalaludin, & Jalaludin, S. (2008). *Tafsir Al-Jalalain*, diterjemahkan Bahrun Abubakar, *Terjemahan tafsir Jalalain Berikut Asbabun Nuzul, Jilid 1*. Bandung: Penerbit Sinar Baru Algensindo.

Amintoko, G., Saraswati, S., & Rahmawati, N. D. (2017). Hambatan Berpikir Mahasiswa dalam Memecahkan Masalah Limit Barisan serta Pemberian *Scaffolding*. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika, 2*(2), 134-144.

Arindiono, R. Y., & Ramadhani, N. (2013). Perancangan Media Pembelajaran Interaktif Matematika untuk Siswa Kelas 5 SD. *Jurnal Sains Dan Seni Pomits, 2*(1)

Asnawi, M. H. (2021). *Pengembangan Media Pembelajaran Digital pada Materi Trnasformasi Geometri Berbasis Teori Van Hiele*. Tesis. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. (2010). *Introduction to Real Analysis 4th Edition*. University of Illinois.

Darmadi, Adamura, F., Maret, E., Ika, K., Suwani, S. R., & Kuswahyuni. (2011). Perbaikan Kualitas Perkuliahan Analisis Real melalui Lesson Study. *Jurnal Pendidikan MIPA*, 3(1), 32-41.

Darmadi, Lkito, A., & Budayasa, K. (2013). Analisis Kesulitan Berpikir Visual dalam Memahami Definisi Formal pada Barisan Bilangan Real. *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, 978-989, Yogyakarta.

Daryanto. (2012). *Konsep Pembelajaran Kreatif*. Yogyakarta: Gaya Media.

Falahudin, I. (2014). Pemanfaatan Media dalam Pembelajaran. *Jurnal Lingkar Widyaiswara*, (4), 104–117.

Hartanti, D. (2013). Media Pembelajaran (Ebook). *Pendidikan Tehnik dan Arsitektur Universitas Pendidikan Indonesia.*

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and Its Applications,* (800), 5647

Isjoni. (2007). Cooperative Learning: Efektifitas Pembelajaran Kelompok. Bandung: Alfabeta.

Isman, M. N. (2016). Pemanfaatan Program GeoGebra dalam Pembelajaran Matematika. *Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika, 5*(1), 10–19.

Isnaini, Waluya, S. B., Rochmad, Dwijanto, & T. S. N. Asih. (2021). Analisis Miskonsepsi Mahasiswa pada Mata Kuliah Analisis Real. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika 4*, 235-238

Isnaini, Waluya, S. B., Rochmad, Dwijanto, & T. S. N. Asih. (2021). Analysis of Problem Solving Difficulties at Limits of Sequences. *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1722-012033). IOP Publishing.

Karli & Margaretha. (2002). Implementasi Kurikulum Berbasis Kompetensi. Bandung: FIP UPI

Kartini; Susanto, E. (2015). Analisa kesulitan pembuktian matematis mahasiswa pada mata kuliah analisis real. *In Semirata 2015 bidang MIPA BKS-PTN Barat* (pp. 189–199). Pontianak.

Khalil, M. (2016). *Effect of Geogebra (Dgs) Aided Instructions on Grade-12 Students ' Mathematical Thinking and Mathematical Achivement in Analytic Geometry.* Dissertation. Northern University, Nowshera Pakistan.

Khalil, M., Farooq, R. A., Çakiroglu, E., Khalil, U., & Khan, D. M. (2018). The Development of Mathematical Achievement in Analytic Geometry of Grade12 Students Through GeoGebra Activities. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(4), 1453–1463.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why Minimal Guidance During Instruction Does Not Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching Paul. *Educational Psychologist, 41*(2), 111-127,. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4102.

Kozma, R. B. (1991). Learning with Media. *Review of Educational Research, 61*(2), 179–211. https://doi.org/10.3102/00346543061002179

Lapono, N, dkk. (2008). Belajar Dan Pembelajaran SD. Jakarta: Dirjen Pendidikan Tinggi Depdiknas.

Lestari, K. Eka. (2015). *Penelitian Pendidikan Matematika*. Bandung: Refika Aditama.

Little, C. (2008). Interactive Geometry in the Classroom: Old Barriers and New Opportunities. *Mathematics in School, 38*(2), 9–11.

Maharani, M., Supriadi, N., & Widiyastuti, R. (2018). Media Pembelajaran Matematika Berbasis Kartun untuk Menurunkan Kecemasan Siswa. *Desimal: Jurnal Matemattika, 1*(1), 101.

Martha, Z. D., Adi, E. P., & Soepriyanto, Y. (2018). E-book berbasis Mobile Learning. *JKTP: Jurnal Kajian Teknologi dan Pendidikan, 1*(2), 2615-8787.

Martin, F., & Betrus, A. K. (2019). *Digital Media for Learning*. Switzerland: Springer.

Mentari, D., Sumpono, & Ruyani, A. (2018). Pengembangan media pembelajaran e-book berdasarkan hasil riset elektroforesis 2-d untuk mengukur kemampuan berpikir kreatif mahasiswa. *PENDIPA, Journal of Science Education, 2*(2), 131-134.

Muliati, Binti. (2018). Media Pendidikan (Seri Tafsir Tarbawi). *Jurnal al-Hikmah, 6*(2), 67-61.

Muljono, P. (2007). Kegiatan Penilaian Buku Teks Pelajaran Pendidikan Dasar dan Menengah. *Buletin BSNP Media Komunikasi dan Dialog Standar Pendidikan, II*(1), 1-24. Retrieved from http://www.bsnp-indonesia.org

Nieveen, N. (1999). Prototyping to reach product quality. *In Desain approaches and tools in education and training*. https://doi.org/10.1007/s00477-014-0937-9

Ningsih, Y. L. (2016). Kemampuan Pemahaman Konsep Matematika Mahasiswa Melalui Penerapan Lembar Aktivitas Mahasiswa (LAM) Berbasis Teori APOS pada Materi Turunan. *Edumatika, 6*(1), 2088-2157

Neo, M., & Neo, K. T. K. (2001). Innovative Teaching: Using Multimedia in a Problem-Based Learning Environment. *Educational Technology and Society, 4*(4), 19–31. https://doi.org/10.12944/cwe.6.1.28

Pour, A. N., Herayanti, L., & Sukroyanti, B. A. (2018). Pengaruh Model Pembelajaran Talking Stick terhadap Keaktifan Belajar Siswa. *Jurnal Penelitian Dan Pengkajian Ilmu Pendidikan: E-Saintika, 2*(1), 36.

Pratiwi, F. A. (2016). Analisis miskonsepsi belajar mahasiswa dalam menyelesaikan masalah pada mata kuliah analisis real pokok bahasan barisan bilangan real. *Iqra', 1*(2), 33–54.

Priantini, D. A. M. M. O. &Widiastuti, N. L. G. L. (2021). How effective is Learning Style Mterial with E-Modules During The COVID-19 Pandemic? *Jurnal Ilmiah Sekolah Dasar, 5*(2).

Puspitawati, N. M., Santyasa, I. W., & Agustini, K. (2018). Pengaruh Media GeoGebra terhadap Motivasi dan Kreativitas Belajar Matematika Siswa SMK Negeri 1 Singaraja. *Jurnal Teknologi Pembelajaran Indonesia, 8*(3). https://doi.org/10.23887/jtpi.v8i3.2286.

Rahayu, Setya. (2012). Pengaruh Pendekatan *Realistic Mathematic Education* Terhadap Pemahaman Konsep Matematika Siswa Kelas VII Madrasah Tsanawiyah Hasanah Pekanbaru. *Jurnal Pendidikan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, 5*(3).

Reiser, R. A., & Gagné, R. M. (1983). *Selecting Media for Instruction*. Educational Technology.

Sackstein, S., Spark, L., & Jenkins, A. (2015). Are e-books effective tools for learning? Reading speed and comprehension: iPad® i vs. paper. *South African Journal of Education*, *35*(4).

Sagala, S. (2010). Konsep dan Makna Pembelajaran. Bandung: Alfabeta.

Saha, R. A., Ayub, A. F. M., & Tarmizi, R. A. (2010). The Effects of GeoGebra on Mathematics Achievement: Enlightening Coordinate Geometry Learning. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 8*(5), 686–693.

Sarrab, Elgamel, dan Aldabbas .2012. Mobile Learning (M-Learning And Educational Environments. *International Journal of Distributed and Parallel System (IJDPS), 3* (4).

Septian, A. (2014). Pengaruh kemampuan prasyarat terhadap kemampuan penalaran matematis dalam matakuliah analisis real. *ATIKAN: Jurnal Kajian Pendidikan, 4*(2), 179–188.

Sofia, H. W., Anjar, P. U., Slamet, H., Bevo, W., & Erlia, N. (2020). The Validity and Effectivity of Learning Using STEAM Module with Biotechnology Game. *JPBI (Jurnal Pendidikan Bilogi Indonesia), 6*(1), 91-100.

Sofyan, H., Evita, A., Jamiatul, S. (2019). Development of E-Modules Based on Local Wisdom in Central Learning Model at Kindergartens in Jambi City. *European Journal of Educational Research, 8*(4), 1137-1143.

Subiyantoro, Eko. (2014). *Menapak di Era Digital dengan Memasyarakatkan Buku Digital*.

Sucipto, L. . M. (2016). Analisis kesulitan mahasiswa dalam memahami konsep bilangan real. *Beta, 9*(2), 197–211.

Sudjana, N. (2014). *Penelitian Hasil Proses Belajar Mengajar*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Suparno. (2017). Development of e-book multimedia model to increase critical thinking of senior high school students. *Dinamika Pendidikan, 12*(2), 196-2006.

Suratno, J. (2016). The Development of Students Worksheet Using GeoGebra Assisted Problem-Based Learning and Its Effect on Ability of Mathematical Discovery of Junior High Students. *Proceeding of 3rd International Conference on Research*, (May), ME-385-ME-394.

Surianto. (2009). Teori Pembelajaran Konstruktivisme.

Susanto, Ahmad. (2013). *Teori Belajar dan Pembelajaran di Sekolah Dasar*. Jakarta: Kencana Prenamedia Group.

Sutopo, Ariesto Hadi. 2012. *Teknologi Informasi dan Komunikasi Dalam Pendidikan*. Yogyakarta : Graha Ilmu.

Syawahid, M. (2015). Kemampuan berfikir formal mahasiswa. *Beta Jurnal Pendidikan Matematika, 8*(2), 137–153.

Thobroni, M. (2015). Belajar dan Pembelajaran: Teori dan Praktek. Yogjakarta: Arr-Ruzz Media.

Verhoef, N. C., Coenders, F., Pieters, J. M., van Smaalen, D., & Tall, D. O. (2015). Professional Development Through Lesson Study: Teaching the Derivative Using GeoGebra. *Professional Development in Education, 41*(1), 109–126. https://doi.org/10.1080/19415257.2014.886285

Verschaffel, L., Dooren, W. Van, & Smedt, B. De. (2012). Mathematical Learning. In N. M. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning*. Germany: Springer.

Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the Conceptual Change Approach to Mathematics Learning and Teaching. *Learning and Instruction, 14*(5 SPEC.ISS.), 445–451. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.014.

Wahyuni, E. D., Husniah, L., & Chomariya, N. (2018). Media Pembelajaran Berbasis Tematik pada Platform Android untuk Kelas 1 Sekolah Dasar. *Seminar Nasional Tekhnologi Dan Rekayasa (SENTRA)*, 149–156.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 115-133.

Widari, I. G. A. A. (2013). Penerapan Pendekatan Pembelajaran Matematika Realistik Sebagai Upaya Meningkatkan Aktivitas dan Prestasi Belajar Siswa Dalam Pembelajaran Bangun Ruang pada Siswa Kelas IVA SDN 9 Sesetan Tahun Pelajaran 2011/2012. *Jurnal Santiaji Pendidikan, 3* (2) 2087-9016

Wirasasmita, R. H., & Uska, M. Z. (2017). Pengembangan Media Pembelajaran Bebasis Buku Digital Elektronic Publication (EPub) Menggunakan Software Sigil pada Mata Kuliah Pemrograman Dasar. *EDUMATIC: Jurnal Pendidikan Informatika, 1*(1), 2549-7472.

Wuryanto. (2011). Meminimalisir hambatan belajar mahasiswa dalam menyelesaikan soal pembuktian suatu tautologi pada mata kuliah analisis real dengan memberdayakan penalaran yang berasaskan prinsip reductio ad absurdum. *Jurnal Matematika Kreatif Inovatif, 2*(1), 37–47.

Yaumi, M. (2018). *Media dan Teknologi Pembelajaran*. Prenada Media.

Zunaidah, F. N., & Amin, M. (2016). Developing the Learning Materials of Biotechnology Subject Based on Students' Need and Character of Nusantara Pgri University of Kediri. *Jurnal Pendidikan Biologi Indonesia*, *2*(1), 19-30.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Surat Validasi Ahli Materi

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN
Jalan Gajayana 50, Telepon (0341) 552398 Faximile (0341) 552398 Malang
http:// fitk.uin-malang.ac.id. email : fitk@uin_malang.ac.id

Nomor : B-5091/Un.03/FITK/PP.00.9/08/2022 25 Agustus 2022
Lampiran : -
Perihal : Permohonan Menjadi Validator (Ahli Materi)

Kepada Yth.
Dr. Hairur Rahman, M.Si
di –
Tempat

Assalamualaikum Wr. Wb.

Sehubungan dengan proses penyusunan tesis mahasiswa berikut:

Nama	:	Nanda Mustagfirotul Ulya
NIM	:	200108210004
Program Studi	:	Magister Pendidikan Matematika (MPMAT)
Judul Tesis	:	Pengembangan E-Module Materi Limit Barisan menggunakan Geo Gebra untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Mahasiswa
Dosen Pembimbing	:	1. Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc 2. Dr. Imam Sujarwo, M.Pd

maka dimohon Bapak/Ibu berkenan menjadi validator materi tesis tersebut. Adapun segala hal berkaitan dengan apresiasi terhadap kegiatan validasi sebagaimana dimaksud sepenuhnya menjadi tanggung jawab mahasiswa bersangkutan.

Demikian Permohonan ini disampaikan, atas perkenan dan kerjasamanya yang baik disampaikan terima kasih.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

a.n. Dekan
Wakil Dekan Bid. Akademik

Dr. Muhammad Walid, M.A.
NIP. 197308232000031002

Scanned by TapScanner

Lampiran 2 Surat Vaidasi Ahli Pembelajaran

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN
Jalan Gajayana 50, Telepon (0341) 552398 Faximile (0341) 552398 Malang
http:// fitk.uin-malang.ac.id. email : fitk@uin_malang.ac.id

Nomor : B- 5093/Un.03/FITK/PP.00.9/08/2022 25 Agustus 2022
Lampiran : -
Perihal : Permohonan Menjadi Validator (Ahli Pembelajaran)

Kepada Yth.
Dr. Marhayati, M.P.Mat
di –
Tempat

Assalamualaikum Wr. Wb.

Sehubungan dengan proses penyusunan tesis mahasiswa berikut:

Nama	:	Nanda Mustagfirotul Ulya
NIM	:	200108210004
Program Studi	:	Magister Pendidikan Matematika (MPMAT)
Judul Tesis	:	Pengembangan E-Module Materi Limit Barisan menggunakan Geo Gebra untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Mahasiswa
Dosen Pembimbing	:	1. Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc 2. Dr. Imam Sujarwo, M.Pd

maka dimohon Bapak/Ibu berkenan menjadi validator materi tesis tersebut. Adapun segala hal berkaitan dengan apresiasi terhadap kegiatan validasi sebagaimana dimaksud sepenuhnya menjadi tanggung jawab mahasiswa bersangkutan.

Demikian Permohonan ini disampaikan, atas perkenan dan kerjasamanya yang baik disampaikan terima kasih.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

a.n Dekan
Wakil Dekan Bid. Akademik

Dr. Muhammad Walid, M.A
NIP. 19730823200003100 2

Scanned by TapScanner

Lampiran 3 Surat Validasi Ahli Bahasa

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN
Jalan Gajayana 50, Telepon (0341) 552398 Faximile (0341) 552398 Malang
http:// fitk.uin-malang.ac.id. email : fitk@uin_malang.ac.id

Nomor : B-7488/Un.03/FITK/PP.00.9/10/2022 31 Oktober 2022
Lampiran : -
Perihal : Permohonan Menjadi Validator (Ahli Bahasa)

Kepada Yth.
Dr. M. Zubad Nurul Yaqin, M.Pd
di –
Tempat

Assalamualaikum Wr. Wb.

