EKIVALENSI IDEAL STABIL EAKIN-SATHAYE DENGAN IDEAL STABIL EAKIN-SATHAYE LEMAH

SKRIPSI

OLEH:
ALFI UNSIATI UMMI HANA
NIM. 16610053

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

EKIVALENSI IDEAL STABIL EAKIN-SATHAYE DENGAN IDEAL STABIL EAKIN-SATHAYE LEMAH

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
ALFI UNSIATI UMMI HANA
NIM. 16610053

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2022

EKIVALENSI IDEAL STABIL EAKIN-SATHAYE DENGAN IDEAL STABIL EAKIN-SATHAYE LEMAH

SKRIPSI

Oleh
Alfi Unsiati Ummi Hana
NIM. 16610053

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 26 Desember 2022

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Intan Nisfulaila, M.Si.	Erna Herawati, M.Pd.
NIP. 19900215 201903 2 015	NIDT. 19760723 20180201 2 222

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

EKIVALENSI IDEAL STABIL EAKIN-SATHAYE DENGAN IDEAL STABIL EAKIN-SATHAYE LEMAH

SKRIPSI

Oleh
Alfi Unsiati Ummi Hana
NIM. 16610053

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Ujian Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal, 28 Desember 2022

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D	....
Anggota Penguji I	: M. Nafie Jauhari, M.Si	....
Anggota Penguji II	: Intan Nisfulaila, M. Si	....
Anggota Penguji III	: Erna Herawati, M. Pd	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Alfi Unsiati Ummi Hana
NIM.	: 16610053
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Ekivalensi Ideal Stabil Eakin-Sathaye dengan Ideal Stabil Eakin-Sathaye Lemah

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan data pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Desember 2022

Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL

C5C40AKX234526228

Alfi Unsiati Ummi Hana

NIM. 16610053

MOTTO

"…ini termasuk karunia dari Tuhanku…"
(QS. An-Naml: 40)

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya"
(QS. Al-Baqarah: 286)

"Ridha Allah ada pada ridha kedua orang tua dan kemurkaan Allah ada pada kemurkaan kedua orang tua."
(HR. Tirmidzi, Ibnu Hibban, Hakim)

PERSEMBAHAN

Bismillahirrohmanirrohim

Alhamdulillahirobbil'alamin, dengan mengucap syukur kepada Allah SWT akan anugerah kesadaran perihal ketidakmampuan dan ketidakberdayaan kecuali atas rahmat-Nya, penulis mempersembahkan skripsi ini untuk ayah, ibu, seluruh keluarga, dan siapapun yang dijadikan jalan untuk mendukung, mendoakan, memberikan kasih sayang, semangat, dan nasihat, serta pelajaran hidup dalam proses penyelesaian skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji dan syukur kehadirat Allah *Subhanahu Wa Ta'ala* yang telah melimpahkan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya kepada penulis sehingga skripsi yang berjudul "Ekivalensi Ideal Stabil Eakin-Sathaye dengan Ideal Stabil Eakin-Sathaye Lemah" ini dapat dirampungkan. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad *Shallallaahu 'Alaihi Wasallam* yang telah membimbing dan menuntun manusia dari jalan yang gelap menuju jalan yang terang benderang, yaitu agama yang diridhai oleh Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*, agama Islam. Dalam proses penyelesaian skripsi ini penulis banyak mendapat dukungan, bimbingan dan bantuan secara langsung maupun tidak langsung dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Intan Nisfulaila, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah mendampingi penulis dalam proses penyelesaian skripsi ini.
5. Erna Herawati, M. Pd. selaku dosen pembimbing integrasi sains dan Islam yang memberikan waktu dan arahan dalam proses penyelesaian kajian integrasi dalam skripsi ini.
6. Dewi Ismiarti, M.Si. dan Juhari, M.Si. yang telah sabar dalam memberikan arahan dan bimbingan selama proses awal penyusunan skripsi ini.
7. Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D dan M. Nafie Jauhari, M.Si. selaku penguji yang telah dengan sabar dan penuh pemakluman dalam memberikan arahan, nasihat, dan bimbingan selama proses penyelesaian skripsi ini.
8. Ach. Nashichuddin, selaku dosen pembimbing akademik beserta seluruh Dosen dan Staff Administrasi Jurusan matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan banyak ilmu serta pengalaman yang berharga kepada penulis selama studi.

9. Rieza Firdian Rafsandjani, S.E, M.M., selaku Staff Administrasi Jurusan Matematika yang dengan sabar mendengarkan dan menasehati, membantu dan mendampingi penulis selama proses akhir penyelesaian skripsi ini.
10. Ayah (Alm) dan Ibu tercinta yang telah mendidik dan mengayomi sepenuh hati serta kakak Ahmad Zainin Zahri Abu Aufa dan adik Amniyah Imana serta seluruh keluarga dan guru-guru yang senantiasa mendukung dan bersabar, menerima dan mendoakan serta memberikan semangat dan kasih sayang dalam tak terhingga langkah penulis.
11. Teman-teman jurusan matematika angkatan 2016 yang telah bersama-sama berjuang menyelesaikan kuliah di jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim dan teman-teman lain yang menemani perjalanan penulis sampai di titik ini.
12. Seluruh pihak yang dijadikan perantara pengetahuan dan pemahaman, yang memberikan dukungan dan bantuan secara kasat atau tak kasat mata dalam upaya penyelesaian skripsi ini.

Semoga Allah SWT memberikan berkah atas segala hal baik yang telah diberikan kepada penulis dan Allah sebaik-baik pemberi balasan. Terima kasih.

Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 28 Desember 2022

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .... **i**
HALAMAN PENGAJUAN .... **ii**
HALAMAN PERSETUJUAN .... **iii**
HALAMAN PENGESAHAN .... **iv**
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN .... **v**
MOTTO .... **vi**
PERSEMBAHAN .... **vii**
KATA PENGANTAR .... **viii**
DAFTAR ISI .... **x**
ABSTRAK .... **xii**
ABSTRACT .... **xiii**
ملخص .... **xiv**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 5
1.3 Tujuan Penelitian 5
1.4 Manfaat Penelitian 5
1.5 Batasan Masalah 5
1.6 Definisi Istilah 6
BAB II KAJIAN TEORI **8**
2.1 Teori Pendukung 8
2.1.1 Syarat Cukup 8
2.1.2 Grup 9
2.1.3 Gelanggang 11
2.1.4 Lapangan Hasil Bagi 14
2.1.5 Ideal 20
2.1.6 Ideal Fraksional 25
2.1.7 Kestabilan Ideal 29
2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits 31
2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung 34
BAB III METODE PENELITIAN **35**
3.1 Jenis Penelitian 35
3.2 Pra Penelitian 35
3.3 Tahapan Penelitian 35
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN **36**
4.1 Menunjukkan bahwa Ideal Stabil-ES Lemah Merupakan Kondisi yang Lebih Umum dari Ideal Stabil-ES 37
4.2 Menentukan Kuadrat dari Ideal Stabil-ES Lemah agar Didapatkan Gambaran Awal dari Hubungan Ideal Stabil-ES Lemah dengan Ideal Stabil-ES 39
4.3 Membuktikan Sifat yang Berlaku pada Ideal Stabil-ES Lemah 40
4.4 Menerapkan Sifat Ideal Stabil pada Ideal Stabil-ES Lemah agar Didapatkan Ekivalensi dengan Ideal Stabil-ES 42

BAB V PENUTUP **44**
5.1 Kesimpulan 44
5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan 44
DAFTAR PUSTAKA **45**
RIWAYAT HIDUP **47**

ABSTRAK

Hana, Alfi Unsiati Ummi. 2022. **Ekivalensi Ideal Stabil Eakin-Sathaye dengan Ideal Stabil Eakin-Sathaye Lemah.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Intan Nisfulaila, M.Si, (2) Erna Herawati, M.Pd.

Kata kunci: Kestabilan ideal, Ideal stabil-ES, Ideal stabil-ES lemah

Teori mengenai kestabilan ideal telah banyak dikembangkan, sebagai contoh ideal stabil Eakin-Sathaye (ideal stabil-ES) dan ideal stabil Eakin-Sathaye lemah (ideal stabil-ES lemah). Ideal stabil-ES didefinisikan sebagai ideal taknol I dari daerah integral R yang jika I dikuadratkan kemudian difaktorkan akan menghasilkan perkalian antara ideal I dengan ideal invertibel J dan J termuat di I atau $I^2 = JI$ dan $J \subseteq I$. Sedangkan ideal stabil-ES lemah merupakan ideal taknol I dari daerah integral R yang dapat difaktorkan menjadi perkalian antara ideal fraksional invertibel J dengan ideal fraksional idempoten E di R atau dinotasikan dengan $I = JE$. Ideal stabil-ES merupakan ideal stabil-ES lemah tetapi ideal stabil-ES lemah belum tentu merupakan ideal stabil-ES. Untuk mendapatkan hubungan ekivalensi antara ideal stabil-ES lemah dengan ideal stabil-ES dibutuhkan syarat cukup bagi ideal stabil-ES lemah. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kualitatif. Hasil yang didapatkan dari penelitian ini adalah syarat cukup berupa ideal stabil yang menjamin ideal stabil-ES lemah dapat ekivalen dengan ideal stabil-ES pada daerah integral.

ABSTRACT

Hana, Alfi Unsiati Ummi. 2022. **On the Equivalence of Eakin-Sathaye Stable Ideal and Weakly Eakin-Sathaye Stable Ideal.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Intan Nisfulaila, M.Si, (2) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Stability of ideals, ES-stable ideal, Weakly ES-stable ideal

The stability theory of ideals has been widely developed, for example Eakin-Sathaye stable ideal (ES-stable ideal) and weakly Eakin-Sathaye stable ideal (weakly ES-stable ideal). A nonzero ideal I of integral domain R is said ES-stable ideal if $I^2 = JI$ for some invertible J and $J \subseteq I$. A nonzero ideal I of integral domain R is said to be a weakly ES-stable ideal if I can be factored as a product of invertible fractional ideal J and idempotent fractional ideal E such that $I = JE$. ES-stable ideals are weakly ES-stable but the converse is not true. A sufficient condition is needed to obtain equivalent conditions for weakly ES-stable ideals. This research used qualitative method. The result of this research is stable ideal as sufficient condition for weakly ES-stable ideals such that weakly ES-stable ideals and ES-stable ideals in integral domain are equivalent.

ملخص

حنا ,ألفي أنسيتي أمي. ٢٢. ٢. **علاقة التكافؤ بين *EAKIN -SATHAYE* المستقرة المثالية مع *EAKIN-SATHAYE* المستقر المثالي.** قسم الرياضيات، كلية العلوم و التكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفة: (١) اينتان نصف اليلة الماجستير، (٢) ايرنا هيرواتى الماجستير.

الكلمات الرئيسية : **استقرار مثالي ، استقرار** ES **، استقرار** ES **ضعيف**.

تم تطوير نظرية الاستقرار للمثل العليا على النطاق الواسع ، على سبيل المثال نموذج *Eakin-Sathaye* المستقر (مثالي ES- ثابت) والمثالي المستقر بشكل ضعيف *Eakin-Sathaye* (مثالي ES المستقر بشكل ضعيف). يُقال عن مثالية غير صفرية I للمجال المتكامل مثالية ES- مستقرة إذا $JI = I^2$ لبعض $J \subseteq I$ و J معكوس. مثالية غير صفرية I من يُقال أن المجال المتكامل هو مثال مستقر بشكل ضعيف ES إذا كان من الممكن تحليل I كمنتج للانعكاس المثالية الكسرية J والمثالية الكسرية المثالية E مثل أن $JE=I$. المُثُل المستقر ES ضعيف الاستقرار لكن العكس ليس صحيحًا. هناك حاجة إلى حالة كافية للحصول على ظروف معادلة للمثل العليا المستقرة بشكل ضعيف. استخدام هذا البحث المنهج النوعي. تعتبر نتيجة هذا البحث مثالية مستقرة كشرط كافٍ للمثل العلي المستقر بشكل ضعيف ES مثل المثل العلي المستقر بشكل ضعيف والمثل المستقر ES في المجال المتكامل متكافئة.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori-teori mengenai ideal telah banyak dikembangkan, salah satunya adalah kestabilan ideal. Teori kestabilan ideal pada gelanggang telah dikenal dan digunakan pada tahun 60-an oleh H. Bass dan E. Matliss. Kemudian pada tahun 1971, diperkenalkan kestabilan baru oleh Joseph Lipman dalam artikelnya yang berjudul "*Stable Ideals and Arf Rings"*. Kestabilan tersebut dinamakan kestabilan Lipman (*L-stable*) (Gabelli dan Roitman, 2014). Konsep mengenai kestabilan-L dikaji lebih dalam oleh Sally dan Vasconcelos pada tahun 1973 dan oleh Eakin dan Sathaye pada tahun 1976. Sally dan Vasconcelos mempublikasikan artikel berjudul "*Stable Rings and a Problem of Bass*" yang memperkenalkan konsep kestabilan Sally-Vasconcelos (kestabilan-SV). Sementara Eakin dan Sathaye dalam artikelnya yang berjudul "*Prestable Ideals*" memaparkan konsep *prestable ideal* dan ideal stabil Eakin-Sathaye (ideal stabil-ES) pada gelanggang lokal.

