KAJIAN HOMOMORFISME MODUL DAN RING ENDOMORFISME

SKRIPSI

Oleh:
OKTA TRI RIYAN FANANI
NIM. 04510049

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG

2008

KAJIAN HOMOMORFISME MODUL DAN RING ENDOMORFISME

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :
OKTA TRI RIYAN FANANI
NIM. 04510049

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

KAJIAN HOMOMORFISME MODUL DAN RING ENDOMORFISME

SKRIPSI

Oleh:

OKTA TRI RIYAN FANANI

NIM. 04510049

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 16 Oktober 2008

Pembimbing I	Pembimbing II
Abdussakir, M.Pd	Abdul Aziz, M. Si
NIP. 150 327 247	NIP. 150 377 256

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

KAJIAN HOMOMORFISME MODUL DAN RING ENDOMORFISME

SKRIPSI

Oleh:
OKTA TRI RIYAN FANANI
NIM. 04510049

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 21 Oktober 2008

Susunan Dewan Penguji		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	: **Wahyu H. Irawan, M. Pd** **NIP. 150 300 415**	( )
2. Ketua	: **Evawati Alisah, M. Pd** **NIP. 150 291 271**	( )
3. Sekretaris	: **Abdussakir, M. Pd** **NIP. 150 327 247**	( )
4. Anggota	: **Abdul Aziz, M. Si** **NIP. 150 377 256**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

PERSEMBAHAN

Untuk

Bapak Irkhamni, ibu Hastuti Susana

Kakak Choirul Anas,

Dyah Nur Fitriah, dan Andy Dwi Restyawan

Serta, Keluarga tercinta

MOTTO

“KAU HANYA DAPATKAN, APA YANG TELAH KAU BERIKAN”

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : OKTA TRI RIYAN FANANI

NIM : 04510049

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 16 Oktober 2008

Yang membuat pernyataan

Okta Tri Riyan Fanani

NIM. 04510049

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "*KAJIAN HOMOMORFISME MODUL DAN RING ENDOMORFISME*" ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang .
2. Bapak Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
3. Ibu Sri Harini. M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.

4. Bapak Abdussakir, M.Pd. selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
5. Bapak Abdul Azis, M.Si. selaku dosen pembimbing agama, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf UIN Malang.
7. Bapak dan Ibu tercinta, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spirituil dan perjuangannya yang tak pernah kenal lelah dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis sukses dalam meraih cita-cita serta ketulusan do'anya kepada penulis sampai dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Kakak-kakak tersayang, Choirul Anas, Dyah Nur Fitriah, dan Andy Dwi Restyawan yang telah memberikan semangat selama kuliah serta dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Sahabat-sahabat yang selalu memberikan motivasi, saran serta doa juga keceriaan dalam menyelesaikan skripsi ini Agus, Arief, Khoeron, Zainal, Hadir, Yuli, Zumrotus, Luluk, Ahfalin, Ika dan Fauzi, terimakasih atas motivasi dan doanya.
10. Sahabat-sahabat Pergerakan Mahasiswa Islam Indonesia (PMII) Rayon *"Pencerahan"* Galileo Komisariat "SA" Malang dan Teater Galileo (TEGAL) perubahan dan pembaharuan tidak berhenti sampai disini..

11. Teman-teman Matematika 2004, terima kasih atas doa serta kenangan yang kalian berikan.
12. Sahabat-sahabat di Malang Onthel Club (MOC) yang selalu memberikan keceriaan serta doa dalam menyelesaikan skripsi ini.
13. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan sprituil penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya Matematika. Amien.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

.

Malang, 16 Oktober 2008

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Fanani, Okta Tri Riyan. 2008. ***Kajian Homomorfisme Modul dan Ring Endomorfisme.*** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
Pembimbing: (I) Abdussakir, M. Pd
(II) Abdul Aziz, M. Si

Kata Kunci: Ring, Homomorfisme, Endomorfisme dan Modul

Materi yang dibahas pada aljabar abstrak pada dasarnya tentang himpunan dan operasinya, dan selalu identik dengan sebuah himpunan yang tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dioperasikan dengan satu atau lebih operasi biner. Suatu himpunan yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner disebut struktur aljabar atau sistem aljabar.

Sistem aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu dikenal dengan Grup. Sedangkan untuk himpunan yang tidak kosong dengan dua operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu disebut dengan Ring. Pada sistem aljabar yang lain juga dibahas tentang modul. Misal (R, +, $\cdot$) dan (M, +) grup abelian. Jika ada pemetaan dari (R,M) $\to M$, yang memenuhi sifat-sifat: $a)\ (r+s)m = rm + sm$, $b)\ (rs)m = r(sm)$, $c)\ r(m+n) = rm + rn$ dan $d)\ 1m = m$, untuk semua $\forall r,s \in R, m,n \in M$.

Selanjutnya dari modul sendiri dapat dikembangkan menjadi beberapa sub pembahasan, diantaranya adalah Homomorfisme. Misalkan M dan N adalah R-modul dan ada pemetaan $\varphi : M \to N$ yang homomorfisme R-modul jika dan hanya jika $\varphi(\alpha x + y) = \alpha\varphi(x) + \varphi(y)$, $\forall x, y \in M, \alpha \in R$. Homomorfisme modul mempunyai tiga sifat, yaitu jika homomorfisme modul dari M ke N tersebut bersifat injektif (satu-satu) maka disebut *monomorfisme*, jika homomorfisme bersifat surjektif maka disebut *epimorfisme*, sedangkan jika mempunyai sifat kedua-duanya maka disebut *isomorfisme*. Sedangkan ring endomorfisme adalah himpunan semua homomorfisme modul dengan domain dan kodomaiannya sama dan himpunan tersebut membentuk ring yang disebut ring endomorfisme. Endomorfisme mempunyai tiga sifat, yaitu jika endomorfisme dari M ke M bersifat satu-satu maka disebut *endomorfisme injektif*, jika endomorfisme bersifat onto maka disebut *endomorfisme surjektif*, sedangkan jika mempunyai sifat kedua tersebut maka disebut *endomorfisme bijektif*. Jika M *finite* dan endomorfisme bersifat injektif, maka pasti bijektif dan jika M *finite* dan endomorfisme bersifat surjektif, maka pasti bijektif.

Untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada meneliti yang lain untuk mengadakan penelitian secara lebih mendalam mengenai modul homomorfisme dan ring endomomorfisme modul, dengan mencari sifat-sifat yang lain.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Al-Qur’an telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari kedua dunia itu (Rahman, 1992:12). Tidak diragukan lagi bahwa Al-Qur’an, dengan anjuran memperhatikan dan berfikir yang diulanginya beberapa kali menjadikan aktivitas studi dan penelitian dalam berbagai bidang sebagai sebuah keharusan bagi umat Islam. Karena itu Islam memerintahkan manusia untuk beribadah dan berfikir (Pasya, 2004:5).

Manusia telah diciptakan dengan kelebihan akal, mempunyai peranan sangat penting untuk dapat menggali dan memanfaatkan segala bentuk ciptaanNya. Dengan semua kelebihannya, manusia berperan untuk mengembangkan ilmu pengetahuan. Selanjutnya melalui aktivitas studi dan penelitiannya manusia diharuskan mampu memahami kebenaran Al-Qur’an.

Allah berfirman:

وَ ٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ أَنَّهُ ٱلۡحَقُّ مِن رَّبِّكَ فَيُؤۡمِنُواْ بِهِۦ فَتُخۡبِتَ لَهُۥ قُلُوبُهُمۡۗ وَإِنَّ ٱللَّهَ لَهَادِ

ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِلَىٰ صِرَٰطٖ مُّسۡتَقِيمٖ ٥٤

Artinya: ”Dan orang-orang yang telah diberi ilmu, meyakini bahwasanya Al-Qur’an itulah yang hak dari Tuhan-mu lalu mereka beriman dan tunduk hati mereka kepadanya dan sesungguhnya Allah adalah pemberi petunjuk bagi orang-orang yang beriman kepada jalan yang lurus”,(QS. Al-Hajj, 22:54).

Telah banyak sekali ditemukan mukjizat ilmu pengetahuan dalam Al-Qur'an secara garis besar, termasuk matematika. Namun, Al-Qur'an tidak mengangkat metode baru atau teknik baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta dengan cara yang sama seperti yang ia tunjukkan mengenai eksistensi dari alam semesta itu sendiri (Rahman, 1992:15).

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran – ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007:79).

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Namun rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdusysyakir, 1997:80).

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam al-Quran, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika yang ada dalam al-Quran di antaranya adalah masalah logika, pemodelan, statistik, himpunan, grup, dan lain-lain.

Aljabar merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika, sedangkan cabang dari ilmu aljabar itu sendiri antara lain aljabar abstrak dan aljabar linier. aljabar abstrak memiliki banyak materi yang dapat dibahas dan dikembangkan.

Materi yang dibahas pada aljabar abstrak pada dasarnya tentang himpunan dan operasinya. Sehingga dalam mempelajari materi ini, selalu identik dengan himpunan yang tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dapat dioperasikan dengan satu atau lebih operasi biner.

Kajian mengenai himpunan sudah ada dalam al-Qur'an. Misalnya, kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Di mana golongan merupakan bagian dari himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi. Dalam al-Quran surat al-Fatihah ayat 7 disebutkan.

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ۝٧

Artinya: *"(yaitu) Jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat"* (Q. S. Al-Fatihah: 7).

Dalam ayat 7 surat Al-Fatihah ini dijelaskan manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah SWT, (2) kelompok yang dilaknat, dan (3) kelompok yang sesat (Abdusysyakir, 2006: 47).

Berbicara tentang himpunan selain himpunan manusia, juga disebutkan dalam al-Quran himpunan-himpunan yang lain. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Faathir ayat 1.

ٱلۡحَمۡدُ لِلَّهِ فَاطِرِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ جَاعِلِ ٱلۡمَلَٰٓئِكَةِ رُسُلًا أُوْلِيٓ أَجۡنِحَةٖ مَّثۡنَىٰ وَثُلَٰثَ وَرُبَٰعَۚ

يَزِيدُ فِي ٱلۡخَلۡقِ مَا يَشَآءُۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيۡءٖ قَدِيرٞ ۝١

Artinya:"Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, yang menjadikat malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam *urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambah pada cintaaan-Nya apa yang dikendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu"*(Q.S. Al-Faathir:1).

Dalam ayat 1 surat Al-Faathir ini dijelaskan sekelompok, segolongan atau sekumpulan makhluk yang disebut malaikat. Dalam kelompok malaikat tersebut terdapat kelompok malaikat yang mempunyai dua sayap, tiga sayap, atau empat sayap. Bahkan sangat dimungkinkan terdapat kelompok malaikat yang mempunyai lenih dari empat sayap jika allah SWT menghendaki (Abdusysyakir, 2006: 48).

Sistem aljabar merupakan salah satu materi pada bagian aljabar abstrak yang mengandung operasi biner. Himpunan dengan satu atau lebih operasi biner disebut sistem aljabar. Sistem aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu yang disebut grup. Sedangkan kajian himpunan dengan satu operasi biner dalam konsep Islam yaitu, bahwa manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Faathir ayat 11.

وَٱللَّهُ خَلَقَكُم مِّن تُرَابٍ ثُمَّ مِن نُّطْفَةٍ ثُمَّ جَعَلَكُمْ أَزْوَٰجًا ۚ وَمَا تَحْمِلُ مِنْ أُنثَىٰ وَلَا تَضَعُ
إِلَّا بِعِلْمِهِۦ ۚ وَمَا يُعَمَّرُ مِن مُّعَمَّرٍ وَلَا يُنقَصُ مِنْ عُمُرِهِۦٓ إِلَّا فِى كِتَٰبٍ ۚ إِنَّ ذَٰلِكَ عَلَى ٱللَّهِ يَسِيرٌ
﴿١١﴾

Artinya: "Dan Allah menciptakan kamu dari tanah kemudian dari air mani, kemudian Dia menjadikan kamu berpasangan (laki-laki dan perempuan). Dan tidak ada seorang perempuanpun mengandung dan tidak (pula) melahirkan melainkan dengan sepengetahuan-Nya. Dan sekali-kali tidak dipanjangkan umur seseorang yang beurmur panjang *dan tidak dipanjangkan umur seorang yang berumur panjang dan tidak pula dikurangi umurnya, melainkan (sudah ditetapkan) dalam kitab (Lauh Mahfuch). Sesungguhnya yang demikan itu bagi Allah adalah mudaht"* (Q. S. Al-Faathir: 7).