Sehubungan dengan proses penyusunan tesis mahasiswa berikut:

Nama	:	Nanda Mustagfirotul Ulya
NIM	:	200108210004
Program Studi	:	Magister Pendidikan Matematika (MPMAT)
Judul Tesis	:	Pengembangan E-Module Materi Limit Barisan menggunakan Geo Gebra untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Mahasiswa
Dosen Pembimbing	:	1. Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc 2. Dr. Imam Sujarwo, M.Pd

maka dimohon Bapak/Ibu berkenan menjadi validator materi tesis tersebut. Adapun segala hal berkaitan dengan apresiasi terhadap kegiatan validasi sebagaimana dimaksud sepenuhnya menjadi tanggung jawab mahasiswa bersangkutan.

Demikian Permohonan ini disampaikan, atas perkenan dan kerjasamanya yang baik disampaikan terima kasih.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

a.n Dekan
Wakil Dekan Bid. Akademik

Dr. Muhammad Walid, M.A
NIP. 197308232000031002

Scanned by TapScanner

Lampiran 4 Surat Validasi Ahli Desain

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN
Jalan Gajayana 50, Telepon (0341) 552398 Faximile (0341) 552398 Malang
http:// fitk.uin-malang.ac.id. email : fitk@uin_malang.ac.id

Nomor : B-7179 /Un.03/FITK/PP.00.9/10/2022 31 Oktober 2022
Lampiran : -
Perihal : Permohonan Menjadi Validator (Ahli Media)

Kepada Yth.
Dr. Nunik Junara, MT
di –
Tempat

Assalamualaikum Wr. Wb.

Sehubungan dengan proses penyusunan tesis mahasiswa berikut:

Nama	:	Nanda Mustagfirotul Ulya
NIM	:	200108210004
Program Studi	:	Magister Pendidikan Matematika (MPMAT)
Judul Tesis	:	Pengembangan E-Module Materi Limit Barisan menggunakan Geo Gebra untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Mahasiswa
Dosen Pembimbing	:	1. Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc 2. Dr. Imam Sujarwo, M.Pd

maka dimohon Bapak/Ibu berkenan menjadi validator materi tesis tersebut. Adapun segala hal berkaitan dengan apresiasi terhadap kegiatan validasi sebagaimana dimaksud sepenuhnya menjadi tanggung jawab mahasiswa bersangkutan.

Demikian Permohonan ini disampaikan, atas perkenan dan kerjasamanya yang baik disampaikan terima kasih.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

a.n Dekan
Wakil Dekan Bid. Akademik

Dr. Muhammad Walid, M.A
NIP. 197308232000031002

Scanned by TapScanner

Lampiran 5 Surat Validasi Ahli Teknologi

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN
Jalan Gajayana 50, Telepon (0341) 552398 Faximile (0341) 552398 Malang
http:// fitk.uin-malang.ac.id. email : fitk@uin_malang.ac.id

Nomor : B-5094/Un.03/FITK/PP.00.9/08/2022 25 Agustus 2022
Lampiran : -
Perihal : Permohonan Menjadi Validator (Ahli Teknologi)

Kepada Yth.
Nafie Jauhari, M.Si
di –
Tempat

Assalamualaikum Wr. Wb.

Sehubungan dengan proses penyusunan tesis mahasiswa berikut:

Nama	:	Nanda Mustagfirotul Ulya
NIM	:	200108210004
Program Studi	:	Magister Pendidikan Matematika (MPMAT)
Judul Tesis	:	Pengembangan E-Module Materi Limit Barisan menggunakan Geo Gebra untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Mahasiswa
Dosen Pembimbing	:	1. Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc 2. Dr. Imam Sujarwo, M.Pd

maka dimohon Bapak/Ibu berkenan menjadi validator materi tesis tersebut. Adapun segala hal berkaitan dengan apresiasi terhadap kegiatan validasi sebagaimana dimaksud sepenuhnya menjadi tanggung jawab mahasiswa bersangkutan.

Demikian Permohonan ini disampaikan, atas perkenan dan kerjasamanya yang baik disampaikan terima kasih.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

a.n Dekan
Wakil Dekan Bid. Akademik

Dr. Muhammad Walid, M.A
NIP. 197308232000031002

Scanned by TapScanner

Lampiran 6 Lembar Validasi Ahli Materi

INSTRUMEN VALIDASI AHLI MATERI

Format Penilaian Ahli Materi Terhadap *E-Module*

Fakultas	:	Ilmu Tarbiyah dan Keguruan
Jurusan	:	Magister Pendidikan Matematika
Nama Bahan Ajar	:	*E-module* Limit Barisan dan Visualisasinya
Penyusun	:	Nanda Mustagfirotul Ulya
Judul Tesis	:	Pengembangan *E-Module* Materi Limit Barisan Menggunakan GeoGebra untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Mahasiswa

A. Pengantar

Berkaitan dengan pelaksanaan pengembangan *e-module* materi limit barisan menggunakan GeoGebra untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa, maka peneliti bermaksud untuk mengadakan validasi terhadap *e-module* yang telah dibuat sebagai salah satu bahan ajar. Oleh karena itu, peneliti memohon kesediaan Bapak/Ibu untuk mengisi angket di bawah ini sebagai ahli materi. Tujuan dari pengisian angket ini adalah mengetahui kesesuaian pemanfaatan *e-module* yang dikembangkan sebagai pembelajaran materi limit barisan untuk mahasiswa yang sedang menempuh mata kuliah Analisis Real. Hasil pengukuran yang didapat melalui angket akan digunakan sebagai bahan penyempurnaan *e-module* agar dapat dimanfaatkan dalam pembelajaran. Sebelumnya, saya ucapkan terima kasih atas kesediaan Bapak/Ibu sebagai ahli materi.

B. Identitas Validator

Nama	:	Dr. Hairur Rahman, M.Si.
NIP	:	19800429 200604 1003
Instansi	:	Saintek. UIN Malang
Pendidikan Terakhir	:	S3

C. Petunjuk

1. Sebelum mengisi angket, mohon Bapak/Ibu mengamati *e-module* dan membaca setiap item yang disediakan terlebih dahulu.
2. Instrumen ini terdiri dari kolom pernyataan dan kolom jawaban. Silahkan isi kolom jawaban yang dianggap paling sesuai dengan pernyataan menggunakan tanda centang (√).
3. Pedoman Penilaian:
   a. **Skor 1**, jika **tidak (sesuai/jelas/mudah)**
   b. **Skor 2**, jika **kurang (sesuai/jelas/mudah)**
   c. **Skor 3**, jika **sesuai (sesuai/jelas/mudah)**
   d. **Skor 4**, jika **sangat (sesuai/jelas/mudah)**
4. Jika diperlukan kritik dan saran, Bapak/Ibu dapat menulisnya pada lembar yang telah ditentukan.

D. Lembar Penilaian

No.	Butir Penilaian	Skala Penilaian			
		1	2	3	4
Indikator Kesesuaian Materi					
1.	Kelengkapan materi pada *e-module*				✓
2.	Kesesuaian materi dengan indikator				✓
3.	Sistematika penyajian materi runtut				✓
Indikator Keakuratan Materi					
4.	Keakuratan definisi dan teorema dari materi			✓	
5.	Penggunaan notasi dan simbol akurat				✓
6.	Kesesuaian gambar dan ilustrasi pada *e-module*				✓
7.	Konsep soal yang dibuat tidak menyimpang dari pembahasan			✓	
Indikator Kemutakhiran Materi					
8.	Materi yang disajikan sesuai dengan kurikulum yang berlaku				✓

E. Komentar dan Saran

Daftar isi harus diperbaiki
direvisi sesuai teori

F. KESIMPULAN

E-Module ini dinyatakan *:

1. Layak untuk diuji cobakan tanpa revisi.
2. Layak untuk diuji cobakan dengan revisi.
3. Tidak Layak diuji cobakan.

(*Mohon dilingkari pada nomor sesuai dengan kesimpulan bapak/ibu)

Validator,

Dr. Hasrul Rahman M. Si.

NIP: 19800429 200604 1 003.

Lampiran 7 Lembar Validasi Ahli Desain

INSTRUMEN VALIDASI AHLI DESAIN

Format Penilaian Ahli Desain Terhadap *E-Module*

Fakultas	:	Ilmu Tarbiyah dan Keguruan
Jurusan	:	Magister Pendidikan Matematika
Nama Bahan Ajar	:	*E-Module* Limit Barisan dan Visualisasinya
Penyusun	:	Nanda Mustagfirotul Ulya
Judul Tesis	:	Pengembangan *E-Module* Materi Limit Barisan Menggunakan GeoGebra untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Mahasiswa

A. Pengantar

Berkaitan dengan pelaksanaan pengembangan *e-module* materi limit barisan menggunakan GeoGebra untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa, maka peneliti bermaksud untuk mengadakan validasi terhadap *e-module* yang telah dibuat sebagai salah satu bahan ajar. Oleh karena itu, peneliti memohon kesediaan Bapak/Ibu untuk mengisi angket di bawah ini sebagai ahli desain. Tujuan dari pengisian angket ini adalah mengetahui kesesuaian pemanfaatan *e-module* yang dikembangkan sebagai pembelajaran materi limit barisan untuk mahasiswa yang sedang menempuh mata kuliah Analisis Real. Hasil pengukuran yang didapat melalui angket akan digunakan sebagai bahan penyempurnaan *e-module* agar dapat dimanfaatkan dalam pembelajaran. Sebelumnya, saya ucapkan terima kasih atas kesediaan Bapak/Ibu sebagai ahli desain.

B. Identitas Validator

Nama	:	DR. NUNIK JUNARA, MT
NIP	:	197104262005012005
Instansi	:	UIN MALANG
Pendidikan Terakhir	:	S3

C. Petunjuk

1. Sebelum mengisi angket, mohon Bapak/Ibu mengamati *e-module* dan membaca setiap item yang disediakan terlebih dahulu.
2. Instrumen ini terdiri dari kolom pernyataan dan kolom jawaban. Silahkan isi kolom jawaban yang dianggap paling sesuai dengan pernyataan menggunakan tanda centang (√).
3. Pedoman Penilaian:
   a. **Skor 1**, jika **tidak (sesuai/jelas/mudah)**
   b. **Skor 2**, jika **kurang (sesuai/jelas/mudah)**
   c. **Skor 3**, jika **sesuai (sesuai/jelas/mudah)**
   d. **Skor 4**, jika **sangat (sesuai/jelas/mudah)**
4. Jika diperlukan kritik dan saran, Bapak/Ibu dapat menulisnya pada lembar yang telah ditentukan.

D. Lembar Penilaian

No.	Butir Penilaian	Skala Penilaian			
		1	2	3	4
Indikator Format *E-Module*					
1.	Menggunakan format sesuai standar				✓
Indikator Tampilan					
2.	Sampul depan menarik				✓
Indikator Desain Bagian Isi					
3.	Menggunakan jenis dan ukuran *font* yang menarik				✓
4.	Kejelasan petunjuk yang digunakan				✓
5.	Ketepatan gambar dan ilustrasi dengan materi dan soal				✓
6.	Pemilihan gambar dan warna sesuai perkembangan mahasiswa			✓	
Indikator Tata Letak					
7.	Tata letak menarik bagi mahasiswa			✓	

Indikator Kesesuaian Komponen					
8.	Komponen *e-module* tersaji secara sistemais				✓

E. Komentar dan Saran

PENYERAGAMAN BEBERAPA POIN YANG MEMILIKI KESAMAAN PADA BACKGROUND, BAIK WARNA MAUPUN ORNAMENTASI

F. KESIMPULAN

E-Module ini dinyatakan *:

1. Layak untuk diuji cobakan tanpa revisi.
2. Layak untuk diuji cobakan dengan revisi.
3. Tidak Layak diuji cobakan.

(*Mohon dilingkari pada nomor sesuai dengan kesimpulan bapak/ibu)

Validator,

DR. NUNIK JUNARA, MT

NIP: 197104262005012005

Lampiran 8 Lembar Validasi Ahli Pembelajaran

INSTRUMEN VALIDASI AHLI PEMBELAJARAN

Format Penilaian Ahli Pembelajaran Terhadap *E-Module*

Fakultas	:	Ilmu Tarbiyah dan Keguruan
Jurusan	:	Magister Pendidikan Matematika
Nama Bahan Ajar	:	*E-module* Limit Barisan dan Visualisasinya
Penyusun	:	Nanda Mustagfirotul Ulya
Judul Tesis	:	Pengembangan *E-Module* Materi Limit Barisan Menggunakan GeoGebra untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Mahasiswa

A. Pengantar

Berkaitan dengan pelaksanaan pengembangan *e-module* materi limit barisan menggunakan GeoGebra untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa, maka peneliti bermaksud untuk mengadakan validasi terhadap *e-module* yang telah dibuat sebagai salah satu bahan ajar. Oleh karena itu, peneliti memohon kesediaan Bapak/Ibu untuk mengisi angket di bawah ini sebagai ahli pembelajaran. Tujuan dari pengisian angket ini adalah mengetahui kesesuaian pemanfaatan *e-module* yang dikembangkan sebagai pembelajaran materi limit barisan untuk mahasiswa yang sedang menempuh mata kuliah Analisis Real. Hasil pengukuran yang didapat melalui angket akan digunakan sebagai bahan penyempurnaan *e-module* agar dapat dimanfaatkan dalam pembelajaran. Sebelumnya, saya ucapkan terima kasih atas kesediaan Bapak/Ibu sebagai ahli pembelajaran.

B. Identitas Validator

Nama	: Dr. MARHAYATI, M.PMat
NIP	: 197710262003122003
Instansi	: UIN MALANG
Pendidikan Terakhir	: S3 PENDIDIKAN MATEMATIKA

C. Petunjuk

1. Sebelum mengisi angket, mohon Bapak/Ibu mengamati *e-module* dan membaca setiap item yang disediakan terlebih dahulu.
2. Instrumen ini terdiri dari kolom pernyataan dan kolom jawaban. Silahkan isi kolom jawaban yang dianggap paling sesuai dengan pernyataan menggunakan tanda centang (√).
3. Pedoman Penilaian:
   a. **Skor 1**, jika **tidak (sesuai/jelas/mudah)**
   b. **Skor 2**, jika **kurang (sesuai/jelas/mudah)**
   c. **Skor 3**, jika **sesuai (sesuai/jelas/mudah)**
   d. **Skor 4**, jika **sangat (sesuai/jelas/mudah)**
4. Jika diperlukan kritik dan saran, Bapak/Ibu dapat menulisnya pada lembar yang telah ditentukan.

D. Lembar Penilaian

No.	Butir Penilaian	Skala Penilaian			
		1	2	3	4
Indikator Kesesuaian dengan Indikator					
1.	Relevansi materi yang disajikan dengan indiktor pencapaian				✓
Indikator Penyajian Pembelajaran					
2.	Materi yang disampaikan sesuai dengan perkembangan siswa			✓	
3.	Konsep materi disajikan secara runtut			✓	
Indikator Penyusunan Materi					
4.	Komponen-komponen pada tiap kegiatan belajar tersusun secara konsisten, runtut, dan sistematis			✓	
Indikator Kesesuaian Contoh dengan Pembahasan					
5.	Butir soal dapat digunakan untuk mengukur pecapaian			✓	
6.	Contoh soal sesuai dengan materi			✓	

Indikator Kesesuaian Contoh Masalah untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep					
7.	Ketepatan pembahasan contoh soal dan latihan			✓	

E. Komentar dan Saran

Perbaiki sesuai dengan saran yang terdapat dalam naskah soal.

F. KESIMPULAN

E-Module ini dinyatakan *:

1. Layak untuk diuji cobakan tanpa revisi.
2. Layak untuk diuji cobakan dengan revisi.
3. Tidak Layak diuji cobakan.

(*Mohon dilingkari pada nomor sesuai dengan kesimpulan bapak/ibu)

Validator,

Dr. Mathayati, M.PMat

NIP: 197710262003122003

Lampiran 9 Lembar Validasi Ahli Bahasa

INSTRUMEN VALIDASI AHLI BAHASA

Format Penilaian Ahli Bahasa Terhadap *E-Module*

Fakultas	:	Ilmu Tarbiyah dan Keguruan
Jurusan	:	Magister Pendidikan Matematika
Nama Bahan Ajar	:	*E-module* Limit Barisan dan Visualisasinya
Penyusun	:	Nanda Mustagfirotul Ulya
Judul Tesis	:	Pengembangan *E-Module* Materi Limit Barisan Menggunakan GeoGebra untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Mahasiswa

A. Pengantar

Berkaitan dengan pelaksanaan pengembangan *e-module* materi limit barisan menggunakan GeoGebra untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa, maka peneliti bermaksud untuk mengadakan validasi terhadap *e-module* yang telah dibuat sebagai salah satu bahan ajar. Oleh karena itu, peneliti memohon kesediaan Bapak/Ibu untuk mengisi angket di bawah ini sebagai ahli bahasa. Tujuan dari pengisian angket ini adalah mengetahui kesesuaian pemanfaatan *e-module* yang dikembangkan sebagai pembelajaran materi limit barisan untuk mahasiswa yang sedang menempuh mata kuliah Analisis Real. Hasil pengukuran yang didapat melalui angket akan digunakan sebagai bahan penyempurnaan *e-module* agar dapat dimanfaatkan dalam pembelajaran. Sebelumnya, saya ucapkan terima kasih atas kesediaan Bapak/Ibu sebagai ahli bahasa.