Kemudian Mimouni (2017) memperkenalkan Ideal stabil-ES pada daerah integral. Ideal stabil-ES didefinisikan sebagai ideal taknol I dari daerah integral R yang jika I dikuadratkan, ideal I dapat difaktorkan menjadi perkalian antara ideal I dengan ideal J dengan $J \subseteq I$. Secara singkat ideal-ES dapat dinotasikan dengan $I^2 = JI$. Ideal merupakan subgelanggang I yang hasil kali setiap elemen dari I dengan elemen-elemen di gelanggang R bersifat tertutup di I. Dengan kata lain, subgelanggang I merupakan ideal jika untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$ berlaku $ar \in I$ (ideal kiri) dan $ra \in I$ (ideal kanan). Subgelanggang dari gelanggang R merupakan suatu subhimpunan takkosong I dari R yang memenuhi aksioma-aksioma gelanggang terhadap dua operasi R (operasi biner penjumlahan dan perkalian) (Gallian, 2013). Setiap gelanggang R paling tidak mempunyai dua ideal, yaitu ideal $\{0\}$ (*zero ideal*) dan R (Larsen & McCharty, 1971).

Gelanggang R adalah suatu himpunan disertai operasi biner penjumlahan dan perkalian sehingga penjumlahannya memenuhi sifat asosiatif, komutatif, eksistensi identitas, eksistensi invers, dan perkaliannya bersifat asosiatif serta memenuhi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan. Gelanggang R dikatakan daerah integral jika operasi perkalian pada R bersifat komutatif, R memiliki elemen kesatuan (identitas terhadap perkalian) dan R tidak memuat pembagi nol (Gallian, 2013). Lebih lanjut, dari sebarang daerah integral dapat dibentuk lapangan hasil bagi.

Selanjutnya akan diperkenalkan definisi modul. Misalkan R adalah gelanggang dengan unsur kesatuan dan M grup komutatif terhadap penjumlahan. Grup M dapat dikatakan sebagai R-modul M jika terhadap operasi perkalian skalar yang didefinisikan, grup M memenuhi aksioma-aksioma modul. Selanjutnya, jika terdapat subgrup N dalam grup M dan N membentuk modul terhadap operasi perkalian skalar yang sama seperti pada R-modul M, subgrup N disebut R-submodul N (Wahyuni dkk., 2016). Suatu R-submodul taknol N dari daerah integral R dan lapangan hasil bagi Q merupakan ideal fraksional jika berlaku $aN \subseteq R$ untuk suatu $a \in R, a \neq 0$ (Larsen & McCarthy, 1971). Suatu ideal fraksional N dikatakan memiliki invers jika terdapat ideal fraksional K dari R sedemikian sehingga $NK = R$ dan ideal fraksional N dikatakan idempoten jika $N = N^2$ (Mimouni, 2017).

Pada tahun 2017, Mimouni memperkenalkan ide kestabilan baru, yaitu ideal stabil Eakin-Sathaye lemah atau disingkat ideal stabil-ES lemah (*weakly-ES stable*) dalam artikelnya yang berjudul "*Factoring Ideals and Stability in Integral Domains*". Mimouni mendefinisikan ideal stabil-ES lemah sebagai ideal taknol I dari daerah integral R yang dapat difaktorkan menjadi perkalian antara ideal fraksional invertibel J dengan ideal fraksional idempoten E atau dinotasikan $I = JE$ (Mimouni, 2017).

Kestabilan dari sudut pandang kehidupan dapat dimaknai dengan mengingat firman Allah SWT dalam QS. Al-Qashash ayat 77

وَابْتَغِ فِيْمَآ اٰتٰىكَ اللّٰهُ الدَّارَ الْاٰخِرَةَ وَلَا تَنْسَ نَصِيْبَكَ مِنَ الدُّنْيَا وَاَحْسِنْ كَمَآ اَحْسَنَ اللّٰهُ اِلَيْكَ وَلَا تَبْغِ الْفَسَادَ فِى الْاَرْضِۗ اِنَّ اللّٰهَ لَا يُحِبُّ الْمُفْسِدِيْنَ

"Dan carilah (pahala) negeri akhirat dengan apa yang telah dianugerahkan oleh Allah kepadamu tetapi janganlah kamu lupakan bagianmu di dunia dan berbuat baiklah (kepada orang lain) sebagaimana Allah telah berbuat baik kepadamu, dan janganlah kamu berbuat kerusakan di bumi."(QS.Al-Qashash/28:77).

Ayat tersebut mengingatkan manusia bahwa kehidupan di dunia hanyalah sarana untuk beramal demi kehidupan yang lebih kekal. Kelalaian manusia terhadap akhirat dan ambisi untuk memperoleh dunia dapat membawa ketidakstabilan terhadap kehidupan manusia itu sendiri. Dengan demikian, patut direnungkan apa yang dikatakan oleh Syekh Muzaffer, "Sibukkan tanganmu dengan melakukan pekerjaan duniawi, dan sibukkan hatimu dengan Allah" (Frager, 2005). Sebagai contoh adalah melakukan penelitian sebagai upaya memahami kekuasaan Allah, memuji kebesaran-Nya dan menjadi saksi luasnya rahmat Allah dalam segala sesuatu, termasuk di dalamnya meneliti keterhubungan antara penelitian-penelitan terdahulu dengan penelitian terbaru.

Penelitian mengenai hubungan antara ideal-ideal stabil, seperti hubungan antara ideal stabil-L dengan ideal stabil-SV pernah diteliti oleh Anderson, dkk (1987) dalam artikel berjudul "*a Note on Stable Domain*". Kemudian pada tahun 2014, Gabelli meneliti hubungan antara ideal stabil-L, ideal stabil-SV, dan ideal stabil-ES dan mempublikasikan artikel berjudul "*Ten Problem on Stability of Domains*". Selanjutnya pada Mimouni (2017), dikaji hubungan antara ideal stabil-ES dengan ideal stabil-ES lemah. Ideal stabil-ES jelas merupakan ideal stabil-ES lemah tetapi ideal stabil-ES lemah belum tentu ideal stabil-ES. Hal tersebut menarik untuk dikaji karena terdapat kemungkinan kondisi ekivalen untuk ideal stabil-ES lemah terkait dengan ideal stabil-ES.

Dalam matematika, dua objek berbeda dapat dikatakan ekivalen dalam suatu konteks atau ruang semesta tertentu namun tidak ekivalen dalam konteks atau ruang semesta yang lain. Sebagai contoh, penjumlahan yang umum dikenal dalam himpunan bilangan bulat yaitu semisal $3 + 3$ dan $6 + 5$ menghasilkan angka yang berbeda yaitu masing-masing 6 dan 11. Akan tetapi, dalam penjumlahan himpunan bilangan bulat modulo 5 keduanya menghasilkan angka 1 (Gallian, 2013). Lebih lanjut, dalam matematika dikenal kondisi ekivalen (*equivalent conditions*) dan relasi ekivalen (*equivalence relation*). Berbeda dengan relasi ekivalen yang harus memuat tiga sifat yaitu, refleksif (*reflexive property*) simetris (*symmetric property*), dan transitif (*transitive property*), kondisi ekivalen berkaitan dengan syarat cukup (*sufficient condition*) dan syarat perlu (*necessary condition)*.

Salah satu contoh kondisi ekivalen dapat dilihat pada Gilbert & Gibert (2009) tentang kondisi ekivalen untuk grup. Pada buku tersebut dijelaskan bahwa selain dari definisi yang telah disepakati oleh matematikawan mengenai grup, dapat dibentuk alternatif definisi yang memenuhi syarat cukup dan syarat perlu untuk menjadi grup. Jika dikaitkan dengan ideal stabil-ES lemah, perlu diberikan syarat cukup untuk ideal stabil-ES lemah sehingga terpenuhi ekivalensi antara ideal stabil-ES lemah dengan ideal stabil-ES pada daerah integral. Oleh karena itu, penulis mengkaji hubungan ideal stabil-ES lemah dengan ideal stabil-ES pada daerah integral dengan artikel Mimouni yang berjudul "*Factoring Ideals and Stability in Integral Domain* sebagai rujukan utama. Namun demikian, penyajian hasil, langkah-langkah pembuktian, serta seluruh alur penulisan disesuaikan dengan tujuan penulisan skripsi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, rumusan masalah yang dalam penelitian ini adalah bagaimana syarat cukup agar ideal stabil-ES lemah ekivalen dengan ideal stabil-ES pada daerah integral?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan yang hendak dicapai dalam penelitian ini adalah untuk mengetahui syarat cukup agar ideal stabil-ES lemah ekivalen dengan ideal stabil-ES pada daerah integral.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan informasi dan pengetahuan lebih lanjut mengenai teori gelanggang dan modul, khususnya terkait kestabilan ideal, yaitu ideal stabil-ES dan ideal stabil-ES lemah.

1.5 Batasan Masalah

Ekivalensi dalam penelitian ini merujuk pada pernyataan biimplikasi antara ideal stabil-ES dengan ideal stabil-ES lemah.

1.6 Definisi Istilah

Pada subbab berikut ini akan diberikan definisi untuk istilah-istilah yang menjadi fokus dalam penelitian ini yaitu:

Biimplikasi	:	Misalkan p dan q masing-masing merupakan pernyataan atau proposisi. Biimplikasi digunakan untuk menyambung dua pernyataan dengan masing-masing implikasi $p \Longrightarrow q$ dan konversnya $q \Longrightarrow p$ bernilai benar. Biimplikasi dinyatakan dengan p jika dan hanya jika q atau yang dinotasikan dengan $p \Longleftrightarrow q$. Selain …jika dan hanya jika…, kalimat yang semakna dengan $p \Longleftrightarrow q$ adalah p ekivalen dengan q (Suryanti & Zawawi, 2014).
Syarat Cukup	:	Jika p merupakan syarat cukup bagi q maka p harus menjamin q terjadi (Suryanti & Zawawi, 2014). Proposisi p tidak dapat dikatakan syarat cukup jika p tidak menjamin terjadinya q. Jadi dapat dikatakan jika diketahui I ideal stabil-ES lemah, I belum cukup untuk menjamin ideal stabil-ES lemah merupakan ideal stabil-ES sehingga perlu diteliti syarat cukup bagi ideal stabil-ES lemah agar kondisi ekivalen dengan ideal stabil-ES pada daerah integral terpenuhi.

Ideal Stabil-ES	:	Misalkan R daerah integral dan I ideal taknol dari R. Ideal I merupakan ideal stabil-ES jika $I^2 = JI$ dengan $JJ^{-1} = R$ dan $J \subseteq I$.
Ideal Stabil-ES Lemah	:	Misalkan R daerah integral dan I ideal taknol dari R. Ideal I merupakan ideal stabil-ES jika $I^2 = JI$ dengan $JJ^{-1} = R$ dan $J \subseteq I$.

