APLIKASI NILAI EIGEN UNTUK MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

SKRIPSI

Oleh :

NUZULIA
NIM.03510048

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

APLIKASI NILAI EIGEN UNTUK MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :

NUZULIA
NIM.03510048

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

APLIKASI NILAI EIGEN UNTUK MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

SKRIPSI

Oleh :

NUZULIA
NIM.03510048

Telah disetujui untuk diuji

Malang, 16 Februari 2008

Dosen pembimbing I

Wahyu Henky Irawan, M.Pd

NIP. 150 300 415

Dosen Pembimbing II

Ahmad Barizi, M.A

NIP. 150 283 991

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si

NIP. 150 318 321

APLIKASI NILAI EIGEN UNTUK MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

SKRIPSI

OLEH

NUZULIA
NIM. 03510048

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Tanggal

9 April 2008

Susunan Dewan Penguji:		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Sri Harini, M.Si	( )
2. Ketua	: Abdussakir, M.Pd	( )
3. Sekretaris	: Wahyu Henky Irawan, M.Pd	( )
4. Anggota	: Ahmad Barizi, M.A	( )

Mengetahui dan mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

<u>Sri Harini, M. Si</u>
NIP. 150 318 321

MOTTO

.... وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

”................dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya”.

(Qs. Al-Furqân/25: 2)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Teriring Do'a Semoga Skripsi ini Bermanfaat dan menjadi Kesuksesan Dunia dan Akhirat

Karya kecil ini kupersembahkan untuk:

Kedua orang tuaku tercinta: Ibu Nurchayatin dan Bapak Burhani yang selalu mendidik, mencintai, menyayangi dan yang selalu menyebut namaku dalam do'anya………… Semoga Allah selalu memberi kesehatan, kebahagiaan dunia-akhirat dan umur yang barokah..Amiiin

Saudara-saudarku; Neng Mala, Mas Hafi, Fahmi dan Ayos. Dan semua keluarga di rumah Yang turut memberi bantuan, dukungan, do'a dan motivasi......

Semua orang yang pernah hadir dan menemani dalam hidupku, teman, sahabat, kawan dan lawan,, semoga kebersamaan yang telah kita rajut senantiasa membawa berkah dan manfaat

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Nuzulia
NIM	: 03510048
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Aplikasi Nilai Eigen untuk Menentukan Solusi Persamaan Diferensial Parsial.

Menyatakan bahwa skripsi tersebut adalah karya saya sendiri dan bukan karya orang lain, baik sebagian maupun keseluruhan, kecuali dalam bentuk kutipan yang telah disebutkan sumbernya.

Selanjutnya apabila dikemudian hari ada “klaim” dari pihak lain, bukan menjadi tanggung jawab Dosen Pembimbing dan/ atau Pengelola Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Negeri (UIN) Malang, tetapi menjadi tanggung jawab saya sendiri.

Demikian surat pernyataan saya buat dengan sebenar-benarnya dan apabila pernyataan ini tidak benar, saya bersedia mendapat sanksi akademik.

Malang, 16 April 2008

Yang Menyatakan,

Nuzulia

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala Puji Bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufik dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si). Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, utamanya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Drs Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Sri Harini, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
4. Wahyu Henky Irawan, M.Pd selaku Dosen Pembimbing, karena atas bimbingan dan kesabaran beliau penulisan skripsi ini dapat teerselesaikan.
5. Ahmad Barizi, M.A yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberiklan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi dibidang integrasi Sains dan Islam.
6. Segenap dosen pengajar atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
7. Kedua orang tua dan segenap keluarga yang senantiasa memberika do'a dan dukungan yang terbaik bagi penulis.

8. Teman-teman matematika, terutama angkatan 2003 beserta semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Dalam penyusunan skripsi ini tentunya masih terdapat banyak kesalahan dan kekurangan, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan skripsi ini. Akhirnya semoga skripsi ini dapat bermanfaat. Amien.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 16 Februari 2008

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

ABSTRAK

Nuzulia, 2008. *Aplikasi Nilai Eigen untuk Menentukan Solusi Persamaan Diferensial Parsial.* Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.

Pembimbing : Wahyu Henky Irawan, M.Pd.
Ahmad Barizi, M.A

Kata Kunci: Nilai Eigen, Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial banyak muncul sebagai persamaan yang sangat penting dalam matematika terapan, karena terdapat permasalahan mengenai kuantitas bahwa perubahan terus menerus terhadap waktu dan ruang yang biasanya dapat digambarkan secara matematik dengan suatu persamaan diferensia parsial. Dalam fisika matematis, khususnya pada persamaan diferensial parsial terdapat persamaan yang sangat penting yang di dalamnya mengandung unsur nilai eigen dan mempunyai syarat batas tertentu yang disebut masalah nilai eigen. Dalam penerapannya masalah nilai eigen digunakan untuk menentukan nilai eigen yang dapat menentukan solusi persamaan diferensial parsial linier orde dua. Dalam penelitian ini akan diteliti bagaimana menyelesaikan persamaan diferensial parsial linier orde dua, yaitu persamaan parabola dengan menggunakan nilai eigen**.** Masalah penerapan suatu ilmu untuk menyelesaikan suatu perkara dijelaskan Allah alam firmanNya Surat Al- Furqân/25: 2:

.............وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

”...............dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya”. (QS Al-Furqân/25: 2)

Dalam penelitian ini digunakan bentuk umum dan contoh dari persamaan parabola. Menentukan solusi persamaan diferensial parsial dengan mengunakan nilai eigen adalah menggunakan langkah-langkah penyelesaian dan menggunakan bentuk umum nilai eigen dari bentuk umum persamaan parabola. Adapun dengan menggunakan langkah-langkah penyelesaian adalah sebagai berikut; (1) menentukan persamaan diferensial parsial, (2) menentukan syarat-syarat batas, (3) memisahkan variabel atau peubah, (4) menentukan masalah nilai eigen, (5) menentukan nilai eigen, (6) menentukan fungsi eigen dan (7) menentukan solusi persamaan diferensial parsial. Dengan menggunakan langkah-langkah tersebut diperoleh nilai eigen dalam bentuk riil, fungsi eigen dalam bentuk fungsi sinus dan cosinus dan solusi persamaan diferensial parsial berupa deret Fourier dan koefisien Fourier.

Nilai eigen dapat digunakan untuk menentukan solusi persamaan diferensial parsial, dalam penelitian ini pada persamaan parabola (kalor). Pada penelitian selanjutnya dapat diterapkan dalam persamaan diferensial parsial linier orde dua dalam bentuk yang lain, dan dapat juga digunakan program komputer untuk menyelesaikannya.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kata matematika secara bahasa (lughawi) berasal dari bahasa Yunani yaitu *”mathema”* yang artinya hal-hal yang dipelajari. Nasoetion (1980:12) menyatakan bahwa matematika berasal dari bahasa Yunani “*mathein*” atau “*manthenein*” yang artinya mempelajari. Namun secara istilah sampai saat ini belum ada definisi yang tepat mengenai matematika (Abdusysyakir, 2007: 5). Matematika adalah studi tentang kuantitas, struktur, ruang dan perubahan. Matematika dikembangkan melalui penggunaan abstraksi dan penalaran logis mulai dari perhitungan, pengukuran dan studi bentuk serta gerak obyek fisis.

Matematika yang merupakan studi tentang ruang dan perubahan memunculkan suatu definisi yang banyak muncul sebagai persamaan yang sangat penting dalam matematika terapan. Pentingnya itu karena terdapat permasalahan mengenai kuantitas bahwa perubahan terus menerus terhadap waktu dan ruang yang biasanya dapat digambarkan secara matematik dengan suatu persamaan diferensial.

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan pertama (atau lebih) fungsi yang tidak diketahui. Banyak masalah dalam sains dan teknologi dapat dirumuskan dalam persamaan diferensial, baik dalam bentuk persamaan diferensial biasa maupun parsial, baik linier maupun non linier dan berupa orde satu, orde dua ataupun orde ke-*n*. Persamaan diferensial juga seringkali muncul dalam model matematik yang mencoba menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Banyak hukum-hukum alam dan hipotesis-hipotesis dapat diterjemahkan ke dalam persamaan yang mengandung turunan melalui bahasa matematik. Misalkan tentang turunan dalam fisika yang muncul sebagai kecepatan dan percepatan, yaitu berasal dari fungsi jarak yang diturunkan menjadi persamaan kecepatan yang bergantung pada waktu dan apabila persamaan kecepatan diturunkan maka akan mengalami laju perubahan kecepatan terhadap waktu, yang dinamakan percepatan. Proses dari jarak menjadi percepatan ini menunjukkan adanya proses atau tingkat-tingkat dalam kehidupan, sebagaimana Firman Allah Surat Al-Insyiqâq/84 ayat 19:

لَتَرْكَبُنَّ طَبَقًا عَن طَبَقٍ ﴿١٩﴾

*"Sesungguhnya kamu melalui tingkat demi tingkat dalam kehidupan".(*Qs. Al-Insyiqâq/ 84: 19)

Seperti yang disampaikan di atas bahwa kebanyakan permasalahan dalam ilmu pengetahuan dan teknologi dapat direpresentasikan dalam bentuk persamaan diferensial baik persamaan diferensial biasa maupun parsial, maka dalam penelitian ini akan dibahas tentang persamaan diferensial parsial. Persamaan tersebut merupakan laju perubahan terhadap dua atau lebih variabel bebas, yang dikatakan dengan waktu dan jarak (ruang) (Triatmojo, 2002:198). Berbagai soal dalam ilmu pengetahuan dan bidang perekayasaan, bila dirumuskan secara matematis, akan sampai ke persamaan-persamaan diferensial yang melibatkan satu atau lebih fungsi yang tak diketahui bersama-sama dengan kondisi tertentu yang sudah ditentukan mengenai fungsi yang muncul dari situasi fisis kondisi tersebut dinamakan syarat batas (*Boundary Conditions*) dan masalah untuk mencari pemecahan persamaan yang memenuhi syarat batas tersebut dinamakan masalah nilai batas (*Boundary Value Problem*) (Spiegel, 1999:219).

Dari segi penerapan, khususnya pada masalah fisika matematis, ada kelompok masalah nilai batas dalam persamaan diferensial parsial yang sangat penting, karena di dalamnya terdapat suatu persamaan diferensial yang mengandung nilai riil beserta syarat-syarat batasnya, yang disebut dengan masalah nilai eigen. Masalah nilai eigen sering muncul dalam fisika matematis dalam proses penyelesaian dengan metode pemisahan peubah dari masalah nilai awal yang meliputi salah satu dari persamaan diferensial parsial linier orde dua yaitu persamaan parabola, persamaan elips dan persamaan hiperbola. Dari masalah nilai eigen akan diperoleh nilai eigen dan fungsi eigen yang akan mempermudah menentukan solusi persamaan diferensial parsial.

Pernyataan-pernyataan di atas menunjukkan tentang matematika terapan, yaitu penerapan bagian dari matematika untuk menyelesaikan bagian yang lainnya. Sebagaimana juga dijelaskan oleh Allah dalam firmanNya surat Al-Furqân/25 ayat 2, yaitu:

..............وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

"................dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengaen serapi-rapinya". (QS Al-Furqân : 2)

Segala sesuatu yang diciptakan Allah diberi-Nya perlengkapan-perlengkapan dan persiapan-persiapan, sesuai dengan naluri, sifat-sifat dan fungsinya masing-masing dalam hidup, karena setiap ciptaan Allah itu selalu ada tujuan dan manfaatnya secara esensial. Demikian juga dalam ilmu matematika, dalam penelitian ini pada materi nilai eigen yang diaplikasikan untuk menentukan solusi persamaan diferensial parsial.

Mencari suatu manfaat dari ilmu tertentu merupakan bagian dari mencari ilmu. Islam mendorong manusia untuk mencari ilmu dan kemajuan dalam penemuan-penemuan, dan menjanjikan ganjaran yang besar, dan upaya-upaya ini dianggap bagian dari pengabdian kepada Allah. Ayat-ayat yang terfokus pada isu-isu ilmiah atau yang menunjukkan masalah-masalah ilmiah merupakan contoh praktis dari dorongan ini, melalui motivasi ke arah renungan dan penyelidikan guna memahami arti dari ayat-ayat tersebut. Oleh karena itu pernyataan ini memberikan dasar bagi penelitian dan kemajuan ilmiah (Baidawi dan Ahmad, 1997:72). Dengan latar belakang tersebut maka penulis terdorong untuk mengembangkan ilmu matematika dengan melakukan penelitian dalam bentuk skripsi dengan judul ***"Aplikasi Nilai Eigen untuk Menentukan Solusi Persamaan Diferensial Parsial"***.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis merumuskan bagaimana aplikasi nilai eigen untuk menentukan solusi persamaan diferensial parsial?.

1.3 Batasan Masalah

Dalam pembahasan ini penulis membatasi ruang lingkup permasalahan penelitian ini adalah persamaan diferensial parsial linier orde dua dengan bentuk persamaan parabola atau dalam fisika matematika biasa dikenal dengan persamaan kalor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \nabla^2 u \tag{1.1}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{1.3}$$

Persamaan (1.2) disebut operator Laplace dan persamaan (1.3) disebut dengan persamaan kalor dimensi dua. Dengan $u(x, y, t)$ adalah temperatur dalam suatu benda padat pada posisi (x, y) pada saat *t*. Konstanta β dinamakan *difusivitas (difusivity)*, dan dengan menggunakan syarat batas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad 0 < x < L, \qquad 0 < y < W, \qquad t > 0$$

x = Panjang plat pada sumbu *x*

y = Lebar plat pada sumbu *y*

$$\frac{du}{dx}(0, y, t) = 0, \qquad \frac{du}{dx}(L, y, t) = 0, \qquad 0 < y < W, \qquad t > 0$$

$u(0, y, t) = 0$ adalah temperatur benda pada posisi $(0, y)$ pada koordinat (x, y)

$$u(x,0,t) = 0, \quad u(x,W,t) = 0, \quad 0 < x < L, \qquad t > 0$$

$u(x,0,t) = 0$ adalah temperatur benda pada posisi $(x,0)$ pada koordinat (x, y)

$$u(x, y,0) = f(x, y), \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < y < W$$

$u(x, y,0) = f(x, y)$ adalah temperatur benda pada posisi (x, y) pada saat *t=0* punya sebuah fungsi $f(x, y)$ atau fungsi dengan dua variabel *x* dan *y*.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui aplikasi nilai eigen dalam menentukan solusi persamaan diferensial parsial.

1.5 Manfaat Penelitian

Bagi peneliti tulisan ini bermanfaat untuk menambah informasi dan wawasan tentang langkah-langkah untuk mengetahui solusi persamaan diferensial parsial melalui nilai eigen. Bagi pemerhati matematika penelitian ini bermanfaat untuk tambahan pengetahuan tentang matematika dalam hal persamaan diferensial parsial.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian perpustakaan (*library reseach*), yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat di ruangan perpustakaan, seperti buku-buku, majalah, dokumen, catatan, kisah-kisah sejarah dan lain-lainnya (Mardalis, 1989:28). Adapun buku-buku yang di gunakan sebagai reverensi adalah buku-buku matematika seperti Fundamental of Diferential Equation, Persamaan Diferensial, Boundary Value Problem and Partial Diferential Equation dan referensi lain yang relevan dengan pembahasan.

Adapun langkah-langkah penulisan yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah. Sebelum penulis memulai kegiatan, penulis membuat rancangan mengenai suatu permasalahan yang akan dibahas.

2. Mengumpulkan data. Dengan menggunakan metode kepustakaan, penulis mengumpulkan bahan atau sumber dan informasi dengan cara membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan persamaan diferensial parsial dan nilai eigen.
3. Menyelesaikan bentuk umum. Disini, penulis menyelesaikan bentuk umum dengan cara mengaitkan materi yang dikaji.
4. Menyelesaikan contoh. Disini, penulis menyelesaikan contoh dengan cara mengaitkan materi yang dikaji.
5. Membuat kesimpulan. Kesimpulan merupakan gambaran langkah-langkah dari pembahasan yang telah ditulis. Kesimpulan didasarkan pada data yang telah dikumpulkan dan merupakan jawaban dari permasalahan yang dikemukakan.
6. Membuat laporan.

1.7 Sistematika Penulisan

Skripsi ini menggunakan sistematika penulisan dan pembahasan sebagai berikut:

BAB I : PENDAHULUAN

Pada bab ini terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II: TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini difokuskan pada masalah, yaitu berisi tentang diferensial, persamaan diferensial, persamaan diferensial parsial, persamaan diferensial linier homogen, masalah nilai batas, nilai eigen dan fungsi eigen, deret Fouirier.