B. Identitas Validator

Nama	:	Dr. Mohamad Jufri Wurul Yagin, MPd
NIP	:	197402282008011003
Instansi	:	UIN Malang
Pendidikan Terakhir	:	S3 Pendidikan Bahasa Indonesia.

C. Petunjuk

1. Sebelum mengisi angket, mohon Bapak/Ibu mengamati *e-module* dan membaca setiap item yang disediakan terlebih dahulu.
2. Instrumen ini terdiri dari kolom pernyataan dan kolom jawaban. Silahkan isi kolom jawaban yang dianggap paling sesuai dengan pernyataan menggunakan tanda centang (√).
3. Pedoman Penilaian:
   a. **Skor 1**, jika **tidak (sesuai/jelas/mudah)**
   b. **Skor 2**, jika **kurang (sesuai/jelas/mudah)**
   c. **Skor 3**, jika **sesuai (sesuai/jelas/mudah)**
   d. **Skor 4**, jika **sangat (sesuai/jelas/mudah)**
4. Jika diperlukan kritik dan saran, Bapak/Ibu dapat menulisnya pada lembar yang telah ditentukan.

D. Lembar Penilaian

No.	Butir Penilaian	Skala Penilaian			
		1	2	3	4
Indikator Kelugasan Bahasa yang Digunakan					
1.	Menggunakan struktur kalimat yang tepat			✓	
2.	Menggunakan kalimat yang efektif			✓	
3.	Menggunakan bahasa dan istilah yang baku			✓	
Indikator Bahasa yang Komunikatif					
4.	Menggunakan bahasa yang komunikatif				✓
5.	Menggunakan bahasa yang interaktif				✓
Indikator Kesesuaian Bahasa dengan Perkembangan Mahasiswa					
6.	Menggunakan bahasa yang sesuai dengan tingkat perkembangan intelektual mahasiswa				✓
7.	Menggunakan bahasa yang sesuai dengan tingkat perkembangan sosial mahasiswa			✓	

Indikator Kesesuaian Bahasa dengan KBBI					
8.	Menggunakan bahasa yang sesuai dengan kaidah bahasa Indonesia			✓	
Indikator Kesesuaian Penggunaan Istilah, Simbol, dan *Icon*					
9.	Menggunakan istilah, simbol, dan *icon* yang tepat, mudah, dan konsisten				✓

E. Komentar dan Saran

- Huruf terlalu kecil, keterbacaan perlu diperhatikan
- Ada beberapa kesalahan kecil dalam penulisan kata, kalimat

F. KESIMPULAN

E-Module ini dinyatakan *:

1. Layak untuk diuji cobakan tanpa revisi.
2. Layak untuk diuji cobakan dengan revisi.
3. Tidak Layak diuji cobakan.

(*Mohon dilingkari pada nomor sesuai dengan kesimpulan bapak/ibu)

Validator,

M. Fuad Nurul Fajri

NIP: 197402282008011003

Lampiran 10 Lembar Validasi Ahli Teknologi

INSTRUMEN VALIDASI AHLI TEKNOLOGI

Format Penilaian Ahli Teknologi Terhadap *E-Module*

Fakultas	:	Ilmu Tarbiyah dan Keguruan
Jurusan	:	Magister Pendidikan Matematika
Nama Bahan Ajar	:	*E-Module* Limit Barisan dan Visualisasinya
Penyusun	:	Nanda Mustagfirotul Ulya
Judul Tesis	:	Pengembangan *E-Module* Materi Limit Barisan Menggunakan GeoGebra untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Mahasiswa

A. Pengantar

Berkaitan dengan pelaksanaan pengembangan *e-module* materi limit barisan menggunakan GeoGebra untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa, maka peneliti bermaksud untuk mengadakan validasi terhadap *e-module* yang telah dibuat sebagai salah satu bahan ajar. Oleh karena itu, peneliti memohon kesediaan Bapak/Ibu untuk mengisi angket di bawah ini sebagai ahli materi. Tujuan dari pengisian angket ini adalah mengetahui kesesuaian pemanfaatan *e-module* yang dikembangkan sebagai pembelajaran materi limit barisan untuk mahasiswa yang sedang menempuh mata kuliah Analisis Real. Hasil pengukuran yang didapat melalui angket akan digunakan sebagai bahan penyempurnaan *e-module* agar dapat dimanfaatkan dalam pembelajaran. Sebelumnya, saya ucapkan terima kasih atas kesediaan Bapak/Ibu sebagai ahli materi.

B. Identitas Validator

Nama	:	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
NIP	:	19870218 201608011056
Instansi	:	UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
Pendidikan Terakhir	:	Magister Matematika

C. Petunjuk

1. Sebelum mengisi angket, mohon Bapak/Ibu mengamati e-module dan membaca setiap item yang disediakan terlebih dahulu.
2. Instrumen ini terdiri dari kolom pernyataan dan kolom jawaban. Silahkan isi kolom jawaban yang dianggap paling sesuai dengan pernyataan menggunakan tanda centang (√).
3. Pedoman Penilaian:
   a. **Skor 1**, jika **tidak (sesuai/jelas/mudah)**
   b. **Skor 2**, jika **kurang (sesuai/jelas/mudah)**
   c. **Skor 3**, jika **sesuai (sesuai/jelas/mudah)**
   d. **Skor 4**, jika **sangat (sesuai/jelas/mudah)**
4. Jika diperlukan kritik dan saran, Bapak/Ibu dapat menulisnya pada lembar yang telah ditentukan.

D. Lembar Penilaian

No.	Butir Penilaian	Skala Penilaian			
		1	2	3	4
Indikator Aplikasi yang Digunakan					
1.	Kesesuaian dalam penentuan aplikasi yang digunakan				✓
Indikator Kesesuaian Visualisasi dengan Materi					
2.	Kesesuaian visualisasi GeoGebra pada sub-bab 1			✓	
3.	Kesesuaian visualisasi GeoGebra pada sub-bab 2				✓
4.	Kesesuaian visualisasi GeoGebra pada sub-bab 3				✓
5.	Kesesuaian visualisasi GeoGebra pada sub-bab 4			✓	
6.	Kesesuaian visualisasi GeoGebra pada sub-bab 5			✓	
7.	Kesesuaian visualisasi GeoGebra pada sub-bab 6				✓

E. Komentar dan Saran

.....

.....

.....

.....

.....

F. KESIMPULAN

E-Module ini dinyatakan *:

1. Layak untuk diuji cobakan tanpa revisi.
2. Layak untuk diuji cobakan dengan revisi.
3. Tidak Layak diuji cobakan.

(*Mohon dilingkari pada nomor sesuai dengan kesimpulan bapak/ibu)

Validator,

Mohammad Wafie Jauhari, M.Si

NIP: 19870218 20160801 1056

Lampiran 11 Kisi-Kisi Instrumen Tes Pemahaman Konsep

Tabel Kisi-Kisi Instrumen Tes Pemahaman Konsep

No.	Indikator Pemahaman Konsep	Kemampuan Akhir	Materi	Indikator	No Soal
1.	Menyatakan ulang suatu konsep yang telah dipelajari	Mampu menyatakan ulang konsep limit barisan	Limit Barisan	Diberikan suatu barisan, mahasiswa dapat membuktikan bahwa barisan tersebut konvergen ke suatu bilangan.	1
2.	Mengklarifikasi suatu objek berdasarkan sifat yang dipenuhi	Mampu menentukan barisan yang konvergen			
3.	Memberikan contoh atau non contoh dari konsep yang dipelajari	Mampu membuktikan barisan yang konvergen dan tidak konvergen	Limit Barisan	Diberikan suatu barisan, mahasiswa dapat membuktikan bahwa barisan tersebut tidak konvergen ke suatu bilangan.	2
4.	Menyajikan suatu konsep dalam berbagai bentuk matematis	Mampu menjelaskan kembali konsep limit barisan dalam proses pembuktian			
5.	Mengembangkan syarat cukup dan syarat perlu suatu konsep	Mampu mengetahui syarat cukup dan syarat perlu dalam proses pembuktian limit barisan			
6.	Menggunakan dan mengaitkan berbagai konsep penyelesaian	Mampu menggunakan langkah tepat dalam memisalkan, memasukkan syarat dalam proses pembuktian	Limit Barisan	Diberikan permasalahan tentang limit barisan, mahasiswa dapat membuktikan bahwa permasalahan tersebut terpenuhi atau tidak beserta contohnya.	3
7.	Menerapkan konsep secara algoritma	Mampu menerapkan konsep limit barisan dalam proses pembuktian			

Lampiran 12 Instrumen Tes Soal Pemahaman Konsep

Naskah Soal Instrumen Tes Pemahaman Konsep

Nama : ……

NIM : ……

Mata Kuliah : ……

Jawablah soal-soal berikut dengan benar dan jujur!

1. Buktikan bahwa barisan-barisan berikut konvergen ke-0.
   a. $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$
   b. $\left(\frac{1}{\sqrt{n+7}}\right)$
2. Buktikan bahwa barisan-barisan berikut tidak konvergen.
   a. $((-1)^n)$
   b. $((-1)^{2n-1})$
3. Buktikan bahwa $\lim(x_n) = 0$ jika dan hanya jika $\lim(|x_n|) = 0$ dan berikan contoh untuk menunjukkan bahwa kekonvergenan dari $(|x_n|)$ tidak mengakibatkan konvergenan dari (x_n).

Lampiran 13 Kunci Jawaban Tes Pemahaman Konsep

Soal	Jawaban
1. Buktikan bahwa barisan-barisan berikut konvergen ke-0. a. $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$ b. $\left(\frac{1}{\sqrt{n+7}}\right)$	**1a) Pembuktian:** Jika diberikan $\varepsilon > 0$ maka $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ Jika terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ maka $\frac{1}{\varepsilon} < K(\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$ Jika $n \geq K(\varepsilon)$ untuk $n \in \mathbb{N}$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)}$ Sehingga $\left\|\frac{1}{n^2+1} - 0\right\| = \left\|\frac{1}{n^2+1}\right\| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$ Terbukti bahwa $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$ konvergen ke 0. **1b) Pembuktian:** Jika diberikan $\varepsilon > 0$ maka $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ Jika terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ maka $\frac{1}{\varepsilon} < K(\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$ Jika $n \geq K(\varepsilon)$ untuk $n \in \mathbb{N}$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)}$ Sehingga $\left\|\frac{1}{\sqrt{n+7}} - 0\right\| = \left\|\frac{1}{\sqrt{n+7}}\right\| = \frac{1}{\sqrt{n+7}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$ Terbukti bahwa $\left(\frac{1}{\sqrt{n+7}}\right)$ konvergen ke 0.
2. Buktikan bahwa barisan-barisan berikut tidak konvergen. a. $((-1)^n)$ b. $((-1)^{2n-1})$	**2a)** Akan dibuktikan barisan $((-1)^n)$ tidak konvergen. Andaikan barisan tersebut konvergen. Misal $\lim((-1)^n) = a$ Ambil $\varepsilon = 1$, maka terdapat bilangan asli $n \in \mathbb{N}$ dan $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku

	$\|(-1)^n - a\| < 1$ Untuk n ganjil maka $(-1)^n = -1$ sehingga diperoleh $\|(-1)^n - a\| = \|-1 - a\| < 1$ $\Leftrightarrow -2 < a < 0$ Untuk n genap maka $(-1)^n = 1$ sehingga diperoleh $\|(-1)^n - a\| = \|1 - a\| < 1$ $\Leftrightarrow 0 < a < 2$ Dua pernyataan tersebut kontradiksi, maka pengandaian salah. Jadi terbukti bahwa barisan $((-1)^n)$ tidak konvergen. **2b)** Akan dibuktikan barisan $((-1)^{2n-1})$ tidak konvergen. Andaikan barisan tersebut konvergen. Misal $\lim((-1)^{2n-1}) = b$ Ambil $\varepsilon = 1$, maka terdapat bilangan asli $n \in \mathbb{N}$ dan $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\|(-1)^{2n-1} - b\| < 1$ Untuk sembarang n, maka $(-1)^{2n-1} = -1$ sehingga diperoleh $\|(-1)^{2n-1} - a\| = \|-1 - a\| < 1$ $-2 < a < 0$ Pernyataan tersebut kontradiksi, maka pengandaian salah. Jadi terbukti bahwa barisan $((-1)^{2n-1})$ tidak konvergen.
3. Buktikan bahwa $\lim(x_n) = 0$ jika dan hanya jika $\lim(\|x_n\|) = 0$ dan berikan contoh yang menunjukkan bahwa kekonvergenan dari $(\|x_n\|)$ tidak mengakibatkan konvergenan dari (x_n).	**Pembuktian:** Akan dibuktikan bahwa $\lim(x_n) = 0 \Leftrightarrow \lim(\|x_n\|) = 0$ $(\Rightarrow)$ Misalkan $\lim(x_n) = 0$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ diperoleh $\|x_n - 0\| < \varepsilon$ Artinya $\big\|\|x_n\| - 0\big\| = \|x_n\| = \|x_n - 0\| < \varepsilon$ Sehingga $\lim(\|x_n\|) = 0$. $(\Leftarrow)$ Misalkan $\lim(\|x_n\|) = 0$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ diperoleh $\|x_n - 0\| = \big\|\|x_n\| - 0\big\| < \varepsilon$ Sehingga $\lim(x_n) = 0$. Contoh: $\left(\frac{(-1)^n n}{n+1}\right)$

Lampiran 14 Lembar Validasi Instrumen Tes (Validator 1)

LEMBAR VALIDASI INSTRUMEN TES (*PRE-TEST* DAN *POST-TEST*)

Mata Kuliah	:	Analisis Real
Materi Pokok	:	Limit Barisan
Jenjang	:	Mahasiswa
Sasaran	:	Mahasiswa yang sedang menempuh mata kuliah
	:	Analisis Real
Penyususn	:	Nanda Mustagfirotul Ulya

A. Identitas Validator

Nama : Dr. Hairur Rahman, M. Si

NIP : 19800429 200604 1003

Instansi : F. Saintek UIN Malang

Pendidikan Terakhir : S3

B. Petunjuk

1. Sebelum mengisi angket, mohon Bapak/Ibu membaca lembar soal terlampir terlebih dahulu.
2. Instrumen ini terdiri dari kolom pernyataan dan kolom jawaban. Silahkan isi kolom jawaban yang dianggap paling sesuai dengan pernyataan menggunakan tanda centang (√).
3. Pedoman Penilaian:
   a. **Skor 1**, jika **tidak (sesuai/jelas/mudah)**
   b. **Skor 2**, jika **kurang (sesuai/jelas/mudah)**
   c. **Skor 3**, jika **sesuai (sesuai/jelas/mudah)**
   d. **Skor 4**, jika **sangat (sesuai/jelas/mudah)**
4. Jika diperlukan kritik dan saran, Bapak/Ibu dapat menulisnya pada lembar yang telah ditentukan.

C. Lembar Penilaian

No.	Butir Penilaian	Skala Penilaian			
		1	2	3	4
1.	Relevansi soal dengan indikator				√

2.	Soal dapat mewakili konten materi dalam *e-module*				✓
3.	Level soal yang digunakan sudah memenuhi indikator				✓
4.	Petunjuk pengerjaan soal jelas				✓
5.	Pertanyaan pada soal menggunakan bahasa yang mudah dipahami				✓
6.	Jawaban dari pertanyaan yang disajikan sudah sesuai dengan konsep dan teori			✓	
7.	Rumusan kalimat tidak menimbulkan penafsiran ganda			✓	

D. *Komentar dan Saran*

.....

.....

.....

.....

.....

E. KESIMPULAN

E-Module ini dinyatakan *:

1. Layak untuk diuji cobakan tanpa revisi.
2. Layak untuk diuji cobakan dengan revisi.
3. Tidak Layak diuji cobakan.

(*Mohon dilingkari pada nomor sesuai dengan kesimpulan bapak/ibu)

Validator,

.....