Dari firman di atas bahwa manusia adalah berpasang-pasangan yaitu laki-laki dengan perempuan.

Sistem aljabar dengan dua operasi biner yang memenuhi syarat-syarat tertentu yang disebut ring. Sedangkan kajian himpunan dengan dua operasi biner dalam konsep islam yaitu, bahwa manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan dan cara memasangkannya dengan hukum-hukum tertentu. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Nisaa ayat 23.

حُرِّمَتْ عَلَيْكُمْ أُمَّهَٰتُكُمْ وَبَنَاتُكُمْ وَأَخَوَٰتُكُمْ وَعَمَّٰتُكُمْ وَخَٰلَٰتُكُمْ وَبَنَاتُ ٱلْأَخِ وَبَنَاتُ
ٱلْأُخْتِ وَأُمَّهَٰتُكُمُ ٱلَّٰتِىٓ أَرْضَعْنَكُمْ وَأَخَوَٰتُكُم مِّنَ ٱلرَّضَٰعَةِ وَأُمَّهَٰتُ نِسَآئِكُمْ
وَرَبَٰٓئِبُكُمُ ٱلَّٰتِى فِى حُجُورِكُم مِّن نِّسَآئِكُمُ ٱلَّٰتِى دَخَلْتُم بِهِنَّ فَإِن لَّمْ تَكُونُوا۟ دَخَلْتُم
بِهِنَّ فَلَا جُنَاحَ عَلَيْكُمْ وَحَلَٰٓئِلُ أَبْنَآئِكُمُ ٱلَّذِينَ مِنْ أَصْلَٰبِكُمْ وَأَن تَجْمَعُوا۟ بَيْنَ
ٱلْأُخْتَيْنِ إِلَّا مَا قَدْ سَلَفَ ۗ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ غَفُورًا رَّحِيمًا ﴿٢٣﴾

Artinya: "Diharamkan atas kamu (mengawini) ibu-ibumu; anak-anakmu yang perempuan,saudara-saudaramu yang perempuan, saudara-saudara bapakmu yang perempuan; saudara-saudara ibumu yang perempuan; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang laki-laki; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang perempuan; ibu-ibumu yang menyusui kamu; saudara perempuan sepersusuan; ibu-ibu isterimu (mertua); anak-anak isterimu yang dalam pemeliharaanmu dari isteri yang telah kamu campuri, tetapi jika kamu belum campur dengan isterimu itu (dan sudah kamu ceraikan), Maka tidak berdosa kamu mengawininya; (dan diharamkan bagimu) isteri-isteri anak kandungmu (menantu); dan menghimpunkan (dalam perkawinan) dua perempuan yang bersaudara, kecuali yang telah terjadi pada masa lampau; Sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang" (Q.S. Al-Nisaa:23).

Maka dari firman di atas bahwa manusia adalah berpasang-pasangan antara laki-laki dan perempuan dengan menikah. Akan tetapi cara menikah dengan pasangannya harus secara hukum agama.

Sedangkan sistem aljabar yang dikembangkan dengan mempunyai dua himpunan yang tidak kosong dengan dua operasi biner dan memenuhi syarat-syarat tertentu disebut dengan modul. Seperti yang dijelaskan bahwa pada ring dibahas homomorfisme ring dan pada modul juga dibahas homomorfisme modul. Himpunan semua homomorfisme modul dengan domain dan kodomaiannya sama disebut dengan endomorfisme dan apabila himpunan tersebut membentuk ring maka disebut ring endomorfisme. Oleh karena itu, maka disini penulis tertarik untuk mengkaji tentang homomorfisme modul dan ring endomorfisme, dengan judul **"Kajian Homomorfisme Modul dan Ring Endomorfisme"**.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan di atas maka penulis akan membahas tentang homomorfisme modul dan ring endomorfisme. Oleh sebab itu, maka rumusan masalah dalam skiripsi ini adalah

a. Bagaimanakah sifat-sifat dari homomorfisme modul?
b. Bagaimanakah sifat-sifat dari endomorfisme?

1.3. Tujuan Masalah

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah yang tertulis diatas. Maka tujuan pembahasan skripsi ini adalah.

a. Untuk menjelakan sifat-sifat dari homomorfisme modul.

b. Untuk menjelaskan sifat-sifat dari endomorfisme.

1.4. Manfaat

Hasil penelitian yang berupa pembahasan masalah ini bermanfaat bagi:

1. Bagi Penulis
   a. Menambah pengetahuan dan keilmuan tentang hal-hal yang berkaitan dengan homomorfisme modul dan ring endomorfisme.
   b. Mengembangkan wawasan keilmuan tentang pendeskripsian tentang homomorfisme modul dan ring endomorfisme.
2. Bagi Lembaga
   a. Sebagai bahan informasi tentang pembelajaran aljabar abstrak.
   b. Sebagai tambahan bahan kepustakaan.
3. Bagi mahasiswa: sebagai bahan informasi untuk kajian lebih lanjut mengenai aljabar abstrak.

1.5. Metode Pembahasan

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang dijadikan acuan dalam pembahasan ini. Literatur yang dimaksud adalah buku tentang dan aljabar abstrak karangan David S Dummit dan Richard M. Foote yang diterbitkan tahun 1991.
2. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.
3. Memahami dan mempelajari konsep homomorfisme modul dan ring endomorfisme.
4. Menerapkan konsep homomorfisme modul dan ring endomorfisme untuk menjelaskan sifat-sifatnya dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Menentukan definisi yang berkaitan dengan homomorfisme modul dan ring endomorfisme, kemudian mrmberikan contoh dari definisi tersebut.
   b. Menentukan teorema yang berkaitan dengan homomorfisme modul dan ring endomorfisme, kemudian membuktikan teorema tersebut.
   c. Menjelaskan sifat-sifat dari homomorfisme modul dan endomorfisme.
   d. Membuat definisi baru dan teorema baru, dari gabungan antara definisi dan teorema yang telah ada.

1.6. Sistematika Pembahasan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan, antara lain pengertian grup, sifat-sifat grup, ring, sifat-sifat ring, pengertian modul, sifat-sifat modul, dan kajian dalam agama.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang homomorfisme modul, sifat-sifat homomorfisme modul, ring endomorfisme, dan sifat-sifat ring endomorfisme.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini akan dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Grup

Salah satu sistem aljabar yang paling sederhana adalah grup. Grup didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma, di antaranya tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas, dan memiliki elemen invers. Apabila salah satu aksioma tidak terpenuhi maka bukan grup.

Sistem aljabar $(G,\cdot)$ dengan himpunan tidak kosong di G dan operasi biner $\cdot$ didefinisikan di G adalah grupoid. Grupoid juga disebut semigrup jika operasi biner $\cdot$ di G adalah assosiatif. Sedangkan semigrup yang mempunyai elemen identitas di G disebut monoid (Raisinghania & Aggarwal, 1980:32)

Sebagai contoh, misalkan himpunan **N** adalah bilangan asli dengan operasi penjumlahan adalah semigrup, karena operasi biner di **N** adalah penjumlahan, maka N bersifat assosiatif. Jadi (**N**,+) adalah semigrup. Tetapi (**N**,+) bukan monoid, karena operasi penjumlahan tidak mempunyai identitas di N, jadi (**N**,+) bukan grup.

Definisi grup secara aljabar dapat dilihat sebagai berikut:

2.1.1. Definisi Grup

Definisi 1

Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong dan pada G didefinisikan operasi biner $\cdot$. Sistem aljabar $(G,\cdot)$ disebut grup jika memenuhi aksioma – aksioma:

1. Untuk setiap $a,b,c \in G$ maka $(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ operasi $\cdot$ bersifat assosiatif di G.
2. G mempunyai unsur identitas terhadap operasi $\cdot$

   Misalkan e unsur di G sedemikian hingga $a \cdot e = e \cdot a, \forall a \in G$ maka e disebut unsur identitas

3. Setiap unsur di G mempunyai invers terhadap operasi $\cdot$, untuk setiap $a \in G$ ada $a^1 \in G$ yang disebut sebagai invers dari a, sehingga sehingga $a \cdot a = a \cdot a = e$, e adalah unsur identitas (Raisinghania & Anggarwal, 1980:31).

Untuk syarat tertutup, sudah terpenuhi pada operasi biner.

Contoh

Selidiki apakah (**Z**,+) merupakan grup.

Jawab

i. Ambil $a,b \in$ **Z**, maka $a+b \in$ **Z**. Jadi **Z** tertutup terhadap operasi penjumlahan.

ii. Ambil $a,b,c \in$ **Z**, maka $(a+b)+c = a+(b+c)$

Jadi operasi penjumlahan bersifat assosiatif di **Z**

iii. $\exists 0 \in$ **Z** sehingga $a+0=0+a=a, \forall a \in$ **Z**

Jadi 0 adalah identitas penjumlahan.

iv. Untuk masing-masing $a \in$ **Z** ada $(-a) \in$ **Z**, sehingga $a+(-a)=(-a)+a=0$

Jadi invers dari a adalah $-a$

Dari (i),(ii),(iii) dan (iv) maka (**Z**,+) adalah grup.

2.1.2. Definisi Grup Komutatif

Definisi 2

Grup $(G,\cdot)$ dikatakan grup komutatif (abelian) jika untuk setiap setiap unsur *a* dan *b* di G berlaku $a \cdot b = b \cdot a$ (Arifin, 2000:36).

Contoh

Selidiki apakah (**Z**,+) merupakan grup abelian.

Diketahui (**Z**,+) adalah grup, misal $m,n \in Z$,

maka $m+n=n+m$

Jadi (**Z**,+) adalah grup komutatif.

2.2. Sifat-sifat Grup

2.2.1. Identitas Grup

Teorema 1

Unsur identitas dalam suatu grup adalah tunggal (Raisinghania &Aggarwal, 1980:75).

Bukti

Misalkan $(G,\cdot)$ adalah grup, andaikan e dan h adalah unsur identitas di G dengan $e \neq h$.

Berlaku

i. $e \cdot h = h \cdot e = h$ ....e sebagai identitas

ii. $e \cdot h = h \cdot e = e$ ....h sebagai identitas

Karena $e \cdot h$ dan $h \cdot e$ adalah unsur tunggal pada G maka dari (i) dan (ii) berakibat $e = h$ (kontradiksi dengan pengandaian). Ini berarti bahwa unsur identitas adalah tunggal.

2.2.2. Invers Grup

Teorema 2

Setiap unsur dari suatu grup memiliki invers yang tunggal (Raisinghania &Anggarwal, 1980:75).

Bukti

Misalkan $(G,\cdot)$ adalah grup, andaikan invers dari $a \in G$ tidak tunggal yaitu

a_1^{-1} dan a_2^{-1} dengan $a_1^{-1} \neq a_2^{-1}$

Misal e adalah unsur identitas di G maka berlaku

$$\begin{aligned} a_1^{-1} &= a_1^{-1} \\ &= a_1^{-1} \cdot \left(a \cdot a_2^{-1}\right) \\ &= \left(a_1^{-1} \cdot a\right) \cdot a_2^{-1} \\ &= e \cdot a_2^{-1} \\ &= a_2^{-1} \end{aligned}$$

Jadi $a_1^{-1} = a_2^{-1}$

Kontradiksi dengan pengandaian. Ini berarti bahwa setiap unsur di G memiliki invers yang tuggal di G

Teorema 3

Invers dari invers suatu unsur grup adalah unsur itu sendiri. Misal $(G,\cdot)$ grup dan $a \in G$, maka $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$ (Raisinghania & Aggarwal, 1980:75).