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Syarat Cukup

Dalam logika matematika, dikenal istilah biimplikasi yang dinotasikan dengan $\Leftrightarrow$. Misalkan p dan q masing-masing merupakan suatu pernyataan (proposisi), biimplikasi dari dua pernyataan tersebut atau $p \Leftrightarrow q$ bernilai benar jika implikasi atau $p \Longrightarrow q$ bernilai benar dan konversnya atau $q \Longrightarrow p$ juga bernilai benar. Dalam implikasi atau yang dinotasikan dengan $p \Longrightarrow q$, proposisi p dapat dikatakan sebagai syarat cukup untuk q. Sebagai tambahan, q merupakan syarat perlu untuk p (Suryanti & Zawawi, 2014). Lebih lanjut akan dipaparkan definisi syarat cukup sebagai berikut.

Definisi 2.1

Misalkan p dan q masing-masing merupakan proposisi. Jika p merupakan syarat cukup bagi q maka p harus mampu menjamin q akan terjadi. Namun demikian, p hanyalah salah satu syarat untuk menjamin q terjadi (Houston, 2009).

Contoh 2.1

"Jika suatu segitiga merupakan segitiga sama sisi maka segitiga tersebut merupakan segitiga sama kaki."

Dari pernyataan tersebut, didapatkan syarat cukup suatu segitiga dikatakan sama kaki adalah sama sisi. Jadi segitiga sama sisi akan menjamin suatu segitiga juga sama kaki. Namun demikian untuk menjadi segitiga sama kaki tidak perlu harus memenuhi syarat sama sisi atau semua sisi sama. Dengan kata lain, segitiga sama sisi hanyalah salah satu kondisi yang menjamin suatu segitiga dapat dikatakan sama kaki. Sebagai tambahan untuk membedakan dengan syarat perlu, suatu segitiga sama sisi perlu untuk sama kaki tetapi segitiga sama kaki tidak cukup untuk menjamin segitiga tersebut sama sisi. Jadi, syarat perlu belum tentu cukup untuk menjamin suatu implikasi bernilai benar (Suryanti & Zawawi, 2014).

2.1.2 Grup

Definisi 2.2

Misalkan G himpunan takkosong dan pada G didefinisikan suatu operasi biner yang dinotasikan $+$ (selanjutnya disebut operasi penjumlahan). Himpunan G disebut grup terhadap operasi penjumlahan dan dilambangkan $(G,+)$, (selanjutnya hanya ditulis G) jika memenuhi sifat-sifat berikut:

a. untuk setiap $g_1, g_2, g_3 \in G$ berlaku $(g_1 + g_2) + g_3 = g_1 + (g_2 + g_3)$ (aksioma asosiatif);
b. terdapat $0 \in G$ sehingga untuk setiap $g_1 \in G$ berlaku $0 + g_1 = g_1 = g_1 + 0$ (aksioma eksistensi unsur identitas);
c. untuk setiap $g_1 \in G$ terdapat $g_2 \in G$ sehingga $g_1 + g_2 = 0 = g_2 + g_1$ (aksioma eksistensi unsur invers).

Grup G disebut grup komutatif (abelian) jika operasi biner penjumlahan pada G bersifat komutatif, yaitu untuk setiap $g_1, g_2 \in G$ berlaku $g_1 + g_2 = g_2 + g_1$ (Gilbert & Gilbert, 2009).

Contoh 2.2

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan atau $(\mathbb{Z},+)$, selanjutnya hanya ditulis $\mathbb{Z}$, dan himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ terhadap operasi penjumlahan atau $(\mathbb{Q},+)$, selanjutnya hanya ditulis $\mathbb{Q}$, masing-masing merupakan grup karena memenuhi aksioma-aksioma grup. Oleh karena elemen-elemen di $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan dan elemen-elemen di $\mathbb{Q}$ terhadap operasi penjumlahan masing-masing bersifat komutatif, maka $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Q}$ merupakan grup komutatif.

Pada Definisi 2.2 telah dipaparkan aksioma-aksioma grup yang harus dipenuhi oleh suatu himpunan takkosong terhadap operasi biner. Pada Teorema 2.1 berikut akan dipaparkan cara lain untuk membentuk grup atau dengan kata lain kondisi ekivalen untuk grup yang dikutip dari Gilbert & Gilbert (2009).

Teorema 2.1

Misalkan G himpunan takkosong yang tertutup terhadap operasi biner asosiatif. Himpunan G dikatakan grup jika dan hanya jika persamaan $ax = b$ dan $ya = b$ mempunyai solusi x dan y di G untuk sebarang a dan b di G.

Berdasarkan teorema tersebut, terdapat salah satu cara, selain dari definisi yang disepakati matematikawan untuk membentuk grup, yaitu dengan melihat eksistensi solusi pada grup untuk persamaan yang diberikan. Cara lain untuk membentuk grup sebagaimana teorema tersebut dikatakan sebagai kondisi ekivalen untuk membentuk grup. Pada proses pembuktian digunakan kaidah biimplikasi yaitu $p \implies (q \wedge r)$ dan $(q \wedge r) \implies p$ dengan masing-masing p menotasikan proposisi yaitu jika G grup, q menotasikan proposisi persamaan $ax = b$ memiliki solusi dan r menotasikan proposisi persamaan $ya = b$ memiliki solusi dan $(q \wedge r)$ mengatakan bahwa q dan r bernilai benar jika masing-masing q dan r bernilai benar. Hal tersebut sejalan dengan penelitian ini karena terdapat cara lain untuk membentuk ideal stabil-ES yaitu melalui ideal stabil-ES lemah yang dilengkapi dengan syarat cukup tertentu.

Selanjutnya akan diberikan definisi mengenai subgrup. Pemaparan definisi mengenai grup diperlukan untuk definisi gelanggang dan modul. Sedangkan definisi subgrup diperlukan untuk definisi ideal dan submodul.

Definisi 2.3

Suatu subhimpunan tak kosong H di dalam grup G dikatakan subgrup dari G jika H memenuhi aksioma-aksioma grup terhadap operasi yang sama (yang didefinisikan) pada grup G dan dinotasikan $H \leq G$ (Gilbert dan Gilbert, 2009).

Contoh 2.3

Grup $\mathbb{Z}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Q}$ atau $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$ karena $\mathbb{Z}$ merupakan subhimpunan takkosong di dalam grup $\mathbb{Q}$ dan memenuhi aksioma-aksioma grup terhadap operasi penjumlahan yang didefinisikan pada $\mathbb{Q}$.

2.1.3 Gelanggang

Definisi 2.4

Himpunan takkosong R yang dilengkapi dengan dua operasi biner, yang dinotasikan dengan $+$ dan $\times$ (selanjutnya disebut operasi penjumlahan dan perkalian) disebut gelanggang $(R, +, \times)$ jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

a. $(R, +)$ merupakan grup komutatif atau grup abelian;
b. operasi perkalian $\times$ di R bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$ berlaku $(r_1 \times r_2) \times r_3 = r_1 \times (r_2 \times r_3)$;
c. operasi perkalian $\times$ terhadap penjumlahan $+$ di R bersifat distributif, yaitu untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$ berlaku distributif kiri

$$r_1 \times (r_2 + r_3) = (r_1 \times r_2) + (r_1 \times r_3)$$

dan distributif kanan

$$(r_1 + r_2) \times r_3 = (r_1 \times r_3) + (r_2 \times r_3).$$

Gelanggang $(R,+,\times)$, selanjutnya hanya dinotasikan dengan R, disebut gelanggang komutatif jika operasi $\times$ komutatif, yaitu untuk setiap $r,s \in R$ berlaku $rs = sr$. Gelanggang R merupakan gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan jika R merupakan gelanggang komutatif dan R memuat unsur kesatuan (identitas terhadap perkalian) (Gilbert dan Gilbert, 2009). Selanjutnya unsur kesatuan dari gelanggang R akan dinotasikan dengan 1_R.

Contoh 2.4

Gelanggang $\mathbb{Z}$ dan gelanggang $\mathbb{Q}$ merupakan gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

Selanjutnya akan diberikan definisi mengenai daerah integral dengan terlebih dahulu diberikan definisi mengenai pembagi nol, yang keduanya dikutip dari Wahyuni dkk., 2016).

Definisi 2.5

Misalkan R gelanggang dan $a \in R$, $a \neq 0$. Unsur a dikatakan pembagi nol jika terdapat $b \in R$ dan $b \neq 0$ sehingga $ab = ba = 0$.

Definisi 2.6

Suatu gelanggang komutatif R dengan unsur kesatuan disebut daerah integral jika R tidak memuat pembagi nol.

Contoh 2.5

Diberikan gelanggang himpunan bilangan bulat modulo n atau $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ dengan n bilangan asli dan $\mathbb{Z}_n$ berisi himpunan kelas-kelas $[0]_n[1]_n \ldots [n-1]_n$. Operasi biner penjumlahan pada $\mathbb{Z}_n$ didefinisikan dengan $[x]_n + [y]_n = [x+y]_n$ dan operasi biner perkalian $(\times)$ pada $\mathbb{Z}_n$ didefinisikan dengan $[x]_n \times [y]_n = [x \times y]_n$. Misalkan $\mathbb{Z}_{10}$ dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian modulo

10, didapatkan $[2]_{10}$ dan $[5]_{10}$ merupakan pembagi nol karena $[2]_{10} \times [5]_{10} = [2 \times 5]_{10} = [0]_{10}$ sehingga gelanggang $\mathbb{Z}_{10}$ bukan merupakan daerah integral karena $\mathbb{Z}_{10}$ memuat pembagi nol.

Contoh 2.6

Gelanggang bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ merupakan daerah integral karena $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Q}$ tidak memuat pembagi nol.

Pada daerah integral terdapat hubungan antara pembagi nol dengan sifat kanselasi, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ dengan $a \neq 0$ berlaku $ab = ac$ sedemikian sehingga berakibat $b = c$. Hal tersebut akan dijelaskan pada Teorema 2.2 berikut. Teorema tersebut akan diaplikasikan dalam pembentukan lapangan hasil bagi terkait dengan relasi ekivalen yaitu membuktikan sifat transitif pada suatu himpunan yang didefinisikan.

Teorema 2.2

Misalkan diberikan sebarang gelanggang R. Jika R tidak memuat pembagi nol maka hukum kanselasi berlaku di R.

Bukti:

Misalkan R tidak memuat pembagi nol. Ambil sebarang $a, b, c \in R, a \neq 0$ sedemikian sehingga $ab = ac$. Karena $ab = ac$, diperoleh $ab - ac = 0$ dan berdasarkan sifat distributif $a\,(b - c) = 0$. Karena R tidak memuat pembagi nol dan $a \neq 0$ berakibat $b - c = 0$ sehingga diperoleh $b = c$. ■

Selanjutnya akan diberikan definisi mengenai lapangan dengan terlebih dahulu diberikan definisi mengenai unit yang keduanya dikutip dari Wahyuni dkk (2016).

Definisi 2.7

Misalkan R gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan 1_R dan $u \in R$ merupakan unsur taknol. Unsur u dikatakan unit di R jika terdapat $v \in R$ sedemikian sehingga $uv = 1_R = vu$.

Definisi 2.8

Gelanggang komutatif R dengan unsur kesatuan 1_R disebut lapangan jika setiap unsur taknol di R merupakan unit.

Contoh 2.7

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ bukan merupakan lapangan karena terdapat $2 \in \mathbb{Z}$ sebagai unsur taknol yang bukan unit.

Contoh 2.8

Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ adalah lapangan karena setiap unsur taknol di $\mathbb{Q}$ merupakan unit.

2.1.4 Lapangan Hasil Bagi

Pada pembentukan lapangan hasil bagi dibutuhkan definisi daerah integral dan lapangan karena konsep lapangan hasil bagi merupakan perumuman dari lapangan himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ yang dapat dibentuk dari daerah integral himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Jadi akan ditunjukkan bahwa dari sebarang daerah integral dapat dibentuk lapangan hasil bagi.

Sebelumnya akan dipaparkan mengenai definisi relasi ekivalen. Penggunaan kata ekivalen dalam relasi ekivalen berbeda dengan makna kata ekivalen dalam judul. Definisi relasi ekivalen berkaitan dengan tiga sifat, yaitu simetris, transitif, dan simetris. Lebih lanjut akan dibahas dalam definisi berikut yang dikutip dari Gallian (2013).