NIP: 19800929 200604 1003

Lampiran 15 Lembar Validasi Instrumen Tes (Validator 2)

LEMBAR VALIDASI INSTRUMEN TES (*PRE-TEST* DAN *POST-TEST*)

Mata Kuliah	:	Analisis Real
Materi Pokok	:	Limit Barisan
Jenjang	:	Mahasiswa
Sasaran	:	Mahasiswa yang sedang menempuh mata kuliah
	:	Analisis Real
Penyususn	:	Nanda Mustagfirotul Ulya

A. Identitas Validator

Nama : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

NIP : 19870218 20160801 1056

Instansi : UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Pendidikan Terakhir : Magister Matematika

B. Petunjuk

1. Sebelum mengisi angket, mohon Bapak/Ibu membaca lembar soal terlampir terlebih dahulu.
2. Instrumen ini terdiri dari kolom pernyataan dan kolom jawaban. Silahkan isi kolom jawaban yang dianggap paling sesuai dengan pernyataan menggunakan tanda centang (√).
3. Pedoman Penilaian:
   a. **Skor 1**, jika **tidak (sesuai/jelas/mudah)**
   b. **Skor 2**, jika **kurang (sesuai/jelas/mudah)**
   c. **Skor 3**, jika **sesuai (sesuai/jelas/mudah)**
   d. **Skor 4**, jika **sangat (sesuai/jelas/mudah)**
4. Jika diperlukan kritik dan saran, Bapak/Ibu dapat menulisnya pada lembar yang telah ditentukan.

C. Lembar Penilaian

No.	Butir Penilaian	Skala Penilaian			
		1	2	3	4
1.	Relevansi soal dengan indikator				✓

2.	Soal dapat mewakili konten materi dalam *e-module*				✓
3.	Level soal yang digunakan sudah memenuhi indikator				✓
4.	Petunjuk pengerjaan soal jelas			✓	
5.	Pertanyaan pada soal menggunakan bahasa yang mudah dipahami				✓
6.	Jawaban dari pertanyaan yang disajikan sudah sesuai dengan konsep dan teori			✓	
7.	Rumusan kalimat tidak menimbulkan penafsiran ganda				✓

D. Komentar dan Saran

.....

.....

.....

.....

.....

E. KESIMPULAN

E-Module ini dinyatakan *:

1. Layak untuk diuji cobakan tanpa revisi.
2. Layak untuk diuji cobakan dengan revisi.
3. Tidak Layak diuji cobakan.

(*Mohon dilingkari pada nomor sesuai dengan kesimpulan bapak/ibu)

Validator,

Mohammad Hafie Jauhari, M.Si

NIP: 19870218 20160801 1056

Lampiran 16 Dokumentasi Pelaksanaan Penelitian

Lampiran 17 Surat Keterangan Pelaksanaan Penelitian

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
PROGRAM STUDI MATEMATIKA
Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp. / Fax. (0341) 558933
Website : www.matematika.uin-malang.ac.id, e-mail : matematika@uin-malang.ac.id

SURAT KETERANGAN PENELITIAN
Nomor : B-191/MAT/OT.01.06/12/2022

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP	: 19741129 200012 2 005
Jabatan	: Ketua Program Studi Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Dengan ini menyatakan bahwa:

Nama	: Nanda Mustagfirotul Ulya
NIM	: 200108210004
Program Studi	: Magister Pendidikan Matematika
Fakultas	: Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Benar-benar mahasiswa tersebut di atas telah melaksanakan penelitian selama bulan September s.d November 2022, berkaitan dengan kebutuhan data tesis yang berjudul "Pengembangan *E-Module* Materi Limit Barisan Menggunakan GeoGebra untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Mahasiswa"

Demikian surat keterangan penelitian ini dibuat untuk dipergunakan sebagaimana mestinya.

Malang, 15 Desember 2022
Ketua Program Studi

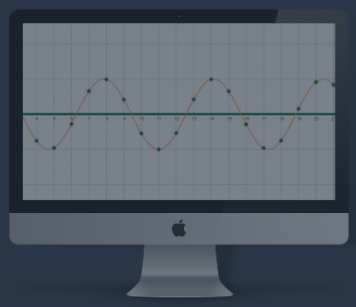
Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

Lampiran 18 Naskah *E-Module*

E-module

Limit Barisan

& Visualisasinya



Klik Disini

Untuk Membuka *E-Module*

E-module Untuk Mahasiswa Matematika

Penulis : Nanda Mustagfirotul Ulya
Pengantar : Dr. Elly Susanti, M.Sc
Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

PETUNJUK NAVIGASI

Terdapat beberapa petunjuk navigasi dalam penggunaan *e-module* ini sebagai berikut.

- Kamu dapat menggeser ke kiri untuk menuju halaman selanjutnya.

- Kamu dapat menggeser ke kanan untuk menuju halaman sebelumnya.

- Kamu dapat memperbesar dan memperkecil *e-module* sesuai kebutuhan.
- Pada halaman daftar isi, judul bab dapat diklik untuk menuju halaman bab tersebut. Hal itu juga berlaku untuk semua yang tertera pada daftar isi.
- Pada setiap halaman terdapat "*list icon*" di pojok kanan atas. jika diklik, maka kamu akan menuju ke halaman daftar isi.

- Untuk penggunaan visualisasi GeoGebra pada setiap bab, ada beberapa petunjuk penggunaan yang dapat kamu lihat pada petunjuk penggunaan GeoGebra di bawah ini.

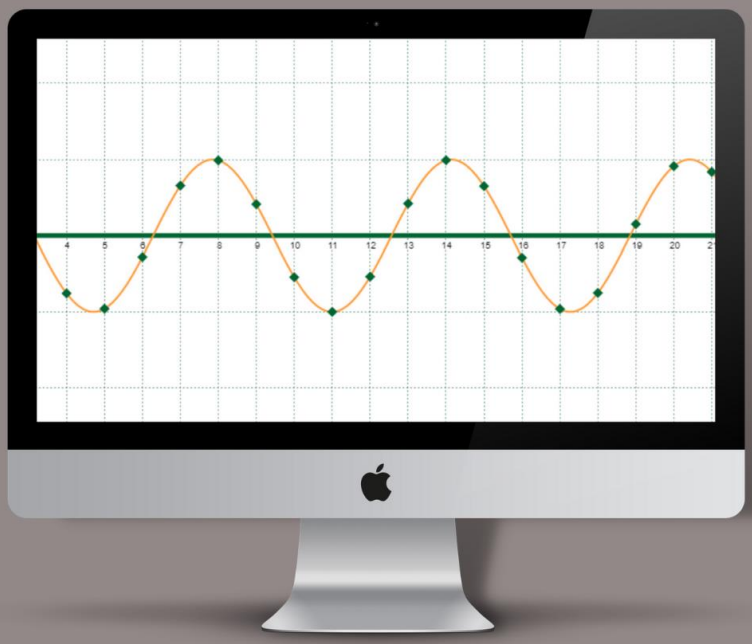
Petunjuk Penggunaan GeoGebra

- Tunggu loading GeoGebra di bawah.
- Klik pada *text box* (yang berisikan sin(n)).
- Klik *On Screen Keyboard* di bagian pojok kiri bawah, dan masukkan barisan (Xn).
- Tekan tombol *Enter* untuk memperbarui grafik.
- Centang bagian *check box* "**SIMULASI**" untuk memperbarui kurva.

E-module

Limit Barisan & Visualisasinya

I'll get A+



E-module Untuk Mahasiswa Matematika

Penulis : Nanda Mustagfirotul Ulya
Pengantar : Dr. Elly Susanti, M.Sc
Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

Geser ke-kiri

I'll get A+

E-module

Limit Barisan & Visualisasinya

Geser ke-kiri

E-module

Limit Barisan & Visualisasinya

Dalam mempelajari *e-module* ini akan diperoleh:

- Penjelasan tentang materi Limit Barisan yang dibutuhkan oleh mahasiswa yang sedang menempuh mata kuliah Analisi Real.
- *E-module* yang dapat dipelajari secara mandiri oleh mahasiswa dengan atau tanpa dosen mengenai materi Limit Barisan.
- Fasilitas yang mempermudah mahasiswa dalam memahami materi Limit Barisan dengan bantuan aplikasi GeoGebra.
- Peningkatan pemahaman konsep mahasiswa melalui sesuai indikator yang dituju.
- Media yang praktis dan efektif dalam memvisualisasikan materi Limit Barisan.

Geser ke-kiri

E-module

Limit Barisan dan Visualisasinya

Untuk Mahasiswa yang sedang menempuh Mata Kuliah Analisis Real

Penulis : Nanda Mustagfirotul Ulya
Pengantar : Dr. Elly Susanti, M.Sc
Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd
Desain Cover : M Ilman Fauzi
Layouter : Nanda Mustagfirotul Ulya
Edisi ke-1 : November 2022

Dilarang mengutip sebagian atau seluruh isi *e-module* ini dengan cara apapun, termasuk dengan cara penggunaan mesin fotocopy tanpa izin sah dari penulis.

Geser ke-kiri

Pengantar Penulis

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT. Atas berkat-Nya penulis mampu menyusun *e-module* Limit Barisan dan Visualisasinya dengan bantuan GeoGebra untuk mahasiswa matematika ini.

E-module ini disusun pada tahun 2022 melalui program pengembangan media pembelajaran dalam penelitian tesis penulis. Tujuan dari *e-module* ini adalah untuk meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa terkait materi Limit Barisan dan visualisasinya dengan bantuan GeoGebra. Selain itu, diharapkan *e-module* ini mampu memberikan efek peningkatan media pembelajaran dan kualitas belajar mandiri mahasiswa.

Setelah mahasiswa mempelajari *e-module* ini, diharapkan mampu memperoleh pemahaman terkait Limit Barisan dan memvisualisasikannya dengan bantuan GeoGebra.

Penulis

Nanda Mustagfirotul Ulya

Geser ke-kiri

Pengantar Ahli

Alhamdulillah, segala puji bagi kehadirat Allah Swt. Atas berkah dan rahmat-Nya penulis mampu menyelesaikan *e-module* Limit Barisan dan Visualisasinya dengan bantuan GeoGebra ini.

E-module ini disusun untuk memenuhi kebutuhan mahasiswa dalam meningkatkan pemahaman konsep materi limit barisan. Dengan bantuan aplikasi GeoGebra, penyajian materi pada e-module yang dikembangkan ini memuat animasi dan visualisasi materi limit barisan. Kelebihan e-module ini diharapkan mampu memvisulisasikan materi limit barisan yang dinilai abstrak. Penyajian desain e-module disesuaikan dengan pengguna dengan desain yang modern seperti jenis tulisan, pemilihan warna, navigasi, dll. Pembahasan yang disampaikan pun disertai dengan contoh soal dan evaluasi yang dapat digunakan untuk mengukur tingkat ketercapaian dan ketuntasan secara mandiri oleh pengguna.

Penyempurnaan maupun perubahan e-modul di masa mendatang senantiasa terbuka dan dimungkinkan mengingat akan perkembangan situasi dan teknologi yang terus menerus terjadi. Harapan kami tidak lain modul ini dapat memberikan manfaat.

Pengantar Ahli

Dr. Elly Susanti, M.Sc

Geser ke-kiri

Pengantar Ahli

Pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulispengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis.

Pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengan-tar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulispengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis pengantar penulis.

Pengantar Ahli
Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

Geser ke-kiri

Daftar Isi

PENGANTAR PENULIS v
PENGANTAR AHLI vi
DAFTAR ISI viii

PETUNJUK PENGGUNAAN MODUL ix
- Latar Belakang x
- Deskripsi Singkat x
INDIKATOR xi

LIMIT BARISAN xii
PETA KONSEP xiii
1. Barisan dan Limit-Limitnya 1
2. Teorema-Teorema Limit 10
3. Barisan Monoton 18
4. Sub-Barisan dan Teorema Balzano-Weierstrass 23
5. Kriteria Cauchy 29
6. Barisan-Barisan Divergen Murni 34

RANGKUMAN
PENUTUP
KUNCI JAWABAN
CATATAN
DAFTAR PUSTAKA

Geser ke-kiri

Petunjuk Penggunaan

1. *E-module* ini diancang untuk memfasilitasi mahasiswa dalam belajar secara mandiri.
2. Mahasiswa diharapkan untuk berdoa sebelum memulai belajar.
3. Pada kegiatan belajar dilengkapi dengan uraian materi beserta contohnya.
4. Mahasiswa diharapkan mempelajari setiap uraian materi dan dilanjutkan dengan mengerjakan soal latihan.
5. Contoh berisikan soal dan penyelesaian untuk memudahkan mahasiswa dalam menyelesaikan soal pada latihan mandiri.
6. Latihan Mandiri memuat soal untuk dikerjakan oleh mahasiswa untuk mengetahui sejauh mana siswa memahami materi yang dipelajari.
7. Mahasiswa diberikan kesempatan untuk mempelajari suatu materi kemudian mengamati bentuk visualisasi dari materi tersebut.
8. Jika menemui kesulitan dalam mengerjakan latihan, diskusikanlah dengan teman!
9. Selesaikan latihan mandiri dengan jujur!
10. Keberhasilan proses pembelajaran menggunaan *e-module* ini tergantung pada kesungguhan mahasiswa dalam belajar.
11. Mulailah belajar dengan sungguh-sungguh dan berlatih secara mandri atau berdiskusi dengan teman!
12. Pada setiap Bab terdapat soal Evaluasi yang harus diselesaikan. Perhatikan skornya. Apabila mendapatkan nilai lebih dari 60, mahasiswa dapat melanjutkan ke kegiatan belajar atau bab selanjutnya. Apabila mendapatkan nilai kurang dari 60, mahasiswa harus mengulangi kegiatan belajar atau bab ini kembali, terutama pada bagian yang belum dikuasai.

Geser ke-kiri

LATAR BELAKANG

E-module ini diharapkan mampu meningkatkan pemahaman konsep mahasiswa sehingga menjadikan *e-module* ini suatu media pembelajaran yang tepat digunakan oleh mahasiswa tanpa pantauan dosen pengampu mata kuliah.

DESKRIPSI SINGKAT

E-module ini akan membahas materi tentang

1. Barisan dan Limitnya
2. Teorema Limit
3. Barisan Monoton
4. Sub-barisan dan Teorema *Bolzano-Weierstrass*
5. Kriteria *Cauchy*
6. Barisan DIvergen Murni

Geser ke-kiri

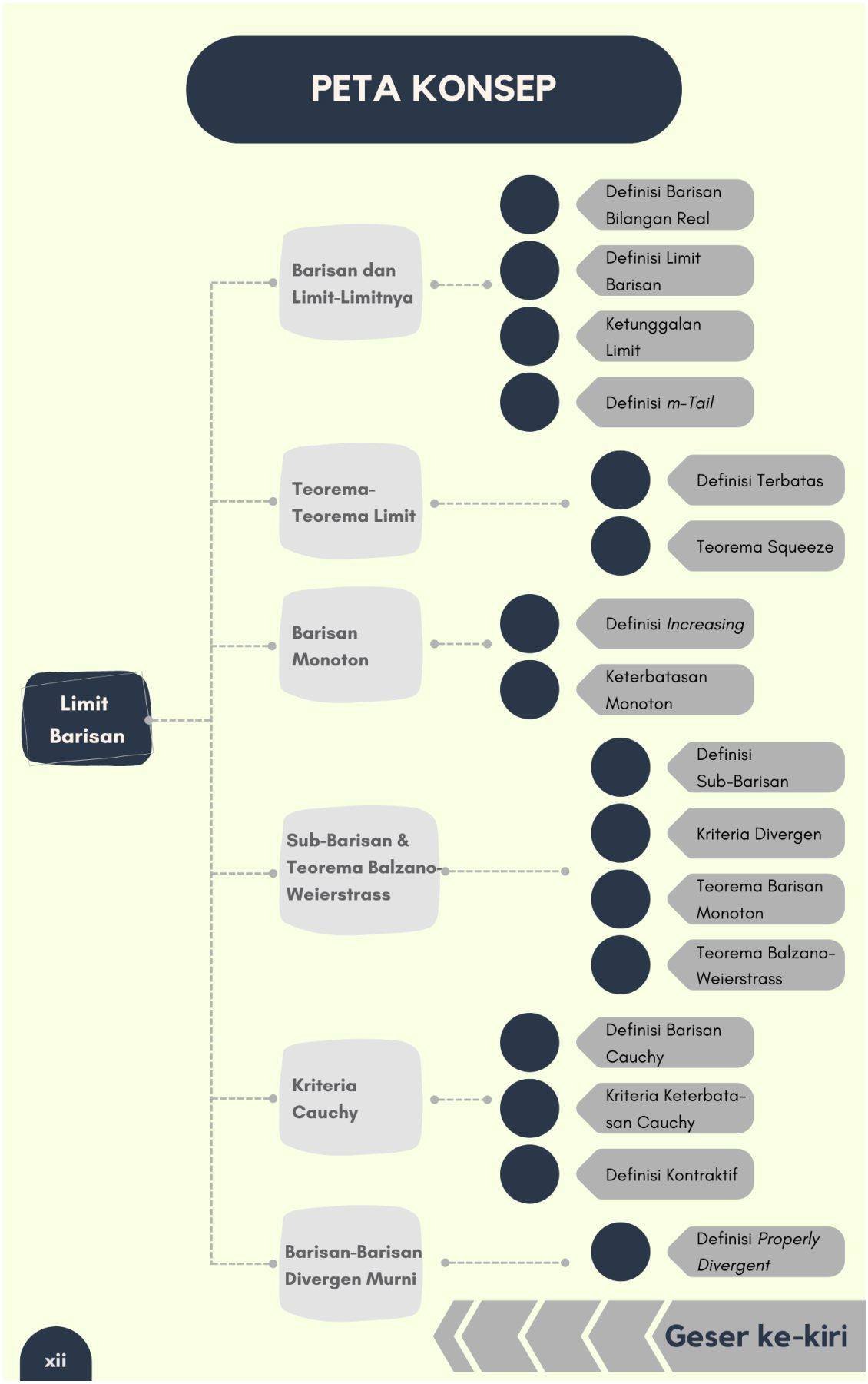
CPMK

Mahasiswa mampu menerapkan sistem bilangan real, barisan bilangan real, kekonvergenan barisan bilangan real dalam menyelesaikan permasalahan-permasalahan matematika.