Bukti

$a \in G$ maka $a^{-1} \in G$ sehingga $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

i. $a \cdot a^{-1} = e$

$$\left(a\cdot a^{-1}\right)\cdot\left(a^{-1}\right)^{-1}=e\cdot\left(a^{-1}\right)^{-1}$$
$$a\cdot\left(a^{-1}\cdot\left(a^{-1}\right)^{-1}\right)=\left(a^{-1}\right)^{-1}$$
$$a\cdot e=\left(a^{-1}\right)^{-1}$$
$$a=\left(a^{-1}\right)^{-1}$$

ii. $a^{-1}\cdot a=e$

$$\left(a^{-1}\right)^{-1}\cdot\left(a\cdot a^{-1}\right)=\left(a^{-1}\right)^{-1}\cdot e$$
$$\left(a^{-1}\cdot\left(a^{-1}\right)^{-1}\right)\cdot a=\left(a^{-1}\right)^{-1}$$
$$e\cdot a=\left(a^{-1}\right)^{-1}$$
$$a=\left(a^{-1}\right)^{-1}$$

Teorema 4

Dalil kanselasi berlaku pada suatu grup (Raisinghania & Aggarwal, 1980:76).

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa pada grup berlaku dalil kanselasi kiri maupun kanselasi kanan.

Misal $(G,\cdot)$ adalah grup dan $\forall a,b\in G$ berlaku

i. Jika $b\cdot a=c\cdot a$ maka $b=c$ (kanselasi kanan)

ii. Jika $a\cdot b=a\cdot c$ maka $b=c$ (kanselasi kiri)

Misal $a\in G$ maka $a^{-1}\in G$ (a punya invers yaitu a^{-1} di G)

i. $b \cdot a = c \cdot a$

$$\begin{aligned}(b \cdot a) \cdot a^{-1} &= (c \cdot a) \cdot a^{-1} \\ b \cdot (a \cdot a^{-1}) &= c \cdot (a \cdot a^{-1}) \\ b &= c\end{aligned}$$

ii. $a \cdot b = a \cdot c$

$$\begin{aligned}a^{-1} \cdot (a \cdot b) &= a^{-1} \cdot (a \cdot c) \\ (a^{-1} \cdot a) \cdot b &= (a^{-1} \cdot a) \cdot c \\ b &= c\end{aligned}$$

Jadi dalil kanselasi berlaku pada sebarang grup.

Teorema 5

Jika a, b dua unsur dari suatu grup $(G, \cdot)$, maka persamaan $a \cdot x = b$ dan $y \cdot a = b$ mempunyai selesaian tunggal di G (Raisinghania & Aggarwal, 1980:77).

Bukti

1. Pertama akan ditunjukkan bahwa $a \cdot x = b$ mempunyai selesaian di G.

   $a, b \in G$ maka ada $a^{-1} \in G$ dan $a^{-1} \cdot b \in G$

   selanjutnya $a \cdot x = b$

$$\begin{aligned}a^{-1} \cdot (a \cdot x) &= a^{-1} \cdot b \\ (a^{-1} \cdot a) \cdot x &= a^{-1} \cdot b \\ e \cdot x &= a^{-1} \cdot b \\ x &= a^{-1} \cdot b \text{..........(1)}\end{aligned}$$

Persamaan (1) disubstitusikan ke persamaan $a \cdot x = b$

$$
\begin{aligned}
a \cdot x &= b \\
a \cdot \left(a^{-1} \cdot b\right) &= b \\
\left(a \cdot a^{-1}\right) \cdot b &= b \\
e \cdot b &= b \\
b &= b
\end{aligned}
$$

Jadi $a \cdot x = b$ punya selesaian di G, yaitu $x = a^{-1} \cdot b$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa selesaian tersebut adalah tunggal. Andaikan $a \cdot x = b$ memiliki selesaian tidak tunggal yaitu x_1 dan x_2 dengan $x_1 \neq x_2$

Maka $a \cdot x_1 = b$ dan $a \cdot x_2 = b$

Diperoleh $a \cdot x_1 = a \cdot x_2$ dengan hukum kanselasi kiri diperoleh $x_1 = x_2$

Terjadi kontradiksi, berarti $a \cdot x = b$ mempunyai selesaian tunggal.

2. Kedua akan ditunjukkan bahwa $y \cdot a = b$ mempunyai selesaian di G, $a, b \in G$ maka ada $a^{-1} \in G, b^{-1} \in G$ dan $a^{-1} \cdot b \in G$

$$
\begin{aligned}
y \cdot a &= b \\
y \cdot a \cdot \left(a^{-1}\right) &= b \cdot a^{-1} \\
y \cdot \left(a \cdot a^{-1}\right) &= b \cdot a^{-1} \\
y \cdot c &= b \cdot a^{-1} \\
y &= b \cdot a^{-1} \qquad \text{.............(1)}
\end{aligned}
$$

Persamaan (1) di substitusi ke persamaan $y \cdot a = b$

$$y \cdot a = b$$
$$(b \cdot a^{-1}) \cdot a = b$$
$$b \cdot (a^{-1} \cdot a) = b$$
$$b \cdot e = b$$
$$b = b$$

Jadi $y \cdot a = b$ punya selesaian di G, yaitu $y = b \cdot a^{-1}$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa selesaian tersebut adalah tunggal. Andaikan $y \cdot a = b$ memiliki selesaikan tidak tunggal yaitu y_1 dan y_2, dengan $y_1 \neq y_2$, maka $y_1 \cdot a = b$ dan $y_2 \cdot a = b$, maka

Diperoleh $y_1 \cdot a = y_2 \cdot a$ dengan hukum kanselasi kiri diperoleh $y_1 = y_2$

Terjadi kontradiksi, berarti $y \cdot a = b$ mempunyai selesaian tunggal.

2.3. Ring

Suatu sistem aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan satu operasi dinamakan grup. Sistem aljabar tersebut belumlah cukup untuk menampung struktur-struktur yang ada dalam matematika. Pada bagian ini dikembangkan suatu sistem aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang disebut dengan ring (gelanggang). Secara eksplisit, suatu ring didefinisikan sebagai berikut:

2.3.1. Definisi Ring

Definisi 3

R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner $+$ dan $\cdot$ (di penjumlahan pada operasi pertama dan perkalian pada operasi kedua) disebut ring jika memebuhi pernyataan berikut:

i. $(R,+)$ adalah grup abelian

ii. Operasi $\cdot$ bersifat assosiatif : $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \;\; \forall a,b,c \in R$

iii. Operasi $\cdot$ bersifat distributif terhadap + di $R : \forall\, a,b,c \in R$

$(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ (distributif kiri)

$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (distributif kanan)

(Dummit & M. Foot, 1991:225).

Contoh

Selidiki apakah (**Z**,+, $\cdot$) dengan **Z** bilangan bulat adalah merupakan ring?

Jawab

i. (**Z**,+) apakah grup abelian karena

i. Ambil $a,b \in \mathbf{Z}$, maka $a+b \in \mathbf{Z}$. Jadi **Z** tertutup terhadap operasi penjumlahan.

ii. Ambil $a,b,c \in \mathbf{Z}$, maka $(a+b)+c = a+(b+c)$

Jadi operasi penjumlahan bersifat assosiatif di **Z**

iii. $\exists 0 \in \mathbf{Z}$ sehingga $a+0=0+a=a, \forall a \in \mathbf{Z}$

Jadi 0 adalah identitas penjumlahan.

iv. Untuk masing-masing $a \in \mathbf{Z}$ ada $(-a) \in \mathbf{Z}$, sehingga $a+(-a)=(-a)+a=0$

Jadi invers dari a adalah $-a$

v. Operasi + bersifat komutatif di $\mathbf{Z}$

$\forall a,b \in \mathbf{Z}$ berlaku $a+b=b+a$

ii. Operasi $\cdot$ bersifat assosiatif di $\mathbf{Z}$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a,b,c \in$

iii. Operasi $\cdot$ bersifat distributif terhadap +

$(a+b) \cdot c = (a \cdot c)+(b \cdot c), \forall a,b,c \in \mathbf{Z}$

$a \cdot (b+c) = (a \cdot b)+(a \cdot c), \forall a,b,c \in \mathbf{Z}$

2.3.2. Definisi Ring Komutatif

Definisi 4

Sistem aljabar dengan dua operasi $(R,+,\cdot)$ adalah gelanggang komutatif bila:

I. $(R,+)$ merupakan grup komutatif

II. $(R,\cdot)$ merupakan semigrup komutatif

III. $\cdot$ bersifat distributif terhadap +

(Hidayanto & Irawati, 2000:8).

Contoh

Selidiki apakah $(R,+,\cdot)$ suatu ring, jika untuk setiap $x \in R$ berlaku $x^2 = x$, maka R adalah suatu ring komutatif.

Jawab

Ambil sebarang $a, b \in R$

$$
\begin{aligned}
(a+a)^2 &= a^2 + aa + a^2 \\
(a+a) &= a + a + a + a \\
(a+a) &= (a+a) + (a+a) \\
a + a &= 0 \\
a &= -a
\end{aligned}
$$

Dan juga

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + ab + ba + b^2 \\
(a+b) &= a + ab + ba + b \\
(a+b) &= (a+b) + ab + ba \\
(a+b) + 0 &= (a+b) + ab + ba \\
0 &= ab + ba \\
-ab &= ba \\
(-a)b &= ba \quad (dengan\ a = -a) \\
ab &= ba
\end{aligned}
$$

Definisi 5

Misal $(R,+,\cdot)$ adalah ring dan misal $a \in R$ dengan $a \neq 0$. a disebut sebagai pembagi nol (Zero Divisor), jika ada $b \neq 0$ sehingga $ab = 0$ atau $ba = 0$ (Pinter, 1990:173).

Contoh

Misalkan $(\mathbb{Z}_8,+,\cdot)$ merupakan ring himpunan bilangan bulat modulo 8 tentukan pembagi nol dari $\mathbb{Z}_8$ tersebut

Jawab

$$\mathbb{Z}_8 = \left\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5},\overline{6},\overline{7},\overline{8}\right\}$$
$$\overline{0} = \overline{8} = \overline{16} = \overline{24} = \overline{32} = \overline{40} = \overline{48} = \overline{56} = \overline{64}$$

$\overline{2}$ pembagi nol karena $\exists\ \overline{2} \ni \overline{2}\cdot\overline{4} = \overline{8} = 0$

$\overline{4}$ pembagi nol karena $\exists\ \overline{4} \ni \overline{4}\cdot\overline{2} = \overline{8} = \overline{0}$

Jadi pembagi nol adalah dari $\mathbb{Z}_8$ adalah $\overline{2}$ dan $\overline{4}$

2.3.3. Ring dengan Unsur Satuan

Definisi 7

Misal $(R,+,\cdot)$ adalah ring. Jika ada $x \in R$ sehingga $x \cdot y = y \cdot x = y$. Maka x disebut unsur satuan di R dan ditulis 1. Maka ring yang memuat unsur satuan disebut ring satuan (Hidayanto & Irawati, 2000:11).

Contoh

Selidiki apakah (**R**, +, $\cdot$) dengan **R** bilangan real adalah merupakan ring dengan unsur satuan?

