PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE TIGA DENGAN METODE DERET PANGKAT

SKRIPSI

Oleh:
NUR LAILI NINGSIH
NIM : 04510036

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG

2008

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE TIGA DENGAN METODE DERET KUASA

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

NUR LAILI NINGSIH

NIM : 04510036

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG

MALANG

2008

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE TIGA DENGAN METODE DERET KUASA

SKRIPSI

Oleh:
NUR LAILI NINGSIH
NIM : 04510036

Telah Disetujui untuk Diuji
Malang, 21 Oktober 2008

Dosen Pembimbing I,	**Dosen Pembimbing II,**
<u>Drs. H. Turmudi, M. Si</u>	**<u>Munirul Abidin, M.Ag</u>**
NIP. 150 209 630	**NIP. 150 321 634**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

<u>Sri Harini, M. Si</u>
NIP. 150 318 321

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE TIGA DENGAN METODE DERET KUASA

SKRIPSI

Oleh:
NUR LAILI NINGSIH
NIM : 04510036

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 21 Oktober 2008

Susunan Dewan Penguji:			Tanda Tangan
1.	Penguji Utama	: Usman Pagalay, M.Si. NIP. 150 327 240	( )
2.	Ketua	: Sri Harini, M.Si. NIP. 150 318 321	( )
3.	Sekretaris	: Drs. H. Turmudzi, M.Si NIP. 150 209 630	( )
4.	Anggota	: Munirul Abidin, M.Ag NIP. 150 321 634	( )

Mengetahui dan Mengesahkan

Kajur Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi

<u>Sri Harini, M.Si.</u>
NIP. 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : NUR LAILI NINGSIH

NIM **:** 04510036

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 21 Oktober 2008
Yang membuat pernyataan

NUR LAILI NINGSIH
NIM: 04510036

MOTTO

" Bersabarlah karena Allah, karena sesungguhnya sabar itu indah, dan mendatangkan kemudahan".

"Bersabarlah dalam menghadapi cobaan, karena cobaan akan mendatangkan kebaikan".

Halaman Persembahan

Penulis mempersembahkan karya ilmiah ini kepada:

Bapak Syamsi Mustofa dan Ibu Munjiati,

Kedua orang tua yang selalu memberikan segalanya.

Suamiku tercinta Al-Huda,

Motivasi, cinta, dan kasih sayang-mu, dapat menenangkan hati-ku

Anakku tercinta Arfan,

Terdapat satu impian dan harapan agar dia mampu melangkah pasti melebihi langkahku. Menjadi insan yang selalu berbakti pada kedua orang tua

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillah, puji syukur kehadirat Illahi Robbi, yang telah memberikan dan melimpahkan Rahmat, Taufiq dan Hidayah serta Inayah-Nya tiada henti dan tiada berbatas kepada penulis, tanpa itu semua penulis tidak dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan lancar.

Sholawat ma'a salam semoga senantiasa mengalun indah dan tulus terucap kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah membimbing dan menuntun manusia dari jalan yang yang penuh dengan fenomena-fenomena duniawi yang penuh dengan kegelapan menuju jalan yang lurus dan penuh cahaya keindahan yang di ridhoi Allah SWT yaitu jalan menuju surga-Nya yang penuh dengan rahmat dan barokah.

Skripsi tersebut dapat disusun dan diselesaikan dengan baik karena dukungan, motivasi serta bimbingan dari berbagai pihak. Tiada kata dan perbuatan yang patut terucap dan terlihat untuk menguntai sedikit makna kebahagian diri. Oleh karena itu, izinkanlah penulis mengukirkan dan mengucapkan banyak terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor UIN Malang.
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU.,D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika.

4. Bapak Drs.H.Turmudi, M.Si. selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan, arahan dan motivasi, sehingga penulis semangat dalam menyelesaikan skripsi ini. Suatu kehormatan kami dapat dibimbing Beliau.
5. Bapak Munirul Abidin, M.Ag. selaku pembimbing agama yang telah meluangkan waktunya, menyalurkan ilmunya serta bimbingannya.
6. Segenap Keluarga Besar dosen Matematika Universitas Islam Negeri Malang dan semua staf yang tidak bisa kami sebutkan satu persatu, terima kasih banyak atas ilmu yang telah diajarkan kepada kami selama empat tahun. Terlalu banyak bantuan dan hal-hal lain yang yang telah di berikan kepada penulis yang tidak bisa penulis rangkai dalam bentuk kata-kata.
7. Kedua orang tua, dan semua keluarga besar penulis, yang telah mencurahkan dan memberikan kasih sayang, perhatian, motivasi dan kepercayaan penuh kepada penulis. Ucapan terimakasih serasa tidak cukup untuk menggambarkan dan melukiskan semuanya.
8. Suamiku tercinta ”Al Huda” yang selalu memberikan kasih sayangnya sebagai motivasi dan semangat untuk menyelesaikan skripsi ini
9. Serta Anakku tercinta ”M. Thoriq Mustafid Arfan Nurdatra” yang selalu mendampingi mamanya dalam pengerjaan skripsi ini.
10. Temen-temen matematika seperjuangan angkatan 2004, banyak kenangan indah yang telah terukir. Kita sudah berjuang bersama dari semester 1, makasih banyak buat semuanya. Semoga kesuksesan menyertai kita.

9. Ibu dan bapak kos dan juga teman-teman kos 'JOYO SUKO (yukti, ti2n, yuni, suci, lu2k, lis, susi, alien, luli, diana, zuq, iefa, li2k, rini dan temen kos lainnya), makasih yah buat kebersamaannya.

Tiada kata yang patut diucapkan selain ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan do'a semoga amal baik mereka mendapat Ridho dari Allah SWT. Amiin.

Malang, 21 Oktober 2008

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Laili Ningsih, Nur. 2008. **Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde Tiga dengan Metode Deret Kuasa.** Skripsi, Fakultas Sains dan Teknologi, Jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri (UIN) Malang. Pembimbing: Drs. H. Turmudzi, M.Si. dan Munirul Abidin, M.Ag.

Kata kunci: Deret kuasa, Persamaan diferensial orde tiga.

Persamaan diferensial merupakan bagian dari matematika yang sering digunakan dalam matematika terapan, karena adanya permasalahan dalam matematika terapan yang dapat digambarkan dengan persamaan diferensial. Salah satu bentuk persamaan diferensial adalah persamaan diferensial orde tiga, dengan koefisien peubah yang tidak dapat diselesaikan dengan aljabar. Oleh karena itu, penulis mengangkat permasalahan Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde Tiga dengan Metode Deret Kuasa. Adapun tujuan dari pembahasan ini adalah untuk mengetahui cara mencari penyelesaian persamaan diferensial Orde Tiga dengan metode deret kuasa disekitar titik biasa dan titik singular yang regular. Dalam mengkaji masalah ini penulis menggunakan metode penelitian literatur.

Persamaan diferensial linier homogen orde tiga dengan koefisien peubah dapat diselesaikan dengan metode deret kuasa dengan syarat persamaan diferensial tersebut analitik pada $x = x_0$. Jika x_0 adalah titik biasa maka asumsi penyelesaiannya adalah $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$. Untuk mencari nilai dari konstanta maka terlebih dahulu ditentukan y', y'', y''', y''''. kemudian disubtitusikan ke persamaan diferensial yang dicari penyelesaiannya. Selanjutnya menentukan nilai dari konstanta yang menyamakan koefisien x berpangkat sama dengan nol sehingga diperoleh nilai c_n dan disubtitusikan ke asumsi selesaian. Jika x_0 adalah titik singular yang regular maka asumsi penyelesaiannya berbentuk $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$, dengan r merupakan bilangan real atau kompleks dan $c_0 \neq 0$. Nilai r nya diperoleh dari persamaan indeks. Dengan mensubtitusikan hasil persamaan indeks keasumsi selesaian, maka diperoleh penyelesaian dari persamaan diferensial yang dicari.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang banyak sekali manfaatnya. Yaitu salah satu ilmu bantu yang sangat penting dan berguna dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam menunjang perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Matematika merupakan sarana berfikir untuk menumbuhkembangkan pola pikir logis, sistematis, obyektif, kritis, dan rasional. Oleh sebab itu, matematika harus mampu menjadi salah satu sarana untuk meningkatkan daya nalar dan dapat meningkatkan kemampuan dalam mengaplikasikan matematika untuk menghadapi tantangan hidup dalam memecahkan masalah. Matematika juga digunakan untuk memecahkan masalah pada teori matematika sendiri. Salah satunya adalah penyelesaian persamaan diferensial orde-tiga yang menggunakan konsep deret kuasa

Matematika merupakan salah satu ilmu yang banyak manfaatnya dalam kehidupan sehari-hari. Persamaan diferensial merupakan salah satu cabang dari matematika yang banyak digunakan untuk memecahkan masalah-masalah yang dihadapi dalam bidang sains dan teknologi. Dalam sains dan teknologi sering ditemukan masalah-masalah yang penyelesaiannya tidak dapat dicari dengan hanya menggunakan rumus atau konsep yang sudah ada. Dengan berkembangnya zaman penerapan persamaan diferensial semakin meluas karena adanya permasalahan mengenai kuantitas bahwa perubahan terus menerus yang berkaitan dengan waktu dapat digambarkan dengan suatu persamaan diferensial.

Persamaan diferensial adalah persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas. Persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa dapat dikelompokkan berdasarkan bentuk dan ordenya. Berdasarkan bentuknya persamaan diferensial biasa dikelompokkan menjadi persamaan diferensial homogen dan persamaan diferensial non homogen. Berdasarkan ordenya persamaan diferensial biasa dapat dikelompokkan menjadi persamaan diferensial orde satu, Persamaan diferensial orde dua sampai dengan orde –n.

Dengan banyaknya jenis persamaan diferensial maka banyak pula cara mencari penyeleseiannya dari persamaan diferensial masing-masing. Yaitu dengan metode reduksi, metode deret kuasa, metode euler, metode variasi parameter dan banyak lagi yang lainnya. Dari banyaknya cara mencari penyelesaian tersebut penulis memilih salah satu cara yaitu metode deret kuasa untuk mencari selesaian dari persamaan diferensial linier homogen orde tiga. Metode ini digunakan sebagai alternatif mencari penyelesaian dari persamaan diferensial linier homogen orde-tiga dengan koefisien berupa peubah yang tidak dapat dicari penyeleseiannya dengan metode aljabar karena bentuknya yang lebih rumit. Dengan menggunakan metode deret kuasa akan menghasilkan pendekatan yang lebih sempurna dan mudah dipahami.

Dengan memperhatikan hal tersebut di atas, penulis mengangkat permasalahan tentang ***"Penyeleseian Persamaan Diferensial Orde Tiga Dengan Metode Deret Kuasa".***

1.2. Rumusan Masalah

Sesuai dengan latar belakang di atas, maka dapat dibuat suatu perumusan masalah yaitu

1. Bagaimana cara mencari penyeleseian persamaan diferensial homogen orde tiga dengan metode deret kuasa di sekitar titik biasa.
2. Bagaimana cara mencari penyeleseian persamaan diferensial homogen orde tiga dengan metode deret kuasa di sekitar titik singular

1.3. Batasan Masalah

Masalah persamaan diferensial sangat luas cakupannya. Untuk tetap menjaga kedalaman pembahasan materi, penulisan laporan ini dibatasi pada ruang lingkup permasalahan dan pembahasan pada persamaan diferensial linier homogen orde tiga dengan koefisien berupa peubah (variabel) yang analitik pada suatu titik.