Definisi 2.9

Suatu relasi pada himpunan S adalah subhimpunan R dari pasangan berurutan (produk Cartesian $S \times S$) pada S. Suatu relasi R pada himpunan S merupakan relasi ekivalen jika berlaku

a. $(a, a) \in R$ untuk semua $a \in S$ (sifat refleksif) yaitu setiap elemen dalam himpunan itu berelasi dengan dirinya sendiri;

b. $(a, b) \in R$ berimplikasi $(b, a) \in R$ (sifat simetris) yaitu apabila terdapat elemen b di himpunan tersebut berelasi dengan a maka a berelasi dengan b;

c. $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$ berimplikasi $(a, c) \in R$ (sifat transitif).

Contoh 2.9

Misalkan D daerah integral dan $D^* = D - \{0\}$. Didefinisikan himpunan

$$D \times D^* = \{(p, q) \mid p \in D,\ q \in D^*\} \text{ dengan } D^* = D \backslash \{0\}.$$

dengan relasi $\sim$ pada $D \times D^*$ sebagai berikut

$$(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2) \Leftrightarrow p_1 . q_2 = q_1 . p_2 .$$

Akan ditunjukkan relasi $\sim$ merupakan relasi ekivalen.

a. Refleksif, yaitu misalkan $(p_1, q_1) \in D \times D^*$ dengan $(p_1, q_1) \sim (p_1, q_1)$ maka $p_1 . q_1 = q_1 . p_1$. Jadi relasi $\sim$ bersifat refleksif.

b. Simetris, yaitu misalkan $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in D \times D^*$ dengan $(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2)$, maka $p_1 . q_2 = q_1 . p_2$ dan $p_2 . q_1 = q_2 . p_1$. Oleh karena itu $(p_2, q_2) \sim (p_1, q_1)$. Jadi relasi $\sim$ bersifat simetris.

c. Transitif, yaitu misalkan (p_1, q_1), (p_2, q_2), $(p_3, q_3) \in D \times D^*$ dengan $(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2)$ dan $(p_2, q_2) \sim (p_3, q_3)$, artinya $p_1 . q_2 = q_1 . p_2$ dan $p_2 . q_3 = q_2 . p_3$. Perhatikan dengan sifat asosiatif dan komutatif perkalian diperoleh

$$(p_2.q_2)(p_1.q_3) = (p_2.q_2)(q_1.p_3)$$

karena pada daerah integral D berlaku hukum kanselasi $p_2.q_2$ maka diperoleh $p_1.q_3 = q_1.p_3$ sehingga $(p_1, q_1) \sim (p_3, q_3)$. Jadi relasi $\sim$ bersifat transitif.■

Dengan demikian relasi $\sim$ merupakan relasi ekivalen. Oleh karena relasi $\sim$ merupakan relasi ekivalen maka akan terbentuk kelas-kelas ekivalen yang mempartisi $D \times D^*$. Misalkan $(p, q) \in D \times D^*$. Kelas ekivalen yang memuat (p, q) dinotasikan

$$K_{(p,q)} = \{(x, y) \in D \times D^* |\ (x, y) \sim (p, q)\}.$$

Kemudian dibentuk himpunan kelas-kelas ekivalen yang dinotasikan dengan Q dan kelas ekivalensi yang memuat (p, q) dinotasikan $\frac{p}{q}$ sehingga

$$Q = \left\{K_{(p,q)} |\ (p, q) \in D \times D^*\right\}$$

$$= \left\{\frac{p}{q} |(p, q) \in D \times D^*\right\}.$$

Selanjutnya pada himpunan Q didefiniskan operasi $+^*\ dan\ .^*$ sebagai berikut

$$\frac{p_1}{q_1} +^* \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}; \qquad \frac{p_1}{q_1} .^* \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1p_2}{q_1q_2}.$$

Dalam proses pembentukan lapangan hasil bagi yang dikutip dari Wahyuni, dkk (2016), pertama-tama didefinisikan operasi $+^*\ dan\ .^*$ pada himpunan Q dan akan dibuktikan kedua operasi tersebut *well-defined*. Diberikan sebarang

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2} \in Q; \qquad \frac{p_1}{q_1} = \frac{r_1}{s_1}; \qquad \frac{p_2}{q_2} = \frac{r_2}{s_2}$$

sehingga

$$\frac{p_1}{q_1} +^* \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2} = \frac{r_1s_2 + r_2s_1}{s_1s_2} = \frac{r_1}{s_1} +^* \frac{r_2}{s_2}$$

dan

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot^* \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} = \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2} = \frac{r_1}{s_1} \cdot^* \frac{r_2}{s_2}.$$

Kedua, akan dibuktikan bahwa himpunan Q merupakan lapangan yang akan diuraikan dalam langkah-langkah berikut:

a. membuktikan ketertutupan pada $+^*$

   diberikan sebarang $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \in Q$ maka

$$\frac{p_1}{q_1} +^* \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2} \in D \times D^*.$$

   jadi, operasi $+^*$ bersifat tertutup pada himpunan Q;

b. membuktikan sifat asosiatif pada $+^*$

   diberikan sebarang $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3} \in Q$ maka

$$\left(\frac{p_1}{q_1} +^* \frac{p_2}{q_2}\right) +^* \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_1}{q_1} +^* \left(\frac{p_2}{q_2} +^* \frac{p_3}{q_3}\right)$$

   jadi, operasi $+^*$ bersifat asosiatif pada himpunan Q;

c. membuktikan unsur identitas pada $+^*$

   terdapat $\frac{0}{q} \in Q$ sehingga untuk setiap $\frac{p_1}{q_1} \in Q$ berlaku

$$\frac{p_1}{q_1} +^* \frac{0}{q} = \frac{p_1 q + 0 q_1}{q_1 q} = \frac{p_1 q}{q_1 q} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{q p_1}{q q_1} = \frac{0 q_1 + p_1 q}{q q_1} = \frac{0}{q} +^* \frac{p_1}{q_1}$$

   jadi $\frac{0}{q} \in Q$ merupakan unsur identitas terhadap operasi $+^*$;

d. membuktikan operasi $+^*$ bersifat komutatif

   diberikan sebarang $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ berlaku

$$\frac{p}{q} +^* \frac{r}{s} = \frac{ps +^* rq}{qs} = \frac{rq +^* ps}{sq} = \frac{r}{s} +^* \frac{p}{q}$$

   jadi, operasi $+^*$ bersifat komutatif;

e. membuktikan terdapat invers terhadap $+^*$.

untuk setiap $\frac{p}{q} \in Q$ terdapat $\frac{-p}{q} \in Q$ sehingga

$$\frac{p}{q} +^{*} \frac{-p}{q} = \frac{pq +* (-pq)}{q} = \frac{0}{q} = \frac{(-pq)+^{*}pq}{q} = \frac{-p}{q} +^{*} \frac{p}{q};$$

f. operasi $.^{*}$ bersifat asosiatif.

diberikan sebarang $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}, \frac{t}{u} \in Q$ maka berlaku

$$\left(\frac{p}{q} .^{*} \frac{r}{s}\right) .^{*} \frac{t}{u} = \frac{p}{q} .^{*} \left(\frac{r}{s} .^{*} \frac{t}{u}\right)$$

operasi $+^{*}$ dan $.^{*}$ bersifat distributif kiri dan distributif kanan di Q

$$\frac{t}{u} .* \left(\frac{p}{q} +^{*} \frac{r}{s}\right) = \left(\frac{t}{u} .^{*} \frac{p}{q}\right) +^{*} \left(\frac{t}{u} .^{*} \frac{r}{s}\right)$$

$$\left(\frac{p}{q} +^{*} \frac{r}{s}\right) .^{*} \frac{t}{u} = \left(\frac{p}{q} .^{*} \frac{t}{u}\right) +^{*} \left(\frac{r}{s} .^{*} \frac{t}{u}\right);$$

g. membuktikan unsur identitas terhadap $.^{*}$

terdapat unsur identitas $\frac{q}{q}, q \in Q$ sehingga untuk setiap $\frac{p_1}{q_1} \in Q$ berlaku

$$\frac{p_1}{q_1} .^{*} \frac{q}{q} = \frac{p_1 q}{q_1 q} = \frac{p_1}{q_1} = \frac{q p_1}{q q_1} = \frac{q}{q} .^{*} \frac{p_1}{q1};$$

h. membuktikan operasi $.^{*}$ bersifat komutatif

diberikan sebarang $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ berlaku

$$\frac{p}{q} .^{*} \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs} = \frac{rp}{sq} = \frac{r}{s} .^{*} \frac{p}{q};$$

i. memuat invers terhadap $.^{*}$

terdapat $\frac{q}{p} \in Q$ sehingga untuk setiap $\frac{p}{q} \in Q$ dengan $p \neq 0$ berlaku

$$\frac{p}{q} .^{*} \frac{q}{p} = \frac{pq}{qp} = \frac{q}{q} = \frac{qp}{pq} = \frac{q}{p} .^{*} \frac{p}{q};$$

Dengan demikian Q merupakan lapangan karena memenuhi aksioma-aksioma lapangan yang dipaparkan dari a-i.

Pada langkah ketiga, akan ditunjukkan bahwa terdapat monomorfisma dari D ke Q. Namun sebelumnya akan diberikan definisi mengenai homomorfisma gelanggang, monomorfisma gelanggang, dan penyisipan suatu gelanggang pada gelanggang lain yang dikutip dari Wahyuni, dkk (2016).

Definisi 2.10

Misalkan A dan B masing-masing adalah gelanggang. Suatu pemetaan ϕ dari A ke B atau $\phi : A \rightarrow B$ disebut homomorfisma gelanggang jika untuk setiap $a, b \in R$ berlaku ϕ mengawetkan operasi penjumlahan atau $\phi\ (a + b) = \phi\ (a) + \phi\ (b)$ dan ϕ mengawetkan operasi perkalian atau $\phi\ (ab) = \phi(a)\ \phi(b)$.

Definisi 2.11

Suatu homomorfisma ϕ dari gelanggang A ke gelanggang B disebut monomorfisma jika ϕ merupakan pemetaan injektif.

Definisi 2.12

Misalkan R dan S masing-masing merupakan gelanggang. Gelanggang R dikatakan dapat disisipkan pada gelanggang S jika dari R ke S terdapat suatu monomorfisma.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa terdapat monomorfisma dari D ke Q. Didefinisikan suatu pemetaan i dari D ke Q atau $i: D \rightarrow Q$ dengan $i(a) = \frac{a}{1}$. Ambil sebarang $p, q \in D$ sehingga

$$i(p) = \left(\frac{p}{1}\right) = p$$

dan

$$i(q) = \left(\frac{q}{1}\right) = q.$$

Dengan demikian, i merupakan homomorfisma gelanggang yang bersifat injektif. Jadi D dikatakan dapat disisipkan pada Q. Oleh karena itu, untuk sebarang daerah integral D dapat dibentuk lapangan hasil bagi Q.

Contoh 2.10

Lapangan hasil bagi atas daerah integral bilangan bulat $\mathbb{Z}$ adalah lapangan bilangan rasional $\mathbb{Q}$.

2.1.5 Ideal

Sebelum menuju uraian mengenai ideal, akan diberikan definisi dari subgelanggang karena ideal merupakan subgelanggang yang bersifat khusus.

Definisi 2.13

Misalkan S subhimpunan takkosong dari gelanggang R. Himpunan S disebut subgelanggang dari R jika S terhadap dua operasi biner yang sama dengan R juga merupakan gelanggang (Gallian, 2013).

Contoh 2.11

Gelanggang $\mathbb{Z}$ merupakan merupakan subgelanggang dari $\mathbb{Q}$ karena $\mathbb{Z}$ merupakan subhimpunan takkosong dari gelanggang $\mathbb{Q}$ dan memenuhi aksioma-aksioma gelanggang terhadap dua operasi biner (penjumlahan dan perkalian) yang sama dengan $\mathbb{Q}$.

Selanjutnya akan diberikan definisi mengenai ideal yang dikutip dari Larsen & McCarthy (1971).