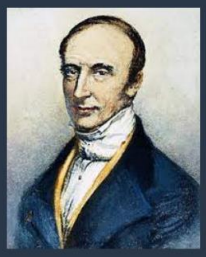
Indikator

1. Mampu menyatakan ulang konsep limit barisan.
2. Mampu menentukan barisan yang konvergen dan barisan yang tidak konvergen.
3. Mampu membuktikan dengan definisi barisan yang konvergen dan barisan yang tidak konvergen.
4. Mampu menjelaskan kembali konsep limit barisan dalam proses pembuktian.
5. Mampu memahami syarat cukup dan syarat perlu dalam proses pembuktian limit barisan.
6. Mampu menggunakan langkah tepat dalam memisalkan dan mengaplikasikan syarat dalam proses pembuktian.
7. Mampu menerapkan konsep limit barisan dalam proses pembuktian.

Geser ke-kiri


PETA KONSEP
Limit Barisan
Barisan dan Limit-Limitnya
Definisi Barisan Bilangan Real
Definisi Limit Barisan
Ketunggalan Limit
Definisi m-Tail
Teorema-Teorema Limit
Definisi Terbatas
Teorema Squeeze
Barisan Monoton
Definisi Increasing
Keterbatasan Monoton
Sub-Barisan & Teorema Balzano-Weierstrass
Definisi Sub-Barisan
Kriteria Divergen
Teorema Barisan Monoton
Teorema Balzano-Weierstrass
Kriteria Cauchy
Definisi Barisan Cauchy
Kriteria Keterbata-san Cauchy
Definisi Kontraktif
Barisan-Barisan Divergen Murni
Definisi Properly Divergent
Geser ke-kiri
xii

Limit Barisan



Augustin-Louis Cauchy (21 Agustus 1789 – 23 Mei 1857) ialah seorang matematikawan asal Prancis. Dia menempuh pendidikan di Ecole Polytechnique, salah satu institusi pendidikan bergengsi di Prancis. Dia berkarir sebagai mahaguru di Ecole Polytechnique, Sorbonne University, dan France University.

Penemuan dan sumbangannya dibidang Matematika sangat cemerlang dan mengagumkan. Selain mahir dalam bidang Matematika, ia juga menyukai puisi. Ia pernah mengarang naskah ilmu persajakkan dalam bahasa Ibrani (bahasa resmi negara Israil). Ilmu kalkulus memang telah diciptakan [ada akhir abad ke-17, namun dasar-dasar tersebut masih berantakan hingga Cauchy dan temannya Bernard Bolzano menghasilkan penemuan baku.

Geser ke-kiri

1 Barisan dan Limit-Limitnya

Sebelum kamu mempelajari materi barisan dan limit-limitnya, kamu telah belajar mengenai sistem bilangan real. Masih ingatkah kamu materi tersebut? Bagaimana cara kamu mendefinisikan bilangan real?

Barisan Bilangan Real

Ingatkah kamu tentang barisan pada himpunan S? Sebuah barisan pada himpunan S adalah fungsi himpunan $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$ yang range-nya terdapat pada himpunan S. Jika pada bab sebelumnya kamu mendefinisikan barisan pada himpunan S, pada bab ini kamu akan mendefinisikan barisan pada himpunan $\mathbb{R}$. Sebelum kamu mempelajari barisan pada himpunan S, coba kerjakan bagian 1.1 Diskusi Sekilas berikut.

1.1 Diskusi Sekilas

Sekarang diskusikan dengan temanmu tentang:

1. Apa itu bilangan asli $\mathbb{N}$?
2. Apa itu bilangan real $\mathbb{R}$?
3. Apa itu barisan?

Setelah kamu mengerjakan bagian 1.1 Diskusi Sekilas, bagaimana kesimpulanmu mengenai bilangan asli $\mathbb{N}$ dan bilangan real $\mathbb{R}$? Apa hubungan kedua bilangan tersebut?

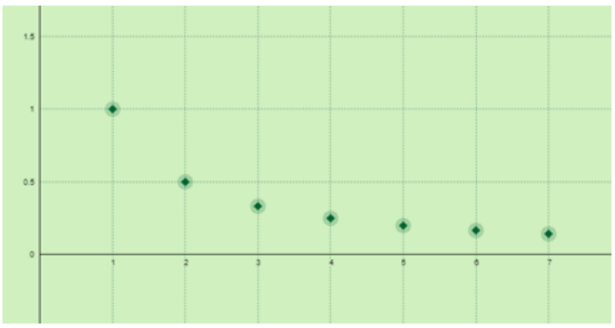
Bilangan asli adalah himpunan bilangan positif yang dimulai dari 1 dan tak terhingga sedangkan bilangan real adalah semua bilangan selain bilangan imajiner dan bilangan kompleks. Sehingga dapat disimpulkan bahwa setiap bilangan asli adalah bilangan real, namun tidak semua bilangan real dalah bilangan asli. Selanjutnya, pengetahuanmu tentang kedua bilangan tersebut akan digunakan untuk lebih memahami definisi barisan bilangan real.

1.1 Definisi Suatu barisan bilangan real adalah fungsi yang didefinisikan pada himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$ yang range-nya termuat dalam bilangan real $\mathbb{R}$.

Barisan bilangan real dinotasikan dengan $X, (x_n)$, atau $(x_n : n \in \mathbb{N})$. Sebagai contoh, barisan $X := \left(\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right)$ dapat disajikan dalam Tabel 1.1 di samping. Gambar 1.1 merupakan penyajian barisan $X := \left(\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right)$ dengan menggunakan GeoGebra.

Tabel 1.1 Tabel Nilai Barisan Bilangan Real

n	$X := \left(\frac{1}{n}\right)$
1	$\frac{1}{1} = 1$
2	$\frac{1}{2} = 0{,}50$
3	$\frac{1}{3} = 0{,}33$
⋮	⋮
n	$\frac{1}{n}$



Gambar 1.1 Penyajian GeoGebra

COBALAH!

Agar lebih memahami definisi 1.1, visualisasikan dua barisan berikut dengan bantuan GeoGera, kemudian cobalah untuk mengamati hasil visualisasinya!

$$(x_n) = \left(\frac{1}{n^2+1}\right), \qquad (x_n) = (1 + (-1)^n)$$

Petunjuk Penggunaan

- Tunggu loading GeoGebra di bawah.
- Klik pada *text box* (yang berisikan sin(n)).
- Klik *On Screen Keyboard* di bagian pojok kiri bawah, dan masukkan barisan (Xn).
- Tekan tombol *Enter* untuk memperbarui grafik.
- Centang bagian *check box* "**SIMULASI**" untuk memperbarui kurva.

GeoGebra

Setelah kamu memvisualisasikan dua barisan tersebut, bagaimana bentuk grafik dari barisan pertama? Bagaimana bentuk grafik dari barian kedua? Apakah bentuk grafik dari barisan pertama dan kedua sama? Mengapa?

Berdasarkan visualisasi tersebut diperoleh bahwa grafik pertama mengarah ke atas (tak terhingga) dan grafik kedua landai serta menuju ke suatu bilangan. Bentuk grafik pertama dan kedua berbeda karena memiliki fungsi barisan yang berbeda. Perbedaan tersebut akan membantu kalian dalam memahami definisi limit barisan.

Limit Barisan

Setelah kamu mempelajari barisan pada himpunan bilangan real, sekarang kamu akan mempelajari limit pada barisan bilangan real. Untuk lebih jelasnya, lakukan bagian 1.2 Diskusi Sekilas berikut.

1.2 Diskusi Sekilas

Pada aktivitas Cobalah! (halaman 2) kamu telah melakukan viualisasi suatu barisan. Lakukan hal sama pada bagian ini. Viasualisasikan barisan $(1/n)$ dan amati visualisasinya! Bagaimana bentuk grafiknya? apakah kamu melihat *epsilon*? Dimana letak *epsolon*? Bagaimana kesimpulanmu tentang *epsilon*?

Pada bagian visualisasi, epsilon ditunjukkan sebagai wilayah berwarna hijau transparan yang dapat digeser dan diperbesar atau diperkecil dengan navigasi di sebelah kiri tampilan. Sehingga epsilon adalah wilayah yang mempengaruhi grafik barisan.

1.2 Definisi Suatu barisan $X = (x_n)$ di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, atau x disebut limit dari (x_n), jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.

Pada aktivitas 1.2 Diskusi Sekilas, kamu telah melihat grafik visualisasiya. Apakah grafik tersebut menuju (konvergen) ke suatu bilangan tertentu? Berapakah bilangan itu? Suatu barisan bilangan real yang konvergen ke suatu bilangan dinamakan **barisan konvergen**. Jika suatu barisan bilangan real tidak konvergen ke satu bilangan dinamakan **barisan tidak konvergen**.

1.1 Contoh

Buktikan bahwa barisan $(1/n)$ konvergen ke-0.

Bukti. Diberikan $\varepsilon > 0$. Terdapat $K(\varepsilon)$ sedemikian sehinga $\frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$.

Karena $n \geq K(\varepsilon)$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$. Sehingga diperoleh

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Dengan demikian terbukti bahwa barisan $(\frac{1}{n})$ konvergen ke-0.

COBALAH!

Agar lebih memahami definisi 1.2, visualisasikan Contoh 1.1 dengan bantuan GeoGera berikut, kemudian amati apakah barisan tersebut mendekati suatu bilangan.

GeoGebra

Setelah kamu memvisualisasikan Contoh 1.1, bagaimana bentuk grafiknya? Apakah grafik tersebut menuju suau bilangan? Bilangan apakah itu? Mengapa?

Setelah memvisualisasikan Contoh 1.1, kalian akan melihat bahwa grafik barisan bilangan real tersebut mendekati suatu bilangan yaitu nol, karena berdasarkan Contoh 1.1 barisan tersebut memiliki limit yaitu 0. Dengan demikian, suatu barisan yang memiliki limit adalah barisan konvergen (sesuai dengan bukti pada Contoh 1,1).

Ketunggalan Limit

Kamu telah mengetahui perbedaan dari barisan konvergen dan barisan tidak konvergen. Namun, pada bagian ini, kamu hanya perlu ingat tentang barisan konvergen saja. Barisan konvergen adalah suatu barisan bilangan real yang konvergen ke suatu bilangan. Tetapi apakah hanya satu bilangan atau lebih dari satu bilangan?

1.3 Teorema Ketunggalan Limit Suatu barisan bilangan real memiliki paling banyak satu limit.

Bukti. Misal x' dan x'' adalah limit dari (x_n). Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $|x_n - x'| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk semua $n \geq K'(\varepsilon)$, dan ada $K''(\varepsilon)$ sedemikian hingga $|x_n - x''| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk semua $n \geq K''(\varepsilon)$. Misalkan $K(\varepsilon)$ adalah bilangan terbesar dari $K'(\varepsilon)$ dan $K''(\varepsilon)$. Karena untuk $n \geq K(\varepsilon)$ dan dengan menggunakan Ketaksamaan Segitiga untuk mendapatkan

$$|x_n - x''| = |x' - x_n + x_n - x''|$$
$$\leq |x' - x_n| + |x_n - x''| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ adalah bilangan positif, dapat disimpulkan bahwa $x' - x'' = 0$.

1.4 Teorema Misal $X = (x_n)$ suatu barisan bilangan real dan $x \in \mathbb{R}$. Pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen:

a) X konvergen ke x.
b) Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli K sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.
c) Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli K sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.
d) Untuk setiap lingkungan-ε dari x, $V_\varepsilon(x)$, terdapat bilangan asli K sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$, suku x_n ada di $V_\varepsilon(x)$.

Bukti. Kesamaan dari (a) dan (b) adalah hanya definisi. Kesamaan dari (b), (c), dan (d) mengikuti implikasi di bawah ini:

$$|u - x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < u - x < \varepsilon \Leftrightarrow x - \varepsilon < u < x + \varepsilon \Leftrightarrow u \in V_\varepsilon(x).$$

"*Matematika ditulis untuk Matematikawan*"
-Nicolaus Copernicus-

1.5 Definisi *Tail* Barisan Jika $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ adalah barisan bilangan real dan m adalah suatu bilangan asli, maka m-*tail* dari X adalah barisan

$$X_m := (x_{m+n} : n \in \mathbb{N}) = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots).$$

1.2 Contoh

Jika diberikan barisan $X = (2,4,6,8,10, \dots, 2n, \dots)$, maka tentukan 3-Tail dari barisan X.

Penyelesaian: 3-Tail dari barisan X adalah

$$X_3 = (8,10,12, \dots, 2n + 6, \dots).$$

1.6 Teorema Misal $X = (x_n : n \in \mathbb{N})$ adalah barisan bilangan real dan $m \in \mathbb{N}$. Maka $X_m = (x_{m+n} : n \in \mathbb{N})$ konvergen jika dan hanya jika X konvergen. Dalam kasus ini $\lim X_m = \lim X$.

Bukti. Diketahui bahwa setiap $p \in \mathbb{N}$, unsur ke-p dari X_m adalah unsur ke-$(p + m)$ dari X. Dengan kata lain, jika $q > m$, maka unsur ke-q dari X adalah unsur ke-$(q - m)$ dari X_m.

Asumsikan X konvergen ke x. Kemudian berikan $\varepsilon > 0$, jika unsur-unsur dari X untuk $n \geq K(\varepsilon)$ memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$, maka unsur-unsur dari X_m untuk $k \geq K(\varepsilon) - m$ memenuhi $|x_k - x| < \varepsilon$. Dengan demikian dapat diambil $K_m(\varepsilon) = K(\varepsilon) - m$, sehingga X_m konvergen ke x.

Sebaliknya, jika unsur-unsur dari X_m untuk $k \geq K_m(\varepsilon)$ memenuhi $|x_k - x| < \varepsilon$, maka unsur dari X untuk $n \geq K(\varepsilon) + m$ memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$. Dengan demikian dapat diambil $K_m(\varepsilon) = K(\varepsilon) + m$. Oleh karena itu, X konvergen ke x jika dan hanya jika X_m konvergen ke x.

1.7 Teorema Misal (x_n) adalah barisan bilangan real dan $x \in \mathbb{R}$. Jika (a_n) adalah barisan bilangan real di mana $\lim(x_n) = 0$ dan untuk suatu $C > 0$ dan $m \in \mathbb{N}$ berlaku

$$|x_n - x| < Ca_n, \quad \text{untuk setiap } n \geq m,$$

maka $\lim(x_n) = x$.

Bukti. Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka karena $\lim(a_n) = 0$, diketahui terdapat $K = K\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)$ sedemikian sehingga $n \geq K$ memenuhi

$$a_n = |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Oleh karena itu, hal tersebut menunjukkan bahwa jika $n \geq K$ dan $n \geq m$, maka

$$|x_n - x| \leq Ca_n < C\left(\frac{\varepsilon}{C}\right) = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$, dapat disimpulkan bahwa $x = \lim(x_n)$.

Kamu telah mempelajari definisi terkait barisan bilangan real dan kekonvergenan suatu barisan beserta pembuktiannya. Selain itu, kamu juga telah mengetahui perbedaan barisan yang konvergen dan tidak konvergen. Lalu bagaimana denganmu? Apakah kamu telah memahami materi barisan bilangan real? Apakah kamu telah memahami kekonvergenan suatu barisan? Apakah kamu sudah bisa membuktikan barisan yang konvergen? Apakah kamu sudah mengetahui perbedaan barisan yang konvergen dan tidak konvergen? Refleksikan dirimu, lalu jawab pertanyaan-pertanyaan tersebut pada buku kalian masing-masing. Jawaban kalian akan mengukur kemampuan kalian dalam memahami materi pada Bab 1 ini.