Jawab

a. **(R,+)** adalah grup abelian karena

1. Ambil $a,b \in \mathbf{R}$, maka $a+b \in \mathbf{R}$. Jadi **R** tertutup terhadap operasi penjumlahan.
2. Ambil $a,b,c \in \mathbf{R}$, maka $(a+b)+c = a+(b+c)$

   Jadi operasi penjumlahan bersifat assosiatif di **R**
3. $\exists 0 \in \mathbf{R}$ sehingga $a+0 = 0+a = a, \forall a \in \mathbf{R}$

   Jadi 0 adalah identitas penjumlahan.
4. Untuk masing-masing $a \in \mathbf{R}$ ada $(-a) \in \mathbf{R}$, sehingga $a+(-a) = (-a)+a = 0$

   Jadi invers dari a adalah $-a$

5. Operasi + bersifat komutatif di **R**

   $\forall a, b \in \mathbf{R}$ berlaku $a+b=b+a$

b. Operasi $\cdot$ bersifat assosiatif di **R**

   $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbf{R}$

c. Operasi $\cdot$ bersifat distributif terhadap +

   $(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbf{R}$

   $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbf{R}$

d. Memuat unsur satuan

   Misalkan $a \in \mathbf{R}$, sehingga

   $a \cdot b = b \cdot a = b$

   Maka unsur satuannya 1.

   Untuk selanjutnya $a \cdot b$ akan ditulis ab saja.

Jadi (**R**, +, $\cdot$) merupakan ring satuan.

2.4. Sifat-sifat Ring

2.4.1. Identitas Ring

Teorema 6

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah ring, maka $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0, \forall a \in R$ dan 0 adalah identitas operasi penjumlahan di R (Raisinghania & Anggarwal, 1980:325).

Bukti

$(R,+,\cdot)$ adalah ring dengan dua operasi yang dinotasikan oleh penjumlahan(operasi pertama) dan perkalian (operasi kedua) identitas penjumlahan adalah 0 dan identitas perkalian adalah 1.

$a \cdot 0 = a(0+0)$ (sifat dari 0 di R)

$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ (distributif kanan)

$0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ (sifat identitas 0 di R)

$0 = a \cdot 0$ (kanselasi kanan)

Jadi $a \cdot 0 = 0$ ……………….(1)

Selanjutnya

$0 \cdot a = (0+0)a$ (sifat dari 0 di R)

$0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$ (distributif kiri)

$0 + 0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$ (sifat identitas 0 di R)

$0 = 0 \cdot a$ (kanselasi kiri)

Jadi $0 \cdot a = 0$ ……………..(2)

Dan (1) dan (2) maka $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0, \forall a \in R$

Teorema 7

Misal $(R,+,\cdot)$ adalah ring, maka $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(ab), \forall a, b \in R$ (Raisinghania & Anggarwal, 1980:325).

Bukti

$a \cdot (-b) + a \cdot b = a \cdot (-b + b)$ (sifat distributif kanan)

$a \cdot (-b) + ab = a \cdot 0$ (invers terhadap penjumlahan)

$a \cdot (-b) + ab = 0$ (perkalian dengan 0 di R)

$a \cdot (-b) + ab + (-(ab)) = 0 + (-(ab))$ (perkalian ruas ditambah –(ab))

$a \cdot (-b) + 0 = -(a \cdot b)$ (invers terhadap penjumlahan)

$a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ …………(1)

Selanjutnya

$(-a) \cdot b + ab = (-a + a) \cdot b$ (sifat distributif kanan)

$(-a) \cdot b + ab = 0 \cdot b$ (invers terhadap penjumlahan)

$(-a) \cdot b + ab = 0$ (perkalian denan 0 di R)

$(-a) \cdot b + ab + (-(ab)) = 0 + (-(ab))$ (kedua ruas ditambah –(ab))

$(-a) \cdot b + 0 = -(a.b)$ (invers terhadap penjumlahan)

$a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ …………..(2)

Teorema 8

Misal $(R,+,\cdot)$ adalah ring dan $a \in R$, maka $-(-a) = a$ (Raisinghania & Aggarwal, 1980:375)

Bukti

$a \in R$ maka $(-a) \in R$

$(-a) \in R$ maka $-(-a) \in R$, maka

$$
\begin{aligned}
a &= a+0 \\
&= a+\left((-a)+\left(-(-a)\right)\right) \\
&= \left(a+(-a)\right)+\left(-(-a)\right) \\
&= 0+\left(-(-a)\right) \\
&= -(-a)
\end{aligned}
$$

Jadi $-(-a)=a$

Teorema 9

Misalkan $(R,+,\cdot)$ adalah ring, maka $(-a)\cdot(-b)=ab, \forall a,b \in R$ (Raisinghania & Anggarwal, 1980:325)

Bukti

Dengan menggunakan sifat pada Teorema 7, maka kita dapatkan

$$
\begin{aligned}
(-a)\cdot(-b) &= ((-a)\cdot b) \\
&= -(-(ab)) \\
&= ab
\end{aligned}
$$

Teorema 10

Misal $(R,+,\cdot)$ adalah ring, maka $-(a+b)=(-a)+(-b), \forall a,b \in R$ (Raisinghania & Anggarwal, 1980:325).

$$
\begin{aligned}
[(-a)+(-b)]+(a+b) &= (-a)+[(-b)+(a+b)] && \text{(sifat assosiatif)} \\
&= (-a)+[(-b)+(b+a)] && \text{(sifat komutatif +)} \\
&= (-a)+[((-b)+b)+a] && \text{(sifat assosiatif)} \\
&= (-a)+[0+a] && \text{(sifat invers)} \\
&= (-a)+a && \text{(sifat identitas)} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Selanjutnya

$$
\begin{aligned}
&[(-a)+(-b)]+(a+b)=0\\
&[(-a)+(-b)]+(a+b)+[-(a+b)]=0+[-(a+b)]\\
&[(-a)+(-b)]+0=-(a+b)\\
&(-a)+(-b)=-(a+b)
\end{aligned}
$$

Teorema 11

Misal $(R,+,\cdot)$ adalah ring, maka $a(b-c)=ab-ac, \forall a,b,c\in R$ (Raisinghania & Anggarwal, 1980:325).

Bukti

$$
\begin{aligned}
a(b-c) &= a[b+(-c)]\\
&= ab+a(-c) && \text{(hukum distributif kanan)}\\
&= ab+(-(ac)) && \text{(Teorema 7)}
\end{aligned}
$$

Teorema 13

Misalkan $(R,+,\cdot)$ adalah ring, maka $(b-c)a=ba-ca, \forall\, a,b,c\in R$. (Raisinghania & Anggarwal, 1980:327)

Bukti

$$
\begin{aligned}
(b-c)a &= [b+(-c)]a\\
&= ba+(-c)a && \text{(hukum distributif kiri)}\\
&= ba+(-(ca)) && \text{(Teorema 7)}\\
&= ba-ca\,.
\end{aligned}
$$

Teorema 13

Misalkan $(R,+,\cdot)$ adalah ring dan $S \subseteq R$, $S \neq \phi$. S disebut subring R jika dan hanya jika.

1. $\forall x, y \in S$ maka $x - y \in S$
2. $\forall x, y \in S$ maka $xy \in S$

(Raisinghania & Anggarwal, 1980:357)

Bukti

1. $\forall x, y \in S$, maka $x \in S$ dan $-y \in S$

   Sehingga

   $$= a + (-b) \in S$$
   $$= a - b \in S$$

2. $\forall x, y \in S$, karena S berlaku assosiatif, komutatif dan distributif, maka $xy \in S$

2.4.2. Definisi Subring

Definisi 8

Misalkan $(R,+,\cdot)$ adalah ring, jika $S \subset R, S \neq \phi$ dan $(S,+,\cdot)$ adalah ring maka S disebut ring bagian (subring) dari R (Hidayanto & Irawati, 2000:30)

Contoh

Diberikan $(R,+,\cdot)$ adalah ring, $S = \{a \in R \mid xr = rx, \forall r \in R\}$, buktikan S subring R.

Jawab

I. $S \neq \phi$ karena $0r = 0 = r0, \forall r \in R$, maka $0 \in S$

II. $x \in S$ maka $x \in R$, jadi $S \subseteq R$

III. Ambil $x, y \in S$, karena $x, y \in S$, maka $xr = rx$ dan $yr - ry$.

Akan dibuktikan $(x - y)r = r(x - y), \forall r \in R$

Ambil sebarang $r \in R$,

Maka $(x - y)r = xr - yr$

$$= rx - ry$$
$$= r(x - y)$$

Jadi $x - y \in S$

IV. Ambil $x, y \in S$, karena $x, y \in S$, maka $xr = rx$ dan $yr = ry$

$$\begin{aligned} (xy)r &= x(yr) \\ &= x\ \ (ry) \\ &= (xr)y \\ &= (rx)y \\ &= r(xy) \end{aligned}$$

Jadi $xy \in S$ dan S subring R

2.4.3. Homomorfisma Ring

Suatu pemetaan dari suatu ring R ke ring R^1 yang mengawetkan kedua operasi yang ada dalam ring tersebut dinamakan suatu pemetaan homomorfisma ring. Definisi secara formal dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 9

Misal R dan S adalah ring. Homomorfisma ring adalah pemetaan $\varphi : R \rightarrow S$ jika memenuhi

i. $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \forall\, a, b \in R$

ii. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \forall\, a, b \in R$. (Dummit & foot, 1991:239)

Jika pemetaan dari tersebut bersifat satu-satu (injektif) maka disebut monomorfisma, jika pemetaan R ke S tersebut bersifat kepada (surjektif) maka disebut epimorfisma. Jika pemetaan dari tersebut bersifat satu-satu (injektif) dan onto (surjektif) atau disebut dengan bijektif maka disebut isomorfisma. Secara sederhana, sifat-sifat homomorfisme dapat dinyatakan dalam diagram homorfisme modul.

F: R $\rightarrow$ S

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Homomorfisme} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{(Onto) Epimorfime} \arrow[dr] & & \text{(1-1) monomorfisme} \arrow[dl] \\
 & \text{Isomorfisme} &
\end{tikzcd}
$$

Kernel (inti) dari homomorfisma φ adalah $\{x \in R \mid \varphi(x) = 0\}$, bisa ditulis ker $\varphi = \{x \in R \mid \varphi(x) = 0\}$

Contoh

Misalkan φ adalah homomorfisma dari suatu pemetaan $\varphi : R \to R^1$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = x, \forall x \in R$. Akan ditunjukkan φ homomorfisme ring.

Bukti

Ambil $a, b \in R$, maka

$$\begin{aligned} \varphi(a+b) &= (a+b) \\ &= (a)+(b) \\ &= \varphi(a)+\varphi(b) \end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned} \varphi(ab) &= (a \cdot b) \\ &= (a)\cdot(b) \quad . \\ &= \varphi(a)\cdot\varphi(b) \end{aligned}$$

Jadi $\varphi(R)$ adalah homomorfisma di R^1

Teorema 14

Jika f adalah pemetaan dari ring R ke ring R^1 , maka:

i. $f(0) = 0^1$, dengan 0 unsur nol R dan 0^1 unsur nol di R^1.

ii. $f(-a) = -f(a), \forall a \in R$

(Raisinghania & Aggarwal, 1980:374)

Bukti

i. Jika a adalah unsur di R maka.