Definisi 2.14

Misalkan R gelanggang dan I subgelanggang dari R. Subgelanggang I dikatakan ideal jika untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$ berlaku $ar \in I$ (ideal kiri) dan $ra \in I$ (ideal kanan).

Setiap gelanggang R paling tidak mempunyai dua ideal, yaitu ideal $\{0\}$ (*zero ideal*) dan R. Jika R mempunyai ideal yang tidak sama dengan R, ideal tersebut dikatakan ideal sejati atau ideal proper.

Contoh 2.11

Himpunan $2\mathbb{Z}$ dan $3\mathbb{Z}$ merupakan ideal di gelanggang $\mathbb{Z}$.

Selanjutnya akan dibahas mengenai jumlahan pada dua ideal dari gelanggang R merupakan ideal di R.

Teorema 2.3

Misalkan I dan J masing-masing adalah ideal dari gelanggang komutatif R. Jumlahan dari dua ideal didefinisikan sebagai berikut

$$I + J = \{ i + j \mid i \in I, j \in J\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa jumlah dua ideal dari R merupakan ideal dari R.

Ambil sebarang $x \in I + J$ sehingga $x = i_1 + j_1$ dengan $i_1 \in I$ dan $j_1 \in J$ dan ambil sebarang $y \in I + J$ sehingga $y = i_2 + j_2$ dengan $i_2 \in I$ dan $j_2 \in J$.

Akan diperiksa apakah $x - y \in I + J$ dan $rx \in I + J$ dengan $r \in R$

$$x - y = (i_1 + j_1) - (i_2 + j_2) = (i_1 - i_2) + (j_1 - j_2)$$

dengan $(i_1 - i_2) \in I$ dan $(j_1 - j_2) \in J$ sehingga $x - y \in I + J$. Selanjutnya

$$rx = r\,(i_1 + j_1) = r(i_1) + r(j_1)$$

dengan $r(i_1) \in I$ dan $r(j_1) \in J$ sehingga $rx \in I + J$. ■

Dengan demikian hasil jumlahan dari dua ideal juga merupakan ideal di R. Lebih lanjut, akan ditunjukkan jumlahan dua ideal bersifat komutatif.

Selanjutnya akan diberikan definisi perkalian dua ideal yang dikutip dari Wahyuni, dkk (2016). Kemudian akan ditunjukkan bahwa hasil kali dua ideal di gelanggang R juga merupakan ideal di gelanggang R dan perkalian ideal-ideal di gelanggang R komutatif bersifat komutatif, asosiatif, dan distributif.

Teorema 2.4

Misalkan I dan J masing-masing adalah ideal dari gelanggang komutatif R. Perkalian dari dua ideal didefinisikan sebagai berikut

$$IJ = \{ \sum_{i=1}^{n} i_i j_i \mid i_i \in I, j_i \in J, n = 1,2,3,..,n \in \mathbb{N}\}$$

$$= \{i_1 j_1 + i_2 j_2 + \cdots + i_n j_n \mid i_i \in I, j_i \in J, i = 1, 2, 3, \ldots, n \in \mathbb{N}\}.$$

Akan ditunjukkan hasil kali dari dua ideal di R merupakan ideal dari R. Ambil sebarang $x \in IJ$ sehingga $x = \{ \sum_{i=1}^{n} k_i l_i \mid k_i \in I, l_i \in J, n = 1,2,3, \ldots, n \in \mathbb{N}\}$. Ambil sebarang $y \in IJ$ sehingga

$y = \{ \sum_{i=1}^{m} m_i n_i \mid m_i \in I, n_i \in J, m = 1,2,3, \ldots, m \in \mathbb{N}\}$.

Kemudian diperiksa apakah $x - y \in IJ$ dan $rx \in IJ$ dengan $r \in R$

$$x - y = \sum_{i=1}^{n} k_i l_i - \sum_{i=1}^{m} m_i n_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} k_i l_i + \sum_{i=1}^{m} (-m_i) n_i = \sum_{i=1}^{n+m} i_i j_i$$

dengan $i_i = k_i; 1 \leq i \leq n$

$i_i = -m_i; n + 1 \leq i \leq m$

$j_i = l_i; 1 \leq i \leq n$

$j_i = n_i; 1 \leq i \leq m$.

Jadi $i_i \in I$ dan $j_i \in J$ sehingga $x - y \in IJ$.

Selanjutnya $rx = r\,(\sum_{i=i}^{n} k_i l_i) = \sum_{i=i}^{n} (r k_i)\ l_i$ sehingga $r k_i \in I$. ■

Lebih lanjut akan ditunjukkan perkalian dua ideal besifat komutatif

$$IJ = \{ \sum_{i=1}^{n} i_i j_i \mid i_i \in I, j_i \in J, n = 1,2,3,..\}$$

$$= \{ \sum_{i=1}^{n} j_i i_i \mid i_i \in I, j_i \in J, n = 1,2,3,..\} = JI. ■$$

Selanjutnya akan ditunjukkan perkalian dua ideal bersifat asosiatif

$$
\begin{aligned}
I\,(JK) &= i_1(j_1k_1 + \cdots + j_nk_n) + \cdots + i_n(j_1k_1 + \cdots + j_nk_n)\\
&= i_1(j_1k_1) + \cdots + i_1(j_nk_n) + \cdots + i_n(j_1k_1) + i_n(j_nk_n)\\
&= (i_1j_1)k_1 + \cdots + (i_1j_n)k_n + \cdots + (i_nj_1)k_1 + (i_nj_n)k_n\\
&= (IJ)\,K. \blacksquare
\end{aligned}
$$

dan distributif terhadap penjumlahan

$$
\begin{aligned}
I\,(J+K) &= \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} i_i(j_i+k_i)\,|\,i_i \in I, j_i \in J, k_i \in K, n = 1,2,3,\ldots\}\\
&= \sum_{i=1}^{n}(i_ij_i+i_ik_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(i_ij_i) + \sum_{i=1}^{n}(i_ik_i)\\
&= IJ + IK. \blacksquare
\end{aligned}
$$

Pembuktian sifat-sifat operasi pada perkalian ideal diperlukan untuk membuktikan sifat-sifat ideal berikutnya yang dikutip dari Larsen & McCarthy (1971) dengan pembuktian bahwa irisan dua ideal merupakan ideal dari R dapat dilihat pada Wahyuni, dkk (2016). Sifat-sifat tersebut adalah

a. $IJ \subseteq I \cap J$;

b. $I \subseteq J \Rightarrow IK \subseteq JK$;

c. $I\,(J \cap K) \subseteq IJ \cap IK$;

Selanjutnya akan diberikan definisi mengenai perpangkatan pada ideal yang dikutip dari Athiyah & Macdonald (1969).

Definisi 2.15

Suatu ideal I^n dengan n merupakan bilangan bulat positif, I^n merupakan ideal yang dibangun oleh semua hasil kali dari $x_1x_2 \ldots x_n$ dengan $x_i \in I$.

Pembuktian sifat-sifat perkalian pada ideal diperlukan untuk membuktikan sifat perpangkatan pada ideal yang dikutip dari Larsen & Mc. Carthy (1971), yaitu misalkan R gelanggang dan A ideal dari R, didefinisikan pangkat n dan m dengan n, m masing-masing merupakan sebarang bilangan bulat positif berlaku sifat-sifat sebagai berikut:

a. $A^1 = A$ dan $A^n = AA^{n-1}$ jika $n > 1$
b. $A^m A^n = A^{m+n}$
c. $(A^m)^n = A^{mn}$
d. $(AB)^n = A^n B^n$

Selanjutnya akan diberikan definisi mengenai ideal kuosien atau ideal hasil bagi dan akan ditunjukkan bahwa hasil bagi dua ideal merupakan ideal di R.

Teorema 2.5

Misalkan I, J masing-masing adalah ideal di R. Hasil bagi dua ideal didefinisikan sebagai berikut

$$(I : J) = \{rj \in I, \forall j \in J, r \in R\}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan hasil bagi dua ideal merupakan ideal di R.

Ambil sebarang $x \in (I : J)$ sehingga $xj \in I$ untuk semua $j \in J$ dan $x \in R$.

Ambil sebarang $y \in (I : J)$ sehingga $yj \in I$ untuk semua $j \in J$ dan $y \in R$.

Kemudian akan diperiksa $(x - y) \in (I : J)$ dan $r\,(xj) \in I$

$$xj - yj = (x - y)\, j \in I$$

sehingga $(x - y) \in (I : J)$ karena $(x - y) \in R$ dan I ideal di R. Selanjutnya, ambil $r \in R$ sehingga

$$r\,(xj) = (rx)\, j \in I$$

untuk semua $j \in J$ sehingga $rx \in (I : J)$.■

2.1.6 Ideal Fraksional

Sebelum diberikan definisi mengenai ideal fraksional, akan terlebih dahulu diberikan definisi mengenai modul dan submodul yang keduanya dikutip dari Wahyuni, dkk (2016).

Definisi 2.16

Misalkan R gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan dan M grup komutatif terhadap operasi penjumlahan "$+$". Diberikan operasi perkalian skalar atau pemetaan $R \times M \rightarrow M$ dengan $(r, m) \mapsto rm$. Himpunan M disebut modul kiri atas R (R-modul kiri) jika untuk setiap $r, r_1, r_2 \in R$ dan m, m_1, m_2 memenuhi aksioma-aksioma berikut:

a. $r\,(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$;
b. $(r_1 + r_2)\,m = r_1 m + r_2 m$;
c. $(r_1 r_2)\,m = r_1(r_2 m)$;
d. $1_R m = m$ dengan 1_R merupakan unsur kesatuan di R.

Contoh 2.12

Sebarang gelanggang komutatif R yang memuat unsur kesatuan merupakan modul atas dirinya sendiri.

Definisi 2.17

Misalkan R adalah gelanggang dengan unsur kesatuan dan M adalah R-modul. Subhimpunan $N \subseteq M$ disebut submodul jika N merupakan subgrup dari M dan N tertutup terhadap operasi perkalian skalar yang didefinisikan pada R-modul.

Contoh 2.17

Setiap ideal I dalam gelanggang R dengan unsur kesatuan merupakan submodul pada R-modul atas dirinya sendiri.

Selanjutnya akan dipaparkan definisi ideal fraksional yang dikutip dari Larsen & McCarthy (1971) dan operasi-operasi yang berlaku pada ideal fraksional yang dikutip dari Kurniadi (2014).

Definisi 2.18

Misalkan R daerah integral dengan Q lapangan hasil bagi. Suatu ideal fraksional I dari R merupakan R-submodul taknol dari Q sedemikian sehingga $aI \subseteq R$ untuk suatu $a \in R$ dan $a \neq 0$.

Lebih lanjut, ideal pada R pada umumnya diistilahkan dengan *integral ideal* untuk membedakan dengan ideal fraksional. Namun demikian, terdapat hubungan antara ideal dan ideal fraksional yang dikutip dari Kurniadi (2014) dan akan ditunjukkan dalam teorema berikut.

Teorema 2.6

Misalkan R daerah integral dan I ideal taknol dari R. Setiap ideal taknol I dari R merupakan ideal fraksional dari R dan setiap ideal fraksional dari R yang termuat di R merupakan ideal dari R.

Contoh 2.18

Himpunan $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ dari lapangan hasil bagi Q merupakan ideal fraksional dari $\mathbb{Z}$.

Pada ideal fraksional berlaku operasi perkalian. Lebih lanjut akan diuraikan pada teorema berikut yang dikutip dari Dahoklory & Persulessy (2015).