Rangkuman

1.1 Definisi Suatu barisan bilangan real adalah fungsi yang didefinisikan pada himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$ yang range-nya termuat dalam bilangan real $\mathbb{R}$.

1.2 Definisi Suatu barisan $X = (x_n)$ di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, atau x disebut limit dari (x_n), jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.

1.3 Ketunggalan Limit Suatu barisan bilangan real memiliki paling banyak satu limit.

1.4 Definisi *Tail* Barisan Jika $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ adalah barisan bilangan real dan m adalah suatu bilangan asli, maka m-*tail* dari X adalah barisan

$$X_m := (x_{m+n} : n \in \mathbb{N}) = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots).$$

Evaluasi 1

Kerjakan soal Evaluasi berikut dengan benar dan tulis jawabannya di buku kalian masing-masing.

1. Barisan (x_n) didefinisikan dengan rumus di bawah untuk suku ke-n. Tulislah lima suku pertama pada setiap rumus:
   a) $x_n := 1 + (-1)^n$
   b) $x_n := \frac{1}{n(n+1)}$
2. Buktikan dengan menggunakan definisi limit barisan:
   a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\right) = 0$
   b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{n+1}\right) = 3$
3. Buktikan bahwa $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 0.$
4. Buktikan bahwa $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3^n}\right) = 0$
5. Untuk setiap $b \in \mathbb{R}$, buktikan bahwa $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{n}\right) = 0.$

Cocokanlah jawaban kamu dengan kunci jawaban Evaluasi 1 yang terdpat pada bagian akhir *e-module* ini. Hitunglah berdasarkan penskoran yang tertera di sampingnya. Berapakah nilai yang kamu dapat?

Apabila kamu mendapatkan nilai lebih dari 60, kamu dapat melanjutkan ke kegiatan belajar atau bab selanjutnya.

Apabila kamu mendapatkan nilai kurang dari 60, kamu harus mengulangi kegiatan belajar atau bab ini kembali, terutama pada bagian yang belum kamu kuasai.

2 Teorema-Teorema Limit

Pada bagian ini kamu akan mempelajari beberapa teorema tentang sifat-sifat barisan bilangan real yang konvergen. Sifat-sifat ini akan banyak kalian gunakan untuk keperluan praktis dalam menentukan suatu limit dari suatu barisan. Sifat pertama yang akan kalian pelajari adalah sifat terbatas pada barisan bilangan real.

Barisan Terbatas

2.1 Definisi Suatu barisan bilangan real $X = (x_n)$ dikatakan **terbatas** jika terdapat bilangan real $M > 0$ sedemikian sehingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Sehingga barisan $X = (x_n)$ terbatas jika dan hanya jika himpunan dari nilainya $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ terbatas juga di $\mathbb{R}$.

Setelah kamu mengetahui definisi keterbatasan pada suatu barisan. Lalu masih ingatkah kamu dengan barisan konvergen? Apakah barisan konvergen juga terbatas? Perhatikan Teorema 2.2 berikut.

2.2 Teorema Suatu barisan bilangan real yang konvergen adalah barisan terbatas.

Bukti. Andaikan bahwa $\lim(x_n) = x$ dan misal $\varepsilon := 1$. Maka terdapat bilangan asli $K = K(1)$ sedemikian sehingga $|x_n - x| < 1$ untuk semua $n \geq K$. Jika diterapkan Ketaksamaan Segitiga dengan $n \geq K$ diperoleh

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|.$$

Jika ditetapkan

$$M := \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{K-1}|, 1 + |x|\},$$

Maka diperoleh bahwa $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Jika $X = (x_n)$dan $Y = (y_n)$ adalah barisan-barisan bilangan real, maka definisikan:

$$X + Y \coloneqq (x_n + y_n),$$

$$X - Y \coloneqq (x_n - y_n),$$

$$XY \coloneqq (x_n y_n),$$

$$cX \coloneqq (cx_n); \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\frac{X}{Z} \coloneqq \left(\frac{x_n}{z_n}\right); \quad Z = (z_n)\ dan\ z_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

Setelah mengetahui definisi dari barisan-barisan di atas, perhatikan Contoh 2.1 agar kamu lebih memahami definisi di atas!

2.1 Contoh

Berikan contoh dua barisan bilangan real berbeda lalu definisikan sesuai definisi di atas.

Penyelesaian:

Misal

$$X \coloneqq (2,4,6,\dots,2n,\dots) \quad Y \coloneqq \left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots\right)$$

Maka

$$X + Y = \left(\frac{3}{1},\frac{9}{2},\frac{19}{3},\dots,\frac{2n+1}{n},\dots\right),$$

$$X - Y = \left(\frac{1}{1},\frac{7}{2},\frac{17}{3},\dots,\frac{2n-1}{n},\dots\right)$$

$$XY = (2,2,2,\dots,2,\dots)$$

$$3X = (6,12,18,\dots,6n,\dots)$$

$$\frac{X}{Y} = (2,8,18,\dots,2n^2,\dots)$$

Berikut beberapa teorema lain yang dapat kalian pelajari:

2.3 Teorema Jika $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real yang konvergen dan $x_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $x = \lim(x_n) \geq 0$.

Bukti. Andaikan kesimpulan tidak benar dan bahwa $x < 0$, maka $\varepsilon \coloneqq -x$ adalah positif. Karena X konvergen ke x, terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$.

Jika dirinci, terdapat $x_K < x + \varepsilon = x + (-x) = 0$. Tetapi hal tersebut kontradiksi dengan hipotesis bahwa $x_n \geq 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu, kontradiksi ini mengakibatkan $x \geq 0$.

2.4 Teorema Jika $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ adalah barisan bilangan real yang konvergen dan $x \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}$, maka $\lim(x_n) \leq \lim(y_n)$.

Bukti. Misalkan $z_n := y_n - x_n$ sehingga $Z := (z_n) = Y - X$ dan $z_n \geq 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Teorema 2.4 maka

$$0 \leq \lim Z = \lim(y_n) - \lim(x_n),$$

Sehingga $\lim(x_n) \leq \lim(y_n)$.

2.5 Teorema Misal $X = (x_n)$ adalah barisan yang konvergen dan $a \leq x_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$, maka $a \leq \lim(x_n) \leq b$.

Bukti. Misal Y adalah barisan yang konstan $(b, b, b, \dots)$. Teorema 2.5 mengakibatkan $\lim X \leq \lim Y = b$. Dengan kata lain diperoleh bahwa $a \leq \lim X$.

Pada pembahasan selanjutnya, akan ada penegasan bahwa jika barisan Y terapit diantara dua barisan yang konvergen ke bilangan yang sama (memiliki limit sama), maka ia harus konvergen ke limit ini. Perhatikan Teorema Apit di bawah ini!

2.6 Teorema Apit Misal $X = (x_n), Y = (y_n)$, dan $Z = (z_n)$ adalah barisan bilangan real sedemikian sehingga $x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in \mathbb{N}$, dan $\lim(x_n) = \lim(z_n)$. Maka $Y = (y_n)$ konvergen dan $\lim(x_n) = \lim(y_n) = \lim(z_n)$.

Bukti. Misal $w := \lim(x_n) = \lim(z_n)$. Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka berdasakan kekonvergenan X dan Z ke w bahwa terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga jika $n \geq K(\varepsilon)$ maka $|x_n - w| < \varepsilon$ dan $|z_n - w| < \varepsilon$. Karena hipotesis menyiratkan $x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ mengakibatkan $-\varepsilon < y_n - w < \varepsilon$ untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$. Karena $\varepsilon > 0$ mengakibatkan $\lim(y_n) = w$.

2.2 Contoh

a. Buktikan bahwa barisan (n) tidak konvergen.
Bukti: Berdasarkan Teorema 2.2 bahwa jika barisan $X := (n)$ konvergen, maka terdapat sebuah bilangan real $M > 0$ sedemikian sehingga $n = |n| < M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Namun hal tersebut melanggar sifat Archimedes.

b. Buktikan bahwa barisan $((-1)^n)$ tidak konvergen.
Bukti: Barisan $X = ((-1)^n)$ adalah terbatas (ambil $M := 1$) sehingga kita tidak bisa melibatkan Teorema 2.2. Namun, asumsikan bahwa $a := \lim X$ ada. Misal $\varepsilon := 1$ sehingga terdapat bilangan asli K_1 sedemikian sehingga untuk semua $n \geq K_1$

$$|(-1)^n - a| < 1.$$

Jika n adalah bilangan ganjil dengan $n \geq K_1$ diperoleh $|-1 - a| < 1$, sehingga $-2 < a < 0$. Sedangkan jika n adalah bilanga genap dengan $n \geq K_1$ diperoleh $|1 - a| < 1$, sehingga $0 < a < 2$. Karena a tidak bisa memenuhi ketaksamaan tersebut, hipotesis bahwa X konvergen adalah kontradiksi. Sehingga barisan X tidak konvergen.

Tahukah kamu

Robert Gardner Bartle (1927 - 2003) dan Donald Ray Sherbet (1935 - 2021) merupakan penulis buku "Introduction to Real Analysis" yang telah mengarang buku tersebut hingga edisi ke-empat pada tahun 2011. Mereka merupakan lulusan dari kampus bergengsi seperti Universitas Chicago dan Universitas Stanford.

Robert Gardner Bartle

Untuk lebih memahami Contoh 2.2 di atas, kerjakan aktivitas Diskusi Sekilas 2.1 dengan menggunakan visualisasi yang disediakan.

2.1 Diskusi Sekilas

Visualisasikan barisan (n) dan barisan $((-1)^n)$ dengan GeoGebra sesuai dengan petunjuk penggunaan! Kemudian amati dan disksikan dengan temanmu, apakah barisan tersebut konvergen atau divergen?

GeoGebra

Setelah kamu memvisualisasikan Contoh 2.2, bagaimana bentuk grafiknya? Apakah grafik kedua barisan tersebut menuju suau bilangan atau tidak? Bandingkan dengan grafik yang kalian buat pada aktivitas Cobalah! (halaman 4)! Apakah grafiknya sama? Mengapa?

Setelah memvisualisasikan Contoh 2.2, kamu akan mengetahui danmelihat bahwa barisan pada Contoh 2.2 tidak menuju suatu bilangan. Grafik pada contoh pertama naik (tak terhingga) dan tidak menuju suatu bilangan. Grafik pada contoh kedua naik turun dengan konstan dan tidak menuju suatu bilangan. Mengapa demikian? karena berdasarkan bukti pada Contoh 2.2 kedua barisan tersebut tidak konvergen.

Berdasarkan kedua aktivitas tersebut (Cobalah! halaman 4 dan Diskusi Sekilas 2.1 kalian telah mengetahui perbedaan grafik dari barisan konvergen dan barisan tidak konvergen beserta penjelasan dan pembuktiannya.

Berikut beberapa teorema-teorema terkait kelanjutan dari Teorema Apit yang dapat kalian pelajari:

2.7 Teorema Misal barisan $X = (x_n)$ konvergen ke x. Maka barisan $(|x_n|)$ konvergen ke $|x|$. Dengan kata lain jika $x = \lim(x_n)$, maka $|x| = \lim(|x_n|)$.

Bukti. Berdasarkan Ketaksamaan Segitiga, maka untuk semua $n \in \mathbb{N}$

$$\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x|.$$

Kekonvergenan dari $(|x_n|)$ ke $|x|$ adalah konsekuensi langsung dari kekonvergenan dari (x_n) ke x.

2.8 Teorema Misal $X = (x_n)$ adalah suatu barisan bilangan real yang konvergen ke x dan missal $x_n \geq 0$. Maka barisan $\left(\sqrt{x_n}\right)$ konvergen dan $\lim\left(\sqrt{x_n}\right) = \sqrt{x}$.

Bukti. Berdasarkan teorema 2.4 bahwa $x = \lim(x_n) \geq 0$ maka pernyataan menjai masuk akal. Akan dipertimbangkan dua kasus, yaitu (i) $x = 0$ dan (ii) $x > 0$.

(i) Jika $x = 0$, misal diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $x_n \longrightarrow 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga bahwa jika $n \geq K(\varepsilon)$ maka $0 \leq x_n = x_n - 0 < \varepsilon^2$. Oleh karena itu, $0 \leq \sqrt{x_n} < \varepsilon$ untuk $n \geq K(\varepsilon)$. Karena $\varepsilon > 0$, hal tersebut mengakibatkan $\sqrt{x_n} \longrightarrow 0$.

(ii) Jika $x > 0$, maka $\sqrt{x} > 0$ dan dituliskan bahwa

$$\sqrt{x_n} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x_n} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x_n} - \sqrt{x}} = \frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}$$

Karena $\sqrt{x_n} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} > 0$ diperoleh bahwa

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)|x_n - x|.$$

Kekonvergenan dari $\sqrt{x_n} \longrightarrow \sqrt{x}$ mengikuti fakta bahwa $x_n \longrightarrow x$.

Kamu telah mempelajari definisi barisan terbatas, teorema apit, dan teorema lainnya. Selain itu, kamu juga telah mampu membuktikan teorema tersebut. Lalu bagaimana denganmu? Apakah kamu telah memahami materi barisan terbatas? Apakah kamu telah memahami terema apit? Apakah kamu sudah bisa membuktikan teorema-teorema lainnya? Refleksikan dirimu, lalu jawab pertanyaan-pertanyaan tersebut pada buku kalian masing-masing. Jawaban kalian akan mengukur kemampuan kalian dalam memahami materi pada Bab 2 ini.

Rangkuman

2.1 Definisi Suatu barisan bilangan real $X = (x_n)$ dikatakan **terbatas** jika terdapat bilangan real $M > 0$ sedemikian sehingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Sehingga barisan $X = (x_n)$ terbatas jika dan hanya jika himpunan dari nilainya $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ terbatas juga di $\mathbb{R}$.

2.6 Teorema Apit Misal $X = (x_n), Y = (y_n)$, dan $Z = (z_n)$ adalah barisan bilangan real sedemikian sehingga $x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in \mathbb{N}$, dan $\lim(x_n) = \lim(z_n)$. Maka $Y = (y_n)$ konvergen dan $\lim(x_n) = \lim(y_n) = \lim(z_n)$.

Evaluasi 2

Kerjakan soal Evaluasi berikut dengan benar dan tulis jawabannya di buku kalian masing-masing.

1. Diberikan beberapa barisan di bawah ini, tentukan apakah barisan $X = (x_n)$ berikut konvergen atau divergen!
   a) $x_n := \frac{n}{n+1}$
   b) $x_n := \frac{(-1)^n n}{n+1}$
2. Berikan 2 contoh barisan divergen X dan Y, sehingga hasil penjumlahan $X + Y$ konvergen!
3. Temukan limit dari barisan berikut!
   a) $\lim_{n\to\infty} \left(\left(2 + \frac{1}{n}\right)^2\right)$
   b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(n+2)}\right)$
   c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}\right)$

"Kamu adalah matematika paling rumit. Aku bisa menambahkan, mengurangi, mengalikan, bahkan membagimu, tapi kamu tetap satu." - Fiersa Besari

Cocokanlah jawaban kamu dengan kunci jawaban Evaluasi 2 yang terdapat pada bagian akhir *e-module* ini. Hitunglah berdasarkan penskoran yang tertera di sampingnya. Berapakah nilai yang kamu dapat?

Apabila kamu mendapatkan nilai lebih dari 60, kamu dapat melanjutkan ke kegiatan belajar atau bab selanjutnya.

Apabila kamu mendapatkan nilai kurang dari 60, kamu harus mengulangi kegiatan belajar atau bab ini kembali, terutama pada bagian yang belum kamu kuasai.

3 Barisan Monoton

Sampai saat ini, kita telah memperoleh beberapa cara untuk membuktikan bahwa suatu barisan adalah konvergen, salah satunya dengan menggunakan teorema 1.2 dan 1.4. Pada bagian ini, kita akan belajar tentang barisan monoton.

3.1 Definisi Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real. X dapat dikatakan meningkat (*increasing*) jika memenuhi:

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots.$$

Dan X dapat dikatakan menurun (*decreasing*) jika memenuhi:

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots.$$

X dikatakan monoton jika barisan tersebut meningkat atau menurun.