$a+0=a$, maka

$f(a+0)=f(a)$
$f(a)+f(0)=f(a)$ ....(1)

Selanjutnya

$0+a=a$, maka

$f(0+a)=f(a)$
$f(0)+f(a)=f(a)$ ....(2)

Dari persamaan 1 dan 2, diperoleh

$f(0)+f(a)=f(a)+f(0)=f(a), \forall f(a)\in R^{I}$

Jadi $f(0)$ adalah 0 di R^{1} yaitu

$f(0)=0^{1}$

ii. Jika a adalah unsur di R maka

$a+(-a)=0$, maka

$f(a+(-a))=f(0)$
$f(a)+f(-a)=f(0)$ ....(1)

Selanjutnya

$(-a)+a=0$, maka

$f((-a)+a)=f(0)$
$f(-a)+f(a)=f(0)$ ....(2)

Dari persamaan 1 dan 2, diperoleh

$f(-a)+f(a)=f(a)+f(-a)=f(0), \forall f(0)\in R^{I}$

Jadi $f(-a)=-f(a)$

Teorema 15

Jika f adalah homomorfisma dari ring R ke ring R^1, maka $f(R)$ adalah subring dari R^1. (Raisinghania & Aggarwal, 1980:375)

Bukti

Misal a^1 dan b^1 $f(b)$ untuk suatu $a, b \in R$

$a \in R, b \in R$, maka

$$= a + (-b) \in R$$
$$= f(a + (-b)) \in f(R)$$
$$= f(a) + f(-b) \in f(R)$$
$$= a^1 - b^1 \in f(R)$$

Selanjutnya

$a \in R, b \in R$, maka

$$= ab \in R$$
$$= f(ab) \in f(R)$$
$$= f(a)f(b) \in f(R)$$
$$= a^1 b^1 \in f(R)$$

Maka $a^1, b^1 \in f(R)$ maka $a^1 - b^1 \in f(R)$ dan $a^1 b^1 \in f(R)$

Jadi $f(R)$ adalah subring dari R^1

Teorema 16

Setiap image homomorfisma pada ring komutatif adalah ring komutatif. (Raisinghania & Anggarwal, 1980:375)

Bukti

Misal f adalah homomorfisma dari R ring komutatif ke ring R^1 dan misal $a^1b^1 \in f(R)$, maka ada elemen a dan b di R sehingga $f(a)=a^1$ dan $f(b)=b^1$.

$$\begin{aligned} a^1b^1 &= f(a)f(b) \\ &= f(ab) \\ &= f(ba) \\ &= f(b)f(a) \\ &= b^1a^1 \end{aligned}$$

Jadi $a^1b^1 = b^1a^1, \forall a^1, b^1 \in f(R)$

Jadi jika R adalah ring komutatif maka $f(R)$ adalah ring komutatif juga

Teorema 17

Misal R dan R^1 adalah ring yang masing-masing mempunyai satuan dan misal f adalah homomorfisma dari R ke R^1, maka image satuan R adalah satuan R^1 (Raisinghania & Anggarwal, 1980: 376)

Bukti

Misal 1 adalah di R. Jika a^1 adalah elemen di $f(R)$, maka ada elemen a di R, maka $f(a)=a^1$

$$\begin{aligned} f(1)a^1 &= f(1)f(a) \\ &= f(1a) \\ &= f(a) \\ &= a^1 \end{aligned}$$

Jadi $f(1)\ a^1 = a^1$. Dengan cara yang sama maka diperoleh

$$a^1 f(1) = a^1$$

Maka $f(1)a^1 = a^1 = a^1 f(1), \forall\ a^1 \in R^1$, karena $f(R)$ subring R^1

Maka $f(1)$ adalah satuan di R^1

Jadi $f(1) = 1^I$ dengan 1^I satuan di R^1.

2.5. Modul

Suatu sistem aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan satu operasi dan memenuhi syarat-syarat tertentu dinamakan grup. Sedangkan sistem matematika yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner dan dengan syarat-syarat tertentu disebut dengan ring (gelanggang). Ada lagi sistem aljabar yang dikembangkan dengan mempunyai dua himpunan yang tak kosong dan dua operasi biner dan mempunyai syarat-syarat tertentu yang disebut dengan modul. Secara eksplisit, suatu modul didefinisikan sebagai berikut:

2.5.1. Definisi Modul

Definisi 9

Misalkan $(R,+,\bullet)$ adalah ring (tidak perlu komutatif maupun mempunyai unsur satuan). R-modul kiri atau modul kanan di R adalah himpunan M yang memenuhi syarat:

1. Operasi biner + di M dimana M adalah grup abelian, atau dapat ditulis bahwa $(M,+)$ adalah grup abelian.
2. Pemetaan $(R,M)\rightarrow M$, dimana $(r,m),\forall r\in R, m\in M$ jika:

$$a)\ \left((r+s)\cdot m\right)=rm+sm,\forall r,s\in R, m\in M$$
$$b)\ (rs)m=r(sm),\forall r,s\in R, m\in M$$
$$c)\ \left(r\cdot(m+n)\right)=rm+rn,\forall r\in R, m,n\in M$$

Jika R mempunyai unsur identitas 1 maka

$d)\ 1m=m,\forall m\in M$ (Dummit & M.Foot, 1991:318)

Contoh

Misalkan $R=Z$ dan $(R,+,\cdot)$, misalkan $(A,+)$ adalah grup abelian.

tunjukkan A ada pada **Z**-modul adalah didefinisikan sebagai

Untuk $\forall n\in \mathbf{Z},\ a\in A$

$$na=\begin{cases} a+a+\ldots+a\ \ (sebanyak\ n)\ \ jika\ n>0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad jika\ n=0 \\ -a-a-\ldots-a\ (sebanyak\ -n)\ \ jika\ n<0 \end{cases}$$

Dimana 0 adalah unsur identitas operasi penjumlahan di A.

Jawab

Yang diketahui bahwa $(A,+)$ adalah grup abelian, maka yang selanjutnya Akan ditunjukkan bahwa **Z**-modul.

Misalkan pemetaan $f : Z \times A \to A$ didefinisikan $na, \forall n \in \mathbf{Z},\ a \in A$

Misal $r \in \mathbf{Z}$, maka harus memenuhi syarat:

a. Operasi penjumlahan bersifat distributif kanan

$(n+r)a = na + ra,\ \forall n, r \in \mathbf{Z},\ a \in A$

b. Operasi perkalian bersifat assosiatif

$(nr)a = nra$

$= n(ra),\ \forall n, r \in \mathbf{Z},\ a \in A$

c. Operasi penjumlahan bersifat distributif distributif kiri

$n(r+a) = nr + na,\ \forall n, r \in \mathbf{Z},\ a \in A$

d. Mempunyai unsur identitas 1

$$\begin{aligned} 1.a &= a.1 \\ &= a \end{aligned}$$

Jadi A adalah **Z**-modul.

2.5.2. Definisi Submodul

Definisi 10

Misal R adalah ring dan M adalah R-modul, R-submodul di R adalah N subgroup dari M yang bersifat tertutup terhadap elemen-elemen ring, yaitu $rn \in N, \forall r \in R, n \in N$. (Dummit & M.Foot, 1991:318)

Submodul di M adalah juga subset di M yang berada di bawah operasi modul itu sendiri. Jika R=F adalah field, submodulnya adalah sama seperti subspace, setiap R-modul M mempunyai dua submodul yaitu M dan 0 (disebut submodul trivial).

Teorema 18

Misalkan R adalah ring dan M adalah R-modul. Subset N di M adalah submodul di M jika dan hanya jika :

1. $N \neq \phi$
2. $x + ry \in N, \forall r \in R \,\&\, \forall x, y \in N$ (Dummit & M.Foote, 1991:323)

Bukti

$(\Rightarrow)$ Jika N adalah submodul di M maka

$0 \in N$ jadi $N \neq \phi$

$(\Rightarrow)$ N adalah bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan

Misal $r = -1$, maka

$$\begin{aligned} x + (-1)y &= x + (-y) \\ &= x - y \in N \end{aligned}$$

Maka $x + ry \in N, \forall r \in R \,\&\, \forall x, y \in N$

Teorema 19

Misalkan R adalah ring, M adalah R-modul dan N submodul di M, M / N adalah R-modul dengan operasi yang didefinisikan oleh:

$r(x+N)=(rx)+N, \forall r \in R, x+N \in M/N$. (Dummit & Foote, 1991:329)

Bukti

Diketahui bahwa $(M,+)$ adalah grup abelian maka hasil bagi grup M/N adalah juga grup abelian.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa M/N memenuhi sifat-sifat modul yang 4, Misalkan untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $x+N \in M/N$, maka

a. $(r_1+r_2)(x+N)=((r_1+r_2)(x))+N$

$$=((r_1+r_2)x)+N$$
$$=r_1(x+N)+r_2(x+N)$$

b. $(r_1r_2)(x+N)=(r_1r_2x)+N$

$$=r_1(r_2x+N)$$
$$=r_1(r_2(x+N))$$

c. $r_1((x+N)+(x+N))=r_1((x_1+x_2)+N)$

$$=(r_1(x_1+x_2)+N)$$
$$=(r_1x_1+r_1x_2)+N$$
$$=(r_1x_1)+(r_1x_2+N)$$

d. $1(x+N)=(1.x+N)$

$$=(x+N)$$

2.6. Kajian Ring dalam Agama

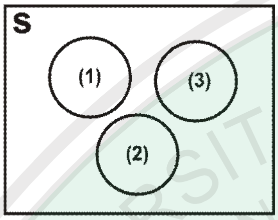
Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam al-Quran, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika yang ada dalam al-Quran di antaranya adalah masalah logika, pemodelan, statistik, teori graf, teori tentang grup dan lain-lain. Teori tentang grup, di mana definisi dari grup sendiri adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong ($G \neq \phi$) dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, ada identitas, dan ada invers dalam grup tersebut. Seperti halnya teori graf himpunan-himpunan dalam grup mempunyai elemen atau anggota yang juga merupakan makhluk dari ciptaan-Nya. Sedangkan operasi biner merupakan interaksi antara makhluk-makhluk-Nya, dan sifat-sifat yang harus dipenuhi merupakan aturan-aturan yang telah ditetapkan oleh Allah artinya sekalipun makhluknya berinteraksi dengan sesama makhluk ia harus tetap berada dalam koridor yang telah ditetapkan Allah.

Kajian mengenai himpunan sudah ada dalam al-Qur'an. Misalnya, kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Di mana golongan juga merupakan himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi. Dalam al-Quran surat al-Fatihah ayat 7 disebutkan.

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ٧

Artinya: "(yaitu) Jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat" (Q. S. Al-Fatihah: 7).

Yang dimaksud ayat tersebut yaitu manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah SWT, (2) kelompok yang dilaknat, dan (3) kelompok yang sesat (Abdusysyakir, 2006: 47). Seperti gambar berikut.

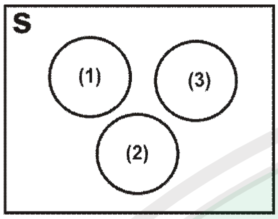


Berbicara tentang himpunan selain himpunan manusia, juga disebutkan dalam al-Quran himpunan-himpunan yang lain. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Faathir ayat 1.

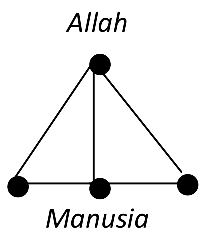
ٱلْحَمْدُ لِلَّهِ فَاطِرِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ جَاعِلِ ٱلْمَلَٰٓئِكَةِ رُسُلًا أُو۟لِىٓ أَجْنِحَةٍ مَّثْنَىٰ وَثُلَٰثَ وَرُبَٰعَ ۚ
يَزِيدُ فِى ٱلْخَلْقِ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ ﴿١﴾

Artinya:"Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, yang menjadikat malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambah pad cintaaan-Nya apa yang dikendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu"(Q.S. Al-Faathir:1).

Dalam ayat 1 surat Al-Faathir ini dijelaskan sekelompok, segolongan atau sekumpulan makhluk yang disebut malaikat. Dalam kelompok malaikat tersebut terdapat kelompok malaikat yang mempunyai dua sayap, tiga sayap, atau empat sayap. Bahkan sangat dimungkinkan terdapat kelompok malaikat yang mempunyai lenih dari empat sayap jika allah SWT menghendaki (Abdussakir, 2006: 48). Seperti gambar berikut:



Kembali pada definisi grup yang merupakan himpunan tidak kosong dengan operasi biner yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, ada identitas, dan ada invers. Setelah membicarakan himpunan dalam konsep Islam, sekarang mengkaji operasi biner dalam konsep Islam. Misal $\circ$ adalah operasi pada elemen-elemen S maka ia disebut biner, apabila setiap dua elemen a, $b \in S$ maka $(a \circ b) \in S$. Jadi jika anggota dari himpunan S dioperasikan hasilnya juga anggota S. Dalam dunia nyata operasi biner dan sifat-sifat yang harus dipenuhi oleh grup merupakan interaksi-interaksi yang terjadi antara sesama makhluk. Jadi sekalipun makhluk-makhluk tersebut berinteraksi dengan berbagai macam pola akan tetap berada dalam himpunan tersebut yaitu himpunan ciptaan-Nya. Seperti pada gambar berikut.