Teorema 2.7

Misalkan A, B masing-masing adalah ideal fraksional di R. Didefinisikan perkalian AB sebagai berikut

$$AB = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in A, b_i \in B, n \in \mathbb{N}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa hasil perkalian dua ideal fraksional juga merupakan ideal fraksional. Diketahui A dan B masing-masing merupakan ideal fraksional dari R sehingga berlaku $xA \subseteq R$ dan $yB \subseteq R$ dengan $x, y \neq 0$ dan $x, y \in R$. Jadi

$$(xA)(yB) = (xy)\ AB \subseteq R$$

karena $x, y \neq 0$ maka $xy \in R$ taknol sehingga AB merupakan submodul taknol dan dengan demikian AB merupakan ideal fraksional. Lebih lanjut, akan dibuktikan perkalian ideal fraksional bersifat komutatif. Misalkan I_1 dan I_2 ideal fraksional dari R. Dari definisi didapatkan

$$I_1I_2 = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \mid a_i \in I_1, b_i \in I_2, n \in \mathbb{N}$$

Oleh karena $I_1 \subseteq K$ dan $I_2 \subseteq K$, maka untuk semua i berlaku $a_ib_i = b_ia_i$ sehingga

$$I_1I_2 = \sum_{i=1}^{n} b_ia_i \mid b_i \in I_2, a_i \in I_1, n \in \mathbb{N} = I_2I_1.$$

Perkalian dua ideal fraksional juga bersifat asosiatif. Misalkan I_1, I_2, dan I_3 ideal fraksional dari R. Dari definisi didapatkan

$$I_3(I_1I_2) = \left\{\sum_{i=1}^{n} c_i(a_ib_i) \mid c_i \in I_3\ a_i \in I_1, b_i \in I_2, n \in \mathbb{N}\right\}$$

karena $a_i, b_i, c_i \in K$ untuk semua i maka berlaku $c_i\ (a_ib_i) = (a_ib_i)\ ci$ sehingga

$$\begin{aligned} I_3(I_1I_2) &= \left\{\sum_{i=1}^{n} c_i(a_ib_i) \mid c_i \in I_3\ a_i \in I_1, b_i \in I_2, n \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n} (c_ia_i)b_i \mid c_i \in I_3\ a_i \in I_1, b_i \in I_2, n \in \mathbb{N}\right\} = (I_3I_1)I_2 \end{aligned}$$

Selanjutnya akan didefinisikan ideal fraksional yang mempunyai invers (ideal fraksional invertibel) dan ideal fraksional idempoten yang dikutip dari Larsen dan McCarthy (1971).

Definisi 2.19

Misalkan R daerah integral dan Q lapangan hasil bagi. Ideal fraksional A dari R dikatakan mempunyai invers jika terdapat ideal fraksional C dari R sedemikian sehingga $AC = R$.

Lebih lanjut, jika suatu ideal fraksional dari daerah integral R mempunyai invers, maka invers tersebut tunggal (Kurniadi, 2014) dan dibangun secara berhingga (Dahoklory & Persulessy, 2015).

Definisi 2.20

Misalkan R daerah integral dan Q lapangan hasil bagi. Ideal fraksional A dari R dikatakan Ideal fraksional idempoten A jika $A = A^2$.

Pada ideal fraksional berlaku hasil bagi dari dua ideal fraksional yang akan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.21

Misalkan R daerah integral, K lapangan hasil bagi dari R, dan I, J masing-masing merupakan ideal fraksional dari D. Ideal kuosien dari J dan I didefinisikan sebagai berikut

$$(J : I) = \{x \in K | xI \subseteq J\}$$

Definisi yang dikutip dari (Barucci, 1986) mengenai ideal kuosien diperlukan dalam pemfaktoran ideal-ideal stabil. Di samping itu berlaku pula sifat operasi pada ideal fraksional yang dikutip dari Clark sebagai berikut.

Misalkan I, J, M masing-masing merupakan ideal fraksional maka berlaku

$$I \cap J = \{x \in K \mid x \in I,\ x \in J\}.$$

Jika $I \subset J$ maka berlaku $IM \subset JM$.

2.1.7 Kestabilan Ideal

Pada tahun 1975, Paul Eakin dan Avinash Sathaye mempublikasikan artikel yang berjudul "*Prestable Ideal*". Di dalam artikel tersebut, diperkenalkan definisi dan notasi dari ideal stabil-ES. Suatu ideal I dari gelanggang lokal dikatakan stabil jika terdapat $x \in I$ sedemikian sehingga $xI = I^2$. Lebih lanjut latar belakang ideal stabil-ES berkaitan dengan reduksi pada ideal. Diberikan gelanggang R dan A, B masing-masing adalah ideal dari R. Ideal B dikatakan sebagai reduksi (*reduction*) dari A jika $B \subseteq A$ dan $BA^n = A^{n+1}$ untuk suatu bilangan bulat positif n (Eakin & Sathaye, 1975). Ideal stabil-ES merupakan pengembangan dari salah satu teorema dalam ideal stabil-L yang diperkenalkan oleh Lipman dalam artikel "*Stable Ideals and Arf Rings*." Kemudian Mimouni (2017) dalam artikel berjudul "*Factoring Ideals and Stability and Integral Domain"* mendefinisikan ideal stabil-ES pada konteks daerah integral sebagai berikut.

Definisi 2.22

Misalkan I ideal taknol dari daerah integral R, ideal I dikatakan ideal stabil-ES jika $I^2 = JI$ dengan $J \subseteq I$.

Definisi 2.23

Daerah integral R dikatakan daerah stabil-ES jika setiap ideal dari R merupakan ideal stabil-ES.

Di samping itu Mimouni juga mengenalkan konsep ideal stabil-ES lemah pada daerah integral yang akan dituliskan dalam definisi berikut.

Definisi 2.24

Misalkan R daerah integral dan I ideal taknol dari daerah integral R. Ideal I dikatakan ideal stabil-ES lemah jika I dapat difaktorkan menjadi ideal fraksional invertibel J dan ideal fraksional idempoten E dari R atau dinotasikan $I = JE$.

Definisi 2.25

Daerah integral R dikatakan daerah stabil-ES lemah jika setiap ideal taknol dari daerah integral R merupakan ideal stabil-ES lemah.

Lebih lanjut, Mimouni (2017) juga memperkenalkan definisi ideal stabil yang akan dibahas dalam Definisi 2.26 berikut,

Definisi 2.26

Suatu ideal I dikatakan stabil jika $I(I : I^2) = (I : I)$.

Kemudian Mimouni (2017) juga menguraikan bahwa ideal stabil-ES jelas merupakan ideal stabil-ES lemah dan ideal stabil. Dengan kata lain, ideal stabil-ES lemah dan ideal stabil merupakan kondisi yang lebih umum dibanding ideal stabil-ES karena kedua ideal tersebut belum tentu ideal stabil-ES. Dalam artikel yang ditulis Mimouni (2017) dipaparkan secara implisit mengenai langkah-langkah untuk ideal stabil-ES lemah dapat dikatakan ekivalen dengan ideal stabil-ES, yaitu: a) menunjukkan bahwa I ideal stabil-ES jelas merupakan ideal stabil-ES lemah dengan $I = JE$ dan $J \subseteq I \subseteq E$ dengan masing-masing J dan E merupakan ideal fraksional invertibel dan ideal fraksional idempoten; b) menentukan kuadrat dari ideal stabil-ES lemah sehingga didapatkan hubungan antara ideal stabil-ES lemah dengan ideal stabil-ES; c) membuktikan sifat yang berlaku pada I ideal stabil-ES lemah dengan $I = JE$ yaitu ideal kuosien $(I : I) = (E : E)$ dan ideal fraksional idempoten $E = I\,(I : I^2)$; d) menerapkan definisi I

ideal stabil $(I : I^2) = (I : I)$ pada ideal fraksional idempoten E sehingga $E = I\ (I : I^2) = (I : I)$ dan diaplikasikan dalam pembuktian untuk mendapatkan ideal stabil-ES sehingga ideal stabil-ES lemah dengan ideal stabil-ES dapat dikatakan ekivalen pada daerah integral.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Gabelli (2014) memaparkan bahwa ideal yang memiliki invers (invertibel) jelas merupakan ideal yang stabil. Secara sederhana, invers dapat diartikan sebagai kebalikan atau lawan dari suatu hal. Misalkan R daerah integral dan Q lapangan hasil bagi. Suatu ideal fraksional A dari daerah integral R dikatakan memiliki invers (invertibel) jika terdapat ideal fraksional B dari R sedemikian sehingga $AB = R$ (Persulessy & Dahoklory, 2015). Dalam teori gelanggang, suatu unsur r dikatakan mempunyai invers terhadap operasi kedua (perkalian) dari gelanggang R jika terdapat elemen $s \in R$ sedemikian sehingga $rs = sr = 1_R$. Dengan kata lain, terdapat perkalian antara dua elemen yang berlawanan atau berkebalikan sehingga menghasilkan unsur kesatuan. Hal ini jika dimaknai akan mengingatkan pada gagasan Erich Fromm, psikolog dari Jerman. Dia mengatakan bahwa manusia sebagai kesatuan badani-rohani memiliki karakter dualistik dikotomis. Jadi, terdapat pertentangan-pertentangan di dalam diri manusia yang harus terus-menerus dihadapi selama menjalani kehidupan. Pertentangan-pertentangan tersebut diistilahkan sebagai dilema eksistensial (Farhana, 2019).

Dilema yang pertama adalah pertentangan antara bagian dalam diri manusia yang cenderung pada kebutuhan-kebutuhan biologis atau badani dan bagian lain dari diri manusia yang membutuhkan pemenuhan sisi psikologis dan spiritual atau rohani (Farhana, 2019). Manusia diciptakan oleh Allah dengan dilengkapi akal dan syahwat. Jika akal manusia kalah menghadapi syahwat, ia termasuk golongan binatang (Al-Jauziyah, 1998). Allah SWT berfirman dalam QS. Al-A'raf ayat 176

وَلَوۡ شِئۡنَا لَرَفَعۡنَٰهُ بِهَا وَلَٰكِنَّهُۥٓ أَخۡلَدَ إِلَى ٱلۡأَرۡضِ وَٱتَّبَعَ هَوَىٰهُۚ فَمَثَلُهُۥ كَمَثَلِ
ٱلۡكَلۡبِ إِن تَحۡمِلۡ عَلَيۡهِ يَلۡهَثۡ أَوۡ تَتۡرُكۡهُ يَلۡهَثۚ ذَّٰلِكَ مَثَلُ ٱلۡقَوۡمِ ٱلَّذِينَ كَذَّبُواْ بِـَٔايَٰتِنَاۚ
فَٱقۡصُصِ ٱلۡقَصَصَ لَعَلَّهُمۡ يَتَفَكَّرُونَ

"*Dan kalau Kami menghendaki, sesungguhnya Kami tinggikan (derajat)nya dengan ayat-ayat itu, tetapi dia cenderung kepada dunia dan hawa nafsunya yang rendah, maka perumpamaannya seperti anjing jika kamu menghalaunya dijulurkan lidahnya dan jika kamu membiarkannya dia mengulurkan lidahnya (juga). Demikianlah perumpamaan orang-orang yang mendustakan ayat-ayat Kami. Maka ceritakanlah kisah-kisah itu agar mereka berpikir" (QS. Al-A'raf/7:176).*

Oleh karena itu, manusia harus membersihkan jiwanya dari sifat-sifat buruk kemudian mengisi jiwa tersebut dengan sifat-sifat baik sehingga upaya pemenuhan kebutuhan jasmani didasari dengan niat dan cara-cara yang sesuai dengan syariat Islam.

Dilema yang kedua adalah pertentangan jiwa antara hidup atau mati. Manusia di satu sisi harus berjuang keras untuk menjalani hidup dan beradaptasi dengan perubahan tetapi di sisi lain dipaksa sadar bahwa hidup tidak kekal. Oleh karena itu, Islam mengajarkan, "*Bekerjalah untuk duniamu seakan-akan engkau akan hidup selamanya dan bekerjalah untuk akhiratmu seakan-akan engkau akan mati besok pagi.*" Maksud dari bekerja untuk dunia seakan hidup selamanya adalah pesan bahwa untuk kebutuhan dunia, manusia hanya mengambil secukupnya saja. Apa yang tidak dapat dicapai hari ini masih bisa dicapai esok hari. Sedangkan perihal kehidupan akhirat harus dipersiapkan sesegera mungkin.

Dilema yang ketiga adalah pertentangan jiwa antara ketidaksempurnaan atau kesempurnaan. Manusia adalah makhluk yang tidak sempurna tetapi mempunyai keinginan untuk merealisasikan konsep kesempurnaan yang ada di dalam pikirannya dengan potensi yang diberikan oleh Allah. Akan tetapi, pada prosesnya manusia dihadapkan pada takdir yang tidak dapat diruntuhkan oleh kuat dan besarnya semangat dan tekad (ketekunan, keinginan atau ikhtiar) sementara berpasrah secara buta dengan dalih segalanya telah ditentukan sejak zaman azali juga tidak diperbolehkan.