3.1 Contoh

Barisan meningkat

$$(1,2,3,4,\ldots,n,\ldots), \qquad (1,22,333,\ldots)$$

Barisan menurun

$$\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right), \qquad \left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\ldots,\frac{1}{2^{n-1}},\ldots\right)$$

Barisan tidak monoton

$$(+1,-1,+1,\ldots,(-1)^{n+1},\ldots), \qquad (-1,+2,-3,\ldots,(-1)^n n,\ldots)$$

3.1 Diskusi Sekilas

Visualisaskan barisan-barisan berikut menggunakan GeoGebra di bawah ini, kemudian amati dan diskusikan dengan temanmu mengenai visualisasi barisan tersebut!

$$X = \frac{1}{2^{n-1}}, \qquad X = (-1)^{n+1}, \qquad X = (-1)^n n$$

GeoGebra

Setelah kamu memvisualisasikan ketiga barisan pada aktivitas Diskusi Sekilas 3.1, bagaimana bentuk grafik dari barisan pertama? Bagaimana dengan bentuk grafik dari barisan kedua dan ketiga? Apakah barisan tesebut adalah barisan konvergen atau barisan tidak konvergen? Mengapa?

Setelah kamu mempelajari barisan meningkat dan barisan menurun, selanjutnya, kamu akan mempelajari tentang barisan monoton. Perhatikan Teorema Keterbatasan Monoton berikut.

3.2 Teorema Keterbatasan Monoton Barisan monoton bilangan real adalah konvergen jika dan hanya jika terbatas. Selanjutnya:

(a) Jika $X = (x_n)$ adalah barisan meningkat yang terbatas, maka $\lim(x_n) = \sup\{x_n\}$.

(b) Jika $Y = (y_n)$ adalah barisan menurun yang terbatas, maka $\lim(y_n) = \inf\{y_n\}$.

Bukti. Seperti yang diketahui pada Teorema 2.2 bahwa barisan konvergen adalah terbatas. Sebaliknya, misal X adalah barisan monoton terbatas. Kemudian X dapat meningkat atau menurun.

(a) Perlakuan pada kasus pertama dimana $X = (x_n)$ adalah terbatas, barisan meningkat. Karena X terbatas, terdapat bilangan real M sedemikian sehingga $x_n \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan kelengkapan sifat, supremum $x^* = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ terdapat di $\mathbb{R}$, akan dibuktikan bahwa $x^* = \lim(x_n)$.
Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka $x^* - \varepsilon$ bukan batas atas dari himpunan $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, dan karena terdapat x_K sedemikian sehingga $x^* - \varepsilon < x_K$. Fakta bahwa X adalah barisan meningkat menunjukkan bahwa $x_K \leq x_n$ berapapun $n \geq K(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$

$$x^* - \varepsilon < x_K \leq x_n \leq x^* < x^* + \varepsilon.$$

Oleh karena itu, didapatkan $|x_n - x^*| < \varepsilon$. Karena $\varepsilon > 0$ maka dapat disimpulkan bahwa (x_n) konvergen ke x^*.

(b) Jika $Y = (y_n)$ adalah barisan menurun terbatas, maka jelas bahwa $X := -Y = (-y_n)$ adalah barisan meningkat terbatas. Dapat dilihat pada bagian (a) bahwa $\lim X = \sup\{-y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sekarang, $\lim X = -\lim Y$ maka diperoleh

$$\sup\{-y_n : n \in \mathbb{N}\} = -\inf\{-y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Oleh karena itu, $\lim Y = -\lim X = \inf\{-y_n : n \in \mathbb{N}\}$.

3.3 Teorema Jika barisan $X = (x_n)$ dari bilangan real konvergen ke bilangan real x, maka setiap sub-barisan $X' = (x_{n_k})$ dari X juga konvergen ke x.

Bukti. Misal diberikan $\varepsilon > 0$ dan misal $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga jika $n \geq K(\varepsilon)$, maka $|x_n - x| < \varepsilon$. Karena $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ adalah barisan meningkat dari bilangan asli, dengan induksi dapat dibuktikan bahwa $n_k \geq k$. Karena, jika $k \geq K(\varepsilon)$ diperoleh juga $n_k \geq k \geq K(\varepsilon)$ sehingga $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$. Oleh karena itu, sub-barisan (x_{n_k}) juga konvergen ke x.

Kamu telah mempelajari definisi barisan monoton, barisan meningkat, dan barisan menurun. Selain itu, kamu juga telah mampu memberikan contoh barisan tersebut. Lalu bagaimana denganmu? Apakah kamu telah memahami materi barisan monoton? Apakah kamu telah memahami barisan meningkat dan menurun? Apakah kamu sudah bisa memberikan contoh barisan tersebut? Refleksikan dirimu, lalu jawab pertanyaan-pertanyaan tersebut pada buku kalian masing-masing. Jawaban kalian akan mengukur kemampuan kalian dalam memahami materi pada Bab 3 ini.

Rangkuman

3.1 Definisi Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real. X dapat dikatakan meningkat (*increasing*) jika memenuhi:

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots.$$

Dan X dapat dikatakan menurun (*decreasing*) jika memenuhi:

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots.$$

X dikatakan monoton jika barisan tersebut meningkat atau menurun.

3.2 Teorema Keterbatasan Monoton Barisan monoton bilangan real adalah konvergen jika dan hanya jika terbatas. Selanjutnya:

(a) Jika $X = (x_n)$ adalah barisan meningkat yang terbatas, maka $\lim(x_n) = \sup\{x_n\}$.

(b) Jika $Y = (y_n)$ adalah barisan menurun yang terbatas, maka $\lim(y_n) = \inf\{y_n\}$.

Evaluasi 3

Kerjakan soal Evaluasi berikut dengan benar dan tulis jawabannya di buku kalian masing-masing.

1. Misalkan $x_1 := 8$ dan $x_{n+1} := \frac{1}{2}x_n + 2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa (x_n) terbatas dan monoton. Temukan limitnya.
2. Misalkan $x_1 > 1$ dan $x_{n+1} := 2 - \frac{1}{x_n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa (x_n) terbatas dan monoton. Temukan limitnya.
3. Misalkan $x_1 := a > 0$ dan $x_{n+1} := x_n + \frac{1}{x_n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tentukan apakah (x_n) konvergen atau tidak konvergen.
4. Misalkan A sub-himpunan yang tak terbatas dari bilangan real yang terbatas atas dan misal $u := \sup A$. Tunjukkan bahwa terdapat barisan meningkat (x_n) dengan $x_n \in A$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $u = \lim(x_n)$.

Cocokanlah jawaban kamu dengan kunci jawaban Evaluasi 3 yang terdapat pada bagian akhir *e-module* ini. Hitunglah berdasarkan penskoran yang tertera di sampingnya. Berapakah nilai yang kamu dapat?

Apabila kamu mendapatkan nilai lebih dari 60, kamu dapat melanjutkan ke kegiatan belajar atau bab selanjutnya.

Apabila kamu mendapatkan nilai kurang dari 60, kamu harus mengulangi kegiatan belajar atau bab ini kembali, terutama pada bagian yang belum kamu kuasai.

4 Sub-Barisan & Teorema Bolzano Weierstrass

Pada bagian ini, kita akan mengenal materi tentang sub-barisan dari barisan bilangan real. Materi ini sedikit lebih umum dari pada materi *Tail* barisan (dijelaskan di 1.5) dan sangat berguna untuk membuktikan barisan yang divergen. Selain itu, kita akan mempelajari tentang Teorema Bolzano-Weierstrass.

Sub-Barisan

4.1 Definisi Misal $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real dan misal $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$ adalah barisan meningkat yang tepat dari bilangan asli. Maka barisan $X' = (x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}, \ldots, x_{r_n}, \ldots)$ dinamakan sub-barisan dari X.

4.1 Contoh

Sebagai contoh, sub-barisan dari $X := \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$ adalah sebagai berikut:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n+2}, \ldots\right), \quad \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \ldots\right)$$

Dan berikut ini bukan sub-barisan dari $X := \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5} \ldots\right), \quad \left(\frac{1}{1}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5} \ldots\right)$$

4.2 Teorema Misal $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real. Maka pernyataan-pernyataan berikut adalah setara:

(i) Barisan $X = (x_n)$ tidak konvergen ke $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $K \in \mathbb{N}$, terdapat $r_k \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $r_k \geq k$ dan $|x_{r_k} - x| \geq \varepsilon$.

(iii) Terdapat $\varepsilon > 0$ dan sub-barisan $X' = (x_{r_n})$ dari X sedemikian hingga $|x_{r_n} - x| \geq \varepsilon$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Bukti. (i)⇒(ii) Jik (x_n) tidak konvergen ke x, maka untuk beberapa $\varepsilon_0 > 0$ tidak memungkinkan untuk menemukan bilangan asli k sedemikian sehingga untuk semua $n \geq k$ unsur-unsur pada x_n memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon_0$. Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ adalah tidak benar bahwa untuk semua $n \geq k$ ketaksamaan $|x_n - x| < \varepsilon_0$ berlaku. Dengan kata lain, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ terdapat bilangan asli $n_k \geq k$ sedemikian sehingga $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$.

(ii)⇒(iii) Misal ε_0 seperti pada (ii) dan misal $n_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_1 \geq 1$ dan $|x_{n_1} - x| \geq \varepsilon_0$. Sekarang, misal $n_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_2 > n_1$ dan $|x_{n_2} - x| \geq \varepsilon_0$, misal $n_3 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_3 > n_2$ dan $|x_{n_3} - x| \geq \varepsilon_0$. Lanjutkan cara ini untuk menunjukkan sub-barisan $X' = (x_{n_k})$ dari X sedemikian sehingga $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$.

(iii)⇒(i) Andaikan $X = (x_n)$ mempunyai sub-barisan $X' = (x_{n_k})$ yang memenuhi kondisi pada (iii). Karena X tidak bisa konvergen ke x, karena jika iya, maka berdasarkan teorema 4.2, sub-barisan X' juga bisa konvergen ke x. Tetapi itu tidak mungkin, karena tak ada satupun suku X' dimiliki lingkungan-ε_0 dari x.

Setelah kamu mempelajari tentang sub-barisan, selanjutnya, kamu akan mempelajari tentang kriteria kedivergenan. Perhatikan Kriteria Kedivergenan berikut.

4.3 Kriteria Kedivergenan Jika barisan bilangan real $X = (x_n)$ memiliki salah satu pernyataan-pernyataan berikut, maka X adalah divergen.

(i) X memiliki dua sub-barisan yang konvergen $X' = (x_{n_k})$ dan $X' = (x_{r_k})$ yang limitnya tidak sama.

(ii) X tidak terbatas.

4.1 Diskusi Sekilas

Visualisasikan contoh barisan divergen berikut menggunakan GeoGebra! Kemudian amati bentuk grafik dari barisan divergen tersebut!

$$X = ((-1)^n)$$

Setelah kamu melakukan aktivitas Diskusi Sekilas 4.1, bagaimana hasil visualisasi yang kamu peroleh? Bagaimana bentuk grafik barisan tersebut? apakah barisan tersebut konvergen atau tidak konvergen? Mengapa?

4.4 Teorema Bolzano-Weierstrass Barisan yang terbatas dari bilangan real memiliki sub-barisan yang konvergen.

Bukti. Karena himpunan nilai $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ terbatas, himpunan ini termuat pada interval $I_1 := [a, b]$. Diambil $n := 1$. Diketahui I_1 membagi dua menjadi dua sub-interval yang sama ${I_1}'$ dan ${I_1}''$, dan membagi himpunan indeks $\{n \in \mathbb{N} : n > 1\}$ menjadi dua bagian yaitu

$$A_1 := \{n \in \mathbb{N} : n > n_1, x_n \in {I_1}'\}$$
$$B_1 := \{n \in \mathbb{N} : n > n_1, x_n \in {I_1}''\}$$

Jika A_1 infinit, ambil $I_2 := {I_1}'$ dan misal n_2 bilangan asli terkecil di A_1. Jika A_1 himpunan finit, maka B_1 harus infinit, dan ambil $I_2 := {I_1}''$ dan misal n_2 bilangan asli terkecil di B_1. Diketahui I_2 membagi dua menjadi dua sub-interval yang sama ${I_2}'$ dan ${I_2}''$, dan membagi himpunan $\{n \in \mathbb{N} : n > n_2\}$ menjadi dua bagian yaitu

$$A_2 := \{n \in \mathbb{N} : n > n_2, x_n \in {I_2}'\}$$
$$B_2 := \{n \in \mathbb{N} : n > n_2, x_n \in {I_2}''\}$$

Jika A_2 infinit, ambil $I_3 := {I_2}'$ dan misal n_3 bilangan asli terkecil di A_2. Jika A_2 himpunan finit, maka B_2 harus infinit, dan ambil $I_3 := {I_2}''$ dan misal n_3 bilangan asli terkecil di B_2. Lanjutkan cara ini untuk menunjukkan barisan interval

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_k \supseteq \cdots$$

dan sub-barisan (x_{n_k}) dari X sedemikian sehingga $x_{n_k} \in I_k$ untuk $k \in \mathbb{N}$. Karena panjang dari I_k sama dengan $(b-a)/2^{k-1}$ terdapat titik $\xi \in I_k$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$. Terlebih, karena x_{n_k} dan ξ dimiliki I_k, maka didapat

$$|x_{n_k} - \xi| \leq \frac{(b-a)}{2^{k-1}},$$

Dimana sub-barisan (x_{n_k}) dari X konvergen ke ξ.

Kamu telah mempelajari definisi sub-barisan dan teorema Bolzano Weierstrass. Selain itu, kamu juga telah mempelajari bagaimana membuktikannya. Lalu bagaimana denganmu? Apakah kamu telah memahami materi sub-barisan? Apakah kamu telah memahami teorema Bolzano Weierstrass? Apakah kamu sudah bisa membuktikan teorema tersebut? Refleksikan dirimu, lalu jawab pertanyaan-pertanyaan tersebut pada buku kalian masing-masing. Jawaban kalian akan mengukur kemampuan kalian dalam memahami materi pada Bab 4 ini.

Tahukah kamu

Teorema Bolzano-Weierstrass merupakan sebuah teorema yang ditemukan oleh 2 matematikawan yaitu, Bernard Bolzano (1781-1848) dan Karl Weierstass (1815-1897). Mereka adalah matematikawan asal Jerman.

Pada awlanya, penemuan ini dibuktikan oleh Bernard Bolzano pada tahun 1817 sebagai sebuah lemma. Kemudian setelah lima puluh tahun, ditemukan hasil yang signifikan pada lemma tersebut dan dibuktikan kembali oleh Karl Weierstass. Sehingga teorema ini dikenal sebagai teorema Bolzano-Weierstrass. Teorema ini juga sering disebut sebagai "*sequential compactness theorem*."

Bolzano-Weierstrass

Karl Weierstass

Rangkuman

4.1 Definisi Misal $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real dan misal $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$ adalah barisan meningkat yang tepat dari bilangan asli. Maka barisan $X' = (x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}, \ldots, x_{r_n}, \ldots)$ dinamakan sub-barisan dari X.

4.4 Teorema Bolzano Weierstrass Barisan yang terbatas dari bilangan real memiliki sub-barisan yang konvergen.

Evaluasi 4

Kerjakan soal Evaluasi berikut dengan benar dan tulis jawabannya di buku kalian masing-masing.

1. Berikan contoh dari barisan tak terbatas yang memiliki sub-barisan yang konvergen.
2. Tunjukkan bahwa barisan $(1 - (-1)^n + 1/n)$ tidak konvergen.
3. Andaikan setiap sub-barisan dari $X = (x_n)$ mempunyai sub-barisan yang konvergen ke-0. Tunjukkan bahwa $\lim X = 0$.
4. Tunjukkan bahwa jika (x_n) tak terbatas, maka terdapat sub-barisan (x_{n_k}) sedemikian sehingga $\lim\left(\frac{1}{x_{n_k}}\right) = 0$.

Cocokanlah jawaban kamu dengan kunci jawaban Evaluasi 4 yang terdapat pada bagian akhir *e-module* ini. Hitunglah berdasarkan penskoran yang tertera di sampingnya. Berapakah nilai yang kamu dapat?

Apabila kamu mendapatkan nilai lebih dari 60, kamu dapat melanjutkan ke kegiatan belajar atau bab selanjutnya.

Apabila kamu mendapatkan nilai kurang dari 60, kamu harus mengulangi kegiatan belajar atau bab ini kembali, terutama pada bagian yang belum kamu kuasai.

5 Kiteria Cauchy

5.1 Definisi Barisan bilangan real $X = (x_n)$ dikatakn **barisan Cauchy** jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $H(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk semua bilangan asli $n, m \geq H(\varepsilon)$, x_n, x_m memenuhi $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Lemma 1 Jika $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real yang konvergen, maka X adalah barisan Cauchy.

Bukti. Jika $x := \lim X$ maka diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon/2)$ sedemikian sehingga jika $n \geq K(\varepsilon/2)$ maka $|x_n - x| < \varepsilon/2$. Dengan demikian, jika $H(\varepsilon) := K(\varepsilon/2)$ dan jika $n, m \geq H(\varepsilon)$ diperoleh

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)|$$

$$\leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ maka (x_n) adalah barisan Cauchy.