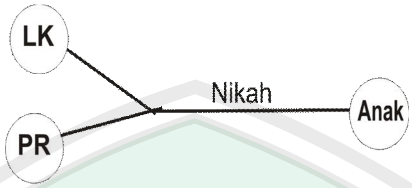
Sistem aljabar merupakan salah satu materi pada bagian aljabar abstrak yang mengandung operasi biner. Himpunan dengan satu atau lebih operasi biner disebut sistem aljabar. Sistem aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu yaitu tertutup, assosiatif, invers, identitas yang kemudian disebut grup. Sedangkan kajian himpunan dengan satu operasi biner dalam konsep Islam yaitu, bahwa manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan.Sedangkan kajian grup dalam konsep Islam yaitu, bahwa manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Faathir ayat 11.

وَٱللَّهُ خَلَقَكُم مِّن تُرَابٖ ثُمَّ مِن نُّطۡفَةٖ ثُمَّ جَعَلَكُمۡ أَزۡوَٰجٗاۚ وَمَا تَحۡمِلُ مِنۡ أُنثَىٰ وَلَا تَضَعُ
إِلَّا بِعِلۡمِهِۦۚ وَمَا يُعَمَّرُ مِن مُّعَمَّرٖ وَلَا يُنقَصُ مِنۡ عُمُرِهِۦٓ إِلَّا فِي كِتَٰبٍۚ إِنَّ ذَٰلِكَ عَلَى ٱللَّهِ يَسِيرٞ
١١

Artinya:

> *"Dan Allah menciptakan kamu dari tanah kemudian dari air mani, kemudian Dia menjadikan kamu berpasangan (laki-laki dan perempuan). dan tidak ada seorang perempuanpun mengandung dan tidak (pula) melahirkan melainkan dengan sepengetahuan-Nya. dan sekali-kali tidak dipanjangkan umur seorang yang berumur panjang dan tidak pula dikurangi umurnya, melainkan (sudah ditetapkan) dalam kitab (Lauh Mahfuzh). Sesungguhnya yang demikian itu bagi Allah adalah mudah"* (Q.S. Al-Faathir:11).

Dari firman di atas bahwa manusia adalah berpasang-pasangan yaitu laki-laki dengan perempuan, sehingga laki-laki dan perempuan harus berpasangan, dan dengan berpasangan (menikah) manusia dapat mengandung dan melahirkan seorang anak dan kemudian anak tersebut juga akan berpasangan dengan anak yang lain, seperti gambar berikut



atau (M,N), dengan M adalah himpunan manusia {laki-laki,perempuan) dan N adalah pernikahan.

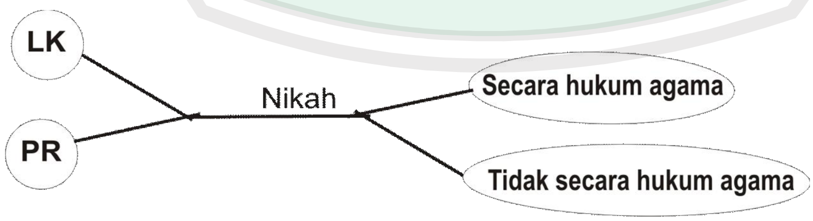
Sedangkan definisi dari ring adalah misalkan R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner $+$ dan $\cdot$ (disebut penjumlahan/ operasi pertama dan perkalian/ operasi kedua) disebut ring jika memebuhi pernyataan berikut: $(R,+)$ adalah grup abelian, Operasi $\cdot$ bersifat assosiatif , Operasi $\cdot$ bersifat distributif terhadap $+$. Misal $\circ$ *dan* $\bullet$ adalah operasi pada elemen-elemen S maka ia disebut biner, apabila setiap dua elemen $a, b \in S$ maka $(a \circ b) \in S$ dan $(a \bullet b) \in S$. Jadi jika anggota dari himpunan S dioperasikan hasilnya juga anggota S. Jika dikaitkan dengan konsep Islam, Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Nisaa ayat 23.

حُرِّمَتْ عَلَيْكُمْ أُمَّهَٰتُكُمْ وَبَنَاتُكُمْ وَأَخَوَٰتُكُمْ وَعَمَّٰتُكُمْ وَخَٰلَٰتُكُمْ وَبَنَاتُ ٱلْأَخِ وَبَنَاتُ
ٱلْأُخْتِ وَأُمَّهَٰتُكُمُ ٱلَّٰتِىٓ أَرْضَعْنَكُمْ وَأَخَوَٰتُكُم مِّنَ ٱلرَّضَٰعَةِ وَأُمَّهَٰتُ نِسَآئِكُمْ
وَرَبَٰٓئِبُكُمُ ٱلَّٰتِى فِى حُجُورِكُم مِّن نِّسَآئِكُمُ ٱلَّٰتِى دَخَلْتُم بِهِنَّ فَإِن لَّمْ تَكُونُوا۟ دَخَلْتُم
بِهِنَّ فَلَا جُنَاحَ عَلَيْكُمْ وَحَلَٰٓئِلُ أَبْنَآئِكُمُ ٱلَّذِينَ مِنْ أَصْلَٰبِكُمْ وَأَن تَجْمَعُوا۟ بَيْنَ
ٱلْأُخْتَيْنِ إِلَّا مَا قَدْ سَلَفَ ۗ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ غَفُورًا رَّحِيمًا ﴿٢٣﴾

Artinya

> *"Diharamkan atas kamu (mengawini) ibu-ibumu; anak-anakmu yang perempuan,saudara-saudaramu yang perempuan, saudara-saudara bapakmu yang perempuan; saudara-saudara ibumu yang perempuan; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang laki-laki; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang perempuan; ibu-ibumu yang menyusui kamu; saudara perempuan sepersusuan; ibu-ibu isterimu (mertua); anak-anak isterimu yang dalam pemeliharaanmu dari isteri yang telah kamu campuri, tetapi jika kamu belum campur dengan isterimu itu (dan sudah kamu ceraikan), Maka tidak berdosa kamu mengawininya; (dan diharamkan bagimu) isteri-isteri anak kandungmu (menantu); dan menghimpunkan (dalam perkawinan) dua perempuan yang bersaudara, kecuali yang telah terjadi pada masa lampau; Sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang"* (Q.S. Al-Nisaa:23).

Maka dari firman di atas bahwa manusia adalah berpasang-pasangan antara laki-laki dan perempuan dengan menikah. Akan tetapi cara menikah dengan pasangannya, harus secara hukum agama dan apabila tidak sesuai dengan hukum agama, maka diharamkan bagi kedua pasangan yang akan menikah. Padahal tujuan dalam pernikahan tersebut adalah agar halal. Jadi menikahlah dengan pasangan kamu sesuai dengan hukum agama, seperti gambar berikut.



atau (M,N,H), dengan M adalah himpunan manusia {laki-laki,perempuan), N adalah pernikahan, dan H adalah hukum agama.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1. Homomorfisme Modul

Suatu pemetaan dari suatu Modul M ke modul N yang memuat kedua operasi yang ada dalam modul dinamakan suatu pemetaan homomorfisme modul. Definisi secara formal dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 1

Misalkan *R* adalah ring dan misalkan M dan N adalah **R**-modul. Pemetaan $\varphi : M \to N$ disebut homomorfisme modul, jika memenuhi syarat sebagai berikut:

1. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \forall x, y \in M$
2. $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x), \forall \alpha \in R, x \in M$

(Dummit & Foote, 1991: 322)

Homomorfisme **R**-modul adalah juga homomorfisme grup penjumlahan, dimana penjumlahan adalah merupakan operasi pertama dari ring, tetapi belum tentu semua homomorfisme grup adalah homomorfisme modul (karena kondisi yang kedua mungkin tidak dipenuhi).

Contoh

1. Misalkan R adalah ring, M = N = R adalah **R**-modul atas dirinya sendiri, dengan pemetaan $\varphi : M \to N$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = 2x$ adalah homomorfisme modul, karena

   i. $\varphi(x+y) = 2((x)+(y))$

   $$\begin{aligned} &= 2x + 2y \\ &= 2(x) + 2(y) \\ &= \varphi(x) + \varphi(y) \end{aligned}$$

   ii. $\varphi(\alpha \cdot x) = 2(\alpha \cdot x)$

   $$\begin{aligned} &= 2 \cdot \alpha(x) \\ &= \alpha \cdot 2x \\ &= \alpha(2(x)) \\ &= \alpha\,\varphi(x) \end{aligned}$$

2. Jika R adalah ring dan M = R adalah **R**-modul atas dirinya sendiri, maka belum tentu homorfisme **R**-modul (sama dari R untuk dirinya sendiri) adalah homomorfisme ring dan homomorfisme ring belum tentu homomorfisme **R**-modul, seperti ketika dari R ke R, yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = 4x$ adalah hanya homorfisme **R**-modul karena:

   i. $f(x+y) = 4(x+y)$

   $$\begin{aligned} &= 4x + 4y \\ &= 4(x) + 4(y) \\ &= \varphi(x) + \varphi(y) \end{aligned}$$

ii. $f(\alpha \cdot x) = 4(\alpha \cdot x)$

$$= 4 \cdot \alpha(x)$$
$$= 4 \cdot \alpha x$$
$$= \alpha(4(x))$$
$$= \alpha \cdot \varphi(x)$$

iii. Tetapi bukan homomorfisme ring, karena

$$f(x \cdot y) = 4 \cdot x \cdot y$$
$$= 4xy$$

dan

$$f(x) \cdot f(y) = 4x \cdot 4y$$
$$= 16xy$$

Jadi $f(x.y) \neq f(x).f(y)$

3. Misalkan R adalah ring, M = N = R adalah **R**-modul atas dirinya sendiri, dengan pemetaan $\varphi : M \to N$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = 2x^2$ adalah bukan homomorfisme modul, karena

i. $\varphi(x+y) = 2(x+y)^2$

$$= 2(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= 2(x^2) + 4(xy) + 2(y^2)$$
$$= \varphi(x) + \varphi(y) + 4(xy)$$

ii. $\varphi(\alpha \cdot x) = 2(\alpha \cdot x)^2$

$$
\begin{aligned}
&= 2 \cdot \alpha^2 \left(x^2\right) \\
&= \alpha^2 \cdot 2x^2 \\
&= \alpha^2 \left(2\left(x^2\right)\right) \\
&= \alpha^2 \, \varphi(x)
\end{aligned}
$$

Maka bukan sebuah homomorfisme modul.

4. Misalkan R adalah ring, M = N = R adalah **R**-modul atas dirinya sendiri, dengan pemetaan $\varphi : M \to N$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = 4x^3$ adalah bukan homomorfisme modul, karena

i. $\varphi(x+y) = 4(x+y)^3$

$$
\begin{aligned}
&= 4\left(x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3\right) \\
&= 4\left(x^3\right) + 4\left(y^3\right) + 12x^2 y + 12xy^2 \\
&= \varphi(x) + \varphi(y) + 12x^2 y + 12xy^2
\end{aligned}
$$

ii. $\varphi(\alpha \cdot x) = 4(\alpha \cdot x)^3$

$$
\begin{aligned}
&= 4 \cdot \alpha^3 \left(x^3\right) \\
&= \alpha^3 \cdot 4x^3 \\
&= \alpha^3 \left(4\left(x^3\right)\right) \\
&= \alpha^3 \, \varphi(x)
\end{aligned}
$$

Maka bukan sebuah homomorfisme modul

Teorema 1

Misalkan M dan N adalah **R**-modul. Pemetaan $\varphi : M \to N$ adalah homomorfisme R-modul jika dan hanya jika

$$\varphi(\alpha x + y) = \alpha \cdot \varphi(x) + \varphi(y), \forall x, y \in M, \alpha \in R$$

(Dummit & Foote, 1991:323)

Bukti

$(\Rightarrow)$ Jika φ adalah homomorfisme **R**-modul, maka berlaku.