Dilema yang terakhir adalah pertentangan jiwa antara kesendirian atau kebersamaan. Manusia adalah individu yang unik. Jika berbaur dengan masyarakat, keunikan itu akan pudar. Tetapi jika tidak mengikuti atau berbaur dengan dunia sosial dan masyarakat, manusia akan merasa kesepian karena terpisah dari lingkungannya. Dalam Mafatihul Fiqh, Syaikh Musthafa Al-Adawi menjelaskan bahwa memutuskan bergaul dengan masyarakat atau menyendiri secara mutlak adalah suatu kesalahan. Berkumpul bersama masyarakat dalam shalat berjamaah dan majelis ilmu dapat menambah keimanan tetapi tolong-menolong dalam dosa atau menghabiskan waktu dalam kesia-siaan atau justru dosa tidak diperbolehkan. Menyendiri dibutuhkan untuk berdzikir, bertafakur, dan bermuhasabah serta mengendalikan pandangan dan lisan dari hal-hal tercela tetapi berpotensi menimbulkan bangga diri dan merasa suci.

Oleh karena itu, manusia perlu mengkaji lebih dalam mengenai dirinya agar dapat memberikan porsi untuk masing-masing dilema atau pertentangan di dalam dirinya sehingga tumbuh menjadi pribadi yang stabil (seimbang), bersemangat mengejar akhirat tetapi tidak melupakan dunia, sebagaimana firman Allah SWT dalam QS. Al-Qashash ayat 77

وَابْتَغِ فِيْمَآ اٰتٰىكَ اللّٰهُ الدَّارَ الْاٰخِرَةَ وَلَا تَنْسَ نَصِيْبَكَ مِنَ الدُّنْيَا وَاَحْسِنْ كَمَآ اَحْسَنَ
اللّٰهُ اِلَيْكَ وَلَا تَبْغِ الْفَسَادَ فِى الْاَرْضِۗ اِنَّ اللّٰهَ لَا يُحِبُّ الْمُفْسِدِيْنَ

“Dan carilah (pahala) negeri akhirat dengan apa yang telah dianugerahkan oleh Allah kepadamu tetapi janganlah kamu lupakan bagianmu di dunia dan berbuat baiklah (kepada orang lain) sebagaimana Allah telah berbuat baik kepadamu, dan janganlah kamu berbuat kerusakan di bumi.”(QS.Al-Qashash/28:77).

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Pada penelitian ini, masalah yang diteliti adalah syarat cukup untuk mendapatkan ekivalensi dari ideal stabil-ES dengan ideal stabil-ES lemah sehingga sebagai langkah awal diperlukan pemahaman terkait syarat cukup. Kemudian diteliti kondisi mana yang lebih umum antara dua ideal tersebut dengan memahami definisi macam-macam kestabilan ideal pada Subbab 2.1.7 dan mempelajari ideal pada Subbab 2.1.5 dan ideal fraksional pada Subbab 2.1.6, hubungan antara ideal dan ideal fraksional serta operasi-operasi yang berlaku pada ideal dan ideal fraksional untuk diaplikasikan dalam pembahasan di Bab IV.

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini termasuk jenis penelitian kualitatif atau kajian kepustakaan, yaitu penelitian dengan proses pengumpulan data tanpa riset lapangan. Data-data atau informasi untuk penelitian ini didapat dari pengamatan tidak langsung, yaitu melalui pengkajian terhadap buku-buku dan jurnal-jurnal yang terkait dengan pembahasan dalam skripsi ini, yaitu mengenai hubungan antara ideal stabil-ES dengan ideal stabil-ES lemah pada daerah integral.

3.2 Pra Penelitian

Proses penelitian ini dimulai dengan mencari referensi yang dijadikan rujukan utama dalam skripsi, yaitu artikel yang ditulis Mimouni pada tahun 2017 yang berjudul "*Factoring Ideals and Stability in Integral Domain".* Selanjutnya, dikumpulkan referensi pendukung berupa materi mengenai grup, gelanggang, daerah integral, lapangan, ideal, modul, dan ideal fraksional serta materi keislaman untuk diintegrasikan dengan topik dalam penelitian ini.

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian di bawah ini disarikan dari artikel yang ditulis Mimouni (2017). Untuk memperoleh syarat cukup agar ideal stabil-ES lemah ekivalen dengan ideal stabil-ES, dibutuhkan tahapan-tahapan sebagai berikut:

a. Menunjukkan bahwa ideal stabil-ES lemah merupakan kondisi yang lebih umum dibandingkan ideal stabil-ES dengan $I = JE$ dan $J \subseteq I \subseteq E$, secara berturut-turut I menotasikan ideal stabil-ES, J ideal fraksional invertibel dan E ideal fraksional idempoten;

b. Menentukan kuadrat dari ideal stabil-ES lemah sehingga didapatkan gambaran awal dari hubungan antara ideal stabil-ES lemah dengan ideal stabil-ES;

c. Membuktikan sifat yang berlaku pada I ideal stabil-ES lemah dengan $I = JE$ yaitu ideal kuosien $(I : I) = (E : E)$ dan ideal fraksional idempoten $E = I\,(I : I^2)$;

d. Menerapkan sifat I ideal stabil dengan $(I : I^2) = (I : I)$ pada ideal fraksional idempoten E sehingga $E = I\,(I : I^2) = (I : I)$ dan diaplikasikan dalam pembuktian untuk mendapatkan hubungan ekivalensi antara ideal stabil-ES lemah dengan ideal stabil-ES.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Menunjukkan bahwa Ideal Stabil-ES Lemah Merupakan Kondisi yang Lebih Umum dari Ideal Stabil-ES Lemah

Pada definisi ideal stabil-ES lemah, ideal taknol I dari daerah integral difaktorkan menjadi $I = JE$ dengan $JJ^{-1} = R$ dan $E = E^2$ dan ideal fraksional invertibel J tidak harus termuat di I. Sedangkan pada ideal stabil-ES yang didefinisikan sebagai I ideal taknol dari daerah integral R dan $I^2 = JI$, ideal J haruslah termuat di I. Dengan kata lain, ideal stabil-ES lemah dapat dipandang sebagai kondisi yang lebih lemah dibandingkan ideal stabil-ES. Penggunaan kata lemah pada ideal stabil-ES lemah bukanlah bertujuan untuk mempersempit ideal stabil-ES tersebut tetapi mengisyaratkan pengurangan sifat pada ideal stabil-ES yaitu keharusan ideal J (sebagai hasil pemfaktoran dari I) termuat pada ideal I (ideal stabil yang difaktorkan) (Mimouni, 2017). Lebih lanjut akan diuraikan dalam Teorema 4.1 dan Teorema 4.2.

Teorema 4.1

Misalkan R daerah integral dan I ideal tak nol dari R. Jika I adalah ideal stabil-ES maka I ideal stabil-ES lemah dengan $I = JE$, dan J, E masing-masing merupakan ideal fraksional invertibel dan ideal fraksional idempoten dari R dan $J \subseteq I \subseteq E$.

Bukti:

Asumsikan bahwa I adalah ideal stabil-ES atau $I^2 = JI$ untuk suatu ideal fraksional invertibel J dari R dengan $J \subseteq I$ maka

$$I = RI = (JJ^{-1})\, I.$$

Oleh karena hukum asosiatif pada ideal fraksional berlaku maka

$$I = J\,(J^{-1}I).$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $J^{-1}I$ adalah ideal fraksional idempoten. Dengan mengkuadratkan $J^{-1}I$ berdasarkan Teorema 2.4 dapat diperoleh

$$(J^{-1}I)^2 = J^{-2}I^2 = J^{-2}JI = J^{-1}I.$$

Jadi $(J^{-1}I)^2 = J^{-1}I$, artinya $J^{-1}I$ adalah suatu ideal fraksional idempoten sehingga $I = JE$ terpenuhi dengan $E = J^{-1}I$. Selanjutnya akan dibuktikan $J \subseteq I \subseteq E$. Karena $J \subseteq I$ maka berdasarkan Teorema 2.4 diperoleh

$$JJ^{-1} \subseteq IJ^{-1}$$

$$I^{-1}JJ^{-1} \subseteq I^{-1}IJ^{-1}$$

$$I^{-1}R \subseteq RJ^{-1}$$

$$I^{-1} \subseteq J^{-1}.$$

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$I \subseteq R = II^{-1} \subseteq IJ^{-1} = E.$$

Dengan demikian $J \subseteq I \subseteq E$. ■

Jadi ideal stabil-ES lemah merupakan kondisi yang lebih umum dibanding ideal stabil-ES karena ideal stabil-ES jelas merupakan ideal stabil-ES lemah namun sebaliknya belum tentu berlaku. Ideal stabil-ES merupakan ideal stabil-ES lemah jika $I = JE$ dengan J merupakan ideal fraksional invertibel, E merupakan ideal fraksional idempoten dan $J \subseteq I \subseteq E$.

Selanjutnya, akan ditentukan kuadrat dari ideal stabil-ES lemah sehingga tampak keterhubungan antara ideal stabil-ES lemah dengan ideal stabil-ES. Lebih lanjut akan ditunjukkan dalam Subbab 4.2.

4.2 Menentukan Kuadrat dari Ideal Stabil-ES Lemah agar Didapatkan Gambaran Awal Mengenai Hubungan antara Ideal Stabil-ES Lemah dengan Ideal Stabil-ES

Dalam Teorema 4.2 berikut akan ditunjukkan hasil kuadrat dari ideal stabil-ES lemah yang berhubungan dengan definisi ideal stabil-ES. Akan tetapi, hal tersebut belum cukup untuk menjamin ideal stabil-ES lemah dapat dikatakan sebagai ideal stabil-ES karena ada kondisi lain yang harus dipenuhi.

Teorema 4.2

Misalkan R daerah integral dan I ideal taknol dari R. Ideal I merupakan ideal stabil-ES lemah jika dan hanya jika $I^2 = JI$ untuk suatu ideal fraksional invertibel J di R.

Bukti:

($\Longrightarrow$) Misalkan I ideal stabil-ES lemah yaitu $I = JE$ untuk suatu ideal fraksional J dan E dari R dengan $JJ^{-1} = R$ dan $E = E^2$.

Berdasarkan Teorema 2.4,

$$I^2 = (JE)^2 = J^2E^2 = J^2E = (JJ)\,E.$$

Selanjutnya berdasarkan hukum asosiatif pada Proposisi 2.1 maka dapat diperoleh

$$I^2 = (JJ)\,E = J\,(JE) = JI.$$

Jadi, $I^2 = JI$ untuk suatu ideal fraksional invertibel J dari R. ■

($\Longleftarrow$) Jika $I^2 = JI$ untuk suatu ideal fraksional invertibel J dari R, maka

$$I = RI = (JJ^{-1})\,I.$$

Oleh karena hukum asosiatif pada ideal fraksional berlaku maka $I = J\,(J^{-1}I)$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $J^{-1}I$ adalah ideal fraksional idempoten. Dengan mengkuadratkan $J^{-1}I$ berdasarkan Teorema 2.4 dapat diperoleh

$$(J^{-1}I)^2 = J^{-2}I^2 = J^{-2}JI = J^{-1}I.$$

Jadi $(J^{-1}I)^2 = J^{-1}I$, artinya $J^{-1}I$ adalah suatu ideal fraksional idempoten sebagaimana definisi ideal fraksional idempoten yaitu misalkan E ideal fraksional idempoten berlaku $E = E^2$. Dengan demikian diperoleh $I = JE$ sebagaimana definisi ideal stabil-ES lemah dengan J ideal fraksional invertibel atau $JJ^{-1} = R$ dan E ideal fraksional idempoten dengan $E = J^{-1}I$. ■

Dengan kata lain, ideal fraksional idempoten E haruslah memuat ideal fraksional invertibel J (salah satu hasil pemfaktoran I ideal stabil-ES) dan ideal taknol I dari daerah integral R (yang dimisalkan sebagai ideal stabil-ES). Selanjutnya, akan ditunjukkan kondisi lain yang dimiliki oleh ideal stabil-ES lemah. Kondisi tersebut perlu untuk ditunjukkan sehingga dapat ditemukan syarat cukup yang menjamin ideal stabil-ES lemah ekivalen dengan ideal stabil-ES. Lebih lanjut, akan dipaparkan dalam Subbab 4.3.