1.4. Tujuan Penulisan

Berdasarkan perumusan masalah yang telah ditentukan, maka penelitian ini bertujuan

1. Untuk mencari penyeleseian persamaan diferensial homogen orde tiga dengan metode deret kuasa di sekitar titik biasa.
2. Untuk mencari penyeleseian persamaan diferensial homogen orde tiga dengan metode deret kuasa di sekitar titik singular

1.5. Manfaat Penulisan

Penulisan ini pada dasarnya memberi manfaat bagi beberapa pihak, diantaranya:

1.5.1. Bagi Penulis

Memberikan wawasan dan ilmu pengetahuan tentang penyelesaian persamaan diferensial homogen orde tiga dengan metode deret kuasa di sekitar titik biasa dan titik singular.

1.5.2. Bagi pemerhati matematika

Menambah informasi tentang penyelesaian persamaan diferensial homogen orde tiga dengan metode deret kuasa di sekitar titik biasa dan titik singular.

1.6. Metodelogi Pembahasan

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan ini adalah metode penelitian *"kajian kepustakaan"* atau *"literatur study"*. Pembahasan dilakukan dengan mempelajari buku-buku yang berkaitan dengan masalah penelitian ini.

Dalam penelitian ini, langkah-langkah umum yang dilakukan penulis adalah sebagai berikut :

1. Mengumpulkan dan mempelajari literatur yang berupa buku-buku makalah, dokumentasi, notulen, catatan harian, dan lain-lain yang berkaitan dengan masalah penelitian yang akan digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial. Adapun literatur utama yang penulis gunakan adalah buku persamaan diferensial biasa dengan penerapan modern, oleh Finizio dan G. Ladas.
2. Menentukan pokok permasalahan dari literatur utama berupa cara mencari selesaian dari persamaan diferensial orde tiga dengan metode deret kuasa.
3. Cara menyelesaikan persamaan diferensial orde tiga dengan metode deret kuasa, di sekitar titik biasa dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:
    1. Mengasumsikan penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut dengan

       $$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

    2. Menentukan turunan pertama, kedua, dan ketiga dari y
    3. Mensubtitusikan y, y', y'', y''', ke persamaan diferensial sehingga diperoleh persamaan dalam bentuk sigma
    4. Menyamakan pangkat dari x yaitu x^n supaya persamaan yang diperoleh dari langkah 3 dapat dijumlahkan
    5. Mengelompokkan x yang mempunyai pangkat sama dan menyamakan koefisien dari setiap x pangkat dengan nol.

6. Menentukan nilai koefisien c_n dan mengelompokkan dalam bentuk $c_0, c_1, c_2,\ dan\ c_3$.
7. Dengan mensubtitusikan hasil yang diperoleh dari langkah 6 keasumsi penyelesaian, maka diperoleh penyelesaian umum dari persamaan diferensial yang dicari.

8. Cara menyelesaikan persamaan diferensial orde tiga dengan metode deret kuasa, di sekitar titik singlar sebagai berikut:

1. Mengasumsikan penyeleseian dari persamaan diferensial yang dicari dengan $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$, dengan r adalah bilangan real atau kompleks, $c_0 \neq 0$. Dan x_0 sebagai titik singular yang regular
2. Menentukan turunan pertama, kedua, ketiga, sampai ke-n dari y
3. Mensubtitusikan y, y', y'', y''' sampai y^n ke persamaan diferensial, sehingga diperoleh persamaan dalam bentuk sigma
4. Menyamakan pangkat dari x yaitu x^{n+r} supaya persamaan yang diperoleh dari langkah 3 dapat dijumlahkan
5. Mengelompokkan x yang mempunyai pangkat sama
6. Menentukan persamaan kuadrat dalam r yang disebut persamaan indeks dengan mengambil pangkat terendah dari persamaan, pada langkah 5 yaitu x^{n+r}
7. Menentukan nilai akar-akar dari persamaan indeks dan mencari nilai dari c_n

8. Dengan mensubtitusikan hasil yang diperoleh dari langkah 6 keasumsi selesaian, maka diperoleh penyelesaian dari persamaan diferensial yang dicari.

1.7. Sistematika Pembahasan

Agar dalam penulisan dan pembahasan skripsi ini sistematis dan mudah untuk dipahami, maka pembahasannya disusun menjadi empat bab sebagai berikut:

BAB I : Pendahuluan, yang berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika pembahasan.

BAB II : Kajian pustaka, yang berisi teori-teori yang mendukung terhadap rumusan masalah penelitian.

BAB III : Pembahasan, yang berisi ulasan tentang jawaban dari rumusan masalah.

BAB IV : Penutup, berisi kesimpulan dan saran

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1.Deret Kuasa

Deret pangkat adalah deret yang berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \qquad (2.2.1)$$

dengan x adalah suatu variabel bilangan dan a_n adalah konstanta-konstanta yang disebut koefisien dari deret tersebut. Untuk setiap x tertentu deret (2.2.1) merupakan deret konstanta-konstanta yang dapat kita uji konvergensi atau divergensinya. Suatu deret kuasa mungkin konvergen untuk beberapa nilai x dan divergen untuk nilai x lainnya. Jumlah deret tersebut merupakan suatu fungsi

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Yang daerah asalnya adalah himpunan semua x sedemikianhingga serupa deret konvergen (Stewart,2003:178).

Untuk setiap nilai x yang menyebabkan deret kuasa konvergen, deret itu menyatakan bilangan yang merupakan jumlah deret tersebut. Karena itu, suatu deret kuasa mendefinisikan suatu fungsi. Fungsi f yang nilai fungsinya

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n \qquad (2.2.2)$$

mempunyai daerah definisi semua nilai x yang menyebabkan deret kuasa (2.2.2) konvergen. Jelas bahwa setiap deret kuasa (2.2.1) konvergen untuk $x = 0$ (Leithold, 1991:66).

Teorema .

Untuk suatu deret pangkat yang diberikan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ hanya terdapat tiga kemungkinan:

1. Deret tersebut konvergen hanya ketika $x = a$
2. Deret tersebut konvergen untuk semua x
3. Terdapat suatu bilangan positif R sedemikian rupa sehingga deret tersebut konvergen bila $|x - a| < R$ dan divergen bila $|x - a| > R$

Bukti:

Misalkan kasus 1 dan 2 salah, maka terdapat bilangan taknol b dan d sedemikian sehingga $\sum c_n x^n$ konvergen untuk $x = b$ dan divergen untuk $x = d$. Jadi himpunan $S = \{x \mid \sum c_n x^n\}$ konvergen tak kosong. Menurut teorema sebelumnya deret divergen bila $|x| > |d|$, sehingga $|x| \leq |d|$ untuk semua $x \in S$. Ini mengatakan bahwa $|d|$ merupakan batas atas untuk himpunan S . Jadi menurut aksioma Kelengkapan, S mempunyai batas atas terkecil R . Jika $|x| > R$, maka $x \notin S$, sehingga $\sum c_n x^n$ divergen. Jika $|x| < R$, maka $|x|$ bukan batas atas S dan karenanya terdapat $b \in S$ sedemikian sehingga $b > |x|$. Karena $b \in S, \sum c_n b^n$ konvergen.(Stewart,2003:178).

Contoh:

Tentukan jari-jari kekonvergenan deret berikut:

$$\sum \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n^2}(x-3)^n ,$$

Jawab:

Misalkan $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} 2^n}{n^2}(x-3)^n$, maka

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2(x-3)^{n+1}}{2^n(x-3)n}\right|$$

$$= 2|x-3|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$= 2|x-3|$$

Dengan uji banding limit, deret tersebut konvergen mutlak jika $2|x-3| < 1$ atau $|x-3| < \dfrac{1}{2}$ dan divergen jika $2|x-3| > 1$ atau $|x-3| > \dfrac{1}{2}$ sehingga berdasarkan teorema 3 diperoleh jari-jari kekonvergenan deret tersebut adalah $\dfrac{1}{2}$.

Definisi

Hasil jumlah deret kuasa

Dua deret kuasa dengan jari-jari kekonvergenan positif, dapat dijumlahkan suku demi suku di dalam selang kekonvergenan yang sama.

Jika $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ dan $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ maka

$$f(x)+g(x) = \left[b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \ldots\right] + \left[c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots\right]$$

$$f(x)+g(x) = (b_0+c_0) + (b_1+c_1)(x-x_0) + (b_2+c_2)(x-x_0)^2 + \ldots$$

$$f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(b_n+c_n)(x-x_0)^n$$

Hasil kali Deret kuasa

Dua deret kuasa dengan jari-jari kekonvergenan positif dapat dikalikan suku demi suku di dalam daerah kekonvergenan yang sama.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n \text{ dan } g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

$$f(x).g(x)=\left[b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\dots\right]+\left[c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\dots\right]$$
$$f(x).g(x)=b_0c_0+(b_0c_1+b_1c_0)(x-a)+(b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0)(x-a)^2+\dots$$

$$f(x).g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(b_0c_n+b_1c_{n-1}+\dots+b_nc_0)(x-a)^n$$

(Pamuntjak dan W. Santoso, 1990:4-6).

Definisi

Suatu fungsi f dikatakan analitik pada titik x_0, jika terdapat suatu interval terbuka yang memuat x_0, sehingga dapat ditulis sebagai

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ dengan suatu jari-jari kekonvergenan yang positif.

(R. Kent Nagle, 1996: 437).

Contoh:

$f(x)=e^x$, analitik untuk semua x maka

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

2.2.Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial adalah persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah tak bebas. (Pamuntjak dan W. Santoso, 1990:11)

Persamaan diferensial linier orde tiga dengan peubah terikat y dan peubah bebas x adalah sebuah persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(x)\frac{d^3y}{dx^3}+a_1(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_n(x)y=0 \qquad (2.1.4)$$

dengan $a_0 \neq 0$ kita asumsikan bahwa $a_0, a_1, ..., a_n$ dan F fungsi-fungsi real dari x dan kontinu pada interval $a \leq x \leq b$ subset bilangan real. Bentuk umum persamaan diferensial orde-n dapat dinyatakan dalam $F\left(x, y, y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n)}\right) = 0.$

Dari persamaan (2.1.4) dapat diketahui ciri-ciri dari persamaan diferensial linier yaitu:

1. Jika $y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{'}, y.$
2. $a_0, a_1, ..., a_n$ dan F merupakan fungsi-fungsi x saja atau konstanta.

Untuk $n = 2$ maka persamaan (2.1.4) menjadi

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=F(x). \qquad (2.1.5)$$

Jika $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ adalah konstanta, maka persamaan diferensial tersebut dinamakan persamaan diferensial linier dengan koefisien peubah jika $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ merupakan peubah.

Persamaan (2.1.5) dapat dinyatakan dalam bentuk standar yaitu:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x).$$

Jika g(x) = 0 maka persamaan (2.1.5) disebut *persamaan diferensial homogen.* Jika g(x) $\neq$ 0 maka persamaan (2.1.5) disebut *persamaan diferensial tak homogen.* (Sheply L.Ros, 1984:103).

2.3. Persamaan Diferensial Linier Homogen.

Persamaan diferensial linier homogen berbentuk

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + \frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad (2.5.1)$$

Untuk memudahkan notasi, tulislah

$$\frac{dy}{dx} = Dy, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = D.Dy = d^2 y \qquad (2.5.2)$$

Sehingga menjadi $(D^n + D^{n-1} + ... + D)y = 0$

Jika $D = \frac{d}{dx}$ suatu operator yang bekerja terhadap y, yaitu

$$D^n + D^{n-1} + ... + D \qquad (2.5.3)$$

merupakan operator yang jauh lebih rumit. Akan tetapi akan diperoleh persamaan yang sangat mudah dengan memperhatikan persamaan (2.5.3) pada saat sebagai polinom dalam peubah D, dan persamaan itu dinyatakan dengan $F(D)$. Jadi persamaan (2.5.2) dapat ditulis secara singkat sebagai $F(D)y = 0$ (Ayres, 1992: 82).

2.4.Selesaian Umum Persamaan Diferensial

Definisi

Suatu seleseian dari persamaan diferensial orde n pada interval l dinamakan selesaian umum pada l apabila memenuhi kondisi berikut:

1. Selesaian itu memuat n konstanta.
2. Semua selesaian persamaan diferensial itu dapat diperoleh dengan menetapkan nilai-nilai konstanta-konstanta yang sesuai.

Akan tetapi tidak semua persamaan diferensial mempunyai selesaian umum. (Rustanto, 2001: 9).

Contoh.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-1)2 = 0$$

selesaian dari persamaan tersebut hanya satu yaitu $y(x)=1$,

Teorema

Misalkan y_1 dan y_2 selesaian dari persamaan

$y'' + p(x)y + q(x) = 0.$

maka kombinasi linier dari $c_1y_1 + c_2y_2$ dengan c_1 dan c_2 konstanta sebarang merupakan selesaian dari persamaan homogen tersebut.

(R. Kent Nagle, 1996: 155).

2.5. Titik Biasa dan Titik Singular

Definisi

Sebuah titik x_0 disebut titik biasa dari persamaan diferensial

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (2.1.6)$$

jika kedua fungsi $p_1 = \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$ dan $p_2 = \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ (2.1.7)

analitik pada titik x_0, jika paling sedikit satu fungsi dari (2.1.7) tidak analitik pada titik x_0 maka disebut titik singular dari persamaan diferensial (2.1.6). (Ladas Finizio,1982:209).

Definisi

Jika fungsi ditentukan dengan

$(x - x_0)p_1(x)$ dan $(x - x_0)^2\, p_2(x)$ (2.1.8)

keduanya analitik pada x_0 maka x_0 disebut titik singular yang regular dari persamaan diferensial (2.1.6) dan jika fungsi (2.1.7) tidak analitik pada x_0, x_0 dinamakan titik singular tak regular. (Sheply L.Ros, 1984:234).

Penyelesaian singular suatu persamaan diferensial diperoleh dengan menyatakan syarat-syarat bahwa persamaan diferensial itu mempunyai akar-akar rangkap dan primitifnya mempunyai akar rangkap. Pada umumnya, persamaan tingkat satu tidak mempunyai penyelesaian singular, jika persamaan itu berderajat satu, persamaan itu tidak dapat mempunyai penyelesaian singular. Lagipula, persamaan $f(x, y, p) = 0$ tidak dapat mempunyai penyelesaian singular jika $f(x, y, p)$ dapat diuraikan dalam faktor-faktor yang linier dalam p dan rasional dalam x dan y

(Ayres, 1992: 68).

2.6. Keanalitikan fungsi

Konsep fungsi analitik merupakan konsep yang terpenting di dalam teori peubah kompleks. Fungsi-fungsi yang memiliki sifat analitik mewarisi suatu struktur dalam yang sangat kokoh dan ini dimanifestasikan ke luar oleh sifat-sifat yang dimiliki oleh fungsi-fungsi yang analitik.

Suatu fungsi $f(z)$ dikatakan analitik pada titik z_0, asal turunannya ada di semua titik pada suatu lingkungan z_0. Dari definisi tersebut bahwa terdapat suatu hubungan yang sangat erat antara diferensibilitas dan analitisitas suatu fungsi pada suatu titik. Tetapi kedua konsep itu tidak sama, karena analitisitas di z_0 berimplikasi diferensibilitas di z_0, tetapi tidak sebaliknya yaitu diferensibilitas di z_0 tidak berimplikasi analitisitas (Paliouras, 1987: 54).

2.7.Perubahan indeks Penjumlahan

Pada operasi penjumlahan deret pangkat dapat dilakukan dalam satu langkah jika suku umum dari deret itu mempunyai pangkat yang sama. Akan tetapi jika deret-deret itu mempunyai pangkat yang tidak sama maka harus dibuat perubahan dalam indeks penjumlahan dari deret itu tanpa merubah jumlah dari deret itu, agar mempunyai suku umum dengan pangkat yang sama. Dasar pemikiran perubahan indeks, adalah penggabungan dalam identitas berikut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} (x-x_0)^{n-k} , \qquad (2.10.1)$$

Yang berlaku untuk setiap bilangan bulat k. Cara termudah untuk membuktikan (2.10.1) adalah menuliskan kedua deret itu suku demi suku.

Dalam kata-kata, (2.10.1) persamaan mengatakan bahwa kita dapat menurunkan n dengan k dalam suku umum $a_n(x-x_0)^n$ asalkan kita naikkan n dengan k dalam lambang penjumlahannya, dan sebaliknya (Finizio, 1988: 207).

Contoh.

Buktikan bahwa:

$$x^3\sum_{n=0}^{\infty} n^2(n-2)a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n-3)^2(n-5)a_{n-3}x^n$$

Jawab:

Kita mulai dengan memindahkan x^3 kesebelah kanan sehingga

$$x^3\sum_{n=0}^{\infty} n^2(n-2)a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2(n-2)^2 a_n x^{n+3}$$

kemudian dirubah dalam bentuk x^k, misalkan $k=n+3$ maka $n=k-3$ jika $n=0$ maka $k=3$. Kemudian subtitusikan dalam deret yang diketahui, diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2(n-2)a_n x^{n+3} = \sum_{k=3}^{\infty}(k-3)^2(k-5)a_{k-3}x^k$$

dengan merubah k dengan n maka diperoleh

$$x^3\sum_{n=0}^{\infty} n^2(n-2)a_n x^n = \sum_{n=3}^{\infty}(n-3)^2(n-5)a_{n-3}x^n$$

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang cara mencari penyelesaian dari persamaan diferensial orde tiga dengan metode deret kuasa di sekitar titik biasa dan di sekitar titik singular. Dalam mencari penyelesaian persamaan diferensial orde tiga, Salah satu cara mencari selesaian dari persamaan diferensial orde tiga dengan koefisien peubah diperlukan suatu metode pendekatan penyelesaian yaitu dengan metode penyelesaian deret.

Pada penyelesaian persamaan diferensial linier orde-2 dengan koefisien peubah yang berbentuk

$$a_0(x)y^2 + a_1(x)y' + a_n y = 0 \qquad (3.1)$$

Dalam suatu selang disekitar titik biasa x_0. Titik x_0 biasanya diatur oleh masalah khusus yang ada, yang mensyaratkan kita untuk mencari penyelesaian diferensial (3.1) yang memenuhi syarat awal berbentuk

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y_1$$

$$y''(x_0) = y_2$$

Jika koefisien $a_0(x), a_1(x)$ berbentuk polinom-polinom dalam x, maka sebuah titik x_0 adalah titik biasa dari persamaan diferensial (3.1) jika $a_0(x_0) \neq 0$. Pada umumnya x_0 adalah titik biasa dari persamaan diferensial (3.1), jika fungsi-fungsi $\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ dan $\frac{a_n(x)}{a_0(x)}$ dapat diuraikan menjadi deret kuasa dalam bentuk:

$$\frac{a_1(x)}{a_0(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n \text{ , untuk } |x - x_0| < R_1 \tag{3.2}$$

Dan $\frac{a_n(x)}{a_0(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x - x_0)^n$, untuk $|x - x_0| < R_2$ (3.3)

Dengan jari-jari kekonvergenan R_1 dan R_2 yang positif. Deret (3.2) dan (3.3) kontinu pada selang $|x - x_0| < R$. Dimana R bilangan terkecil diantara R_1 dan R_2, sehingga mempunyai sebuah penyelesaian tunggal di seluruh selang $|x - x_0| < R$.

Jika x_0 sebuah titik biasa dari persamaan diferensial (3.1) maka penyelesaian umum persamaan diferensial (3.1) mempunyai suatu uraian deret kuasa di sekitar x_0,

$$a_0(x)y^2 + a_1(x)y' + a_n y = 0 . \tag{3.4}$$

Dengan jari-jari kekonvergenan yang positif. Secara lebih tepat, jika R_1 dan R_2 jari-jari kekonvergenan deret (3.2) dan (3.3), maka jari-jari kekonvergenan deret (3.4) sekurang-kurangnya sama dengan minimum dari R_1 dan R_2. Koefisien a_n untuk $n = 2,3,...$ dari deret (3.4) dapat diperoleh dalam a_0 dan a_1 dengan mensubtitusikan deret (3.4) langsung ke dalam persamaan diferensial (3.1) dan menyamakan koefisien dari suku yang berpangkat sama. Sehingga, deret (3.4) merupakan penyelesaiannya, maka $a_0 = y_0$ dan $a_1 = y_1$.

Pada penyelesaian persamaan diferensial linier orde-2 dengan koefisien peubah yang berbentuk

$$a_0(x)y^2 + a_1(x)y' + a_n y = 0 \tag{3.5}$$

Dalam selang tanpa titik pusat disekitar titik singular yang regular x_0. Sebuah selang tanpa titik pusat di sekitar x_0 adalah suatu himpunan berbentuk $0<|x-x_0|<R$ untuk suatu bilangan positif R. Himpunan ini terdiri dari selang $|x-x_0|<R$, tanpa titik pusat x_0.

Jika titik x_0 merupakan titik singular yang regular dari persamaan diferensial (3.5), maka fungsi-fungsi $(x-x_0)\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ dan $(x-x_0)^2\frac{a_n(x)}{a_0(x)}$ jika diuraikan pada deret kuasa berbentuk:

$$(x-x_0)\frac{a_1(x)}{a_0(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x-x_0)^n \text{, untuk } |x-x_0|<R_1 \qquad (3.6)$$

Dan $$\frac{a_n(x)}{a_0(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x-x_0)^n \text{, untuk } |x-x_0|<R_2 \qquad (3.7)$$

Dengan jari-jari kekonvergenan R_1 dan R_2. Karena titik x_0 merupakan titik singular dari persamaan diferensial (3.5). Pada umumnya, penyelesaian persamaan diferensial tersebut tidak terdefinisi pada x_0. Tetapi persamaan diferensial (3.5) mempunyai penyelesaian bebas linier dalam selang tanpa titik pusat $0<|x-x_0|<R$, dimana R adalah nilai kecil dari R_1 dan R_2.

3.1. Metode Penyeleseian Deret di Sekitar Titik Biasa

Langkah-langkah penyelesaian deret disekitar titik biasa pada persamaan diferensial orde-2 adalah sebagai berikut:

1. Mengasumsikan penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut dengan

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(x-x_0\right)^n$$

2. Menentukan turunan pertama, dan kedua dari y
3. Mensubtitusikan turunan pertama, dan kedua dari y, ke persamaan diferensial yang dicari penyelesaiannya, sehingga diperoleh persamaan dalam bentuk sigma
4. Menyamakan pangkat dari x yaitu x^n supaya persamaan yang diperoleh dari langkah 3 dapat dijumlahkan
5. mengelompokkan x yang mempunyai pangkat sama dan menyamakan koefisien dari setiap x pangkat dengan nol.
6. Menentukan nilai koefisien c_n dan mengelompokkan dalam bentuk c_0, c_1, c_2, sampai c_n.
7. Dengan mensubtitusikan hasil yang diperoleh dari langkah 6 keasumsi penyelesaian, maka diperoleh penyelesaian umum dari persamaan diferensial yang dicari.

Persamaan Diferensial Orde-2 dalam bentuk

$$a_0(x)y^2+a_1(x)y'+a_ny=0 \qquad (3.1.1)$$

Dengan $\frac{a_1(x)}{a_2(x)}=p$ dan $\frac{a_0(x)}{a_2(x)}=q$ analitik pada $x=x_0$, maka titik x_0 adalah titik biasa dari persamaan diferensial (3.1.1), sehingga persamaan diferensial (3.1.1) dapat diseleseikan dengan metode deret pangkat dengan asumsi seleseian persamaan diferensial yang berbentuk:

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \qquad (3.1.2)$$

Dimana $c_0, c_1, c_2, \ldots$ adalah konstanta. Karena deret (3.1.2) konvergen pada interval $|x - x_0| < \rho$ maka bentuk (3.1.2) dapat didiferensialkan suku demi suku sehingga diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n (x - x_0)^{n-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2c_2 + 6c_3(x - x_0) + 12c_4(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n (x - x_0)^{n-2}$$

Kemudian, y, y', y'', disubtitusikan ke persamaan (3.1.1) dan diperoleh persamaan dalam bentuk sigma. Persamaan dalam bentuk sigma yang diperoleh tersebut mempunyai pangkat yang tidak sama, oleh karena itu harus disamakan terlebih dahulu yaitu x^n, supaya persamaan yang diperoleh dapat dijumlahkan.

Selanjutnya mengelompokkan x yang mempunyai pangkat sama dan menyamakan koefisien dari setiap x pangkat dengan nol. Dengan menyamakan koefisien dari x pangkat sama dengan nol, maka akan diperoleh nilai dari c_n dan ditulis dalam bentuk c_1 dan c_0. Setelah koefisien c_n ditentukan, kemudian disubtitusikan keasumsi penyeleseian sehingga menghasilkan penyeleseian umum dari persamaan diferensial yang dicari.

Untuk lebih jelasnya jika diberikan soal-soal penyeleseian persamaan diferensial orde 2 dengan koefisien berupa peubah (variabel) yang analitik pada suatu titik.

Soal 1 (*Persamaan Legendre*)

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+12y=0 \qquad (3.1.3)$$

Penyelesaian.

Dari persamaan di atas diperoleh nilai $a_2(x)=1-x^2$, $a_1(x)=-2x$, $a_0(x)=12$

Dengan demikian,

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)}=\frac{-2x}{1-x^2}=\frac{-2x}{(1-x)(1+x)},\ \frac{a_0(x)}{a_2(x)}=\frac{12}{1-x^2}=\frac{12}{(1-x)(1+x)} \qquad (3.1.4)$$

Dari (3.1.4) terlihat bahwa setiap bilangan riil, kecuali 1 da -1 adalah titik biasa dari persamaan (3.1.3)

Pada penyelesaian persamaan diferensial di sekitar titik $x_0=\pm 1$ berbentuk

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$$

Subtitusikan y, y', y'' ke persamaan (3.1.3) sehingga diperoleh:

$$\left(1-x^2\right)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+12\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

Atau $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n-2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+12\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$

Karena pangkat x pada sigma pertama tidak sama maka harus dirubah bentuknya supaya pangkat dari x sama yaitu x^n.

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$$

Dengan memisalkan $m=n-2$ diperoleh $n=m+2$ sehingga diperoleh:

$\sum_{m=2}^{\infty}(m+2)(m+1)c_{m+2}x^m$, dengan merubah m ke n maka diperoleh:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

Subtitusikan bentuk di atas ke persamaan diferensial sehingga menjadi:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n + 12\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$$

(3.1.4)

Karena batas sigma pada persamaan (3.1.4) tidak sama, maka batas sigma disamakan dari batas 2 sampai ∞, dan sisanya ditulis dalam bentuk sigma.

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n$$

Ditulis dalam bentuk yang bersesuaian untuk $n=1$ sehingga diperoleh:

$$c_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty}na_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

Ditulis dalam bentuk yang bersesuaian untuk $n=0$ sehingga diperoleh:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}a_n x^n$$

Subtitusikan bentuk a dan b ke persamaan (3.1.4) sehingga menjadi:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^n - 2c_1x - 2\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n + 12(c_0 + c_1x + c_2x^2) + 12\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$$

Kemudian x yang mempunyai pangkat sama dikelompokkan menjadi:

$$12c_0 + 10c_1x + 12c_2x^2 + \sum[(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - 2nc_n + 12c_n]x^n = 0$$

(3.1.5)

Persamaan (3.1.5) adalah persamaan yang identik dengan nol, sehingga koefisien dari setiap x pangkat sama dengan nol.

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n(n-1)c_n) - 2nc_n + 12c_n = 0$$

$$c_{n+2} = \frac{-(n(n-1)+2n-12)c_n}{(n+2)(n+1)}$$

Untuk $n=0$ maka diperoleh: $c_2 = 6c_0$

Untuk $n=1$ maka diperoleh: $c_3 = \frac{5}{3}c_1$

Untuk $n=2$ maka diperoleh: $c_4 = 3c_0$

Kemudian nilai dari c_0, c_1 disubtitusikan ke asumsi selesaian persamaan diferensial sehingga penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut adalah

$$y = c_0 + c_1 x + 6c_0 x^2 + \frac{5}{3}c_1 x^3 + 3c_0 x^4 + \ldots$$

Jika c_0, c_1 dikelompokkan maka penyelesaiannya adalah

$$y = c_0\left(1 + 6x^2 + 3x^4 + \ldots\right) + c_1\left(x + \frac{5}{3}x^3 + \ldots\right)$$

Soal 2 *(Persamaan Chebyshev)*

$$(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0 \qquad (3.1.6)$$

Penyelesaian.

Dari persamaan di atas diperoleh nilai $a_2(x) = 1 - x^2$, $a_1(x) = -x$, $a_0(x) = 9$

Dengan demikian,

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \frac{-x}{1-x^2} = \frac{-x}{(1-x)(1+x)}, \quad \frac{a_0(x)}{a_2(x)} = \frac{9}{1-x^2} = \frac{9}{(1-x)(1+x)} \qquad (3.1.7)$$

Dari (3.1.7) terlihat bahwa setiap bilangan riil, kecuali 1 dan -1 adalah titik biasa dari persamaan (3.1.6)

Pada penyelesaian persamaan diferensial di sekitar titik $x_0 = \pm 1$ berbentuk

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \ y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ , \ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

Subtitusikan y, y', y'' ke persamaan (3.1.6) sehingga diperoleh:

$$(1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 9 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Atau $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 9 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

Karena pangkat x pada sigma pertama tidak sama maka harus dirubah bentuknya supaya pangkat dari x sama yaitu x^n.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

Dengan memisalkan $m = n - 2$ diperoleh $n = m + 2$ sehingga diperoleh:

$\sum_{m=2}^{\infty} (m+2)(m+1) c_{m+2} x^m$, dengan merubah m ke n maka diperoleh:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n$$

Subtitusikan bentuk di atas ke persamaan diferensial sehingga menjadi:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 9 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \qquad (3.1.8)$$

Karena batas sigma pada persamaan (3.1.8) tidak sama, maka batas sigma disamakan dari batas 2 sampai ∞, dan sisanya ditulis dalam bentuk sigma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$$

Ditulis dalam bentuk yang bersesuaian untuk $n = 1$ sehingga diperoleh:

$$c_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} na_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Ditulis dalam bentuk yang bersesuaian untuk $n = 0$ sehingga diperoleh:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Subtitusikan bentuk a dan b ke persamaan (3.1.8) sehingga menjadi:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - c_1 x - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + 9(c_0 + c_1 x + c_2 x^2) + 9\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Kemudian x yang mempunyai pangkat sama dikelompokkan menjadi:

$$9c_0 + 8c_1 x + 9c_2 x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - nc_n + 9c_n]x^n = 0$$
(3.1.8)

Persamaan (3.1.8) adalah persamaan yang identik dengan nol, sehingga koefisien dari setiap x pangkat sama dengan nol.

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n(n-1)c_n) - nc_n + 9c_n = 0$$

$$c_{n+2} = \frac{-(n(n-1) + n - 9)c_n}{(n+2)(n+1)}$$

Untuk $n = 0$ maka diperoleh: $c_2 = \frac{9}{2}c_0$

Untuk $n = 1$ maka diperoleh: $c_3 = \frac{4}{3}c_1$

Untuk $n = 2$ maka diperoleh: $c_4 = \frac{45}{24}c_0$

Kemudian nilai dari c_0, c_1 disubtitusikan ke asumsi selesaian persamaan diferensial sehingga penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut adalah

$$y = c_0 + c_1 x + \frac{9}{2}c_0 x^2 + \frac{4}{3}c_1 x^3 + \frac{45}{24}c_0 x^4 + \ldots$$

Jika c_0, c_1 dikelompokkan maka penyelesaiannya adalah

$$y = c_0\left(1 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{45}{24}x^4 + \ldots\right) + c_1\left(x + \frac{4}{3}x^3 + \ldots\right)$$

Selanjutnya dibahas tentang persamaan diferensial orde tiga dengan koefisien konstan dengan nilai diskriminannya adalah $b^2c^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2$

<u>Soal 1</u> *(Jika nilai diskriminannya kurang dari nol atau D <0)*

Cari penyeleseian deret dari persamaan diferensial berikut ini.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \qquad (3.1.9)$$

<u>Jawab.</u>

Misalnya $p = 1$ dan $q = 1$, maka kedua fungsi analitik pada $x_0 = 0$ sehingga penyeleseian dari persamaan diferensial tersebut dapat diasumsikan dengan deret berikut:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

$$y'''=\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3}$$

Subtitusikan y, y', y'', y''' kepersamaan diferensial (3.1.9) sehingga diperoleh

$$.\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

Karena pangkat x pada sigma ke-1 sampai ke-3 tidak sama, maka harus dirubah bentuknya supaya pangkat dari x sama yaitu x^n.

1. $\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3}$. (3.1.10)

   Dengan memisalkan $m=n-3$ diperoleh $n=m+3$ sehingga bentuk (3.1.10) menjadi:

   $$\sum_{m=3}^{\infty} (m+3)(m+2)(m+1)c_{m+3} x^m$$

   Dengan merubah m ke n maka diperoleh:

   $$\sum_{n=3}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1)c_{n+3} x^n$$

2. $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$ (3.1.11)

   Dengan memisalkan $m=n-2$ diperoleh $n=m+2$ sehingga bentuk (3.1.11) menjadi

   $$\sum_{m=2}^{\infty} (m+2)(m+1)c_{m+2} x^m$$

   Dengan merubah m ke n maka diperoleh:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^{n}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \qquad (3.1.12)$$

Dengan memisalkan $m = n - 1$ diperoleh $n = m + 1$ sehingga bentuk (3.1.12) menjadi

$$\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)c_{m+1}x^{m}$$

Dengan merubah m ke n maka diperoleh:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^{n}$$

Subtitusikan bentuk 1, 2, dan 3 kepersamaan diferensial sehingga menjadi

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n+3)(n+2)(n+1)c_{n+3}x^{n} + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^{n} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^{n}$$
$$+3\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n} = 0 \qquad (3.1.13)$$

Karena batas sigma pada persamaan (3.1.13) tidak sama, maka batas sigma disamakan dari batas 3 sampai ∞, dan sisanya ditulis dalam bentuk sigma.

a. $$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^{n}$$

Ditulis dalam bentuk yang bersesuaian untuk $n = 2$ sehingga diperoleh

$$12c_4x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^{n}$$

b. $$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^{n}$$

Ditulis dalam bentuk yang bersesuaian untuk $n = 1$ sehingga diperoleh

$$2c_2x + 3c_3x^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$$

c. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

Ditulis dalam bentuk yang bersesuaian untuk $n = 0$ sehingga diperoleh

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Subtitusikan bentuk a, b, dan c ke persamaan (3.1.13) sehingga menjadi

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n+3)(n+2)(n+1)c_{n+3}x^n + 12c_4x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$
$$-2(2c_2x + 3c_3x^2) - 2\sum_{n=3}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n + 3(c_0 + c_1x + c_2x^2) + 3\sum_{n=3}^{\infty} c_n x^n = 0$$

Kemudian x yang mempunyai pangkat sama dikelompokkan menjadi

$$3c_0 + (3c_1 - 4c_2)x + (3c_2 - 6c_3 + 12c_4)x^2$$
$$+\sum_{n=3}^{\infty}\left[(n+3)(n+2)(n+1)c_{n+3} + (n+2)(n+1)c_{n+2} - 2(n+1)c_{n+1} + 3c_n\right]x^n = 0$$

(3.1.14)

Persamaan (3.1.14) adalah persamaan yang identik dengan nol, sehingga koefisien dari setiap x pangkat sama dengan nol.

- $3c_0 = 0$

  $c_0 = 0$

- $3c_1 - 4c_2 = 0$

  $c_1 = \frac{4}{3}c_2$

- $3c_2 - 6c_3 + 12c_4 = 0$

$$c_3 = \frac{1}{2}c_2 + 2c_4$$

- $(n+3)(n+2)(n+1)c_{n+3} + (n+2)(n+1)c_{n+2} - 2(n+1)c_{n+1} + 3c_n = 0$ (3.1.9)

Dari bentuk (3.1.9) dapat ditulis

$$c_{n+3} = \frac{-(n+2)(n+1)c_{n+2} + 2(n+1)c_{n+1} - 3c_n}{(n+3)(n+2)(n+1)}$$

Jika $n = 0$ maka diperoleh

$c_3 = \frac{-2c_2 + 2c_1 - 3c_0}{6}$, karena diketahui $c_0 = 0$ maka diperoleh

$$c_3 = -\frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{3}c_1$$

Jika $n = 1$ maka diperoleh

$c_4 = \frac{-6c_3 + 4c_2 - 3c_1}{24} = -\frac{1}{4}c_3 + \frac{1}{6}c_2 - \frac{1}{8}c_1$, karena $c_3 = -\frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{3}c_1$ maka

diperoleh $c_4 = \frac{1}{4}c_2 - \frac{7}{24}c_1$

Kemudian nilai dari c_0, c_3, c_4 disubtitusikan ke asumsi selesaian persamaan diferensial sehingga penyeleseian dari persamaan diferensial tersebut adalah

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \left(-\frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{3}c_1\right)x^3 + \left(\frac{1}{4}c_2 - \frac{7}{24}c_1\right)x^4 + \ldots$$

Jika c_1, c_2 dikelompokkan maka penyeleseiannya adalah

$$y = c_1\left(x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{24}x^4 + \ldots\right) + c_2\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots\right)$$

Soal 2 *(Jika nilai diskriminannya lebih besar nol atau D>0)*

Cari penyeleseian deret dari persamaan diferensial berikut ini.

$$\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0 \qquad (3.1.15)$$

Jawab.

Misal $p=-1$ dan $q=4$, maka kedua fungsi analitik pada $x_0=0$ sehingga penyeleseian dari persamaan diferensial tersebut dapat diasumsikan dengan

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2}$$

$$y'''=\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3}$$

Subtitusikan y, y', y'', y''' kepersamaan diferensial (3.1.15) sehingga diperoleh

$$\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2}-4\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^{n-1}+4\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=0$$

Karena pangkat x pada sigma ke-1 sampai ke-4 tidak sama, maka harus dirubah bentuknya supaya pangkat dari x sama yaitu x^n.

1. $\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3}$. (3.1.16)

Dengan memisalkan $m=n-3$ diperoleh $n=m+3$ sehingga bentuk (3.1.16) menjadi:

$$\sum_{m=3}^{\infty}(m+3)(m+2)(m+1)c_{m+3}x^{m}$$

Dengan merubah m ke n maka diperoleh:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n+3)(n+2)(n+1)c_{n+3}x^{n}$$

2. $$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_{n}x^{n-2} \qquad (3.1.17)$$

Dengan memisalkan $m=n-2$ diperoleh $n=m+2$ sehingga bentuk (3.1.17) menjadi

$$\sum_{m=2}^{\infty}(m+2)(m+1)c_{m+2}x^{m}$$

Dengan merubah m ke n maka diperoleh:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^{n}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty}nc_{n}x^{n-1} \qquad (3.1.18)$$

Dengan memisalkan $m=n-1$ diperoleh $n=m+1$ sehingga bentuk (3.1.18) menjadi

$$\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)c_{m+1}x^{m}$$

Dengan merubah m ke n maka diperoleh:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^{n}$$

Subtitusikan bentuk 1, 2, dan 3 kepersamaan diferensial sehingga menjadi

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n+3)(n+2)(n+1)c_{n+3}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - 4\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$$
$$+4\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n = 0 \qquad (3.1.19)$$

Karena batas sigma pada persamaan (3.1.19) tidak sama, maka batas sigma disamakan dari batas 3 sampai ∞, dan sisanya ditulis dalam bentuk sigma.

a) $\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$

Ditulis dalam bentuk yang bersesuaian untuk $n=2$ sehingga diperoleh

$$12c_4x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$

Ditulis dalam bentuk yang bersesuaian untuk $n=1$ sehingga diperoleh

$$2c_2x + 3c_3x^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$

Ditulis dalam bentuk yang bersesuaian untuk $n=0$ sehingga diperoleh

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

Subtitusikan bentuk a, b, dan c ke persamaan (3.1.19) sehingga menjadi

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n+3)(n+2)(n+1)c_{n+3}x^n - 12c_4x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$
$$-4(2c_2x+3c_3x^2) - 4\sum_{n=3}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n + 4(c_0+c_1x+c_2x^2) + 4\sum_{n=3}^{\infty}c_n x^n = 0$$

Kemudian x yang mempunyai pangkat sama dikelompokkan menjadi

$$4c_0 + (4c_1 - 8c_2)x + (4c_2 - 12c_3 - 12c_4)x^2$$
$$+ \sum_{n=3}^{\infty} [(n+3)(n+2)(n+1)c_{n+3} - (n+2)(n+1)c_{n+2} - 4(n+1)c_{n+1} + 4c_n]x^n = 0$$

(3.1.20)

Persamaan (3.1.20) adalah persamaan yang identik dengan nol, sehingga koefisien dari setiap x pangkat sama dengan nol.

- $4c_0 = 0$

  $c_0 = 0$
- $4c_1 - 8c_2 = 0$

  $c_1 = 2c_2$
- $4c_2 - 12c_3 - 12c_4 = 0$

  $c_3 = \frac{1}{3}c_2 - c_4$
- $(n+3)(n+2)(n+1)c_{n+3} - (n+2)(n+1)c_{n+2} - 4(n+1)c_{n+1} + 4c_n = 0$ (3.1.21)

Dari bentuk (3.1.21) dapat ditulis

$$c_{n+3} = \frac{(n+2)(n+1)c_{n+2} + 4(n+1)c_{n+1} + 4c_n}{(n+3)(n+2)(n+1)}$$

Jika $n = 0$ maka diperoleh

$c_3 = \frac{2c_2 + 4c_1 + 4c_0}{6}$, karena diketahui $c_0 = 0$ maka diperoleh

$$c_3 = \frac{1}{3}c_2 + \frac{2}{3}c_1$$

Jika $n = 1$ maka diperoleh

$c_4 = \frac{6c_3 + 8c_2 + 4c_1}{24} = \frac{1}{4}c_3 + \frac{1}{3}c_2 + \frac{1}{6}c_1$, karena $c_3 = \frac{1}{3}c_2 + \frac{2}{3}c_1$ maka

diperoleh $c_4 = \frac{5}{12}c_2 + \frac{1}{3}c_1$

Kemudian nilai dari c_0, c_3, c_4 disubtitusikan ke asumsi selesaian persamaan diferensial sehingga penyeleseian dari persamaan diferensial tersebut adalah

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \left(\frac{1}{3}c_2 + \frac{2}{3}c_1\right)x^3 + \left(\frac{5}{12}c_2 + \frac{1}{3}c_1\right)x^4 + \ldots$$

Jika c_1, c_2 dikelompokkan maka penyeleseiannya adalah

$$y = c_1\left(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \ldots\right) + c_2\left(x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{12}x^4 + \ldots\right)$$

Soal 3 (*Jika nilai diskriminannya sama dengan nol atau D = 0*)

Cari penyeleseian deret dari persamaan diferensial berikut ini.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0 \qquad (3.1.30)$$

Jawab.

Misalnya $p = 2 \text{ dan } q = 1$, maka kedua fungsi analitik pada $x_0 = 0$ sehingga penyeleseian dari persamaan diferensial tersebut dapat diasumsikan dengan deret berikut:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

$$y''' = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3}$$

Subtitusikan y, y', y'', y''' kepersamaan diferensial (3.1.30) sehingga diperoleh

$$.\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3} + 2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = 0$$

Karena pangkat x pada sigma ke-1 sampai ke-3 tidak sama, maka harus dirubah bentuknya supaya pangkat dari x sama yaitu x^n.

1. $\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3}$. (3.1.31)

   Dengan memisalkan $m = n-3$ diperoleh $n = m+3$ sehingga bentuk (3.1.31) menjadi:

   $$\sum_{m=3}^{\infty} (m+3)(m+2)(m+1)c_{m+3} x^m$$

   Dengan merubah m ke n maka diperoleh:

   $$\sum_{n=3}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1)c_{n+3} x^n$$

2. $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$ (3.1.32)

   Dengan memisalkan $m = n-2$ diperoleh $n = m+2$ sehingga bentuk (3.1.32) menjadi

   $$\sum_{m=2}^{\infty} (m+2)(m+1)c_{m+2} x^m$$

   Dengan merubah m ke n maka diperoleh:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ (3.1.33)

Dengan memisalkan $m = n-1$ diperoleh $n = m+1$ sehingga bentuk (3.1.33) menjadi

$$\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)c_{m+1}x^m$$

Dengan merubah m ke n maka diperoleh:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$$

Subtitusikan bentuk 1, 2, dan 3 kepersamaan diferensial sehingga menjadi

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n+3)(n+2)(n+1)c_{n+3}x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n = 0$$

(3.1.34)

Karena batas sigma pada persamaan (3.1.21) tidak sama, maka batas sigma disamakan dari batas 3 sampai ∞, dan sisanya ditulis dalam bentuk sigma.

a. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$

Ditulis dalam bentuk yang bersesuaian untuk $n = 2$ sehingga diperoleh

$$12c_4x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$

Ditulis dalam bentuk yang bersesuaian untuk $n = 1$ sehingga diperoleh

$$2c_2x + 3c_3x^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$$

c. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

Ditulis dalam bentuk yang bersesuaian untuk $n = 0$ sehingga diperoleh

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Subtitusikan bentuk a, b, dan c ke persamaan (3.1.34) sehingga menjadi

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n+3)(n+2)(n+1)c_{n+3}x^n + 12c_4x^2 + 2\sum_{n=3}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n$$
$$+ (2c_2x + 3c_3x^2) + \sum_{n=3}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n = 0$$

Kemudian x yang mempunyai pangkat sama dikelompokkan menjadi

$$2c_2x + (3c_3 + 12c_4)x^2$$
$$+ \sum_{n=3}^{\infty}\left[(n+3)(n+2)(n+1)c_{n+3} + 2(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+1)c_{n+1}\right]x^n = 0$$

(3.1.35)

Persamaan (3.1.35) adalah persamaan yang identik dengan nol, sehingga koefisien dari setiap x pangkat sama dengan nol.

- $2c_2 = 0$

  $c_2 = 0$

- $3c_3 + 12c_4 = 0$

  $c_3 = 4c_4$

- $(n+3)(n+2)(n+1)c_{n+3} + 2(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+1)c_{n+1} = 0$ (3.1.36)

Dari bentuk (3.1.36) dapat ditulis

$$c_{n+3} = \frac{-2(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n+1)c_{n+1}}{(n+3)(n+2)(n+1)}$$

Jika $n = 0$ maka diperoleh

$c_3 = \frac{-4c_2 - c_1}{6}$, karena diketahui $c_2 = 0$ maka diperoleh

$$c_3 = -\frac{1}{6}c_1$$

Jika $n = 1$ maka diperoleh

$c_4 = \frac{-12c_3 - 2c_2}{24} = -\frac{1}{2}c_3 - \frac{1}{12}c_2$, karena $c_3 = -\frac{1}{6}c_1$ maka diperoleh

$$c_4 = -\frac{1}{12}c_1$$

Kemudian nilai dari c_0, c_1, c_3, c_4 disubtitusikan ke asumsi selesaian persamaan diferensial sehingga penyeleseian dari persamaan diferensial tersebut adalah

$$y = c_0 + c_1 x - \frac{1}{6}c_1 x^3 - \frac{1}{12}c_1 x^4 + \dots$$

Jika c_1 dikelompokkan maka penyeleseiannya adalah

$$y = c_0 + c_1\left(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \dots\right)$$

3.2. Metode Penyeleseian Deret di Sekitar Titik Singular.

Langkah-langkah penyelesaian deret disekitar titik singular yang regular pada persamaan diferensial orde-2 adalah sebagai berikut:

1. Mengasumsikan penyeleseian dari persamaan diferensial yang dicari dengan $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^{n+r}$, dengan r adalah bilangan real atau kompleks, $c_0 \neq 0$. Dan x_0 sebagai titik singular yang regular
2. Menentukan turunan pertama, dan kedua dari y
3. Mensubtitusikan turunan pertama, dan kedua dari y ke persamaan diferensial, sehingga diperoleh persamaan dalam bentuk sigma
4. Menyamakan pangkat dari x yaitu x^{n+r} supaya persamaan yang diperoleh dari langkah 3 dapat dijumlahkan
5. Mengelompokkan x yang mempunyai pangkat sama
6. Menentukan persamaan kuadrat dalam r yang disebut persamaan indeks dengan mengambil pangkat terendah dari persamaan, pada langkah 5 yaitu x^{n+r}
7. Menentukan nilai akar-akar dari persamaan indeks dan mencari nilai dari c_n
8. Dengan mensubtitusikan hasil yang diperoleh dari langkah 6 keasumsi selesaian, maka diperoleh penyelesaian dari persamaan diferensial yang dicari.

Persamaan diferensial linier homogen orde-2 dengan koefisien peubah dalam bentuk

$$a_0(x)y^2 + a_1(x)y' + a_n y = 0 \qquad (3.2.1)$$

dengan $\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = p$ dan $\frac{a_0(x)}{a_2(x)} = q$

Jika p atau q tidak analitik pada x_0, maka x_0 disebut sebagai titik singular dari persamaan (3.2.1). Akan tetapi $(x - x_0)p(x)$ dan $(x - x_0)^2 q(x)$ analitik pada x_0 maka x_0 disebut sebagai titik singular yang regular, sehingga persamaan diferensial tersebut dapat diseleseikan dengan metode deret kuasa (metode Frobenius) dengan asumsi penyeleseiannya adalah

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r} \tag{3.2.2}$$

menentukan turunan pertama, dan kedua

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) c_n (x - x_0)^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) c_n (x - x_0)^{n+r-2}$$

Subtitusikan nilai dari y, y', y'', ke persamaan diferensial yang dicari penyeleseiannya, sehingga diperoleh persamaan dalam bentuk sigma. Selanjutnya mengelompokkan x dengan pangkat sama dan diperoleh bentuk sederhana

$$k_0 (x - x_0)^{n+r} + k_1 (x - x_0)^{n+r+1} + k_2 (x - x_0)^{n+r+2} + \ldots = 0 \tag{3.2.3}$$

dengan n bilangan bulat positif dan $k_i (i = 0,1,2,\ldots)$ adalah fungsi r dan merupakan koefisien dari c_n pada bentuk (3.2.2).

Persamaan (3.2.2) berlaku untuk semua x pada interval $|x - x_0| < \rho$, sehingga $k_0 = k_1 = k_2 = \ldots = 0$. Untuk k_0 sama dengan nol, dimana k_0 merupakan koefisien dari $x - x_0$ dengan pangkat terendah $r + n$, maka dapat ditentukan persamaan kuadrat dalam r yang disebut sebagai persamaan indeks. Kemudian kita menentukan akar-akar dari persamaan indeks tersebut dan disubtitusikan nilai dari r ke persamaan diferensial yang dicari penyeleseiannya.

Penyeleseian dari persamaan diferensial berbentuk (3.2.2) dan diambil akar-akar dari persamaan indeks yang lebih besar $(r_1 > r_2)$.

Selesaikan Persamaan diferensial orde dua dengan koefisien variabel yaitu sebagai berikut!

Untuk lebih jelasnya jika diberikan soal-soal penyeleseian persamaan diferensial orde 2 dengan koefisien berupa peubah (variabel) yang analitik pada suatu titik.

Soal 1 (Persamaan Hermite)

$$y''-2xy'+2y=0 \qquad (3.1.10)$$

Penyelesaian.

Dari persamaan di atas diperoleh nilai $a_2(x)=1$, $a_1(x)=-2x$, $a_0(x)=2$

Dengan demikian,

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)}=\frac{-2x}{1}=-2x \quad , \quad \frac{a_0(x)}{a_2(x)}=\frac{2}{1}=2$$

Dari terlihat bahwa setiap bilangan riil seperti 0 dan 2 adalah titik biasa dari persamaan (3.1.10)

Pada penyelesaian persamaan diferensial di sekitar titik $x_0 = 0$ berbentuk

$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$, $y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}$,

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

Subtitusikan y, y', y'' ke persamaan (3.1.10) sehingga diperoleh:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

Atau $\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$

Karena pangkat x pada sigma per-tama tidak sama maka harus dirubah bentuknya supaya pangkat dari x sama yaitu x^{n+r}.

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

Dengan memisalkan $k=n+2$ diperoleh $n=k-2$ sehingga diperoleh:

$\sum_{k=2}^{\infty}(k+r-2)(k+r-3)c_{k-2} x^{k+r}$, dengan merubah k ke n maka diperoleh:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2} x^{n+r}$$

Subtitusikan bentuk di atas ke persamaan diferensial sehingga menjadi:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2} x^{n+r} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

(3..1.11)

Batas penjumlahan dari persamaan (3..1.11) disamakan yaitu dari 2 sampai ∞ supaya persamaan tersebut dapat dijumlahkan sehingga bentuknya berubah menjadi:

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2}-2(n+r)c_n+2c_n]x^{n+r}+[-2rc_1+2c_0]x^r=0$$

Kemudian diambil pangkat terendah dari persamaan tersebut yaitu x^r disamakan dengan nol, dengan $n=0$, maka diperoleh persamaan indeks yaitu:

$$-2r=0$$

$$r=0$$

Dari persamaan indeks diperoleh akarnya $r=0$. Kemudian nilai dari r disubtitusikan ke rumus rekursi dalam persamaan Rumus rekursinya adalah

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2}-2(n+r)c_n+2c_n]x^{n+r}=0$$

Dengan $r=0$ maka

$$[(n-2)(n-3)c_{n-2}-2nc_n+2c_n=0]$$

$$c_n=\frac{-((n-2)(n-3)c_{n-2})}{2+2n}$$

Jika $n=4$ maka $c_4=\frac{1}{5}c_2$

Jika $n=5$ maka $c_5=-\frac{1}{2}c_3$

Jika $n=6$ maka $c_6=-\frac{6}{35}c_2$

Kemudian nilai dari c_4, c_5, c_6 disubtitusikan keasumsi penyelesaian dengan $r=0$, maka penyelesaiannya adalah

$$y=c_2x^2+c_3x^3+\frac{1}{5}c_2x^4-\frac{1}{2}c_3x^5-\frac{6}{35}c_2x^6-\dots$$

Jika c_2, c_3 dikelompokkan maka penyelesaiannya adalah

$$y = c_2\left(x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{6}{35}x^6 - \ldots\right) + c_3\left(x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \ldots\right)$$

Selanjutnya dibahas tentang persamaan diferensial orde tiga dengan koefisien konstan dengan nilai diskriminannya adalah

$$b^2c^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2$$

<u>Soal 1</u> (*Jika nilai diskriminannya kurang dari nol atau D < 0*)

Cari penyeleseian deret dari persamaan diferensial berikut:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \qquad (3.2.4)$$

<u>Jawab.</u>

Misalkan $p = 1$ p tidak analitik pada $x_0 = 0$ dan $q = 3$, tidak analitik pada $x_0 = 0$ disebut sebagai titik singular. Akan tetapi $(x - x_0)p(x)$ dan $(x - x_0)^2 q(x)$ analitik pada $x_0 = 0$. Dan x_0 disebut sebagai titik singular yang regular. Untuk mencari penyeleseian persamaan diferensial disekitar titik singular yang regular digunakan metode Frobinius, yaitu dengan mengasumsikan penyeleseian dari persamaan diferensial tersebut yaitu:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \qquad \text{dengan } c_0 \neq 0$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)c_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1)c_n x^{n+r-2}$$

$$y''' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)(n+r-2)c_n x^{n+r-3}$$

Kemudian subtitusikan y, y', y'', y''' kepersamaan (3.2.4)

Menjadi:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)(n+r-2)c_n x^{n+r-3} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$
$$-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

Karena pangkat x pada sigma pertama sampai ke-4 tidak sama maka harus dirubah bentuknya supaya pangkat dari x sama yaitu x^{n+r}.

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)(n+r-2)c_n x^{n+r-3}$.

   Dengan memisalkan $k = n+3$ maka $n = k-3$. Dan jika $n = 0$ maka $k = 3$ sehingga menjadi :

   $$\sum_{k=3}^{\infty}(k+r-3)(k+r-4)(k+r-5)c_{k-3}x^{k+r}$$

   Dengan merubah k dengan n maka diperoleh:

   $$\sum_{n=3}^{\infty}(n+r-3)(n+r-4)(n+r-5)c_{n-3}x^{n+r}$$

2. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$.

   Dengan memisalkan $k = n+2$ maka $n = k-2$. Dan jika $n = 0$ maka $k = 2$ sehingga menjadi:

   $$\sum_{k=2}^{\infty}(k+r-2)(k+r-3)c_{k-2}x^{k+r}$$

   Dengan merubah k dengan n maka diperoleh:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2}x^{n+r}$$

3. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$.

Dengan memisalkan $k=n+1$ maka $n=k-1$. Dan jika $n=0$ maka $k=1$ sehingga menjadi:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+r-1)c_{k-1}x^{k+r}$$

Dengan merubah k dengan n maka diperoleh:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1}x^{n+r}$$

Kemudian bentuk 1, 2, dan 3 disubtitusi ke persamaan (3.2.4) diperoleh:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n+r-3)(n+r-4)(n+r-5)c_{n-3}x^{n+r}+\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2}x^{n+r}$$
$$-2\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1}x^{n+r}+3\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r}=0$$

(3.2.5)

Batas penjumlahan dari persamaan (3.2.5) disamakan yaitu dari 3 sampai ∞ supaya persamaan tersebut dapat dijumlahkan sehingga bentuknya berubah menjadi:

$$\sum_{n=3}^{\infty}[(n+r-3)(n+r-4)(n+r-5)c_{n-3}+(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2}-2(n+r-1)$$
$$c_{n-1}+3c_n]x^{n+r}+[[(r-2)(r-3)]c_2x^r-2(r-1)c_1x^r+3c_0x^r]=0$$

Atau

$$\sum_{n=3}^{\infty}[(n+r-3)(n+r-4)(n+r-5)c_{n-3}+(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2}-2(n+r-1)$$
$$c_{n-1}+3c_n]x^{n+r}+\left[\left(r^2-5r+6\right)c_2-(2r-2)c_1+3c_0\right]x^r=0$$

Kemudian diambil pangkat terendah dari persamaan tersebut yaitu x^r disamakan dengan nol, dengan $n=0$, maka diperoleh persamaan indeks yaitu

$$r^2-5r+6=0$$

$$(r-2)(r-3)=0$$

$$r_1=2 \vee r_2=3.$$

Dari persamaan indeks diperoleh akar-akarnya $r_1-r_2=2-3=-1$ adalah bilangan bulat. Kemudian nilai dari r disubtitusikan ke rumus rekursi dalam persamaan (3.2.5). Rumus rekursinya adalah

$$\sum_{n=3}^{\infty}[(n+r-3)(n+r-4)(n+r-5)c_{n-3}+(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2}-2(n+r-1)$$
$$c_{n-1}+3c_n]x^{n+r}=0, \qquad n\geq 1.$$

dengan $r=3$ maka

$$[(n+3-3)(n+3-4)(n+3-5)]c_{n-3}+(n+3-2)(n+3-3)c_{n-2}$$
$$-2(n+3-1)c_{n-1}+3c_n=0$$

$$[n(n-1)(n-2)]c_{n-3}+n(n+1)c_{n-2}-(2n+4)c_{n-1}+3c_n=0$$

$$\left(n^3-3n^2+2n\right)c_{n-3}+\left(n^2+n\right)c_{n-2}-(2n+4)c_{n-1}+3c_n=0$$

$$c_n=\frac{-\left(n^3-3n^2+2n\right)c_{n-3}-\left(n^2+n\right)c_{n-2}+(2n+4)c_{n-1}}{3}$$

untuk $n=2\rightarrow c_2=-2c_0+\frac{8}{3}c_1$

untuk $n=3 \rightarrow c_3 = -\frac{1}{3}c_0 - 4c_1 + \frac{10}{3}c_2$, karena $c_2 = -2c_0 + \frac{8}{3}c_1$ maka

$$c_3 = -7c_0 + 2c_1$$

untuk $n=4 \rightarrow c_4 = -\frac{4}{3}c_1 - \frac{20}{3}c_2 + 4c_3$,

karena $c_2 = -2c_0 + \frac{8}{3}c_1$ dan $c_3 = -7c_0 + 2c_1$ maka

$$c_4 = -\frac{44}{3}c_0 + \frac{100}{9}c_1.$$

Kemudian nilai dari c_2, c_3, c_4 disubtitusikan ke asumsi penyeleseian dengan $r=3$, maka penyeleseian dari persamaan (3.2.4) adalah

$$y = x^3\left(c_0 - c_1x + \left(-2c_0 + \frac{8}{3}c_1\right)x^2 + (-7c_0 + 2c_1)x^3 + \left(-\frac{44}{3}c_0 + \frac{100}{9}c_1\right)x^4 + \ldots\right)$$

Jika c_1, c_2 dikelompokkan maka penyeleseiannya adalah

$$y = x^3c_0\left(1 - 2x^2 + 7x^3 - \frac{44}{3}x^4 - \ldots\right) + x^3c_1\left(-x + \frac{8}{3}x^2 - 2x^3 - \frac{100}{9}x^4 + \ldots\right)$$

<u>Soal 2</u> (*jika nilai diskriminannya sama dengan nol atau D = 0*)

Cari penyeleseian deret dari persamaan diferensial berikut:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0 \qquad (3.2.6)$$

<u>Jawab</u>

Misalkan $p=2$ p tidak analitik pada $x_0 = 0$ dan $q=1$, tidak analitik pada $x_0 = 0$ disebut sebagai titik singular. Akan tetapi $(x-x_0)p(x)$ dan $(x-x_0)^2q(x)$ analitik pada $x_0 = 0$. Dan x_0 disebut sebagai titik singular yang regular. Untuk mencari penyeleseian persamaan diferensial disekitar titik singular yang regular digunakan metode frobinius, yaitu dengan mengasumsikan penyeleseian dari persamaan diferensial tersebut yaitu:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \qquad \text{dengan } c_0 \neq 0$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}$$

$$y''' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)(n+r-2) c_n x^{n+r-3}$$

Kemudian subtitusikan y, y', y'', y''' ke persamaan (3.2.6) menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)(n+r-2) c_n x^{n+r-3} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} = 0 \qquad (3.2.7)$$

Karena pangkat x pada sigma ke-1 sampai ke-4 tidak sama, maka harus dirubah bentuknya supaya pangkat dari x sama yaitu x^{n+r}.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)(n+r-2) c_n x^{n+r-3}$

   Dengan memisalkan $k = n+3$ diperoleh $n = k-3$. Dan jika $n = 0$ maka $k = 3$ sehingga menjadi:

   $$\sum_{k=3}^{\infty} (k+r-3)(k+r-4)(k+r-5) c_{k-3} x^{k+r}$$

   Dengan merubah k ke n maka diperoleh:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n+r-3)(n+r-4)(n+r-5)c_{n-3}x^{n+r}$$

2. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$.

   Dengan memisalkan $k=n+2$ diperoleh $n=k-2$. Dan jika $n=0$ maka $k=2$ sehingga menjadi:

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k+r-2)(k+r-3)c_{k-2}x^{k+r}$$

   Dengan merubah k ke n maka diperoleh :

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2}x^{n+r}$$

3. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$

   Dengan memisalkan $k=n-1$ diperoleh $n=k+1$. Dan jika $n=0$ maka $k=1$ sehingga diperoleh :

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k+r-1)c_{k-1}x^{k+r}$$

   Dengan merubah k ke n maka diperoleh :

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1}x^{n+r}$$

Kemudian bentuk 1, 2, dan 3 disubtitusi kepersamaan (3.2.7) sehingga menjadi

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n+r-3)(n+r-4)(n+r-5)c_{n-3}x^{n+r}+2\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2}x^{n+r}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1}x^{n+r}=0$$

Batas penjumlahan dari persamaan(3.2.7) Disamakan yaitu dari 3 sampai ∞ supaya persamaan tersebut dapat dijumlahkan sehingga bentuknya berubah menjadi:

$$\sum_{n=3}^{\infty}[(n+r-3)(n+r-4)(n+r-5)c_{n-3}+2(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2}+(n+r-1)c_{n-1}]x^{n+r}$$
$$+[2(r-2)(r-3)c_2x^r+(r-1)c_1x^r]=0$$

atau

$$\sum_{n=3}^{\infty}[(n+r-3)(n+r-4)(n+r-5)c_{n-3}+2(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2}+(n+r-1)c_{n-1}]x^{n+r}$$
$$+[(2r^2-10r+12)c_2+(r-1)c_1]x^r=0$$

Kemudian diambil pangkat terendah dari persamaan tersebut yaitu x^r disamakan dengan nol, dengan $n=0$, maka diperoleh persamaan indeks yaitu

$2r^2-10r+12=0$.

$(2r-6)(r-2)=0$

$r=3 \ \vee \ r=2$.

Dari persamaan indeks diperoleh akar-akarnya $r_1-r_2=2-3=-1$ adalah bilangan bulat. Kemudian nilai dari r disubtitusikan ke rumus rekursi dalam persamaan (3.2.6). Rumus rekursinya adalah

$$\sum_{n=3}^{\infty}[(n+r-3)(n+r-4)(n+r-5)c_{n-3}+2(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2}+(n+r-1)c_{n-1}]x^{n+r}=0$$

untuk $n\geq 1$ dengan dengan $r=3$ maka

$$[(n+3-3)(n+3-4)(n+3-5)]c_{n-3}+2(n+3-2)(n+3-3)c_{n-2}$$
$$+(n+3-1)c_{n-1}=0$$

Sama dengan

$$[n(n-1)(n-2)]c_{n-3}+2n(n+1)c_{n-2}+(n+2)c_{n-1}=0$$

$$\left(n^3-3n^2+2n\right)c_{n-3}+\left(2n^2+2n\right)c_{n-2}+\left(n+2\right)c_{n-1}=0$$

$$c_{n-1}=\frac{-\left(n^3-3n^2+2n\right)c_{n-3}-\left(2n^2+2n\right)c_{n-2}}{(n+2)}$$

untuk $n=3 \rightarrow c_2=-\frac{6}{5}c_0-\frac{24}{5}c_1$

untuk $n=4 \rightarrow c_4=\frac{24}{5}c_1-\frac{40}{5}c_2$, karena $c_2=-\frac{6}{5}c_0-\frac{24}{5}c_1$ maka

$$c_3=-\frac{48}{5}c_0+\frac{216}{5}c_1.$$

Kemudian nilai dari c_2, c_3 disubtitusikan ke asumsi selesaian dengan $r=3$, maka selesaian dari persamaan (3.2.6) adalah

$$y=x^3\left(c_0-c_1x+\left(-\frac{6}{5}c_0-\frac{24}{5}c_1\right)x^2-\left(\frac{48}{5}c_0+\frac{216}{5}c_1\right)x^3+\ldots\right)$$

Jika c_0, c_1 dikelompokkan maka penyeleseiannya adalah

$$y=x^3c_0\left(1-\frac{6}{5}x^2-\frac{48}{5}x^3+\ldots\right)+x^3c_1\left(-x-\frac{24}{5}x^2-\frac{216}{5}x^3-\ldots\right)$$

<u>Soal 3</u> (*Jika nilai diskriminannya lebih dari nol atau D > 0*)

Cari penyeleseian deret dari persamaan diferensial berikut:

$$\frac{d^3y}{dx^3}-4\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}-2y=0 \qquad (3.2.4)$$

<u>Jawab.</u>

Misalkan $p=-4$ p tidak analitik pada $x_0=0$ dan $q=-2$, tidak analitik pada $x_0=0$ disebut sebagai titik singular. Akan tetapi $\left(x-x_0\right)p(x)$ dan

$(x-x_0)^2 q(x)$ analitik pada $x_0 = 0$. Dan x_0 disebut sebagai titik singular yang regular. Untuk mencari penyeleseian persamaan diferensial disekitar titik singular yang regular digunakan metode Frobinius, yaitu dengan mengasumsikan penyeleseian dari persamaan diferensial tersebut yaitu:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \qquad \text{dengan } c_0 \neq 0$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}$$

$$y''' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)(n+r-2) c_n x^{n+r-3}$$

Kemudian subtitusikan y, y', y'', y''' kepersamaan (3.2.4)

Menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)(n+r-2) c_n x^{n+r-3} - 4\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}$$
$$+ 5\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

Karena pangkat x pada sigma pertama sampai ke-4 tidak sama maka harus dirubah bentuknya supaya pangkat dari x sama yaitu x^{n+r}.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)(n+r-2) c_n x^{n+r-3}$.

Dengan memisalkan $k = n+3$ maka $n = k-3$. Dan jika $n = 0$ maka $k = 3$ sehingga menjadi

$$\sum_{k=3}^{\infty}(k+r-3)(k+r-4)(k+r-5)c_{k-3}x^{k+r}$$

Dengan merubah k dengan n maka diperoleh

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n+r-3)(n+r-4)(n+r-5)c_{n-3}x^{n+r}$$

2. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$.

Dengan memisalkan $k=n+2$ maka $n=k-2$. Dan jika $n=0$ maka $k=2$ sehingga menjadi

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k+r-2)(k+r-3)c_{k-2}x^{k+r}$$

Dengan merubah k dengan n maka diperoleh

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2}x^{n+r}$$

3. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$.

Dengan memisalkan $k=n+1$ maka $n=k-1$. Dan jika $n=0$ maka $k=1$ sehingga menjadi

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+r-1)c_{k-1}x^{k+r}$$

Dengan merubah k dengan n maka diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1}x^{n+r}$$

Kemudian bentuk 1, 2, dan 3 disubtitusi ke persamaan (3.2.4) diperoleh:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n+r-3)(n+r-4)(n+r-5)c_{n-3}x^{n+r} - 4\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2}x^{n+r}$$
$$+5\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1}x^{n+r} - 2\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

(3.2.5)

Batas penjumlahan dari persamaan (3.2.5) disamakan yaitu dari 3 sampai ∞ supaya persamaan tersebut dapat dijumlahkan sehingga bentuknya berubah menjadi

$$\sum_{n=3}^{\infty}[(n+r-3)(n+r-4)(n+r-5)c_{n-3} - 4(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2} + 5(n+r-1)$$
$$c_{n-1} - 2c_n]x^{n+r} + [-4[(r-2)(r-3)]c_2x^r + 5(r-1)c_1x^r - 2c_0x^r] = 0$$

Atau

$$\sum_{n=3}^{\infty}[(n+r-3)(n+r-4)(n+r-5)c_{n-3} - 4(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2} + 5(n+r-1)$$
$$c_{n-1} - 2c_n]x^{n+r} + [(-4r^2 + 20r - 24)c_2 + (5r-5)c_1 - 2c_0]x^r = 0$$

Kemudian diambil pangkat terendah dari persamaan tersebut yaitu x^r disamakan dengan nol, dengan $n = 0$, maka diperoleh persamaan indeks yaitu

$4r^2 - 20r + 24 = 0 \qquad 5r - 5 = 0$

$(4r-12)(r-2) = 0 \qquad r = \frac{5}{5} = 1$

$r_1 = 3 \ \vee \ r_2 = 2 \qquad r_3 = 1$

Dari persamaan indeks diperoleh akar-akarnya $r_1 - r_2 = 2 - 3 = -1$ adalah bilangan bulat. Kemudian nilai dari r disubtitusikan ke rumus rekursi dalam persamaan (3.2.5). Rumus rekursinya adalah

$$\sum_{n=3}^{\infty}[(n+r-3)(n+r-4)(n+r-5)c_{n-3} - 4(n+r-2)(n+r-3)c_{n-2} + 5(n+r-1)$$
$$c_{n-1} - 2c_n]x^{n+r} = 0, \qquad n \geq 1.$$

dengan $r = 3$ maka

$$[(n+3-3)(n+3-4)(n+3-5)]c_{n-3} - 4(n+3-2)(n+3-3)c_{n-2}$$
$$+5(n+3-1)c_{n-1} - 2c_n = 0$$

$$[n(n-1)(n-2)]c_{n-3} - 4n(n+1)c_{n-2} + (5n+10)c_{n-1} - 2c_n = 0$$

$$(n^3 - 3n^2 + 2n)c_{n-3} - (4n^2 + 4n)c_{n-2} + (5n+10)c_{n-1} - 2c_n = 0$$

$$c_n = \frac{-(n^3 - 3n^2 + 2n)c_{n-3} + (4n^2 + 4n)c_{n-2} - (5n+10)c_{n-1}}{2}$$

untuk $n = 2 \rightarrow c_2 = 12c_0 - 10c_1$

untuk $n = 3 \rightarrow c_3 = -3c_0 + 24c_1 - \frac{25}{2}c_2$, karena $c_2 = 12c_0 - 10c_1$ maka

$$c_3 = -148c_0 + 149c_1$$

untuk $n = 4 \rightarrow c_4 = -12c_1 + 40c_2 - 15c_3$,

karena $c_2 = 12c_0 - 10c_1$ dan $c_3 = -148c_0 + 149c_1$ maka

$$c_4 = 2700c_0 - 2647c_1.$$

Kemudian nilai dari c_2, c_3, c_4 disubtitusikan ke asumsi penyeleseian dengan

$r = 3$, maka penyeleseian dari persamaan (3.2.4) adalah

$$y = x^3\left(c_0 - c_1x + (12c_0 - 10c_1)x^2 + (-148c_0 + 149c_1)x^3 + (2700c_0 - 2647c_1)x^4 + \ldots\right)$$

Jika c_0, c_1 dikelompokkan maka penyeleseiannya adalah

$$y = x^3c_0\left(1 + 12x^2 - 148x^3 + 2700x^4 - \ldots\right) + x^3c_1\left(-x - 10x^2 + 149x^3 - 2647x^4 + \ldots\right)$$

3.3. Penyelesaian Persamaan Diferensial Dengan Metode Deret kuasa, dalam Masalah-masalah yang Dihadapi umat islam.

Persamaan diferensial adalah persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas. Penerapan persamaan diferensial semakin meluas, karena adanya permasalahan mengenai kuantitas bahwa perubahan terus-menerus, yang berkaitan dengan waktu dapat digambarkan dengan suatu persamaan diferensial (Finizio, 1988:108).

Dalam hadits Nabi Muhammad SAW. Yang berbunyi:

اَلإِيْمَانُ يَزِيْدُ وَيَنْقُصُ

Artinya: "Iman itu akan bertambah dan berkurang"

Hadits di atas menjelaskan tentang perubahan iman seseorang. Yaitu keimanan seseorang akan berubah sesuai dengan perilaku atau perbuatan yang dilakukan setiap hari. Jika seseorang itu selalu melakukan kebaikan maka keimanannya akan selalu bertambah, dan jika seseorang itu selalu melakukan perbuatan buruk maka keimanannya akan semakin berkurang.

Dalam konsep fungsi persamaan diferensial hadits di atas dapat digambarkan dengan fungsi $f(x) = x^2 - 2x + 1$, Jika nilai x adalah kebaikan dan $f(x)$ adalah keimanan maka jika nilai x besar maka nilai $f(x)$ juga besar, Sebaiknya jika nilai x kecil maka nilai $f(x)$ juga kecil. Maksudnya jika seseorang memperbanyak kebaikan maka keimanannya akan bertambah pula, dan sebaliknya, jika seseorang mengurangi jumlah kebaikan maka kaimanannya akan berkurang.

Dalam Al-Qur'an disebutkan:

إِنَّ اللهَ لاَ يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّى يُغَيِّرُوْا مَا بِأَنْفُسِهِمْ.

Artinya: "Sesungguhnya Allah tidak akan merubah nasib suatu kaum kecuali mereka merubah nasib mereka sendiri".

Dalam konsep matematika, berdasarkan ordenya persamaan diferensial dibagi menjadi persamaan diferensial orde satu, dua, tiga, dan sampai orde-n. Fungsi diferensial jika menggunakan orde satu maka nasibnya akan sejajar-sejajar saja tidak akan berubah dan jika ia menggunakan orde 2, 3, sampai orde-n nasibnya akan berubah sesuai dengan bertambahnya orde yang dipakai.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Jika p dan q analitik pada $x = x_0$, maka titik x_0 adalah titik biasa dari persamaan diferensial yang dicari penyelesaiannya sehingga dapat diseleseikan dengan metode deret pangkat dan langkah-langkahnya sebagai berikut:

1. Mengasumsikan penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut dengan

   $$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

2. Menentukan turunan pertama, dan kedua dari y
3. Mensubtitusikan turunan pertama, dan kedua dari y ke persamaan diferensial sehingga diperoleh persamaan dalam bentuk sigma
4. Menyamakan pangkat dari x yaitu x^n supaya persamaan yang diperoleh dari langkah 3 dapat dijumlahkan
5. Mengelompokkan x yang mempunyai pangkat sama dan menyamakan koefisien dari setiap x pangkat dengan nol.
6. Menentukan nilai koefisien c_n dan mengelompokkan dalam bentuk $c_0, c_1, c_2,\ dan\ c_3$.
7. Dengan mensubtitusikan hasil yang diperoleh dari langkah 6 keasumsi penyelesaian, maka diperoleh penyelesaian umum dari persamaan diferensial yang dicari.

Jika p atau q tidak analitik pada x_0, maka x_0 disebut sebagai titik singular dari persamaan diferensial yang dicari. Akan tetapi $(x - x_0)p(x)$ dan $(x - x_0)^2 q(x)$ analitik pada x_0 maka x_0 disebut sebagai titik singular yang regular, sehingga persamaan diferensial tersebut dapat diseleseikan dengan metode deret pangkat (metode Frobenius) dan langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Mengasumsikan penyeleseian dari persamaan diferensial yang dicari dengan $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$, dengan r adalah bilangan real atau kompleks, $c_0 \neq 0$. Dan x_0 sebagai titik singular yang regular
2. Menentukan turunan pertama, dan kedua dari y
3. Mensubtitusikan turunan pertama, dan kedua dari y ke persamaan diferensial, sehingga diperoleh persamaan dalam bentuk sigma
4. Menyamakan pangkat dari x yaitu x^{n+r} supaya persamaan yang diperoleh dari langkah 3 dapat dijumlahkan
5. Mengelompokkan x yang mempunyai pangkat sama
6. Menentukan persamaan kuadrat dalam r yang disebut persamaan indeks dengan mengambil pangkat terendah dari persamaan, pada langkah 5 yaitu x^{n+r}
7. Menentukan nilai akar-akar dari persamaan indeks dan mencari nilai dari c_n

8. Dengan mensubtitusikan hasil yang diperoleh dari langkah 6 keasumsi selesaian, maka diperoleh penyelesaian dari persamaan diferensial yang dicari.

4.2. Saran

Banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Penyelesaian deret pada skripsi ini adalah penyelesaian pada persamaan diferensial linier homogen orde tiga. Untuk selanjutnya sebaiknya penyelesaian persamaan diferensial linier non homogen orde-n.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Quran*. Malang: UIN-Malang Press

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press

Bondan, Alit. 2006. Kalkulus Lanjut. Yogyakarta: Graha Ilmu

Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensial dan Matematika Model*. Malang: UMM Press

El-Fandy, M.Jamaluddin. 2004. *Al-Quran Tentang Alam Semesta*. Jakarta: Amzah

Finizio, N. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga

Leithhold, Louis. 1991. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*. Bandung: Erlangga

Pliouras, John D. 1987. *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga

Stewart, James. 2003. *Kalkulus.* Jakarta: Erlangga.

Shihab, M.Quraish. 1996. *Wawasan Al-Quran*. Bandung: Mizan.

Waluya, S.B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

.

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : NUR LAILI NINGSIH
Nim : 04510036
Fakultas/ Jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde Tiga dengan Metode Deret Kuasa
Pembimbing I : Drs. H. Turmudi, M. Si
Pembimbing II : Munirul Abidin, M.Ag

No	Tanggal	Keterangan	Tanda Tangan
1.	23 Februari 2008	Seminar Proposal	1.
2.	28 Maret 2008	Konsultasi judul	2.
3.	31 Maret 2008	ACC Judul + Konsultasi Bab I	3.
4.	12 Juli 2008	Revisi Bab I	4.
5.	25 Juli 2008	ACC Bab I + Konsultasi Bab II	5.
6.	29 Juli 2008	Revisi Bab II	6.
7.	29 Agustus 2008	Revisi Bab II	7.
8.	3 September 2008	ACC Bab II + Konsultasi Bab III	8.
		Konsultasi Kajian Keagamaan	9.
9.	9 September 2008	Revisi Bab III	10.
10.	18 September 2008	Konsultasi Kajian Keagamaan	11.
11.	14 Oktober 2008	ACC Bab III + Bab IV	12.
		ACC Kajian Keagamaan	13.
12.	15 Oktober 2008	Konsultasi Keseluruhan	14.
13.	16 Oktober 2008	ACC Keseluruhan	15.

Malang, Oktober 2008
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321