BAB III : PEMBAHASAN

Pada bab ini berisi tentang penerapan nilai eigen dengan langkah-langkah umum penentuan solusi persamaan diferensial parsial linier orde dua bentuk parabolik. Dan dengan menggunakan nilai eigen dengan menggunakan satu contoh.

BAB IV : PENUTUP

Pada bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Pengertian Diferensial dan Persamaan Diferensial

Definisi 2.1

Turunan fungsi *f* adalah fungsi *f'* (dibaca"*f* aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan *c* adalah:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}, \tag{2.1}$$

Jika limit *f'*(*c*) ini ada, maka fungsi *f* mempunyai turunan (differentiable) di *c* (Purcell, 1987:115). Turunan *y*=*f*(*x*) terhadap *x* dapat dinyatakan oleh salah satu simbol di bawah ini:

$$\frac{d}{dx}y,\ \frac{dy}{dx},\ \ y',\ f'(x) \text{ atau } \frac{d}{dx}f(x) \tag{2.2}$$

Contoh:

Tentukan turunan pertama dari fungsi $s(t) = 2t^2 - 12t + 8$

Penyelesaian:

$$s(t) = 2t^2 - 12t + 8$$

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{[2(t+h)^2 - 12(t+h) + 8] - [2t^2 - 12t + 8]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2t^2 + 4th + 2h^2 - 12t - 12h + 8 - 2t^2 + 12t - 8}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4th + 2h^2 - 12h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4t + 2h - 12$$

$$= 4t - 12$$

Dalam Purcell (1987:176) diferensial yang bersesuaian dengan *dy* dari variabel takbebas *y* didefinisikan oleh :

$$dy = f'(x)dx \tag{2.3}$$

Pada contoh definisi 1 di atas $s = 2t^2 - 12t + 8$ diturunkan menjadi $s'(t) = \frac{ds}{dt} = 4t - 12$ atau disebut persamaan kecepatan, jika diturunkan lagi menjadi $a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = 4$ atau persamaan percepatan. Ini berarti bahwa kecepatan bertambah dengan suatu tingkat yang tetap sebesar 4 cm/detik, yang kita tuliskan sebagai 4 cm/detik/detik. Pertambahan itu melalui satu tingkat demi satu tingkat mulai dari jarak ➔ kecepatan ➔ percepatan.

Sebagaimana tingkatan dari jarak menjadi kecepatan dan percepatan, manusia juga melalui tingkat demi tingkat dalam kehidupan, sebagaimana yang dijelaskan dalam Firman Allah Swt:

لَتَرۡكَبُنَّ طَبَقًا عَن طَبَقٍ ﴿١٩﴾

"*Sesungguhnya kamu melalui tingkat demi tingkat dalam kehidupan*".(Qs Al-Insyiqâq/84:19)

Manusia hidup di dunia melalui tingkat demi tingkat dimulai dari setetes air mani menjadi segumpal darah sampai dilahirkan, kemudian melalui masa kanak-kanak, remaja sampai dewasa dan berakhir dengan mati. Dari hidup menjadi mati kemudian dibangkitkan kembali, adanya tingkatan-tingkatan kehidupan manusia tidak terlepas dari waktu. Sebagaimana juga dijelaskan dalam Al-Qur’an surat Al-Mu’minûn/23:12-15 tentang asal mula kejadian manusia:

وَلَقَدْ خَلَقْنَا ٱلْإِنسَـٰنَ مِن سُلَـٰلَةٍ مِّن طِينٍ ﴿١٢﴾ ثُمَّ جَعَلْنَـٰهُ نُطْفَةً فِى قَرَارٍ مَّكِينٍ ﴿١٣﴾ ثُمَّ خَلَقْنَا
ٱلنُّطْفَةَ عَلَقَةً فَخَلَقْنَا ٱلْعَلَقَةَ مُضْغَةً فَخَلَقْنَا ٱلْمُضْغَةَ عِظَـٰمًا فَكَسَوْنَا ٱلْعِظَـٰمَ لَحْمًا ثُمَّ أَنشَأْنَـٰهُ
خَلْقًا ءَاخَرَ ۚ فَتَبَارَكَ ٱللَّهُ أَحْسَنُ ٱلْخَـٰلِقِينَ ﴿١٤﴾ ثُمَّ إِنَّكُم بَعْدَ ذَٰلِكَ لَمَيِّتُونَ ﴿١٥﴾

”Dan Sesungguhnya kami Telah menciptakan manusia dari suatu saripati (berasal) dari tanah. Kemudian kami jadikan saripati itu air mani (yang disimpan) dalam tempat yang kokoh (rahim). Kemudian air mani itu kami jadikan segumpal darah, lalu segumpal darah itu kami jadikan segumpal daging, dan segumpal daging itu kami jadikan tulang belulang, lalu tulang belulang itu kami bungkus dengan daging. Kemudian kami jadikan dia makhluk yang (berbentuk) lain. Maka Maha sucilah Allah, Pencipta yang paling baik. Kemudian, sesudah itu, Sesungguhnya kamu sekalian benar-benar akan mati.” (Qs.Al-Mu’minûn/23:12-15)

Proses perubahannya yang bergantung pada waktu, dapat digambarkan dengan bagan sebagai berikut:

$$
\begin{array}{c}
f(x)\\ \downarrow\\ f'(x)\\ \downarrow\\ f''(x)\\ \vdots\\ f^{n}(x)
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{array}{c}
Jarak\\ \downarrow\\ Kecepatan\\ \\ \downarrow\\ Percepatan
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
atau\\ ditulis \rightarrow
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
s(t)\\ \downarrow\\ s'(t)=\dfrac{ds}{dt}\\ \downarrow\\ s''(t)=\dfrac{d^2s}{dt^2}
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{array}{c}
Embrio\\ \downarrow\\ Janin(9bulan)\\ \downarrow\\ Bayi(lahir-4th)\\ \downarrow\\ Anak(4th-12th)\\ \downarrow\\ \text{Re}maja(12th-18th)\\ \downarrow\\ Dewasa(18th-50th)\\ \downarrow\\ Lansia(50th-....)\\ \downarrow\\ Mati \rightarrow \quad tingkat \quad ke-n
\end{array}
$$

Definisi 2.2

Persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi (variabel tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial (Pamuntjak, 1990:1-11).

Contoh : $\frac{dx}{dy} = 2x^2 + 4y$

Definisi 2.3

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang menyangkut satu atau lebih fungsi (variabel tak bebas) beserta turunannya terhadap satu variabel bebas (Pamuntjak, 1990:1.12).

Contoh: $y'(t) = -ky(t)$

Makna substansi dari persamaan diferensial adalah adanya laju perubahan dari variabel tak bebas terhadap variabel bebasnya, yang berarti bahwa adanya perubahan tersebut bergantung pada variabel bebasnya. Hal ini dapat dianalogkan pada firman Allah dalam Al-Qur'an:

......إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡۗ ......﴿١١﴾

.......*Sesungguhnya Allah tidak merobah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merobah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri*...... (Qs. Ar-Ra'd/13:11)

Keterkaitan ayat tersebut dengan makna persamaan diferensial adalah adanya perubahan pada diri manusia yang bergantung pada usaha manusia tersebut untuk merubahnya, sehingga diperoleh laju perubahan ke arah lebih baik (positif) atau lebih buruk (negatif).

$$\frac{\textit{perubahan keadaan}}{\textit{usaha manusia}} = \textit{laju perubahan} \Rightarrow \begin{cases} \textit{positif} \\ \textit{negatif} \end{cases}$$

Definisi 2.4

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang menyangkut satu atau lebih fungsi (variabel tak bebas) beserta turunannya terhadap lebih dari satu variabel bebas (Pamuntjak, 1990:1.12).

Contoh : $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4y^2 + 2xy - x$

Definisi 2.5

Orde (tingkat) suatu persamaan diferensial adalah orde (tingkat) dari turunan yang terdapat pada persamaan itu, yang tingkatnya paling tinggi (Pamuntjak, 1990:1.13).

Contoh:

1. $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 4 = 0$, merupakan persamaan diferensial orde dua.

2. $\frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{d^3 y}{dx^3} - 9\frac{dy}{dx}4 = 0$, merupakan persamaan diferensial orde tiga.

Definisi 2.6

Persamaan diferensial orde satu yang termudah dicari solusinya ialah persamaan diferensial orde satu yang dapat diubah menjadi bentuk

$$g(y)y' = f(x) \tag{2.4}$$

yang disebut persamaan diferensial variabel terpisah.

Dan untuk mencari solusi persamaan (2.4) diubah dalam bentuk

$g(y)y'dx = f(x)dx$, atau

$$g(y)dy = f(x)dx \tag{2.5}$$

(Pamuntjak, 1990:2.1).

2.2 Persamaan Diferensial Parsial

Ketika ada sebuah fungsi *w(x,y)* yang bergantung pada dua variabel bebas *x* dan *y*, dan jika diturunkan terhadap *x* maka *y* bernilai konstan dan jika diturunkan terhadap *y* maka *x* bernilai konstan. Adapun notasi pelambangannya secara berturut-turut adalah

$$\frac{\partial w}{\partial x} \text{ dan } \frac{\partial w}{\partial y},$$

Dengan simbol ∂ yang menunjukkan turunan parsialnya. Notasi itu dapat dipakai untuk pengerjaan turunan orde dua. Turunan terhadap *x* dari $\frac{\partial w}{\partial x}$ di lambangkan dengan $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ dan turunan terhadap *y* dari $\frac{\partial w}{\partial x}$ adalah $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ dan seterusnya. Turunan parsial *x* dapat dituliskan berupa w_x (Levine, 1997:4).

Definisi 2.7

Persamaan diferensial parsial dapat dikatakan sebagai persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan-turunan parsial. Persamaan tersebut merupakan laju perubahan terhadap dua atau lebih variable bebas, yang dikatakan dengan waktu dan jarak (ruang) (Triatmojo, 2002:199).

Contoh: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$

Definisi 2.8

Penyelesaian (solusi) persamaan diferensial parsial adalah sebuah fungsi yang memenuhi persamaan tersebut dalam bentuk suatu kesamaan.

Penyelesaian umum adalah sebuah penyelesaian yang memuat sejumlah berhingga fungsi bebas sembarang yang banyaknya sama dengan orde persamaan tersebut.

Penyelesaian khusus adalah suatu penyelesaian yang diperoleh dari penyelesaian umum dengan cara mengambil fungsi sembarangnya secara khusus (Spiegel, 1983:276).

Contoh :

Pada contoh persamaan diferensial $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$ mempunyai penyelesaian $u = x^2 y - \frac{1}{2} xy^2 + F(x) + G(y)$ disebut penyelesaian umum, karena mempunyai dua fungsi sembarang $F(x)$ dan $G(x)$. Jika dimisalkan $F(x) = 2\sin x$ dan $G(x) = 3y^4 - 5$, maka akan diperoleh penyelesaian khusus $u = x^2 y - \frac{1}{2} xy^2 + 2\sin x + 3y^4 - 5$.

Definisi 2.9

Tingkat persamaan diferensial parsial adalah tingkat turunan tertinggi pada persamaan itu.

Misal z sebagai variabel terikat dan x, y sebagai variabel bebas, maka $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$ disebut persamaan difrensial parsial linier orde satu.

Definisi 2.10

Persamaan diferensial linier yang umum orde dua dalam dua variabel bebas berbentuk:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G \qquad (2.3.1)$$

dengan A, B, C, D, E, F dan G bergantung pada x dan y tetapi tidak dari u. Persamaan diferensial parsial seringkali dikelompokkan sebagai *eliptik*, *hiperbolik* atau *parabolik* berturut-turut sesuai dengan apakah $B^2-4AC>0$, $B^2-4AC<0$ dan $B^2-4AC=0$ (Spiegel, 1983:276).

Persamaan tersebut dapat dikaitkan dengan masalah fisika modern. Beberapa persamaan tersebut adalah:

2.2.1 Persamaan Ellips

Yang termasuk dalam persamaan ellips adalah persamaan Poisson :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+g=0 \qquad (2.6)$$

dan persamaan Laplace :

$$\nabla^2 u=0 \qquad (2.7)$$

dimana $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ atau $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ merupakan operasi Laplace (*laplacian operator*) dua atau tiga dimensi (Levine, 1922:44-45)

Persamaan Ellips biasanya berhubungan dengan masalah keseimbangan atau kondisi permanen (tidak tergantung waktu), dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas di sekeliling daerah tinjauan. Contoh dari persamaan ellips adalah aliran air tanah di bawah bendungan dan karena adanya pemompaan, defleksi plat karena adanya pembebanan, dan sebagainya.

2.2.2 Persamaan Parabola

Persamaan parabola biasanya berupa persamaan yang tergantung pada waktu (tidak permanen). Yang termasuk persamaan parabola adalah persamaan perambatan panas, persamaan difusi dan persamaan telegraf, yang berbentuk :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \nabla^2 u \tag{2.8}$$

dimana $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ atau $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Pada persamaan perambatan panas *u(x,y,z,t)* adalah temperatur dalam suatu benda padat pada posisi *(x,y,z)* pada saat *t* dan konstanta β dinamakan *difusivitas (difusivity)* (Spiegel, 1983:277)

2.2.3 Persamaan Hiperbola

Persamaan hiperbola biasanya berhubungan dengan getaran, atau permasalahan dimana terjadi *discontinue* dalam waktu.

Persamaan gelombang merupakan salah satu bentuk persamaan hiperbola yang paling sederhana yang mempunyai bentuk :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (2.9)$$

Dengan *y* adalah perpindahan vertikal pada jarak *x* dari ujung tali yang bergetar yang mempunyai panjang *L* sesudah waktu *t*. Oleh karena nilai *y* pada ujung-ujung tali biasanya diketahui untuk semua waktu (kondisi batas) dan bentuk serta kecepatan tali diketahui pada waktu nol (kondisi awal), maka penyelesaian persamaan adalah serupa dengan penyelesaian persamaan parabola, yaitu menghitung *y* pada *x* dan *t* tertentu (Triatmodjo, 2002: 201-202).

2.3 Persamaan Diferensial Linier Homogen

Persamaan diferensial linier homogen dengan koefisien konstanta, berbentuk

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + a_{n-2} y^{(n-2)}(x) + ... + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \qquad (2.10)$$

dimana tiap-tiap koefisien a_i merupakan konstanta riil dan koefisien pertama $a_n \neq 0$.

Untuk menentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial linier homogen kita perlu mencari *n* buah penyelesaian yang bebas linier.

Jika kita periksa persamaan (2.10) secara seksama (misalkan jika *n* = 1) yaitu $a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$, kita lihat bahwa dalam banyak hal, setiap penyelesaian persamaan diferensial ini hanya menghasilkan perkalian antara konstanta dengan penyelesaian itu sendiri. misalkan e^{px}, dengan suatu konstanta sebagai suatu penyelesaian persamaan (2.10). jika $y = e^{px}$, maka $y' = pe^{px}$, $y'' = p^2 e^{px}$ dan $y^{(n)} = p^n e^{px}$.

Substitusi $y = e^{px}$ ke dalam persamaan (2.10), menghasilkan

$$a_n p^{(n)} e^{px} + a_{n-1} p^{(n-1)} e^{px} + \ldots + a_1 p e^{px} + a_0 e^{px} = 0$$

Atau

$$e^{px}(a_n p^{(n)} + a_{n-1} p^{(n-1)} + \ldots + a_1 p + a_0) = 0 \qquad (2.11)$$

Fungsi eksponen tidak pernah bernilai nol. Karena itu agar $y = e^{px}$ dapat menjadi penyelesaian persamaan diferensial tersebut adalah jika *p* merupakan akar persamaan polinom

$$a_n p^{(n)} + a_{n-1} p^{(n-1)} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0 \qquad (2.12)$$

Jadi, jika *p* suatu akar persamaan (2.12), maka $y = e^{px}$ merupakan penyelesaian persamaan diferensial (2.10). (Finizio dan Ladas, 1988:78)

Definisi 2.11

Polinom $f(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$ disebut polinom karakteristik untuk persamaan (2.10). Akar-akar persamaan karakteristik itu disebut akar-akar karakteristik.

Menentukan akar-akar karakteristik diperlukan untuk membentuk penyelesaian umum persamaan diferensial linier homogen dengan koefisien konstanta. Polinom karakteristik pada definisi 2,12 adalah berderajat *n* dan setiap polinom berderajat *n* atau $(n \geq 1)$ mempunyai paling sedikit satu akar, karena itu banyaknya akar-akar yang sama memberikan tepat n akar-akar. (Finizio dan Ladas, 1988:79)

Perhatikan persamaan diferensial dengan koefisien riil

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad a_2 \neq 0 \tag{2.13}$$

andaikan bahwa p_1 dan p_2 adalah akar-akar persamaan karakteristik $a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$. Maka bentuk penyelesaian umum $y(x)$ dari persamaan (2.13) digambarkan oleh beberapa kasus berikut:

Kasus 1

Akar-akar riil dan berlainan $p_1 \neq p_2$

$$y(x) = c_1 e^{p_i x} + c_2 e^{p_i x},$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta sembarang.

Kasus 2

Akar-akar riil dan sama $p_1 = p_2 = p$

$$y(x) = c_1 e^{px} + c_2 x e^{px}$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta sembarang

Kasus 3

Akar-akar kompleks sekawan $p_{1,2} = a \pm ib$

$$y(x) = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta sembarang (Finizio dan Ladas, 1988:85-86).

2.4 Masalah Nilai Batas

Masalah nilai batas (MNB) melibatkan suatu persamaan diferensial parsial dan semua penyelesaiannya yang memenuhi syarat yang dinamakan syarat batas (Spiegel, 1983: 276)

Misal persamaan diferensial linier orde-dua

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y = f(x) \qquad (2.14)$$

Dimana koefisien-koefisien $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ dan fungsi *f(x)* merupakan fungsi-fungsi yang kontinu di dalam selang $a \le x \le b$ dengan $a_2(x) \ne 0$ di dalam selang ini. Menentukan penyelesaian *y(x)* dari persamaan diferensial (2.14) pada sebuah titik $x = x_0$ di dalam selang $a \le x \le b$ dan memenuhi dua syarat awal yang diberikan

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{dan} \quad y'(x_0) = y_1 \qquad (2.15)$$

merupakan suatu *masalah nilai awal* (MNA). Dalam banyak MNA variabel bebas *x* dari persamaan diferensial pada umumnya menyatakan waktu, x_0 menyatakan waktu awal dan y_0 dan y_1 menyatakan syarat awal. Bila variabel *x* bebas merupakan variabel yang menyatakan tempat (space variabel), maka mencari suatu penyelesaian *y(x)* dari persamaan diferensial yang memenuhi syarat pada titik akhir dari selang $a \le x \le b$

$$y(a)=A \quad \text{dan} \quad y(b)=B \qquad (2.16)$$

dengan A dan B dua buah konstanta, di sebut *syarat batas*. Persamaan diferensial (2.14), bersama-sama dengan syarat batas (2.16), merupakan suatu *masalah nilai* *batas* (MNB). Bentuk dari syarat batas pada titik akhir dapat sangat berbeda-beda (Finizio dan Ladas, 1982:244).

Ada beberapa bentuk khusus syarat batas yang digunakan dalam aplikasi, yaitu:

Separated : $a_1 y(a) + a_2 y'(a) = c_1$,

$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = c_2$.

Dirichlet : $y(a) = c_1$, $y(b) = c_2$.

Neumann : $y'(a) = c_1$, $y'(b) = c_2$.

Periodic : $y(-T) = y(T)$, $y'(-T) = y'(T)$

$y(0) = y(2T)$, $y'(0) = y'(2T)$

dimana periodenya adalah *2T*

Bentuk Dirichlet dan Neumann adalah syarat batas yang khusus digunakan pada masalah nilai batas (Nagle, 612)

2.5 Nilai Eigen dan Fungsi Eigen

Dalam bahasa Jerman "eigen" dapat diartikan dengan sebenarnya atau karakteristik. Oleh karena itu nilai eigen dapat juga dinamakan nilai sebenarnya atau nilai karakteristik (Anton, 1997:277). Semua nilai eigen λ adalah real. (Folland, 1992 dalam Sutrima)

Definisi 2.12

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam R^n dinamakan vektor Eigen dari A jika A*x* adalah kelipatan skalar dari *x*, yaitu $Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ (Anton, 1987:277).

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$, maka $Ax = \lambda x$ dituliskan sebagai $Ax = \lambda \mathrm{I} x$ atau $(\lambda \mathrm{I} - A)x = 0$. Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan $(\lambda \mathrm{I} - A)x = 0$. Akan tetapi karena $\det(A) \neq 0$, maka persamaan $(\lambda \mathrm{I} - A)x = 0$ akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda \mathrm{I} - A) = 0$$

yang dinamakan dengan persamaan karakteristik A. Skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A.

Bila diperluas, maka $\det(\lambda \mathrm{I} - A) = 0$ adalah polinom λ yang dinamakan polinom karakteristik dari A.

$$\det(\lambda \mathrm{I} - A) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \ldots + c_n \qquad \text{(Anton, 1987:278)}$$

Jika A adalah matriks $n \times n$ maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen satu sama lain:

1. λ adalah nilai eigen dari A
2. Sistem persamaan $(\lambda \mathrm{I} - A)x = 0$ mempunyai pemecahan tak trivial
3. Ada vektor tak nol x di dalam R^n sehingga $Ax = \lambda x$
4. λ adalah pemecahan riil dari persamaan karakteristik $\det(\lambda \mathrm{I} - A) = 0$

(Anton, 1987:280).

Contoh :

Carilah nilai-nilai eigen dari matriks $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Pemecahan: Karena $\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$

Maka, polinom karakteristik dari A adalah

$$\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Persamaan karakteristik dari A adalah

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Maka pemecahan-pemecahan persamaan ini adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$, yang merupakan nilai-nilai eigen dari A. (Anton, 1987: 279).

Dari segi penerapan, khususnya masalah-masalah dalam fisika matematis, ada kelompok masalah nilai batas yang sangat penting, karena terdapat persamaan diferensial linier homogen yang berbentuk:

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda)y = 0 \qquad (2.17)$$

dimana *p(x)>0* dan *q(x)* kontinu di dalam suatu selang $a \le x \le b$, λ adalah sebuah paremeter yang riil, dan kedua syarat batas di titik-titik ujung *a* dan *b* berbentuk

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{aligned} \qquad (2.18)$$

masalah nilai batas (2.17) dan (2.18) selalu dipenuhi penyelesaian trivial *y(x)=0*. tetapi persoalan yang penting dalam masalah nilai batas ini adalah menentukan nilai λ agar masalah nilai batas (2.17) dan (2.18) mempunyai penyelesaian tak trivial. Nilai-nilai λ ini disebut *nilai eigen* dari masalah nilai batas (2.17) dan (2.18). Penyelesaian tak trivial pautannya disebut *fungsi eigen* masalah nilai batas

(2.17) dan (2.18), juga disebut *masalah nilai eigen* (Finizio dan Ladas, 1988: 251).

Contoh :

Tentukan nilai eigen dari masalah nilai eigen (MND)

$y'' + (-9+\lambda)y = 0$ untuk $0 \le x \le 1$

$y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$

Penyelesaian :

Akar-akar karakteristik dari persamaan diatas adalah $\pm\sqrt{9-\lambda}$. Jadi penyelesaian persamaan diferensial di atas adalah tergantung apakah $9-\lambda > 0$, $9-\lambda = 0$ dan $9-\lambda < 0$.

Untuk $9-\lambda > 0$, misalkan $9-\lambda = k^2$, dimana $k > 0$. Jadi persamaannya menjadi $y'' + k^2 y = 0$, mempunyai penyelesaian umum berbentuk

$$y(x) = c_1 e^{-kx} + c_2 e^{kx}$$

Dengan menggunakan syarat batas, maka :

$$y'(x) = -c_1 k e^{-kx} + c_2 k e^{kx}$$

$$y'(0) = -c_1 k + c_2 k = 0 \Rightarrow -c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$$

$$y'(1) = -c_1 k e^{-k} + c_2 k e^{k} = 0$$

$$-c_1 k e^{-k} + c_1 k e^{k} = 0, \Rightarrow c_1 = 0$$

Jadi $c_1 = c_2 = 0$, dengan demikian untuk $9-\lambda > 0$ tidak ada nilai eigen.

Untuk $9-\lambda = 0$, maka persamaan diferensialnya menjadi $y'' = 0$, mempunyai penyelesaian umum berbentuk

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

Dengan menggunakan syarat batas, maka :

$$y'(x) = c_2$$

$$y'(0) = c_2 = 0$$

$$y'(1) = c_2 = 0$$

Jadi, untuk $9 - \lambda = 0$ mempunyai penyelesaian taktrivial $y(x) = c_1$ atau kelipatan konstanta $y(x) = 1$. Nilai $\lambda = 9$ karena itu sebuah nilai diri dari MND dengan fungsi $y(x) = 1$ sebagai pautannya.

Untuk $9 - \lambda < 0$, misalkan $9 - \lambda = -k^2$, dimana $k > 0$. Jadi persamaannya menjadi $y'' - k^2 y = 0$, mempunyai penyelesaian umum berbentuk

$$y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

Dengan menggunakan syarat batas, maka :

$$y'(x) = -c_1 k \sin kx + c_2 k \cos kx$$

$$y'(0) = -c_1 k \sin k0 + c_2 k \cos k0 = 0 \quad \Rightarrow c_2 k = 0 \ \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y'(1) = -c_1 k \sin k1 + c_2 k \cos k1 = 0$$

$$\Rightarrow -c_1 k \sin k = 0 \ \Rightarrow \sin k = 0$$

Untuk memenuhi $\sin k = 0$, maka $k = n\pi$, untuk $n = 1,2,3,...$

Disini $9 - \lambda = -k^2$, $\lambda = 9 + k^2$, karena itu

$\lambda_n = 9 + n^2\pi^2$, untuk $n = 1,2,3,...$ adalah nilai eigen.

Maka nilai eigen dari MND tersebut adalah $\lambda_n = 9 + n^2\pi^2$, untuk $n = 1,2,3,....$

Masalah nilai eigen sering muncul dalam fisika matematis. Khususnya, ini muncul dalam proses penyelesaian dengan metode pemisahan variabel dari masalah nilai awal yang meliputi salah satu dari persamaan diferensial parsial berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ (persamaan parabola (kalor))

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$ (persamaan gelombang)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ (persamaan Laplace) (Finizio dan Ladas, 1988: 255)

Konsep nilai eigen yang merupakan pemecahan riil dari suatu persamaan karakteristik tersebut dapat digambarkan dengan setiap masalah dalam kehidupan pasti ada pemecahannya. Sebagaimana firman Allah Surat Al-Insyirâh/94 ayat 6:

إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ٦

”*Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan*” (Qs.Al-Insyirâh/94:6)

2.6 Deret Fourier

Definisi 2.13

Misalkan f adalah sebuah fungsi dengan periode $2L$. Deret Fourier dari fungsi f adalah berupa deret:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (2.19)$$

Yang diberikan dengan koefisien-koefisien:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Koefisien-koefisien tersebut dinamakan koefisien fourier.

Makna substansi deret Fourier adalah penjumlahan fungsi-fungsi sampai suku ke-*n* pada fungsi periodik. Penambahan jumlah suku (fungsi) ke-n akan memperhalus pendekatan grafik. Semakin banyak fungsi yang ditambahkan, maka pendekatan grafik semakin mendekati bentuk aslinya, karena itu suatu deret akan semakin bagus grafiknya jika komponen penjumlahnya semakin banyak (www.sora9n.wordpress.com, di akses tanggal 14 Desember 2007).

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَـٰكُم مِّن ذَكَرٍ وَأُنثَىٰ وَجَعَلْنَـٰكُمْ شُعُوبًا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓا...... ﴿١٣﴾

"Hai manusia, sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa - bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal.......". (Qs. Al-Hujurât/49: 13)

Semakin kuat pengenalan antar sesama maka semakin terbuka ruang untuk saling memberi manfaat antar sesama. Sebagaimana pelangi akan semakin indah kalau warnanya semakin banyak, bukan cuma merah atau biru saja, dan deret fourier semakin bagus jika komponen penjumlahan semakin banyak sampai suku ke-*n*. Demikian pula dunia manusia, khasanah pemikirannya terlalu membosankan jika tidak ada orang lain di sekitarnya.

2.6.1 Deret Fourier Sinus

Teorema 2.1

Misalkan f adalah fungsi yang didefinisikan pada interval (0, L) sampai (-L, 0) sebagai suatu fungsi ganjil. Jika deret fouriernya ada maka format deretnya adalah:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

dengan

$$a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad \text{(Humi dan Miler, 1991:88)}$$

Bukti

Dari definisi 1 sub bab 6.1 diketahui bahwa:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad (2.20)$$

Pada persamaan (2.20) integral yang pertama dimisalkan $x = -y$, dapat dilihat

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(-y)\sin\frac{n\pi(-y)}{L}\,d(-y)$$

Karena $f(x)$ dan $\sin\frac{n\pi x}{L}$ adalah fungsi ganjil, maka:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = -\frac{1}{L}\int_{0}^{L} - f(y)\left(-\sin\frac{n\pi y}{L}\right)(-dy)$$

$$= \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Karena y adalah variabel pemisalan dari $x = -y$, maka

$$\int_{-L}^{0} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (2.21)$$

Persamaan (2.20) disubstitusikan ke persamaan (2.21), maka:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

2.6.2 Deret Fourier Cosinus

Teorema 2.2

Misalkan f adalah fungsi yang didefinisikan pada interval (0, L) sampai (-L, 0) sebagai suatu fungsi genap. Jika deret Fouriernya ada, maka format deretnya adalah:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L},$$

dengan

$b_n = 0$, $a_0 = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx$, $a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$ (Humi dan Miler, 1991:88)

Bukti

Dari definisi 1 sub bab 6.1 diketahui bahwa:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (2.22)$$

Pada persamaan (2.22) integral yang pertama dimisalkan $x = -y$, dapat dilihat

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{L}\int_{L}^{0} f(-y)\cos\frac{n\pi(-y)}{L}d(-y)$$

Karena $f(x)$ dan $\cos\frac{n\pi x}{L}$ adalah fungsi genap, maka:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = -\frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(y)\cos\frac{n\pi y}{L}(-dy)$$

$$= \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

Karena y adalah variabel pemisalan dari $x = -y$, maka;

$$\int_{-L}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (2.23)$$

Persamaan (2.22) di substitusikan ke persamaan (2.23), maka:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

2.6.3 Deret Fourier Ganda

Definisi 2.14

Jika sebuah deret konvergen ke fungsi periodik $f(x, y)$, x suatu fungsi periodik pada $2L$ dan y pada $2W$, dan koefisiennya dinyatakan pada Tabel 1, maka deret tersebut dinamakan deret fourier ganda dan koefisiennya disebut dengan koefisien Fourier (Humi dan Miller, 1991:247-248).

Fungsi periodik $f(x,y)$ dalam bentuk deret Fourier ganda adalah:

$$f(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_{mn}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi y}{W}+b_{mn}\sin\frac{m\pi y}{L}\sin\frac{n\pi y}{W}\right.$$

$$\left.+c_{mn}\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi y}{W}+d_{mn}\cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{W}\right\} \qquad (2.24)$$

Adapun koefisien Fourier dari persamaan (2.24) adalah

$$Koefisien=\frac{1}{kLW}\int_{-L}^{L}\int_{-W}^{W}f(x,y)u(x)v(y)dydx=\frac{4}{kLW}\int_{0}^{L}\int_{0}^{W}f(x,y)u(x)v(y)dydx$$

dengan perincian seperti yang tersebut pada Tabel 1.

Tabel 1. Koefisien Fourier

NO	Koefisien m,n =1,2,3,...	k	$u(x)$	$v(y)$
1	a_{mn}	1	$\cos\frac{m\pi x}{L}$	$\cos\frac{n\pi y}{W}$
2	b_{mn}	1	$\sin\frac{m\pi x}{L}$	$\sin\frac{n\pi y}{W}$
3	c_{mn}	1	$\sin\frac{m\pi x}{L}$	$\cos\frac{n\pi y}{W}$
4	d_{mn}	1	$\cos\frac{m\pi x}{L}$	$\sin\frac{n\pi y}{W}$
5	a_{m0}	2	$\cos\frac{m\pi x}{L}$	1
6	c_{m0}	2	$\sin\frac{m\pi x}{L}$	1
7	a_{0n}	2	1	$\cos\frac{n\pi y}{W}$
8	d_{0n}	2	1	$\sin\frac{n\pi y}{W}$
9	a_{00}	4	1	1

BAB III

PEMBAHASAN

Bab III dalam penelitian ini menjelaskan tentang aplikasi nilai eigen untuk menentukan solusi persamaan diferensial parsial. Dengan menyelesaikan persamaan diferensial parsial linier orde dua dalam bentuk persamaan parabola yaitu . Adapun penyelesaiannya adalah melalui beberapa langkah sebagai berikut:

1. Menentukan persamaan diferensial yang akan diselesaikan
2. Menentukan syarat-syarat batas
3. Memisahkan variabel-variabel
4. Menentukan masalah nilai eigen
5. Menentukan nilai eigen
6. Menentukan fungsi eigen
7. Menentukan solusi persamaan diferensial parsial

3.1 Penyelesaian Persamaan Parabola dengan Menggunakan Nilai Eigen

3.1.1 Menentukan Persamaan Diferensial yang Akan Diselesaikan

Persamaan diferensial parsial dengan bentuk persamaan diferensial parsial linier orde dua atau dalam persamaan ini disebut persamaan parabola yang dalam fisika dikenal dengan persamaan kalor dimensi dua yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{3.1}$$

3.1.2 Menentukan Syarat-syarat Batas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \; 0 < x < L, \qquad 0 < y < W, \qquad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, y, t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(L, y, t) = 0, \qquad 0 < y < W, \qquad t > 0 \quad (3.2)$$

$u(0, y, t) = 0$ adalah temperatur benda pada posisi *(0,y)* pada koordinat *(x,y)*

$$u(x,0,t) = 0, \quad u(x,W,t) = 0, \; 0 < x < L, \qquad t > 0 \qquad (3.3)$$

$u(x,0,t) = 0$ adalah temperatur benda pada posisi *(x,0)* pada koordinat *(x,y)*

$$u(x, y,0) = f(x, y), \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < y < W \qquad (3.4)$$

$u(x, y,0) = f(x, y)$ adalah temperatur benda pada posisi *(x,y)* pada saat *t=0* punya sebuah fungsi *f(x,y)* atau fungsi dengan dua variabel *x* dan *y* (Nagle dan Saff, 1996:609).

3.1.3 Memisahkan Variabel-variabel

Dari persamaan (3.1) sebagai langkah awal dapat dilakukan pemisahan variabel. Misal $u(x, y,t) = g(x, y)h(t)$ dimana $u(x, y,t)$ adalah fungsi perambatan panas pada plat empat persegi panjang yang bergantung pada kecepatan perambatan pada sisi *x* dan *y* (panjang dan lebar bidang) dan waktu *t*, $g(x, y)$ adalah fungsi kecepatan perambatan yang bergantung pada sisi *x* dan *y* (panjang dan lebar bidang) dan $h(t)$ adalah fungsi waktu yang bergantung pada *t*, dengan melakukan operasi pemisahan variabel maka persamaan (3.1) menjadi

$$u(x,y,t) = (g(x,y)h(t))\beta$$

$$g(x,y)h'(t) = \left(g_{xx}(x,y)h(t) + g_{yy}(x,y)h(t)\right)\beta \qquad (3.5)$$

$g_{xx}(x,y)$ adalah turunan parsial tingkat dua terhadap *x*.

$g_{yy}(x,y)$ adalah turunan parsial tingkat dua terhadap *y*.

Persamaan (3.5) di kalikan dengan $\frac{1}{h(t)}$, maka

$$g(x,y)\frac{h'(t)}{h(t)} = \left(g_{xx}(x,y) + g_{yy}(x,y)\right)\beta$$

$$\frac{h'(t)}{h(t)\beta} = \frac{\left(g_{xx}(x,y) + g_{yy}(x,y)\right)}{g(x,y)}$$

Karena pada ruas kiri hanya bergantung pada variabel bebas *t* dan ruas kanan hanya bergantung pada variabel bebas *x* dan *y*, maka masing-masing ruasnya haruslah konstan

$$\frac{h'(t)}{h(t)\beta} = \frac{g_{xx}(x,y) + g_{yy}(x,y)}{g(x,y)} = \lambda \qquad (3.6)$$

λ adalah konstanta yang bernilai riil

Persamaan (3.6) dipecah menjadi 2 persamaan

$$\frac{h'(t)}{h(t)\beta} = \lambda \text{ dan } \frac{g_{xx}(x,y) + g_{yy}(x,y)}{g(x,y)} = \lambda$$

Persamaan pertama adalah $\frac{h'(t)}{h(t)\beta} = \lambda \Rightarrow h'(t) = \lambda\beta h(t)$

atau menjadi

$$h'(t) - \lambda\beta h(t) = 0 \qquad (3.6)$$

Persamaan kedua adalah $\frac{g_{xx}(x,y)+g_{yy}(x,y)}{g(x,y)}=\lambda$

$$g_{xx}(x,y)+g_{yy}(x,y)=\lambda g(x,y)$$

$$g_{xx}(x,y)+g_{yy}(x,y)-\lambda g(x,y)=0 \qquad (3.7)$$

λ adalah konstanta yang bernilai riil.

Misalkan $g(x,y)=f(x)f(y)$ dimana $f(x)$ adalah fungsi sisi plat (panjang plat) dan $f(y)$ fungsi sisi plat (lebar plat) adalah , maka persamaan (3.7) menjadi:

$$f''(x)f(y)+f(x)f''(y)-\lambda f(x)f(y)=0$$

Persamaan diatas di bagi dengan $f(x)f(y)$, maka:

$$\frac{f''(x)}{f(x)}+\frac{f''(y)}{f(y)}-\lambda=0$$

$$\frac{f''(x)}{f(x)}=-\frac{f''(y)}{f(y)}+\lambda$$

Karena pada ruas kiri hanya bergantung pada variabel bebas *x* dan ruas kanan hanya bergantung pada variabel bebas *y*, maka masing-masing ruasnya haruslah konstan.

$$\frac{f''(x)}{f(x)}=-\frac{f''(y)}{f(y)}+\lambda=\mu \qquad (3.8)$$

μ merupakan konstanta yang bernilai riil.

Persamaan (3.8) di pecah menjadi dua persamaan, yaitu

$$\frac{f''(x)}{fX(x)}=\mu \text{ dan } -\frac{f''(y)}{f(y)}+\lambda=\mu$$

Persamaan pertama adalah $\frac{f''(x)}{f(x)}=\mu$

$$f''(x) = \mu f(x)$$

$$f''(x) - \mu f(x) = 0 \tag{3.9}$$

Persamaan kedua adalah $-\frac{f''(y)}{f(y)} + \lambda = \mu$

$$-f''(y) = (\mu - \lambda) f(y)$$

$$f''(y) + (\mu - \lambda) f(y) = 0 \tag{3.10}$$

Masing-masing variabel pada persamaan diferensial parsial tersebut di atas sudah dipisahkan, dan persamaannya telah menjadi persamaan diferensial linier homogen.

3.1.4 Menentukan Masalah Nilai Eigen

3.1.4.1 Masalah Nilai Eigen dari Fungsi $f(x)$

Masalah nilai eigen fungsi $f(x)$ adalah persamaan (3.9) dengan menggunakan syarat batas (3.2) dan diketahui bahwa $u(x, y, t) = f(x) f(y) h(t)$ maka

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(L, y, t) = 0, \qquad 0 < y < W, \qquad t > 0$$

menjadi

$$f'(0) f(y) h(t) = f'(L) f(y) h(t) = 0$$

$f'(0) = f'(L) = 0$ atau dapat ditulis dengan

$$f'(0) = 0 \qquad f'(L) = 0$$

Jadi masalah nilai eigennya adalah

$$f''(x) - \mu f(x) = 0$$

$$f'(0)=0 \qquad f'(L)=0 \tag{3.11}$$

3.1.4.2 Masalah Nilai Eigen dari Fungsi $f(y)$

Masalah nilai eigen fungsi $f(y)$ adalah persamaan (3.10) dengan menggunakan syarat batas (3.3) dan diketahui bahwa $u(x,y,t)=f(x)f(y)h(t)$ maka

$$u(x,0,t)=0, \qquad u(x,W,t)=0, \; 0<x<L, \qquad t>0$$

menjadi

$$f(x)f(0)h(t)=f(x)f(W)h(t)=0$$

$$f(0)=f(W)=0$$

$$f(0)=0 \qquad f(W)=0$$

Jadi masalah nilai eigennya adalah

$$f''(y)+(\mu-\lambda)f(y)=0$$

$$f(0)=0 \qquad f(W)=0 \tag{3.12}$$

3.1.5 Menentukan Nilai Eigen

3.1.5.1 Nilai Eigen dari Fungsi $f(x)$

Menentukan nilai eigen fungsi $f(x)$ digunakan masalah nilai eigen, yaitu:

$$f''(x)-\mu f(x)=0$$

$$f'(0)=0 \qquad f'(L)=0$$

Untuk menyelesaikan masalah nilai eigen di atas, maka dibutuhkan bantuan persamaan, yaitu persamaan karakteristik dari persamaan diferensial tersebut yaitu:

$f''(x) - \mu f(x) = 0$, persamaan karakteristiknya adalah:

$p^2 - \mu = 0$

karena μ merupakan konstanta yang bernilai riil, maka nilai dari μ mempunyai tiga kemungkinan yaitu, positif, nol dan negatif. Maka untuk menentukan akar-akar karakteristiknya digunakan tiga kemungkinan tersebut, yakni:

3.1.5.1.1 Untuk $\mu > 0$ atau μ Positif, maka;

$p^2 - \mu = 0$

Akar-akar karakteristiknya adalah $p_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$, yang merupakan akar-akar berlainan.

Berdasarkan kasus 1 pada subbab 2.3 yang menyatakan apabila persamaan karakteristik mempunyai akar-akar riil dan berlainan $p_1 \neq p_2$, maka solusi umum dari persamaan tersebut berbentuk

$$f(x) = c_1 e^{p_i x} + c_2 e^{p_i x}$$

Jadi solusi umum dari persamaan $f''(x) - \mu f(x) = 0$ dengan akar-akar $p_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$ adalah:

$$f(x) = c_1 e^{\sqrt{\mu} x} + c_2 e^{-\sqrt{\mu} x}$$

Dengan menggunakan syarat batas:

$f'(0) = 0 \qquad f'(L) = 0$, maka

$$f(x) = c_1 e^{\sqrt{\mu}x} + c_2 e^{-\sqrt{\mu}x}$$

$$f'(x) = \sqrt{\mu} c_1 e^{\sqrt{\mu}x} - \sqrt{\mu} c_2 e^{-\sqrt{\mu}x}$$

Untuk $f'(0) = 0$

$$f'(0) = \sqrt{\mu} c_1 e^{\sqrt{\mu}x} - \sqrt{\mu} c_2 e^{-\sqrt{\mu}x} = 0$$

$$0 = \sqrt{\mu} c_1 e^{\sqrt{\mu}0} - \sqrt{\mu} c_2 e^{-\sqrt{\mu}0}$$

$$0 = \sqrt{\mu} c_1 e^{0} - \sqrt{\mu} c_2 e^{0}$$

$$0 = \sqrt{\mu} c_1 - \sqrt{\mu} c_2$$

$$0 = (c_1 - c_2)\sqrt{\mu}$$

$$0 = (c_1 - c_2)$$

$$c_1 = c_2$$

Untuk $f'(L) = 0$

$$f'(L) = \sqrt{\mu} c_1 e^{\sqrt{\mu}x} - \sqrt{\mu} c_2 e^{-\sqrt{\mu}x} = 0$$

$0 = \sqrt{\mu} c_1 e^{\sqrt{\mu}L} - \sqrt{\mu} c_2 e^{-\sqrt{\mu}L}$, karena $c_1 = c_2$ maka:

$$0 = \sqrt{\mu} c_1 e^{\sqrt{\mu}L} - \sqrt{\mu} c_1 e^{-\sqrt{\mu}L}$$

$$0 = \sqrt{\mu} c_1 \left(e^{\sqrt{\mu\pi}L} - e^{-\sqrt{\mu}L}\right)$$

$$0 = \sqrt{\mu} c_1 \left(e^{\sqrt{\mu}L} - \frac{1}{e^{\sqrt{\mu}L}}\right)$$

$$0 = c_1 \left(e^{\sqrt{\mu}L} - \frac{1}{e^{\sqrt{\mu}L}}\right)$$

$$c_1 = \frac{0}{\left(e^{\sqrt{\mu}L} - \frac{1}{e^{\sqrt{\mu}L}}\right)}$$

$$c_1 = 0$$

Karena $c_1 = c_2$, maka $c_2 = 0$. Sehingga $c_1 = c_2 = 0$, adalah penyelesaian yang identik nol, yang berarti bahwa $\mu > 0$ bukan nilai eigen. Atau masalah nilai eigen di atas tidak mempunyai nilai eigen yang positif.

3.1.5.1.2 Untuk $\mu = 0$ atau μ Nol, maka;

$$p^2 - \mu = 0$$

Akar-akar karakteristiknya adalah $p_{1,2} = 0$, yang merupakan akar-akar kembar (nol).

Berdasarkan kasus 2 pada subbab 2.3 yang menyatakan apabila persamaan karakteristik mempunyai akar-akar riil kembar $p_1 = p_2 = p$, maka solusi umum dari persamaan tersebut berbentuk

$$f(x) = c_1 e^{px} + c_2 x e^{px}$$

Jadi solusi umum dari persamaan $f''(x) - \mu f(x) = 0$ dengan akar-akar $p_{1,2} = 0$ adalah:

$$f(x) = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x}$$

$$f(x) = c_1 + c_2 x$$

Dengan menggunakan syarat batas:

$f'(0) = 0 \qquad f'(L) = 0$, maka

$$f'(x) = c_2$$

Untuk $f'(0) = 0$

$$f'(0) = c_2 = 0$$

$$c_2 = 0$$

Untuk $f'(L) = 0$

$$f'(L) = c_2 = 0$$

$$c_2 = 0$$

Jadi untuk $\mu = 0$ mempunyai penyelesaian yang identik nol, yang berarti bahwa $\mu = 0$ bukan nilai eigen.

3.1.5.1.3 Untuk $\mu < 0$ atau μ Negatif, maka;

$$p^2 - \mu = 0$$

$$p^2 - (-\mu) = 0$$

$$p^2 + \mu = 0$$

$$p^2 = -\mu$$

Akar-akar karakteristiknya adalah $p = 0 \pm i\sqrt{-\mu}$, yang merupakan akar-akar imaginer.

Berdasarkan kasus 3 pada subbab 2.3 yang menyatakan apabila persamaan karakteristik mempunyai akar-akar kompleks sekawan $p_{1,2} = k \pm il$ maka, solusi umum dari persamaan tersebut berbentuk

$$f(x) = c_1 e^{kx} \cos lx + c_2 e^{kx} \sin lx$$

Jadi solusi umum dari persamaan $f''(x) - \mu f(x) = 0$ dengan akar-akar $p_{1,2} = k \pm il$ adalah:

$$f(x) = c_1 e^{0x} \cos\sqrt{-\mu}x + c_2 e^{0x} \sin\sqrt{-\mu}x$$

$$f(x) = c_1 e^{0} \cos\sqrt{-\mu}x + c_2 e^{0} \sin\sqrt{-\mu}x$$

$$f(x) = c_1 \cos\sqrt{-\mu}x + c_2 \sin\sqrt{-\mu}x$$

Dengan menggunakan syarat batas:

$f'(0) = 0$ $\quad\quad f'(L) = 0$, maka

$$f'(x) = -\sqrt{-\mu}c_1 \sin\sqrt{-\mu}x + \sqrt{-\mu}c_2 \cos\sqrt{-\mu}x$$

Untuk $X'(0) = 0$

$$f'(0) = -\sqrt{-\mu}c_1 \sin\sqrt{-\mu}0 + \sqrt{-\mu}c_2 \cos\sqrt{-\mu}0 = 0$$

$$0 = -\sqrt{-\mu}c_1 \sin 0 + \sqrt{-\mu}c_2 \cos 0$$

$$0 = 0 + \sqrt{-\mu}c_2$$

$$0 = \sqrt{-\mu}c_2$$

$$c_2 = \frac{0}{\sqrt{-\mu}}$$

$$c_2 = 0$$

$$f'(L) = -\sqrt{-\mu}c_1 \sin\sqrt{-\mu}L + \sqrt{-\mu}c_2 \cos\sqrt{-\mu}L = 0$$

$$0 = -\sqrt{-\mu}c_1 \sin\sqrt{-\mu}L + \sqrt{-\mu}0 \cos L$$

$$0 = -\sqrt{-\mu}c_1 \sin\sqrt{-\mu}L$$

$$0 = c_1 \sin\sqrt{-\mu}L$$

$c_1 \neq 0$, maka $\sin\sqrt{-\mu}L = 0$

Untuk memenuhi agar nilai $\sin\sqrt{-\mu}L = 0$, maka:

$$\sqrt{-\mu}L = m\pi$$

$$\sqrt{-\mu} = \frac{m\pi}{L}$$

$$-\mu = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$$

$$\mu = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \qquad (3.13)$$

Maka nilai eigen dari fungsi $f(x)$ adalah $\mu = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$

3.1.5.2 Nilai Eigen dari Fungsi $f(y)$

Menentukan nilai eigen fungsi $f(y)$ digunakan masalah nilai eigen, yaitu:

$$f''(y) + (\mu - \lambda) f(y) = 0$$

$$f(0) = 0 \qquad f(W) = 0$$

Misalkan nilai $\mu = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$ disubstitusikan pada persamaan $f''(y) + (\mu - \lambda) f(y) = 0$, maka:

$$f''(y) + \left(-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 - \lambda\right) f(y) = 0$$

$$f''(y) - \left(\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \lambda\right) f(y) = 0$$

Misalkan $\left(\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \lambda\right) = \eta$

Maka masalah nilai eigen di atas menjadi

$f''(y) - \eta f(y) = 0$

$f(0) = 0 \qquad f(L) = 0$

Untuk menyelesaikan masalah nilai eigen di atas dibutuhkan bantuan persamaan, yaitu persamaan karakteristik dari persamaan diferensial tersebut yaitu:

$f''(y) - \eta f(y) = 0$, persamaan karakteristiknya adalah:

$q^2 - \eta = 0$

Karena η merupakan konstanta yang bernilai riil, maka nilai dari η mempunyai tiga kemungkinan yaitu, positif, nol dan negatif. Maka untuk menentukan akar-akar karakteristiknya digunakan tiga kemungkinan tersebut, yakni:

3.1.5.2.1 Untuk $\eta > 0$ atau η Positif, maka;

$q^2 - \eta = 0$

Akar-akar karakteristiknya adalah $q = \pm\sqrt{\eta}$, yang merupakan akar-akar berlainan.

Berdasarkan kasus 1 pada subbab 2.3 yang menyatakan apabila persamaan karakteristik mempunyai akar-akar riil dan berlainan $q_1 \neq q_2$, maka solusi umum dari persamaan tersebut berbentuk

$$f(y) = c_1 e^{q_i x} + c_2 e^{q_i x}$$

Jadi solusi umum dari persamaan $f''(y) - \eta f(y) = 0$ dengan akar-akar $q = \pm\sqrt{\eta}$ adalah:

$$f(y) = c_1 e^{\sqrt{\eta} y} + c_2 e^{-\sqrt{\eta} y}$$

Dengan menggunakan syarat batas:

$f(0) = 0 \qquad f(W) = 0$, maka

$$f(y) = c_1 e^{\sqrt{\eta} y} + c_2 e^{-\sqrt{\eta} y}$$

Untuk $f(0) = 0$

$$f(0) = c_1 e^{\sqrt{\eta} 0} + c_2 e^{-\sqrt{\eta} 0} = 0$$

$$0 = c_1 e^0 + c_2 e^0$$

$$0 = c_1 + c_2$$

$c_1 = -c_2$ atau $c_2 = -c_1$

Untuk $f(W) = 0$

$$f(W) = c_1 e^{\sqrt{\eta} W} + c_2 e^{-\sqrt{\eta} W} = 0,$$

karena $c_2 = -c_1$, maka

$$0 = c_1 e^{\sqrt{\eta} W} - c_1 e^{-\sqrt{\eta} W}$$

$$0 = c_1 \left(e^{\sqrt{\eta} W} - e^{-\sqrt{\eta} W} \right)$$

$$c_1 = \frac{0}{\left(e^{\sqrt{\eta} W} - e^{-\sqrt{\eta} W} \right)}$$

$$c_1 = 0$$

Karena $c_2 = -c_1$, maka $c_2 = 0$. Sehingga, $c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$, adalah penyelesaian yang identik nol, yang berarti bahwa $\eta > 0$ bukan nilai eigen. Atau masalah nilai eigen fungsi $f(y)$ di atas tidak mempunyai nilai eigen yang positif.

3.1.5.2.2 Untuk $\eta = 0$ atau η Nol, maka;

$q^2 - \eta = 0$

Akar-akar karakteristiknya adalah $q_{1,2} = 0$, yang merupakan akar-akar kembar (nol).

Berdasarkan kasus 2 pada subbab 2.3 yang menyatakan apabila persamaan karakteristik mempunyai akar-akar riil kembar $q_1 = q_2$, maka solusi umum dari persamaan tersebut berbentuk

$$f(y) = c_1 e^{qy} + c_2 y e^{qy}$$

Jadi solusi umum dari persamaan $f''(y) - \eta f(y) = 0$ dengan akar-akar $q_{1,2} = 0$ adalah:

$$f(y) = c_1 e^{0y} + c_2 y e^{0y}$$

$$f(y) = c_1 + c_2 y$$

Dengan menggunakan syarat batas:

$f(0) = 0 \qquad f(W) = 0$, maka

$f(y) = c_1 + c_2 y$

Untuk $f(0) = 0$,

$$f(0) = c_1 + c_2 0 = 0$$

$$0 = c_1$$

Untuk $f(W) = 0$,

$$f(W) = c_1 + c_2 W = 0$$

Karena $c_1 = 0$, maka

$$0 = 0 + c_2 W$$

$$c_2 = \frac{0}{W}$$

$$c_2 = 0$$

Jadi untuk $\eta = 0$ $c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$ mempunyai penyelesaian yang identik nol, yang berarti bahwa $\eta = 0$ bukan nilai eigen

3.1.5.2.3 Untuk $\eta < 0$ atau η Negatif, maka;

$$q^2 - \eta = 0$$

$$q^2 - (-\eta) = 0$$

$$q^2 + \eta = 0$$

$$q^2 = -\eta$$

Akar-akar karakteristiknya adalah $q = 0 \pm i\sqrt{-\eta}$, yang merupakan akar-akar imaginer.

Berdasarkan kasus 3 pada subbab 2.3 yang menyatakan apabila persamaan karakteristik mempunyai akar-akar kompleks sekawan $q_{1,2} = k \pm il$, maka solusi umum dari persamaan tersebut berbentuk

$$f(y) = c_1 e^{ky} \cos ly + c_2 e^{ky} \sin ly$$

Jadi solusi umum dari persamaan $f''(y) - \eta f(y) = 0$ dengan akar-akar $q_{1,2} = k \pm il$ adalah:

$$f(y) = c_1 e^{0y} \cos\sqrt{-\eta}\, y + c_2 e^{0y} \sin\sqrt{-\eta}\, y$$

$$f(y) = c_1 e^{0} \cos\sqrt{-\eta}\, y + c_2 e^{0} \sin\sqrt{-\eta}\, y$$

$$f(y) = c_1 \cos\sqrt{-\eta}\, y + c_2 \sin\sqrt{-\eta}\, y$$

Dengan menggunakan syarat batas:

$$f(0)=0 \qquad f(\pi)=0, \text{ maka}$$

$$f(y)=c_1\cos\sqrt{-\eta}\,y+c_2\sin\sqrt{-\eta}\,y$$

Untuk $f(0)=0$

$$f(0)=c_1\cos\sqrt{-\eta}\,0+c_2\sin\sqrt{-\eta}\,0=0$$

$$0=c_1\cos 0+c_2\sin 0$$

$$0=c_1+0$$

$$c_1=0$$

Untuk $f(W)=0$

$$f(W)=c_1\cos\sqrt{-\eta}W+c_2\sin\sqrt{-\eta}W=0$$

$$0=c_1\cos\sqrt{-\eta}W+c_2\sin\sqrt{-\eta}W$$

karena $c_1=0$, maka

$$0=0\cos\sqrt{-\eta}W+c_2\sin\sqrt{-\eta}W$$

$$0=c_2\sin\sqrt{-\eta}W$$

$$c_2\neq 0, \text{ maka } \sin\sqrt{-\eta}W=0$$

Untuk memenuhi agar nilai $\sin\sqrt{-\eta}W=0$, maka:

$$\sqrt{-\eta}W=n\pi$$

$$\sqrt{-\eta}=\frac{n\pi}{W}$$

$$-\eta=\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2$$

$$\eta = -\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 \qquad (3.14)$$

Maka nilai eigen dari fungsi $f(y)$ adalah $\eta = -\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2$.

Karena itu nilai eigen λ bisa ditentukan dari persamaan $\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \lambda = \eta$ atau $\lambda = \eta - \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$, dengan mensubstitusikan nilai η pada persamaan tersebut, maka

$$\lambda = -\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$$

$$\lambda = -\left(\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right) \qquad (3.15)$$

3.1.6 Menentukan Fungsi Eigen

3.1.6.1 Fungsi Eigen dari Fungsi $f(x)$

Penyelesaian umum dari fungsi $f(x)$ yang memenuhi nilai eigen adalah $f(x) = c_1 \cos\sqrt{-\mu}x + c_2 \sin\sqrt{-\mu}x$.

Dengan mensubstitusi nilai eigen μ dan c_2 pada penyelesaian umum, maka:

$$f(x) = c_1 \cos\frac{m\pi}{L}x + 0\sin\frac{m\pi}{L}x$$

$$f(x) = c_1 \cos\frac{m\pi x}{L}$$

$$f_m(x) = c_m \cos\frac{m\pi x}{L} \qquad\qquad m = 0,1,2,3,\ldots \tag{3.16}$$

3.1.6.2 Fungsi Eigen dari Fungsi $f(y)$

Penyelesaian umum dari fungsi $f(y)$ yang memenuhi nilai eigen adalah $f(y) = c_1 \cos\sqrt{-\eta}\,y + c_2 \sin\sqrt{-\eta}\,y$.

Dengan mensubstitusi nilai eigen η dan c_1 pada penyelesaian umum, maka:

$$f(y) = 0\cos\frac{n\pi}{W}y + c_2 \sin\frac{n\pi}{W}y$$

$$f(y) = c_2 \sin\frac{n\pi y}{W}$$

$$f_n(y) = c_n \sin\frac{n\pi y}{W} \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{3.17}$$

3.1.6.3 Menentukan Fungsi $h(t)$

Nilai eigen dari λ dari dua fungsi sudah diketahui, selanjutnya menentukan penyelesaian umum dari $h(t)$, yaitu dengan mensubstitusikan nilai $\lambda = -\left(\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right)$ pada persamaan (3.6), maka

$$h'(t) - \left(-\left(\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right)\right)h(t) = 0$$

Persamaan karakteristiknya adalah $r - \lambda = 0$, $r = \lambda$ mempunyai satu akar karakteristik yaitu λ. Berdasarkan penjelasan teori pada subbab 2.3 jika λ suatu akar persamaan $r-\lambda=0$ maka $h=e^{\lambda t}$ merupakan penyelesaian persamaan diferensial.

$$h'(t)-\left(-\left(\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right)\right)\beta h(t)=0$$, mempunyai penyelesaian umum

$$h(t)=b_1 e^{-\left(\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right)\beta t}$$

$$h_{mn}(t)=b_{mn} e^{-\left(\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right)\beta t}$$

$$h_{mn}(t)=b_{mn} e^{-(\frac{n^2}{W^2}+\frac{m^2}{L^2})\pi^2\beta t} \qquad m=0,1,2,3,... \ n=1,2,3,... \qquad (3.18)$$

3.1.7 Menentukan Solusi Persamaan Diferensial Parsial

Diketahui $u(x,y,t)=g(x,y)h(t)$

Karena $g(x,y)=f(x)f(y)$, maka

$u(x,y,t)=f(x)f(y)h(t)$

Kemudian substitusi untuk fungsi-fungsi eigen $f_m(x), f_n(y), h_{mn}(t)$ dapat diperoleh dari $u(x,y,t)=g(x,y)h(t)$, maka

$$u_{mn}(x,y,t)=\left(c_m Cos(\frac{m\pi x}{L})\right)\left(a_n Sin(\frac{n\pi y}{W})\right)\left(b_{mn}e^{-\left(\frac{m^2}{L^2}+\frac{n^2}{W^2}\right)\beta\pi^2 t}\right)$$

Misalkan $c_m c_n b_{mn}=a_{mn}$ merupakan konstanta dengan

m = 0,1,2,3,..., n = 1,2,3,...

$$u_{mn}(x,y,t)=a_{mn}e^{-\left(\frac{m^2}{L^2}+\frac{n^2}{W^2}\right)\beta\pi^2 t}Cos(\frac{m\pi x}{L})Sin(\frac{n\pi y}{W})$$

Jika diperoleh serangkaian deret tak terbatas, maka menghasilkan deret yang berupa:

$$u\ (x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2}+\frac{n^2}{W^2}\right)\beta\pi^2 t} Cos(\frac{m\pi x}{L})Sin(\frac{n\pi y}{W}) \qquad (3.19)$$

Dari persamaan (3.19) akan digunakan syarat batas (3.4) yaitu

$$u(x,y,0) = f(x,y), \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < y < W$$

anggap t=0, maka diperoleh deret;

$$u\ (x,y,0) = f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2}+\frac{n^2}{W^2}\right)\beta\pi^2 .0} Cos(\frac{m\pi x}{L})Sin(\frac{n\pi y}{W})$$

$$u\ (x,y,0) = f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} e^{0} Cos(\frac{m\pi x}{L})Sin(\frac{n\pi y}{W})$$

$$u\ (x,y,0) = f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} Cos(\frac{m\pi x}{L})Sin(\frac{n\pi y}{W}) \qquad (3.20)$$

Persamaan tersebut merupakan deret Fourier ganda.

Untuk fungsi $f(x,y)$ pada deret Fourier di atas adalah terdiri atas fungsi genap untuk variabel x dan fungsi ganjil untuk variabel y. Koefisien a_{mn} pada persamaan (3.20) adalah sama dengan koefisien d_{mn} pada persamaan (2.24). Dan diketahui nilai a_{mn} dengan m=0,1,2.. dan n=1,2,3,... dari tabel 1 dapat diperoleh:

$$koefisien = \frac{4}{kLW}\int_0^L\int_0^W f(x,y)u(x)v(y)dydx$$

Untuk m=0, :

$k = 2$, $u(x) = 1$ dan $v(y) = \sin\frac{n\pi y}{W}$, maka

$$a_{0.n} = \frac{2}{LW}\int_0^L\int_0^W f(x,y) Sin\frac{n\pi y}{W}\, dydx, \qquad n=1, 2, 3,... \tag{3.21}$$

Dan untuk $m \geq 1$, $n \geq 1$, maka:

$k = 1$, $u(x) = \cos\frac{m\pi x}{L}$ dan $v(y) = \sin\frac{n\pi y}{W}$, maka

$$a_{m.n} = \frac{4}{LW}\int_0^L\int_0^W f(x,y) Cos\frac{m\pi x}{L} Sin\frac{n\pi y}{W}\, dydx \tag{3.22}$$

Adapun solusi untuk persamaan diferensial parsial (3.1) dengan syarat batas ((3.2)-(3.4)) adalah berupa persamaan (3.20) dan koefisiennya diturunkan pada persamaan ((3.21)-(3.22)).

3.2 Penyelesaian Persamaan Parabola dengan Menggunakan Nilai Eigen dalam Contoh Soal

Contoh 3.2

Tentukan solusi persamaan diferensial parsial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad 0 < x < \pi \qquad 0 < y < \pi$$

Penyelesaian

3.2.1 Menentukan Persamaan Diferensial yang akan Diselesaikan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad 0 < x < \pi \qquad 0 < y < \pi \tag{3.23}$$

3.2.2 Menentukan syarat-syarat Batas

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y,t) = 0 \qquad 0 < y < \pi \qquad t > 0 \tag{3.24}$$

$$u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0 \qquad 0 < x < \pi \qquad t > 0 \tag{3.25}$$

$$u(x,y,0) = f(x,y) = y \qquad 0 < x < \pi \qquad 0 < y < \pi \tag{3.26}$$

3.2.3 Memisahkan Variabel-variabel

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Misal $u(x,y,t) = g(x,y)h(t)$, maka

$$g(x,y)h'(t) = g_{xx}(x,y)h(t) + g_{yy}(x,y)h(t) \tag{3.27}$$

Persamaan (3.27) di kalikan dengan $\frac{1}{h(t)}$, maka

$$g(x,y)\frac{h'(t)}{h(t)} = g_{xx}(x,y) + g_{yy}(x,y)$$

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{g_{xx}(x,y) + g_{yy}(x,y)}{g(x,y)}$$

Karena pada ruas kiri hanya bergantung pada variabel bebas *t* dan ruas kanan hanya bergantung pada variabel bebas *x* dan *y*, maka masing-masing ruasnya haruslah konstan, sehingga

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{g_{xx}(x,y) + g_{yy}(x,y)}{g(x,y)} = \lambda \tag{3.28}$$

λ adalah konstanta bernilai riil

Persamaan (3.28) dipecah menjadi 2 persamaan, yaitu

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \lambda \text{ dan } \frac{g_{xx}(x,y) + g_{yy}(x,y)}{g(x,y)} = \lambda$$

Persamaan pertama adalah $\frac{h'(t)}{h(t)} = \lambda$

$$h'(t) = \lambda h(t)$$

$$h'(t) - \lambda h(t) = 0 \qquad (3.29)$$

Persamaan yang kedua adalah $\dfrac{g_{xx}(x,y) + g_{yy}(x,y)}{g(x,y)} = \lambda$

$$g_{xx}(x,y) + g_{yy}(x,y) = \lambda g(x,y)$$

$$g_{xx}(x,y) + g_{yy}(x,y) - \lambda g(x,y) = 0$$

Misalkan $g(x,y) = f(x) f(y)$, maka:

$$f''(x) f(y) + f(x) f''(y) - \lambda f(x) f(y) = 0 \qquad (3.30)$$

Masing-masing ruas dibagi dengan $f(x) f(y)$, maka persamaan (3.31) menjadi:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{f''(y)}{f(y)} - \lambda = 0$$

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{f''(y)}{f(y)} + \lambda$$

Karena pada ruas kiri hanya bergantung pada variabel bebas *x* dan ruas kanan hanya bergantung pada variabel bebas *y*, maka masing-masing ruasnya haruslah konstan.

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{f''(y)}{f(y)} + \lambda = \mu \qquad (3.32)$$

μ adalah konstanta yang bernilai riil.

Persamaan (3.32) dipecah menjadi dua persamaan, yaitu

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \mu \text{ dan } -\frac{f''(y)}{f(y)} + \lambda = \mu$$

Persamaan pertama adalah

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \mu$$

$$f''(x) = \mu f(x)$$

$$f''(x) - \mu f(x) = 0 \qquad (3.33)$$

Persamaan kedua adalah

$$-\frac{f''(y)}{f(y)} + \lambda = \mu$$

$$-f''(y) = (\mu - \lambda) f(y)$$

$$f''(y) + (\mu - \lambda) f(y) = 0 \qquad (3.34)$$

Masing-masing variabel pada persamaan diferensial parsial tersebut di atas sudah dipisahkan, dan persamaannya telah menjadi persamaan diferensial linier homogen.

3.2.4 Menentukan Masalah Nilai Eigennya

3.2.4.1 Masalah Nilai Eigen dari Fungsi $f(x)$

Masalah nilai eigen fungsi $f(x)$ adalah persamaan (3.33) dengan menggunakan syarat batas (3.24) dan diketahui bahwa $u(x,y,t) = f(x)f(y)h(t)$ maka

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y,t) = 0 \qquad 0 < y < \pi \qquad t > 0$$

menjadi

$$f'(0)f(y)h(t) = f'(\pi)f(y)h(t) = 0$$

$$f'(0) = f'(\pi) = 0$$

$f'(0)=0 \qquad f'(\pi)=0$

Jadi masalah nilai eigennya adalah

$$f''(x)-\mu f(x)=0$$

$$f'(0)=0 \qquad f'(\pi)=0 \tag{3.35}$$

3.2.4.2 Masalah Nilai Eigen dari Fungsi $f(y)$

Masalah nilai eigen fungsi $f(y)$ adalah persamaan (3.34) dengan menggunakan syarat batas (3.25) dan diketahui bahwa $u(x,y,t)=f(x)f(y)h(t)$ maka

$$u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=0 \qquad 0<x<\pi \qquad t>0$$

menjadi

$$f(x)f(0)h(t)=f(x)f(\pi)h(t)=0$$

$$f(0)=f(\pi)=0$$

$$f(0)=0 \qquad f(\pi)=0$$

Jadi masalah nilai eigennya adalah

$$f''(y)+(\mu-\lambda)f(y)=0$$

$$f(0)=0 \qquad f(\pi)=0 \tag{3.36}$$

3.2.5 Menentukan Nilai Eigen

3.2.5.1 Nilai Eigen dari Fungsi $f(x)$

Menentukan nilai eigen fungsi $f(x)$ digunakan masalah nilai eigen, yaitu:

$$f''(x)-\mu f(x)=0$$

$f'(0)=0 \qquad f'(\pi)=0$

Untuk menyelesaikan masalah nilai eigen di atas dibutuh bantuan persamaan, yaitu persamaan karakteristik dari persamaan diferensial tersebut yaitu:

$f''(x)-\mu f(x)=0$, persamaan karakteristiknya adalah:

$p^2-\mu=0$

Karena μ merupakan konstanta yang bernilai riil, maka nilai dari μ mempunyai tiga kemungkinan yaitu, positif, nol dan negatif. Maka untuk menentukan akar-akar karakteristiknya digunakan tiga kemungkinan tersebut, yakni:

3.2.5.1.1 Untuk $\mu > 0$ atau μ Positif, maka;

$p^2-\mu=0$

Akar-akar karakteristiknya adalah $p_{1,2}=\pm\sqrt{\mu}$, yang merupakan akar-akar berlainan.

Berdasarkan kasus 1 pada subbab 2.3 yang menyatakan apabila persamaan karakteristik mempunyai akar-akar riil dan berlainan $p_1 \neq p_2$, maka solusi umum dari persamaan tersebut berbentuk

$$f(x)=c_1e^{p_ix}+c_2e^{p_ix}$$

Jadi solusi umum dari persamaan $f''(x)-\mu f(x)=0$ dengan akar-akar $p_{1,2}=\pm\sqrt{\mu}$ adalah:

$$f(x)=c_1e^{\sqrt{\mu}x}+c_2e^{-\sqrt{\mu}x}$$

Dengan menggunakan syarat batas:

$$f'(0)=0 \qquad f'(\pi)=0 \text{, maka}$$

$$f(x)=c_1e^{\sqrt{\mu}x}+c_2e^{-\sqrt{\mu}x}$$

$$f'(x)=\sqrt{\mu}c_1e^{\sqrt{\mu}x}-\sqrt{\mu}c_2e^{-\sqrt{\mu}x}$$

Untuk $f'(0)=0$

$$f'(0)=\sqrt{\mu}c_1e^{\sqrt{\mu}x}-\sqrt{\mu}c_2e^{-\sqrt{\mu}x}=0$$

$$0=\sqrt{\mu}c_1e^{\sqrt{\mu}0}-\sqrt{\mu}c_2e^{-\sqrt{\mu}0}$$

$$0=\sqrt{\mu}c_1e^{0}-\sqrt{\mu}c_2e^{0}$$

$$0=\sqrt{\mu}c_1-\sqrt{\mu}c_2$$

$$0=\left(c_1-c_2\right)\sqrt{\mu}$$

$$0=\left(c_1-c_2\right)$$

$$c_1=c_2$$

Untuk $f'(\pi)=0$

$$f'(\pi)=\sqrt{\mu}c_1e^{\sqrt{\mu}x}-\sqrt{\mu}c_2e^{-\sqrt{\mu}x}=0$$

$0=\sqrt{\mu}c_1e^{\sqrt{\mu}\pi}-\sqrt{\mu}c_2e^{-\sqrt{\mu}\pi}$, karena $c_1=c_2$ maka:

$$0=\sqrt{\mu}c_1e^{\sqrt{\mu}\pi}-\sqrt{\mu}c_1e^{-\sqrt{\mu}\pi}$$

$$0=\sqrt{\mu}c_1\left(e^{\sqrt{\mu}\pi}-e^{-\sqrt{\mu}\pi}\right)$$

$$0=\sqrt{\mu}c_1\left(e^{\sqrt{\mu}\pi}-\frac{1}{e^{\sqrt{\mu}\pi}}\right)$$

$$0 = \sqrt{\mu} c_1 \left(e^{\sqrt{\mu}\pi} - \frac{1}{e^{\sqrt{\mu}\pi}} \right)$$

$$0 = c_1 \left(e^{\sqrt{\mu}\pi} - \frac{1}{e^{\sqrt{\mu}\pi}} \right)$$

$$c_1 = \frac{0}{\left(e^{\sqrt{\mu}\pi} - \frac{1}{e^{\sqrt{\mu}\pi}} \right)}$$

$$c_1 = 0$$

Karena $c_1 = c_2$, maka $c_2 = 0$. Sehingga $c_1 = c_2 = 0$, adalah penyelesaian yang identik nol, yang berarti bahwa $\mu > 0$ bukan nilai eigen. Atau masalah nilai eigen di atas tidak mempunyai nilai eigen yang positif.

3.2.5.1.2 Untuk $\mu = 0$ atau μ Nol, maka;

$$p^2 - \mu = 0$$

Akar-akar karakteristiknya adalah $p_{1,2} = 0$, yang merupakan akar-akar kembar (nol).

Berdasarkan kasus 2 pada subbab 2.3 yang menyatakan apabila persamaan karakteristik mempunyai akar-akar riil kembar $p_1 = p_2 = p$, maka solusi umum dari persamaan tersebut berbentuk

$$f(x) = c_1 e^{px} + c_2 x e^{px}$$

Jadi solusi umum dari persamaan $f''(x) - \mu f(x) = 0$ dengan akar-akar $p_{1,2} = 0$ adalah:

$$f(x) = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x}$$

$$f(x) = c_1 + c_2 x$$

Dengan menggunakan syarat batas:

$$f'(0) = 0 \qquad f'(\pi) = 0 \text{, maka}$$

$$f'(x) = c_2$$

Untuk $f'(0) = 0$

$$f'(0) = c_2 = 0$$

$$c_2 = 0$$

Untuk $X'(\pi) = 0$

$$X'(\pi) = c_2 = 0$$

$$c_2 = 0$$

Jadi untuk $\mu = 0$ mempunyai penyelesaian yang identik nol, yang berarti bahwa $\mu = 0$ bukan nilai eigen.

3.2.5.1.3 Untuk $\mu < 0$ atau μ Negatif, maka;

$$p^2 - \mu = 0$$

$$p^2 - (-\mu) = 0$$

$$p^2 + \mu = 0$$

$$p^2 = -\mu$$

Akar-akar karakteristiknya adalah $p = 0 \pm i\sqrt{-\mu}$, yang merupakan akar-akar imaginer.

Berdasarkan kasus 3 pada subbab 2.3 yang menyatakan apabila persamaan karakteristik mempunyai akar-akar kompleks sekawan $p_{1,2} = k \pm il$, maka solusi umum dari persamaan tersebut berbentuk

$$f(x) = c_1 e^{kx} \cos lx + c_2 e^{kx} \sin lx$$

Jadi solusi umum dari persamaan $f''(x) - \mu f(x) = 0$ dengan akar-akar $p_{1,2} = k \pm il$ adalah:

$$f(x) = c_1 e^{0x} \cos \sqrt{-\mu} x + c_2 e^{0x} \sin \sqrt{-\mu} x$$

$$f(x) = c_1 e^{0} \cos \sqrt{-\mu} x + c_2 e^{0} \sin \sqrt{-\mu} x$$

$$f(x) = c_1 \cos \sqrt{-\mu} x + c_2 \sin \sqrt{-\mu} x$$

Dengan menggunakan syarat batas:

$f'(0) = 0 \qquad f'(\pi) = 0$, maka

$$f'(x) = -\sqrt{-\mu} c_1 \sin \sqrt{-\mu} x + \sqrt{-\mu} c_2 \cos \sqrt{-\mu} x$$

Untuk $f'(0) = 0$

$$f'(0) = -\sqrt{-\mu} c_1 \sin \sqrt{-\mu} 0 + \sqrt{-\mu} c_2 \cos \sqrt{-\mu} 0 = 0$$

$$0 = -\sqrt{-\mu} c_1 \sin 0 + \sqrt{-\mu} c_2 \cos 0$$

$$0 = 0 + \sqrt{-\mu} c_2$$

$$0 = \sqrt{-\mu} c_2$$

$$c_2 = \frac{0}{\sqrt{-\mu}}$$

$$c_2 = 0$$

$$f'(\pi) = -\sqrt{-\mu} c_1 \sin \sqrt{-\mu} \pi + \sqrt{-\mu} c_2 \cos \sqrt{-\mu} \pi = 0$$

$$0 = -\sqrt{-\mu} c_1 \sin \sqrt{-\mu} \pi + \sqrt{-\mu} 0 \cos 0$$

$$0 = -\sqrt{-\mu} c_1 \sin \sqrt{-\mu} \pi$$

$$0 = c_1 \sin\sqrt{-\mu}\pi$$

$c_1 \neq 0$, maka $\sin\sqrt{-\mu}\pi = 0$

Untuk memenuhi agar nilai $\sin\sqrt{-\mu}\pi = 0$, maka:

$$\sqrt{-\mu}\pi = m\pi$$

$$\sqrt{-\mu} = \frac{m\pi}{\pi}$$

$$-\mu = \left(\frac{m\pi}{\pi}\right)^2$$

$$\mu = -\left(\frac{m\pi}{\pi}\right)^2 \tag{3.37}$$

Maka nilai eigen dari fungsi $f(x)$ adalah $\mu = -\left(\frac{m\pi}{\pi}\right)^2$ atau $\mu = -(m)^2$

3.2.5.2 Nilai Eigen dari Fungsi $f(y)$

Menentukan nilai eigen fungsi $f(y)$ digunakan masalah nilai eigen, yaitu:

$$f''(y) + (\mu - \lambda) f(y) = 0$$

$$f(0) = 0 \qquad f(\pi) = 0$$

Misalkan nilai $\mu = -(m)^2$ disubstitusikan pada persamaan $f''(y) + (\mu - \lambda) f(y) = 0$, maka:

$$f''(y) + \left(-(m)^2 - \lambda\right) f(y) = 0$$

$$f''(y) - \left((m)^2 + \lambda\right) f(y) = 0$$

misalkan $\left((m)^2 + \lambda\right) = \eta$

Maka masalah nilai eigen di atas menjadi

$f''(y)-\eta f(y)=0$

$f(0)=0 \qquad f(\pi)=0$

Untuk menyelesaikan masalah nilai eigen di atas dibutuhkan bantuan persamaan, yaitu persamaan karakteristik dari persamaan diferensial tersebut yaitu:

$f''(y)-\eta f(y)=0$, persamaan karakteristiknya adalah:

$q^2-\eta=0$

Karena η merupakan konstanta yang bernilai riil, maka nilai dari η mempunyai tiga kemungkinan yaitu, positif, nol dan negatif. Maka untuk menentukan akar-akar karakteristiknya kita gunakan tiga kemungkinan tersebut, yakni:

3.2.5.2.1 Untuk $\eta > 0$ atau η Positif, maka;

$q^2-\eta=0$

Akar-akar karakteristiknya adalah $q=\pm\sqrt{\eta}$, yang merupakan akar-akar berlainan.

Berdasarkan kasus 1 pada subbab 2.3 yang menyatakan apabila persamaan karakteristik mempunyai akar-akar riil dan berlainan $q_1 \neq q_2$, maka solusi umum dari persamaan tersebut berbentuk

$$f(y)=c_1e^{q_ix}+c_2e^{q_ix}$$

Jadi solusi umum dari persamaan $f''(y)-\eta f(y)=0$ dengan akar-akar $q=\pm\sqrt{\eta}$ adalah:

$$f(y) = c_1 e^{\sqrt{\eta} y} + c_2 e^{-\sqrt{\eta} y}$$

Dengan menggunakan syarat batas:

$f(0) = 0 \qquad f(\pi) = 0$, maka

$$f(y) = c_1 e^{\sqrt{\eta} y} + c_2 e^{-\sqrt{\eta} y}$$

Untuk $f(0) = 0$

$$f(0) = c_1 e^{\sqrt{\eta} 0} + c_2 e^{-\sqrt{\eta} 0} = 0$$

$$0 = c_1 e^0 + c_2 e^0$$

$$0 = c_1 + c_2$$

$c_1 = -c_2$ atau $c_2 = -c_1$

Untuk $f(\pi) = 0$

$$f(\pi) = c_1 e^{\sqrt{\eta} \pi} + c_2 e^{-\sqrt{\eta} \pi} = 0,$$

Karena $c_2 = -c_1$, maka

$$0 = c_1 e^{\sqrt{\eta} \pi} - c_1 e^{-\sqrt{\eta} \pi}$$

$$0 = c_1 \left(e^{\sqrt{\eta} \pi} - e^{-\sqrt{\eta} \pi} \right)$$

$$c_1 = \frac{0}{\left(e^{\sqrt{\eta} \pi} - e^{-\sqrt{\eta} \pi} \right)}$$

$$c_1 = 0$$

Karena $c_2 = -c_1$, maka $c_2 = 0$. Sehingga $c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$, adalah penyelesaian yang identik nol, yang berarti bahwa $\eta > 0$ bukan nilai eigen. Atau masalah nilai eigen fungsi $f(y)$ tidak mempunyai nilai eigen yang positif.

3.2.5.2.2 Untuk $\eta = 0$ atau η Nol, maka;

$$q^2 - \eta = 0$$

Akar-akar karakteristiknya adalah $q_{1,2} = 0$, yang merupakan akar-akar kembar (nol).

Berdasarkan kasus 2 pada subbab 2.3 yang menyatakan apabila persamaan karakteristik mempunyai akar-akar riil kembar $q_1 = q_2$, maka solusi umum dari persamaan tersebut berbentuk

$$f(y) = c_1 e^{qy} + c_2 y e^{qy}$$

Jadi solusi umum dari persamaan $f''(y) - \eta f(y) = 0$ dengan akar-akar $q_{1,2} = 0$ adalah:

$$f(y) = c_1 e^{0y} + c_2 y e^{0y}$$

$$f(y) = c_1 + c_2 y$$

Dengan menggunakan syarat batas:

$f(0) = 0 \qquad f(\pi) = 0$, maka

$$f(y) = c_1 + c_2 y$$

Untuk $f(0) = 0$,

$$f(0) = c_1 + c_2 0 = 0$$

$$0 = c_1$$

Untuk $f(\pi) = 0$,

$$f(\pi) = c_1 + c_2 \pi = 0$$

Karena $c_1 = 0$, maka

$$0 = 0 + c_2\pi$$

$$c_2 = \frac{0}{\pi}$$

$$c_2 = 0$$

Jadi untuk $\eta = 0$ $c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$ mempunyai penyelesaian yang identik nol, yang berarti bahwa $\eta = 0$ bukan nilai eigen

3.2.5.2.3 Untuk $\eta < 0$ atau η Negatif, maka;

$$q^2 - \eta = 0$$

$$q^2 - (-\eta) = 0$$

$$q^2 + \eta = 0$$

$$q^2 = -\eta$$

Akar-akar karakteristiknya adalah $q = 0 \pm i\sqrt{-\eta}$, yang merupakan akar-akar imaginer.

Berdasarkan kasus 3 pada subbab 2.3 yang menyatakan apabila persamaan karakteristik mempunyai akar-akar kompleks sekawan $q_{1,2} = k \pm il$, maka solusi umum dari persamaan tersebut berbentuk

$$f(y) = c_1 e^{ky}\cos ly + c_2 e^{ky}\sin ly$$

Jadi solusi umum dari persamaan $f''(y) - \eta f(y) = 0$ dengan akar-akar $q_{1,2} = k \pm il$ adalah:

$$f(y) = c_1 e^{0y}\cos\sqrt{-\eta}\,y + c_2 e^{0y}\sin\sqrt{-\eta}\,y$$

$$f(y) = c_1 e^{0}\cos\sqrt{-\eta}\,y + c_2 e^{0}\sin\sqrt{-\eta}\,y$$

$$f(y) = c_1 \cos\sqrt{-\eta}\, y + c_2 \sin\sqrt{-\eta}\, y$$

Dengan menggunakan syarat batas:

$f(0) = 0 \qquad f(\pi) = 0$, maka

$$f(y) = c_1 \cos\sqrt{-\eta}\, y + c_2 \sin\sqrt{-\eta}\, y$$

Untuk $f(0) = 0$

$$f(0) = c_1 \cos\sqrt{-\eta}\, 0 + c_2 \sin\sqrt{-\eta}\, 0 = 0$$

$$0 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0$$

$$0 = c_1 + 0$$

$$c_1 = 0$$

Untuk $f(\pi) = 0$

$$f(\pi) = c_1 \cos\sqrt{-\eta}\,\pi + c_2 \sin\sqrt{-\eta}\,\pi = 0$$

$$0 = c_1 \cos\sqrt{-\eta}\,\pi + c_2 \sin\sqrt{-\eta}\,\pi$$

Karena $c_1 = 0$, maka

$$0 = 0 \cos\sqrt{-\eta}\,\pi + c_2 \sin\sqrt{-\eta}\,\pi$$

$$0 = c_2 \sin\sqrt{-\eta}\,\pi$$

$c_2 \neq 0$, maka $\sin\sqrt{-\eta}\,\pi = 0$

Untuk memenuhi agar nilai $\sin\sqrt{-\eta}\,\pi = 0$, maka:

$$\sqrt{-\eta}\,\pi = n\pi$$

$$\sqrt{-\eta} = \frac{n\pi}{\pi}$$

$$-\eta = \left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2$$

$$\eta = -\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 \text{ atau } \quad \eta = -(n)^2 \qquad (3.38)$$

Maka nilai eigen dari fungsi $f(y)$ adalah $\eta = -(n)^2$

Karena itu nilai eigen λ bisa ditentukan dari persamaan $(m)^2 + \lambda = \eta$ atau $\lambda = \eta - (m)^2$, dengan mensubstitusikan nilai η pada persamaan tersebut, maka

$$\lambda = -(n)^2 - (m)^2$$

$$\lambda = -\left((n)^2 + (m)^2\right) \qquad (3.39)$$

3.2.6 Menentukan Fungsi Eigen

3.2.6.1 Fungsi Eigen dari Fungsi $f(x)$

Penyelesaian umum dari fungsi $f(x)$ yang memenuhi nilai eigen adalah $f(x) = c_1 \cos\sqrt{-\mu}x + c_2 \sin\sqrt{-\mu}x$.

Dengan mensubstitusi nilai eigen μ dan c_2 pada penyelesaian umum, maka:

$$f(x) = c_1 \cos\frac{m\pi}{\pi}x + 0\sin\sqrt{-\mu}x$$

$$f(x) = c_1 \cos mx$$

$$f_m(x) = c_1 \cos mx \qquad m = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (3.40)$$

3.2.6.2 Fungsi Eigen dari Fungsi $f(y)$

Penyelesaian umum dari fungsi $f(y)$ yang memenuhi nilai eigen adalah $f(y) = c_1 \cos\sqrt{-\eta}\, y + c_2 \sin\sqrt{-\eta}\, y$.

Dengan mensubstitusi nilai eigen η dan c_1 pada penyelesaian umum, maka:

$$f(y) = 0\cos\sqrt{-\eta}\, y + c_2 \sin\frac{n\pi}{\pi} y$$

$$f(y) = c_2 \sin ny$$

$$f_n(y) = c_2 \sin ny \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3.41)$$

3.2.6.3 Fungsi Eigen dari Fungsi $h(t)$

Nilai eigen dari λ dari dua fungsi sudah diketahui, selanjutnya menentukan penyelesaian umum dari $h(t)$, yaitu:

Mensubstitusikan nilai $\lambda = -\left((n)^2 + (m)^2\right)$ pada persamaan $h'(t) - \lambda h(t) = 0$

$$h'(t) - \left(-\left((n)^2 + (m)^2\right)\right)h(t) = 0$$

Persamaan karakteristiknya adalah $r - \lambda = 0$, $r = \lambda$ mempunyai satu akar yaitu λ. Berdasarkan penjelasan teori pada subbab 2.3 jika λ suatu akar persamaan $r - \lambda = 0$ maka $h = e^{\lambda t}$ merupakan penyelesaian persamaan diferensial.

$h'(t) - \left(-\left((n)^2 + (m)^2\right)\right)h(t) = 0$, mempunyai penyelesaian umum

$$h(t) = b_1 e^{-\left((n)^2 + (m)^2\right)t}$$

$$h_{mn}(t) = b_{mn} e^{-\left((n)^2 + (m)^2\right)t}$$

$$h_{mn}(t) = b_{mn}e^{-(n^2+m^2)t} \tag{3.42}$$

3.2.7 Menentukan Solusi Persamaan Diferensial Parsial

$u(x,y,t) = g(x,y)h(t)$

Karena $g(x,y) = f(x)f(y)$, maka;

$u(x,y,t) = f(x)f(y)h(t)$

$$u(x,y,t) = (c_m \cos mx)(c_n \sin ny)\left(b_{mn}e^{-(n^2+m^2)t}\right) \tag{3.43}$$

Misalkan $c_m c_n b_{mn} = a_{mn}$ merupakan konstanta dengan

m = 0,1,2,3,..., n = 1,2,3,...

$u(x,y,t) = a_{mn}e^{-(n^2+m^2)t} \cos mx \sin ny$

Maka persamaan di atas dibuat sebagai deret fungsi berganda

$$u(x,y,t) = \sum_{m-0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}e^{-(n^2+m^2)t} \cos mx \sin ny \tag{3.44}$$

Dengan menggunakan syarat batas (3.26)

$u(x,y,0) = f(x,y) = y \qquad 0 < x < \pi \qquad 0 < y < \pi$

Maka t =0

$u(x,y,0) = a_{mn}e^{-(n^2+m^2)0} \cos mx \sin ny = f(x,y)$

$f(x,y) = a_{mn} \cos mx \sin ny$

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos mx \sin ny \qquad m = 0,1,2,3,\ldots\ n = 1,2,3,\ldots \tag{3.45}$$

Untuk fungsi *f*(*x*,*y*) pada deret Fourier di atas adalah deret fourier ganda yang terdiri atas fungsi genap untuk variabel *x* dan fungsi ganjil untuk variabel *y*.

Koefisien a_{mn} pada persamaan (3.45) adalah sama dengan koefisien d_{mn} pada persamaan (2.24). Dan diketahui nilai a_{mn} dengan m=0,1,2.. dan n=1,2,3,... dari tabel 1 dapat diperoleh:

$$koefisien = \frac{4}{kLW}\int_0^L\int_0^W f(x,y)u(x)v(y)dydx$$

Untuk m=0, :

$k=2$, $u(x)=1$ dan $v(y)=\sin\frac{n\pi y}{W}$ dan $L=W=\pi$, maka

$m=0$, $n=1,2,3,...$

$$f(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\cos 0x \sin ny$$

$$f(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{0n}\sin ny$$

$$a_{0n} = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\sin nydydx$$

$$a_{0n} = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} y\sin nydydx \tag{3.46}$$

$m\geq 1$, $n\geq 1$

$k=1$, $u(x)=\cos\frac{m\pi x}{L}$, $v(y)=\sin\frac{n\pi y}{W}$ dan $L=W=\pi$, maka

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\cos mx\sin nydydx$$

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} y\cos mx\sin nydydx \qquad m=0,1,2,3,...\ n=1,2,3,... \tag{3.47}$$

Solusi persamaan diferensialnya adalah berupa deret Fourier (3.45) dan dengan koefisien Fourier (3.46) dan (3.47).

3.3 Penyelesaian Persamaan Parabola dengan Menggunakan Bentuk Umum Nilai Eigen pada Contoh 3.2

Dari contoh 3.2 diketahui bahwa:

$\beta = 1$, $L = \pi$, $W = \pi$, $f(x, y) = y$, maka

Menentukan solusi persamaan parabola adalah sebagai berikut:

3.3.1 Untuk $L = \pi$

Dengan $L = \pi$ maka $\mu = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$, menjadi $\mu = -\left(\frac{m\pi}{\pi}\right)^2$

$f_m(x) = c_m Cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, menjadi

$f_m(x) = c_m Cos\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right)$ atau $f_m(x) = c_m Cosmx$

3.3.2 Untuk $W = \pi$

Dengan $W = \pi$ maka $\eta = -\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2$, menjadi $\eta = -\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2$

$f_n(y) = a_n Sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right)$, menjadi $f_n(y) = a_n Sin\left(\frac{n\pi y}{\pi}\right)$ atau $f_n(y) = a_n Sinny$

3.3.3 Untuk $L = \pi$, $W = \pi$

Dengan $L = \pi$, $W = \pi$ maka $\lambda = -\left(\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right)$, menjadi

$\lambda = -\left(\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{\pi}\right)^2\right)$ atau $\lambda = -\left(n^2 + m^2\right)$

$h_{mn}(t) = b_{mn} e^{-(\frac{n^2}{W^2} + \frac{m^2}{L^2})\pi^2 \beta t}$, menjadi

$$h_{mn}(t) = b_{mn} e^{-(\frac{n^2}{\pi^2}+\frac{m^2}{\pi^2})\pi^2 1t} \text{ atau } h_{mn}(t) = b_{mn} e^{-\left(n^2+m^2\right)t}$$

3.3.4 Untuk $u(x, y, t) = f(x) f(y) h(t)$

Diketahui bahwa $u(x, y, t) = f(x) f(y) h(t)$, maka;

$$u(x, y, t) = f_m(x) f_n(y) h_{mn}(t)$$

Dan telah diketahui bahwa;

$f_m(x) = c_m Cosmx$, $f_n(y) = a_n Sinny$ dan $h_{mn}(t) = b_{mn} e^{-\left(n^2+m^2\right)t}$, maka;

$$u(x, y, t) = (c_m \cos mx)(c_n \sin ny)\left(b_{mn} e^{-(n^2+m^2)t}\right)$$

Atau jika digunakan bentuk umumnya

$$u_{mn}(x, y, t) = \left(c_m Cos(\frac{m\pi x}{L})\right)\left(a_n Sin(\frac{n\pi y}{W})\right)\left(b_{mn} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2}+\frac{n^2}{W^2}\right)\beta\pi^2 t}\right)$$

dan diketahui $\beta = 1$, $L = \pi$, $W = \pi$ maka persamaannya menjadi

$$u_{mn}(x, y, t) = (c_m \cos mx)(c_n \sin ny)\left(b_{mn} e^{-(n^2+m^2)t}\right)$$

Misalkan $c_m c_n b_{mn} = a_{mn}$ merupakan konstanta dengan

m = 0,1,2,3,..., n = 1,2,3,...

$$u(x, y, t) = a_{mn} e^{-(n^2+m^2)t} \cos mx \sin ny$$

Maka dibuat sebagai deret fungsi berganda

$$u(x, y, t) = \sum_{m-0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} e^{-(n^2+m^2)t} \cos mx \sin ny$$

Dengan menggunakan syarat batas (3.4)

$$(x, y, 0) = f(x, y) = y \qquad 0 < x < \pi \qquad 0 < y < \pi$$

Maka t =0

$$u(x,y,0) = a_{mn} e^{-(n^2+m^2)0} \cos mx \sin ny = f(x,y)$$

$$f(x,y) = a_{mn} \cos mx \sin ny$$

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos mx \sin ny \qquad (3.48)$$

Dan diketahui nilai a_{mn} dengan m=0,1,2.. dan n=1,2,3,... dari tabel 1 dapat diperoleh:

$$koefisien = \frac{4}{kLW}\int_0^L\int_0^W f(x,y)u(x)v(y)dydx$$

Untuk m=0, :

$k = 2$, $u(x) = 1$ dan $v(y) = \sin\frac{n\pi y}{W}$ dan $L = W = \pi$, maka

$m = 0$, $n = 1,2,3,...$

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos 0x \sin ny$$

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} \sin ny$$

$$a_{0n} = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi f(x,y)\sin nydydx$$

$$a_{0n} = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi y\sin nydydx \qquad (3.49)$$

$m \geq 1$, $n \geq 1$

$k = 1$, $u(x) = \cos\frac{m\pi x}{L}$, $v(y) = \sin\frac{n\pi y}{W}$ dan $L = W = \pi$, maka

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi f(x,y)\cos mx \sin nydydx$$

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi \int_0^\pi y \cos mx \sin ny dy dx \tag{3.50}$$

Solusi persamaan diferensialnya adalah berupa deret Fourier (3.48) dan dengan koefisien Fourier (3.49) dan (3.50).

3.4 Analisis Pembahasan Penyelesaian Persamaan Parabola dengan Menggunakan Nilai Eigen.

3.4.1 Menggunakan Bentuk Umum Persamaan yang Diselesaikan dengan Langkah-langkah

Pada penelitian ini, menentukan solusi persamaan diferensial parsial dengan menggunakan nilai eigen adalah menggunakan bentuk umum persamaan diferensial parsial linier orde dua bentuk parabola yang diselesaikan dengan langkah-langkah penyelesaiannya. Dan diperoleh bentuk umum nilai-nilai eigen yaitu $\mu_m = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$, $\eta_n = -\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2$ dan $\lambda_{mn} = -\left(\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right)$. Dari nilai-nilai eigen tersebut dapat diperoleh fungsi eigennya, yaitu $f_m(x) = c_m Cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, $f_n(y) = a_n Sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right)$ dan $h_{mn}(t) = b_{mn} e^{-(\frac{n^2}{W^2}+\frac{m^2}{L^2})\pi^2 \beta t}$, sehingga diperoleh solusi persamaan difernsial parsial

$$u_{mn}(x,y,t) = \left(c_m Cos(\frac{m\pi x}{L})\right)\left(a_n Sin(\frac{n\pi y}{W})\right)\left(b_{mn} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2}+\frac{n^2}{W^2}\right)\beta\pi^2 t}\right)$$

$$u_{mn}(x,y,t) = a_{mn} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2}+\frac{n^2}{W^2}\right)\beta\pi^2 t} Cos(\frac{m\pi x}{L}) Sin(\frac{n\pi y}{W})$$

$$u(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}e^{-\left(\frac{m^2}{L^2}+\frac{n^2}{W^2}\right)\beta\pi^2 t}Cos(\frac{m\pi x}{L})Sin(\frac{n\pi y}{W})$$

Dengan menggunakan syarat batas

$u(x,y,0)=f(x,y) \qquad 0<x<L, \qquad 0<y<W$, maka;

$$u\ (x,y,t)=f(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}Cos(\frac{m\pi x}{L})Sin(\frac{n\pi y}{W})$$

Untuk m=0, maka koefisien Fouriernya adalah:

$$a_{0.n}=\frac{2}{LW}\int_0^L\int_0^W f(x,y)Sin\frac{n\pi x}{W}dydx, \qquad n=1,\ 2,\ 3,...$$

Dan untuk $m\geq 1$, $n\geq 1$, maka:

$$a_{m.n}=\frac{4}{LW}\int_0^L\int_0^W f(x,y)Cos\frac{m\pi x}{L}Sin\frac{n\pi y}{W}dydx \qquad m=0,1,2,3,...\ n=1,2,3,...$$

3.4.2 Menggunakan Contoh Soal 3.2 yang Diselesaiakan dengan Langkah-langkah

Pada pembahasan selanjutnya digunakan contoh soal (3.2) dan diselesaikan dengan menggunakan langkah-langkah penyelesaiannya. dan diperoleh nilai-nilai eigen dan fungsi eigen sebagai berikut;

$\mu=-(m)^2$, $\eta=-(n)^2$ dan $\lambda=-\left(n^2+m^2\right)$

$f_m(x)=c_m Cosmx$, $f_n(y)=a_n Sinny$ dan $h_{mn}(t)=b_{mn}e^{-\left(n^2+m^2\right)t}$

$u(x,y,t)=f(x)f(y)h(t)$

$u(x,y,t)=(c_m\cos mx)(c_n\sin ny)\left(b_{mn}e^{-(n^2+m^2)t}\right)$

Misalkan $c_m c_n b_{mn}=a_{mn}$ merupakan konstanta dengan

m = 0,1,2,3,..., $\qquad$ n = 1,2,3,...

$$u(x,y,t) = a_{mn} e^{-(n^2+m^2)t} \cos mx \sin ny$$

$$u(x,y,t) = \sum_{m-0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} e^{-(n^2+m^2)t} \cos mx \sin ny$$

Dengan menggunakan syarat batas (3.24)

$u(x,y,0) = f(x,y) = y \qquad 0 < x < \pi \qquad 0 < y < \pi$

$f(x,y) = a_{mn} \cos mx \sin ny$

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos mx \sin ny \quad m = 0,1,2,3,.... \quad n = 1,2,3,...$$

Dengan koefisien

$$a_{0n} = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y) \sin nydydx \quad m = 0,\ n = 1,2,3,...$$

$$a_{0n} = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} y \sin nydydx$$

$m \geq 1,\ n \geq 1$

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y) \cos mx \sin nydydx$$

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} y \cos mx \sin nydydx \qquad m = 0,1,2,3,...\ n = 1,2,3,...$$

3.4.3 Menggunakan Contoh 3.2 diselesaikan dengan Bentuk Umum Nilai Eigen

Kemudian bentuk umum dari nilai eigen (3.13)-(3.15) digunakan untuk menyelesaikan contoh 3.2, diperoleh nilai-nilai eigen berikut;

$\mu = -(m)^2$, $\eta = -(n)^2$ dan $\lambda = -(n^2 + m^2)$

$f_m(x) = c_m Cosmx$, $f_n(y) = a_n Sinny$ dan $h_{mn}(t) = b_{mn} e^{-\left(n^2+m^2\right)t}$

$u(x, y, t) = f(x) f(y) h(t)$

$u(x, y, t) = (c_m \cos mx)(c_n \sin ny)\left(b_{mn} e^{-(n^2+m^2)t}\right)$

Misalkan $c_m c_n b_{mn} = a_{mn}$ merupakan konstanta dengan

m = 0,1,2,3,..., n = 1,2,3,...

$$u(x, y, t) = a_{mn} e^{-(n^2+m^2)t} \cos mx \sin ny$$

$$u(x, y, t) = \sum_{m-0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} e^{-(n^2+m^2)t} \cos mx \sin ny$$

Dengan menggunakan syarat batas (3.24)

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = y \qquad 0 < x < \pi \qquad 0 < y < \pi$$

$$f(x, y) = a_{mn} \cos mx \sin ny$$

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos mx \sin ny \qquad m = 0, 1, 2, 3, \ldots \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dengan koefisien

$$a_{0n} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \sin ny dy dx \qquad m = 0, \; n = 1,2,3,\ldots$$

$$a_{0n} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} y \sin ny dy dx$$

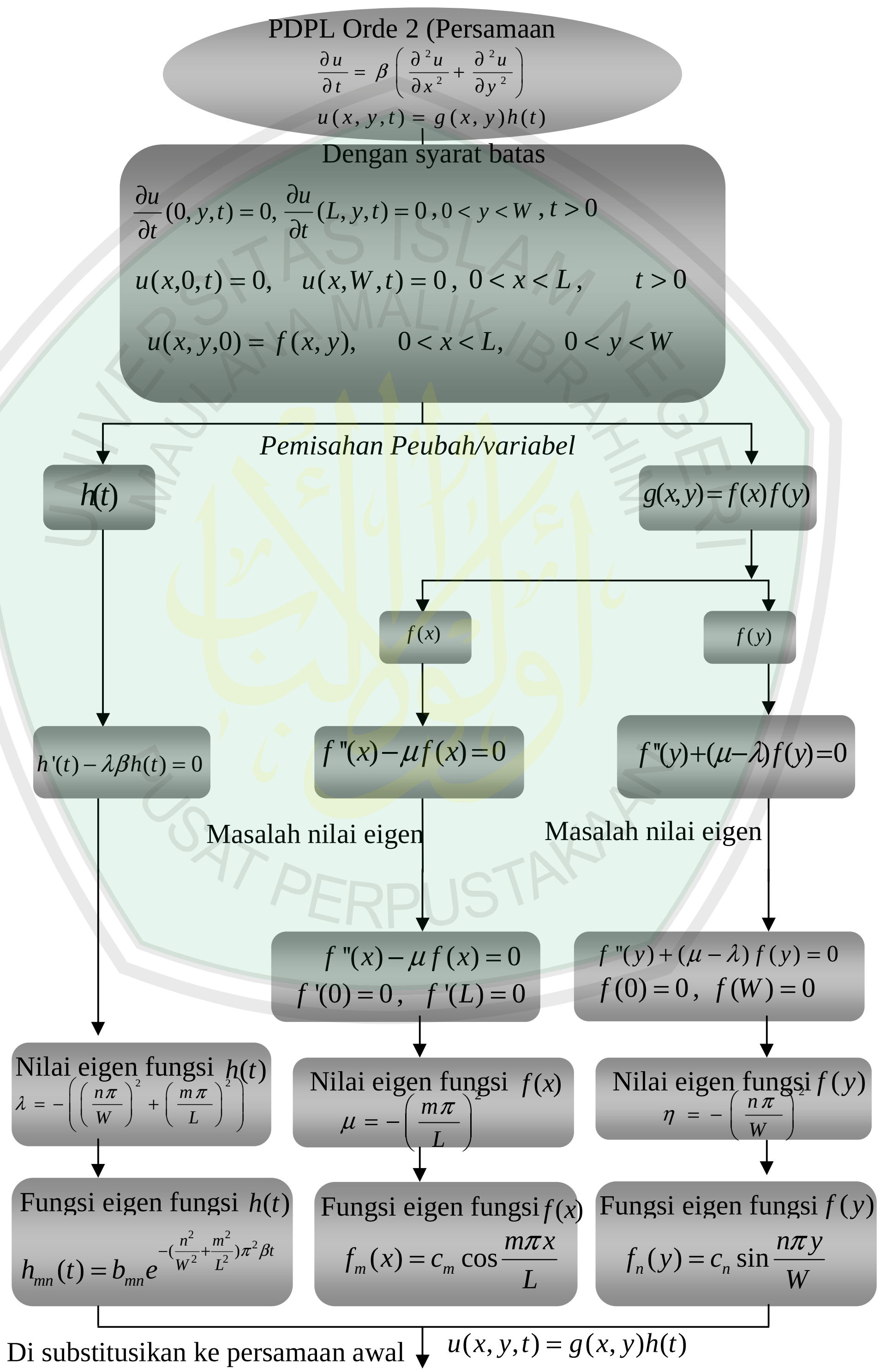
$m \geq 1$, $n \geq 1$

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \cos mx \sin ny dy dx$$

$$a_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} y \cos mx \sin ny dy dx \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dari analisis pembahasan di atas dapat diketahui bahwa, solusi persamaan diferensial parsial dengan menggunakan bentuk umum nilai eigen dan dengan menggunakan langkah-langkah penyelesaian adalah sama. Untuk memperjelas pembahasan penelitian ini, maka bisa dilihat pada bagan penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan mengunakan nilai eigen berikut.

Bagan Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial dengan Menggunakan Nilai Eigen



$$u_{mn}(x,y,t) = \left(c_m Cos(\frac{m\pi x}{L})\right)\left(a_n Sin(\frac{n\pi y}{W})\right)\left(b_{mn} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2}+\frac{n^2}{W^2}\right)\beta\pi^2 t}\right)$$

Misalkan $c_m c_n b_{mn} = a_{mn}$ $\quad m = 0,1,2,3,...,\quad n = 1,2,3,...$

$$u\ (x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2}+\frac{n^2}{W^2}\right)\beta\pi^2 t} Cos(\frac{m\pi x}{L}) Sin(\frac{n\pi y}{W})$$

Misalkan $t = 0$

Maka solusi persamaan diferensial parsial adalah

$$u\ (x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} Cos(\frac{m\pi x}{L}) Sin(\frac{n\pi y}{W})$$

Dengan Koefisien Fourier

$$a_{0.n} = \frac{2}{LW}\int_0^L\int_0^W f(x,y) Sin\frac{n\pi y}{W}\, dydx$$

$$a_{m.n} = \frac{4}{LW}\int_0^L\int_0^W f(x,y) Cos\frac{m\pi x}{L} Sin\frac{n\pi y}{W}\, dydx$$

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Menentukan solusi persamaan diferensial parsial linier orde dua dalam bentuk persamaan parabola

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

dengan syarat-syarat batas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < W, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(L, y, t) = 0, \quad 0 < y < W, \quad t > 0$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, W, t) = 0, \; 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < W$$

dan dengan menggunakan nilai eigen adalah melalui beberapa langkah sebagai berikut:

8. Menentukan persamaan diferensial yang akan diselesaikan
9. Menentukan syarat-syarat batas
10. Memisahkan variabel-variabel
11. Menentukan masalah nilai eigen
12. Menentukan nilai eigen
13. Menentukan fungsi eigen
14. Menentukan solusi persamaan diferensial parsial

Dengan menggunakan langkah-langkah di atas diperoleh nilai eigen $\mu = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$, $\eta = -\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2$, dan $\lambda = -\left(\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right)$

Fungsi eigen

$$f_m(x) = c_m \cos\frac{m\pi x}{L},\ \ f_n(y) = c_n \sin\frac{n\pi y}{W},\ \text{dan}\ h(t) = b_{mn} e^{-(\frac{n^2}{W^2}+\frac{m^2}{L^2})\pi^2 \beta t}$$

Dimana m=0,1,2.. dan n=1,2,3,...

dan mempunyai solusi persamaan diferensial sebagai berikut

$$u_{mn}(x,y,t) = a_{mn} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2}+\frac{n^2}{W^2}\right)\beta\pi^2 t} Cos(\frac{m\pi x}{L}) Sin(\frac{n\pi y}{W})$$

$$u\ (x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2}+\frac{n^2}{W^2}\right)\beta\pi^2 t} Cos(\frac{m\pi x}{L}) Sin(\frac{n\pi y}{W})$$

dan anggap t=0, maka diperoleh deret Fourier ganda;

$$u\ (x,y,t) = f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} Cos(\frac{m\pi x}{L}) Sin(\frac{n\pi y}{W})$$

dengan koefisien Fourier

$$a_{0.n} = \frac{2}{LW}\int_0^L\int_0^W f(x,y) Sin\frac{n\pi y}{W}\,dydx \qquad n=1,2,3,...$$

$$a_{m.n} = \frac{4}{LW}\int_0^L\int_0^W f(x,y) Cos\frac{m\pi x}{L} Sin\frac{n\pi y}{W}\,dxdy \qquad m=0,1,2..\ \text{dan}\ n=1,2,3,...$$

Maka solusi persamaan diferensial parsial linier orde dua dalam bentuk persamaan parabola adalah berupa deret Fourier beserta koefisien-koefisien Fouriernya.

B. Saran

Berdasarkan pembahasan penulis menyarankan:

1. Aplikasi nilai eigen untuk menentukan solusi persamaan diferensial parsial belum dilengkapi dengan program komputer. Untuk peneliti selanjutnya diharapkan dapat mengerjakan dengan program komputer.
2. Dan untuk lebih banyak menambah hasanah ilmu matematika dalam persamaan diferensial parsial menggunakan nilai eigen peneliti selanjutnya dapat menerapkannya dalam persamaan diferensial parsial linier orde dua dalam bentuk yang lain seperti bentuk persamaan hiperbola dan persamaan elips.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*, UIN Press: Malang.

Anton, Howard. 1987. *Elementary Linier Algebra*. Terjemahan Pantur Silaban ITB. Erlangga: Jakarta.

Ayres, Frank. 1981. *Theory and Problems of Differential Equations SI (Metric) Edition (Scaum Series)*. Terjemahan Lily Ratna UNAIR. Erlangga: Jakarta.

Baidawi, Jamal DKK. 1997. *Mukjizat Al-Qur'an dan As-Sunnah tentang IPTEK Jilid 2*. Gema Insani Press: Jakarta.

Departemen Agama RI. 2000. *Al-Qur'an dan Terjemahan.* CV Penerbit Diponegoro: Bandung..

Finzio, N dan Ladaz G. 1982. *Ordinary Diferential Equations, with Modern Applications*. Terjemahan Widiarti Santoso ITB. Erlangga: Jakarta.

Humi, Mayer dan Miler, B. William. 1991. *Boundary Value Problems and Partial Differential Equation.* Publishing Company: Boston.

Levine, Harold. 1997. *Partial Differential Equation.* International Press: American Mathematical Society.

Mardalis, 1990. *Metode Penelitian Suatu Pendekatan Proposal.* PT Melton Putra: Jakarta

Nagle, Kent R dan Saff, Edward B. 1996. *Fundamentals of differential equations and boundary value problems*. University of South Florida.

Purcell, Edwin J. 1987. *Calculus with Analytic Geometry, 5th Edition*. Terjemahan Drs. I Nyoman Susila ITB. Erlangga: Jakarta.

Spiegel, Murray R. 1969. *Laplace Transform (Scaum Series).* Terjemahan Pantur Silaban dan Hans Hospakrik ITB. Erlangga: Jakarta.

Spiegel, Murray R. 1983. *Advanced Mathematics for Engineers and Scientists,* Terjemahan Koko Martono ITB. Erlangga: Jakarta.

Sutrima. 2004. *Representasi Sprektal Dari Operator Strum-Liouville Berparameter*. Jurnal Jurusan Matematika: FMIPA UNS. MIPA Vol 14: 17.

Triatmidjo, Bambang, 2002. *Metode Numerik.* Beta offset: Yogyakarta.

DEPARTEMEN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana no:50 Malang 65144, Telp (0341) 551354

KARTU BIMBINGAN SKRIPSI

Nama : Nuzulia
NIM : 03510048
Jurusan : Matematika
Judul :Aplikasi Nilai Eigen untuk menentukan solusi persamaan diferensial parsial.

Pembimbing : I. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
II.Ahmad Barizi, M.A

NO	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan
1	16 Juli 2007	Proposal	
2	19 Juli 2007	Persetujuan Proposal	
3	21 Agustus 2007	Bab I dan Bab II	
4	25 Agustus 2007	Revisi Bab I dan Bab II	
5	23 September 2007	Bab III	
6	5 Oktober 2007	Revisi Bab III	
7	9 Desember 2007	Proposal Keagamaan	
8	17 Desember 2007	Kajian Keagamaan	
9	28 Desember 2007	Revisi Kajian Keagamaan	
10	8 Januari 2008	Revisi Bab III, IV dan Abstrak	
11	28 Januari 2008	ACC Keagamaan	
12	16 Februari 2008	ACC Keseluruhan	

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321