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha \cdot x + y) &= \varphi \cdot (\alpha \cdot x) + \varphi(y) \\ &= \alpha \cdot \varphi(x) + \varphi(y) \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Ambil $\alpha = 1$, untuk menentukan bahwa φ adalah homomorfisme penjumlahan maka

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= \varphi(1 \cdot x + y) \\ &= 1 \cdot \varphi(x) + \varphi(y) \\ &= \varphi(x) + \varphi(y) \end{aligned}$$

Ambil y = 0, untuk menentukan bahwa φ adalah komutatif dari R ke M, (yaitu bersifat homogen) maka

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha \cdot x) &= \varphi(\alpha x + 0) \\ &= \alpha \cdot \varphi(x) + \varphi(0) \\ &= \alpha \cdot \varphi(x) + 0 \\ &= \alpha \cdot \varphi(x) \end{aligned}$$

Jadi φ adalah homomorfisme **R**-modul.

Definisi 2

Misalkan M dan N adalah **R**-modul, Hom_R (M,N) didefinisikan sebagai himpunan semua homomorfisme *R*-modul dari M ke N (Dummit & Foote, 1991:322).

Teorema 2

Misal M dan N adalah **R**-modul dan misalkan φ,ψ adalah elemen dari Hom_R (M,N) , maka $\varphi+\psi$ didefinisikan dengan

$(\varphi+\psi)(m)=\varphi(m)+\psi(m), \forall\, m\in M$

Maka $\varphi+\psi\in Hom_R(M,N)$ (Dummit & Foote, 1991: 323).

Bukti

1. Misalkan H $=Hom_R(M,N)=\{\varphi: M\to M \mid \varphi$ Homomorfisme modul$\}$

   Ambil $\varphi,\psi\in H$, $x,y\in M$ dan $\alpha\in R$ maka.

   $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$

   $\psi(x+y)=\psi(x)+\psi(y)$

   $\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x)$

   $\psi(\alpha x)=\alpha\psi(x)$

   $$\begin{aligned}(\varphi+\psi)(x+y)&=\varphi(x+y)+\psi(x+y)\\&=\left[\varphi(x)+\varphi(y)\right]+\left[\psi(x)+\psi(y)\right]\\&=\left[\varphi(x)+\psi(x)\right]+\left[\varphi(y)+\psi(y)\right]\\&=(\varphi+\psi)(x)+(\varphi+\psi)(y)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\varphi+\psi)(\alpha\cdot x) &= \varphi(\alpha x)+\psi(\alpha x)\\
&= \alpha\cdot\varphi(x)+\alpha\cdot\psi(x)\\
&= \alpha(\varphi(x)+\psi(x))\\
&= \alpha(\varphi+\psi)(x)
\end{aligned}
$$

Jadi $\varphi+\psi$ homomorfisme modul dari M ke N

Jadi $\varphi+\psi \in Hom_R(M,N)$.

Teorema 3

Misal M, N, dan L adalah **R**-modul, $\varphi \in Hom_R(L,N)$ dan $\psi \in Hom_R(M,N)$ maka $\psi\circ\varphi \in Hom_R(L,N)$ (Dummit & Foote, 1991, 323).

Bukti :

Akan dibuktikan $(\psi\circ\varphi)$ adalah homomorfisme modul dari L ke N

Ambil $\varphi,\psi \in H$, $x,y\in L$ dan $\alpha\in R$ maka. $\varphi,\psi\in H, x,y\in L$

$$
\begin{aligned}
(\psi\circ\varphi)(\alpha\cdot x+y) &= \psi(\varphi(\alpha\cdot x+y))\\
&= \psi(\varphi(\alpha\cdot x)+\varphi(y))\\
&= \psi(\alpha\cdot\varphi(x)+\varphi(y))\\
&= \psi(\alpha\cdot\varphi(x))+\psi(\varphi(y))\\
&= \alpha\cdot\psi(\varphi(x))+\psi(\varphi(y))\\
&= \alpha(\psi\circ\varphi)(x)+(\psi\circ\varphi)(y)
\end{aligned}
$$

Jadi $(\psi\circ\varphi)$ adalah homomorfisme **R**-modul dari L ke N

Jadi $\psi\circ\varphi\in Hom_R(L,N)$.

3.1.1. Sifat-sifat Homomorfisme modul

Definisi 3

Misalkan R adalah ring, M dan N adalah **R**-modul, jika homomorfisme modul dari M ke N bersifat injektif (satu-satu) maka disebut monomorfisme modul (Dummit & Foote, 1991: 322).

Contoh

Misal M dan N adalah **R**-modul, dengan pemetaan $\varphi : M \rightarrow N$, yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = 5x, \forall x \in M$

1. Akan dibuktikan φ homomorisme modul

   Ambil $\forall x, y \in M, \alpha \in R$, maka

   $$\begin{aligned}\varphi(\alpha x + y) &= 5(\alpha x + y)\\ &= 5 \cdot \alpha x + 5y\\ &= \alpha \cdot 5x + 5y\\ &= \alpha\varphi(x) + \varphi(y)\end{aligned}$$

   Maka φ homomorfisme modul

2. Akan dibuktikan φ adalah pemetaan injektif

   Ambil $\forall x, y \in M$, dengan

   $$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(y)\\ 5x &= 5y\\ x &= y\end{aligned}$$

   Maka φ injektif

   Jadi φ adalah monomorfisme modul

Definisi 4

Misal R adalah ring, M dan N adalah **R**-modul, jika homomorfisme modul dari M ke N bersifat surjektif (pada/onto), maka disebut epimorfisme modul (Dummit & Foote, 1991:322).

Contoh

Misalkan R adalah ring, M = R adalah **R**-modul atas dirinya sendiri, dengan pemetaan $\varphi : M \to M$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = x$ adalah endomorfisme modul surjektif, karena

i. Ambil $\forall x, y \in M, \alpha \in R$, maka

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x + y) &= (\alpha x + y)\\ &= (\alpha(x) + (y))\\ &= \alpha(x) + (y)\\ &= \alpha(x) + (y)\\ &= \alpha \cdot \varphi(x) + \varphi(y)\end{aligned}$$

Maka φ homomorfisme modul.

ii. Akan dibuktikan φ bersifat surjektif

Ambil $y \in M$

Pilih $x = y \in M$, dengan

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(y)\\ &= (y)\\ &= y\end{aligned}$$

Jadi fungsi φ bersifat surjektif. Maka disebut epimorfisme modul.

Definisi 5

Misalkan R adalah ring, M dan N adalah **R**-modul, φ adalah homomorfisme modul dari M ke N bersifat injektif (saru-satu) dan surjektif (pada) atau bijektif, maka disebut isomorfisme modul (Dummit & Foote, 1991: 322).

Contoh

Misal M dan N adalah **R**-modul, dengan pemetaan $\varphi : M \to N$, yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = 3x, \forall x \in M$

1. Akan dibuktikan φ adalah homomorfisme modul

   Ambil $\forall x, y \in M, \alpha \in R$, maka

   $$\begin{aligned} \varphi(\alpha x + y) &= 3(\alpha x + y) \\ &= 3 \cdot \alpha x + 3y \\ &= \alpha \cdot 3x + 3y \\ &= \alpha\varphi(x) + \varphi(y) \end{aligned}$$

   Maka φ homomorfisme modul

2. Akan dibuktikan φ adalah pemetaan injektif

   Ambil $\forall x, y \in M$, dengan

   $$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(y) \\ 3x &= 3y \\ x &= y \end{aligned}$$

   Maka φ injektif

3. Akan dibuktikan φ adalah surjektif

   Ambil $y \in N$

Pilih $x = \frac{y}{3} \in N$, dengan

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi\left(\frac{y}{3}\right)\\ &= 3\left(\frac{y}{3}\right)\\ &= y\end{aligned}$$

Maka φ surjektif

Jadi φ adalah sebuah isomorfisme modul

Secara sederhana, sifat-sifat homomorfisme dapat dinyatakan dalam diagram homorfisme modul.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \begin{array}{c}\varphi : \mathrm{M} \rightarrow \mathrm{N}\\ \text{Homomorfisme Modul}\end{array} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \begin{array}{c}\text{(Onto)}\\ \text{Epimorfime Modul}\end{array} \arrow[dr] & & \begin{array}{c}\text{(1-1)}\\ \text{Monomorfisme Modul}\end{array} \arrow[dl] \\ & \text{Isomorfisme Modul} & \end{tikzcd}$$

3.2. Ring Endomorfisme

Teorema 4

Misal M dan N adalah **R**-modul dan misalkan φ, ψ adalah elemen dari $\mathrm{Hom}_R\,(M,N)$, $\varphi + \psi$ didefinisikan dengan

$$(\varphi + \psi)(m) = \varphi(m) + \psi(m), \forall\, m \in M$$

Dengan operasi ini $Hom_R(M,N)$ adalah grup abelian (Dummit & Foote, 1991: 323).

Bukti

1. Akan dibuktikan H=$Hom_R(M,N)$ adalah grup abelian

 a. Operasi penjumlahan bersifat assosiatif

 Ambil $\varphi,\psi \in H$, $x,y \in M$ dan $\alpha \in R$ maka.

$$
\begin{aligned}
(\varphi+(\psi+\phi))(x) &= \varphi(x)+(\psi+\phi)(x)\\
&= \varphi(x)+(\psi(x)+\phi(x))\\
&= (\varphi(x)+\psi(x))+\phi(x)\\
&= (\varphi+\psi)(x)+\phi(x)\\
&= ((\varphi+\psi)+\phi)(x)
\end{aligned}
$$

 b. Ada identitas, yaitu $\mathbf{0}(x)=0, \forall x \in M, 0 \in M$

 Misal $\varphi(0)=0 \in H$,maka

 i. $\mathbf{0}(x+y)=0$

$$= 0+0$$

$$= \mathbf{0}(x)+\mathbf{0}(y)$$

 ii. $\mathbf{0}(xy)=0$

$$= 0\cdot 0$$

$$= \mathbf{0}(x)\cdot\mathbf{0}(y)$$

 Maka $\mathbf{0}(x)=0,\ \forall x \in M$ adalah homomorfisme M ke N

 Jadi $\mathbf{0} \in H$

 $(\varphi+\mathbf{0})(x)=\varphi(x)+\mathbf{0}(x)$

$$= \varphi(x) + 0$$
$$= \varphi(x)$$

Jadi **0** adalah identitas di H.

c. Ada invers, misalkan $\varphi \in H$

Pilih $\psi(x) = -\varphi(x)$, maka

Ambil $\forall \varphi, \psi \in H, x \in M$

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi)(x) &= \varphi(x) + \psi(x)\\ &= \varphi(x) + (-\varphi(x))\\ &= \varphi(x) - \varphi(x)\\ &= 0\\ &= \mathbf{0}\,(x)\end{aligned}$$

d. Akan dibuktikan H dengan penjumlahan bersifat komutatif

Ambil $\forall \varphi, \psi \in H, x \in M$

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi)(x) &= \varphi(x) + \psi(x)\\ &= \psi(x) + \varphi(x)\\ &= (\psi + \varphi)(x)\end{aligned}$$

Jadi H adalah $Hom_R(M, N)$ dengan operasi penjumlahan adalah grup abelian.

Teorema 5

Misal M adalah **R**-modul, dengan operasi penjumlahan (seperti Teorema 3.3 dan Perkalian 3.4), $Hom_R(M, M)$ adalah ring dengan unsur identitas I, (yaitu, I (x) = x, untuk semua $x \in M$) (Dummit & Foote, 1991:323)

Bukti

Diketahui domain dan kodomain dari elemen $Hom_R(M,M)$ adalah sama

i. $Hom_R(M,M)$ dengan operasi penjumlahan adalah grup abelian sesuai dengan Teorema 3.4.

ii. Komposisi fungsi bersifat assosiatif

Ambil $\varphi,\psi \in H$, $x,y \in M$,maka.

$$\begin{aligned}
\left[(\varphi \circ \psi)\circ \phi\right](x) &= (\varphi \circ \psi)(\phi(x)) \\
&= \varphi \circ (\psi(\phi(x))) \\
&= \varphi \circ (\psi \circ \phi(x)) \\
&= \varphi \circ (\psi \circ \phi)(x) \\
&= \left[\varphi \circ (\psi \circ \phi)\right](x)
\end{aligned}$$

Jadi $(\varphi \circ \psi)\circ \phi = \varphi \circ (\psi \circ \phi)$

iii. Komposisi fungsi bersifat distributif yaitu:

Ambil $\varphi,\psi \in H$, $x,y \in M$,maka.

$$\begin{aligned}
\left[(\varphi + \psi)\circ \phi\right](x) &= (\varphi + \psi)(\phi(x)) \\
&= \varphi(\phi(x)) + \psi(\phi(x)) \\
&= (\varphi \circ \phi)(x) + (\psi \circ \phi)(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\varphi \circ (\psi + \phi)\right](x) &= \varphi((\psi + \phi)x) \\
&= \varphi(\psi(x) + \phi(x)) \\
&= \varphi(\psi(x)) + \varphi(\phi(x)) \\
&= (\varphi \circ \psi)(x) = (\varphi \circ \phi)(x)
\end{aligned}$$

iv. Ada identitas perkalian I yaitu:

Akan dibuktikan $I \in Hom_R(M,M)$

Ambil $x,y \in M, \alpha \in R$, maka

$$I(\alpha \cdot x + y) = \alpha \cdot x + y$$
$$= \alpha \cdot I(x) + I(y)$$

Jadi $I \in Hom_R(M,M)$

Ambil $\psi \in Hom_R(M,M)$, maka

$$(\psi \circ I)(x) = \psi(I(x))$$
$$= \psi(x)$$
$$(I \circ \psi)(x) = I(\psi(x))$$
$$= \psi(x)$$

Jadi I unsur identitas di $Hom_R(M,M)$

Definisi 6

Ring *Hom_R (M,M)* disebut ring endomorfisme atas *M* dan dinotasikan dengan *End_R(M)* atau disingkat *End(M)* jika ring R jelas dalam konteks yang dibicarakan. Anggota *End_R(M,M)* disebut endomorfisme (Dummit & Foote, 1991:324).

Teorema 7

Misalkan *R* adalah ring, M = *R* adalah **R**-modul atas dirinya sendiri, pemetaan $\varphi : R \rightarrow End_R(M)$ yang didefinisikan dengan $\varphi(r) = r \cdot I, \forall r \in R$ adalah homomorfisme ring dengan I adalah identitas di $End_R(M)$.

Bukti

Akan dibuktikan φ adalah homomorfisme ring *i.* Ambil $\forall x, y \in R$, maka

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= (x+y)\cdot I \\ &= x\cdot I + y\cdot I \\ &= \varphi(x)+\varphi(y)\end{aligned}$$

ii. Ambil $\forall x, y \in R$, maka

$$\begin{aligned}\varphi(x\cdot y) &= (x\cdot y)I \\ &= xI\cdot yI \\ &= \varphi(x)\cdot\varphi(y)\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x+y) &= (\alpha x+y)\cdot I \\ &= (\alpha x)I + yI \\ &= \alpha\cdot\varphi(x)+\varphi(y)\end{aligned}$$

Maka φ homomorfisme ring dari *R* ke $End_R(M)$.

3.2.1. Sifat-sifat Endomorfisme

Definisi 7

Misalkan *R* adalah ring, M adalah **R**-modul, jika endomorfisme dari M ke M tersebut bersifat satu-satu, maka disebut endomorfisme injektif.

Contoh

Misalkan *R* adalah ring, M = *R* adalah **R**-modul atas dirinya sendiri, dengan pemetaan $\varphi : M \to M$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = 6x$ adalah endomorfisme injektif, karena

Jawab

Ambil $\forall x, y \in M, \alpha \in R$

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x + y) &= 6(\alpha x + y)\\ &= 6(\alpha(x) + (y))\\ &= 6 \cdot \alpha(x) + 6(y)\\ &= \alpha \cdot 6(x) + 6(y)\\ &= \alpha \cdot \varphi(x) + \varphi(y)\end{aligned}$$

Maka φ endomorfisme

Ambil $\forall x, y \in M$, dengan

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(y)\\ 6x &= 6y\\ x &= y\end{aligned}$$

Maka φ injektif

Jadi φ adalah endomorfisme injektif.

Definisi 8

Misal R adalah ring, M = R adalah **R**-modul atas dirinya sendiri, jika endomorfisme dari M ke M tersebut bersifat pada/onto maka disebut endomorfisme surjektif.

Contoh

Misalkan R adalah Ring, M = R adalah **R**-modul atas dirinya sendiri, dengan pemetaan $\varphi : M \to M$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = 7x$ adalah endomorfisme surjektif, karena

Jawab

Ambil $\forall x, y \in M, \alpha \in R$, maka

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha x + y) &= 7 \cdot (\alpha x + y) \\
&= 7(\alpha(x) + (y)) \\
&= 7 \cdot \alpha(x) + 7(y) \\
&= \alpha \cdot 7(x) + 7(y) \\
&= \alpha \cdot \varphi(x) + \varphi(y)
\end{aligned}$$

Maka φ endomorfisme.

Akan dibuktikan φ bersifat surjektif

Ambil $y \in M$

Pilih $x = \dfrac{y}{7} \in M$

Maka

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \varphi\left(\frac{(y)}{7}\right) \\
&= 7\left(\frac{(y)}{7}\right) \\
&= (y) \\
&= y
\end{aligned}$$

Jadi fungsi φ bersifat surjektif. Maka disebut endomorfisme surjektif.

Definisi 9

Misalkan *R* adalah ring, M adalah **R**-modul, φ adalah endomorfisme dari M ke M tersebut bersifat injektif (satu-satu) dan surjektif (pada) atau disebut dengan bijektif maka φ disebut endomorfisme bijektif.

Contoh

Misalkan R adalah Ring, M = R adalah **R**-modul atas dirinya sendiri, dengan pemetaan $\varphi : M \to M$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = 9x$ adalah endomorfisme bijektif, karena

Jawab

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x + y) &= 9 \cdot (\alpha x + y) \\ &= 9 \cdot (\alpha(x) + (y)) \\ &= 9 \cdot \alpha(x) + 9(x) \\ &= \alpha \cdot 9(x) + 9(y) \\ &= \alpha \cdot \varphi(x) + \varphi(y)\end{aligned}$$

Maka $\varphi \in End_R(M, M)$.

1. Akan dibuktikan φ bersifat surjektif

   Ambil $y \in N$

   Pilih $x = \frac{y}{9} \in M$

   Maka

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi\left(\frac{(y)}{9}\right) \\ &= 9\left(\frac{(y)}{9}\right) \\ &= (y) \\ &= y\end{aligned}$$

   Jadi φ bersifat surjektif.

2. Akan dibuktikan φ bersifat injektif

Ambil $\forall x, y \in M, \alpha \in R$, maka

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(y) \\ 9x &= 9y \\ x &= y \end{aligned}$$

Maka φ satu-satu

Jadi fungsi φ bersifat surjektif dan injektif, maka disebut endomorfisme bijektif.

Secara sederhana, sifat-sifat homomorfisme dapat dinyatakan dalam diagram endomorfisme.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \begin{array}{c}\varphi : \mathrm{M} \to \mathrm{M} \\ \text{Endomorfisme}\end{array} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \begin{array}{c}\text{(Onto)} \\ \text{Endomorfisme Surjektif}\end{array} \arrow[dr] & & \begin{array}{c}\text{(1-1)} \\ \text{Endomorfisme Injektif}\end{array} \arrow[dl] \\ & \text{Endomorfisme Bijektif} & \end{tikzcd}$$

Teorema 8

Misalkan R adalah ring, M = R adalah **R**-modul atas dirinya sendiri, jika $\varphi \in End_R(M, M)$ bersifat injektif, maka φ bersifat bijektif, dengan syarat M adalah *finite*.

Bukti

Diketahui φ injektif

Andaikan φ tidak surjektif

Artinya ada $x \in M$, yang tidak mempunyai prapeta di M

Karena φ injektif, maka $|M| > |M|$

Padahal $M = M$ artinya $|M| = |M|$

Jadi φ surjektif dan φ injektif, dengan demikian φ bijektif.

Teorema 9

Misalkan R adalah ring, M = R adalah **R**-modul atas dirinya sendiri, jika $\varphi \in End_R(M, M)$ bersifat surjektif, maka φ bersifat bijektif, dengan syarat M *finite*.

Bukti

Diketahui φ surjektif

Andaikan φ tidak injektif

Artinya ada $y \in M$, yang mempunyai lebih dari satu prapeta di M

Karena φ injektif, maka $|M| > |M|$

Padahal $M = M$ artinya $|M| = |M|$

Jadi φ injektif dan φ surjektif, dengan demikian φ bijektif.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan, antara lain:

1. Homomorfisme Modul mempunyai tiga sifat, yaitu jika modul homomorfisme dari M ke N tersebut bersifat injektif (satu-satu) maka disebut *monomorfisme*, jika homomorfisme bersifat surjektif maka disebut *epimorfisme*, sedangkan jika mempunyai sifat kedua-duanya maka disebut *isomorfisme*.
2. Endomorfisme mempunyai tiga sifat, yaitu jika endomorfisme dari M ke M bersifat satu-satu maka disebut *endomorfisme injektif*, jika endomorfisme bersifat onto(pada) maka disebut *endomorfisme surjektif*, sedangkan jika mempunyai sifat kedua tersebut maka disebut *endomorfisme bijektif*. Jika M *finite* dan endomorfisme bersifat injektif, maka pasti bijektif dan jika M *finite* dan endomorfisme bersifat surjektif, maka pasti bijektif.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah modul homomorfisme dan ring endomorfisme. Maka disarankan kepada peneliti yang lain untuk mengadakan penelitian secara lebih mendalam mengenai modul homomorfisme dan ring endomomorfisme , dengan mencari sifat-sifat yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung

Dummit, David S dan Foote, Richard M. 1991. *Abstract Algebra*. New York: Prentice-Hall International, Inc.

Fuad Pasya, Ahmad. 2004. *Dimensi Sains Al-Qur'an Menggali Ilmu Pengetahuan Dari Al-Qur'an.* Solo: Tiga Serangkai.

Pinter, Carles C. 1990. *A Book of Abstract Algebra, second edition.* New York: Mc Graw-hall Publishing Company.

Rahman, Afzalur. 1992. *Al-Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan.* Jakarta: Rineka Cipta.

Raisinghania, M, D dan Anggarwal, R, S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar.

Soebagio, Suharti dan Sukirman. 1993. *Struktur Aljabar*. Jakarta: Universitas Terbuka.

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Okta Tri Riyan Fanani
Nim : 045110049
Fakultas/ jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : Kajian Homomorfisme Modul dan Ring Endomorfisme
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Abdul Azis, M.Si

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	2 Juli 2008	Konsultasi Masalah	1.	
2	9 Juli 2008	Konsultasi BAB III		2.
3	25 Agustus 2008	Revisi BAB III	3.	
4	8 September 2008	Revisi BAB III		4.
5	12 September 2008	ACC BAB III	5.	
6	18 September 2008	Konsultasi BAB I dan II		6.
7	21 September 2008	Revisi BAB I dan II	7.	
8	13 Oktober 2008	Konsultasi Keseluruhan		8.
9	14 Oktober 2008	Revisi Keagamaan	9.	
10	15 Oktober 2008	Revisi Keagamaan		10.
11	16 Oktober 2008	ACC Keagamaan	11.	
12	16 Oktober 2008	ACC Keseluruhan		12.

Malang, 17 Oktober 2008
Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321