5.2 Teorema Kriteria Kekonvergenan Cauchy Barisan bilangan real adalah konvergen jika dan hanya jika barisan tersebut adalah barisan Cauchy.

Bukti. Berdasarkan Lemma 1, diketahui bahwa barisan konvergen adalah barisan Cauchy.

Sebaliknya, misal $X = (x_n)$ adalah barisan Cauchy, akan dibuktikan bahwa X konvergen ke suatu bilangan real. Pertama, berdasarkan Lemma sebelumnyadiketahui bahwa barisan X terbatas. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema Bolzano-Weierstrass, erdapat sub-barisan $X' = (x_{n_k})$ yang konvergen ke suatu bilangan real x^*. Maka harus dilengkapi pembuktian dengan menunjukkan bahwa X konvergen ke x^*.

Karena $X = (x_n)$ adalah barisan Cauchy, diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $H(\varepsilon/2)$ sedemikian sehingga jika $n, m \geq H(\varepsilon/2)$ maka $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$. Karena sub-barisan $X' = (x_{n_k})$ konvergen ke x^*, terdapat bilangan asli $K \geq H(\varepsilon/2)$ yang dimiliki himpunan $\{n_1, n_2, \ldots\}$ sedemikian sehingga $|x_K - x^*| < \varepsilon/2$. Karena $K \geq H(\varepsilon/2)$ dan $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ dengan $m = K$ maka untuk $n \geq H(\varepsilon/2)$ berlaku $|x_n - x_K| < \varepsilon/2$. Oleh karena itu, jika $n \geq H(\varepsilon/2)$ diperoleh

$$|x_n - x^*| = |(x_n - x_K) + (x_K - x^*)|$$
$$\leq |x_n - x_K| + |x_K - x^*|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ maka disimpulkan bahwa $\lim(x_n) = x^*$. Oleh karena itu barisan X konvergen.

5.1 Diskusi Sekilas

Tentu kalian sudah tahu (dari Contoh 1.2) bahwa barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ adalah barisan konvergen ke 0. Namun diskusikan dengan temanmu terkait Kriteria Kekonvergenan Cauchy dengan menggunakan barisan tersebut! (Kalian dapat menggunakan visualisasi GeoGebra di bawah ini)

GeoGebra

Setelah kamu memvisualisasikan perintah pada Diskusi Sekilas 5.1, bagaimana bentuk grafiknya? Apakah grafik tersebut menuju suau bilangan? Bilangan apakah itu? Mengapa?

Setelah memvisualisasikan perintah pada Diskusi Sekilas 5.1, kalian akan melihat bahwa grafik barisan bilangan real tersebut mendekati suatu bilangan yaitu nol, karena berdasarkan Contoh 1.1 barisan tersebut memiliki limit yaitu 0. Dengan demikian, suatu barisan yang memiliki limit adalah barisan konvergen.

Kamu telah mempelajari definisi barisan Cauchy. Selain itu, kamu juga telah mempelajari teorema kekonvergenan Cauchy. Lalu bagaimana denganmu? Apakah kamu telah memahami materi barisan Cauchy? Apakah kamu telah memahami teorema kriteria kekonvergenan Cauchy? Apakah kamu sudah bisa membuktikan teorema tersebut? Refleksikan dirimu, lalu jawab pertanyaan-pertanyaan tersebut pada buku kalian masing-masing. Jawaban kalian akan mengukur kemampuan kalian dalam memahami materi pada Bab 5 ini.

Rangkuman

5.1 Definisi Barisan bilangan real $X = (x_n)$ dikatakn **barisan Cauchy** jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $H(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk semua bilangan asli $n, m \geq H(\varepsilon)$, x_n, x_m memenuhi $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

5.2 Kriteria Kekonvergenan Cauchy Barisan bilangan real adalah konvergen jika dan hanya jika barisan tersebut adalah barisan Cauchy.

Evaluasi 5

Kerjakan soal Evaluasi berikut dengan benar dan tulis jawabannya di buku kalian masing-masing.

1. Berikan contoh barisan terbatas yang bukan barisan Cauchy.
2. Buktikan dengan menggunakan definisi bahwa $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ adalah barisan Cauchy.
3. Buktikan dengan menggunakan definisi bahwa $((-1)^n)$ bukan barisan Cauchy.
4. Buktikan dengan menggunakan definisi bahwa jika (x_n) dan (y_n) adalah barisan Cauchy, maka $(x_n + y_n)$ dan $(x_n y_n)$ adalah barisan Cauchy.

Tahukah kamu

GeoGebra adalah aplikasi interaktif dibidang aljabar, statistika, dan kalkulus yang digunakan untuk belajar dan mengajar matematika dari tingkat dasar hingga perguruan tinggi.

GeoGebra tersedia diberbagai platform seperti Windows, IOS, Android, dll. Pencipta GeoGebra adalah Markus Hohenwarter. Ia memulai proyek ini pada tahun 2001 sebagai bagian dari tesis masternya di Universitas Salzburg. Pada Desember 2021, GeoGebra diakuisisi oleh konglomerat edtech Byju's dengan harga sekitar 100 juta USD.

Cocokanlah jawaban kamu dengan kunci jawaban Evaluasi 5 yang terdapat pada bagian akhir *e-module* ini. Hitunglah berdasarkan penskoran yang tertera di sampingnya. Berapakah nilai yang kamu dapat?

Apabila kamu mendapatkan nilai lebih dari 60, kamu dapat melanjutkan ke kegiatan belajar atau bab selanjutnya.

Apabila kamu mendapatkan nilai kurang dari 60, kamu harus mengulangi kegiatan belajar atau bab ini kembali, terutama pada bagian yang belum kamu kuasai.

6 Barisan-Barisan Divergen Murni

6.1 Definisi Misal (x_n) barisan bilangan real.

(i) Dapat dikatakan bahwa (x_n) cenderung ke $+\infty$ dan menuliskan $\lim(x_n) = +\infty$, jika untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ terdapat bilangan asli $K(\alpha)$ sedemikian sehingga jika $n \geq K(\alpha)$ maka $x_n > \alpha$.

(ii) Dapat dikatakan bahwa (x_n) cenderung ke $-\infty$ dan menuliskan $\lim(x_n) = -\infty$, jika untuk setiap $\beta \in \mathbb{R}$ terdapat bilangan asli $K(\beta)$ sedemikian sehingga jika $n \geq K(\beta)$ maka $x_n < \beta$.

Sehingga dapat dikatakan (x_n) adalah **properly divergen** pada kasus $\lim(x_n) = +\infty$ atau $\lim(x_n) = -\infty$.

6.1 Contoh

Berikan dua contoh barisan divergen murni beserta limitnya.

a) $\lim(n) = +\infty$
b) $\lim(n^2) = +\infty$

Visualisasikan Contoh 6.1 dengan GeoGebra di bawah ini!

GeoGebra

Setelah kamu memvisualisasikan Contoh 6.1, bagaimana bentuk grafik contoh pertama? Bagaimana bentuk grafik contoh kedua? Apakah grafik dari dua contoh tersebut sama?

Setelah memvisualisasikan Contoh 6.1, kamu akan mengetahui bahwa grafik dari kedua contoh tersebut mirip, yaitu tak terhingga ke atas. Oleh karena itu, berdasarkan jawaban pada contoh 6.1, limit dari kedua barisan tersebut adalah positif tak terhingga.

Rangkuman

6.1 Definisi Misal (x_n) barisan bilangan real.

(i) Dapat dikatakan bahwa (x_n) cenderung ke $+\infty$ dan menuliskan $\lim(x_n) = +\infty$, jika untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ terdapat bilangan asli $K(\alpha)$ sedemikian sehingga jika $n \geq K(\alpha)$ maka $x_n > \alpha$.

(ii) Dapat dikatakan bahwa (x_n) cenderung ke $-\infty$ dan menuliskan $\lim(x_n) = -\infty$, jika untuk setiap $\beta \in \mathbb{R}$ terdapat bilangan asli $K(\beta)$ sedemikian sehingga jika $n \geq K(\beta)$ maka $x_n < \beta$.

Sehingga dapat dikatakan (x_n) adalah **properly divergen** pada kasus $\lim(x_n) = +\infty$ atau $\lim(x_n) = -\infty$.

Evaluasi 6

Kerjakan soal Evaluasi berikut dengan benar dan tulis jawabannya di buku kalian masing-masing.

1. Tunjukkan bahwa jika (x_n) adalah barisan terbatas, maka terdapat barisan divergen murni.
2. Tunjukkan bahwa jika $x_n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\lim(x_n) = 0$ jika dan hanya jika $\lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = +\infty$.
3. Tentukan barisan divergen murni dari barisan $(\sqrt{n})$.
4. Misalkan (x_n) adalah barisan divergen murni dan (y_n) juga sedemikian sehingga $\lim(x_n y_n)$ milik $\mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa (y_n) konvergen ke-0.

Cocokanlah jawaban kamu dengan kunci jawaban Evaluasi 6 yang terdapat pada bagian akhir *e-module* ini. Hitunglah berdasarkan penskoran yang tertera di sampingnya. Berapakah nilai yang kamu dapat?

Apabila kamu mendapatkan nilai lebih dari 60, kamu dapat melanjutkan ke kegiatan belajar atau bab selanjutnya.

Apabila kamu mendapatkan nilai kurang dari 60, kamu harus mengulangi kegiatan belajar atau bab ini kembali, terutama pada bagian yang belum kamu kuasai.

CATATAN

KUNCI JAWABAN

Evaluasi 1

		Jawaban	Skor
1.	(a)	$0, 2, 0, 2, 0$	10
	(b)	$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$	10
2.	(a)	Kita punya $$0 < \frac{1}{(n^2+1)} < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}.$$ Diberikan $\varepsilon > 0$, misal $K(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon}$.	10
	(b)	Kita Punya $$\left\lvert\frac{(3n+2)}{(n+1)} - 3\right\rvert = -\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$ Diberikan $\varepsilon > 0$, misal $K(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon}$.	10
3.		$\left\lvert\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right\rvert = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}.$	20
4.		Untuk setiap bilangan asli n berlaku $n < 3^n$, sehingga diperoleh $$\frac{1}{3^n} < \frac{1}{n}.$$	20
5.		Ingat, $$\frac{1+\lvert b\rvert}{\varepsilon} < K.$$ Untuk bilangan asli $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $$\left\lvert\frac{b}{n}\right\rvert \leq \frac{\lvert b\rvert}{K(\varepsilon)} < \frac{\lvert b\varepsilon\rvert}{1+\lvert b\rvert} = \frac{\lvert b\rvert\varepsilon}{1+\lvert b\rvert} < \varepsilon.$$	20

Evaluasi 2

		Jawaban	Skor
1.	(a)	Konvergen	15
	(b)	Tidak Konvergen	15
2.		Misal, $$X = (1, 2, 3, 4, \dots)$$ $$Y = (-1, -2, -3, -4, \dots)$$ Karena tidak terdapat limit pada kedua barisan tersebut, mak barisan-barisan tersebut tidak konvergen. Tetapi, $$X + Y = (1-1, 2-2, 3-3, 4-4, \dots) = (0,0,0,0, \dots) = (0)$$ Karena limit barisan $(X+Y)$ adalah 0, maka konvergen.	25
3.	(a)	4	15
	(b)	0	15
	(c)	1	15

KUNCI JAWABAN

Evaluasi 3

	Jawaban	Skor
1	Ingat bahwa $x_2 = 6 < x_1$. Jika $x_{k+1} < x_k$, maka $$x_{k+2} = \frac{1}{2}x_{k+1} + 2 < \frac{1}{2}x_k + 2 = x_{k+1}.$$ Dengan induksi, (x_n) adalah barisan menurun. Juga $0 \le x_n \le 8$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Limit $x := \lim(x_n)$ memenuhi $x = \frac{1}{2}x + 2$, sedemikian sehingga $$x = 4.$$	25
2	Berdasarkan induksi bahwa $1 < x_n \le 2$ untuk $n \ge 2$ dan bahwa (x_n) monoton. Faktanya, (x_n) menurun karena jika $x_1 < x_2$, maka diperoleh $(x_1 - 1)^2 < x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0$. Karena $x := \lim(x_n)$ harus memenuhi $x = 2 - 1/x$, diperoleh $x = 1$.	25
3	Karena $x_n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, kita punya $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} > x_n$, sedemikian sehingga (x_n) meningkat. Jika $x_n \le b$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_n} \ge \frac{1}{b} > 0$ untuk semua n. Tetapi, jika $\lim(x_n)$ ada, maka $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$ kontradiksi. Oleh karea itu, (x_n) tidak konvergen.	25
4	Tunjukkan bahwa jika $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$telah dipilih, maka terdapat $x_n \in A$ sedemikian sehingga $x_n > u - 1/n$ dan $x_n \ge x_k$ untuk $k = 1,2,3, \dots, n - 1$.	25

Evaluasi 4

	Jawaban	Skor
1.	Misalkan $x_{2n-1} := 2n - 1$, $x_{2n} := 1/2n$ maka $$(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots\right).$$	25
2.	$x_{2n} \to 0$ dan $x_{2n+1} \to 2$.	25
3.	Jika (x_n) tidak konvergen ke 0, maka terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dan sub-barisan (x_{n_k}) dengan $\lvert x_{n_k}\rvert > \varepsilon_0$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$.	25
4.	Dipilih $n_1 \ge 1$ sedemikian sehingga $x_{n_1} \ge s - 1$, kemudian pilih $n_2 > n_1$ sedemikian sehingga $x_{n_2} > s - 1/2$, dan, pada umumnya, pilih $n_k > n_{k-1}$ sedemikian sehingga $x_{n_k} > s - 1/k$.	25

KUNCI JAWABAN

Evaluasi 5

	Jawaban	Skor
1.	Contoh, $((-1)^n)$	25
2.	Jika $m > n$, maka $\left\|\left(1+\frac{1}{m}\right)-\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\| < \frac{2}{n}$.	25
3.	Ingat bahwa $\|(-1)^n-(-1)^{n+1}\| = 2$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.	25
4.	Gunakan $\|x_m y_m - x_n y_n\| \leq \|y_m\|\|x_m - x_n\| + \|x_n\|\|y_m - y_n\|$ dan fakta bahwa barisan Cauchy adalah terbatas.	25

Evaluasi 6

	Jawaban	Skor
1.	Jika himpunan $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tidak terbatas atas, pilih $n_{k+1} > n_k$ sedemikian sehingga $x_{n_k} \geq k$ untuk $k \in \mathbb{N}$.	25
2.	Ingat bahwa $\|x_n - 0\| < \varepsilon$ jika dan hanya jika $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon}$.	25
3.	$[\sqrt{n} > a] \Leftrightarrow [n > a^2]$	25
4.	Jika (y_n) tidak konvergen ke-0, terdapat $c > 0$ dan sub-barisan (y_{n_k}) dengan $\|y_{n_k}\| \geq c$. Karena itu, $\|x_{n_k}\| = \|x_{n_k} y_{n_k}/y_{n_k}\|$ terbatas, kontradiksi dengan fakta bahwa (x_n) adalah divergen murni.	25

PENUTUP

E-module ini ditulis dan dirancang untuk mempermudah pemahaman mahasiswa dalam mempelajari materi limit barisan. Selain itu, untuk membantu para pengajar dalam penyampaian materi limit barisan. Namun demikian, penuli memiliki keterbatasan-keterbatasan sehingga e-modul ini belum sempurna.

Selanjutnya kami mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang sudah berperan dalam pembuatan e-modul ini. Akhir kata, kami sebagai penulis e-modul ini berharap semoga e-module ini dapat diterima dan dimanfaatkan dengan semestinya.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R., G., & Donald, R. S. 2011. Introduction to Real Analysis (4nd ed.). USA. John Wiley and Sons.

Bolzano, B. WIkipedia Bahasa Indonesia. https://id.wikipedia.org/wiki/Bernard_Bolzano

Chatterjee, Dipak. 2012. Real Analysis 2th Editon. New Delhi: PHI Learning Private Limited.

Cauchy, A., L. Wikipedia The Free Encyclopedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Augustin-Louis_Cauchy

Hernadi, J. 2015. Analisis Real Elementer dengan Ilustrassi Grafis dan Numeris. Jakarta: ERLANGGA.

Royden, H.L. & P.M. Fitzpatrick. 2010.Real Analysis. Hong Kong:Pearson Education Asia Limited and China Machine Press

I'll get
A+
E-module
Limit
Barisan
& Visualisasinya
E-module Untuk Mahasiswa Matematika
Penulis : Nanda Mustagfirotul Ulya
Pengantar : Dr. Elly Susanti, M.Sc
Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd