MENENTUKAN BILANGAN RAMSEY $r(m, n)$ DENGAN m, n BILANGAN ASLI

SKRIPSI

Oleh :

DENY LUTHFIYAH
NIM : 03510052

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

MENENTUKAN BILANGAN RAMSEY *r(m, n)* DENGAN *m, n* BILANGAN ASLI

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S. Si)

Oleh :
DENY LUTHFIYAH
NIM : 03510052

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
2008

MENENTUKAN BILANGAN RAMSEY $r(m, n)$ DENGAN m, n BILANGAN ASLI

SKRIPSI

Oleh :
DENY LUTHFIYAH
NIM: 03510052

Telah Disetujui oleh:

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Abdussakir, M. Pd	Ahmad Barizi, M. A
NIP. 150327247	NIP. 150283991

Tanggal 28 Maret 2008

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150318321

MENENTUKAN BILANGAN RAMSEY *r*(*m*, *n*) DENGAN *m*, *n* BILANGAN ASLI

SKRIPSI

Oleh :

DENY LUTHFIYAH

NIM: 03510052

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 12 April 2008

SUSUNAN DEWAN PENGUJI		TANDA TANGAN
1. Dr. Yus M. Cholily, M.Si	(Penguji Utama)	1 ____________
2. Wahyu H. Irawan, M. Pd	(Ketua Penguji)	2 ____________
3. Abdussakir, M. Pd	(Sekretaris Penguji)	3 ____________
4. Ahmad Barizi, M. A	(Anggota Penguji)	4 ____________

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

<u>Sri Harini, M.Si</u>
NIP. 150 318 321

Lembar Persembahan

Karya tulis ini kupersembahkan kepada kedua orang tuaku

Bapak Moh. Khozin dan ibu Robiyati tercinta,

terima kasih atas do'a-do'anya selama ini

dan kasih sayang serta kepercayaannya.

Kepada adik-adikku tersayang

Yesi Mahbubah dan Kefi 'Afiyah.

Pamanku Andi, sahabatku Ali, Riena, Evi dan Anis

yang telah memberi semangat dan menemaniku dalam

suka dan duka.

Teman-teman Matematika angkatan 2003

dan anak-anak kos 78 yang selalu memberi semangat

dan siap memberi bantuan.

MOTTO

يَسِّرُوْا وَلاَ تُعَسِّرُوْ

Artinya: "Permudahlah dan jangan dipersulit".(HR. Bukhari dan Muslim)

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Puji syukur ke hadirat Allah Swt penguasa seluruh alam ini atas curahan rahmat dan hidayah serta nikmat-Nya sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi ini dengan judul Menentukan Bilangan Ramsey $r(m, n)$ dengan m, n Bilangan Asli. Shalawat serta Salam penulis panjatkan kepada junjungan Nabi Muhammad Saw yang menjadi tumpuan syafaat bagi kehidupan kelak.

Selesainya skripsi ini tidak lepas dari kontribusi banyak pihak dalam berbagai bentuk baik secara langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Prof DR. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumintro, SU. DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
3. Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
4. Abdussakir, M.Pd selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan kepada penulis hingga selesainya skripsi ini.
5. Ahmad Barizi, M.A selaku Dosen Pembimbing Integrasi Sains dan Islam yang telah memberikan bimbingan kepada penulis hingga selesainya skripsi ini.

6. Bapak/Ibu Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang beserta stafnya atas ilmu dan pengalaman yang diberikan.
7. Bapak dan Ibu tercinta yang tiada lelah memberikan do'a dan kasih sayang serta kepercayaan serta adik-adikku yang telah memberikan motivasi.
8. Teman-teman Matematika angkatan 2003 dan teman-teman kos 78 mbak Dhona, mbak Lilis, Fitri, Lym, Susan, Iik, Lis, Yuli, terutama Arina dan Anis yang telah memberikan motivasi.
9. Semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat. Amin.

Malang, Maret 2008

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Luthfiyah, Deny. 2008. *Menentukan Bilangan Ramsey r(m, n) dengan m, n Bilangan Asli*. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
Pembimbing: Abdussakir, M. Pd
Ahmad Barizi, M. A

Kata Kunci: Bilangan Ramsey, Bilangan Asli

Teori graf merupakan cabang dari matematika diskrit, dimana graf adalah himpunan tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dengan garis yang menghubungkan sepasang titik. Dalam Islam, titik-titik di dalam graf dapat diasumsikan sebagai umat Islam. Sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan titik-titik tersebut adalah representasi dari bagaimana hubungan antar umat Islam atau disebut dengan jalinan ukhuwah Islamiyah.

Diberikan dua graf G dan H, bilangan Ramsey $r(G, H)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian hingga untuk setiap graf F dengan n titik akan memuat G atau komplemen dari F memuat H. Skripsi ini membahas tentang bilangan Ramsey $r(m, n)$ dengan m dan n bilangan asli. Secara umum, metode pembuktian dalam penelitian skripsi ini menggunakan metode standar dalam matematika. Dalam skripsi ini ditunjukkan bahwa $r(1, n) = r(n, 1) = 1$, $r(2, n) = r(n, 2) = n$, dan $r(3, 1)$, $r(3, 2) = 3$ dan $r(3, 3) = 6$. Untuk mengembangkan studi bilangan Ramsey, maka penulis menyarankan kepada pembaca untuk terus mencari bilangan Ramsey untuk graf yang lain.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Matematika sebagai ilmu dasar yang mendasari dan mempunyai peranan yang sangat penting terhadap berbagai ilmu pengetahuan yang lain. Matematika juga membantu dalam kehidupan sehari-hari, baik itu disadari maupun tidak. Matematika sendiri mempunyai beberapa cabang ilmu yang lebih spesifik, di antaranya adalah statistik, aljabar, geometri, logika, dan matematika diskrit. Matematika diskrit adalah cabang matematika yang membahas segala sesuatu yang bersifat diskrit. Diskrit disini artinya saling terpisah (lawan dari kontinu). Beberapa hal yang dibahas dalam matematika diskrit ini adalah teori himpunan, teori kombinatorial, permutasi, relasi, fungsi, rekursif, teori graf, dan lain-lain (Munir, 2003: xi).

Teori graf sebagai sub cabang dari matematika diskrit merupakan pokok bahasan yang sudah lama, namun memiliki banyak terapan sampai saat ini. Graf digunakan untuk mempresentasikan obyek-obyek diskrit dan hubungan antara obyek-obyek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan obyek sebagai noktah, bulatan atau titik, sedangkan hubungan antara obyek dinyatakan dengan garis. Sebagai contohnya adalah sebuah peta jaringan jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di Provinsi Jawa Timur. Sesungguhnya peta tersebut adalah sebuah graf, di mana kota dinyatakan sebagai bulatan sedangkan jalan dinyatakan sebagai garis. Dengan diberikannya peta tersebut dapat diketahui apakah ada lintasan jalan antara dua buah kota (Munir, 2003: 289).

Salah satu materi yang banyak berkembang akhir-akhir ini dalam teori graf adalah Teori Ramsey. Teori Ramsey pertama kali dikaji pada tahun 1928 dalam konteks permasalahan mencari prosedur untuk menentukan benar tidaknya suatu formula logika yang diberikan. Kemudian Teori Ramsey menjadi terkenal setelah Erdos da Szekeres (1935) mengaplikasikan ke dalam teori graf (Surahmat, 2003).

Bilangan Ramsey ditemukan oleh Frank Ramsey. Ide dasar dari Bilangan Ramsey ini adalah "untuk bilangan bulat positif m dan n, tentukan bilangan bulat positif terkecil sedemikian hingga untuk setiap graph G dengan p titik akan berlaku G memuat subgraph K_m dan $\overline{G}$ memuat subgraph K_n". Sehingga G memuat m titik yang saling terhubung langsung atau n titik yang saling lepas (Chatrand dan Lesniak, 1986: 306). Bilangan Ramsey ini menarik untuk dikaji karena di Indonesia sampai saat ini masih jarang yang mengkaji tentang bilangan Ramsey. Dalam menentukan bilangan Ramsey pada graf ini akan menghasilkan teorema dan teorema tersebut perlu pembuktian. Penelitian ini akan membahas tentang penentuan bilangan Ramsey $r(m, n)$ dengan m dan n adalah bilangan asli.

Terkait dengan pernyataan di atas, bahwa tujuan dalam membuat rumus atau teorema yaitu untuk mempermudah atau memperjelas dalam menyelesaikan suatu masalah yang ada. Hal ini tertera dalam hadist berikut ini.

يَسِّرُوْا وَلاَ تُعَسِّرُوْا

"Permudahlah dan jangan dipersulit".(HR. Bukhari dan Muslim)

Dalam menentukan teorema atau rumus perlu adanya pembuktian kebenaran, apakah rumus atau teorema tersebut benar atau salah. Misalkan rumus atau teorema tersebut tidak jelas, maka jangan dilakukan atau diikuti. Hal ini tertera dalam surat Al-Isra’ ayat 36 sebagai berikut:

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِۦ عِلْمٌ ۚ إِنَّ ٱلسَّمْعَ وَٱلْبَصَرَ وَٱلْفُؤَادَ كُلُّ أُو۟لَـٰٓئِكَ كَانَ عَنْهُ
مَسْـُٔولًا ﴿٣٦﴾

”*Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan dan hati, semuanya itu akan diminta pertanggungan jawabnya”*(Qs. Al-Isra’:36).

Dari ayat di atas, terdapat kata *kâna ’anhu masâlaa* ”semuanya itu yakni pendengaran, penglihatan, dan hati akan dimintai pertanggungjawabannya.” Maksudnya, seorang hamba nanti akan dimintai pertanggungjawaban mengenai hal itu pada hari kiamat serta apa yang telah dilakukan dengan semua anggota tubuh tersebut. Allah Swt melarang perbuatan yang tanpa didasari pengetahuan, yang tidak lain hanya khayalan belaka.

Dalam menentukan suatu kebenaran perlu adanya pembuktian, apabila bukti tersebut benar maka tunjukkan bukti dari kebenaran tersebut. Hal ini tertera dalam surat Al-Baqarah ayat 111 sebagai berikut:

وَقَالُوا۟ لَن يَدْخُلَ ٱلْجَنَّةَ إِلَّا مَن كَانَ هُودًا أَوْ نَصَـٰرَىٰ ۗ تِلْكَ أَمَانِيُّهُمْ ۗ قُلْ هَاتُوا۟
بُرْهَـٰنَكُمْ إِن كُنتُمْ صَـٰدِقِينَ ﴿١١١﴾

Artinya: *”Dan mereka (Yahudi dan Nasrani) berkata: "Sekali-kali tidak akan masuk surga kecuali orang-orang (yang beragama) Yahudi atau Nasrani". demikian itu (hanya) angan-angan mereka yang kosong belaka. Katakanlah: "Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar*" (Qs. Al-Baqarah:111).

Para Ahli Kitab, Yahudi dan Nasrani, mereka menganggap bahwa tidak akan masuk surga terkecuali golongan mereka sendiri. Untuk menolak dan membatalkan anggapan mereka itu Allah Swt memberikan penegasan bahwa anggapan mereka itu hanyalah angan-angan yang timbul dari khayalan mereka sendiri saja, yaitu agar terhindar dari siksa serta anggapan bahwa yang bukan golongan mereka akan terjerumus ke dalam siksa dan tidak memperoleh nikmat sedikitpun. Dalam ayat tersebut terdapat kata *burhânakum* "kemukakan penjelasan kalian", Allah Swt seakan-akan meminta penjelasan bukti kebenaran yang menguatkan anggapan mereka bahwa mereka dapat mengemukakan bukti-bukti yang benar maka dugaan mereka benar. Dan meskipun arti dari ayat terdapat tuntunan mengemukakan bukti, namun maknanya menyatakan ketidakbenaran dakwaan mereka karena mereka tidak akan dapat mengemukakan bukti. Dalam ayat ini terdapat isyarat bahwa sesuatu pendapat yang tidak didasarkan pada bukti-bukti yang benar maka tidak akan diterima.

Konsep kebenaran adalah penting dalam Islam, dan perkataan itu berlaku ratusan kali di dalam al-Qur'an dan hadits (tradisi serta sunnah tentang apa yang telah diajari dan diamalkan oleh Nabi Muhammad Saw).

Berdasarkan alasan tersebut, penulis mengangkat permasalahan dalam skripsi yang berjudul "**Menentukan Bilangan Ramsey $r(m, n)$ dengan m, n Bilangan Asli".**

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka permasalahan dirumuskan sebagai berikut yaitu ”bagaimana menentukan bilangan Ramsey $r(m, n)$ dengan m, n bilangan asli”.

1.3. Tujuan Penelitian

Agar pembahasan terfokus maka tujuan dirumuskan sebagai berikut yaitu untuk menjelaskan proses menentukan bilangan Ramsey $r(m, n)$ dengan m, n bilangan asli.

1.4. Batasan Masalah

Penentuan $r(m, n)$ dibatasi pada $m = 1, 2, 3$. Sedangkan n dibatasi pada bilangan asli.

1.5. Manfaat Penelitian

1. Bagi penulis,

   Merupakan sarana untuk mengaplikasikan dan mengembangkan disiplin keilmuan yang selama ini menjadi bidang minat yang dipelajari.

2. Bagi pembaca,

   Sebagai wacana dan tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya tentang bilangan Ramsey.

1.6. Metode Penelitian

Metode merupakan cara utama yang akan ditempuh untuk menemukan jawaban dari suatu permasalahan. Dalam hal ini penulis menggunakan studi literatur studi, yaitu penelitian yang dilakukan di perpustakaan yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bermacam materiil yang terdapat di perpustakaan seperti buku-buku, majalah, dokumen, catatan, kisah-kisah sejarah dan lain-lain.(Mardalis, 1999: 28). Pembahasan terdapat pada bab 3 yang berisi tentang penjelasan langkah-langkah yang dilakukan dalam penentuan bilangan ramsey $r(m, n)$ dengan m, n bilangan asli.

1.7. Sistematika Pembahasan

Sripsi ini dibagi dalam 4 bab, yaitu:

BAB I **:** Bab I membahas latar belakang masalah, batasan masalah serta metode pembahasan.

BAB II **:** Bab II membahas beberapa teori pendukung yaitu konsep dasar graf, graf dengan nama tertentu (kosong, komplit), Bilangan Ramsey dan contoh-contohnya.

BAB III **:** Bab III membahas tentang proses menentukan bilangan Ramsey $r(1, n) = r(n, 1) = 1$, $r(2, n) = r(n, 2) = n$, dan $r(3, n)$, untuk $n = 1, 2, 3, 4$, beserta contoh-contohnya.

BAB IV **:** Bab IV (Penutup) berisi saran dan kesimpulan.

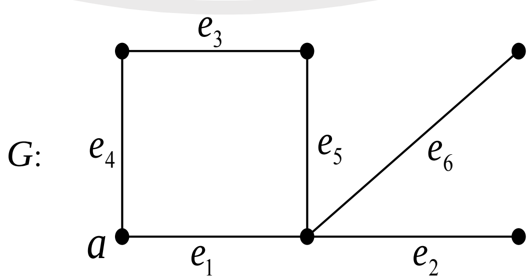
BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Definisi dan Komponen Graf

Graf G adalah pasangan (V,E) dengan V adalah himpunan yang tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut titik *(vertex)* dan E himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi di G dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chatrand dan Lesniak, 1986: 4).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$. (Chatrand dan Lesniak, 1986: 4).

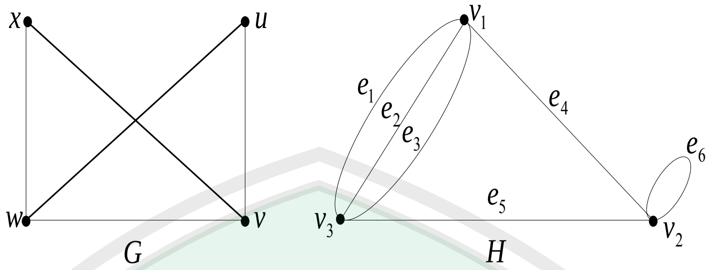


Gambar 2.1.1 Graf G

Dari gambar di atas, maka diketahui titik *a* dan *b* terhubung langsung, demikian juga dengan *a* dan *d*, *b* dan *c*, *b* dan *e*, *b* dan *f*, serta *d* dan *e*, sedangkan titik *a* dan *e* tidak terhubung langsung, demikian juga dengan *b* dan *d*, *d* dan *c*, serta *a* dan *f*. Sisi e_1 terkait langsung dengan titik *a* dan *b*, dan sisi e_2 terkait langsung dengan titik *b* dan *c*. Satu sisi hanya dapat terkait langsung dengan dua titik yang berbeda.

Suatu graf *G* = (*V*, *E*) menyatakan graf *G* dengan himpunan titik-titik *V*(*G*) dan himpunan sisi-sisi *E*(*G*). Jika v_1 dan v_2 adalah titik-titik pada graf *G*, dan $e = (v_1 v_2)$ adalah sisi pada graf *G*, maka dikatakan v_1 dan v_2 terhubung langsung oleh sisi $e = (v_1 v_2)$ atau dapat dikatakan pula sisi $e = (v_1 v_2)$ terkait langsung pada v_1 dan v_2. Derajat suatu titik *v* di *G* dinyatakan dengan *d*(*v*) adalah banyaknya sisi di *G* yang terkait pada *v*. Cacah titik di *G* dinyatakan dengan $|V(G)|$ adalah jumlah keseluruhan titik di graf *G*, sedangkan cacah sisi di *G* dinyatakan dengan $|E(G)|$ adalah jumlah keseluruhan sisi di graf *G*. Jika banyaknya titik dan sisi dari *G* berhingga maka graf *G* disebut graf berhingga. Dua sisi atau lebih yang menghubungkan satu pasang titik disebut sisi rangkap (multiple edge). Suatu sisi yang titik ujungnya sama disebut loop. Graf dengan loop dan sisi rangkap disebut graf multigraf (Purwanto: 1998:5).

Contoh 2.1.2



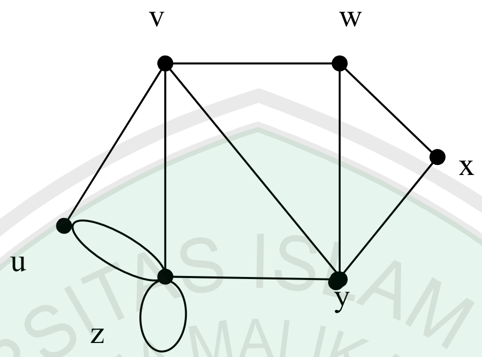
Gambar 2.1.2 Graf G dan Multigraf H

Pada Gambar 2.1.1 graf *G* adalah graf sederhana, karena tidak memuat sisi rangkap dan tidak memuat loop. Himpunan titik dan sisi dari graf *G* masing-masing adalah *V*(*G*) = {*u*,*v*,*w*,*x*} dan *E*(*G*) = {*uv*, *uw*, *vw*, *vx*, *wx*} dengan $|V(G)|$ = 4 dan $|E(G)|$ = 5. Derajat masing-masing titik adalah *d*(*u*) = 2, *d*(*v*) = 3, *d*(*w*) = 3, *dan d*(*x*) = 2. *H* adalah multigraf, karena memuat sisi rangkap yaitu e_1, e_2, e_3 yang menghubungkan titik v_1 dan v_3 dan memuat loop e_6.

2.2. Graf Terhubung

Suatu *walk* atau jalan yang panjangnya *p* dalam graf *G* adalah urutan *k* sisi *G* yang berbentuk *uv*,*vw*, *wx*, ..., *yz*, dan *walk* ini dinotasikan dengan *uvwx*...*yz*, dan disebut *walk* antara *u* dan *z*. Titik kedua setiap sisi adalah sama dengan titik pertama sisi berikutnya. Semua sisi dan titik dalam *walk* tidak perlu berbeda (boleh sama) (Wilson dan Watkins, 1990: 34).

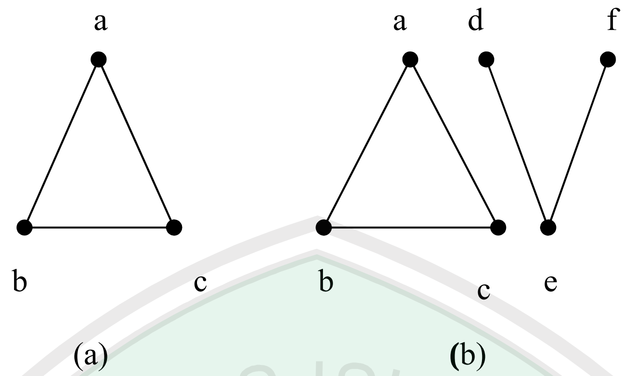
Jika semua sisi suatu *walk* berbeda, maka *walk* itu disebut *trail*. Jika semua titiknya berbeda, maka *trail* itu disebut *path*. Suatu *walk* tertutup dalam graf *G* merupakan urutan sisi *G* berbentuk *uv*, *vw*, *wx*,..., *yz*, *zu*. Jika semua sisinya berbeda maka *walk* itu disebut *trail tertutup*, jika titik-titiknya juga berbeda maka *trail* itu disebut *sikel.*



Gambar 2.2.1 Graf dengan walk, path, trail dan sikel

uvwxywvzzy adalah *walk* antara *u* dan *y*. *Walk uvwxywvzzy* adalah *trail* yang bukan *path* (karena titik *y* dan *z* ada dua), sedangkan pada *walk uwxyz* disebut *path* karena tidak ada titik yang diulang. *Walk* tertutup *uvwyvzu* adalah *trail* tertutup yang bukan *sikel* (karena titik *v* muncul dua kali), sedangkan *trail* tertutup, *vwxyv, dan vwxyzv* semuanya adalah *sikel.*

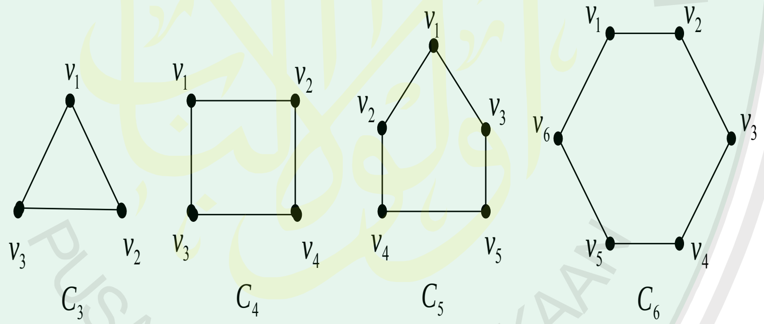
Misalkan *u* dan *v* titik berbeda pada graf *G*. Maka titik *u* dan *v* dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan *u* – *v* di *G*. Sedangkan suatu graf *G* dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik *u* dan *v* di *G* terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).



Gambar 2.2.2 (a) Graf Terhubung, (b) Graf tak-Terhubung

Graf sikel merupakan graf yang terdiri dari sebuah sikel tunggal (Wilson R. J dan Watkins J. J, 1992: 37)

Graf sikel dengan n titik dinotasikan dengan C_n. Hal ini dapat dilihat pada gambar 2.2.3.



Gambar 2.2.3. Graf Sikel

C_n beraturan dengan derajad 2, dan memiliki n sisi, untuk $n \geq 3$

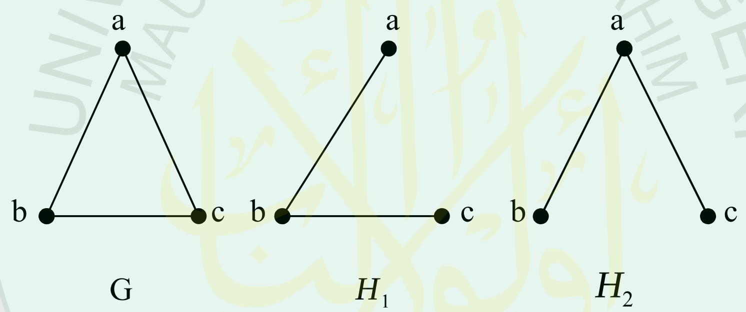
2.3. Subgraf

Graf H disebut subgraf dari G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G dan himpunan sisi-sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di G. Dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf G, maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 8).

Suatu graf boleh tidak memuat sisi, tetapi minimal terdiri dari satu titik. Graf yang terdiri dari satu titik disebut graph trivial, sedangkan graf yang tidak memuat sisi disebut graf kosong.

Misalkan *G* suatu graf dengan himpunan titik *V*(*G*) dan himpunan sisi *E*(*G*). Graf bagian (subgraf) dari *G* adalah suatu graf yang setiap titiknya adalah anggota *V(G)* dan setiap sisinya adalah anggota *E*(*G*). Jika H suatu graf bagian dari *G* dan *V*(*H*) = *V*(*G*) maka *H* disebut graf bagian rentangan (spanning subgraf) dari *G*.

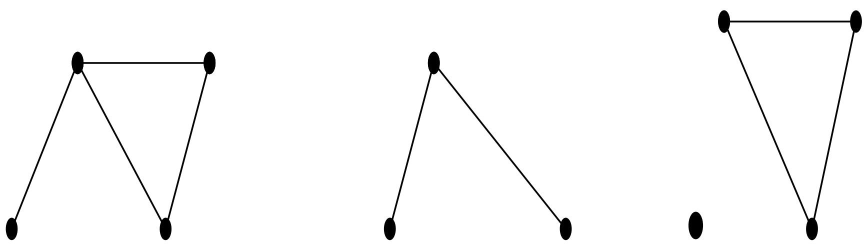
Contoh 2.3



Gambar 2.3.1 Graf G dan Subgraf H_1 dan H_2

Pada Gambar 2.3.1, H_1 dan H_2 adalah graf bagian dari *G* karena untuk setiap titik $v \in V(H_1)$, maka $v \in V(G)$, dan untuk setiap $e \in E(H_1)$, maka $e \in E(G)$.

Subgraf pada graf *G* dapat dibuat dengan menghilangkan titik atau sisi. Jika $v \in V(G)$ dan $|V(G)| \geq 2$ maka *G*-*v* menunjukkan subgraf dengan titik *V*(*G*)-{*v*} dan semua sisi di graf *G* yang tidak terhubung dengan *v*. Jika $e \in V(G)$, maka *G*-*e* adalah subgraf yang mempunyai titik *V*(*G*) dan sisi *E*(*G*)-{*e*}. Menghilangkan titik atau sisi didefinisikan secara analogi. Konsep tersebut digambarkan pada gambar 2.3.2.

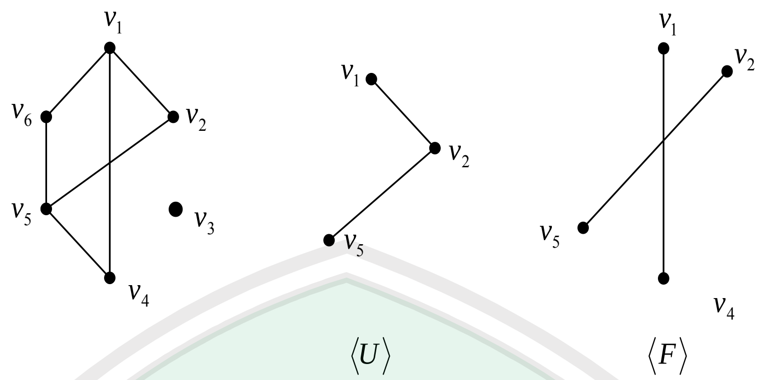


Gambar 2.3.2 Graf G dengan Graf G-v, dan Graf G-e

Jika *u* dan *v* tidak terhubung dengan titik di graf *G*, maka *G* + *f*. Dimana *f* = *uv*, ditunjukkan pada graf dengan titik *V*(*G*) dan sisi $E(G) \cup \{f\}$. Sehingga $G \subset G + f$.

G-e mempunyai titik yang sama di graf *G* dan *G* memiliki titik yang sama di graf *G* + *f*. Jika *H* subgraf dari graf *G* mempunyai order di *G*. Maka *H* disebut spanning subgraf dari *G*.

Jika *U* adalah himpunan bagian yang tidak kosong dari titik *V*(*G*) di graf *G*, maka subgraf $\langle U \rangle$ dari graf *G* disebut subgraf terdukung oleh *U* yang mempunyai titik di *U* dan sisi yang terdiri dari sisi graf *G* yang terhubung dengan 2 elemen *U*. Subset sisi *G* dan tidak kosong maka subgraf *F* adalah subgraf di *G* yang titiknya adalah himpunan titik-titik yang terkait langsung dengan sisi di F. $\langle F \rangle$ disebut subset terdukung sisi. Definisi dari setiap subgraf di graf *G* dapat memuat dengan menghilangkan titik di *G*, maka subgraf dari *G* memuat dengan menghilangkan titik dan sisi. Konsep ini digambarkan pada gambar 2.3.3. Untuk graf *G* dimana $V(G) = \{v_{1,} v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $U = \{v_1, v_2, v_5\}$, dan $F = \{v_1 v_4, v_2 v_5\}$

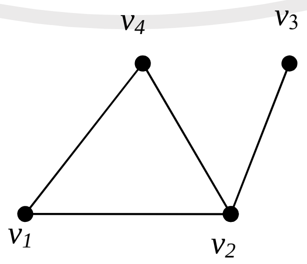


Gambar 2.3.3 $\langle U \rangle$ *Subgraf Terdukung,* $\langle F \rangle$ *Subgraf Terdukung*

2.4. Derajat Suatu Titik

Misal G adalah graf, dan v adalah suatu titik di G. Derajat v adalah banyaknya sisi yang terkait langsung pada v dan dinotasikan oleh deg v (Chatrand dan Lesniak, 1986: 7).

Derajat suatu titik v pada sebuah graf G, ditulis dengan *deg*(v), adalah jumlah sisi yang *incident* pada v. Dengan kata lain, jumlah sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah *deg*(v) genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak, 1986: 8).Contoh:



Gambar 2.4.1 Graf dengan derajat titik

Dimana:

$deg_G\ (v_1) = 2$

$deg_G\ (v_2) = 3$

$deg_G\ (v_3) = 1$

$deg_G\ (v_4) = 2$

Teorema 1

Jika G graf $V(G) = \{ v_1, v_2, ..., v_n\}$

maka $\sum_{i=1}^{p} \deg_G (v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7)

Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Akibat 1.

Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

Bukti:

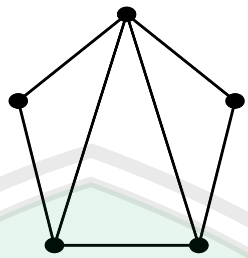
Misalkan graf G dengan ukuran q. Maka ambil W yang memuat himpunan titik ganjil pada G serta U yang memuat himpunan titik genap di G.

Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v\in v(G)} \deg_G v = \sum_{v\in W} \deg_G v + \sum_{v\in U} \deg_G v = 2q$$

dengan demikian karena $\sum_{v\in U} \deg_G v$ genap, maka $\sum_{v\in W} \deg_G v$ juga -- genap. Sehingga $|W|$ adalah genap.

Contoh:



Gambar 2.4.2

Jumlah derajat seluruh titik pada graph gambar 2.4.2 adalah

$\deg(v_1) + \deg(v_2) + \deg(v_3) + \deg(v_4) + \deg(v_5) = 2 + 3 + 3 + 2 + 4$

$= 14$

$= 2 \times$ jumlah sisi

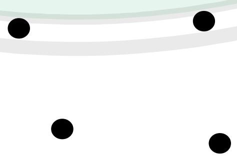
$= 2 \times 7$

v_1

2.5. Graf Kosong

Graf kosong (null graph atau empty graph) adalah graf yang hanya mempunyai himpunan titik minimal satu dan mempunyai himpunan sisi kosong. Graf kosong dengan *n* titik ditulis dengan N_n (Munir, 2003: 302).

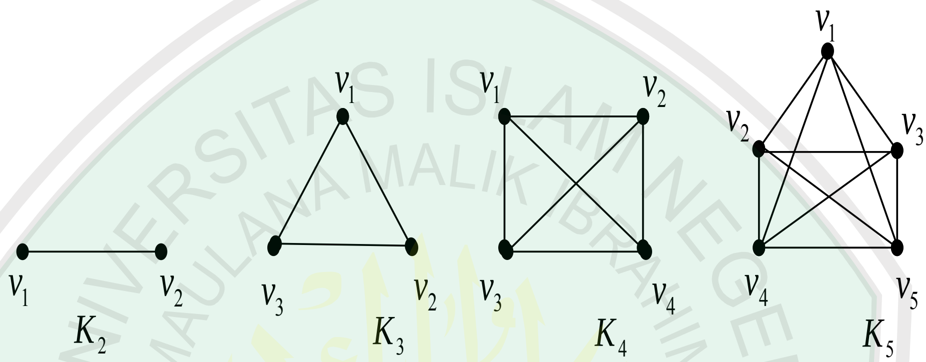
v_2



Gambar 2.5.1. Graf Kosong N_4

2.6. Graf Komplit

Graf komplit adalah graf sederhana yang setiap titiknya terhubung ke semua titik lainnya. Graf komplit dengan n titik dilambangkan dengan K_n. Setiap titik pada K_n berderajad n – 1 (Munir, 2003: 313).



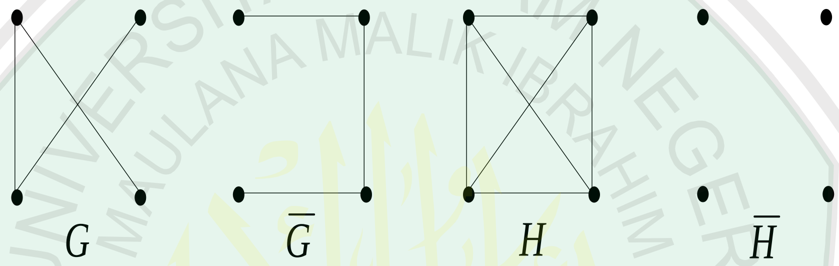
Gambar 2.6.1 Graf Komplit

Gambar 2.6.1 menunjukkan Graf komplit $K_1, K_{2,} K_{3,}\ dan\ K_5$. Karena setiap pasang titik yang berbeda pada graf komplit K_n di hubungkan oleh satu sisi maka banyaknya sisi yang terkait pada suatu titik v pada K_n adalah n – 1 atau d(v) = (n – 1).

Jumlah sisi pada graf komplit yang terdiri dari n titik adalah n(n - 1)/2. Rumus ini diperoleh sebagai berikut: untuk 1 titik terdapat (n - 1) sisi ke (n - 1) titik lainnya, maka untuk n titik terdapat n(n - 1) sisi. Karena setiap sisi terhitung dua kali untuk pasangan titik bersisian dengannya. Maka jumlah sisi seluruhnya dibagi dua, yaitu n(n - 1)/2.

2.7. Komplemen Graf

Komplemen dari graf G dinyatakan dengan $\overline{G}$ adalah graf sederhana dengan himpunan titik $V(\overline{G}) = V(G)$ dan dua titik di $\overline{G}$ terhubung jika dan hanya jika keduanya tidak terhubung di G (Purwanto, 1998: 24). Gambar 2.4.2 menunjukkan beberapa graf dengan komplemennya.



Gambar 2.7.1 Graf dengan Komplemennya.

Sebuah graf dapat direpresentasikan sebagai *silaturrahim* antar umat Islam. Arti *silaturrahim* disini adalah ikatan yang mengikat sesama manusia yang berupa ikatan iman yang menuntut haknya agar dijaga dalam rasa saling mencintai karena Allah Swt diantara mereka. Seperti dalam firman Allah surat al Hujurat: 10

إِنَّمَا ٱلْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا۟ بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ ۚ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ ﴿١٠﴾

"Orang-orang beriman itu Sesungguhnya bersaudara. sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat"(Qs. Al Hujurât: 10).

Islam juga begitu menghargai hubungan sanak famili yang mengikat manusia satu sama lain melalui hubungan nasab atau kerabat. Penghargaan ini tidak pernah dikenal oleh kemanusiaan dalam agama, aturan atau syariat apapun selain Islam. Islam mewariskan dan mendorong agar sanak famili disambung serta memberikan ancaman atas orang yang memutuskannya. Seperti dalam firman Allah surat An- Nisa': 1

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ ٱتَّقُواْ رَبَّكُمُ ٱلَّذِى خَلَقَكُم مِّن نَّفۡسٍ وَٰحِدَةٍ وَخَلَقَ مِنۡهَا زَوۡجَهَا وَبَثَّ مِنۡهُمَا رِجَالاً كَثِيرًا وَنِسَآءً ۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَ ٱلَّذِى تَسَآءَلُونَ بِهِۦ وَٱلۡأَرۡحَامَ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَلَيۡكُمۡ رَقِيبًا ﴿١﴾

" Hai sekalian manusia, bertakwalah kepada Tuhan-mu yang Telah menciptakan kamu dari seorang diri, dan dari padanya[263] Allah menciptakan isterinya; dan dari pada keduanya Allah memperkembang biakkan laki-laki dan perempuan yang banyak. dan bertakwalah kepada Allah yang dengan (mempergunakan) nama-Nya kamu saling meminta satu sama lain[264], dan (peliharalah) hubungan silaturrahim. Sesungguhnya Allah selalu menjaga dan Mengawasi kamu"(Qs. An Nisâ: 1).

Silaturrahim baik dalam hubungan famili maupun keimanan yang kemudian disebut dengan ukhuwah Islamiyah merupakan sesuatu yang harus dijalin. Hubungan kekerabatan semestinya terus terjalin sehingga hubungan kekeluargaan antar generasi berikutnya tidak terputus, banyak faktor yang dapat mengakibatkan terjadinya pemutusan tali silaturrahim dan ketidaktahuan seseorang tentang itu membuatnya terjerumus dalam kesalahan, seringkali hanya karena persoalan-persoalan sepele yang tidak mendasar hubungan silaturrahim menjadi terputus, misalnya karena memperebutkan harta warisan dan sejenisnya. Bahkan yang lebih memprihatinkan lagi adalah terjadinya pertumpahan darah atau pembunuhan antar anggota keluarga. Disamping itu, hubungan antar sesama umat Islam juga harus dijalin dalam jalinan ukhuwah Islamiyah.(http://rumus-bb.com/?p=24)

Dalam teori graf ini, manusia diasumsikan sebagai himpunan titik. Apabila antar manusia tersebut menjalin silaturrahim dengan baik maka diasumsikan dengan garis dan jika antar manusia tersebut tidak menjalin tali silaturrahim atau tidak saling kenal maka grafnya hanya terdiri dari titik saja.

Bentuk graf dari silaturrahim antar umat manusia

(a) (b)

Gambar 2.5.2 (a) Representasi manusia yang tidak menjalin silaturrahim

(b) Representasi manusia yang menjalin silaturrahim

Pada Gambar (a) terlihat bahwa hanya ada empat titik dan tidak mempunyai sisi. Hal ini dapat digambarkan bahwa antara manusia yang satu dengan manusia lainnya tidak terjalin silaturrahim. Pada Gambar (b) terlihat ada empat titik yang semuanya saling terhubung langsung. Hal ini dapat digambarkan bahwa antar manusia tersebut terjalin silaturrahim yang baik.

Allah Swt memerintahkan agar setiap manusia menyambung hubungan baik dengan orang fakir, tetangga, kerabat dan sanak famili. Apabila manusia memutuskan apa yang diperintahkan oleh Allah untuk dihubungkan, maka ikatan sosial masyarakat akan hancur berantakan, kerusakan menyebar disetap tempat, kekacauan terjadi di mana-mana, gejala sifat egoisme dan mau menang sendiri akan timbul dalam kehidupan sosial. Sehingga kehidupan manusia berubah menjadi kehidupan hewani yang tidak berharga.

2.8. Bilangan Ramsey

Untuk bilangan positif m dan n, bilangan ramsey $r(m, n)$ adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian hingga untuk setiap graf G dengan p titik, dimana G memuat K_m sebagai subgraf atau $\overline{G}$ memuat K_n sebagai subgraf (Chatrand dan Lesniak, 1986: 306). Karena $\overline{\overline{G}} = G$, untuk setiap graf G, maka $r(m, n) = r(n, m)$.

Bilangan Ramsey diperkenalkan oleh *Frank Ramsey*, yang mempelajari konsep ini dalam kerangka teoritis dan membuktikan eksistensi bilangan Ramsey. Teori bilangan Ramsey lebih banyak diaplikasikan dalam graf yang sering disebut bilangan Ramsey graf. Banyak jenis graf yang telah digunakan dalam menentukan nilai eksak bilangan ramsey, baik bilangan Ramsey klasik maupun bilangan Ramsey sisi. Dalam menentukan bilangan Ramsey dapat menggunakan salah satu jenis graf ataupun dapat dilakukan kombinasi antara graf yang satu dengan graf yang lain.

2.8.1 Bilangan Ramsey klasik

Diberikan dua graf F dan H, bilangan Ramsey $r\ (F,\ H)$ adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian hingga untuk setiap graf G dengan n titik memenuhi kondisi G memuat F sebagai subgraf atau komplemen dari G memuat H sebagai subgraf. Bilangan Ramsey klasik $r\ (F,\ H)$ adalah banyaknya titik minimum dari suatu graf G yang bersifat $G \to (F, H)$ (Baskoro dan Imron, 2005).

Sejauh ini hanya bilangan Ramsey klasik yang diketahui, antara lain:

$r(3, 3) = 6$	$r(3, 6) = 18$	$r(3, 9) = 36$
$r(3, 4) = 9$	$r(3, 7) = 23$	$r(4, 4) = 18$
$r(3, 5) = 14$	$r(3, 8) = 28$	$r(4,5\ ) = 25$

Suatu bilangan Ramsey dapat direpresentasikan do’a yang dikabulkan oleh Allah Swt. Do’a merupakan permohonan atau permintaan hamba kepada Allah Swt dengan menggunakan lafal yang dikehendaki dan memenuhi ketentuan yang ditetapkan. Do’a dibutuhkan setiap orang dalam kehidupan untuk menghilangkan rasa cemas dan menumbuhkan harapan kepada yang Maha Pemurah (Ghafur, 2005:212). Allah Maha Besar, Maha Pengasih dan Maha penyayang, Maha Pengampun. Segala puji bagi Allah. Dia juga Maha Mengabulkan segala do’a. Tapi kesabaran manusia dalam hal ini sangat diperlukan. Sebab, segala do’a itu ada yang tidak dikabulkan, ada yang lambat baru terkabul dan ada pula yang cepat terkabul. Bahkan setelah manusia lupa apa yang diminta (do’a) kepada Allah, barulah terkabul do’anya. Do’a sebenarnya sangat bergantung kepada orangnya. Ada beberapa persyaratan di antaranya do’a bisa dikabulkan oleh Allah. Yang sudah pasti yaitu orang yang menjalankan shalat secara benar, benar puasanya, sedang mengerjakan haji, beramal shaleh dan orang yang teraniaya.

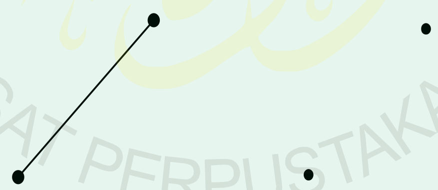
Do’a yang mustajab yang dikabulkan oleh Allah Swt yaitu, do’a pada waktu setengah malam terakhir, do’a pada hari jumat, do’a orang yang sedang berperang dan do’a diwaktu selesai adzan. Walaupun semua persyaratan itu sudah dipenuhi oleh setiap manusia yang ingin terlepas dari malapetaka atau kesulitan, tetapi Allah juga yang mengabulkan segala do’a itu. Sebagaimana firman Allah dalam surat Ar-Ra’d: 14

لَهُۥ دَعۡوَةُ ٱلۡحَقِّۖ وَٱلَّذِينَ يَدۡعُونَ مِن دُونِهِۦ لَا يَسۡتَجِيبُونَ لَهُم بِشَيۡءٍ إِلَّا كَبَٰسِطِ
كَفَّيۡهِ إِلَى ٱلۡمَآءِ لِيَبۡلُغَ فَاهُ وَمَا هُوَ بِبَٰلِغِهِۦۚ وَمَا دُعَآءُ ٱلۡكَٰفِرِينَ إِلَّا فِي ضَلَٰلٖ ١٤

”Hanya bagi Allah-lah (hak mengabulkan) doa yang benar. dan berhala-berhala yang mereka sembah selain Allah tidak dapat memperkenankan sesuatupun bagi mereka, melainkan seperti orang yang membukakan kedua telapak tangannya ke dalam air supaya sampai air ke mulutnya, padahal air itu tidak dapat sampai ke mulutnya. dan doa (ibadat) orang-orang kafir itu, hanyalah sia-sia belaka”(Qs. Ar-Ra’d: 14).

Dalam teori bilangan Ramsey ini, do’a yang terkabul digambarkan dengan titik yang terhubung langsung dengan titik yang lainnya sedangkan do’a yang tidak terkabul akan digambarkan dengan titik yang saling lepas.

Graph do’a yang terkabul dan yang tidak terkabul



(a) (b)

Gambar 2.8.1 (a) Representasi do’a terkabul

(b) Representasi do’a tidak terkabul

Pada gambar di atas dapat diketahui, bahwa segala do’a itu tidak semuanya dikabulkan, ada yang lambat baru terkabul dan ada pula yang cepat terkabul. Pada gambar (a) terlihat bahwa antara kedua titik saling terhubung langsung, hal ini terlihat do’a yang dikabulkan secara langsung. Pada gambar (b) terlihat bahwa kedua titik tidak saling terhubung, hal ini terlihat bahwa do’a seseorang tidak terkabul langsung atau belum terkabul. Do’a orang yang terkabul langsung adalah do’a hamba Allah yang sangat dekat kepada-Nya, dilakukan dengan baik dan Allah menganggap permintaannya harus segera dikabulkan. Seperti do’a para wali Allah dan do’a orang yang sedang dianiaya sedangkan ia dalam keadaan lemah dan terdesak biasanya Allah langsung mengabulkannya. Sesungguhnya wali-wali Allah itu tidak merasa takut dan tidak pula merasa duka cita, mereka adalah orang-orang yang beriman dan bertaqwa.

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Bilangan Ramsey $r(1, n) = r(n, 1) = 1$

Untuk menentukan $r(1, n) = r(n, 1) = 1$ dilakukan dengan langkah berikut.

1. mencari $r(1, 1)$

   Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K}_1 = K_1$

   $G = \bullet$ $\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

   Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 1) = 1$

2. Mencari $r(1, 2)$

   Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K}_1 = K_1$

   $G = \bullet$ $\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

   Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 2) = 1$

3. Mencari $r(1, 3)$

   Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K}_1 = K_1$

   $G = \bullet$ $\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

   Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 3) = 1$

4. mencari $r(1, 4)$

   Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K_1} = K_1$

   $G = \bullet$ $\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

   Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 4) = 1$

5. Mencari $r(1, 5)$

   Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K_1} = K_1$

   $G = \bullet$ $\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

   Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 5) = 1$

6. Mecari $r(1, 6)$

   Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K_1} = K_1$

   $G = \bullet$ $\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

   Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 6) = 1$

7. Mencari $r(1, 7)$

   Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K_1} = K_1$

   $G = \bullet$ $\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

   Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 7) = 1$

8. Mencari $r(1, 8)$

   Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K}_1 = K_1$

   $G = \bullet$ $\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

   Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 8) = 1$

9. Mencari $r(1, 9)$

   Ambil G = K_1, maka $\overline{G} = \overline{K}_1 = K_1$

   $G = \bullet$ $\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

   Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 9) = 1$

10. Mencari $r(1, 10)$

   Ambil $G = K_1$, maka $\overline{G} = \overline{K}_1 = K_1$

   $G = \bullet$ $\qquad\qquad$ $\overline{G} = \bullet$

   Jadi G memuat K_1, atau $\overline{G}$ memuat K_1 sesuai definisi bilangan Ramsey, maka $r(1, 10) = 1$

Dari beberapa contoh di atas, diperoleh bahwa:

$r(1, 1) = 1$

$r(1, 2) = 1$

$r(1, 3) = 1$

$r(1, 4) = 1$

$r(1, 5) = 1$

$r(1, 6) = 1$

$r(1, 7) = 1$

$r(1, 8) = 1$

$r(1, 9) = 1$

$r(1, 10) = 1$

Terlihat bahwa $r(1, 10) = 1$, menghasilkan teorema $r(1, n) = 1$.

Teorema

Bilangan Ramsey $r(1, n) = 1$, untuk n bilangan asli

Bukti.

$r(1, n) = 1$, sebab setiap graf G berorder 1,

Maka G memuat K_1 atau $\overline{G}$ memuat K_n.

3.2 $r(2, n) = r(n, 2)$

Untuk menentukan $r(2, n)$ akan dilakukan melalui beberapa langkah berikut:

1. $r(2, 1) = 1$, sebab $r(1, 2) = r(2, 1) = 1$

   Yakni setiap graf G berorder *1*, maka G dan $\overline{G}$ memuat K_1.

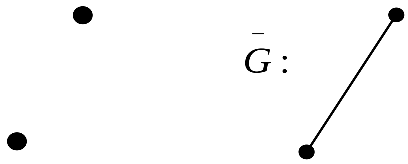
2. $r(2, 2) = 2$

   Bukti

   Karena K_1 dan $\overline{K}_1$ tidak memuat K_2 sebagai subgraf, maka $r(2, 2) \geq 2$.

   Misal G sebarang graf berorder 2.

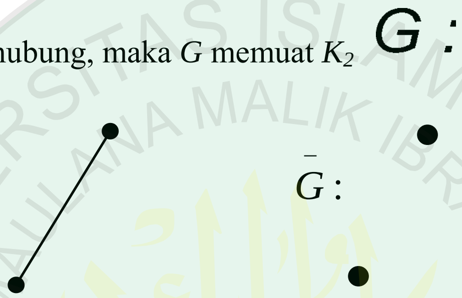
   Jika G tidak terhubung, maka $\overline{G}$ adalah K_2.



Dengan demikian, maka $\overline{G}$ adalah K_2

Jadi $\overline{G}$ memuat K_2 sebagai subgraf.

Jika G terhubung, maka G memuat K_2



Jadi $r(2, 2) \leq 2$

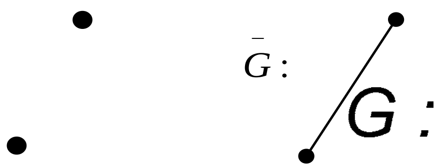
Karena $r(2, 2) \geq 2$ dan Jadi $r(2, 2) \leq 2$, maka $r(2, 2) = 2$

3. $r(2, 3) = 3$

   Bukti

   Misal $r(2, 3) = m$ artinya setiap graf G berorder m, maka G memuat K_3 atau $\overline{G}$ memuat K_2.

   $m \neq 2$, sebab jika $G = \overline{K}_2$, maka $\overline{G} = K_2$

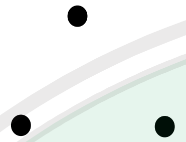


Jadi G tidak memuat K_2 dan $\overline{G}$ tidak memuat K_3

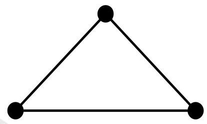
Jadi $r(2, 3) \geq 3$.

Misal G sebarang graf berorder 3.

Jika G graf kosong atau $G = \overline{K}_3$

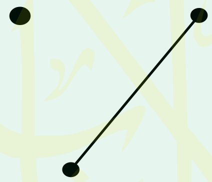


$\overline{G}$:



Maka $\overline{G} = \overline{\overline{K}}_3 = K_3$. Jadi $\overline{G}$ memuat K_3 sebagai subgraf.

Jika G bukan graf kosong, maka minimal ada satu sisi di G, disebut uv.



G :

Jadi G memuat K_2 sebagai subgraf.

Jadi $r(2, 3) \leq 3$,

Karena $r(2, 3) \geq 3$ dan $r(2, 3) \leq 3$, maka $r(2, 3) = 3$

Dari beberapa contoh di atas, diperoleh bahwa:

$r\ (2, 1) = 1$

$r\ (2, 2) = 2$

$r\ (2, 3) = 3$

Terlihat pola bahwa $r(2, n) = r(n, 2) = n$, dan menghasilkan teorema $r(2, n) = n$.

Teorema

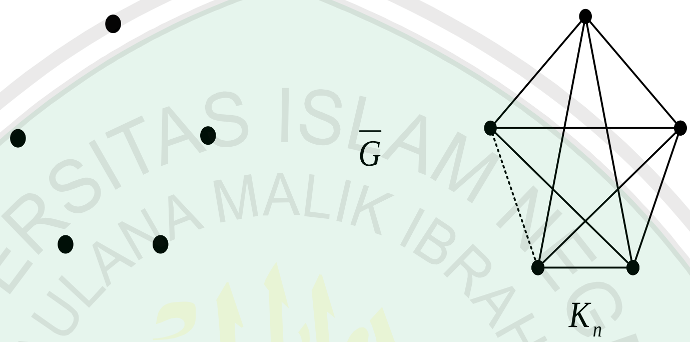
G :

Bilangan Ramsey $r(2, n) = n,\ \forall n \in N$

Bukti:

Misal G sebagai graf berorder n.

Jika G graf kosong, maka $\overline{G} = K_n$. Jadi $\overline{G}$ memuat K_2 sebagai subgraf.



Jika G bukan graf kosong, maka minimal ada satu sisi di G, sebut uv.

Jadi G memuat K_2 sebagai subgraf.

Jadi $r(n, 2) = r(2, n) = n$

3.3 $r(3, n)$, untuk n = 1, 2, 3, dan 4

Untuk menentukan $r(3, n)$ akan dilakukan melalui beberapa langkah berikut:

1. $r(3, 1) = 1$

   G :

   Untuk menentukan $r(3, 1) = 1$ ini, telah diperoleh dari $r(1, 3) = r(3, 1) = 1$

2. $r(3, 2) = 3$

   Untuk menentukan $r(3, 2) = 3$ ini, telah diperoleh dari $r(2, 3) = r(3, 2) = 3$

3. $r(3, 3) = 6$

   Bukti

   Perhatikan graf C_5 dan $\overline{C}_5$

v_5

Karena C_5 dan $\overline{C}_5$ tidak memuat K_3, maka

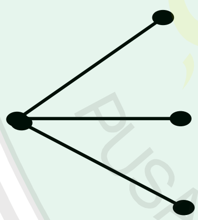
$r(3, 3) \geq 6$.

v_1 v_4

Misal G sebarang graf berorder 6 dan v di titik G, maka v terkait dengan minimal tiga sisi di G atau tiga sisi di $\overline{G}$.

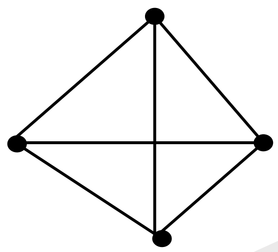
Misalkan vv_1, vv_2, dan vv_3 adalah sisi di G, artinya terhubung dengan v_1, v_2, dan v_3.

v_2 v_3



Jika v_1v_2, v_1v_3, dan v_2v_3 adalah sisi di G, maka G memuat K_3 sebagai subgraf. Sebaliknya jika v_1v_2, v_1v_3, dan v_2v_3 bukan sisi di G, maka

v_1, v_2, v_3 terhubung langsung di $\overline{G}$, Jadi $\overline{G}$ memuat K_3 sebagai subgraf,



Jadi $r(3, 3) \leq 6$

v_1

Karena $r(3, 3) \geq 6$ dan $r(3, 3) \leq 6$, maka $r\ (3, 3) = 6$

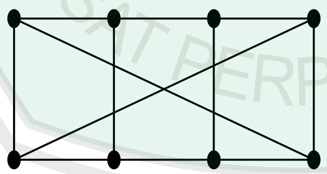
v_2

v

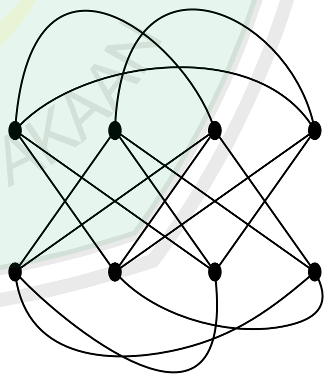
4. $r(3, 4) = 9$

Untuk menentukan $r\ (3, 4) = 9$, perhatikan graf G berikut:

v_3



$\overline{G}$



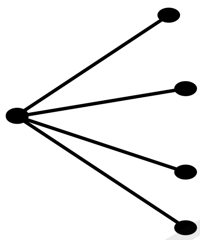
Maka G tidak memuat K_3 dan $\overline{G}$ tidak memuat K_4.

Maka $r(3, 4) \geq 9$.

Misal G sebarang graf berorder 9 dan v titik di G

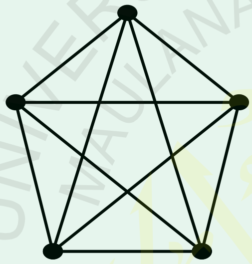
Maka v terkait langsung dengan minimal 4 sisi G atau di 4 sisi di $\overline{G}$.

Sebut vv_1, vv_2, vv_3 *dan* vv_4 sisi di G



Jika v_1, v_2, v_3 *dan* v_4 saling terhubung langsung

v_1



v_2

v

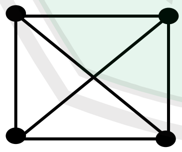
Maka G memuat K_5. jelas G memuat K_3.

v_3

Jika v_1, v_2, v_3 *dan* v_4 tidak terhubung langsung di G. Maka v_1, v_2, v_3 *dan* v_4

v_4

akan terhubung langsung di $\overline{G}$.



Jadi $\overline{G}$ memuat K_4.

v_1

Jadi $r(3, 4) \leq 9$

Karena r(3, 4)$\geq$9 dan $r(3, 4) \leq 9$, maka $r(3, 4) = 9$.

v

v_2

v_4 v_3

3.4 Tinjauan Agama Berdasarkan Hasil Pembahasan

Berdasarkan hasil pembahasan, maka dapat diketahui bahwa:

1. Teorema dari bilangan Ramsey $r(1, n) = r\ (n, 1) = 1$ dengan n bilangan asli yaitu r $(1, n) = 1$.
2. Teorema dari bilangan Ramsey $r(2, n) = r(n, 2) = n$ dengan n bilangan asli yaitu $r(2, n) = n$.
3. Bilangan Ramsey $r(3, n)$ dengan n bilangan asli, maka r(3, 1) = 1, $r(3, 2) = 3$, r(3, 3) = 6, r(3, 4) = 9.

Dari beberapa teorema di atas, jika dihubungkan dengan kajian agama adalah sejajar dengan ayat yang telah menyebutkan bahwa segala sesuatu yang ada di dunia ini ciptaan oleh Allah Swt sesuai dengan kadar dan ukurannya. Seperti dalam firman Allah surat Al-Qamar: 49 dan Al-Furqan: 2.

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ٤٩

"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Q.s Al-Qamar: 49).

ٱلَّذِي لَهُۥ مُلۡكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَلَمۡ يَتَّخِذۡ وَلَدٗا وَلَمۡ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٞ فِي
ٱلۡمُلۡكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيۡءٖ فَقَدَّرَهُۥ تَقۡدِيرٗا ٢

"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Q.s Al-Furqan: 2)

Apabila dikaitkan dengan kajian agama Islam, hal ini dapat dihubungkan dengan Al-Qur’an yang menyebutkan bahwa kebenaran sesuatu tidak cukup hanya dengan bentuk ucapan dan tulisan saja, tetapi perlu dan harus dibuktikan. Hal ini tertera dalam firman Allah surat Al-Baqarah: 111

وَقَالُوا۟ لَن يَدْخُلَ ٱلْجَنَّةَ إِلَّا مَن كَانَ هُودًا أَوْ نَصَٰرَىٰ ۗ تِلْكَ أَمَانِيُّهُمْ ۗ قُلْ هَاتُوا۟
بُرْهَٰنَكُمْ إِن كُنتُمْ صَٰدِقِينَ ﴿١١١﴾

”Dan mereka (Yahudi dan Nasrani) berkata: "Sekali-kali tidak akan masuk surga kecuali orang-orang (yang beragama) Yahudi atau Nasrani". demikian itu (hanya) angan-angan mereka yang kosong belaka. Katakanlah: "Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar." (Qs. Al-Baqarah:111)

Dari surat Al-Baqarah ayat 111 tersebut menjelaskan bahwa para Ahli Kitab, baik Yahudi maupun Nasrani, mereka menganggap bahwa tidak akan masuk surga terkecuali golongan mereka sendiri. Untuk menolak dan membatalkan anggapan mereka itu Allah Swt memberikan penegasan bahwa anggapan mereka itu hanyalah angan-angan yang timbul dari khayalan mereka sendiri saja, yaitu agar terhindar dari siksa serta anggapan bahwa yang bukan golongan mereka akan terjerumus ke dalam siksa dan tidak memperoleh nikmat sedikitpun. Dalam ayat tersebut Allah Swt seakan-akan meminta bukti kebenaran yang menguatkan anggapan mereka bahwa mereka dapat mengemukakan bukti-bukti yang benar maka dugaan mereka benar. Dan meskipun arti dari ayat terdapat tuntunan mengemukakan bukti, namun maknanya menyatakan ketidakbenaran dakwaan mereka karena mereka tidak akan dapat mengemukakan bukti. Dalam ayat ini terdapat isyarat bahwa sesuatu pendapat yang tidak didasarkan pada bukti-bukti yang benar maka tidak akan diterima.

Allah Swt tidak memerlukan bukti dari mereka tentang kebohongan mereka, karena Allah Maha Mengetahui segala sesuatu. Tetapi manusia memerlukan semua itu. Karena itu, Allah memerintahkan Nabi Saw: katakanlah wahai Muhammad kepada mereka, tunjukkanlah kepada kami bukti kebenaran kamu adalah orang yang benar. Bukti yang dimaksud adalah berupa wahyu, karena surga dan neraka adalah wewenang Allah. Hanya Allah yang mengetahui siapa yang berhak memasuki surga dan Nabi pun tidak tahu, maka bukti kebanaran yang dituntut adalah informasi-Nya, yaitu wahyu-wahyu yang disampaikan kepada utusan-utusannya. Seperti dalam firman Allah Swt surat Al-an’am: 143

ثَمَٰنِيَةَ أَزۡوَٰجٖۖ مِّنَ ٱلضَّأۡنِ ٱثۡنَيۡنِ وَمِنَ ٱلۡمَعۡزِ ٱثۡنَيۡنِۗ قُلۡ ءَآلذَّكَرَيۡنِ حَرَّمَ أَمِ
ٱلۡأُنثَيَيۡنِ أَمَّا ٱشۡتَمَلَتۡ عَلَيۡهِ أَرۡحَامُ ٱلۡأُنثَيَيۡنِۖ نَبِّـُٔونِي بِعِلۡمٍ إِن كُنتُمۡ صَٰدِقِينَ ١٤٣

”(Yaitu) delapan binatang yang berpasangan, sepasang domba, sepasang dari kambing. Katakanlah: "Apakah dua yang jantan yang diharamkan Allah ataukah dua yang betina, ataukah yang ada dalam kandungan dua betinanya?" Terangkanlah kepadaku dengan berdasar pengetahuan jika kamu memang orang-orang yang benar” (Q.s Al-anâm: 143).

Segala sesuatu baik perkataan maupun perbuatan baik, yang tertulis maupun yang tidak, jika memang benar adanya maka sudah sepatutnyalah untuk diberikan suatu pembuktian.

Hubungan antara konsep salah satu cabang dari matematika diskrit yaitu teori graf, masalah penentuan bilangan Ramsey dengan kajian agama Islam merupakan hal yang dapat dijadikan sebagai pengetahuan yang yang sangat penting. Setelah banyak mempelajari matematika yang merupakan ilmu perhitungan dan banyak mengetahui mengenai masalah yang ada dalam matematika yang bisa representasikan dalam agama Islam sesuai konsep yang ada di dalam Al-Qur’an, maka akan menambah keyakinan diri kita tentang kebesaran Allah Swt. Hal ini sesuai dengan firman Allah dalam surat Al-Baqarah: 202 dan surat Maryam: 94.

أُولَٰٓئِكَ لَهُمۡ نَصِيبٞ مِّمَّا كَسَبُواْۚ وَٱللَّهُ سَرِيعُ ٱلۡحِسَابِ ﴿٢٠٢﴾

”Mereka Itulah orang-orang yang mendapat bahagian daripada yang mereka usahakan; dan Allah sangat cepat perhitungan-Nya” (Q.s Al-Baqarah: 202).

لَّقَدۡ أَحۡصَىٰهُمۡ وَعَدَّهُمۡ عَدّٗا ﴿٩٤﴾

”Sesungguhnya Allah Telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti” (Q.s Maryam: 94).

Dari ayat di atas, dapat diketahui bahwa Dialah yang mengetahui kadar setiap peristiwa dan rinciannya, baik yang dapat dijangkau oleh manusia maupun tidak. Betapa kuasanya Allah dalam melakukan perhitungan meskipun pada dzat yang terkecil yang tidak dapat dihitung dengan kemampuan manusia. Meskipun menggunakan alat yang canggih, tidak akan ada yag menyaingi Allah Swt. Sehingga hal ini dapat menambah ketaqwaan kita semua kepada Allah Swt yang Maha Cepat dalam perhitungannya. Dengan mengetahui tentang masalah berhitung yang ada dalam al-Qur’an juga dapat menambah keyakinan bahwa meskipun ilmu matematika tergolong dalam ilmu umum, tetapi sebenarnya ilmu matematika telah banyak dibahas dalam Al-Qur’an seperti membahas masalah bilangan, estimasi, statistik dan masih banyak lagi yang tergolong ilmu matematika yang dibahas dalam Al-Qur’an.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Langkah-langkah menentukan bilangan Ramsey $r(m, n)$ dengan m, n bilangan asli yaitu:

a. Menentukan bilangan Ramsey melalui contoh-contoh.
b. Menemukan pola bilangan Ramsey
c. Menyatakan pola tersebut sebagai teorema
d. Membuktikan teorema tersebut

Berdasarkan langkah-langkah tersebut, maka diperoleh:

1. $r(1, n) = 1$ untuk n bilangan asli.
2. $r(2, n) = n$ untuk n bilangan asli.
3. $r(3, 1) = 1$, $r(3, 2) = 3$, $r(3, 3) = 6$, $r(3, 4) = 9$.

B. Saran

Demi pengembangan studi bilangan Ramsey, maka penulis menyarankan untuk terus mengembangkan metode-metode penentuan bilangan Ramsey $r(m, n)$ dengan graf-graf lainnya. Selain itu, penulis juga menyarankan dalam pembahasan selanjutnya untuk menulis tentang aplikasi bilangan Ramsey pada bidang studi lain, misalnya pada bidang studi geometri.

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir jilid 1& 2*. Bogor: Pustaka Imam Syafi'i

Baskoro, Edy T. dan Imron, C. 2005. Bilangan *Ramsey Sisi dari* $\hat{r}(P_3, P_n)$, Departemen Matematika FMIPA ITB

Chartrand, Gary dan Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs*. California: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & software

http://rumus-bb.com/?p=24, diakses 4 maret 2008

Ja'far, M. 2000. *Tuntutan Ibadat Zakat, Puasa dan Haji*. Jakarta: Kalam Mulya

Munir, Rinaldi. 2003. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika

Pasya, A.F. 2004. *Dimensi Sains Al-Qur'an (Menggali ilmu pengetahuan dari Al-Qur'an)*. Solo: Tiga Serangkai

Purwanto.1998. *Matematika Diskrit*. Malang: Institut keguruan dan ilmu pendidikan malang

Surahmat. 2003. *Bilangan Ramsey untuk Graph Roda*, disertasi Program Doktor, Departemen Martematika FMIPA ITB

Wilson, R.J. & Watkin, J.J. 1990. Graph *an Introductory Approach a First Course in Discrate Mathematics*. Canada: John Wiley and Sons, Inc

MENENTUKAN BILANGAN RAMSEY *r*(*m, n*) DENGAN *m, n* BILANGAN ASLI

SKRIPSI

Oleh :

DENY LUTHFIYAH
NIM : 03510052

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

MENENTUKAN BILANGAN RAMSEY *r(m, n)* DENGAN *m, n* BILANGAN ASLI

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S. Si)

Oleh :
DENY LUTHFIYAH
NIM : 03510052

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
2008

MENENTUKAN BILANGAN RAMSEY $r(m, n)$ DENGAN m, n BILANGAN ASLI

SKRIPSI

Oleh :
DENY LUTHFIYAH
NIM: 03510052

Telah Disetujui oleh:

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Abdussakir, M. Pd	**Ahmad Barizi, M. A**
NIP. 150327247	**NIP. 150283991**

Tanggal 28 Maret 2008

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150318321

MENENTUKAN BILANGAN RAMSEY *r*(*m*, *n*) DENGAN *m*, *n* BILANGAN ASLI

SKRIPSI

Oleh :

DENY LUTHFIYAH

NIM: 03510052

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 12 April 2008

SUSUNAN DEWAN PENGUJI		TANDA TANGAN
1. Dr. Yus M. Cholily, M.Si	(Penguji Utama)	1 ____________________
2. Wahyu H. Irawan, M. Pd	(Ketua Penguji)	2 ____________________
3. Abdussakir, M. Pd	(Sekretaris Penguji)	3 ____________________
4. Ahmad Barizi, M. A	(Anggota Penguji)	4 ____________________

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

<u>Sri Harini, M.Si</u>
NIP. 150 318 321

Lembar Persembahan

Karya tulis ini kupersembahkan kepada kedua orang tuaku

Bapak Moh. Khozin dan ibu Robiyati tercinta,

terima kasih atas do'a-do'anya selama ini

dan kasih sayang serta kepercayaannya.

Kepada adik-adikku tersayang

Yesi Mahbubah dan Kefi 'Afiyah.

Pamanku Andi, sahabatku Ali, Riena, Evi dan Anis

yang telah memberi semangat dan menemaniku dalam

suka dan duka.

Teman-teman Matematika angkatan 2003

dan anak-anak kos 78 yang selalu memberi semangat

dan siap memberi bantuan.

MOTTO

يَسِّرُوْا وَلاَ تُعَسِّرُوْ

Artinya: ”Permudahlah dan jangan dipersulit”.(HR. Bukhari dan Muslim)

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Puji syukur ke hadirat Allah Swt penguasa seluruh alam ini atas curahan rahmat dan hidayah serta nikmat-Nya sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi ini dengan judul Menentukan Bilangan Ramsey $r(m, n)$ dengan m, n Bilangan Asli. Shalawat serta Salam penulis panjatkan kepada junjungan Nabi Muhammad Saw yang menjadi tumpuan syafaat bagi kehidupan kelak.

Selesainya skripsi ini tidak lepas dari kontribusi banyak pihak dalam berbagai bentuk baik secara langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Prof DR. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumintro, SU. DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
3. Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
4. Abdussakir, M.Pd selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan kepada penulis hingga selesainya skripsi ini.
5. Ahmad Barizi, M.A selaku Dosen Pembimbing Integrasi Sains dan Islam yang telah memberikan bimbingan kepada penulis hingga selesainya skripsi ini.

6. Bapak/Ibu Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang beserta stafnya atas ilmu dan pengalaman yang diberikan.
7. Bapak dan Ibu tercinta yang tiada lelah memberikan do'a dan kasih sayang serta kepercayaan serta adik-adikku yang telah memberikan motivasi.
8. Teman-teman Matematika angkatan 2003 dan teman-teman kos 78 mbak Dhona, mbak Lilis, Fitri, Lym, Susan, Iik, Lis, Yuli, terutama Arina dan Anis yang telah memberikan motivasi.
9. Semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat. Amin.

Malang, Maret 2008

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Luthfiyah, Deny. 2008. *Menentukan Bilangan Ramsey r(m, n) dengan m, n Bilangan Asli*. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
Pembimbing: Abdussakir, M. Pd
Ahmad Barizi, M. A

Kata Kunci: Bilangan Ramsey, Bilangan Asli

Teori graf merupakan cabang dari matematika diskrit, dimana graf adalah himpunan tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dengan garis yang menghubungkan sepasang titik. Dalam Islam, titik-titik di dalam graf dapat diasumsikan sebagai umat Islam. Sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan titik-titik tersebut adalah representasi dari bagaimana hubungan antar umat Islam atau disebut dengan jalinan ukhuwah Islamiyah.

Diberikan dua graf G dan H, bilangan Ramsey $r(G, H)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian hingga untuk setiap graf F dengan n titik akan memuat G atau komplemen dari F memuat H. Skripsi ini membahas tentang bilangan Ramsey $r(m, n)$ dengan m dan n bilangan asli. Secara umum, metode pembuktian dalam penelitian skripsi ini menggunakan metode standar dalam matematika. Dalam skripsi ini ditunjukkan bahwa $r(1, n) = r(n, 1) = 1$, $r(2, n) = r(n, 2) = n$, dan $r(3, 1)$, $r(3, 2) = 3$ dan $r(3, 3) = 6$. Untuk mengembangkan studi bilangan Ramsey, maka penulis menyarankan kepada pembaca untuk terus mencari bilangan Ramsey untuk graf yang lain.