4.3 Membuktikan Sifat yang Berlaku pada Ideal Stabil-ES Lemah

Ideal kuosien $(I : I)$ didefinisikan sebagai $(I : I) = \{x \in K | xI \subseteq I\}$ dengan K lapangan hasil bagi. Akan ditunjukkan bahwa pada I ideal stabil-ES lemah dengan $I = JE$ berlaku ideal kuosien $(I : I) = (E : E)$ dan $E = I\ (I : I^2)$. Pembuktian sifat tersebut diperlukan untuk dapat diaplikasikan dalam Teorema 4.4 berkaitan dengan ideal stabil. Lebih lanjut tentang pembuktian sifat tersebut akan diuraikan dalam Teorema 4.3 berikut.

Teorema 4.3

Jika I adalah ideal stabil-ES lemah dan $I = JE$, dengan $JJ^{-1} = R$ dan $E = E^2$ maka $(I : I) = (E : E)$ dan $E = I\ (I : I^2)$.

Bukti:

Asumsikan I ideal stabil-ES lemah atau $I = JE$ dengan masing-masing J dan E merupakan ideal fraksional invertibel dan ideal fraksional idempoten dari R. Misalkan $x \in (I : I)$ maka $xI \subseteq I$ dengan diketahui $I = JE$ maka

$$xJE = xI \subseteq I = JE.$$

Oleh karena $I = JE$ dengan $JJ^{-1} = R, E = E^2$ maka

$$xE = xRE = xJJ^{-1}E \subseteq JJ^{-1}E = E$$

yang berimplikasi $x \in (E : E)$. Dengan demikian $(I : I) = (E : E)$.

Klaim $E = I\,(I : I^2)$. Dari Teorema 4.2 diperoleh $I^2 = JI$. Dengan mengalikan kedua ruas dengan J^{-1} diperoleh

$$J^{-1}I^2 = J^{-1}JI = RI = I$$

sehingga $J^{-1} \subseteq (I : I^2)$. Selanjutnya kedua ruas dikalikan dengan I sehingga diperoleh

$$E = J^{-1}I \subseteq I\,(I : I^2).$$

Sebaliknya, misalkan $x \in (I : I^2)$ maka

$$xI^2 \subseteq I$$

$$x(JE)^2 \subseteq JE$$

$$xJ^2E^2 \subseteq JE$$

$$xJ^2E \subseteq JE$$

dengan mengalikan kedua ruas dengan J^{-1} berdasarkan Teorema 2.4 diperoleh

$$xJJEJ^{-1} \subseteq JEJ^{-1}$$

$$xJJJ^{-1}E \subseteq JJ^{-1}E$$

$$xJRE \subseteq RE$$

$$xJE \subseteq E$$

sehingga

$$xJ \subseteq (E : E).$$

Selanjutnya dengan mengalikan kedua ruas dengan E diperoleh

$$xI = xJE \subseteq E\,(E : E) = E.$$

Dengan demikian, $I\,(I : I^2) \subseteq E$ dan $I\,(I : I^2) = E$. ■

Oleh karena sifat pada ideal stabil-ES lemah yaitu $(I : I) = (E : E)$ dan $E = I\,(I : I^2)$ telah dibuktikan. Langkah selanjutnya adalah mengaplikasikan sifat tersebut pada ideal stabil sebagaimana yang akan dijelaskan dalam Subbab 4.4.

4.4 Menerapkan Sifat Ideal Stabil pada Ideal Stabil-ES Lemah agar Hubungan Ekivalensi dengan Ideal Stabil-ES Tercapai

Pada Mimouni (2017), ideal stabil I didefinisikan sebagai $I\,(I : I^2) = (I : I)$. Pada teorema berikut akan diaplikasikan sifat ideal stabil pada ideal stabil-ES lemah sehingga ideal stabil-ES lemah dapat dikatakan sebagai ideal stabil-ES.

Teorema 4.4

Misalkan R daerah integral dan I ideal tak nol dari R. Jika I adalah ideal stabil maka I stabil-ES jika dan hanya jika I stabil-ES lemah.

Bukti:

($\Longrightarrow$) Telah dibuktikan dalam Teorema 4.1

($\Longleftarrow$) Asumsikan I stabil yaitu $I\,(I : I^2) = (I : I)$ dan I ideal stabil-ES lemah yaitu $I = JE$ dengan J ideal fraksional invertibel dan E ideal fraksional idempoten di R. Berdasarkan Teorema 4.3 diperoleh $E = I\,(I : I^2)$ sehingga

$$I = JE = JI\,(I : I^2).$$

Oleh karena I stabil dengan $I\ (I : I^2) = (I : I)$ dan $E = I\ (I : I^2)$ maka diperoleh $E = I\ (I : I^2) = (I : I)$. Dengan demikian, $I = J\ (I : I)$ dan $J \subseteq I \subseteq E$ sehingga I merupakan ideal stabil-ES.

Dengan kata lain ideal stabil menjamin salah satu hasil pemfaktoran dari ideal stabil-ES lemah yaitu ideal fraksional idempoten E (yang berbeda dari hasil pemfaktoran ideal stabil-ES yaitu $I^2 = JI$ dengan $J \subseteq I$) dapat sama dengan I (ideal hasil pemfaktoran sekaligus yang difaktorkan, menurut definisi ideal stabil-ES).

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada bab pembahasan, dapat disimpulkan bahwa syarat cukup ideal stabil-ES lemah ekivalen dengan ideal stabil-ES adalah ideal stabil karena ideal stabil menjamin hasil pemfaktoran dari ideal stabil-ES lemah ekivalen dengan ideal stabil-ES.

5.2 Saran untuk Penelitian Lanjutan

Pada penelitian ini hanya dibahas mengenai syarat cukup agar ideal stabil-ES lemah ekivalen dengan ideal stabil-ES pada daerah integral dan belum diuraikan mengenai hubungan antara ideal stabil-ES lemah dengan ideal stabil-L atau ideal stabil-SV. Untuk penelitian lanjutan, penulis menyarankan penelitian mengenai hubungan ideal stabil-ES lemah dengan ideal stabil-L atau ideal stabil-SV pada gelanggang komutatif (tidak dibatasi pada daerah integral).

DAFTAR PUSTAKA

Al-Adawi. Tanpa tahun. *Mafatihul Fiqhi Fid Diin.* Maktabah Al-Makkah.

Al-Jauziyah, Ibnu Qayyim. (1998). *Pendakian Menuju Allah.* Jakarta Timur: Pustaka Al-Kautsar.

Al-Quran dan Terjemahan. (2012). Kementerian Agama RI.

Anderson, D.D, Huckaba, J.A, & Papick, I. J. (1987). A Note on Stable Domains. *Houston Journal of Mathematics*, 13(1), 13-17.

Athiyah, M.F & Macdonald. (1969). *Introduction to Commutative Algebra*, London: Addison Wesley.

Barucci, V. (1986). Strongly Divisorial and Complete Integral Closure of an Integral Domain. 99, 132-142.

Clark, P.L. (2015). *Commutative Algebra.*

Eakin, P & Sathaye, A. 1976. Prestable Ideal. *Journal of Algebra*, 41, 439-454.

Farhana, Lisva. (2019). *Teori Psikoanalisis Humanis Dialektik Erich Fromm dalam Perspektif Pendidikan Agama Islam.* Skripsi tidak diterbitkan. Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga, Yogyakarta.

Frager, Robert. (2005). *Hati, Diri, & Jiwa: Psikologi Sufi untuk Transformasi*. Jakarta: Serambi.

Gabelli, S & Roitman, M. (2014). *On Finitely Stable Domain.* Roma: Universitá degli Studi Roma Tre.

Gabelli, S. (2014). *Ten Problems on Stability of Domains.*

Gallian, J.A. (2013). *Contemporary Abstract Algebra.* Boston: Nelson Education, Ltd.

Gilbert, L dan Gilbert, J. (2009). *Element of Modern Algebra*. Belmont: Nelson Education, Ltd.

Houston, K. (2009). *How to Think Like Mathematician*. New York: Cambridge University Press.

Kurniadi, W. (2014). *Kriteria Daerah Dedekind.* Skripsi Tidak Diterbitkan. Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Larsen, M.D & McCarthy, P.J. (1971). *Multiplicative Theory of Ideals*. New York and London: Academic Press.

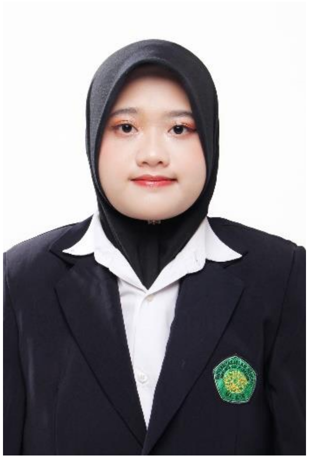
Mimouni, A. (2017). Factoring Ideal and Stability in Integral Domains. *Journal of Commutative Algebra*, 9 (2), 263-289.

Persulessy, E.R & Dahoklory, N. (2015). Karakterisasi Daerah Dedekind. *Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 9(1), 1-10.

Wahyuni, S, Wijayanti, I.E, Yuwaningsih, D.A, & Hartanto, A.D. (2016). *Teori Ring dan Modul.* Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

Zawawi, I & Suryanti, S. (2020). *Pengantar Dasar Matematika.* Sleman: Penerbit Deepublish.

RIWAYAT HIDUP



Penulis bernama lengkap Alfi Unsiati Ummi Hana. Terlahir 24 tahun silam di Kabupaten Tulungagung pada bulan sumpah pemuda. Penulis memulai pendidikan formal secara berturut-turut di MI AL-Ma'arif 12 Ardimulyo, MTs Negeri Lawang (sudah berganti nama menjadi MTs Negeri 3 Malang), dan SMA Negeri 1 Lawang. Kemudian pada tahun 2016, penulis ditakdir menjadi mahasiswa Jurusan Matematika di UIN Maliki Malang. Sedangkan pendidikan nonformal ditempuh di Pondok Pesantren Tarbiyatul Qur'an saat sekolah menengah pertama dan di Ma'had Sunan Ampel Al 'Aly saat tahun pertama menjadi mahasiswa. Penulis tertarik pada dunia tulis-menulis dan pernah menjadi jurnalis majalah sekolah saat SMA. Kemudian aktif di organisasi sastra pada tahun-tahun pertama kuliah. Memiliki pengalaman kerja sebagai guru, senang mempelajari kehidupan, dan penuh dengan rasa ingin tahu perihal bagaimana manusia berpikir dan merasa serta hal-hal yang berkaitan dengan dua hal tersebut.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Alfi Unsiati Ummi Hana
NIM	: 16610053
Fakultas/Jurusan	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	: Ekivalensi Ideal Stabil Eakin-Sathaye dengan Ideal Stabil Eakin-Sathaye Lemah
Pembimbing I	: Intan Nisfulaila, M.Si
Pembimbing II	: Erna Herawati, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	31 Okt 2021	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2	11 Nov 2021	ACC Seminar Proposal	2.
3	22 Sep 2022	Revisi Bab II	3.
4	24 Okt 2022	Konsultasi Revisi Bab I-V	4.
5	04 Nov 2022	Konsultasi Kajian Agama	5.
6	14 Nov 2022	ACC Seminar Hasil	6.
7	02 Des 2022	Konsultasi Revisi Bab IV	7.
8	21 Des 2022	Konsultasi Revisi Bab I-V	8.
9	21 Des 2022	Konsultasi Kajian Agama	9.
10	23 Des 2022	ACC Sidang Skripsi	10
11	27 Des 2022	Konsultasi Revisi Sidang Skripsi	11.
12	29 Des 2022	Konsultasi Revisi Bab III	12.

Malang, 29 Desember 2022
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005